

**Mit *allen* Kindern von Anfang an rechnen**

**Entwicklung, Erprobung und Überarbeitung von Lernumgebungen  
auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens im frühen Arithmetikunterricht  
als ein Beispiel für Entwicklungsforschung**

Carina Gander

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades  
der Doktorin der Naturwissenschaftslehre  
der Fakultät für Mathematik und Informatik  
der Universität des Saarlandes

Saarbrücken, 2025

Tag des Kolloquiums: 31.07.2025

Dekan: Univ.-Prof. Dr. Roland Speicher

Prüfungsausschuss: Vorsitzender  
Prof. Dr. Michael Bildhauer

Berichterstattende  
Univ.-Prof. Dr. Melanie Platz  
Univ.-Prof. Dr. Thomas Barow  
Prof. Dr. Christiane Benz

Akademische Mitarbeiterin:  
Dr. Katharina Wilhelm

## Kurzfassung

Im Verlauf der Entwicklungsforschungsarbeit wurden binnendifferenzierende Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt, die den aktuellen mathematikdidaktischen Forschungsstand zur fachlichen Entwicklung von allen Lernenden und die Leitideen inklusiven Mathematikunterrichts berücksichtigen. So baut diese Konzeption auf der in neuerer Forschung erworbenen Erkenntnis auf, dass alle Kinder im Erstrechenunterricht davon profitieren, wenn *von Anfang an* ein Schwerpunkt auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des *Teile-Ganzes-Denkens* gelegt wird und im Verlauf des ersten Schuljahres darauf stützend Additionen und Subtraktionen erarbeitet werden.

Diese Entwicklungsforschungsarbeit schließt die im deutschsprachigen Raum existierende Forschungslücke, indem binnendifferenzierende Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht der ersten Schulwochen der ersten Schulstufe auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens entwickelt, erprobt und evaluiert wurden. In wiederholenden Zyklen aus Entwicklung, Erprobung und Überarbeitung, durchgeführt im ersten Zyklus in zwei Tiroler Volksschulklassen mit 45 Kindern und im zweiten Zyklus in fünf Tiroler Volksschulklassen mit 94 Kindern, wurden die Lernumgebungen an die besonderen Anforderungen der Praxis angepasst.

Welche Lernprozesse und stofflichen Hürden bei den Schüler\*innen bei der Erprobung der Lernumgebungen am Beginn ihres ersten Schuljahres festgemacht werden konnten und welche fachlichen Schwierigkeiten bei den Lehrkräften als Lernbegleitung auftraten, wurde durch die im Rahmen der qualitativen Videoanalyse entwickelten Kategorien aufgedeckt und mit Hilfe der qualitativen multiplen Fallstudie umfassend beleuchtet und dargestellt.

Die Arbeit liefert Vorschläge für praxistaugliche binnendifferenzierende Lernumgebungen für diese frühe Phase des Mathematiklernens, die im Sinne des aktuellen Inklusionsverständnisses ein gemeinsames Lernen am selben Gegenstand sowie individuelle Förderung der Schüler\*innen ermöglichen. Aus den qualitativen Ergebnissen werden Konsequenzen für die Gestaltung des arithmetischen Erstunterrichts und für die Aus-, Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften abgeleitet.

## **Abstract**

In this design-based research, teaching-learning situations for inclusive early arithmetic teaching were developed, taking into account the current state of mathematical-didactic research on the subject-specific development of all learners and the guiding ideas of inclusive mathematics teaching. This concept is based on the knowledge gained in recent research that all children in early mathematics lessons benefit from focusing on the development, differentiation and consolidation of part-whole thinking right from the start, and that addition and subtraction are developed thereafter in the course of the first school year.

This thesis closes the existing research gap in the German-speaking countries by developing, testing and evaluating a concept for inclusive arithmetic lessons in the first weeks of the first school year on the basis of part-whole thinking. In repeated loops of testing and revision, carried out in the alpha implementation in two Tyrolean primary school classes with 45 children and in the implementation in five Tyrolean primary school classes with 94 children, the learning environments were adapted to the special requirements of practice.

The categories developed within the framework of the qualitative video analysis revealed which learning processes and material stumbling blocks could be identified with the children during the testing of the substantial learning environments at the beginning of their first school year and which professional difficulties were encountered by the teachers as learning guides.

The project provides suggestions for practical teaching-learning situations in this early phase of mathematics learning, which, in the sense of the current understanding of inclusion, enable joint learning on the same subject as well as individual support for the children. The qualitative results have an impact on the design of initial arithmetic lessons and the education, further training and in-service training of teachers.

## Danksagung

Zu Beginn dieser Arbeit ist Dank zu sagen an alle Wegbegleiter\*innen, die mich auf diesem Weg meines Lebens ein Stück weit begleitet haben. Er gilt zuerst meinem Partner David. Er musste unzählige Stunden auf mich verzichten.

Mein Dank von ganzem Herzen ergeht an meine Erstbetreuerin, Frau Univ.-Prof. Dr. Melanie Platz (Universität des Saarlandes), die mir in einer schwierigen Phase der Dissertation zutiefst menschlich und auch fachlich zur Seite stand. Durch ihre zahlreichen Rückmeldungen und Anregungen gab sie mir wichtige Denkanstöße für diese Dissertation. Ohne sie wäre eine Finalisierung kaum denkbar gewesen. Ich danke meinem Zweitbetreuer, Herrn Univ.-Prof. Dr. Thomas Barow für die einmalige Gelegenheit und Unterstützung, das skandinavische Schulsystem in zentralen Zügen kennengelernt zu haben und für den fachlich-kritischen Austausch in Richtung einer Schulbildung für alle.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Michael Gaidoschik, der viel zum Entstehen dieser Dissertation beigetragen hat und für die zahlreichen konstruktiven Anmerkungen in der Entstehungsphase dieser Dissertation. Als ich zum allerersten Mal in der Fachliteratur über diesen Namen „stolperte“ und mich mit seinen Werken und Auffassungen zum Mathematikunterricht ausnahmslos identifizieren konnte, hatte ich bereits zu dieser Zeit den Entschluss getroffen, auf Basis dieses Grundlagenwissens anschlussfähig die Dissertation zu verfassen – irgendwann, sofern die Zeit dafür „reif“ sei. Dass dieses Unterfangen an der Freien Universität Bozen zumindest temporär gescheitert ist, ist rückblickend meine bisher größte Lernerfahrung.

Abschließend danke ich all denen, die bereitwillig an den unterschiedlichen Zeitpunkten und Zeiträumen dieses Entwicklungsforschungsprozesses teilnahmen: den Lehrkräften, die mir im Rahmen qualitativer Interviews Einblicke in ihre Unterrichtsarbeit gewährten; den Schulleitungen, die mich ausnahmslos unterstützten und mir auch organisatorisch viel Arbeit abnahmen; den studentischen Hilfskräften, die mir in der zweiten Phase der Durchführung der Lernumgebungen in den Klassen behilflich waren; den Erziehungsberechtigten, die mir das Vertrauen schenkten, ihre Kinder in Unterricht zu begleiten und in besonderem Maße natürlich allen Kindern, die mich durch ihre mathematischen Entdeckungen zum Staunen brachten. Durch dieses Staunen über die Begeisterung für das Fach und über ihre beeindruckenden Entdeckungen bin auch ich demütig gewachsen.

Lienz, im Oktober 2025

Carina Gander

# Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                       |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Kurzfassung.....                                                                                                                      | i    |
| Abstract .....                                                                                                                        | ii   |
| Danksagung .....                                                                                                                      | iii  |
| Abbildungsverzeichnis .....                                                                                                           | viii |
| Tabellenverzeichnis .....                                                                                                             | ix   |
| Abkürzungsverzeichnis.....                                                                                                            | xiii |
| 1        Problemstellung und Aufbau der Arbeit .....                                                                                  | 1    |
| I        Inhaltliche Anknüpfungspunkte .....                                                                                          | 6    |
| 2        Teile-Ganzes-Denken im inklusiven Anfangsunterricht .....                                                                    | 6    |
| 2.1      Zur Bedeutung früher mathematischen Bildung .....                                                                            | 7    |
| 2.1.1    Grundsätzliche Überlegungen zu fachlich sinnvollen Lernangeboten .....                                                       | 10   |
| 2.1.2    Aufgreifen der Vorkenntnisse im Übergang von elementaren<br>Bildungseinrichtungen in die Grundschule .....                   | 16   |
| 2.2      Inhaltliche Überlegungen für den arithmetischen Anfangsunterricht .....                                                      | 18   |
| 2.2.1    Vom Lernen der Zahlwortreihe hin zum sicheren Verständnis von Zahlen als<br>Anzahlen .....                                   | 18   |
| 2.2.2    Anzahlvergleiche.....                                                                                                        | 25   |
| 2.2.3    Strukturierte, nicht-zählende Anzahlwahrnehmung und -erfassung .....                                                         | 29   |
| 2.2.3.1   Teile-Ganzes-Denken .....                                                                                                   | 39   |
| 2.2.3.2   Die Entwicklung des Teile-Ganzes-Schema nach Resnick .....                                                                  | 41   |
| 2.2.3.3   Die Bedeutung des Teile-Ganzes-Denkens als Grundlage für ein tragfähiges<br>Zahlverständnis „additiver Grundaufgaben“ ..... | 50   |
| 2.2.3.4   Frühe Förderung des Teile-Ganzes-Denkens in elementaren<br>Bildungseinrichtungen .....                                      | 57   |
| 2.2.3.5   Die Bedeutung des Teile-Ganzes-Denkens in den Lehrplänen und im<br>arithmetischen Anfangsunterricht .....                   | 60   |

|         |                                                                                                               |     |
|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.2.3.6 | Teile-Ganzes-Denken als Leitidee für den arithmetischen Anfangsunterricht..                                   | 61  |
| 3       | Gemeinsames Lernen im arithmetischen Anfangsunterricht .....                                                  | 66  |
| 3.1     | Didaktische Überlegungen für einen inklusiven Unterricht .....                                                | 67  |
| 3.1.1   | Konzeptionen inklusiven Unterrichts.....                                                                      | 68  |
| 3.1.2   | Kriterien zur Analyse von Konzeptionen inklusiven Unterrichts.....                                            | 69  |
| 3.2     | Fachdidaktische Empfehlungen für einen inklusiven Mathematikunterricht .                                      | 74  |
| 3.2.1   | Die Bedeutung von substantiellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule .....            | 78  |
| 3.2.2   | Leitideen inklusiven Mathematikunterrichts .....                                                              | 83  |
| 3.3     | Zur Bedeutung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften.....                                              | 101 |
| 3.3.1   | Modell zur Erfassung und Beschreibung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften .....                       | 101 |
| 3.3.2   | Zur Rolle einer fachlich fundierten Aus-, Fort- und Weiterbildung .....                                       | 112 |
| 4       | Inklusive Bildung und inklusiver Unterricht .....                                                             | 115 |
| 4.1     | Terminologische Fragen um Inklusion in der internationalen Fachdebatte .....                                  | 115 |
| 4.1.1   | Internationale Vereinbarungen über inklusive Bildung und inklusiven Unterricht .....                          | 120 |
| 4.1.2   | Umsetzung inklusiver Beschulung in Österreich.....                                                            | 123 |
| 4.1.3   | Zur Wirksamkeit inklusiver Beschulung und der Vereinbarkeit mit einer leistungsorientierten Gesellschaft..... | 130 |
| II      | Methodische Anknüpfungspunkte.....                                                                            | 136 |
| 5       | Überblick über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt .....                                                  | 136 |
| 5.1     | Zielsetzung.....                                                                                              | 136 |
| 5.2     | Forschungsfragen .....                                                                                        | 137 |
| 5.3     | Methodologischer Rahmen .....                                                                                 | 139 |
| 5.3.1   | Designbasierter Forschungsansatz .....                                                                        | 140 |
| 5.3.2   | Qualitative <i>multiple case study</i> .....                                                                  | 147 |

|         |                                                                                                              |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.3.3   | Prinzipien qualitativer Forschung .....                                                                      | 148 |
| 5.3.4   | Konstruktivistische und interaktionistische Perspektive auf das Lernen .....                                 | 152 |
| 6       | Überblick über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt .....                                                 | 157 |
| 6.1     | Konzeption TIGER .....                                                                                       | 157 |
| 6.2     | Mit <i>allen</i> Kindern von Anfang an rechnen .....                                                         | 158 |
| 7       | Erste Erprobung im Unterricht .....                                                                          | 188 |
| 7.1     | Fragestellungen .....                                                                                        | 188 |
| 7.2     | Durchführung .....                                                                                           | 190 |
| 7.3     | Datenaufbereitung und Datenauswertung .....                                                                  | 192 |
| 7.4     | Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews .....                                                           | 198 |
| 7.4.1   | Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews vor der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer .....  | 198 |
| 7.4.2   | Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews nach der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer ..... | 201 |
| 8       | Überarbeitung der Unterrichtsbausteine .....                                                                 | 209 |
| 9       | Zweite Erprobung im Unterricht .....                                                                         | 247 |
| 9.1     | Fragestellungen .....                                                                                        | 247 |
| 9.2     | Durchführung .....                                                                                           | 251 |
| 9.3     | Datenaufbereitung und Datenauswertung .....                                                                  | 260 |
| 9.4     | Ergebnisse der zweiten Durchführung .....                                                                    | 275 |
| 9.4.1   | Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel .....                                            | 276 |
| 9.4.1.1 | Kategorie Individueller Materialwechsel .....                                                                | 277 |
| 9.4.1.2 | Kategorie Halten und Führen der Hände und Finger .....                                                       | 293 |
| 9.4.1.3 | Kategorie Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel .....                                                      | 305 |
| 9.4.2   | Innermathematische Struktur .....                                                                            | 325 |
| 9.4.2.1 | Kategorie Zuordnung .....                                                                                    | 328 |
| 9.4.2.2 | Kategorie Anzahlerfassendes Zählen .....                                                                     | 341 |
| 9.4.2.3 | Kategorie Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen .....                                               | 348 |



|         |                                                                         |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.4.3   | Fachsprache der Mathematik .....                                        | 374 |
| 9.4.3.1 | Kategorie Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens .....                 | 376 |
| 9.4.3.2 | Kategorie Fachlich verständliche Arbeitsaufträge.....                   | 381 |
| 9.4.4   | Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse..... | 394 |
| 9.5     | Vorläufiger Abschluss des Entwicklungs- und Forschungsprojektes.....    | 399 |
| 10      | Rückschau auf den Forschungs- und Entwicklungsprozess.....              | 440 |
|         | Literaturverzeichnis .....                                              | 457 |

## Abbildungsverzeichnis

|                                                                                                                                                                                      |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Abbildung 1</b> <i>Aufbau der Arbeit</i> .....                                                                                                                                    | 5   |
| <b>Abbildung 2</b> <i>Mathematische Kompetenzbereiche</i> .....                                                                                                                      | 16  |
| <b>Abbildung 3</b> <i>Differenzverständnis auf Grundlage eines Eins-zu-Eins-Vergleiches</i> ....                                                                                     | 26  |
| <b>Abbildung 4</b> <i>Zahlvorstellungen</i> .....                                                                                                                                    | 28  |
| <b>Abbildung 5</b> <i>Mentaler Zahlenstrahl</i> .....                                                                                                                                | 43  |
| <b>Abbildung 6</b> <i>Unzureichendes Zahlverständnis</i> .....                                                                                                                       | 51  |
| <b>Abbildung 7</b> <i>Unzureichendes Zahlverständnis bei sieben weniger fünf</i> .....                                                                                               | 52  |
| <b>Abbildung 8</b> <i>Professionelle Handlungskompetenz von Lehrkräften</i> .....                                                                                                    | 103 |
| <b>Abbildung 9</b> <i>Horizontale und vertikale Dimensionen von Inklusion</i> .....                                                                                                  | 119 |
| <b>Abbildung 10</b> <i>Aufbau des österreichischen Bildungssystems in vereinfachter Darstellung in Anlehnung an die Internationale Standardklassifikation im Bildungswesen</i> ..... | 125 |
| <b>Abbildung 11</b> <i>Überblick über den Forschungs- und Entwicklungsprozess mit der ersten und zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine</i> .....                             | 156 |
| <b>Abbildung 12</b> <i>Projektübersicht Konzeption TIGER</i> .....                                                                                                                   | 158 |
| <b>Abbildung 13</b> <i>Ablaufmodell der Qualitativen Inhaltsanalyse</i> .....                                                                                                        | 196 |
| <b>Abbildung 14</b> <i>Die drei wesentlichen Bausteine</i> .....                                                                                                                     | 212 |
| <b>Abbildung 15</b> <i>Wippe</i> .....                                                                                                                                               | 213 |
| <b>Abbildung 16</b> <i>Weggabellung</i> .....                                                                                                                                        | 213 |
| <b>Abbildung 17</b> <i>Tafelbild: Fünferbündelung</i> .....                                                                                                                          | 216 |
| <b>Abbildung 18</b> <i>Tafelbild: Buben und Mädchen an der Tafel</i> .....                                                                                                           | 216 |
| <b>Abbildung 19</b> <i>Wendeplättchen in Fünferbündelung</i> .....                                                                                                                   | 218 |
| <b>Abbildung 20</b> <i>Zählschachteln mit unterschiedlichen Gegenständen</i> .....                                                                                                   | 220 |
| <b>Abbildung 21</b> <i>Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten</i> .....                                                                                             | 227 |
| <b>Abbildung 22</b> <i>Übung: Eins-zu-Eins-Zuordnung mit Plättchen</i> .....                                                                                                         | 230 |
| <b>Abbildung 23</b> <i>Ablaufmodell der Qualitativen Inhaltsanalyse</i> .....                                                                                                        | 262 |
| <b>Abbildung 24</b> <i>Ablaufmodell der inhaltlichen Strukturierung</i> .....                                                                                                        | 265 |
| <b>Abbildung 25</b> <i>Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten</i> .....                                                                                             | 282 |
| <b>Abbildung 26</b> <i>Gestaltungsprinzipien für die einzelnen Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens</i> .....                                                     | 439 |

## **Tabellenverzeichnis**

|                   |                                                                                           |     |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabelle 1</b>  | <i>Lösungsprozesse bei Anzahlwahrnehmung und Anzahlbestimmung</i>                         | 32  |
| <b>Tabelle 2</b>  | <i>Entwicklung des Teile-Ganzes-Denkens</i>                                               | 56  |
| <b>Tabelle 3</b>  | <i>Die fünf Hürden des Anfangsunterrichts</i>                                             | 62  |
| <b>Tabelle 4</b>  | <i>Übersicht über Eingangs-Standortbestimmung</i>                                         | 160 |
| <b>Tabelle 5</b>  | <i>Übersicht über die einzelnen Unterrichtsbausteine</i>                                  | 163 |
| <b>Tabelle 6</b>  | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein I</i>                            | 166 |
| <b>Tabelle 7</b>  | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein II</i>                           | 167 |
| <b>Tabelle 8</b>  | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein III</i>                          | 169 |
| <b>Tabelle 9</b>  | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein IV</i>                           | 171 |
| <b>Tabelle 10</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein V</i>                            | 172 |
| <b>Tabelle 11</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VI</i>                           | 174 |
| <b>Tabelle 12</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VII</i>                          | 176 |
| <b>Tabelle 13</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VIII</i>                         | 178 |
| <b>Tabelle 14</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein IX</i>                           | 179 |
| <b>Tabelle 15</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein X</i>                            | 181 |
| <b>Tabelle 16</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XI</i>                           | 182 |
| <b>Tabelle 17</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XII</i>                          | 184 |
| <b>Tabelle 18</b> | <i>Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XIII</i>                         | 186 |
| <b>Tabelle 19</b> | <i>Gesprächsleitfaden vor Beginn der Durchführung</i>                                     | 193 |
| <b>Tabelle 20</b> | <i>Gesprächsleitfaden nach Beginn der Durchführung</i>                                    | 195 |
| <b>Tabelle 21</b> | <i>Übersicht über die einzelnen Unterrichtsbausteine</i>                                  | 210 |
| <b>Tabelle 22</b> | <i>Rahmenbedingungen in den einzelnen Kooperationsklassen</i>                             | 254 |
| <b>Tabelle 23</b> | <i>Rahmenbedingungen der einzelnen Kooperationsschulen</i>                                | 259 |
| <b>Tabelle 24</b> | <i>Präzisierung zu Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel</i>        | 266 |
| <b>Tabelle 25</b> | <i>Präzisierung zu Innermathematischer Struktur</i>                                       | 267 |
| <b>Tabelle 26</b> | <i>Präzisierung zu Fachsprache Mathematik</i>                                             | 268 |
| <b>Tabelle 27</b> | <i>Präzisierung zu Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> | 268 |
| <b>Tabelle 28</b> | <i>Dimensionen zur Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität</i>                 | 274 |
| <b>Tabelle 29</b> | <i>Häufigkeit von Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel</i>         | 277 |
| <b>Tabelle 30</b> | <i>Häufigkeit Individueller Materialwechsel</i>                                           | 278 |
| <b>Tabelle 31</b> | <i>Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen</i>                        | 279 |

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabelle 32</b> Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen .....                                               | 279 |
| <b>Tabelle 33</b> Chiara und Felix .....                                                                                          | 282 |
| <b>Tabelle 34</b> Einschätzung pädagogischer fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen von Steinweg .....   | 286 |
| <b>Tabelle 35</b> Luis und Felix .....                                                                                            | 288 |
| <b>Tabelle 36</b> Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen von Steinweg .....     | 291 |
| <b>Tabelle 37</b> Häufigkeit von Halten und Führen der Hände und Finger .....                                                     | 293 |
| <b>Tabelle 38</b> Baustein IV – Zahlen mit Fingern darstellen .....                                                               | 294 |
| <b>Tabelle 39</b> Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit Zählen .....                                               | 295 |
| <b>Tabelle 40</b> Arbeit im Klassenverband .....                                                                                  | 296 |
| <b>Tabelle 41</b> Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein IV anhand der Dimensionen von Steinweg .....    | 303 |
| <b>Tabelle 42</b> Häufigkeit von Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel .....                                                    | 306 |
| <b>Tabelle 43</b> Baustein VIII – Beliebige Anzahlen strukturiert legen .....                                                     | 306 |
| <b>Tabelle 44</b> Baustein VIII – Beliebige Anzahlen strukturiert legen .....                                                     | 307 |
| <b>Tabelle 45</b> Anna .....                                                                                                      | 311 |
| <b>Tabelle 46</b> Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VIII anhand der Dimensionen von Steinweg .....        | 312 |
| <b>Tabelle 47</b> Anna .....                                                                                                      | 313 |
| <b>Tabelle 48</b> Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VIII nach den Dimensionen von Steinweg .....          | 317 |
| <b>Tabelle 49</b> Julia .....                                                                                                     | 318 |
| <b>Tabelle 50</b> Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen nach Steinweg .....  | 320 |
| <b>Tabelle 51</b> Luis .....                                                                                                      | 321 |
| <b>Tabelle 52</b> Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VIII anhand der Dimensionen nach Steinweg ..... | 324 |
| <b>Tabelle 53</b> Häufigkeit Innermathematischer Struktur .....                                                                   | 327 |
| <b>Tabelle 54</b> Häufigkeit von Zuordnung .....                                                                                  | 328 |
| <b>Tabelle 55</b> Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen .....                                               | 329 |
| <b>Tabelle 56</b> Baustein VI – Plättchen werfen .....                                                                            | 329 |
| <b>Tabelle 57</b> Chiara und Felix .....                                                                                          | 331 |
| <b>Tabelle 58</b> Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen nach Steinweg .....    | 333 |

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabelle 59</b> <i>Rosa und Anna</i> .....                                                                                           | 334 |
| <b>Tabelle 60</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VI anhand der Dimensionen nach Steinweg</i> ..... | 337 |
| <b>Tabelle 61</b> <i>Jonathan und Sandro</i> .....                                                                                     | 338 |
| <b>Tabelle 62</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VI anhand der Dimensionen nach Steinweg</i> ..... | 340 |
| <b>Tabelle 63</b> <i>Häufigkeit von Anzahlerfassendes Zählen</i> .....                                                                 | 342 |
| <b>Tabelle 64</b> <i>Baustein II – Resultatives Zählen</i> .....                                                                       | 342 |
| <b>Tabelle 65</b> <i>Maria und Ilke</i> .....                                                                                          | 345 |
| <b>Tabelle 66</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein II anhand der Dimensionen nach Steinweg</i> ..... | 347 |
| <b>Tabelle 67</b> <i>Häufigkeit von Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i> .....                                           | 349 |
| <b>Tabelle 68</b> <i>Baustein VIII – Schnelles Sehen</i> .....                                                                         | 349 |
| <b>Tabelle 69</b> <i>Baustein IV – Zahlen und Finger</i> .....                                                                         | 350 |
| <b>Tabelle 70</b> <i>Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger</i> .....                                               | 351 |
| <b>Tabelle 71</b> <i>Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger</i> .....                                               | 351 |
| <b>Tabelle 72</b> <i>Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger</i> .....                                               | 352 |
| <b>Tabelle 73</b> <i>Baustein XII – Finger-Schnipp-Schnapp</i> .....                                                                   | 353 |
| <b>Tabelle 74</b> <i>Julia und Anna</i> .....                                                                                          | 355 |
| <b>Tabelle 75</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg</i> .....       | 358 |
| <b>Tabelle 76</b> <i>Rosa und Anna</i> .....                                                                                           | 360 |
| <b>Tabelle 77</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg</i> .....       | 362 |
| <b>Tabelle 78</b> <i>Rosa und Anna</i> .....                                                                                           | 364 |
| <b>Tabelle 79</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg</i> .....       | 366 |
| <b>Tabelle 80</b> <i>Max und Luis</i> .....                                                                                            | 367 |
| <b>Tabelle 81</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg</i> .....       | 370 |
| <b>Tabelle 82</b> <i>Anna und Rosa</i> .....                                                                                           | 371 |
| <b>Tabelle 83</b> <i>Max und Luis</i> .....                                                                                            | 372 |
| <b>Tabelle 84</b> <i>Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg</i> .....       | 373 |
| <b>Tabelle 85</b> <i>Häufigkeit von Fachsprache der Mathematik</i> .....                                                               | 376 |

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabelle 86</b> Häufigkeit von Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens .....                                             | 377 |
| <b>Tabelle 87</b> Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte ersetzen .....                                        | 378 |
| <b>Tabelle 88</b> Baustein VIII – Schnelles Sehen .....                                                                    | 380 |
| <b>Tabelle 89</b> Häufigkeit von fachlich verständliche Arbeitsaufträge.....                                               | 382 |
| <b>Tabelle 90</b> Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellung am Zehnerfeld .....                                        | 383 |
| <b>Tabelle 91</b> Klassengespräch (Zahldarstellung am Zehnerfeld) .....                                                    | 386 |
| <b>Tabelle 92</b> Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein XIII anhand der Dimensionen von Steinweg ..... | 389 |
| <b>Tabelle 93</b> Maria und Chiara.....                                                                                    | 391 |
| <b>Tabelle 94</b> Häufigkeit von Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse .....                  | 395 |
| <b>Tabelle 95</b> Häufigkeiten und Prozente von Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel.....           | 401 |
| <b>Tabelle 96</b> Häufigkeiten und Prozente von Innermathematischer Struktur.....                                          | 402 |
| <b>Tabelle 97</b> Häufigkeiten und Prozente von Fachsprache Mathematik.....                                                | 404 |
| <b>Tabelle 98</b> Häufigkeit und Prozente von Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse .....     | 405 |
| <b>Tabelle 99</b> Häufigkeiten und Prozente getrennt für die Unterrichtsbausteine.....                                     | 407 |
| <b>Tabelle 100</b> Übersicht über die finalisierten Bausteine.....                                                         | 436 |

## Abkürzungsverzeichnis

|            |                                                    |
|------------|----------------------------------------------------|
| BMBF       | Bundesministerium für Bildung und Forschung        |
| C.G.       | Carina Gander                                      |
| bspw.      | beispielsweise                                     |
| bzw.       | beziehungsweise                                    |
| ca.        | circa                                              |
| d. h.      | das heißt                                          |
| E-I-S      | enaktiv – ikonisch – symbolisch                    |
| et al.     | et alii                                            |
| etc.       | et cetera                                          |
| f.         | folgende                                           |
| ff.        | fortfolgende                                       |
| ggf.       | gegebenenfalls                                     |
| Hrsg.      | Herausgeber                                        |
| I          | Interviewerin                                      |
| M.G.       | Michael Gaidoschik                                 |
| o. J.      | ohne Jahr                                          |
| PISA       | Programme for International Student Assessment     |
| s.         | siehe                                              |
| S.         | Seite                                              |
| S1, S2 ... | Schüler 1/ Schülerin 1, Schüler 2/ Schülerin 2 ... |
| sog.       | sogenannt                                          |
| TGD        | Teile-Ganzes-Denken                                |
| u. a.      | unter anderem                                      |
| z. B.      | zum Beispiel                                       |

## 1 Problemstellung und Aufbau der Arbeit

Die Erwachsenen müssten dieselbe Nachsicht und dieselbe Bewunderung, mit der sie die Sprachentwicklung von Kindern gewöhnlich begleiten, auch für die Entwicklung des mathematischen Denkens aufbringen. ... Die erste unbeholfenen Versuche des Kleinkindes, „Papa“ und „Mama“ auszusprechen, werden jubelnd begrüßt, als wenn sich darin eine vielversprechende Rednerbegabung ausdrückte. Die ersten Versuche des kleinen Zahlenrechner dagegen, der überlegt, ob „6 plus 5“ das Ergebnis 13, 8, 7 oder 10 haben könnte und nicht zielgerichtet auf die 11 zusteuert, wecken bei Erwachsenen oft ganz und gar nicht die Vision auf einen späteren Nobelpreisträger und werden keineswegs mit Sympathie verfolgt. Im Gegenteil, das Kind erntet mehr oder weniger leisen Tadel, weil es angeblich unaufmerksam ist oder sich dumm anstellt.

*Augustus de Morgan, englischer Mathematiker, 1833  
zitiert in Wittmann & Müller, 1994, S. 25f.*

Motivation für die Entstehung der vorliegenden Arbeit war meine höchst persönliche Begeisterung für den Mathematikunterricht, und hier im Speziellen für den Erststufenunterricht in Grundschulen. In meinem Erstberuf als Grundschullehrerin war ich tagtäglich begeistert und fasziniert von den unterschiedlichsten Rechenwegen und -strategien der Kinder in unserer Klasse. Mit welcher Neugierde und innerem Antrieb bereits sehr junge Kinder die numerischen Aktivitäten bearbeiteten, ermutigten mich und spornten mich an, mich tiefer mit der Thematik des Anfangsunterrichts auseinanderzusetzen.

In der Fachliteratur „stolperte“ ich dabei mehrfach über die Thematik des Teile-Ganzes-Denkens (TGD) in dieser frühen Phase des Mathematiklernens und versuchte einen logischen Bogen, *aus dem Fach heraus*, zu meiner Dissertation zu spannen. Ein wichtiges Ziel für das Ende der Schuleingangsphase ist es demnach, dass Kinder Einsicht in grundlegende Zahlbeziehungen im Sinne des *Teile-Ganzes-Denkens* erhalten und damit eine wesentliche Voraussetzung für *nicht-zählendes Rechnen* erworben haben. Für den arithmetischen Anfangsunterricht heißt das, „dass eine Beschäftigung mit und das Erkunden von Strukturen und Zusammenhängen zwischen Zahlen und damit verbunden Zusammenhängen zwischen Operationen *von Beginn an* notwendig ist“ (Gaidoschik, 2007, zitiert nach DZLM, 2024).



Mit dieser Arbeit versuche ich *eine Quadratur des Kreises*: Sollten Lehrkräfte über diese Dissertation „stolpern“, würde ich mich sehr freuen, wenn die hier vorgestellten binnendifferenzierenden Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens in Unterricht und Förderung selbst ausprobiert werden würden. Bezogen auf die jeweilige Unterrichtssituation sollen Lehrkräfte entscheiden und, wie in diesem Dissertationsprojekt dargestellt am geeignetsten im Zuge einer fachlichen Begleitung, *sensibilisiert* werden, wann es sinnvoll ist innerhalb desselben Rahmens mit der ganzen Klasse zu arbeiten, und wann es lohnt, Teilziele mit einzelnen Kindern in der Förderung und zusätzlich zur Arbeit im Klassenverbandes zu verfolgen.

Die von Michael Gaidoschik (2019a, 2022) entwickelte Konzeption TIGER (**T**eile **I**m **G**anzen **E**rkennen und damit **R**echnen) hat als Zielsetzung den *Aufbau tragfähiger Zahlkonzepte im arithmetischen Anfangsunterricht in Mathematik*, beansprucht einen logischen Aufbau *aus dem Fach heraus zu verfolgen* und ist deswegen aus sachlogischen Gründen die inhaltliche Grundlage für die im Verlauf dieser Arbeit entstandenen binnendifferenzierenden Lernumgebungen.

Um binnendifferenzierende Lernumgebungen für den frühen Arithmetikunterricht entwickeln, erproben und weiterentwickeln zu können, so das Ziel dieser Entwicklungsforschungsarbeit, war es zunächst notwendig, so genau als möglich zu *verstehen*, wie die arithmetische Entwicklung von Kindern bis zu diesem Zeitpunkt passiert und wie sich Kinder insbesondere mit dem Erkunden von Strukturen und Zusammenhängen zwischen Zahlen beschäftigen, wie diese kindlichen Verstehensprozesse unter welchen Bedingungen genutzt und weiterentwickelt werden können, und welche Rolle dabei der Erstrechenunterricht spielt. Die aktuelle Literatur zu diesen Themen des Erstrechenunterrichts wird in Kapitel 2 in ihren wesentlichen Zügen dargestellt.

Auf Basis dieser inhaltlichen Klärungen werden in Kapitel 3 didaktisch-methodische Konzepte zum Mathematikunterricht beleuchtet. Kapitel 3 geht deshalb der Frage nach, wie Bedingungen für inklusive Bildung und inklusiven Mathematikunterricht aus (inklusions-)pädagogischer und aus fachdidaktischer Perspektive (weiter-)entwickelt werden können, so dass erwünschte Auswirkungen hervortreten. Ausgehend von didaktischen Überlegungen für einen inklusiven Unterricht werden unterschiedliche Konzeptionen inklusiven Unterrichts beschrieben und gegenübergestellt. Der pädagogische Impetus des

gemeinsamen Lernens im Mathematikunterricht war für die Autorin dieser Arbeit vor Beginn der Entstehung unumstritten und ist auch nach wie vor nach der Zusammenführung der einzelnen Kapitel dieser Arbeit zentral, weshalb der plakative Haupttitel der Arbeit „Mit *allen* Kindern von Anfang an rechnen“ gewählt wurde. Vor diesem Hintergrund wird die Heterogenität der Lernenden im Anfangsunterricht als Potenzial und Chance gesehen, um so die über- und weiterausgearbeiteten Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht den unterschiedlichen Lernständen der Lernenden anzupassen. Dementsprechend argumentiert die Autorin mit Prengel (2006) in eine ähnliche Richtung: „Wenn Inklusion gelingt und alle Lernenden beständig ermutigt werden, die Zone ihrer nächsten Entwicklung anzustreben, können die Nachteile des Etikettierens durch segregierende Strukturen nicht zum Tragen kommen“ (S. 40).

Daraus folgernd und wie in Kapitel 4 dieser Arbeit beschrieben, betrachtet es die Autorin dieser Arbeit als ein Geburtsrecht, dass jede Person in seiner Individualität als Resource wahrgenommen, angenommen und wertgeschätzt wird. Bezogen auf Bildung in Schule bedeutet Inklusion ein Ort des Miteinanders. Jedes Kind<sup>1</sup> ist ein anerkannter und wertvoller Teil der Schule. Darüber hinaus: Da dieses Entwicklungsforschungsprojekt in Österreich durchgeführt wurde, war es für die Autorin dieser Arbeit von Bedeutung, inklusive Bildung in Österreich zu thematisieren. Deswegen geht Kapitel 4 dieser Frage nach und schließt im Rahmen der inhaltlichen Anknüpfungspunkte mit der Implementierung und dem aktuellen Stand *empirischer Befunde* zur inklusiven Beschulung im (Mathematik-)Unterricht der Grundschule.

Ausgehend von der Einordnung in den in den Kapiteln 2 bis 4 ausführlich dargestellten inhaltlichen Stand der Forschung, leitet Kapitel 5 die Zielsetzung ab und konkretisiert sie in den übergeordneten Forschungsfragen. Kapitel 5 beschreibt den methodischen Rahmen der designbasierten Forschung mit den einzelnen Schritten, den Prinzipien qualitativer Forschung und mit der konstruktivistischen und der interaktionistischen Sicht auf das Lernen. Abbildung 11 visualisiert als Abschluss dieses Kapitels den gesamten Forschungs- und Entwicklungsprozess.

---

<sup>1</sup> In dieser Arbeit wird die männliche und weibliche Endung eines Wortes durch ein Sternchen (sog. Gendersternchen) getrennt: Student\*innen, Student\*in, Lektor\*in, Akademiker\*innen, Professor\*in. Wo möglich, werden geschlechterneutrale Formulierungen gewählt.

In Kapitel 6 wird die TIGER-Konzeption (Gaidoschik, 2019a, 2022) beschrieben, welche als inhaltliche Grundlage, für die im Verlauf dieser Dissertationsarbeit entstandenen bindendifferenzierenden Lernumgebungen galt. Im Anschluss erfolgt die Beschreibung der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens.

In Kapitel 7 wird die erste Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer dargestellt, welche als Ziel hatte, die *innere Stimmigkeit* und die praktische Umsetzbarkeit der Lernumgebungen zu überprüfen. Dazu wurden alle Unterrichtssequenzen von der jeweiligen Lehrkraft durchgeführt und von der Verfasserin dieser Arbeit videographiert begleitet, vor und nach der ersten Durchführung fand ein qualitatives Interview mit den im Projekt beteiligten Lehrkräften statt.

Aufbauend auf den Ergebnissen dieser teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften und deren Erfahrungen der Durchführungen der Lernumgebungen im Unterricht wurden die einzelnen Unterrichtsbausteine für den frühen Arithmetikunterricht über- und weitergearbeitet. Diese Anpassungen werden in Kapitel 8 beschrieben.

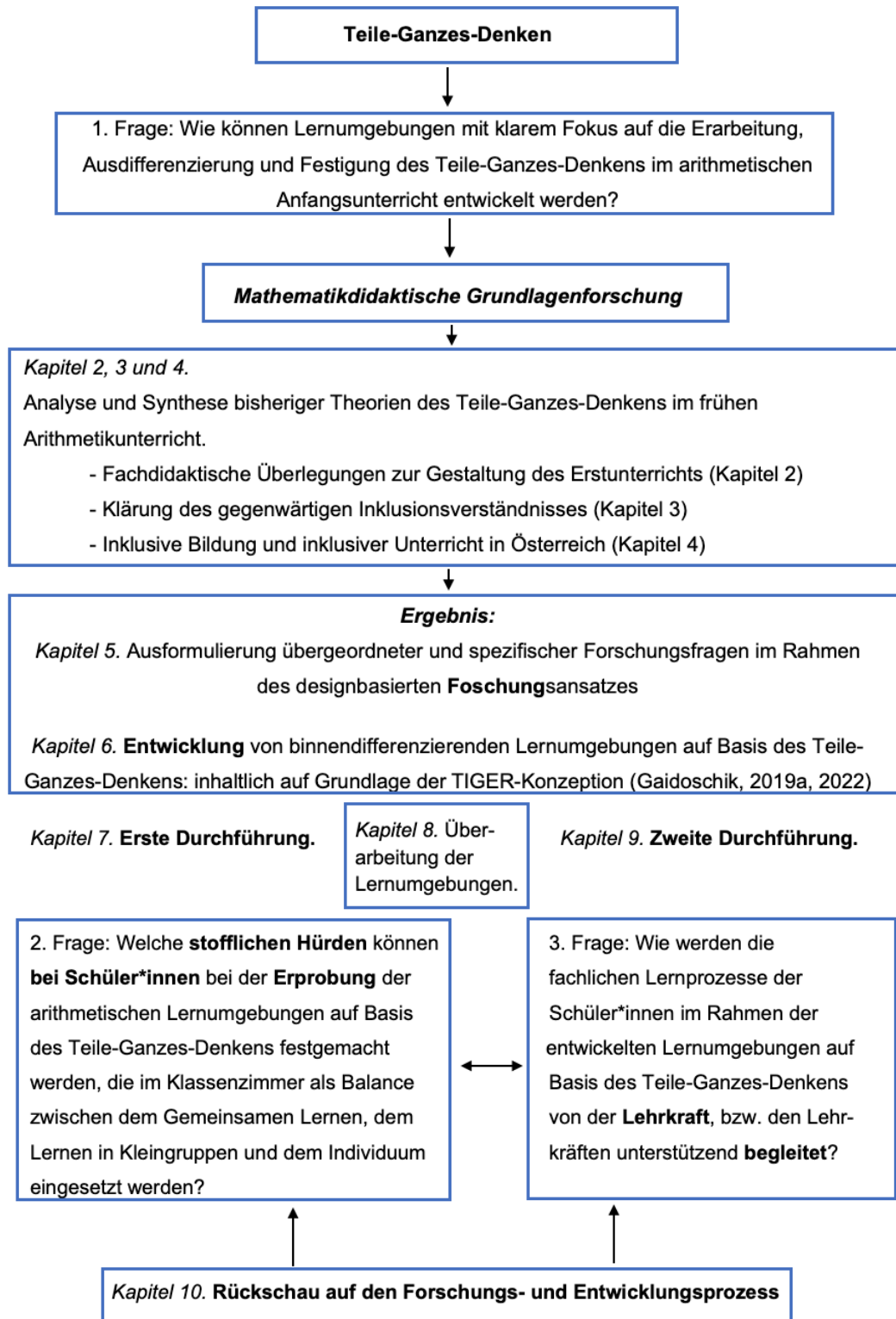
Die zweite Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer gilt als die zentrale Phase und ist für die *Weiterentwicklung* der Lernumgebungen wesentlich. Dazu wird in Kapitel 9 der Ablauf der zweiten Erprobung mit den Phasen der Datenerhebung, Datenaufbereitung und Datenauswertung beschrieben. Abschnitt 9.4 bringt die Ergebnisse der zweiten Erprobung im Unterricht. Daraus ableitend werden Gestaltungsprinzipien für die Unterrichtsbausteine generiert, welche in Abbildung 26 visualisiert sind.

Die gesamten Transkripte der vorliegenden Arbeit sind nicht im Anhang eingebettet, sondern können bei der Autorin dieser Arbeit zur Einsicht angefordert werden.

In Kapitel 10 erfolgt schließlich eine *Zusammenfassung* der gesamten Arbeit. Dazu werden die in Kapitel 5 angeführten fünf Forschungsfragen, in Kapitel 10 der Arbeit als Rückblick auf den Forschungs- und Entwicklungsprozess und im Sinne des Reflexivitätsprinzips qualitativer Forschung aufgegriffen und beantwortet.

**Abbildung 1**

*Aufbau der Arbeit (eigene Darstellung)*



## I Inhaltliche Anknüpfungspunkte

### 2 Teile-Ganzes-Denken im inklusiven Anfangsunterricht

*“Didaktische Anregungen, recht verstanden, sind niemals Rezepte mit Wirkungsgarantie, sondern eher Wahrscheinlichkeitsaussagen. Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen, das ist aber gewiss nicht wenig!”*  
Krauthausen, 2009, S. 114

Die Frage, wie Kinder (am besten) rechnen lernen, wird schon seit langer Zeit kontrovers diskutiert. Im Laufe der Jahrzehnte veränderten sich die Unterrichtsmethoden und -konzepte zum Rechenunterricht immer wieder. Heute stehen empirische Untersuchungen der Mathematikdidaktik jenen einiger Bezugsdisziplinen (vor allem jenen der Entwicklungs- und Neuropsychologie) gegenüber.

Innerhalb der Psychologie werden die kindlichen Grunderfahrungen meist anhand von Entwicklungsmodellen unter Bezugnahme auf „numerische Vorläuferfertigkeiten“ beschrieben. Diese gelten als Voraussetzung zum Rechnenlernen, die alle Kinder (am besten) mit Schuleintritt erworben haben sollten. Mit Blick auf den Schwerpunkt der Arbeit, nämlich auf das *Teile-Ganzes-Denken*, wird eine Vielzahl dieser Entwicklungsmodelle, theoretischen Grundlagen und empirischen Erkenntnissen nur am Rande in die vorliegende Arbeit einbezogen. Einen genaueren Überblick über das Mathematiklernen in der frühen Phase vor Schuleintritt liefert die mathematikdidaktische Fachliteratur (z.B. Benz et al., 2015; Hasemann & Gasteiger, 2014). Zur Frage der Gestaltung des Erstrechenunterrichts aus Sicht der Fachdidaktik hält Maier bereits in den 1990er Jahren fest, dass (vermutlich) in den letzten zwanzig bis dreißig Jahren zu keinem anderen Thema „mehr methodische Konzepte entwickelt worden [seien], als zum Aufbau des Zahlbegriffs im mathematischen Anfangsunterricht“ (S. 111). Es ist nicht die Intention dieses Kapitels, *alle* gegenwärtig veröffentlichten Unterrichtskonzeptionen zum mathematischen Anfangsunterricht von nationalen und internationalen Fachautor\*innen in aller Ausführlichkeit darzustellen.

Ziel dieses einführenden Kapitels ist es vielmehr, sich der eingangs dieses Kapitels formulierten Frage aus fachdidaktischer Perspektive zu widmen. Dazu werden grundlegende Überlegungen beschrieben, die innerhalb der (deutschsprachigen) Fachdidaktik in den letzten zwanzig bis dreißig Jahren eine breite Zustimmung gefunden haben. In

diesem Zusammenhang beginnt Abschnitt 2.1 mit der Bedeutung früher mathematischer Bildung vor der Schule. Grundsätzliche Überlegungen zu mathematisch sinnvollen Angeboten in dieser frühen Phase des Mathematiklernens werden in Abschnitt 2.1.1 beschrieben. Abschnitt 2.1.2 stellt darüber hinaus dar, dass Schulanfänger\*innen nicht als „mathematische tabulae rasae“ in die Schule eintreten. Vielmehr bringen alle Kinder zu Schulbeginn beachtliche mathematische Kenntnisse mit, wie empirische Untersuchungen in diesem Abschnitt ab den 1980er Jahren zeigen.

Abschnitt 2.2 widmet sich den Inhalten des arithmetischen Anfangsunterrichtes, die für das vorliegende (Dissertations-)Projekt von Bedeutung sind, um die Basis der theoretischen Klärung im empirischen Teil dieser Arbeit für die Strategieentwicklung der Kinder, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden, einordnen zu können.

Vor diesem Hintergrund wird in Abschnitt 2.2.1 auf das Zählen hin zu einem sicheren Verständnis von Anzahlen eingegangen. Abschnitt 2.2.2 stellt den Bereich Anzahlvergleiche dar. Dieses einführende Kapitel schließt in Abschnitt 2.2.3 mit der strukturierten, nicht-zählenden Anzahlerfassung und mit dem inhaltlichen Kernelement dieser Arbeit, dem Teile-Ganzes-Denken und seiner Bedeutung im arithmetischen Anfangsunterricht in der Grundschule.

## **2.1 Zur Bedeutung früher mathematischen Bildung**

*„Plane das Schwere, solange es leicht ist.*

*Tue das Große, solange es klein ist.*

*Die schwierigen Dinge der Welt beginnen stets im Leichten.*

*Die großen Dinge der Welt beginnen stets im Kleinen.“*

*Laotse, Tao-te-king, 63. Spruch*

Mathematische Bildung *vor* der Schule wurde im Laufe der Jahre unterschiedlich bedeutend wahrgenommen. Mittlerweile gibt es national wie international eine breite Zustimmung zur hohen Bedeutung mathematischen Lernens vor der Schulzeit (Benz et al., 2015; Clements & Sarama, 2009; Cross et al., 2009; Gasteiger, 2010; Hellmich, 2007; Kortenkamp et al., 2014; Steinweg, 2008; Wittmann, 2016). Empirische Untersuchungen zeigen, dass die in der Zeit vor Schuleintritt erworbenen mathematischen Grunderfahrungen (vermutlich) eine wesentlichere Wirkung auf die Leistungen in der Grundschule haben als andere Einflussfaktoren, wie beispielsweise die Intelligenz (Dornheim, 2008; Hengartner & Röthlisberger, 1995; Jordan et al., 2009). Vor allem seit der Veröffentlichung der ersten PISA-Ergebnisse aus dem Jahr 2000, wonach es einen Zusammen-

hang zwischen der Dauer des Kindergartenbesuches und der mathematischen Kompetenz von Jugendlichen im Alter von 15 Jahren zu geben scheint (Prenzel et al., 2004), wurden Bildungspläne (zumindest in den einzelnen Bundesländern in Deutschland) auch für das frühe *fachliche* Lernen im Elementarbereich ausgearbeitet.

Inzwischen beziehen laut Wittmann (2016) zwar alle Bildungspläne in Deutschland die frühkindliche Bildung ausdrücklich mit ein und benennen mathematische Kompetenzen, dennoch würden sich die Inhalte der einzelnen Bildungspläne im Elementarbereich doch voneinander unterscheiden (eine Übersicht dazu bietet auch Gasteiger, 2010). Vor diesem Hintergrund orientieren sich mehrere deutsche Rahmenpläne, wie beispielsweise jener von Mecklenburg-Vorpommern an den fundamentalen Ideen der Mathematik (siehe Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.1.1) und beschreiben konkrete Handlungsmöglichkeiten, Leitideen und -ziele für pädagogische Fachkräfte im Elementarbereich. Hingegen, der mathematische Bildungsbereich im „Bundesländerübergreifenden Bildungs-RahmenPlan für elementare Bildungseinrichtungen in Österreich“ beschränkt sich dabei auf wenige Sätze (BMBWF, 2009/2020). Darin heißt es:

Mathematisches Denken ist ein elementarer Baustein der kognitiven Entwicklung und bezieht sich u.a. auf das Erkennen und Beschreiben von wiederkehrenden Mustern und Strukturen, Regeln und Gesetzmäßigkeiten. Bereits junge Kinder sammeln vielfältige Lernerfahrungen mit Raum und Zeit, mit Formen und Größen sowie mit weiteren mathematischen Regelmäßigkeiten und Strukturen. In entwicklungsangemessenen Situationen, die Kindern Erfolgserlebnisse ermöglichen, wird ein positiver Zugang zur Mathematik unterstützt. Durch die lustvolle Auseinandersetzung mit mathematischen Phänomenen, die in alltäglichen Situationen stattfindet, erfahren Kinder Zusammenhänge mit allen Sinnen. Ihre Neugier in Bezug auf Mengen und Größen, geometrischen Formen und Zahlen fördert den Aufbau von grundlegenden mathematischen Denkweisen, Fähigkeiten und Fertigkeiten (Vorläuferfertigkeiten). Dazu gehören das Verständnis für Mengen und Mengenrelationen, die Zählfertigkeit sowie visuell-analytische und räumlich-konstruktive Fähigkeiten. (S. 25)

Aufbauend auf diesem bundesländerübergreifenden BildungsRahmenPlan wurden weitere Ausführungen für das letzte Jahr in elementaren Bildungseinrichtungen in Ös-

terreich ausgearbeitet, nämlich das „Modul für das letzte Jahr in elementaren Bildungseinrichtungen. Vertiefende Ausführungen zum bundesländerübergreifenden Bildungs-RahmenPlan“ (BMWFJ, 2010). In diesem Modul in der Fassung von 2010 wird Mathematik dem Bildungsbereich „Natur und Technik“ zugeordnet:

Mathematische Kompetenzen gehören zu den wichtigsten Kulturtechniken und bilden die Grundlage für Erkenntnisse in Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft. Mathematische Bildungsangebote ermöglichen Erfahrungen mit Formen, Größen, Gewichten, Mengen, Raum sowie Zeit und münden in das begriffliche Vorfeld der Mathematik ein. [...] Spiele mit mathematischen Inhalten, wie Spiele mit Formen, Mengen, Größen und Zahlen, Knobelaufgaben oder Rätsel wecken das Interesse für die weitere Auseinandersetzung mit Mathematik. (S. 41)

Vor diesem Hintergrund der Rahmenpläne der Länder, die in ihren konkreten Ausführungen und Empfehlungen unterschiedlich klar und stringent sind, hat die Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum in den letzten Jahren einige fundierte Konzepte für diese frühe Phase des Mathematiklernens entwickelt (Benz, 2010; Benz et al., 2015; Benz et al., 2017; Bönig et al., 2017; Hauser et al., 2015; Royar & Streit, 2010; Schuler et al., 2017; Wittmann, 2016). In diesem Zusammenhang sei es aus fachdidaktischer Perspektive laut Expertenmeinung bedeutend, mathematische Kompetenzen von Kindergartenkindern gerade in alltags- und (regel)spielbezogenen Situationen und/oder in Denkspielen zu fördern (Abschnitt 2.2.1) und – mit Blick auf die Kinder – eine individuelle Anpassung vorzunehmen (Gasteiger 2010; 2015; Schuler, 2013; van Oers, 2010). Diese individuelle Förderung sei dementsprechend eben dann nutzbringend, wenn (pädagogische) Fachkräfte die Lernenden entwicklungsangemessen begleiten (Benz et al., 2017; Gasteiger 2015; Klieme & Rakoczy, 2008; Klieme et al., 2006; Mackowiak et al., 2021; van Oers, 2013; Wullschleger, 2017, siehe dazu auch Abschnitt 3.3).

Die nunmehr breite Zustimmung der Bedeutung der mathematischen Frühförderung – wie sie auch eingangs dieses Abschnittes skizziert wurde – kommt als Abschluss dieses Abschnittes etwa auch bei Wittmann (2016) zum Ausdruck, wenn er von einer „Gemeinschaftsaufgabe“ spricht, „bei der alle an einem gemeinsamen Strang ziehen“ (S. 7) müssten: „Eine mit Maß und Ziel gestaltete Frühförderung in Sprache und Mathematik, den beiden Hauptfächern der allgemeinbildenden Schulen, ist eine zentrale bildungs- und



gesellschaftspolitische Aufgabe, bei der mit relativ geringen finanziellen und personellen Investitionen relativ viel erreicht werden kann“ (S. 7).

### **2.1.1 Grundsätzliche Überlegungen zu fachlich sinnvollen Lernangeboten**

Im Sinne von Steinweg (2008) sollen drei wesentliche Grundsätze bei der mathematischen Förderung *in jedem Alter* beachtet werden:

Grundsatz I) „Vorläuferfertigkeiten gibt es nicht“ (Steinweg, 2008, S. 1). Aus mathematikdidaktischer Sicht solle Mathematik als Ganzheit im Sinne eines lebenslangen Lernprozesses verstanden werden. Jede Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sei von sich aus Mathematik, welche nicht als eine Vorform bezeichnet werden solle.

Grundsatz II) Trainingsprogramme mit fixen zeitlichen Abfolgen des aufeinanderfolgenden Lernens seien nicht zielführend. Durch die bloße Abarbeitung von Themen würden vor allem Erwachsene in dem Gefühl bestärkt werden, etwas getan zu haben.

Grundsatz III) Überlegungen zur Förderung mathematischer Kompetenzen in der Zeit vor der Schule müssen sich an mathematikdidaktische Grundlagen der wichtigen Inhaltsbereiche und an den fundamentalen Lernzielen der Mathematik (Abschnitt 2.1.1 und 3.2.2) orientieren. Gerade im vorschulischen Bereich sei keine gezielte Förderung im Sinne eines Trainings von Fertigkeiten und Kenntnissen zu empfehlen. Vielmehr spielen natürliche Lernmöglichkeiten (im Alltag und/oder im Spiel) eine hohe Bedeutung beim Erwerb mathematischer Kompetenzen. Weiters soll die Auswahl der Materialien im kindlichen Lernen nach fachlichen Kriterien gut überlegt sein. Von einem „Aufgreifen aller Ideen des ständig wachsenden Materialmarktes“ rät Steinweg (2008) „ausdrücklich ab“ (S. 144 f.).

Andere Autor\*innen argumentieren für diese frühen Phase des Mathematiklernens in eine ähnliche Richtung. Im Folgenden werden die drei Grundsätze getrennt voneinander beschrieben.

#### **Grundsatz I**

Laut Gasteiger (2007) werden die Begriffe „Prädiktor“ beziehungsweise „Vorläuferfertigkeiten“ in der Literatur häufig verwendet, um mathematische Leistungen vorherzusagen. In sogenannten Prädiktorstudien werden *wesentliche* Voraussetzungen für ein erfolgreiches mathematisches Lernen bestimmt und (häufig werden in weiterer Folge) Versuche unternommen, die Zahlbegriffsentwicklung in „allgemeingültigen Modellen“ mit einheitlich zu durchlaufenden Stufen abzubilden.

Auf die Frage, wie sinnvoll solche hierarchischen Modelle zur Beschreibung der Entwicklung im Bereich der Zahlen und Operationen letztendlich sind, wird *nicht ausführlicher* eingegangen, da es den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde. Hervorzuheben ist an dieser Stelle, dass Kinder von Geburt an mathematische Grunderfahrungen entwickeln; das scheinen sie auf höchst unterschiedlichen Wegen und nicht nach einheitlichen Konzepten zu tun.

Gaidoschik (2010) bemängelt die inhaltliche Bedeutung solcher Studien, da sie „[...] zur Klärung der didaktisch entscheidenden Frage, *welche* Kompetenzen von Kindergartenkindern *in welcher Weise* gefördert werden sollten, wenig beitragen“ (S. 155, Hervorhebung im Original). Er nennt als Beispiel für eine Untersuchung zu numerischen Vorläuferkompetenzen die vielzitierte von Krajewski (2003). Einige der dort verwendeten „Prädiktoren“ werden von Gaidoschik (2010) dahingehend kritisiert, dass sie „eine Reihe von recht unterschiedlichen Teilfähigkeiten zusammenfassen“ (S. 151). Die qualitative Analyse einiger Prädiktoren lasse unschwer erkennen, dass mehrere, höchst unterschiedliche Komponenten kindlichen Wissens und Könnens in *einer* Variablen konfundiert würden. Neben dieser inhaltlichen Unschärfe könne als *die* wesentliche Einschränkung solcher Studien die fehlende pädagogische Relevanz genannt werden. Studien wie die von Krajewski (2003) trügen wenig zu einem besseren Verständnis der *Denkstrategien* der Lernenden bei. Vielmehr würden mit standardisierten Tests „Prädiktoren“ mathematischer Leistungen postuliert, welche *qualitativ* wenig zur Aufklärung des Denkens der Kinder beitrügen (Gaidoschik, 2010).

Aber gerade Wissen über die Denkstrategien, die Kinder beim Lösen von Aufgaben verwenden, ist wichtig, um darauf gestützte didaktische Folgerungen für den pädagogischen Bereich treffen zu können. Welche *didaktischen* Schlussfolgerungen können aber aus Studien wie der beschriebenen und den dort statistisch ermittelten „Prädiktoren“ gezogen werden? Ist es nicht vielmehr das Zusammenspiel von *mehreren* Bedingungen, um pädagogisch-didaktisch wertvolle Aussagen treffen zu können und so Kinder in diesem Prozess zu unterstützen?

## **Grundsatz II**

Eine dieser Voraussetzungen zur Unterstützung der Lernprozesse sind *fachliche* Angebote. Aktuell gibt es für pädagogische Fachkräfte in Kindertageseinrichtungen mehrere Trainingsangebote, Lehrgänge und konzeptionell unterschiedlich gestaltete Materialpakete, wie auch verschiedene Ideensammlungen für frühes mathematisches Lernen.

Gasteiger (2007) betont ähnlich wie Steinweg (2008), dass vor allem die fachliche Bildung im Elementarbereich von spezifischen Trainingsangeboten absehen solle.

Die wesentliche Grundvoraussetzung der unterschiedlichen Angebote in der frühen mathematischen Bildung müsse (wie fortlaufend bei den Angeboten im schulischen Bereich) die *fachliche Richtigkeit* sein (Benz et al., 2015; Gasteiger, 2007; Steinweg, 2008; Wittmann, 2016; Wittmann & Müller, 2009, 2017). Diese sei bei verschiedenen Konzeptionen früher mathematischer Bildung aufgrund „einer ungeeigneten, vermeintlich kindgemäßen Elementarisierung mathematischer Inhalte“ (Gasteiger, 2017, S. 11) fachlich teilweise unsauber. Auch Wittmann und Müller (2017, S. 39) stellen in diesem Zusammenhang fest: „In der Frühförderung dominieren heute viele Lernangebote, bei denen es mehr auf die Verpackung als auf die Inhalte ankommt. Dies geschieht in der Annahme, man müsse den Kindern die als trocken und uninteressant angesehene Mathematik schmackhaft machen“.

Diese fachliche Unsauberkeit, von Wittmann und Müller als „künstliche Verpackung mathematischer Inhalte“ (2009, S. 101; 2017, S. 39) bezeichnet, kommen bei einigen Konzeptionen zur frühen mathematischen Bildung zum Ausdruck, wenn beispielsweise personifizierte Zahlen mit Hilfe von Zahlenpuppen präsentiert und/oder Zahlen in (mitunter banalen) Geschichten verkleidet werden würden (Benz et al., 2015; Gasteiger, 2017; Wittmann, 2016; Wittmann & Müller, 2009, 2017). Eine vermeintlich kindgemäße Vereinfachung mathematischer Inhalte auf einem elementaren Niveau sei laut den Autor\*innen dabei *weder notwendig noch zielführend*. Wittmann und Müller (2009) schreiben in diesem Zusammenhang:

Die Kinder müssen die Mathematik von klein auf als spielerische Tätigkeit erfahren und auf aktive Weise mathematisches Grundwissen einschließlich der zugehörigen Sprechweisen [...] erwerben. Die Kinder müssen Zahlen und Formen nicht nur in lebensweltlichen, sondern auch in reinen mathematischen Zusammenhängen kennenlernen. [...] Auf Arrangements, die künstlich für Spaß sorgen sollen, muss verzichtet werden. (S. 99 ff.)

In diesem Zusammenhang nennt es Wittmann (2016) als notwendig und fordert mit Nachdruck im Titel und den Ausführungen seines Buches den „Blick für ‚echte‘ Mathematik zu schärfen“ (S. 7). In diesem formuliert der Autor wesentliche Kriterien für eine echte mathematische Frühförderung, welche sich „aus dem Wesen des Faches“ (S. 7)

ergeben. Diese Kriterien werden in Abschnitt 3.2.1 ausführlich beschrieben. Auch Krauthausen (2018) argumentiert hinsichtlich der mathematischen (Früh-)Förderung und des mathematischen (Anfangs-)Unterrichts in eine ähnliche Richtung:

Eine Grundaufgabe des mathematischen (Anfangs-)Unterrichts besteht darin, eine Passung zwischen dem Entwicklungsstand der Kinder und den Strukturen des Faches herzustellen [...]. Dabei kann und soll die mathematische Theorie, die ‚fertige Mathematik‘, den Kindern nicht direkt übermittelt oder ‚beigebracht‘ werden. Das ist kein modisches Postulat, sondern kann als gesicherte Erkenntnis der fachdidaktischen wie auch lernpsychologischen Forschung gelten [...]. Andererseits soll die (konventionelle) Mathematik als solche aber auch nicht ignoriert, kindertümelnd simplifiziert werden [...]. (S. 221)

Grundlegende Einsichten, wie etwa, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind („vier besteht aus drei und eins“, aus „null und vier“, aber auch aus „zwei und zwei“ usw.), können Kinder auch in diesem frühen Alter angemessen und vor allem *sachgerecht* erfahren (Benz et al., 2015; Gasteiger, 2017; Wittmann, 2016; Wittmann & Müller, 2009, 2017). Der Konsens unter einigen Autor\*innen (Benz et al., 2015; Benz et al., 2017; Gasteiger, 2007) zur frühen mathematischen Bildung besteht im mathematischen Potenzial vor allem in natürlichen Lernsituationen wie dem kindlichen Spiel. Gasteiger (2010, 2012, 2014) beschreibt in diesem Zusammenhang einen Vorschlag für eine konzeptionelle Umsetzung mathematischer Frühförderung im Elementarbereich. Bei dem theoretisch fundierten Ansatz rät die Autorin vor allem zu natürlichen Lernsituationen, die sich im kindlichen Spiel und/oder im Alltag von selbst ergeben. Durch eine kontinuierliche Beobachtung und Dokumentation soll die Lernentwicklung jedes einzelnen Kindes erkannt und als Anknüpfungspunkt für passende Lernangebote genutzt werden:

Dabei geht es nicht um isolierte Trainingsangebote, sondern um Lernangebote, die Kindern ein Mathematiklernen auf ihren Wegen ermöglicht, um Anregungen, die die Kinder als aktiv-konstruierend Lernende ernst nehmen und die sich durch Anknüpfen an die individuelle Ausgangslage in den natürlichen Lernprozess stimmig einfügen. (Gasteiger, 2007, S. 34)

Andere Autor\*innen wie Wittmann (2016), sowie Wittmann und Müller (2017) sehen gerade Denkspiele für das produktive Üben im Bereich der Frühförderung als geeignet. In Strategie- und Denkspielen werden, im Gegensatz zu stochastischen Spielen, bei denen der Zufall den Ausgang des Spieles bestimmt, die Spielzüge hierbei von Spielenden gelenkt (Wittmann & Müller, 2017).

Benz (2010), Benz et al. (2015), Kuratli Geeler und Moser Opitz (2021), Jörns et al. (2014), Tubach (2019), Vogt et al. (2018) und andere schreiben hingegen der Förderung mit mathematikhaltigen Regelspielen im Vorschulalter eine hohe Bedeutung zu. Kuratli Geeler und Moser Opitz (2021) haben in elementaren Bildungseinrichtungen in Deutschland und der Schweiz eine Untersuchung durchgeführt und erforscht, wie sich eine spielbasierte mathematische Förderung auf Kindergartenkindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen auswirkt. Auch interessierte die Autor\*innen, ob eine unterschiedlich ausgerichtete Bildungsorientierung der elementaren Bildungseinrichtungen der beiden Länder eine Auswirkung auf die Entwicklung der Kinder hat. Im Gegensatz zu Deutschland (und auch Österreich; Anmerkung C.G.) haben elementare Bildungseinrichtungen in der Schweiz einen verbindlichen Lehrplan und einen klaren Bildungsauftrag, der die frühe mathematische Bildung insofern berücksichtigt, dass klare Erwartungen hinsichtlich der zu erwerbenden Kompetenzen formuliert werden. In Deutschland hingegen hat der Kindergarten überwiegend einen Betreuungs- und Erziehungsauftrag. Die mathematischen Kompetenzen der insgesamt 894 Kindergartenkinder haben sich in der Untersuchung von Kuratli Geeler und Moser Opitz bei allen Kindern über die 15 Monate signifikant verbessert. Vor allem Kinder mit wenig Vorwissen zum ersten Testzeitpunkt und Kinder mit einer anderen Erstsprache als Deutsch zeigen durch die gezielte Förderung mit mathematikhaltigen Spielen im Vergleich zu den gleichaltrigen Kindergartenkindern einen größeren Leistungsanstieg. Der Rückstand in den mathematischen Kompetenzen konnte allerdings gegenüber den gleichaltrigen Kindergartenkindern mit mittleren und hohen mathematischen Eingangsvorkenntnissen nicht aufgeholt werden. Im Ländervergleich zeigen Kuratli Geeler und Moser Opitz, dass die deutschen Kinder bei der Untersuchung zwar mit höheren mathematischen Kompetenzen als die Kindergartenkinder der Schweiz starteten, jedoch einen geringeren Kompetenzzuwachs hatten. Bei der dritten Untersuchung waren die mathematischen Kenntnisse der Kindergartenkinder aus der Schweiz signifikant höher als bei den Kindergartenkindern aus Deutschland. Die Autor\*innen folgern aus ihren Untersuchungsergebnissen, dass sich gezielt eingesetzte mathematikhaltige Spiele gerade für die Förderung von Kindergartenkindern mit geringen mathematischen Vorkenntnissen und für Kindergartenkinder mit nicht-deutscher

Muttersprache eignen und dass der länderspezifische Kontext des Kindergartens eine Rolle zu spielen scheint.

### **Grundsatz III**

Um dem Fach Mathematik gerecht zu werden, soll sich die mathematische Bildung in dieser frühen Phase – wie bereits beschrieben – an den grundlegenden *fachlichen* Ideen orientieren (Benz et al., 2015; Steinweg, 2008; Winter, 1976; Wittmann & Müller, 2009, 2017). Winter (1976) beschreibt diese als „Ideen die starke Bezüge der Wirklichkeit haben, verschiedene Aspekte und Zugänge aufweisen, sich durch hohen inneren Beziehungsreichtum auszeichnen und in den folgenden Schuljahren immer weiter ausbauen lassen“ (S. 15). Auch von der Bank (2016) greift diese Thematik in ihrer Arbeit auf und vertritt dabei zu den fundamentalen Ideen die Grundannahme:

Fundamentale Ideen sind für die Mathematik und das Mathematiktreiben zentrale Aspekte wie Inhalte, Handlungen und Einstellungen. Ihr Zusammenspiel macht das Wesen der Mathematik aus. Im Mathematikunterricht dienen sie der begründeten Stoffauswahl und der Vernetzung von unterrichtsrelevanten Aspekten von Mathematik wie Inhalten, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und den Aspekten, welche die Person des Schülers betreffen. (S. 6)

Die Sichtweise, dass diese fachlichen Ideen beim Mathematiklernen und -treiben bruchlos im Verlauf des kindlichen Lernprozesses aufgegriffen werden müssen, formuliert auch Wittmann (2014) mit seiner Grundannahme

[...] dass ein Lernen ohne Brüche nur möglich ist, wenn der Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zum Abitur als zusammenhängendes Ganzes gesehen wird und wenn er stufenübergreifend auf einem authentischen Bild von der ‚Mathematik als Wissenschaft der Muster‘ fußt. (S. 123)

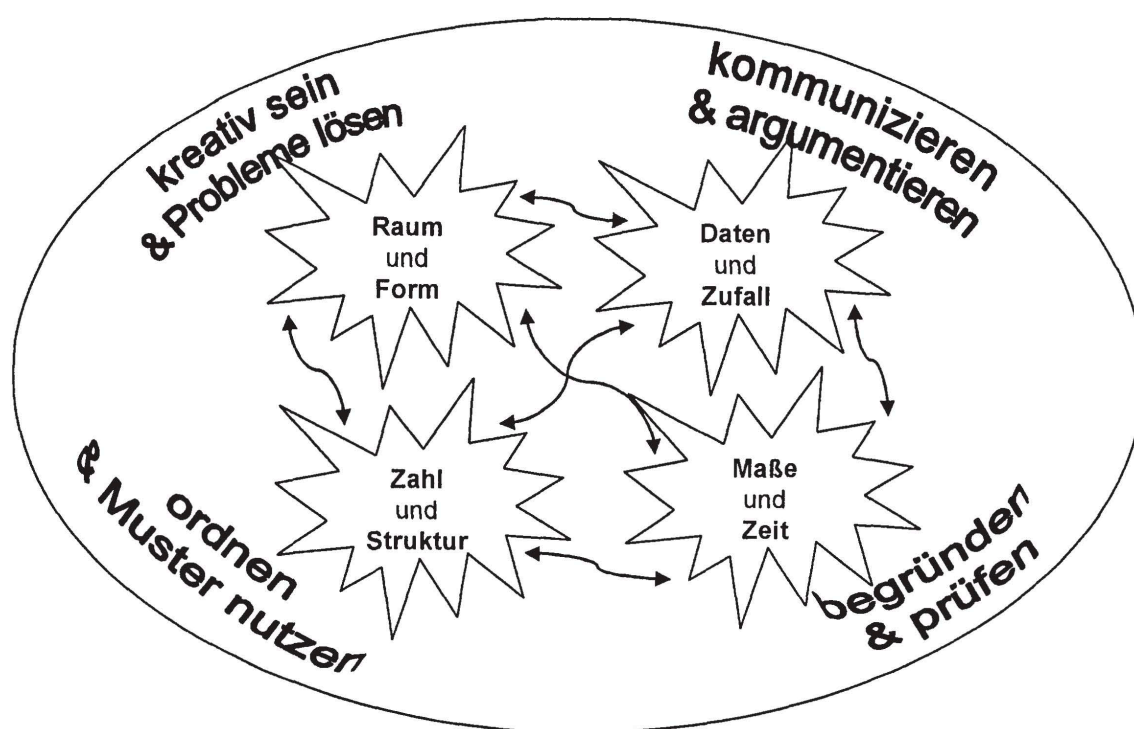
Ein fachlicher Bezugspunkt in dieser frühen Phase des Mathematiklernens und um ein Lernen ohne Brüche zu ermöglichen, können die sogenannten *big ideas*, die Grundsätze der Mathematik für drei- bis sechsjährige Kinder, formuliert von der *National Association for the Education of Young Children* (NAEYC, 2002; zitiert nach Gasteiger, 2017; siehe auch Hellmich, 2007), sein.

In diesem Zusammenhang handelt es sich, fortgesetzt in der Grundschule, siehe Abschnitt 3.3.3, um wesentliche Grundideen, um zentrale Inhalte innerhalb eines mathematisch fachlichen Rahmens (siehe Abbildung 2). Auch Wittmann und Müller (2009, 2017) vertreten mit ihrer Konzeption des Zahlenbuches diese Grundannahme und konzentrieren sich dabei konsequent auf die wesentlichen mathematischen Grundideen als Grundlage für einen fachlich fundierten Unterricht.

Die Grundideen für die frühe mathematische Bildung können in vier große inhaltliche Themenbereiche eingeteilt werden, die auch im Alltag und im Spiel von Kindergartenkindern zu finden sind (Benz et al., 2015; Steinweg, 2008). Dabei gelte es vor allem, wie fortlaufend in der Grundschule, einen Schwerpunkt auf die Arithmetik und die Geometrie zu legen (Wittmann & Müller, 2009; zitiert nach Gasteiger, 2017).

**Abbildung 2**

*Mathematische Kompetenzbereiche (Steinweg, 2008, S. 147)*



### 2.1.2 Aufgreifen der Vorkenntnisse im Übergang von elementaren Bildungseinrichtungen in die Grundschule

Abschnitt 2.1 hat gezeigt: Bevor Kinder in die Schule eintreten, machen sie unter anderem im kindlichen Alltag, in Denkspielen und im (Regel)Spiel mathematische Erfahrungen. Dementsprechend stellt nach Selzer (1995) der Schuleintritt nicht die „Stunde Null“ (S. 11) des Mathematiklernens und Mathematiktreibens dar. In der Regel bringen alle

Kinder mit Schuleintritt arithmetische Vorkenntnisse mit. Mit dem Eintritt in die Schule sind einige Kinder in ihrer mathematischen Entwicklung sehr weit und können bereits im Zahlenraum bis 100 zählen und rechnen. Andere Schulanfänger\*innen stehen am Beginn ihrer mathematischen Erfahrungen.

So konnten in der vielbeachteten Untersuchung von Schmidt im Jahr 1982 von 1138 Kindern rund 97 Prozent fehlerfrei bis zumindest zehn und etwa 70 Prozent bis 20 zählen. Etwa 60 Prozent lösten die Aufgabe „Lege sechzehn Plättchen!“ richtig. In einer vergleichbaren nachfolgenden Untersuchung von Deutscher (2012) konnten alle Kinder zumindest bis zehn und 78 Prozent bis zwanzig zählen. Ähnliche Ergebnisse zeigen weitere Untersuchungen, etwa bei Grassmann et al. (1995), Hengartner und Röthlisberger (1995), Selter (1995) und anderen.

Auch Kinder, deren Entwicklung beeinträchtigt ist, treten in der Regel mit mathematischen Vorkenntnissen in die Schule ein. Moser Opitz (2008) zeigt, dass ein großer Teil der untersuchten Kinder mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung die Zahlen bis zehn benennen, Anzahlen bis sechs bestimmen und bis zehn oder weiter zählen konnten. Auch Moser et al. (2005) haben Schulkinder in Sonderklassen untersucht. 88 Prozent dieser Kinder wiesen Kenntnisse im Zahlenraum mindestens bis zehn auf.

An diese oft weit reichenden Vorerfahrungen von Kindern muss der schulische Anfangsunterricht konstruktiv anknüpfen. Bereits 1916 forderte Kühnel, was innerhalb der gegenwärtigen Fachdidaktik als Konsens gelten darf:

Eine wichtige Frage ist noch zu erörtern, die nämlich, wie weit wir auf dieser Stufe zählen dürfen. Aus langjähriger Erfahrung und aus herzlichem Mitgefühl wie auch aus psychologischer Beobachtung der Kindesnatur schlagen wir vor: ohne jede Grenze. Unsere Erfahrung ist die, dass eine solche Begrenzung deutlich die Wirkung hat, das Interesse des Kindes am Rechnen und seine Lust am Fortschritt stark abzuschwächen. (S. 159)

Nicht nur aus Kühnells genannten Gründen der Motivation der Kinder (aus Sicht der Kinder gerade deswegen!), darf man sich im Anfangsunterricht nicht nur mit dem *Aufgreifen* der Vorkenntnisse zufriedengeben. Die wichtige Aufgabe der Lehrkraft am Schulanfang ist es, die mathematischen Vorkenntnisse der Kinder festzustellen, an die jeweiligen Grunderfahrungen anzuknüpfen und das mathematische Lernen der Kinder hin zu neuen Einsichten zu begleiten. Das stellt hohe Anforderungen an die Kompetenz der Lehrkraft (siehe Abschnitt 3.3). Die Arbeit im Anfangsunterricht des ersten Schuljahres setzt somit die pädagogische und fachliche Arbeit der vorschulischen Einrichtungen fort.



## 2.2 Inhaltliche Überlegungen für den arithmetischen Anfangsunterricht

Nachfolgend werden wesentliche Empfehlungen und Anregungen aus fachdidaktischer Perspektive für die Gestaltung des arithmetischen Anfangsunterrichts – bindend für *alle* Kinder – beschrieben, die in der aktuellen nationalen und internationalen Fachliteratur genannt werden. Dazu werden in den folgenden Abschnitten die von Gaidoschik (2022) genannten zentralen Bereiche im frühen Arithmetikunterricht herangezogen und ausführlich dargestellt: „Zählen, Vergleichen und nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen“ (S. 224, Kursivsetzung im Original). In der vorliegenden Arbeit werden diese drei zentralen Bereiche nicht nur aufgegriffen und beschrieben, sondern sie sind der inhaltliche Ausgangspunkt für die Entwicklung der einzelnen Unterrichtsbausteine, die im Verlauf dieser Dissertationsarbeit entstanden sind. Jeder Unterrichtsbaustein stützt sich dabei auf einen und/oder auf mehrere dieser Inhaltsbereiche. In diesem Zusammenhang wird, wie in Abschnitt 6.1 ausführlich beschrieben und im Sinne des Autors der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) darauf geachtet, dass mit allen Kindern im frühen Arithmetikunterricht in allen drei Bereichen zeitlich übergreifend gearbeitet wird.

### 2.2.1 Vom Lernen der Zahlwortreihe hin zum sicheren Verständnis von Zahlen als Anzahlen

Lange Zeit galt die Kompetenz des Zählens im Mathematikunterricht des Grundschulalters als untergeordnet oder gar als völlig bedeutungslos. Moser Opitz (2008) nennt dafür als *einen* möglichen Erklärungsgrund die bestimmenden Sichtweisen des Psychologen Jean Piaget, wonach das Zählen „ein Reproduzieren von memorierten Worthülsen ohne numerische Bedeutung“ war (S. 63).

Seit den 1980er Jahren gibt es (vor allem im englischsprachigen Raum) zahlreiche Untersuchungen, die Piagets Ansichten zum Zählen widersprechen. Sie alle beschreiben das Zählen zwar nicht als die einzige, aber als *eine* wesentliche Voraussetzung für den Aufbau mathematischer Kenntnisse (Baroody, 1987; Fuson, 1988; Sophian, 1988). So schreibt Baroody (1987, S. 33): „Counting provides children the bridge between concrete, but limited perception and abstract but general mathematical ideas. It is counting that puts abstract number and simple arithmetic within the reach of the young child“.

Im deutschsprachigen Raum hat man ähnliche fachdidaktische Empfehlungen zum Zählen dargelegt. Überlegungen dazu findet man etwa bei Gaidoschik (2007), Hase-mann und Gasteiger (2014), Häsel-Weide und Nührenbörger (2013), Moser Opitz (2008), Radatz (1982), Schmidt und Weiser (1982) und anderen. Wie sich das Zählen

entwickelt und wann es eine numerische Bedeutung erlangt, darüber gibt es differierende Meinungen innerhalb der Fachliteratur. Vor diesem Hintergrund sind unterschiedliche Modelle und fundierte Überlegungen zur Entwicklung des Zählens entstanden. Einige davon werden in den nachfolgenden Abschnitten behandelt. Sie sind geprägt von unterschiedlichen Annahmen von Lernen; deren Diskussion hat wiederum zum Teil zu großen Kontroversen geführt (eine ausführliche Auseinandersetzung in der deutschsprachigen Literatur findet man etwa bei Stern, 1998).

All diese unterschiedlichen Annahmen zur Entwicklung des Zählens weisen bei folgender Frage *eine* Gemeinsamkeit auf: Über welches *Zahldenken* müssen Kinder verfügen, damit Zählprozesse gelingen? Damit man diese Frage beantworten kann, muss zuerst geklärt werden, was man unter dem Begriff Zählen versteht. Im Deutschen verwenden wir das Wort Zählen auf unterschiedliche Weisen: Die Frage „Kannst du schon zählen?“ bezieht sich in der Regel auf das Aufsagen der *Zahlwortreihe*. Die Frage „Wie viel sind es, zählst du mal?“ auf ein *anzahlbestimmendes Zählen*. Diese beiden Fertigkeiten werden nachfolgend jeweils getrennt voneinander betrachtet.

### ***Die Entwicklung des verbalen Zählens***

Mit der Entwicklung des (verbalen) Zählens hat sich unter anderem Karen Fuson (1988) ausführlich beschäftigt. Ihr Modell wird heute in vielen Veröffentlichungen übernommen und findet eine breite Zustimmung. Die Autorin geht von fünf aufeinanderfolgenden Stufen beim *Erwerb der Zahlwortreihe* aus (Fuson, S. 33 ff.; deutsche Übersetzungen nach Moser Opitz, 2008, S. 86 f.):

- I. String Level - Ganzheitsauffassung der Zahlwortreihe: Bereits sehr kleine Kinder seien in der Lage, *Zahlwörter* (häufig wie ein Gedicht), beispielsweise „eins, zwei, vier, sechs, fünf, sieben, ...“ aufzusagen. Die Zahlwörter seien anfangs oftmals noch nicht in der richtigen Reihenfolge und die Zahlwortreihe werde als Ganzheit verstanden. Das Erlernen der ersten Zahlwörter kann durch Zählverse wie „Zehn kleine Zappelmannen“, Reime oder Lieder angestoßen werden (Radatz et al., 1996; Wittmann & Müller, 2004). Diese Stufe sei für das *Abzählen* von Anzahlen noch nicht ausreichend, weil Kinder die Zahlwörter nur wie ein auswendig gelerntes Gedicht aufsagen, ohne die Bedeutung einer Anzahl zu erfassen.
- II. Unbreakable List Level – Unflexible Zahlwortreihe: Die Kinder können die Zahlwortreihe aufsagen, beginnen aber immer bei *eins* zu zählen. Die „Eins-zu-Eins“-

Zuordnung zwischen Zahlwort und Objekt könne hergestellt werden, durch Zählen können Kinder die Anzahl ermitteln. Das Weiterzählen von einer bestimmten Anzahl sei vorerst nicht möglich.

- III. Breakable Chain Level - Teilweise flexible Zahlwortreihe: Auf dieser Stufe sei es Kindern möglich, ab einer *bestimmten* Zahl weiterzuzählen, Nachfolger und Vorgänger zu bestimmen und das Rückwärtszählen teilweise richtig anzuwenden.
- IV. Numerable Chain Level - Flexible Zahlwortreihe: Die Kinder können von jeder beliebigen Zahl aus in Schritten weiterzählen.
- V. Bidirectional Chain Level - Vollständig reversible Zahlwortreihe: Die Kinder beherrschen die Zahlwortreihe *flexibel* und können diese von jeder beliebigen Startzahl vorwärts und rückwärts (auch in Schritten) sicher nennen (Fuson, 1988, S. 33ff.; deutsche Übersetzung nach Moser Opitz, 2008, S. 86f.).

Die Kinder verwenden nach Fuson (1988) somit die Zahlwörter vorerst als ein bloßes Aufsagen der Zahlwortreihe *ohne Bezug zur Quantität*. Gasteiger (2011) argumentiert in eine ähnliche Richtung, wonach viele/die meisten Kinder die Reihe der Zahlwörter in der Regel schon in jungen Jahren beherrschen. Und sie könnten Zahlwörter von anderen Wörtern unterscheiden, wenngleich sie diese meist noch nicht in der richtigen Reihenfolge anwenden. Nach und nach erhalten die Kinder nach Gasteiger (2011) tragfähige Einsichten darin, dass Zahlwörter eine festgelegte Rangfolge haben. Dieser sichere Gebrauch der Zahlwortreihe ist eine wesentliche Grundlage für alles Weitere im Zählprozess. Darüber hinaus sind noch weitere Kompetenzen notwendig, die Hasemann (2007) in fünf Entwicklungsphasen der „Zählfertigkeit im Sinne einer prozeduralen Sicherheit der Kinder beim Prozess des Ab- und Auszählens“ (S. 8 f.) teilt:

- I. Phase (verbales Zählen): Kinder können die Zahlwortreihe wie ein Gedicht aufsagen (in etwa entsprechend der ersten Stufe nach Fuson, *string level*). Die Zahlwörter werden noch nicht im Sinne des anzahlerfassenden Zählens benutzt.
- II. Phase (asynchrones Zählen): Kinder benutzen Zahlwörter in der korrekten Rangreihe, häufig passieren jedoch Zählfehler bei der Eins-zu-Eins-Zuordnung, indem ein Objekt vergessen wird oder ein Objekt wird mehrmals gezählt.
- III. Phase (Ordnen der Objekte während des Zählens): Um die Objekte besser zählen zu können, ordnen sie sie (bspw. indem sie Objekte zu Seite schieben).
- IV. Phase (resultatives Zählen): Beim Zählen von Objekten beginnen Kinder mit der Eins, zählen jedes Objekt einmal und wissen, dass das letztgenannte Zahlwort die Mächtigkeit beschreibt.

- V. Phase (Abkürzendes Zählen): Kinder erfassen kleinere Mengen von Objekten simultan, indem sie bspw. Strukturen wahrnehmen und bestimmen und selbst bilden (z.B. das Zahlbild fünf als Würfelfünf dargestellt). Und Kinder können von einer Zahl an weiterzählen, in Schritten zählen oder auch rückwärts zählen (Hasemann, 2007, S. 8 f.). Die verschiedenen Prozesse der Anzahlwahrnehmung und -erfassung werden in Abschnitt 2.2.2 ausführlich betrachtet.

### **Anzahlerfassendes Zählen**

Erst im Laufe einer längeren *Zählentwicklung* lernen die Kinder, die Zahlwörter zum Ermitteln einer beliebig vorgegebenen Menge einzusetzen. Eine bestimmte Anzahl von Elementen wird *abgezählt* („Gib mir vier Bonbons“), durch *Auszählen* („Wie viele sind es?“) wird eine vorgegebene Anzahl von Elementen vollständig gezählt (Fuson, 1992). Bei diesem anzahlerfassenden Zählen müssen Kinder die Zahlwortreihe sicher beherrschen und mehrere *Zählprinzipien* richtig anwenden. Das ist keinesfalls trivial für die Kinder! Diese Prinzipien des Zählens werden bei Gelman und Gallistel (1986) beschrieben. Zu den ersten drei Prinzipien (*how-to-count*), das heißt die Erkenntnis, *wie* gezählt werden muss, gehört das Eindeutigkeitsprinzip (jedem zu zählendem Element wird nur ein Zahlwort zugeschrieben; es darf kein Element doppelt gezählt oder ausgelassen werden), das Prinzip der stabilen Reihenfolge (die Zahlwörter haben eine fixe Anordnung) und das Kardinalzahlprinzip (das zuletzt genannte Zahlwort definiert die Menge). Die zwei weiteren Prinzipien (*what-to-count*), das heißt die Erkenntnis, *was* gezählt werden kann, beschreiben das Abstraktionsprinzip, welches besagt, dass jede beliebige Menge zählbar ist; dass man beispielsweise Jungen genauso wie Mädchen zu einer Menge zusammenfassen kann; und das Prinzip der Irrelevanz der Reihenfolge, wonach die Anordnung der zu zählenden Objekte keine Auswirkung auf die Zählung hat. Es ist beispielsweise egal, ob eine Reihe mit Plättchen von links nach rechts oder von rechts nach links gezählt wird. Diese *Zählstrategien* sollten mit Kindern erarbeitet werden (siehe dazu auch Benz et al., 2015; Gaidoschik, 2007; Gasteiger, 2011; Hasemann & Gasteiger, 2014).

Entgegen früherer Annahmen, wonach diese Prinzipien des Zählens angeboren seien, herrscht mit dem Wissensstand von heute weitgehend Konsens in der mathematikdidaktischen Literatur, dass diese nicht angeboren, sondern sich vielmehr im Laufe eines längeren Lernprozesses und während der Anwendung bei *verschiedenen Aktivitäten des Zählens* entwickeln. Ein solches Modell schlägt Moser Opitz (2008) mit Bezug auf wesentliche Erkenntnisse von Fuson (1988) und Wynn (1990, 1992) vor.

Auch Ie Corre und Carey (2007) gehen davon aus, dass die Prinzipien des Zählens nicht angeboren sind. Sie konnten in der Untersuchung zeigen, dass Lernende im Alter von etwa drei Jahren die Prinzipien des Zählens vorerst nur für kleine Mengen bis zur Zahl vier erwerben und diese erst später auf größere Mengen übertragen können.

Die Zählprinzipien nach Gelman und Gallistel haben folglich eine wesentliche Bedeutung bei der Bestimmung von Anzahlen. Im Laufe eines längeren Lernprozesses lernen die Kinder (zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt), die Eins-zu-Eins-Zuordnung von gesprochenem Zahlwort und zu zählendem Element anzuwenden. Meist durch Antippen mit dem Finger wird, eins-zu-eins zugeordnet, jedem Zahlwort ein Element hinzugefügt. Das gelingt aber nicht allen Kindern problemlos. Während der Zuordnung von Zahlwort und zu zählendem Element können unterschiedliche *Zählfehler* auftreten: Elemente werden mehrfach gezählt, ausgelassen oder bei zweiseitigen Zahlwörtern, beispielsweise ‚sie-ben‘, werden zwei Elemente zugeordnet (eine ausführliche Beschreibung möglicher Fehler, die beim Zählen, als Zuordnung „Zahlwort – Zeigeakt – Objekt“ auftreten können, siehe etwa bei Fuson, 1988 und Moser Opitz, 2008).

Prinzipiell entwickle sich laut Fuson (1988) das Rückwärtszählen zum Teil erst zwei Jahre später als das Vorwärtszählen. Auch wird das Zählen von Elementen von verschiedenen Faktoren erleichtert beziehungsweise erschwert. Nach Towse und Hitch seien Elemente, die ähnlich aussehen, schwieriger zu zählen als Elemente, die sich vom äußeren Eindruck her gut unterscheiden lassen. Strukturiert geordnete Elemente seien außerdem einfacher zu zählen als ungeordnete. Für das Gelingen des Zählvorganges scheint es nach den Autor\*innen auch wesentlich, ob Elemente durch Verschieben (bspw. indem gezählte Elemente zur Seite gelegt werden), durch Antippen oder durch „Antippen mit den Augen“ gezählt werden. Das Zählen durch Verschieben gelinge in der Regel leichter als das Zählen durch Antippen (Towse & Hitch, 1996).

Im Laufe einer längeren Zählentwicklung lernen die Kinder in der Regel auch recht schnell, dass das zuletzt genannte Zahlwort die Mächtigkeit einer Anzahl von Elementen beschreibt. Kinder, die dieses kardinale Verständnis noch nicht ausgebildet haben, beginnen die Elemente auf die Frage „Wie viele sind es nun?“ häufig erneut von vorne zu zählen (Bermejo et al., 2004). Die *kardinale Bedeutung* einer Zahl (*cardinal meaning*) und die (möglicherweise) damit einhergehenden Schwierigkeiten, die sich für manche Kinder ergeben, werden häufig von Erwachsenen unterschätzt. Kinder verstehen recht schnell, nach einem Zählvorgang die letzte Zahl zu wiederholen. In den Worten von Fu-

son (1992): "Some children show a transitional last-word-response in which they will respond to a how-many question with the last word in counting, but the last word does not refer to the whole counted set" (p. 62 f.).

Nennt ein Lernender beim Abzählen von Elementen das zuletzt verwendete Zahlwort, folgern Erwachsene (mitunter) gerne daraus, dass das Kind die Zahl als *Anzahl* denken kann. In diesem Zusammenhang sei es für Kinder zwar wichtig, dass sie die *last-word rule* lernen, das heißt, dass sie beim Zählen das zuletzt genannte Zahlwort als Antwort auf die Frage „Wie viele?“ nennen. Diese *last-word rule* (Fuson, 1988) gelte aber erst dann als ein Hinweis für ein sicheres kardinales Zahlverständnis, wenn ein Kind beim Abzählen von Elementen tatsächlich *alle* meint, dessen Bedeutung verinnerlicht hat und nicht nur das zuletzt angetippte Element meint und nennt (siehe dazu auch Abschnitt 2.2.3). Gerster und Schultz (2004) bezeichnen dies als „Schlüsselereignis im Zahlverständnis des Kindes“ (S. 333). Erst dann habe es den Übergang von der Zahlwortreihe hin zu einem sicheren kardinalen Verständnis vollzogen, die *count-to-cardinal transition* (Fuson, 1992).

Es wäre ein Trugschluss zu glauben, dass Kinder ein Verständnis von Kardinalität (Zahlen als *Anzahlen* zu denken) per se *ausschließlich* durch die Tätigkeit des Zählens gewinnen. Dennoch, ein Zugang als eine nicht auszuschließende *Bedingung* für das Verstehen der Mächtigkeit einer Menge ist die komplexe Tätigkeit des Zählens (Bideaud, 1995; Sophian, 1992). Wenig verwunderlich ist folglich, dass eine mangelnde Zählkompetenz (häufig) mit fehlenden Erfahrungen des Zählens zusammenhängt (Gaidoschik, 2010; Scherer & Moser Opitz, 2010).

### ***Folgerungen für die Zählentwicklung im arithmetischen Anfangsunterricht***

Die in Abschnitt 2.2.1 dargestellten fachdidaktischen Empfehlungen zum arithmetischen Anfangsunterricht beschreiben das Beherrschen der Zahlwortreihe als *eine* unabdingbare Voraussetzung für die Entwicklung arithmetischer Kompetenzen. Auch gilt es im Sinne der genannten Autor\*innen als erwiesen, dass sich die Kinder beim Gebrauch der Zahlwortreihe (vom auswendig gelernten Gedicht bis hin zum sicheren Gebrauch zur Anzahlermittlung) auf verschiedenen Stufen der Zählentwicklung befinden. Darüber hinaus ist Folgendes unbestritten: Je sicherer die Zahlwortreihe beherrscht wird (vor- und rückwärts; in Zweier- oder Dreierschritten; vorwärts ab einer Zahl; rückwärts ab einer Zahl), desto besser wird diese in (Ab-)Zählsituationen angewendet.

In diesem Zusammenhang stellen sich die Fragen, wie bei Schulanfang mit den meist weitreichenden Vorerfahrungen der Kinder im Bereich der Zahlwortreihe und im

Bereich des anzahlbestimmenden Zählens umgegangen werden soll und welche *pädagogischen Folgerungen* für die Zählentwicklung daraus zu ziehen sind. Die in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Untersuchungen zu den mathematischen Vorerfahrungen von Schulanfänger\*innen haben gezeigt, dass alle Kinder mit Schuleintritt in der Regel weitreichende Vorerfahrungen im Bereich des Zählens mitbringen.

Gaidoschik (2022) empfiehlt, gerade das Erlernen der Zahlwortreihe bis 12 mit den Kindern in dieser frühen Phase des Mathematiklernens in den Blick zu nehmen und mit ihnen (auswendig) zu lernen. In diesem Zusammenhang sei es in weiterer Folge hilfreich, dass in der (schulischen) Förderung verschiedene Zählaufräge sinnvoll gemacht werden. Für alle Kinder interessante Zählübungen finden sich im (Schul-)Alltag, wie beispielsweise das Abzählen der Kinder nach unterschiedlichen Kriterien: die Anzahl der Mädchen, der Jungen, der Kinder insgesamt, der Kinder einer bestimmten Haarfarbe oder Augenfarbe usw. Viele Empfehlungen dazu findet man in der mathematikdidaktischen Literatur (Gaidoschik, 2007; Radatz et al., 1996; Wittmann & Müller, 2004). Die Aufgaben können nach den Autor\*innen durch gemeinsames Zählen im Chor oder durch Zählen im Kreis reihum durchgeführt werden. Im Gegensatz zu Zählübungen, bei denen Kinder allein zählen, bietet insbesondere das Zählen im Chor den Vorteil, dass die Kinder hier einfach mitzählen, soweit sie eben können. Mögliche Schwierigkeiten einzelner Kinder treten in den Hintergrund. Bei allen Aktivitäten des Zählens (freilich nicht nur in diesem Bereich) gelte der Anspruch, dass *keine* (letztlich immer künstlichen) Grenzen gesetzt werden sollten (Gaidoschik, 2007, 2010; Moser Opitz, 2008; Radatz et al., 1996; Wittmann & Müller, 2004, 2009; siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2).

Wie in Abschnitt 2.2.1 dargestellt, sind die inhaltlichen Ziele, somit auch jene zur Zählentwicklung, aus Sicht der aktuellen Fachdidaktik für *alle Kinder* dieselben. Doch nicht von allen Kindern wird das sichere Zählen im Sinne eines anzahlerfassenden Zählens vor Schuleintritt intuitiv erworben. Dies gilt besonders für Kinder, deren (mathematische) Entwicklung verzögert ist und welche die Zählkompetenzen nicht von sich aus erwerben können. Gerade diese Kinder mit eingeschränkten Lernprozessen müssten bewusst und durch unterstützende Begleitung aufgefordert werden, sich mit Zählaktivitäten auseinanderzusetzen. So konnte Baroody (1986) zeigen, dass Kindergartenkinder mit dem „Förderbedarf geistige Entwicklung“ Zählen – im Vergleich zu den meisten gleichaltrigen Regelkindergartenkindern – *nicht spontan* durch Alltagserfahrungen lernen. Unter konkreter Anleitung war es diesen Kindern jedoch auch möglich, die Zahlwortreihe und das anzahlerfassende Zählen zu erwerben. Weitere Überlegungen in die-

selbe Richtung: Aufgrund der besonders sichtbaren mathematischen Leistungsunterschiede zwischen Kindern mit und ohne Förderbedarf betonen etwa Baroody (1999) oder Bashash et al. (2003), wie wichtig *regelmäßiges Üben* des verbalen Zählens gerade für diese Kinder sei.

Das Aufgreifen der unterschiedlichen Vorkenntnisse reicht jedoch freilich nicht aus, um sich im (Anfangs-)Unterricht damit zufriedenzugeben: Vielmehr müsse die gegenwärtige Schulmathematik alle Kinder (früher oder später) dazu bringen, von der rein oder überwiegend zählenden Handlung zur Einsicht in „Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen“ (Gaidoschik, 2007, 2010, 2022; Gerster, 2007, 2009; Gerster & Schultz, 2004; Schultz et al., 2017; Padberg & Benz, 2020) hinzuführen (Abschnitt 2.2.3).

Dieser Übergang könne aus fachdidaktischer Sicht gerade über das Zählen geschehen. Dies scheint plausibel begründet, gelte doch das Zählen als eine wichtige Fertigkeit hin zu einer „Einsicht in vielfältige Zahlbeziehungen“ (Gaidoschik, 2007, S. 14; Gerster, 1994, S. 45). Neben diesem Bereich des anzahlerfassenden Zählens wird die Arbeit mit Anzahlvergleichen als lohnender Bereich im frühen Arithmetikunterricht genannt. Dazu im nächsten Abschnitt mehr.

### **2.2.2 Anzahlvergleiche**

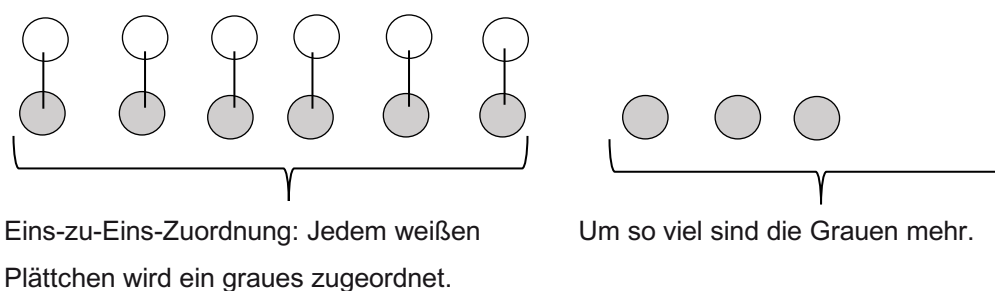
Auch wenn Kinder mit Schuleintritt die Anzahlen in der Regel nach dem Augenschein und/oder zählend ermitteln, sei es nach Gaidoschik (2007, 2022), Häsel-Weide (2016), Hasemann & Gasteiger (2014), Scherer und Moser Opitz (2010), Schuler (2013), Steinweg (2009), Ruwisch (2015) und anderen grundlegend wichtig, dass alle Kinder *kardinale und ordinale Beziehungen* zwischen Zahlen verstehen und in weiterer Folge auch solche Zuordnungen nutzen, um herauszufinden, ob es gleich, mehr oder weniger sind. Aus Sicht der deutschsprachigen Fachdidaktik gilt es im arithmetischen Anfangsunterricht dementsprechend, zumindest diese beiden Vorstellungen von Zahlen in den Mittelpunkt zu stellen und diese mit allen Kindern zu festigen. In diesem Zusammenhang können laut den genannten Autor\*innen und wie in Abbildung 3 dargestellt diese grundlegenden Zahlbeziehungen „um eins mehr“ und „um eins weniger“ sowohl kardinal mit Mengen als auch ordinal am (mental) Zahlenstrahl veranschaulicht, erkundet und geschult werden (siehe dazu auch Abschnitt „Mentaler Zahlenstrahl – *mental number line*“ und Abschnitt 2.2.3.3). Steinweg (2009) sieht das Arbeiten mit einem durchgehend beschrifteten Zahlenstrahl jedoch kritisch. Diese Darstellung könne laut der Autorin zum zählenden Rechnen verleiten, weshalb diese Überlegungen im Sinne eines präventiv



ausgerichteten Erstrechenunterrichts (siehe Abschnitt 3.3.1) mitgedacht werden müssen. Werden in dieser frühen Phase des Mathematiklernens die kardinalen Beziehungen zwischen Zahlen in den Blick genommen, ist zum einen die Einsicht des *direkten Mengenvergleiches* über eine Eins-zu-Eins-Zuordnung (mehr/weniger/gleich viele Elemente) wesentlich, zum anderen darauf aufbauend das Bestimmen des jeweiligen Mengenunterschiedes (um wie viele Elemente mehr?). Vor diesem Hintergrund ist bei der Bearbeitung von Aktivitäten im Bereich „mehr, weniger, gleich viel“ darauf zu achten, ob Kinder ein grundlegendes Verständnis für die Einsicht „gleich viel“ haben: Ein Verständnis für solche Zahlvergleiche setzt voraus, dass Kinder bereits wissen, dass „gleich viel“ bei Anzahlen immer dann besteht, wenn man durchgehend eine Eins-zu-Eins-Zuordnung machen kann (Abschnitt 2.2.1). Gaidoschik (2007, 2022) beschreibt, dass der aufbauende Schritt der Differenzbeziehung, „wenn eine Menge mehr ist als die andere, *um wie viel* ist sie dann mehr?“ nur auf Grundlage eines mitgedachten Eins-zu-Eins-Vergleiches tragfähig ist. In diesem Zusammenhang spricht Gaidoschik (2022) von einem „Verständnis für Vergleichsbegriffe, das wir für weitere Schritte in der Mathematik brauchen: Gleich viele sind es, wenn die Eins-zu-Eins-Zuordnung vollständig aufgeht. Andernfalls sind es vom einen mehr, vom anderen entsprechend weniger“ (S. 222).

### Abbildung 3

*Differenzverständnis auf Grundlage eines Eins-zu-Eins-Vergleiches (Gaidoschik, 2007, S. 24)*



Denkt ein Kind in obiger Darstellung bei der Frage „welche Menge ist mehr?“ keinen Eins-zu-Eins-Vergleich mit und kann keinen direkten Mengenvergleich durchführen, wird es, wie obenstehend angedeutet, laut Gaidoschik (2007, 2022) bei der weiterführenden Frage „um wie viel mehr/weniger?“ zwangsläufig nicht zurechtkommen und kann diese (mitunter) nur zählend lösen.

Diese grundlegende Einsicht des „Eindeutigkeitsprinzips“ nach Gelman und Gallistel (1986), dass jedem Element aus der einen Menge genau ein Element der anderen

Menge zugeordnet werden kann, gilt somit als Grundlage für Anzahlvergleiche und kann beispielsweise in Alltagssituationen geweckt und gefestigt werden (Abschnitt 2.2.1). Bei diesen reichhaltigen Alltagsvergleichen sollen, mit Gaidoschik (2007, 2022) und anderen gefordert, keine künstlichen Zahlenraumgrenzen gesetzt werden. Mehr noch: der abzählbare Zahlenraum bei den Aktivitäten des direkten Mengenvergleiches soll bewusst überschritten werden, ohne dabei die Elemente einzeln abzuzählen. Denn, ein sicheres Beherrschen der Zahlwortreihe sind für Anzahlvergleiche nicht Voraussetzung für alles Weitere (Abschnitt 3.3.4).

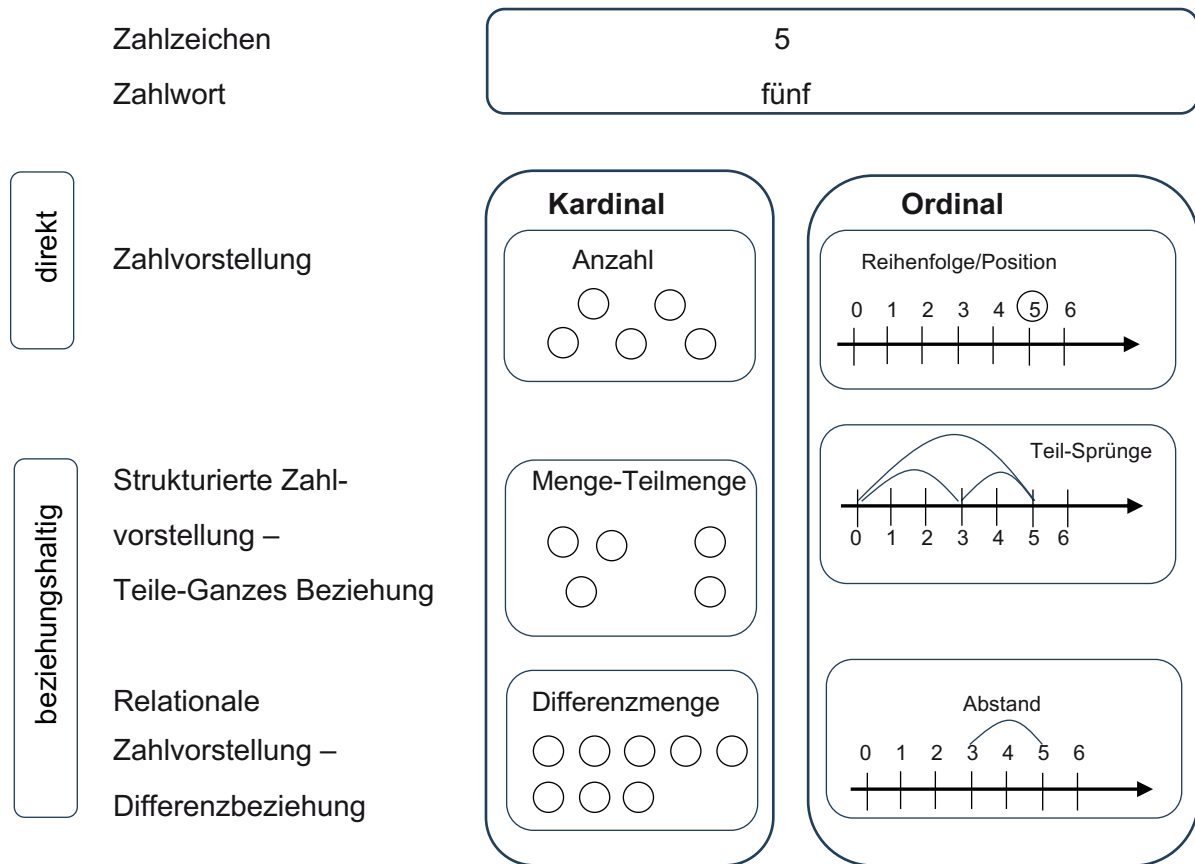
Ein weiterer und wesentlicher Bereich des Denkens in kardinalen Beziehungen beinhaltet die Fähigkeit, Mengen in Teilmengen zerlegen und diese wiederum als Ganzes zusammenfügen zu können. Diese wesentliche Leistung wird in Abschnitt 2.2.3.1 dieser Arbeit ausführlich behandelt.

Werden hingegen *ordinale Beziehungen* zwischen Zahlen in dieser frühen Phase des Mathematiklernens geschult, werden für gewöhnlich die Positionen der Zahlen in der Zahlwortreihe in den Mittelpunkt des Mathematiklernens und -treibens gestellt. In diesem Zusammenhang werden beispielsweise Nachbarzahlen bestimmt (Vor- und Nachfolger), Zahlen miteinander verglichen (größer/kleiner/gleich), die Abstände von Zahlen ermittelt, in Schritten vor- und rückwärts gezählt, und/oder Zahlen werden der Größe nach geordnet (Schuler, 2013). Nach Scherer und Moser Opitz (2010) eignen sich hier besonders Aufgabenstellungen an der Zahlreihe: „An der Zahlreihe sind sowohl der ordinale als auch der kardinale Zahlaspekt sichtbar: Die Anzahl der Kreise betont die Kardinalzahl, die lineare Anordnung und die geschriebenen Zahlen jedoch die Reihenfolge und damit die Ordinalzahl“ (S. 137).

Aus Sicht der deutschsprachigen Fachdidaktik eignen sich im Mathematikunterricht der Grundschule und hier insbesondere als Veranschaulichung des linearen Modells der Zahlenstrahl, die Zwanzigerreihe und fortlaufend die Hunderter- und Tausenderreihe (Gaidoschik, 2007; Ruwisch, 2015; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schuler, 2013).

**Abbildung 4**

*Zahlvorstellungen (Benz, 2023, Folie 16)*



Das Verständnis für Zahlbeziehungen wird durch das Bilden von Reihen unterstützt (Fthenakis et al., 2014). Beispielsweise kann beim Ordnen von Buntstiften nach ihrer Größe eine Verbindung zu den Ordinalzahlen hergestellt werden. Wie die Zahlwortreihe beim Zählen, ist auch diese Reihenfolge der Buntstifte gleichbleibend (Fthenakis et al., 2014).

Neben den (Alltags-)Vergleichen beschreibt Gaidoschik (2007, 2022) Spiele in diesem Bereich als lohnend und förderlich und integriert solche in seiner TIGER-Konzeption (Abschnitt 6.1). Eines dieser Spiele „Plättchen werfen“ (TIGER-Konzeption; Gaidoschik, 2017), bietet Kindern die Gelegenheit, diese neue Art der Zahlverwendung spielerisch einzuüben (Abschnitt 6.2). Wenn bspw. jedem roten Plättchen genau ein blaues Plättchen zugeordnet werden kann, sind gleich viel rote wie blaue Plättchen. Auf dieser Basis kann geklärt werden, was mit „um eins/zwei ... mehr“ gemeint ist: Man führt eine Eins-

zu-Eins-Zuordnung durch, auf einer Seite bleibt aber eins oder zwei ... übrig, „ohne Partner“ – um diese ein, zwei ... ist dann die eine Menge „mehr“ (und zugleich die andere Menge weniger). Die Spielvariante „Plättchen werfen“ wird auch in der vorliegenden Arbeit als ein Baustein für diese frühe Phase des Mathematiklernens integriert (Kapitel 6 und Kapitel 8).

Andere Autor\*innen wie Nührenböcker und Tubach (2014) beschreiben in diesem Zusammenhang das ähnlich konzipierte Spiel, wie das oben beschriebene, „Plättchen werfen“ mit dem Namen „Wer hat mehr?“. Bei dieser Variante werden zusätzlich ein oder zwei Punktwürfel und ein Spielplan verwendet. Die Spieler würfeln und legen die gewürfelte Anzahl von Plättchen auf den Spielplan. Mit Hilfe des *Anzahlvergleiches*, somit am besten, ohne zu zählen, nimmt der Spieler die Plättchen, die er in der Runde mehr hat und legt diese in seinen „Speicher“, ein Zehner- oder Zwanzigerfeld. Als Lernbegleitung (Abschnitt 3.3.1) gilt es in diesem Zusammenhang, Lernende in deren Fähigkeit des Strukturierens von Mengen entwicklungsangemessen und adaptiv zu begleiten. Entsprechende Impulsfragen „Wie kannst du leicht sehen, wie viele es sind? Wie kannst du leicht sehen, wie viele mehr es sind?“ stellen nicht das Ergebnis in den Mittelpunkt, sondern den Prozess des (kindlichen) Denkens. Dieser wesentlich lohnende Bereich der strukturierenden Mengenwahrnehmung, des nicht-zählenden Erfassens von strukturierten Mengen, wird in den folgenden Abschnitten ausführlich herausgearbeitet.

### **2.2.3 Strukturierte, nicht-zählende Anzahlwahrnehmung und -erfassung**

*„The beauty [...] is, in many cases, a highly abstract, inner beauty of abstract form and logical structure, a beauty that can be observed, and appreciated, only by those sufficiently well trained in the discipline”.*

*Devlin, 1997, p. 6*

Kinder und Erwachsene können die Anzahlen von zwei-, drei-, und vier-elementige Mengen *auf einen Blick* erkennen, *ohne* sie zu zählen (Clements, 1999; Dehaene, 1999). Andere Autor\*innen (Benz et al., 2015; Gaidoschik, 2022) beschreiben das Phänomen der Simultanauffassung oder -erfassung von einem Element bis fünf Elemente und beziehen sich dabei auf die Untersuchungsergebnisse u. a. von Starkey und Cooper (1995). Scherer (1999b) weist darauf hin, dass die auf einen Blick erfassbare Anzahl bei lernschwachen Kindern wahrscheinlich noch geringer ist. Diese Fähigkeit, die Kinder bereits sehr früh im Alter von etwa zwei Jahren beherrschen, wird als *subitizing* (italienisch subito: „plötzlich, sofort“; in deutscher Literatur: „Simultanerfassung“) bezeichnet. Entgegen früheren Annahmen, wie beispielsweise jenen von Wynn (1992), die davon

ausging, dass subitizing numerisches Wissen enthält, handelt es sich laut Moser Opitz (2008) vielmehr um eine Mengenrepräsentation, welche (wahrscheinlich) getrennt vom Zählwissen sei, dem „auch andere Lernmechanismen zugrunde liegen als dem Zählen“ (Moser Opitz, 2008, S. 83).

Diese Fähigkeit zur Simultanerfassung ist demnach bei den meisten Kindern mit Schuleintritt längst vorhanden. Dennoch wird es auch in dieser frühen Phase des Mathematiklernens Kinder geben, die Schwierigkeiten bei der Simultanerfassung haben und die auch Anzahlen von drei und/oder vier *nur* zählend ermitteln können. Gaidoschik (2007) und auch Scherer und Moser Opitz (2010) weisen darauf hin, dass es auch diesen Kindern in der Regel gelingen könne, Anzahlen nicht zählend zu ermitteln. Damit diesen Kindern wesentliche Einsichten in diesem Bereich nicht komplett verwehrt bleiben oder sie entscheidende Schritte beim Mathematiklernen und -treiben nur sehr langsam und/oder sehr spät machen, bräuchten sie häufig eine entwicklungsangemessene, adaptive und vor allem intensive Lernbegleitung (Abschnitt 3.3.1).

Bei diesen Aktivitäten zur Simultanerfassung (sofern sie die Kinder noch benötigen) wird in der aktuellen Fachliteratur in der Regel empfohlen, den Kindern eine Menge nur so lange zu zeigen, sodass das Abzählen der einzelnen Elemente nicht möglich ist. In Anlehnung an Weichbrodt (1994) hat sich in diesem Zusammenhang der Begriff „Anzahl-erfassung im Blitz-Blick“ eingebürgert (Gaidoschik, 2007; Gerster, 2009; Padberg & Benz, 2020; Rechtsteiner-Merz, 2011, 2013; Schultz et al., 2017; Wittmann & Müller, 2004, 2017).

Bei dieser Erfassung von Anzahlen „auf einen Blick“ wird unterschieden, ob es ein *figurales Wiedererkennen* gelernter *Muster* wie etwa der Zahldarstellungen auf einem Spielwürfel ist, oder ob Anzahlen auch in anderen Anordnungen, insbesondere auch in ungegliedert linearen Anordnungen, simultan erfasst werden. Schultz et al. (2017) weisen darauf hin, dass Kinder und Erwachsene in der üblichen Zahldarstellung auf Spielwürfeln beispielsweise auch fünf Punkte simultan erkennen, da wir diese Anordnung als Standard-Darstellung bereits kennen. Schultz et al. beschreiben weiters, dass wir auch bei der spontanen Darstellung mit Fingern ein Muster einprägen, wiedererkennen und mit einem Zahlwort verknüpfen können, ohne einen Zählvorgang tatsächlich durchzuführen.

Das Wiedererkennen von figuralen Mustern ist nach Schultz et al. (2017) *eine* wesentliche, wichtige Lernvoraussetzung in dieser frühen Phase des Mathematiklernens. Die Autor\*innen beziehen sich in der Förderung vor allem auf figurale Muster von Würfelbildern. Dennoch sei das ganzheitlich figural erkannte Würfelbild gemäß Schultz et al.

noch keine Garantie, dass Kinder, mit Gaidoschik (2010) gefordert, Zahlen als „Zusammensetzungen aus anderen Zahlen“ (S. 121) denken (Abschnitt 2.2.3.1).

In diesem Zusammenhang sollen nach Gaidoschik (2007, 2010, 2022) und Schultz et al. (2017) die Kinder ihre Aufmerksamkeit nicht nur auf das Ganze als undifferenziertes Kennen der Würfel- und/oder Fingerbilder lenken, sondern ebenso auf seine Teile. Ein Verbinden der Perspektiven auf das Ganze und auf die Teile sei laut Gaidoschik und Schultz et al. eben dann lohnend für ein tragfähiges Zahlverständnis, aus dem *nicht-zählende flexible* Rechenkompetenzen entwickelt werden können (Abschnitt 2.2.3.3).

Von der Fähigkeit, Anzahlen bis drei, vier oder fünf „auf einen Blick“ zu erkennen, ist begrifflich und inhaltlich die quasi-simultane bzw. strukturierte, nicht-zählende Anzahlerfassung (*conceptual subitizing* bei Clements, 1999, „strukturierte Anzahlerfassung“ bei Gerster & Schultz, 2004, „quasi-simultane Anzahlauffassung und -erfassung“ bei Benz et al., 2015 oder bei Häsel-Weide & Nührenböcker, 2015 oder bei Moser Opitz, 2008 oder bei Radatz et al., 1996 oder bei Wittmann & Müller, 2004; oder „rechnendes Zählen“ bei Wittmann & Müller, 2017) zu trennen.

In diesem Zusammenhang wird die Fähigkeit gemeint, Anzahlen strukturiert wahrzunehmen und zu erfassen. Während Anzahlen bis drei, vier oder fünf simultan, somit ohne zu zählen ermittelt werden können, kann eine quasi-simultane Anzahlerfassung bei größeren Mengen nur dann gelingen, wenn diese sowohl in ihrer Gesamtheit als auch als Zusammensetzung der Teile bzw. der Gruppen erkannt werden (Benz et al., 2015; Gaidoschik, 2010; Ruwisch, 2015; Wittmann & Müller, 2004). So sollen Kinder beispielsweise eine Anzahl an Plättchen nicht durch einzelnes Antippen und Abzählen (Abschnitt 2.2.1) jedes einzelnen Plättchens bestimmen, sondern, als eine Möglichkeit, die Mengen umordnen und so gruppieren, sodass sie die Gruppen an Plättchen je „auf einen Blick“ erfassen können.

In diesem Zusammenhang unterscheiden Benz et al. (2015; dazu auch Benz 2011 und Steffe und Cobb, 1988) zwei Schritte der Lösungsprozesse: „Schritt 1: Der Prozess der Wahrnehmung der Anzahl; Schritt 2: Der Prozess der Bestimmung der Anzahl“ (S. 134). Wie in Tabelle 1 dargestellt, formulieren die Autor\*innen beim ersten Schritt weitere drei Möglichkeiten der Anzahlwahrnehmung und daraus folgernd verschiedene Prozesse der Anzahlbestimmung.

**Tabelle 1***Lösungsprozesse bei Anzahlwahrnehmung und Anzahlbestimmung (Benz et al., 2015, S. 134)*

| Schritt 1: Anzahlwahrnehmung                                                                                                                                                | Schritt 2: Anzahlbestimmung                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Anzahl als Menge einzelner Elemente wahrnehmen                                                                                                                              | Jedes einzelne Objekt wird gezählt – Alles Zählen Wissen aufgrund der Simultanerfassung bei Anzahlen bis zu 3 und 4 Elementen |
| Anzahl als Ganzes wahrnehmen                                                                                                                                                | Wissen aufgrund von Simultanerfassung wegen der Kenntnis einer Figur (Würfelbilder bis 6 oder Fingerbilder bis 5)             |
| Anzahl als Zusammensetzung verschiedener Teilmengen wahrnehmen                                                                                                              | Jedes Objekt einzeln zählen<br>Weiterzählen                                                                                   |
| Identifizieren der Teilmengen                                                                                                                                               | Rechnen                                                                                                                       |
| Strukturieren der Anzahl in verschiedene Teilmengen                                                                                                                         | Wissen (Quasi-Simultanerfassung)                                                                                              |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>- Teilmengen können als einzelne Elemente wahrgenommen werden</li> <li>- Teilmengen können als Ganzes wahrgenommen werden</li> </ul> |                                                                                                                               |

In der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik und darüber hinaus herrscht weitgehend Konsens darüber, dass neben dem anzahl erfassenden Zählen (Abschnitt 2.2.1) und den Anzahlvergleichen (Abschnitt 2.2.2) gerade die strukturierte, nicht-zählende Anzahlwahrnehmung und -erfassung als wesentliche Fähigkeit im frühen Mathematiklernen für alle Kinder gilt. Diese sei deshalb zentral für das weitere kindliche Lernen, weil sie den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder und tragfähiger Vorstellungen zu Zahlen unterstütze (Boaler et al., 2016; Benz et al., 2015; Clements, 1999; Dornheim, 2008; Gaidoschik, 2010, 2022; Häsel-Weide, 2016; Häsel-Weide et al., 2014; Lüken, 2012; Padberg & Benz, 2020; Rechtsteiner-Merz, 2011, 2013; Scherer, 1999b; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schultz et al., 2017; Wittmann & Müller, 2009, 2017). Dazu formulieren Wittmann und Müller (2009, S. 15): „Je besser ein Kind die gruppenweise Anzahlbestimmung beherrscht, desto leichter, schneller und sicherer kann es später rechnen“. Abschnitt 2.2.3.3 beschäftigt sich auch mit dieser Thematik. So konnten Sprenger und Benz (2020) in ihrer Untersuchung mit 95 5-Jährigen zeigen, dass der Großteil der Kinder in diesem Alter bereits Strukturen wahrnehmen und sie zur Bestimmung der Kardinalität nutzen. Es scheint auch Kinder in diesem Alter zu geben, die eine Struktur wahrnehmen,

diese aber nicht zur Bestimmung der Kardinalität verwenden können. Die Autorinnen schlussfolgern sachlogisch aus ihrer Untersuchung, dass eine Wahrnehmung und Erfassung von Strukturen mögliche elementare Lernbereiche für diese frühe Phase des Mathematiklernens sind. Als Implikationen für die frühe mathematische Bildung werden abgeleitet, dass es einerseits das Bewusstsein für Strukturen bei den Pädagog\*innen zu wecken, andererseits einen geeigneten Weg zu finden gilt, über Strukturen gemeinsam mit Kindern zu kommunizieren.

Dass es grundsätzlich möglich ist mit allen Kindern in dieser frühen Phase des Mathematiklernens Anzahlen wahrzunehmen und zu bestimmen, zeigt oben beschriebene Untersuchung von Sprenger und Benz. Wie notwendig wichtig diese Kompetenzen sind, beschreibt auch Steinweg (2009), wonach Kinder, welche in der *ordinalen Zahlauffassung* (Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 2.2.3.2) denken, eher dazu neigen, Objekte so anzuordnen, dass eine strukturierte Anzahlwahrnehmung und -erfassung nur schwer gelingen kann. Die Autorin rät deswegen dazu, diese Kompetenzen mit allen Kindern vertieft zu üben.

Und darüber hinaus: Wie fundamental bedeutend die Kompetenz der *nicht-zählenden Anzahlwahrnehmung und -erfassung* in der vorschulischen und schulischen Bildung für alle Kinder ist, wird auch deutlich

- bei Clements, wenn er betont, dass das Erkennen mathematischer Strukturen eine wichtige Fertigkeit ist, welche Kinder bereits vor Schuleintritt durch gezielte Förderung erwerben sollten, „Conceptual subitizing must be learned and therefore be fostered, or *taught*, in this broad sense“ (Clements, 1999, p. 402, Hervorhebung im Original).;
- oder bei Wittmann und Müller (2017), wenn sie mit dem Begriff „rechnendes Zählen“ für die *strukturierte Anzahlerfassung* im Anschluss an Clements inhaltlich fordern, „dass das rechnende Zählen schon früh bewusst gefördert wird. Damit kann man verhindern, dass sich Kinder ausschließlich auf das Abzählen verlassen und zu ‚zählenden Rechnern‘ werden“ (S. 28). Die Autoren verstehen unter dem Begriff „rechnendem Zählen“, wenn Anzahlen nicht zählend, sondern unter Nutzung von mathematischen Gesetzmäßigkeiten „vorteilhaft“, somit „mit geringem Rechenaufwand“ (S. 27) bestimmt werden.
- oder bei Benz und Walz (2013), wenn sie in diesem Zusammenhang und im Anschluss an Wittmann und Müller schreiben: „Strukturierte Anzahldarstellungen eröffnen viele verschiedene Möglichkeiten der Anzahlbestimmung. Um diese



nicht nur zählend nutzen zu können, müssen jedoch die Strukturen wahrgenommen werden“ (S. 17). Die Autorinnen beschreiben konkrete Erkundungstouren für diese frühe Phase des Mathematiklernens, um mit Kindern den Blick für Strukturen zu schärfen.

- oder bei Lüken, die in diesem Zusammenhang in Anlehnung an die Untersuchungsergebnisse von Hoch und Dreyfus (2006) einen *early structure sense* formuliert, um eben die Bedeutung eines Struktursinns hervorzuheben. Sie spricht davon, dass „ohne ‚Struktursinn‘ kein erfolgreiches Mathematiklernen“ stattfinden könne. Das Konzept Muster und Struktur dürfe

nicht implizit bleiben, denn [...] gerade die schwachen Kinder sind nicht selbstständig in der Lage, Muster und Strukturen zu erfassen, die Ideen von Regelmäßigkeit, Ordnung und Beziehung aus einer statischen Anordnung herauszulösen und benötigen folglich Unterstützung in der Ausbildung und Weiterentwicklung ihrer Muster- und Strukturkompetenzen (Lüken, 2012, S. 218);

- oder bei Scherer, wenn sie ähnlich wie Lüken die Bedeutung von gezielten Aktivitäten zur „strukturierten Zahlerfassung“ besonders auch bei Kindern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen betont (Scherer, 1999b);
- oder bei Rechtsteiner-Merz, die in ihrer empirischen Untersuchung bei Erstklässlern zeigt, dass „mithilfe kontinuierlicher Aktivitäten zur Schulung des Zahlenblicks flexible Rechenkompetenzen“ entwickelt und gefördert werden können (Rechtsteiner-Merz, 2013);
- oder bei Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz und Wittich, wenn sie davon sprechen, dass „die zentralen strukturierten Zahldarstellungen [sollen] schließlich zu mental verfügbaren Stützpunktwissen automatisiert werden“ (Häsel-Weide et al., 2014) sollen.

Mit dieser Auflistung zentraler Formulierungen, Inhalte und Denkweisen einiger Autor\*innen, die in den Ausführungen, einzelnen Abstufungen und Zielsetzungen durchaus unterschiedlich ausfallen, soll zu einer in diesem Zusammenhang stehenden Thematik angeknüpft und unterstrichen werden, dass innerhalb der Fachdidaktik grundsätzliche Übereinstimmung darüber besteht, dass im Zentrum dieser frühen Phase des Mathematiklernens wesentlich das Erarbeiten von „Strukturen“ und „Beziehungen“ sind. Aus fachdidaktischer Sicht wird Mathematik als „Wissenschaft von den Mustern“ bezeichnet (Devlin 1997, 2002; Steinweg, 2001, 2014; Wittmann, 2003, 2016). Vor diesem Hintergrund

sollen diese Muster und Gesetzmäßigkeiten in Unterricht und Förderung mit den Kindern – auf dem jeweiligen Niveau – erkannt, fortgesetzt und begründet werden. Steinweg benennt in diesem Zusammenhang wesentliche Tätigkeiten (2014; dazu auch 2001): „i) erkennen – sehen, hineindeuten; ii) nutzen – replizieren, fortsetzen, Analogien erkennen, transferieren; iii) beschreiben – mündlich oder schriftlich kommunizieren; iiiii) begründen – argumentieren, erklären, verallgemeinern“ (S. 56). Auch Benz und Walz (2013) listen verschiedene Teilkompetenzen auf, um Anzahlen wahrzunehmen und zu bestimmen: „1) Wahrnehmen der *Struktur*; 2) Bestimmen der Teilmengen (z.B. durch Simultanerfassung); 3) Zur Anzahlbestimmung der Gesamtmenge gibt es verschiedene Möglichkeiten: *Zurückgreifen auf Wissen*; z.B. 3 und 4 sind 7; dies wird oft *Quasi-Simultan-Erfassung* genannt, *Weiterzählen*, z.B. von der 4 aus, *Zählen* aller Elemente“ (S. 17, Kursivsetzung im Original).

In diesem Zusammenhang *denkt* ein Kind bei diesen Aktivitäten zur strukturierten Anzahlerfassung im besten Fall beispielsweise zur acht eine Würfelsechs, an die sich zwei weitere Elemente anschließen. Genauso kann diese bildhafte *Vorstellung von Zahlen* mit Fingern abgespeichert sein, nämlich, indem das Kind bei acht eine volle Hand mit fünf Fingern an der einen und drei an der anderen Hand denkt. Das damit verbundene Zahlwissen lautet: „Acht besteht aus sechs und zwei. Sechs und zwei ergeben zusammen acht. Acht besteht aber auch aus fünf und drei. Fünf und drei sind acht usw.“ (Abschnitt 2.2.3.1).

Nun kann eine größere Menge als vier oder fünf in der Regel nur dann *nicht zählend* bestimmt werden, wenn das Ganze visuell in einzelne Teile geteilt und diese letztlich gedanklich wieder zum Ganzen zusammengefügt werden. Da aber nur Anzahlen bis vier oder fünf „auf einen Blick“ (s.o.) erfasst werden können, verlange es nach Gaidoschik (2010) „eine *bewusste Gliederung* von Repräsentanten größerer Anzahlen in simultan erfassbare Teilanzahlen“ (S. 216). In der aktuellen mathematikdidaktischen Literatur findet man deshalb Anregungen für frühe Aktivitäten, bei denen Kinder Elemente ungeordneter Mengen durch Umgruppieren oder Bündeln so anordnen, dass die einzelnen Teilanzahlen „simultan“ erfasst werden (Benz, 2010; Gerster, 2005; Gerster & Schultz, 2004; Gaidoschik, 2007, 2010, 2022; Moser Opitz, 2008; Radatz et al., 1996; Rechtsteiner-Merz, 2013; Schultz et al., 2017; Wittmann & Müller, 2009, 2017).

Das Erfassen größerer Anzahlen im „Blitzblick“ setzt demnach voraus, dass Kinder Teile im Ganzen sehen und diese richtig *interpretieren*, wie obenstehend auch Steinweg (2014, dazu auch 2001) gefordert und in diesem Zusammenhang wesentliche Tätigkei-

ten auflistet hat. Bei diesen Aufgaben, bei denen Strukturen genutzt werden, um Anzahlen „sehen“ zu können, werden je nach Autor\*in Aktivitäten mit Finger- und Punktebildern (Boaler & Chen, 2017; Gaidoschik, 2007; Gerster, 2009; Schütte, 2008; Padberg & Benz, 2020; Steinweg, 2009; Wittmann & Müller, 2004) oder Übungen mit Würfelbildern (Gaidoschik, 2022; Gasteiger, 2010; Schultz et al., 2017) vorgeschlagen (Abschnitt 2.2.3.2 und Abschnitt 2.2.3.3).

Bei diesen Aktivitäten zum nicht-zählenden Erfassen von Anzahlen nützen Kinder ihr *Vorwissen*, indem sie wissen, dass beispielsweise zwei Vierer 8 ergeben (sofern die Anzahl nicht zählend ermittelt wird). Nach Gaidoschik (2010) erfordere dies ein „*bewusstes Wahrnehmen* der Teilanzahlen und ein *wissendes Zusammensetzen* dieser Teilanzahlen zum Zahlganzen“ (S. 217):

Ein ‚wissendes Zusammensetzen‘ ist dies deshalb, weil man beispielsweise in einer Darstellung der Acht als Doppel-Vier ja nur jeweils die Vier simultan erfassen kann. Die Erkenntnis, dass es sich um insgesamt acht handelt, wird daraus nur, wenn man eben bereits vorher wusste, dass acht aus zweimal vier besteht. Andernfalls müsste man die Gesamtzahl selbst dann zählend ermitteln, wenn man die Teilanzahlen simultan erfasst hat. (Gaidoschik, 2010, S. 217)

In der Regel wird bei diesen Übungen zur Anzahlwahrnehmung und -erfassung von den genannten Fachautor\*innen empfohlen, besonders auf die *Darstellung der Fünfer- und Zehnerstruktur* zu achten. In diesem Zusammenhang werden die Strukturen der Fünf und Zehn (bei strukturierten Darstellungen und Materialien) genutzt, sodass die Anzahl der Objekte nicht nur durch reines Auszählen ermittelt wird. Dass u.a. diesen beiden Zahlen eine besondere Bedeutung zugesprochen wird, hängt mit unserem Zahlensystem zusammen. Bei zehn als Doppelfünf werden die Elemente *zu zehnt* zusammengefasst, um große Anzahlen schneller erfassen zu können. Man spricht dabei von „*bündeln*“. Entsprechend der Begrifflichkeit *power of five* von Flexer (1986) hat sich in der deutschsprachigen Fachdidaktik der Terminus „Kraft der Fünf“ durchgesetzt (Gaidoschik, 2007; Gerster, 2009; Wittmann & Müller, 2004). Die Kinder sollen in diesem Zusammenhang lernen, dass zwei Fünfer einen Zehner ergeben und folglich die Hälfte von zehn fünf ist. Vielen Kindern wird diese Erkenntnis schon aus dem Kindergarten, aus dem Alltag, wie aus Kinderreimen und/oder als Fingerspiel bereits bekannt sein. Sie verstehen, dass eine Hand fünf Finger hat und an beiden Händen zusammen zehn Finger sind – ohne jedes Mal aufs Neue die Finger abzählen zu müssen! Auch für Kinder

mit einem Förderbedarf befürworten Ratz und Moser Opitz (2015) gerade Materialien, die die „Kraft der Fünf“ und die „Kraft der Zehn“ berücksichtigen.

Unter Bewusstmachung der oben dargestellten *Fünfer- und Zehnerstruktur* können die Kinder in weiterer Folge lernen, Anzahlen strukturiert im Zehnerfeld „auf einen Blick“ (s.o.) zu erfassen. Nun können Anzahlen ab fünf schlechthin nicht simultan erfasst werden, sondern dieser Blick muss den Kindern bewusstgemacht werden (sofern sie es nicht bereits selbst wahrgenommen haben). Ein Zehnerfeld bietet Platz für genau zehn Punkte (entsprechend den zehn Fingern auf beiden Händen); eine volle Reihe hat folglich fünf Punkte (entsprechend den fünf Fingern auf je einer Hand). Acht und neun Punkte kann man leicht sehen, weil ein oder zwei Punkte auf zehn fehlen. Sechs oder sieben Punkte können gut an der vollen Fünferreihe festgemacht werden (Gaidoschik, 2007).

Dass die konkreten Überlegungen und Empfehlungen der Autor\*innen zur Erarbeitung „innerer Bilder“ in dieser frühen Phase des Mathematiklernens keinesfalls identisch ausfallen, wird in Abschnitt 3.2.2 ausführlich dargestellt. Die Autor\*innen begründen die Vorzüge des jeweiligen Erarbeitungsmaterials unterschiedlich. Schultz et al. (2017) und Gaidoschik (2022) raten im Bereich der Anzahlvergleiche zu Aktivitäten mit unveränderten, ruhigen Würfelbildern, da „das *mentale* Hinzufügen, Zusammenfügen oder Abtrennen *am statischen Modell* [...] dem *auf Veranschaulichungen gestützten Rechnen* eine besondere Qualität“ (Schultz et al., 2017, S. 223, Hervorhebungen im Original) verleihe. Gaidoschik (2007) empfiehlt zusätzlich die Finger als „Einstieg in die Mathematik“ gerade deswegen, da zwei Sinneskanäle aktiviert werden würden: „Kinder *sehen* ihre Finger-Darstellungen, sie *spüren* diese aber auch“ (S. 47, Hervorhebungen im Original). Benz und Walz (2013), Benz et al. (2015), Benz et al. (2017) und Benz (2023) sprechen sich darüber hinaus für die strukturierte Mengendarstellung im Zehnerkarton aus.

Bei diesen Überlegungen (so im Sinne der Autor\*innen) gehe es freilich *nicht* um die Verabsolutierung des besten, einzig geeigneten ... Materials zur Erarbeitung einer tragfähigen Zahlauffassung. Gaidoschik (2007) formuliert in diese Richtung: „Es geht auch gar nicht darum, sämtliche Aufgaben des Zahlenraums bis zehn als Fingerhandlungen jeweils für sich abzuspeichern. [...] Für das *Erarbeiten der Einsicht in diese Zusammenhänge* ist es zielführend, die Finger um andere (gleichfalls strukturierte) Materialien zu ergänzen“ (S. 53, Hervorhebungen im Original). Ziel des Umgangs mit Material zur Erarbeitung sei ohnehin die „Ausbildung und flexible Nutzung mentaler Bilder“ (Krauthausen, 1995, S. 100). Das in diesem Zusammenhang zentrale ordinale und kardinale

Verständnis von Zahlen wurde in Abschnitt 2.2.2 beschrieben und wird in weiterer Folge im Verlauf dieser Arbeit in Abschnitt 2.2.3.2 und in Abschnitt 2.2.3.3 aufgegriffen.

Haben Kinder die strukturierten (Punkte-)Darstellungen im Zehnerfeld als *nicht-zählende* Einsicht verstanden und gesichert, ist es nach Gaidoschik (2007) und Schultz et al. (2017) ratsam, ihre Aufmerksamkeit auf seine Teile zu lenken. Sind das Ganze und seine Teile unmittelbar erfassbar, sollen sie diese (im besten Fall!) nicht zählend verbinden. Im Zehnerfeld mit Fünferstruktur kann neun als fünf und vier gesehen werden, aber auch als sechs und drei usw. Gleichzeitig weiß man das Bild des Ganzen, nämlich das „Neunerbild“ (Gaidoschik, 2007 und Schultz et al., 2017). Unterrichtsaktivitäten zu Zahlerlegungen nehmen anschließend in allen gängigen (deutschsprachigen) Konzeptionen für den frühen Arithmetikunterricht und in der Förderung eine grundlegende Rolle ein. Das in diesem Zusammenhang umschriebene Teile-Ganzes-Denken bringt Abschnitt 2.2.3.1 in aller Ausführlichkeit.

### ***Folgerungen für die nicht-zählende Anzahlerfassung im arithmetischen Anfangsunterricht***

In dieser frühen Phase des Mathematiklernens sei, neben dem anzahlerfassenden Zählen (Abschnitt 2.2.1) und den Anzahlvergleichen (Abschnitt 2.2.2), ein mit allen Kindern anzustrebendes Teilziel in dieser frühen Phase des Mathematiklernens eben die in diesem Abschnitt 2.2.3 beschriebene nicht-zählende Anzahlerfassung.

Vor diesem Hintergrund sollen Kinder im Bereich der „nicht-zählenden Anzahlerfassung“ beispielsweise in frühen Aktivitäten ungeordnete Mengen durch Umgruppieren oder Bündeln so anordnen, dass die einzelnen Teilanzahlen „simultan“ erfasst werden. Kinder sollten also Anzahlen selbst strukturieren und zudem ihre Denkhandlungen auch versprachlichen (Abschnitt 3.3.1). Zur Erreichung dieses Teilziels der „nicht-zählenden Anzahlerfassung“ wird in der Literatur zu Unterrichtsaktivitäten geraten, die bei den Autor\*innen durchaus sehr unterschiedlich ausfallen können, hingegen als Übereinstimmung den *Aufbau tragfähiger Zahlbilder* gemeinsam haben.

Gerade Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen seien nach Moser Opitz (2008) in der Regel nicht von sich aus in der Lage, mathematische Muster und Strukturen zu erkennen und mathematische Zusammenhänge zur Lösung zu finden und geschickt zu nutzen. Diese Kinder benötigen eine besondere fachliche Lernbegleitung, um Muster und Strukturen zu erfassen und dementsprechend auch nützen zu können. In diesem Zusammenhang argumentiert die Autorin, dass sich die inneren Bilder gerade bei Kin-

dern mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen oft nicht „einfach so“ entwickeln, sondern dieser Prozess müsse vielmehr gezielt angeleitet und begleitet werden (Moser Opitz, 2008).

Nach Gaidoschik (2007) und Gaidoschik und Bayer (2017) sollen Kinder (nicht nur jene, die sich in diesem Bereich schwertun) von Beginn an immer wieder angeregt werden, Anzahlen schon bis vier als Zusammensetzungen beziehungsweise in Beziehung zu fünf zu beschreiben, wie beispielsweise „vier ist aus zwei und zwei zusammengesetzt“; oder „vier ist um eins weniger als fünf“. Solche Einsichten helfen im Sinne der Autor\*innen aber auch jenen Kindern, die Defizite im Bereich der Simultanerfassung haben und anfangs auch Anzahlen von drei nur zählend ermitteln können. Diese werden zunächst auch drei bewusst als zwei und eins erfassen und erst dann in der Lage sein, auch „fünf als zwei und drei“ zu erfassen (Gaidoschik und Bayer, 2017).

Es bedarf also seitens der Lehrkraft differenzierte Beobachtung der entsprechenden Ausgangslage und darauf abgestimmt differenzierte Aufgaben zum „schnellen Sehen“. Auch in diesem Bereich lohnend sind Impulsfragen der Lernbegleitung, die die Kinder zum Nachdenken über ihr mathematisch Tun und Handeln anregen und sie gefordert sind, in ihren Worten zu beschreiben. „Wie kannst du leicht sehen, wie viele es sind? Wie kannst du schnell sehen, wie viele es sind?“ sind zielführend, um das kindliche Denken in dieser frühen Phase des Mathematiklernens und -treibens zu ergründen und darauf aufbauend weiterführende Aktivitäten zu setzen.

Gaidoschik (2007), Gaidoschik und Bayer (2017) und andere betonen in dieser frühen Phase des Mathematiklernens, dass als Grundlage für die weitere Nutzung der Kraft der Fünf jedenfalls bei *allen Kindern* zunächst die Zusammensetzungen bis fünf schon gut abgesichert sein sollten. Auf diese wesentlich wichtige Leistung, ein Ganzes als *Zusammensetzung* aus Teilen zu verstehen und zu wissen, dass diese Teile im Ganzen enthalten sind, wird in den folgenden Abschnitten näher eingegangen.

### **2.2.3.1 Teile-Ganzes-Denken**

*„Einzelheiten lehren, heißt Verwirrung stiften.  
Beziehungen unter den Dingen herstellen, bedeutet Erkenntnisse vermitteln.“  
Maria Montessori, 1988, S. 126*

Im angelsächsischen Raum hat sich vor allem Lauren B. Resnick ausführlich mit der Bedeutung des *part-whole schema* (Resnick 1983, 1989, 1992) in der frühen Phase des Mathematiklernens beschäftigt. Im deutschen Sprachraum wurde dieses Konzept und

dessen Bedeutung im Mathematikunterricht vor allem durch die von Gerster geleistete Übersetzung entsprechender Formulierungen von Resnick verbreitet.

Generell: In den Empfehlungen und Anregungen der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik gilt weitgehend Konsens darüber, dass der Erwerb des Teile-Ganzes-Denkens *ein* wesentlicher Lernschritt in dieser frühen Phase für alle Kinder ist.

Vor diesem Hintergrund wird in der aktuellen fachdidaktischen Literatur im deutschsprachigen Raum *part-whole schema* (Resnick 1983, 1989, 1992) je nach Autor\*in unterschiedlich übersetzt: Die Bezeichnung „Teile-Ganzes-Beziehungen“ findet sich etwa bei Gaidoschik (2022), „Teil-Ganzes-Schema“ bei Gerster und Schultz (2004) und bei Schäfer (2013), „Teil-Ganze-Beziehung“ bei Padberg und Benz (2020), „Teil-Ganzes-Verständnis“ bei Häsel-Weide et al. (2017), „Teil-Teil-Ganzes-Konzept“ bei Langhorst et al. (2011, 2012).

In der deutschsprachigen Literatur zur Umsetzung in Unterricht und Förderung finden sich auch unterschiedliche Formulierungen wie „Zahlenhäuser“ und Übungen zum „Zerlegen“ im Rahmen des Blitzrechenprogrammes bei Wittmann und Müller (2004), Übungen mit „Zahlenfreunden“ bei Peter-Koop und Rottmann (2013), oder Anregungen zu „Zahlen zerlegen und zusammensetzen“ in Unterricht und Förderung bei Gaidoschik (2007), Häsel-Weide und Nührenböcker (2017), Radatz et al. (1996), Padberg & Benz (2020) und anderen.

Auch die Entwicklungspsychologie hat diesem Lerngegenstand in den letzten Jahren Aufmerksamkeit geschenkt und das Konzept in Entwicklungsmodellen früher mathematischer Kompetenzen (wie etwa jenem von Krajewski, 2003, 2006, 2008, siehe dazu Krajewski & Ennemoser, 2013; oder jenem von Gerlach et al., 2007 beziehungsweise Fritz & Ricken, 2009) integriert.

In der vorliegenden Arbeit wird der Terminus „Teile-Ganzes-Denken“ verwendet, um hervorzuheben, dass nicht nur ein Teil des Ganzen in den Blick genommen wird – ohne die Vermutung anstellen zu wollen, dass einige der oben genannten Autor\*innen bei ihren gewählten Begrifflichkeiten (bspw. Teil-Ganzes-Schema) und den entsprechenden Ausführungen dabei nur einen Teil des Ganzen verstehen, sondern alle Teile des Ganzen. Lediglich bei direkten Zitaten einzelner Autor\*innen wird deren Begriffswahl im Folgenden übernommen.

### 2.2.3.2 Die Entwicklung des Teile-Ganzes-Schema nach Resnick

Resnick (1983, 1989, 1992) bezeichnet den Erwerb des Teile-Ganzes-Schemas (*part-whole schema*) als die wesentliche Leistung für die Entwicklung einer tragfähigen Zahlvorstellung der ersten Schuljahre in der Grundschule:

Probably the major conceptual achievement of the early school years [...] With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children. (1983, S. 114)

Kinder, die das Teile-Ganzes-Schema korrekt anwenden, verstehen zunächst, dass ein Ganzes aus Teilen besteht und diese Teile im Ganzen enthalten sind. Die Summe der Teile ist gleichwertig zum Ganzen. Die Entwicklung des Teile-Ganzes-Schemas beschreibt Resnick (1983, 1989, 1992) in vier Phasen, die nachstehend ausführlich beschrieben werden.

#### ***Phase I - Protoquantitative reasoning:***

Resnick (1989) weist auf einen engen Zusammenhang zwischen dem Zählen und dem Mengenverständnis hin. Sie schreibt den *protoquantitativen Schemata*, die sich auf das Verhältnis von Mengen und deren Teile beziehen, eine große Bedeutung bei der Entwicklung einer tragfähigen Zahlauffassung zu. Diese Einsicht über Beziehungen von Mengen entwickeln sich nach Resnick (1989) bei jungen Kindern vorerst eigenständig neben dem Wissen über Zahlwörter und/oder dem Wissen über Abzählverfahren (Abschnitt 2.2.1). Vorerst sei dieses Wissen „vorzählig“, somit ohne (exakte) Bestimmung von Anzahlen (Resnick 1989; siehe dazu auch Irwin, 1996).

Resnick (1983) verweist in diesem Zusammenhang auf „real-life situations in which partitions must be made but no exact quantification is required.“ (p. 146). Die Bestimmung der exakten Anzahl für die Anwendung dieser Schemata sei folglich im Sinne der Autorin in dieser frühen Phase des Mathematiklernens nicht notwendig (Resnick, 1983).

Innerhalb dieser Phase formuliert die Autorin drei protoquantitative Schemata, die sich getrennt voneinander entwickeln:



(1) Im Vergleichs-Schema (*compare-schema*) können Kinder im ungefähren Alter von zwei Jahren Mengen im Sinne von mehr, wenig, viel, weniger miteinander vergleichen, ohne diese Mengen zu zählen. Resnick (1991) formuliert hierzu folgendes: „They form a basis for eventual numerical comparison of quantity“ (p. 30).

Greenspan und Shanker (2007) verweisen in dieser Phase darauf, dass der Erwerb dieser Wörter mit emotional für Kinder wichtigen Situationen einhergehe: „‘Sehr viel’ ist mehr, als ein Kind erwartet. ‚Sehr wenig‘ ist weniger als erwartet. ‚Mehr‘ ist ein Hinweis auf etwas Gutschmeckendes [...]. ‚Nah‘ ist das Anschmiegen an die Mutter. ‚Später‘ meint ungeduldiges Wartenmüssen.“ (S. 63)

(2) Im Zunahme-Abnahme-Schema (*increase-decrease-schema*) können Lernende im Sinne der Autorin im Alter von etwa drei und vier Jahren Mengen danach beurteilen, ob etwas hinzu- oder weggenommen wird, beziehungsweise, ob die Menge gleichbleibt, weil sie nicht verändert wird:

Children have the underpinnings of number conservation well before they can pass the standard Piagetian test. They can be fooled by perceptual cues or language that distracts them from quantity, but they possess a basic understanding of addition, subtraction, and conservation. The protoquantitative increase/decrease schema is also the foundation for eventual understanding of unary addition and subtraction. (Resnick, 1991, p. 32)

(3) Das Teile-Ganzes-Schema (*part-whole-schema*): Kinder im Alter von etwa vier Jahren verstehen, dass Objekte ihrer Umgebung (bspw. ein Kuchen aus Kuchenstücken, ein Turm aus Klötzen) zusammensetzbar und teilbar sind. Ein Objekt kann in Teile zerlegt werden und die Zusammensetzung dieser Teile ergibt entsprechend die „gleiche Mächtigkeit“ wie das ursprüngliche Objekt (Resnick, 1989). Nach Langhorst et al. (2012) gewinnen Kinder in dieser Phase wesentliche Erfahrungen aus ihrem konkreten Alltag.

Die folgenden Überlegungen und empirischen Untersuchungen konkretisieren, wie sich die protoquantitativen Schemata und das Zählen entwickeln und wie diese Wissensbereiche zusammengeführt werden.

### ***Mentaler Zahlenstrahl – mental number line***

Resnick (1983) verweist darauf, dass Kinder mit Schulbeginn weitgehend eine Vorstellung von Zahlen entwickelt haben und spricht in diesem Zusammenhang von einem *mental number line* (mentaler Zahlenstrahl): Die Autorin versteht darunter, dass Zahlen

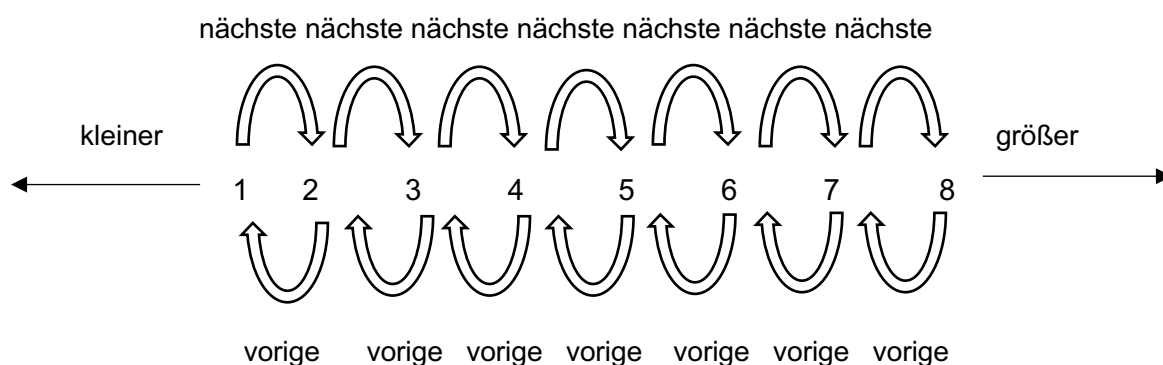
mit Positionen in einer Zahlwortreihe verknüpft werden. Jede Zahl ist um eins mehr oder weniger als der Vorgänger bzw. Nachfolger in der Zahlwortreihe.

Dieser mentale Zahlenstrahl befähigt die Kinder nach Resnick (1983) dazu, Mengen zu bestimmen und diese miteinander zu vergleichen. So könnten Kinder nach Resnick (1983) durch die Verbindung von Zählen und Vergleichen eine durchaus beachtliche Anzahl von arithmetischen Aufgaben lösen.

Vor diesem Hintergrund geht Resnick (1983) davon aus, dass die Zahlwörter nach und nach aus einer bestimmten Anzahl von Wörtern zur „Repräsentation von Quantitäten“ werden, bei dem jede Position auf dem mentalen Zahlenstrahl für eine Anzahl steht. Dieser Übergang findet nach Resnick durch wiederholtes Zählen statt, mit dem Zweck, eine Anzahl (Quantität) zu bestimmen (Resnick, 1983).

#### Abbildung 5

*Mentaler Zahlenstrahl (Gerster und Schultz, 2004, S. 76)*



Können Kinder in obiger Abbildung 5 zwei Zahlen miteinander vergleichen, haben sie nach Resnick (1983) ein inneres Bild der Zahlwortreihe abgespeichert und können so die Positionen der genannten Zahlen ansteuern. Lösen Kinder in weiterer Folge Textaufgaben, so genannte *story problems*, müssen sie nach Resnick (1983) nicht mehr als dieses Zahlverständnis des oben beschriebenen Zahlenstrahls aktivieren (dazu auch Abschnitt „Phase IV – Operational Reasoning“). Solange dieses Wissen an die Zahlwortreihe geknüpft ist, seien die Kinder nach Resnick (1983) nicht in der Lage, Anzahlen miteinander in Beziehung zu setzen, sondern wissen die Beziehungen „größer“ und/oder „kleiner“, im Sinne von „kommt in der Zahlwortreihe früher oder später“. In den Worten Resnicks (1983): „As long as the number line alone is used, there is no way to relate quantities to one another except as larger or smaller, further along of further back in the line“ (p. 114).

Auf das in diesem Zusammenhang angedeutete und wesentliche ordinale vs. kardinale Zahlverständnis wird in Abschnitt 2.2.3.3 eingegangen.

Laut Resnick (1983) ändere sich dieses an die Zahlwortreihe gebundene Zahlverständnis, wenn Zahlen als Teile-Ganzes-Beziehungen verstanden werden (Abschnitt „Phase III – Numerical Reasoning“).

### ***Getrennte Entwicklung des Zählens und des protoquantitativen Wissens***

Eine Untersuchung von Irwin (1996) gibt Einsichten darüber, wie sich das Zählen und die protoquantitativen Schemata entwickeln, ob und inwiefern diese Wissensbereiche zunächst getrennte und voneinander isolierte sind. Die Autorin untersuchte 100 neuseeländische Kinder im Alter zwischen 4 und 8 Jahren. Erforscht wurde, ob die Kinder Einsichten in die Kompensation und/oder Kovariation hatten und in diesem Zusammenhang verstünden, dass wenn man einen Teil einer Menge vergrößert oder verkleinert, dies zur kovarianten Veränderung des Ganzen führt; sowie, dass sich das Ganze nicht verändert, wenn man einen Teil verändert und diese Veränderung im anderen Teil kompensiert. Vor diesem Hintergrund wurden bei einigen Aufgaben protoquantitative Schemata insofern bewusst herausgefordert, indem nicht abgezählte Mengen benützt wurden. Hingegen bei anderen Aufgabenstellungen mussten die Mengen von den Kindern gezählt werden. Bei der Aufgabenlösung bedurfte es somit ein Wissen über das Zählen, als auch ein Wissen über die protoquantitativen Schemata (Irwin, 1996).

In dieser Untersuchung von Irwin (1996) wurden den Kindern zwei Puppen gezeigt und die Aufgabe erteilt, eine Anzahl an Bonbons gerecht an die beiden Puppen zu verteilen. Im Anschluss daran bekam jede Puppe zwei Schachteln und die Anzahl der Bonbons wurden zufällig auf diese Schachteln verteilt. Ohne zu zählen sollte das Kind wissen, dass die Bonbons zwischen den beiden Puppen nach wie vor gerecht verteilt sind. Dann führte die Untersucherin verschiedene Veränderungen – alle im Kontext einer Geschichte – aus: sie gab der einen Puppe ein Bonbon dazu oder nahm ein Bonbon weg; sie gab ein Bonbon aus der einen Schachtel heraus und legte es in die andere Schachtel von der gleichen Puppe. Dann sollte es eine Begründung seines Urteils (*Is it still fair?*) abgeben und diese Meinung gegenüber einer dritten Puppe, die bei jeder Aufgabenstellung einen entgegengesetzten Standpunkt hatte, vertreten.

Irwin (1996) konnte in dieser Untersuchung zeigen, dass 72 % der 4-Jährigen, 81 % der 5-Jährigen und 92 % der 6-Jährigen ein ausgeprägtes Verständnis der protoquantitativen Schemata entwickelt hatten. Bei den Fehlern zeigte sich bei den Kindern ein

durchgängiges Muster, wonach sie sich bei der Frage nach Veränderung im Ganzen (zu sehr) auf die Veränderung an einem Teil konzentrierten. Die Autorin schlussfolgert aus ihrer Untersuchung, dass Kinder im Alter von etwa sechs Jahren bereits unerschütterliche, somit tragfähige Einsichten in protoquantitative Teile-Ganzes-Beziehungen haben (Irwin, 1996).

### ***Zusammenführung von Zähl- und Teile-Ganzes-Schemata***

Irwin (1996) führte mit denselben Kindern eine (Folge-)Untersuchung durch, bei welcher das Kind zu Beginn die Aufgabe erhielt eine Anzahl an Knöpfen zu zählen. Die Untersucherin gab diese Anzahl an Knöpfen in die eine Hand, nahm einen Teil dieser Knöpfe und gab sie in die andere Hand. Beide Hände wurden zu Fäusten geschlossen. Somit waren beide Anzahlen an Knöpfen beziehungsweise beide Teile dem Kind „bewusst“, da es das Ganze, die Anzahl an Knöpfen, vorab abgezählt hatte. Dann wurde das Kind selbst gebeten bestimmte Veränderungen durchzuführen: einen Knopf einer Hand hinzufügen oder einen Knopf aus einer Hand entnehmen oder einen Knopf von der einen Hand in die andere geben.

Die Beantwortung der Frage, wie viele Knöpfe in beiden Händen zusammen sind, war für die Kinder weitaus schwieriger als die oben beschriebene Aufgabenstellung der ersten Untersuchung: In dieser Untersuchung von Irwin (1996) konnten 58 % der 4-Jährigen, 66 % der 5-Jährigen, 88 % der 6-Jährigen und 95 % der 7-Jährigen die Aufgabe angemessen lösen. Auch bei dieser Aufgabenstellung sollte jedes Kind seine Begründung abgeben, um Rückschlüsse darüber zu gewinnen, ob und inwiefern sich das Zählen und das protoquantitative Verständnis zusammenführen lassen. Diejenigen Kinder, welche in oben beschriebener Aufgabenstellung mit den Puppen protoquantitative Teile-Ganzes-Einsichten hatten, zeigten bei dieser Aufgabe mit den Knöpfen folgende Vorgehensweisen und Denkvorstellungen: i) Sie hatten keine Vorstellung darüber, wie sich gezählte Mengen bei Veränderungen verhalten. ii) Sie hatten verstanden, wie Zahlen um eins größer werden, aber nicht um eins kleiner. iii) Sie bemühten sich ins Gedächtnis zu rufen, wie viele Knöpfe anfangs in welcher Hand waren und berechneten dann die Anzahl an Knöpfen in beiden Händen zusammen. iiiii) Sie konnten auf das Ganze schließen und folgerten angemessen (Irwin, 1996).

In weiterer Folge sollten die 5- und 6-Jährigen in der Untersuchung von Irwin (1996) schätzen, wie viele Knöpfe in einer Hand sein können, wenn insgesamt 6 beziehungsweise 8 in beiden Händen gemeinsam sind. Nur wenige Kinder schätzten diese Teile

entsprechend: 75 % der Kinder mit 5 Jahren nahmen an, dass 6 beziehungsweise 8 Knöpfe sowohl in der einen Hand, als auch in der anderen Hand sind und dass sich, nachdem ein Knopf von der einen Hand zu anderen wechselte, 6 Knöpfe in 5 und 7 aufteilen beziehungsweise 8 Knöpfe in 7 und 9. Hingegen 55 % der Kinder im Alter von 6 Jahren schätzten „6 hier und kein Knopf hier“ und „8 hier und keiner dort“. 36 % der 6-Jährigen konnten diese Aufgabe richtig lösen, beispielsweise 8 aufgeteilt in 6 und 2 (Irwin, 1996).

### ***Schritte der Zusammenführung des mentalen Zahlenstrahles und den protoquantitativen Schemata***

Irwin (1996) geht davon aus, dass eine erste Zusammenführung von den protoquantitativen Schemata und dem Zählen das Zunahme-Abnahme-Schema (*increase-decrease-schema*) auch die Nachbarzahlen betrifft. Nach Resnik (1983) verstünden Kinder die Zusammensetzungen der Zahlen erst später, nachdem die Einsicht in protoquantitative Teile-Ganzes-Schemata bereits lange durchdrungen wurde und, wenn keine Zahlen verwendet werden würden.

Wesentlich für weitere Schritte im Teile-Ganzes-Denken ist demzufolge laut Resnick (1983) die Anwendung eines anfangs „vorzähligen“ Schemas auf Zahlen, welches ausführlich nun folgend dargestellt wird.

### ***Phase II – Mathematics of quantities***

Nach Resnick (1992) verbinden Kinder in dieser Phase, *mathematics of quantities*, das protoquantitative Wissen mit *konkret* vorliegenden Anzahlen oder auch nur vorgestellten konkreten Mengen. In dieser Verbindung mit Konkretem gewinnen sie erste Einsichten über Beziehungen zwischen abstrakten Anzahlen (Resnick, 1992). So wissen Kinder beispielsweise, dass sieben Finger in fünf Finger und zwei Finger verteilt werden können und drei und vier Finger sieben Finger ergeben (Resnick, 1992). Gaidoschik (2010) verweist in diesem Zusammenhang, dass das Teile-Ganzes-Konzept auf dieser Ebene „im Grunde nicht mehr als das [bedeutet], was unter ‚kardinales Zahlverständnis‘ (und somit bereits auf ‚Level I‘ in den Modellen von FUSON ausgeführt wurde“ (S. 112, Großschreibung im Original).

### ***Phase III – Numerical reasoning***

Ab dieser Phase, *numerical reasoning*, verstünden Kinder nach Resnick (1992), dass nicht nur konkrete Mengen, sondern auch abstrakte Zahlen in Anzahlen geteilt und wieder zur Gesamtanzahl zusammengesetzt werden können. Resnick (1992) spricht im Gegensatz zu Einsichten bei Mengen, *mathematics of quantities*, ab der Phase III von Einsichten bei Zahlen, *mathematics of numbers*. Vor diesem Hintergrund geht Resnick (1992) in weiterer Folge davon aus, dass ein Teile-Ganzes-Denken von Zahlen im kleinen Zahlenraum entwickelt wird. Dabei sei nach Gerster und Schultz (2004, S. 107) die wesentliche Leistung, die „Zahl als Ganzheit (Einheit) einerseits und als Zusammensetzung (Vielheit) andererseits zu verstehen und zwischen beiden Blickwinkeln flexibel zu wechseln (d.h. beide Blickwinkel integriert zu haben)“.

Auch die fachdidaktische Literatur im deutschsprachigen Raum, die in diesem Zusammenhang in den letzten Jahrzehnten veröffentlicht wurde, ist sich weitgehend darüber einig, dass gerade dieser Schritt vom pränumerischen zum numerischen Teile-Ganzes-Denken als *wesentlicher* Schritt für das weitere Mathematiklernen zu sehen ist (Gaidoschik, 2010; Gerster & Schultz, 2004; Padberg & Benz, 2020).

Ab dieser Phase könnten Kinder beispielsweise die Zahl sieben auch ohne Vorliegen einer konkreten Menge in fünf und zwei zerlegen und *wissen*, dass drei und vier die Zahl sieben ergeben. Dieses Wissen für Zahlen als Anzahlen bestehe aber vorerst nur für einige Anzahlen und müsse nach und nach erweitert werden (Gaidoschik, 2010).

### ***Phase IV – Operational reasoning***

Erst in dieser vierten und letzten Phase, *operational reasoning*, entwickeln Kinder nach Resnick (1992) eine Einsicht in die operativen Beziehungen der Additions- und Subtraktionsaufgaben. Die Autorin spricht sich in diesem Zusammenhang davon aus, dass gerade Textaufgaben die Zusammenführung des protoquantitativen Wissens mit Zahlen fördern und Kinder gerade in dieser frühen Phase des Mathematiklernens durch einfache Textaufgaben gefördert werden sollten.

Bei diesen Aufgaben werden, so Resnick (1992), nicht nur die mathematischen Problemlösefähigkeiten entwickelt, sondern hauptsächlich auch die Einsicht in protoquantitative Beziehungen, eben die Beziehung der Teile zum Ganzen. Gerade bei Addition und Subtraktion kleiner Zahlen bestehe die Möglichkeit, dass Kinder das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema auf Anzahlen anwenden können:

Thus, it seems plausible that children may possess at least a simple version of the Part-Whole schema at a quite young age but may not yet have learned all of the situations

where it is appropriate to apply it. Addition and subtraction of small numbers, ..., may be one of the easy-to-recognize situations. Indeed, application of a primitive Part-Whole schema to simple number problems may be an important step in developing a more elaborate version, including many procedural connections, that will play a role in subsequent development of number knowledge. (Resnick, 1983, S. 125)

Nach Resnick (1983) sei das kardinale Zahlverständnis (Abschnitt Mentaler Zahlenstrahl – *mental number line*) Voraussetzung für dieses Wissen. Die Beziehungen der Teile zum Ganzen können in sogenannten *number triples*, also Zahlentripeln, ausgedrückt werden:

The Part-Whole schema specifies relationships among triples of numbers. In the triple 2-5-7, for example, 7 is always the whole; 5 and 2 are always the parts. Together, 5 and 2 satisfy the equivalence constraint for the whole: 7. The relationship among 2, 5, and 7 holds whether the problem is given as  $5 + 2 = ?$ ,  $7 - 5 = ?$ ,  $7 - 2 = ?$ ,  $2 + \_ = 7$ , or  $\_ + 5 = 7$ . (Resnick, 1983, S. 115)

Diese *number triples* stellen nach Resnick (1983) somit eine frühe Möglichkeit dar, wie Kinder Zahlen in Beziehung zu anderen Zahlen denken können. Die Autorin beschreibt es als einleuchtend (*seems plausible*), dass sich dieses Verständnis der Zahlen als Anzahlen zuerst an kleinen Zahlen durch das zählende Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben ausbilde. Vor allem rät sie zu Additionen und Subtraktionen in sogenannten *story problems*, also in einfachen Textaufgaben im kleinen Zahlenraum. Durch Bearbeitung und vor allem durch *extensive practice*, also durch intensive Übung dieser Aufgaben können alle Kinder nach und nach das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema auch auf Anzahlen anwenden: „Extensive practice involving problems via counting should help children quantify their original schemas“ (Resnick et al., 1991, S. 34, zitiert nach Gerster & Schultz, 2004, S. 79).

Gerster und Schultz (2004) üben Kritik an dieser Annahme von Resnick et al. (1991), wonach Kinder Zahlentripel gleichsam automatisch aus *wiederholten Zählerfahrungen* gewinnen und stellen fest, dass „damit verbundene Schwierigkeiten und Leistungen nicht (genügend) beachtet“ (Gerster und Schultz, 2004, S. 79) wurden.

Wichtig ist es zu wissen, dass viele kleine Kinder Teil-Ganzes-Beziehungen behandeln, wenn es nur um ein mehr/weniger Urteil geht und keine Zahlen im Spiel sind. Eine wichtige Frage ist, wie dieses Wissen im Anfangsunterricht aktiviert werden kann. Recht bestechend ist die Sichtweise, dass und wie man sowohl Textaufgaben als auch Rechenaufgaben durch das Teile-Ganzes-Schema interpretieren kann – eine Sichtweise, die denjenigen, der sie beherrscht, ungemein flexibel und kompetent im Rechnen und Problemlösen macht. (Gerster und Schultz, 2004, S. 79)

Auch Gaidoschik (2010) argumentiert in eine ähnliche Richtung wie Gerster und Schultz (2004), wonach sich Zahlentripel durch intensive und wiederholte Zählerfahrungen bei Kindern in dieser frühen Phase des Mathematiklernens – wie von Resnick angenommen – nicht „von selbst einstellen“. Laut Gaidoschik (2010) sind vor allem die von Resnick ausgearbeiteten letzten beiden Ebenen (*numerical reasoning* und *operational reasoning*) entscheidend für die Entwicklung einer tragfähigen Zahlauffassung. Ein Kind habe nach Gaidoschik (2010) die Einsicht, „Zahlen als Zusammensetzung anderer Zahlen“ (S. 114), also die Phase der *mathematics of numbers* erst dann erreicht, wenn „ein bestimmtes, im Sinne von Teilen und Ganzem gedachtes Zahlentripel bereits auch *automatisiert* ist“ (S. 114, Hervorhebung M.G.). Das Kind *wisse* – so der Autor – demnach die Beziehungen von Teilen und Ganzem von Zahlen, ohne dabei auf Zählstrategien angewiesen zu sein (Gaidoschik, 2010).

Generell spricht Gaidoschik (2010) wie Gerster und Schultz (2004) und andere den Beiträgen von Resnick zum Zahlverständnis, wie auch der Phase III mit *mathematics of numbers* eine wesentliche Bedeutung aus.

Gaidoschik (2010) bemängelt aber auch, dass Resnicks Überlegungen dazu, „welche gedanklichen Leistungen auf dem Weg zu diesem Verständnis zu erbringen sind“ als „unzureichend“ und spricht sich vielmehr dazu aus: „Kinder sollten dazu angehalten werden, aus einem Zahlenfaktum ein anderes abzuleiten; wenn von ihnen gefordert wird und sie darin gefördert werden, über den *Zusammenhang von Rechnungen* nachzudenken“ (S. 116, Hervorhebung im Original).

An dieser inhaltlichen Lücke von Resnick, wonach das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema durch *intensive practise* auf Anzahlen übertragen werden könne, möchte die vorliegende Arbeit der Kritik von Gerster und Schultz und Gaidoschik (s. o.) nachkommen und aus fachdidaktischer Sicht einen Vorschlag unterbreiten „wie dieses Wissen“ im Sinne Gerster und Schultz (2004) „im Anfangsunterricht aktiviert werden kann“



(S. 79). Konkret wird dieser Gedanke in der vorliegenden Arbeit so aufgegriffen, dass im Verlauf dieser Dissertationsarbeit Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens entwickelt, über und weiter ausgearbeitet werden (Kapitel 6 und Kapitel 8) und Gegenstand der Forschung sind.

Ganz generell: Dass es mit Kindern lohnend ist, bereits in jungen Jahren über den Zusammenhang von Zahlen nachzudenken, wurde in den vorigen Abschnitten herausgearbeitet. Im folgenden Abschnitt wird der Frage nachgegangen, inwiefern das Teile-Ganzes-Denken eine wesentliche Bedeutung für „additive Grundaufgaben“ hat.

### **2.2.3.3 Die Bedeutung des Teile-Ganzes-Denkens als Grundlage für ein tragfähiges Zahlverständnis „additiver Grundaufgaben“**

Van de Walle (1993) spricht sich explizit dafür aus, im Erstrechenunterricht nicht zu früh den Übergang von *simple counting activities* hin zur Addition und Subtraktion zu machen:

It has been traditional for the mathematic curriculum to move from relatively simple counting activities directly to addition and subtraction. This leap from beginning concepts of cardinality is enormous and premature. When children with limited number concepts attempt to master the various combinations of addition and subtraction, they must rely on counting as their sole means of solving problems. Children require a prolonged opportunity to engage in a variety of activities that will direct their immature counting skills toward the development of more useful relationships among numbers. (Van de Walle, 1993, p. 71; zitiert nach Schultz et al., 2017, S. 206)

Dieser Sprung von den anfänglich kindlichen Konzepten der Kardinalität hin zu Additions- und Subtraktionsaufgaben sei nach van de Walle (1993) enorm. Kinder bräuchten im Erstrechenunterricht anfänglich in der Regel länger Zeit, um sich mit Aktivitäten ihrer „unzulänglichen“ Zählfähigkeiten hin zur Entwicklung nützlicher Beziehungen von Zahlen zu beschäftigen, ansonsten könnten vor allem jene Kinder mit begrenztem Anzahlverständnis bei den „additiven Grundrechenaufgaben“ nur auf ein Zählen mit Fingern zurückgreifen (van de Walle, 1993).

Schultz et al. (2017) argumentieren in eine ähnliche Richtung wie van de Walle, wonach der Übergang vom Zählen hin zum numerischen Teile-Ganzes-Denken den Kindern im Erstrechenunterricht oft schwerfalle. Bei frühen Aktivitäten zum Abzählen von

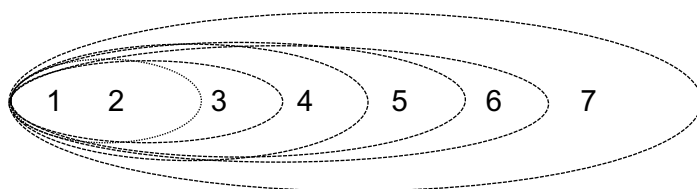
Mengen sei bei einigen Kindern festzumachen, dass sie „Kardinalzahlen *als Anfangsstücke der Zahlreihe* denken“ und demzufolge eine Lösung nur durch Abzählprozeduren finden (Schultz et al., S. 207).

Auch wenn Kinder im Unterricht mit strukturiertem Material hantieren (Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 3.2.2), seien sie nach Schultz et al. oftmals nicht in der Lage, sich von dieser ordinalen Zahlvorstellung zu lösen. Vor diesem Hintergrund eines ordinalen Zahlkonzeptes ist es aber schwierig, ein tragfähiges Teile-Ganzes-Verständnis von Zahlen zu entwickeln (Gaidoschik, 2007, 2010; Schultz et al., 2017).

Wie bedeutsam es ist eine kardinale Vorstellung von Zahlen bei Kindern in Unterricht und Förderung zu erarbeiten und/oder zu festigen, wird im Folgenden herausgearbeitet:

#### Abbildung 6

*Unzureichendes Zahlverständnis (Gerster, 2009, S. 251)*



Denkt ein Kind in obigem Beispiel die Zahl „sieben“ als die *letzte Zahl* der Folge „1, 2, ..., 7“ oder auch als „gleich nach sechs“ und bei „fünf“ dementsprechend an „gleich nach vier“, und somit als *Schritte* am Zahlenstrahl, werden „Zahlen nicht als Zusammensetzung aus anderen Zahlen“, wie beispielsweise „sieben“ aus „fünf und zwei“ oder „drei und vier“ verstanden (Gerster, 2009; Gaidoschik 2007, 2010).

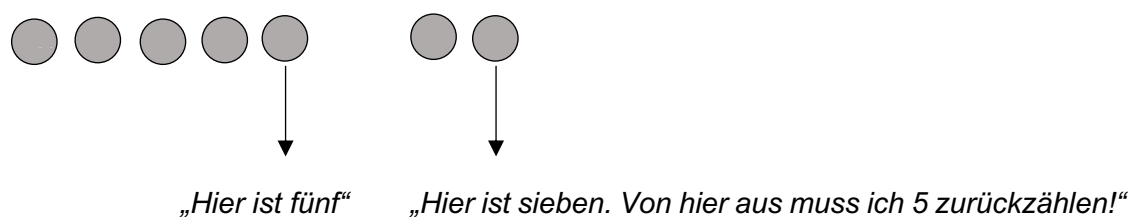
Mit dieser Zahlvorstellung, wonach sich das Anzahlverständnis auf die formal anwendbare „last word rule“ (Abschnitt 2.2.1), also das zuletzt abgezählte Objekt beschränkt, wird es – so die Autoren – Kindern schwer fallen, „Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen“ (Gaidoschik, 2010, S. 114; Gerster & Schultz, 2004, S. 154) zu verstehen. Werden aber Zahlen *nur* als Ordinalzahlen, als Positionen in der Zahlwortreihe verstanden, sind sie nicht zerlegbar (beispielsweise sieben in „fünf und zwei“ oder in „vier und drei“ oder in „zwei und fünf“ usw.) und somit nicht „aus anderen Zahlen zusammengesetzt“ (Gaidoschik, 2010, S. 114; Gerster & Schultz, 2004, S. 154).

In diesem Zusammenhang schreibt Gerster (2009): „Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen können (in Verbindung mit dem Teile-Ganzes-Konzept) mit einem *kardinalen* Zahlkonzept verstanden werden, nicht aber mit einem ordinalen“ (S. 251, Hervorhebung im Original und Abschnitt „Mentaler Zahlenstrahl – mental number line“).

Kinder, die bei obigem Beispiel bei „sieben“ vorrangig an „gleich nach sechs“ und bei „fünf“ dementsprechend an „gleich nach vier“ denken, können Additionen und Subtraktionen in weiterer Folge auch meist nur zählend lösen, wie folgende Veranschaulichung verdeutlicht.

#### Abbildung 7

*Unzureichendes Zahlverständnis bei „sieben weniger fünf“ (Gaidoschik, 2007, S. 43)*



Nennt ein Kind in obigem Beispiel als Lösung der Rechnung „sieben weniger fünf“ die Zahl zwei, bei der es beim „Zurückhüpfen“ „landet“, dann hat es zwar die Rechenaufgabe richtig gelöst, aber „Zahlen [nicht] als Zusammensetzungen“ (Gaidoschik, 2010, S. 114) und auch Rechenoperationen (hier: Subtrahieren) nicht ausreichend verstanden (Gaidoschik, 2007, 2010). In diesem Beispiel denkt ein Kind Zahlen nicht als Ganzes, welches aus Teilen zusammengesetzt ist (beispielsweise sieben aus „fünf und zwei“) und kann in weiterer Folge Subtrahieren nicht als Wegnehmen solcher Teile von einem Ganzen verstehen (Gaidoschik, 2007).

Aus fachdidaktischer Perspektive sind sich die genannten Autor\*innen darüber einig, dass dieses unzureichende Verständnis von Zahlen und Rechenoperationen in der Regel in zählenden Lösungsverfahren und/oder im Auswendiglernen eines Rechensatzes endet; sowie beide Lösungsverfahren keine *tragfähigen* Strategien darstellen (Gerster, 2009; Gaidoschik, 2007; Schultz et al., 2017; van de Walle 1993).

Vor diesem Hintergrund tritt nach Gerster (2007) bzw. Schultz et al. (2017) die wesentliche Bedeutung der in Abschnitt 2.2.2 beschriebenen Aktivitäten zum „Blitzblick“ und darüber hinaus zum Strukturieren der Zahlbilder insofern klar hervor, da durch diese Aktivitäten schon früh kardinale Zahlvorstellungen von Kindern gefördert werden würden. Und dies im besten Fall ohne abzuzählen. Gemäß Schultz et al. bestünde somit eine erste Herausforderung darin, „kardinale Zahlvorstellungen zu fördern, die keine Zählzahlen beinhalten“ (S. 207). Eine Grundlage dafür bilden laut den Autor\*innen die bereits benannten Zahlbilder im Blitzblick. In weiterer Folge definieren Schultz et al. eine

weitere Herausforderung, die da als die „Förderung des Teile-Ganzes-Denkens über Zahlen“ lautet (S. 207). Ebenso an dieser Stelle betonen die Autor\*innen die Bedeutung der Förderung kardinaler Zahlvorstellungen: „Denkhandlungen an Zahldarstellungen müssen eine Teil-Teil-Ganzes-Struktur aufweisen und sich ebenfalls von der Zahlreihe lösen“ (S. 207). Wie bedeutend Einsichten in diese Teil-Teil-Ganzes-Struktur ist, kommt bei Gerster (2007) bzw. Schultz et al. (2017) zum Ausdruck, wenn sie gerade diese als „Leitidee“ in der frühen Phase des Mathematiklernens bezeichnen und *auf dieser Grundlage* die Hürden im Anfangsunterricht definieren (Abschnitt 2.2.3.6).

Im Erstrechenunterricht wird in weiterer Folge (Abschnitt 3.3) als ein fachliches Teilziel des Rechenunterrichts bis zum Ende des ersten Schuljahres die Absicherung der „additiven“ Grundaufgaben der Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis zumindest zehn oder teilweise bis 20 betrachtet. Aus fachdidaktischer Perspektive sind sich nach oben stehenden Überlegungen viele Autor\*innen darüber einig, dass Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen die Grundlage für ein tragfähiges Verständnis dieser „additiven Grundaufgaben“ darstellen (Bobis, 1993; Fischer, 1990; Gaidoschik, 2007, 2010, 2019a, 2022; Gaidoschik & Bayer, 2017; Gerster, 2007, 2009; Gerster & Schultz, 2004; Ennemoser & Krajewski, 2007; Fritz & Ricken, 2009; Häsel-Weide, 2016; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Hunting, 2003; Krajewski et al., 2013; Nührenbörger, 2022; Radatz et al., 1996; Resnik, 1983; Schultz et al., 2017; Steffe & Cobb mit von Glasersfeld, 1988; Weißhaupt & Peucker, 2009).

Resnick et al. (1990) fordern diesbezüglich, dass einzig *auf dieser Grundlage* ein tragfähiges Verständnis von Addition und Subtraktion zu erreichen sei. In den Worten Resnicks et al. (1990):

The protoquantitative part-whole schema is the foundation for later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of number that underlies the place value system. (p. 32)

Resnick et al. (1990) beschreiben gerade tragfähige Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen als grundlegend wichtig für die mathematischen Gesetzmäßigkeiten der Kommutativität (Vertauschungsgesetz) und der Assoziativität (Verbindungsgesetz) bei Additions- und Subtraktionsaufgaben. Auch Langhorst (2014) argumentiert in eine ähnliche Richtung wie Resnick et al. (1990) und spricht sich dafür aus, dass ein tragfähiges

Teile-Ganzes-Denken notwendig dafür ist, dass „Additions- und Subtraktionsaufgaben als komplementäre Operationen“ (p. 32) verstanden werden. Gerster und Schultz (2004) sprechen in diesem Zusammenhang davon, dass „Additions-, Subtraktions- und Ergänzungsaufgaben [...] bei einer Interpretation im Rahmen der Beziehung zweier Teile zum Ganzen eine Bedeutung [bekommen], die von der Sichtweise der Addition als Zusammenlegen oder Hinzufügen (und der Subtraktion als Wegnehmen) verschieden ist“ (S. 79).

Kinder können das Assoziativgesetz anwenden, wenn sie Additionsaufgaben (gedanklich) umformen. Nach Art der Umformung können die Aufgaben so leichter zu lösen sein, ohne dass das Ergebnis zählend ermittelt wird. Kinder nutzen das Assoziativgesetz beispielsweise, wenn sie die Aufgabe  $5 + 7$  umwandeln in  $5 + 5 + 2 = 10 + 2 = 12$ .

Hingegen bei der Nutzung der Kommutativität der Addition kann die Reihenfolge der Summanden vertauscht werden und diese ist somit irrelevant. In dem unten dargestellten Beispiel wird aus der Aufgabe  $2 + 5$  die Aufgabe  $5 + 2$ ; der Wert der Summe ändert sich dabei nicht: Wenn  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen sind, dann gilt:  $a + b = b + a$ .

Diese mathematische Gesetzmäßigkeit der Kommutativität wird auf das Zahlentripel  $2 - 5 - 7$  von Abschnitt 2.2.3.2 nach L.B. Resnick (1983) bezogen und an dieser Stelle ausführlich dargestellt: Im Tripel  $2 - 5 - 7$  ist 7 das Ganze, 2 und 5 sind die Teile. Resnick (1983, S. 115) führt zu diesem Zahlentripel fünf Möglichkeiten an: „ $5 + 2 = ?$ ,  $7 - 5 = ?$ ,  $7 - 2 = ?$ ,  $2 + \_ = 7$ , or  $? + 5 = 7$ “. Andere Autor\*innen wie Langhorst (2014, S. 53) ergänzt diese Zahlentripel um 7 weitere Möglichkeiten und nutzt die oben beschriebene Gesetzmäßigkeit der Kommutativität: „ $2 + 5 = ?$ ,  $5 + ? = 7$ ,  $7 - ? = 5$ ,  $7 - ? = 2$ ,  $? + 2 = 7$ ,  $? - 5 = 2$ ,  $? - 2 = 5$ “.

Aus fachdidaktischer Perspektive ist man sich weitgehend darüber einig, dass die Einsicht in das Vertauschungsgesetz (wie auch die Nutzung von anderen mathematischen Gesetzmäßigkeiten) dazu führt, dass Kinder Aufgaben wie von Wittmann und Müller (2017) beschrieben „mit geringem Rechenaufwand“ (S. 27) lösen können. Vor diesem Hintergrund stützt sich die Rechenstrategie der Tauschaufgabe auf die Kommutativität und lässt sich nach Gaidoschik (2010), Gerster und Schultz (2004), Häsel Weide et al. (2017), Padberg und Benz (2020) und anderen vor allem dann in Unterricht und Förderung gut nützen, wenn die Zahlentripeln der Zahlen bis zehn automatisiert sind.

Ganz allgemein sprechen sich die genannten Autor\*innen dafür aus, dass ein Großteil der flexiblen Rechenstrategien als Basis ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken begründen und dass bei der Erarbeitung von Ableitungsstrategien der „additiven Grundaufgaben“ sämtliche Aufgaben aus einigen wenigen Grundaufgaben – unter Nutzung der

mathematischen Gesetzmäßigkeiten – „abgeleitet“ (errechnet, gedanklich erschlossen) werden können.

Vor diesem Hintergrund unerlässlich ist auch die Einsicht in die Kompensation und die Kovariation: Es können ein oder mehrere Elemente des einen Teiles weggenommen und dem anderen dazugegeben werden, ohne dass sich das Ganze ändert (*Kompensation*). Rechenaufgaben des gegensinnigen Veränderns bei Summen ( $6 + 8 = 7 + 7$ ;  $34 + 61 = 35 + 60$ ) und Rechenaufgaben des gleichsinnigen Veränderns bei Differenzen ( $88 - 68 = 90 - 70$ ) stützen sich auf dieser Kompensation (Gerster & Schultz, 2004; Padberg & Benz, 2020).

Werden hingegen ein oder mehrere Elemente bei den Teilen dazugegeben, ändert sich die Gesamtanzahl um diese Anzahl(en). Wird einem Teil ein oder mehrere Elemente weggenommen, wird das Ganze um diese Anzahl(en) weniger (*Kovariation*). Verdopplung-, Halbierungs- und Nachbaraufgaben ( $3 + 4 \rightarrow 4 + 4 = 8 - 1 = 7$ ; oder  $3 + 4 \rightarrow 3 + 3 = 6 + 1$ ) basieren auf der Kovariation.

Aus fachdidaktischer Perspektive ist ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken nicht nur für „additive Grundaufgaben“ in der Grundschule bedeutend, sondern auch in weiterführenden Schulstufen. Andere Autor\*innen wie Schäfer (2013) plädieren denn auch dafür, gerade das Teile-Ganzes-Denken weiterführend im Übergang in und in der Sekundarstufe zu fokussieren. In den Worten Schäfers (2013) trägt das Teile-Ganzes-Denken

[...] in der Sekundarstufe maßgeblich zum Verständnis von Zahlen und Operationen in neuen Zahlbereichen bei (ganze und rationale Zahlen, reelle Zahlen), wirkt sich beim bürgerlichen Rechnen aus (Bruch-, Dezimal- und Prozentrechnen), aber auch beim Aufbau von Verständnis für Flächeninhaltsberechnungen und anderen Inhaltsbereichen (S. 86).

Auch Gerster (2007, 2009) bzw. Schultz et al. (2017) argumentieren in eine ähnliche Richtung wie Schäfer, wonach von der Hinführung der Kinder an ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken auch weitere Themen des Mathematikunterrichts profitieren. Die Autor\*innen nennen hier beispielsweise das Stellenwertkonzept, die schriftlichen Rechenverfahren, das Einmaleins und die Bruchzahlen (Abschnitt „Teile-Ganzes-Denken als Leitidee des Anfangsunterrichts“).

In diesem Zusammenhang möchte die Autorin dieser Arbeit wiederholend den Anspruch hervorheben, wie zentral wichtig ein sicheres Beherrschen der Grundaufgaben für *alle Kinder* in dieser frühen Phase des Mathematiklernens ist. Vor diesem Hintergrund

zitiert Gaidoschik (2007) van de Walle (2004): „Alle Kinder können die Grundaufgaben beherrschen *lernen* – auch Kinder mit Lernbeeinträchtigungen. Kinder müssen nur wirk-  
same *geistige Werkzeuge* entwickeln, die ihnen dabei helfen“ (S. 219, Hervorhebung C.G.).

Die nun anschließende Tabelle, angelehnt an Resnick (1992) und entnommen von Schommer (2022) zeigt, wie sich das Teile-Ganzes-Denken von den protoquantitativen zu den operationalisierten Schemata ausgebildet.

**Tabelle 2**

*Entwicklung des Teile-Ganzes-Denkens in Anlehnung an Resnick, 1992, S. 408 f. erweitert um die Kovarianz von Irwin, 1996, S. 27 (Schommer, 2022, S. 24)*

| <b>1. Protoquantitatives Teile-Ganzes-Konzept</b>                                                         |                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| (1) $T_1$ und $T_2$ und $T_3$ istgleich G                                                                 | (T = Teil, G = Ganzes) |
| (2) $T_1$ und $T_2$ istgleich $T_2$ und $T_1$                                                             |                        |
| (3) ( $T_1$ und $T_2$ ) und $T_3$ istgleich $T_1$ und ( $T_2$ und $T_3$ )                                 |                        |
| (4) ( $T_1$ und A) und ( $T_2$ minus A   nimm A weg) ist-                                                 | (Kompensation)         |
| gleich G                                                                                                  |                        |
| (5) Wenn, $T_1$ und $T_2$ istgleich G, dann                                                               |                        |
| (a) ( $T_1$ und A) und $T_2$ istgleich G und A                                                            |                        |
| (b) ( $T_1$ minus A   nimm A weg) und $T_2$ gleich G mi-                                                  | (Kovarianz)            |
| nus A, G nimm A weg                                                                                       |                        |
| <b>2. Auf konkrete Anzahl bezogenes Teile-Ganzes-Konzept</b>                                              |                        |
| (1) 3 Plättchen und 5 Plättchen und 4 Plättchen istgleich 12 Plättchen                                    |                        |
| (2) 3 Plättchen und 5 Plättchen istgleich 5 Plättchen und 3 Plättchen                                     |                        |
| (3) (3 Plättchen und 5 Plättchen) und 4 Plättchen istgleich 3 Plättchen und (5 Plättchen und 4 Plättchen) |                        |
| (4) (3 Plättchen und 2 Plättchen) und (5 Plättchen, nimm 2 Plättchen weg) ist-                            |                        |
| gleich 8 Plättchen                                                                                        | (Kompensation)         |
| (5) Wenn, 3 Plättchen und 5 Plättchen istgleich 8 Plättchen, dann                                         |                        |
| (a) (3 Plättchen und 2 Plättchen) und 5 Plättchen istgleich 8 Plättchen und 2 Plättchen                   |                        |
| (b) (3 Plättchen, nimm 2 Plättchen weg) und 5 Plättchen gleich 8 Plättchen weg 2 Plättchen                | (Kovarianz)            |
| <b>3. Numerisches Teile-Ganzes-Konzept</b>                                                                |                        |
| (1) $3 + 5 + 4 = 12$                                                                                      |                        |

|                                                     |                |
|-----------------------------------------------------|----------------|
| (2) $3 + 5 = 5 + 3$                                 |                |
| (3) $(3 + 5) + 4 = 3 + (5 + 4)$                     |                |
| (4) $(3 + 2) + (5 - 2) = 8$                         | (Kompensation) |
| (5) Wenn, $3 + 5 = 8$ , dann                        |                |
| (a) $(3 + 2) + 5 = 8 + 2$                           |                |
| (b) $(3 - 2) + 5 = 8 - 2$                           | (Kovarianz)    |
| <b>4. Operationalisiertes Teiles-Ganzes-Konzept</b> |                |
| (1) $n + m + p = r$                                 |                |
| (2) $n + m = m + n$                                 |                |
| (3) $(n + m) + p = n + (m + p)$                     |                |
| (4) $(n + a) + (m - a) = r$                         | (Kompensation) |
| (5) Wenn, $n + m = r$ , dann                        |                |
| (a) $(n + a) + m = r + a$                           |                |
| (b) $(n - a) + m = r - a$                           | (Kovarianz)    |

#### 2.2.3.4 Frühe Förderung des Teile-Ganzes-Denkens in elementaren Bildungseinrichtungen

In voranstehenden Abschnitten dieses Kapitels wurde dargelegt, dass ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken eine wesentliche Bedeutung gerade für das Operationsverständnis der vier Grundrechenarten hat. Demzufolge scheint es lohnend, tragfähige Einsichten in Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen schon *früh* zu thematisieren und wie beispielsweise von Gaidoschik (2007, 2010, 2022) gefordert, Kinder darin zu fördern (Natürliche) Zahlen als „Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen“ (2022, S. 217) zu verstehen.

Einige fundierte Konzepte für das frühe Mathematiklernen in der Zeit vor der Schule wurden, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, in der nationalen und internationalen Mathematikdidaktik entwickelt. Eine gezielte Integration von Teile-Ganzes-Aktivitäten im Kindergartenalter scheint nach den im Folgenden beschriebenen empirischen Untersuchungen Auswirkungen auf den Rechenunterricht für Schulanfänger\*innen zu haben.

Langhorst et al. (2012) erforschten bei 4-Jährigen bis 8-Jährigen Kindern das Vorhandensein des nicht-numerischen und numerischen Teile-Ganzes-Denkens beim Lösen von Textaufgaben. Die Autor\*innen konnten bestätigen, dass sich das nicht-numerische (*protoquantitative*) Teile-Ganzes-Denken ähnlich wie von Resnick (1983, 1989, 1992) angenommen, zeitlich etwas früher entwickelt als das numerische (*quantitative*)



Teile-Ganzes-Denken. So konnten zwei Drittel der Vierjährigen und knapp 80 % der Fünfjährigen nicht-numerische (*protoquantitative*) Teile-Ganze-Kontextaufgaben lösen.

Fischer (1990) und auch Bobis (1993) berichten in ihren empirischen Untersuchungen davon, dass eine Förderung in den Aktivitäten des Teile-Ganzes-Denkens bei Kindergartenkindern zu einer signifikanten Verbesserung eines tragfähigen Zahl- und Operationsverständnisses bei Additionen und Subtraktionen geführt habe. Außerdem bildeten diese Kinder ein besseres Verständnis im dekadischen Aufbau des Zahlensystems aus.

Fischer (1990) entwickelte für seine Untersuchung zwei unterschiedliche Curricula für den Kindergarten und damit verbundene Aktivitäten für die vorgesehene Zeit der empirischen Untersuchung von 25 Tagen. Während der traditionelle *counting/say/write* (S. 209) Lehrplan auf Aktivitäten zum Zählen von Objekten, zur Versprachlichung der dazugehörigen Gesamtzahl und zum Schreiben der entsprechenden Ziffern abzielte, betonte der *part-part-whole* (S. 209) Lehrplan eben die Verwendung von Teile-Ganzes-Aktivitäten, um kardinale Zahlvorstellungen zu entwickeln. Die Kindergartenkinder erforschten die verschiedenen Teile, in die die Mengen aufgeteilt wurden. Beim Zählen einer Menge von fünf Objekten wurden die Kindergartenkinder beispielsweise aufgefordert, die Menge in zwei Teile zu zerlegen. Der Schwerpunkt lag nicht nur auf dem Zählen von Mengen selbst, sondern auch auf dem Zeigen und Zählen von Teilmengen. In den gemeinsamen Einheiten wurden die Mengendarstellungen der Kinder miteinander verglichen, um das Verständnis für die verschiedenen Kombinationen von Teilmengen, aus denen sich eine ganze Menge zusammensetzt, zu fördern. Die Unterschiede in den benannten Leistungen, die zwischen den Gruppen festgestellt wurden, sieht der Autor vor allem in den unterschiedlichen Inhalten der Lehrpläne begründet. In seiner Veröffentlichung stellt der Autor abschließend die zu diskutierende Frage, ob ein zeitlich und inhaltlich *umfangreicher part-part-whole* Lehrplan noch vorteilhafter für die Entwicklung des Zahlenverständnisses der Kinder wäre.

Hunting (2003) bestätigt diese Annahme, wonach junge Kinder in der Regel in der Lage zu sein scheinen, erste Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen von Zahlen früher als in der Grundschule zu erwerben. Der Autor führte eine ähnliche Aufgabe wie Piaget (1965, zitiert nach Hunting, 2003) durch und fand heraus, dass Drei- und Vierjährige bei einer Aufgabe mit einer Menge von fünf Elementen, bei der eine Teilmenge verborgen war, über Teile-Ganzes-Beziehungen nachdenken konnten. Diese Ergebnisse stimmen nicht mit denen von Piaget überein. Hunting zeigte weiterhin, dass die Kindergartenkinder den Schwerpunkt vom Zählen einzelner Elemente der Teilmengen auf die Betrachtung der Elemente als zusammengesetzte Mengen verlagerten. Der Autor argumentiert,

dass die Fähigkeit, *Gruppen von Objekten* zu sehen, für die Entwicklung eines tragfähigen Zahlverständnisses grundlegend war.

Auch die Untersuchungen von Ekdahl et al. (2019), Cheng (2012) und Jung et al. (2013) weisen ähnliche Ergebnisse auf. Sie alle beschreiben, dass junge Kinder *bereits vor Schuleintritt* erste Einsichten in Teile-Ganzes-Relationen von Mengen erwerben können.

Fisher (1990) formuliert in weiterer Folge, dass Kinder im Verlauf des ersten Schuljahres, *spätestens* aber zum Zeitpunkt der *formalen* Behandlung der Addition und Subtraktion des Teile-Ganzes-Denken begegnen. Aus Sicht der Autorin dieser Arbeit ist dies in der Grundschule nicht zwangsläufig der Fall, sondern hängt auch und vor allem vom Unterricht und der Lehrkraft ab. Auch Fisher stellte bereits in den 1990er Jahren seine Zweifel dar, ob dieses wesentliche Konzept des Teile-Ganzes-Denkens bis zur (möglichen) schulischen Einführung der Addition und Subtraktion aufgeschoben werden sollte: "It is *not clear*, however, that instruction supporting the schema should be delayed until the time of formal instruction in addition and subtraction concepts" (p. 207, Hervorhebung C.G.).

Eine weitere Studie von Langhorst et al. (2011) unterstreicht, dass sich ein tragfähiges Verständnis des Teile-Ganzes-Denkens im Verlauf der Grundschule nicht eigenständig „verinnerlicht“. Vor diesem Hintergrund haben die Autor\*innen eine Studie zum Verständnis für das Teile-Ganzes-Denken bezogen auf Additionen und Subtraktionen an Zweit- und Fünftklässlern im Zeitraum von 2009 bis 2010 durchgeführt. Die Zweitklässler lösten die Aufgaben (durchschnittlich 86 %) besser als die Fünftklässler (durchschnittlich 71%). Die Forscher\*innen sehen ihre Ergebnisse darin begründet, dass ein Verständnis für das Teile-Ganze-Denken in den höheren Schulstufen nicht mehr zum Unterrichtsgegenstand zählt und diese Basisfertigkeiten in diesem Alter als gekonnt angesehen wurden. 20–30 % der Zweitklässler zeigten Probleme bei den gestellten Aufgaben und zwar vor allem dann, „wenn die Beziehungen zwischen den Teilen und der Gesamtmenge selbstständig zu modellieren waren“ (Langhorst et al., 2011, S. 16) Dies trifft vor allem bei Aufgaben, bei denen die Startmenge zu berechnen ist zu („Fritz hat 6 Gummibärchen gegessen. Jetzt hat er noch 5. Wie viele hatte er vorher?“). Die Autor\*innen dieser Untersuchung schlussfolgern, dass sich eine fehlende Vorstellung für das Teile-Ganze-Denken in den weiteren Schuljahren auswirke und sich diese Probleme in größeren Zahlenräumen und bei komplexeren Aufgabenstellungen verstärke.

### 2.2.3.5 Die Bedeutung des Teile-Ganzes-Denkens in den Lehrplänen und im arithmetischen Anfangsunterricht

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen empirischen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte unterstreichen, dass Kinder in der Regel bereits im Kindergartenalter dieses grundlegende Konzept verstehen. Ein (unnötiges) Abwarten in diesem Zusammenhang bis zu den additiven Grundaufgaben im frühen Arithmetikunterricht scheint demzufolge weder empirisch begründbar noch sachlogisch nachvollziehbar.

Durchforstet man nationale und internationale Lehrpläne im Fach Mathematik zu dieser Thematik, zeigt sich ein differenziertes Bild: In internationalen Lehrplänen im Fach Mathematik, wie beispielsweise im neuseeländischen Lehrplan *Number framework* (New Zealand Ministry of Education, NZME, 2008) und im englischen Lehrplan der Klassenstufen 1 und 2 *Mathematics programme of study* (UK Department for Education, 2013) ist das Konzept des Teile-Ganzes-Denkens im Erstrechenunterricht bereits festgeschrieben. Der Lehrplan in Mathematik der Klassenstufen 1 und 2 hat in England, ähnlich wie die Lehrpläne in deutschsprachigen Ländern, einen Rahmencharakter. Dies meint, dass die Schulen die Möglichkeit erhalten, mathematische Inhalte früher oder später einzuführen als im (Rahmen-)Lehrplan vorgesehen. Alle Schulen sind außerdem dazu verpflichtet, ihren *schulinternen Lehrplan* für Mathematik für jedes Jahr zu erstellen und diese Information online zur Verfügung zu stellen (UK Department for Education, 2013).

In den Lehrplänen im Fach Mathematik dieser beiden genannten Länder werden die Leitlinien für das Handeln der Lehrkräfte ähnlich beschrieben, wonach das Teile-Ganzes-Denken so früh wie möglich im Erstrechenunterricht behandelt werden sollte. In diesem Zusammenhang ist der neuseeländische Lehrplan *Number framework* (New Zealand Ministry of Education, NZME, 2008) klar:

It is important for you to recognise that part-whole thinking is seen as fundamentally more complex and useful than counting strategies. One reason is that counting methods are strictly limited, whereas part-whole methods are more powerful. Counting strategies are an inadequate foundation for these ideas, and this means that for counters, many advanced number ideas are inaccessible. Therefore, your major objective is to assist students to understand and use part-whole thinking as soon as possible. (NZME, 2008, p.

7)

In *dieser Klarheit* hinsichtlich der Bedeutung des Teile-Ganzes-Konzepts im frühen Mathematiklernen und dessen konkreter Umsetzung im Erstunterricht durch die Lehrkräfte wird in den deutschsprachigen Lehrplänen im Erststufenunterricht aus Sicht der Autorin dieser Arbeit nicht eingegangen; das Teile-Ganzes-Denken als Grundlage für ein tragfähiges Zahlverständnis und in weiterer Folge eines tragfähigen Verständnisses von Addition und Subtraktion ist im österreichischen Lehrplan für die Volksschule (BMBWF, 2023) als Ziel *nicht explizit* festgeschrieben.

#### **2.2.3.6 Teile-Ganzes-Denken als Leitidee für den arithmetischen Anfangsunterricht**

Die generelle Bedeutung des Teile-Ganzes-Denkens für diese frühe Phase des Mathematiklernens wurde an mehreren Stellen dieser Arbeit herausgearbeitet, wenn beispielsweise innerhalb der fundamentalen Ideen der Arithmetik (Abschnitt 2.2.1) die Bedeutung der Erforschung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten und Muster gefordert werden, oder wenn in Abschnitt 2.3.2 dargestellt wird, dass in der deutschsprachigen Fachliteratur grundsätzliche Übereinstimmung darüber besteht, dass im Zentrum dieser frühen Phase des Mathematiklernens wesentlich das Erarbeiten von „Strukturen“ und „Beziehungen“ steht.

Autoren wie Gaidoschik oder Gerster plädieren denn auch dafür, dass Kinder *von Anfang an* nicht-zählend addieren und subtrahieren lernen sollten, indem sie (Natürliche) Zahlen als „Zusammensetzungen aus anderen Zahlen“ (Gaidoschik, 2022, S. 217) verstehen und diese Vorstellungen in weiterer Folge sicher anwenden (Gaidoschik, 2007, 2010, 2022; Gerster, 2007, 2009). Beide Autoren haben konkrete Konzepte ausgearbeitet, die gerade das Teile-Ganzes-Denken in den Mittelpunkt des arithmetischen Anfangsunterrichts stellen. Die TIGER-Konzeption von Gaidoschik (2019a, 2022) wird in Abschnitt 6.1 dieser Arbeit vorgestellt und gilt als fundamentale Grundlage bei der Entwicklung der vorliegenden Bausteine (Kapitel 6 und Kapitel 8), Gersters Überlegungen zu den fünf Hürden des Anfangsunterrichts werden nun folgend als Abschluss dieses Kapitels beschrieben.

Die in voranstehenden Abschnitten vom US-amerikanischen Fachdidaktiker van de Walle dargestellte Problematik, wonach der Mathematik-Lehrplan traditionell von relativ einfachen Zählaktivitäten direkt zu Addition und Subtraktion übergehe, nehmen Gerster (2007, 2009), Gerster und Schultz (2004) beziehungsweise Schultz et al. (2017) auf und stellen das Erarbeiten von Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen geradezu ins *Zentrum* des arithmetischen Erstunterrichts. Gerster und Schultz (2004) beschreiben vier Voraussetzungen zur Verinnerlichung des Teile-Ganzes-Denkens:

1. Die Zahlen müssen für das Kind eine sichere kardinale Bedeutung haben: eine Zahl muss ein aus Einheiten zusammengesetztes Ganzes sein.
2. Das Kind muss fähig sein, aus dem zusammengesetzten Ganzen einer Menge Teile herauszulösen und wieder einzubetten, und zwar so flexibel, dass es Teile und Ganzes quasi-simultan beachten kann. Diese Fähigkeit beruht nicht nur auf visueller Vorstellungskraft, sondern auch auf der Reversibilität des geistigen Handelns.
3. Das Kind muss dieses Wissen und Denken über Teile-Ganzes-Beziehungen auf Anzahlen und Zahlen übertragen.
4. Eine ganze Reihe von Ableitungsstrategien, die die Brücke zur Beherrschung der Basisfakten bilden, gründen auf dem Verständnis der Zerlegbarkeit der Zahlen (speziell auf den Beziehungen zur 5 und zur 10), und auf der Beziehung „eins mehr/eins weniger“ integriert mit der Zahlreihe. Man kann daher annehmen, dass das Festhalten am zählenden Rechnen mit dieser Problematik (Verstehen der Zerlegbarkeit von Zahlen) in Zusammenhang steht. (S. 141)

Weiterführend an diese obenstehenden Überlegungen und auf der Grundlage von Einsichten in das Teile-Ganzes-Denken, die Gerster (2007) und Schultz et al. (2017) als „Leitidee“ (Schultz et al., 2017, S. 206) in dieser frühen Phase des Mathematiklernens bezeichnen, formulieren die Autor\*innen fünf Hürden im Anfangsunterricht. Die ersten drei Hürden beziehen sich auf das Zahlverständnis, welches als Grundlage für ein nicht zählendes Verständnis für Operationen (Hürde vier) gelte. Hürde fünf benennt als mathematisches Ziel des Anfangsunterrichts die flexiblen Strategien des Rechnens.

**Tabelle 3**

*Die fünf Hürden des Anfangsunterrichts (Gerster, 2007, S. 16)*

|         |                                                                                                      |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hürde 1 | neben ordinalen vor allem kardinale Zahlvorstellungen entwickeln (vom Reihenfolge- zum Anzahlaspekt) |
| Hürde 2 | Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen verstehen (Teile-Ganzes-Konzept)                       |
| Hürde 3 | Stellenwerte im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts verstehen                                            |

---

|         |                                                                                                                                                  |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Hürde 4 | die vier Rechenoperationen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzepts verstehen                                                                          |
| Hürde 5 | Basisfakten wie kleines Einsundeins, Einsminuseins, Einmaleins und Einsdurch-eins auf Grundlage flexibler, nichtzählender Strategien beherrschen |

---

*Zusammenfassend:* Am Ende des Kapitels 2 dieser Arbeit erscheint es sinnvoll, die in der Einleitung genannten *grundlegenden Überlegungen*, die innerhalb der deutschsprachigen Fachdidaktik in den letzten zwanzig bis dreißig Jahren doch eine breite Zustimmung gefunden haben, zusammenfassend darzustellen. In der deutschsprachigen Literatur und darüber hinaus hat man sich zu dem Konsens durchgerungen, dass die komplexe Tätigkeit des Zählens in einen längeren Prozess des Lernens eingebettet ist (Abschnitt 2.2.1).

Alle Schüler\*innen sollen je nach Entwicklungspotential und Vorkenntnissen schulisch und im Alltag viele Möglichkeiten erhalten, um Zählerfahrungen zu machen – und das ohne „künstliche Grenzen“ im Zahlenraum. Ein erstes Ziel mit allen Kindern ist in weiterer Folge das Absichern des anzahlverständigen Zählens unter Beachtung der einzelnen Zählprinzipien, wobei in Unterricht und Förderung angestrebt werden soll, dass alle Kinder zumindest bis zwölf, wenn möglich bis zwanzig, sicher zählen können (Abschnitt 2.2.1).

Neben dem anzahlerfassenden Zählen wird die Arbeit mit Anzahlvergleichen (Abschnitt 2.2.2) als lohnender Bereich im frühen Arithmetikunterricht genannt. Vor diesem Hintergrund scheint es wesentlich, dass alle Kinder kardinale und ordinale Beziehungen zwischen Zahlen verstehen und in weiterer Folge auch solche Zuordnungen nutzen, um herauszufinden, ob es gleich, mehr oder weniger sind.

Ein weiteres und grundlegend wichtiges Ziel in dieser frühen Phase des Mathematiklernens ist die strukturierte Erfassung von Anzahlen als ein wesentlicher Schritt auf dem Weg zum nicht-zählenden Rechnen (Abschnitt 2.2.3). In diesem Zusammenhang sollen mit allen Kindern in Unterricht und Förderung beispielsweise verschiedene Aktivitäten zum „Schnellen Sehen“ durchgeführt werden.

Im Verlauf des ersten Schuljahres lösen dann Kinder Additions- und Subtraktionsaufgaben. Um diesen entscheidenden Lernschritt gut bewältigen zu können, tun sie dies aus fachdidaktischer Sicht am besten auf Grundlage eines tragfähigen *Teile-Ganzes-Verständnisses* (Abschnitt 2.2.3.1). Vor diesem Hintergrund betonen Gaidoschik und Bayer (2017), dass es im arithmetischen Anfangsunterricht unerlässlich ist, Zahlzerlegungen mit *allen Kindern* geduldig zu verfolgen:

Es eröffnet ihnen eine Zahlenwelt, in der nicht-zählendes Rechnen möglich wird, auf Basis von Einsicht in operative Zusammenhänge. [...] Je mehr Zusammensetzungen ein Kind spontan mit einer Zahl verbindet, umso freier wird es im Umgang mit dieser Zahl. Es lohnt deshalb, die [...] Ziele mit *allen* Kindern zu verfolgen – und jene geduldig zu unterstützen, die sich dabei schwertun. (S. 163, Hervorhebung im Original)

Bei der Auflistung und Beschreibung der wesentlichen arithmetischen Meilensteine im Anfangsunterricht („Lernen der Zahlwortreihe hin zu einem sicheren Verständnis von Anzahlen“, „Anzahlvergleiche“ und „strukturierte, nicht-zählende Anzahlerfassung“ mit dem „Teile-Ganzes-Denken“) zeigt sich, dass die unterschiedlichen arithmetischen Bereiche in dieser frühen Phase des Mathematiklernens nicht klar voneinander zu trennen sind. Vielmehr stünden diese Kompetenzen nach Häsel-Weide (2016) „in einem wechselseitigen Entwicklungsprozess“; Aktivitäten würden je nach Perspektive „unterschiedlichen theoretischen Konzeptionen zugeordnet“ werden; weshalb Überschneidungen „sowohl zwischen dem eher numerisch gedachten Teile-Ganzes-Konzept und dem Erkennen von Strukturen als auch zwischen Addition und Subtraktion und dem Teile-Ganzes-Konzept“ (S. 12) bestünden.

Generell erscheint es aber notwendig, die *grundsätzliche Bedeutung* der beschriebenen Bereiche für den frühen Arithmetikunterricht zu betonen. Deshalb soll in Unterricht und Förderung *von Anfang an* ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken mit allen Kindern angeregt werden. Je nach Autor\*in eignen sich dafür und wie in Abschnitt 2.2.3.1 dargestellt, Fingerbilder (Gaidoschik, 2007, 2010, 2017, 2019a, 2019b, Gerster & Schultz, 2004; Steinweg, 2009), statische Würfelbilder (Gaidoschik, 2022; Gerster & Schultz, 2004), oder Vergleiche mit anderen Objekten wie Plättchen (Wittmann, 2016; Wittmann & Müller, 2004, 2009, 2017) oder Eier im Zehnerkarton (Benz & Walz, 2013; Benz et al., 2015; Benz, 2023).

Vor diesem Hintergrund erscheint es aus fachdidaktischer Sicht auch lohnend, dass alle Kinder die genannten und wesentlichen Bereiche in dieser frühen Phase des Mathematiklernens im Rahmen einer entwicklungsangemessenen, adaptiven Lernbegleitung (Abschnitt 3.3.1) *aktiv* und somit selbst durchdringen. Am besten tun sie das, wenn sie von Anfang an selbst mathematisch tätig werden und Mathematik aktiv erleben, erforschen, entdecken und erklären (Gaidoschik, 2007, 2010; Gerster, 2007; Steinweg, 2001, 2014; Wittmann, 1995). In diesem Zusammenhang fordern Benz et al. (2015), Steinweg (2008), Wittmann (2016), Wittmann und Müller (2009, 2017) und andere in

dieser frühen Phase des Mathematiklernens auf die fachliche Richtigkeit der Lernangebote (Abschnitt 2.1.1) besonders zu achten und sich auch fortlaufend die Frage zu stellen, was genau zum Erlernen eines mathematischen Bereiches tatsächlich für alle Kinder erforderlich ist. Gerster (2007) bringt es hier in aller Klarheit auf den Punkt:

Mathematik lernen bedeutet *aktive Arbeit des Kindes* und zwar *mit mathematischen Gegenständen* und mathematisches Nachdenken über sie. *Keine andere* Übung kann diese Arbeit ersetzen. Schlicht gesagt: Rechnen lernt man durch Rechnen, wie man eben Klavierspielen nur durch Klavierspielen lernt. (Gerster, 2007, S. 11, Hervorhebung im Original)

Um alle Kinder in ihrer „aktiven Arbeit mit mathematischen Gegenständen“ (Gerster, 2007, S. 11) bestmöglich zu unterstützen, ist es für (erwachsene) Lernbegleiter essentiell zu wissen, wie Kinder denken, welche gedanklichen Leistungen sie bei den einzelnen arithmetischen Bereichen erbringen müssen und auch, welche (fachrichtungs-)didaktischen Überlegungen unterstützend sein könnten. Freilich sind solche wie in diesem Kapitel dargestellten didaktisch-pädagogischen Schlussfolgerungen für diese frühe Phase des Mathematiklernens letztlich nur, wie eingangs von Krauthausen (2009, S. 114) formuliert, „Wahrscheinlichkeitsaussagen“ über das kindliche Lernen. Dennoch und mit Krauthausens (2009) Grundaussage zustimmend, schließt die Autorin der vorliegenden Arbeit dieses Kapitel: „Wahrscheinlichkeiten für besseres Lernen und Lehren zu erhöhen, das ist gewiss nicht wenig!“ (S. 114).



### 3 Gemeinsames Lernen im arithmetischen Anfangsunterricht

*“Der Geist ist kein Schiff, das man beladen,  
sondern ein Feuer, das man entfachen muss.“*

*Plutarch, 46 – 120 n. Chr.*

Vor dem Hintergrund des postulierten Ziels einen Rahmen für einen adäquaten Umgang mit einer deutlich *heterogenen Lerngruppe* zu finden, wurden spätestens seit den 1970er Jahren verschiedene (inklusions-)pädagogische Ansätze wie die „Entwicklungslogische Didaktik“ von Feuser in den 1980er Jahren oder das „Theorem der Gemeinsamen Lernsituation“ von Wocken in den 1990er Jahren entwickelt.

Der fachliche Diskurs in der inklusiven Pädagogik und in der Geistigbehindertenpädagogik im deutschsprachigen Raum wurde etwa bei Biewer (1992, 2021), Feuser (1995, 2011, 2013), Moser Opitz (2014), Prengel (1995, 2001), Wocken (1996, 1998, 2009) und anderen dargestellt. Nun gilt es nicht in Kapitel drei dieser Arbeit diese Geschichten nachzuzeichnen (eine ausführliche Übersicht dazu findet man etwa bei Werning & Lütje-Klose, 2016; im Kontext aktiv-entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht bei Kindern mit geistiger Behinderung bei Ratz, 2016), vielmehr wird in diesem Kapitel der Frage nachgegangen, wie Bedingungen für inklusive Bildung und inklusiven Mathematikunterricht aus (inklusions-)pädagogischer und aus fachdidaktischer Perspektive (weiter-)entwickelt werden können, so dass erwünschte Auswirkungen hervortreten?

Kapitel 3 dieser Arbeit nimmt sich dieser Frage an und beschreibt in diesem Zusammenhang gemeinsames Lernen im Anfangsunterricht in der Primarstufe. Ausgehend von didaktischen Überlegungen für einen inklusiven Unterricht werden in Abschnitt 3.1.1 unterschiedliche Konzeptionen inklusiven Unterrichts beschrieben und gegenübergestellt. Vor diesem Hintergrund formuliert Moser Opitz (2014) vier didaktische Kriterien und zieht diese als Grundlage zur Analyse der Konzeptionen heran: „Eine optimale Förderung aller Schüler\*innen einer heterogenen Lerngruppe; Differenzierungsmöglichkeiten; Tiefenstruktur von Unterricht und dessen Qualität: Berücksichtigung der Aspekte transparenter Stoffaufbau, Verstehensklarheit, Klassenführung, kognitive Aktivierung und lernförderliches Sozialklima; und das Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ (S. 53). Auch die Autorin der vorliegenden Arbeit sieht die von Moser Opitz benannten Kriterien als grundlegende didaktische Überlegungen für einen inklusiven Unterricht. In Abschnitt 3.1.2 werden diese vier Kriterien beschrieben. Auch werden diese Kriterien als Grundlage für die Gestaltung der Lernumgebungen dieser Arbeit (Abschnitt 6.2) herangezogen.

Abschnitt 3.2.1 stellt ausgehend von der Klärung der Bedeutung und des Einsatzes substantieller Lernumgebungen im Mathematikunterricht fortlaufend die natürliche Differenzierung als ein gut geeignetes Konzept der Differenzierungsmöglichkeit dar.

Wie eine Umsetzung im arithmetischen Anfangsunterricht für *alle Kinder* im inklusiven Unterricht konkret und am besten aussehen kann, darüber gibt es innerhalb der Fachdidaktik und anderen Fachrichtungen verschiedene Ansichten. Abschnitt 3.2.1 zeigt, warum in der deutschsprachigen Fachdidaktik weitgehender Konsens darüber besteht, dass Lernende mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und/oder Lernende, denen ein Förderschwerpunkt zugesprochen wurde, fachlich keinen *besonderen* oder grundsätzlich „anderen“ Mathematikunterricht brauchen, sondern von einem Unterricht profitieren können, der grundlegende Leitideen eines „guten“ Mathematikunterrichts berücksichtigt.

Vor diesem Hintergrund rät die deutschsprachige Mathematikdidaktik im inklusiven Klassenzimmer von einer Arbeit im Gleichschritt und einem kleinschrittigen Vorgehen ab und zeigt, dass ein aktiv-entdeckendes Lernen mit besonderer Konzentration auf den Basisstoff, der Verwendung strukturierter Arbeitsmittel, produktives Üben, sowie ein gemeinsames Mathematiklernen mit Phasen des von- und miteinander Lernens – neben Phasen des Lernens auf eigenen Wegen – auch im Mathematikunterricht möglich ist und gelingen kann (Abschnitt 3.2.2). Abschnitt 3.2.2 schließt mit der Umsetzung der fachlichen und (fachrichtungs-)didaktischen Prinzipien in den österreichischen Lehrplänen für die Volksschule und leitet zur der in Abschnitt 3.3 dargestellten Bedeutung professioneller Kompetenz von Lehrkräften sowie der Rolle einer fachlich fundierten Aus- Fort-, und Weiterbildung über.

### **3.1 Didaktische Überlegungen für einen inklusiven Unterricht**

Moser Opitz (2014) stellt in ihrem Beitrag fünf Konzeptionen für inklusiven Unterricht vor, die sie in weiterer Folge gegenüberstellt und anhand der unten angeführten vier didaktischen Kriterien diskutiert. Bei diesen Konzeptionen führt die Autorin den „Index für Inklusion“ (Booth & Ainscow, 2002; in der deutschen Übersetzung Boban & Hinz, 2002, 2003; Abschnitt 4.1.1 dieser Arbeit), die Inklusive Didaktik von Seitz (2004, 2006), die Inklusive Didaktik von Reich (2013, 2014), das Rügener Inklusionsmodell (Mahlau et al., 2011), welches auf dem Ansatz von Response-to-intervention basiert und die allgemeine Pädagogik und Entwicklungslogische Didaktik von Feuser (2013) aus.

Eine ausführliche Darstellung dieser einzelnen Konzeptionen inklusiven Unterrichts würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen, weswegen diese im Folgenden

knapp vorgestellt werden. Für eine Gegenüberstellung der einzelnen Konzeptionen wird auf Moser Opitz (2014) verwiesen.

### **3.1.1 Konzeptionen inklusiven Unterrichts**

Moser Opitz (2014) weist darauf hin, dass es sich bei dem weit verbreiteten Index für Inklusion (Boban & Hinz, 2002, 2003) „nicht um eine spezifisch didaktische Konzeption“ handelt, sondern, dass dieser als „ein Instrument für die Entwicklung von inklusiven Schulen“ (S. 57) eingesetzt werden kann. Die Autor\*innen beschreiben bei diesem Leit-faden für Schulentwicklung drei Dimensionen, welche durch mehrere Indikatoren operationalisiert werden: „das Schaffen von inklusiven Kulturen (Aufbau einer sicheren, akzeptierenden, zusammenarbeitenden und anregenden Gemeinschaft), das Etablieren von inklusiven Strukturen (Inklusion als zentraler Aspekt der Schulentwicklung) und das Schaffen von inklusiven Praktiken (Anregung von partizipativen Aktivitäten inner- und außerhalb des Schulzimmers, ermöglichen des Lernens am gemeinsamen Gegenstand usw.)“ (Boban & Hinz, 2002, 2003; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 57).

Die inklusive Didaktik von Seitz (2004, 2006) spricht sich – wie bei Moser Opitz beschrieben – dafür aus, das künstliche Nebeneinander einer „Regeldidaktik“ und mehrerer „Sonderdidaktiken“ zu verwerfen. Seitz fordere stattdessen eine Entwicklung eines Kerncurriculums, „das für jede Lerngruppe konkretisiert und für jedes Kind individualisiert werden muss.“ (Seitz, 2004, 2006; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 56) Mit der Frage nach dem „Kern der Sache“ stellt die Autorin den Zusammenhang zwischen dem Lerngegenstand und den individuellen Voraussetzungen der Lernenden her und konkretisiert diese ausgehend am Beispiel der Fachdidaktik im Sachunterricht.

Moser Opitz (2014) berichtet davon, dass die Unterrichtskonzeption für inklusiven Unterricht Response-to-Intervention (RTI) vor allem in den USA beworben wird. In diesem Zusammenhang und als Zielsetzung werden Fördermaßnahmen, die sich als wirksam erwiesen haben, im regulären Unterricht implementiert. Moser Opitz (2014) schreibt außerdem, dass bei dieser Konzeption die Leistungen der Lernenden regelmäßig durch Tests überprüft werden und verweist im deutschsprachigen Raum auf das Rügener Inklusionsmodell (Mahlau et al., 2011; Voß et al., 2014), welches RTI als Grundlage nützt. Auf der Insel Rügen – so Moser Opitz (2014) – werden die Kinder regelmäßig getestet, bestimmte Fördermaterialien werden flächendeckend eingesetzt, damit ein „qualitativ hochstehender Unterricht“ (S. 59) angeboten werden kann. Zusammenfassend verweist Moser Opitz auf einige Vertreter\*innen der Inklusionspädagogik, die diesen Ansatz aus-

drücklich kritisieren und eine Übertragung auf das deutsche Schulsystem als „nur in Ansätzen möglich, sinnvoll und erwünscht“ (Huber & Grosche, 2012; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 59) und als „deutlich behavioristischen Zugang [...] der von einer linearen Vorstellung des Lernens ausgeht“ (Hinz, 2013; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 59) bezeichnen.

Weiters beschreibt Moser Opitz (2014) in ihrem Beitrag die entwicklungslogische Didaktik von Feuser (2013) als die „wohl bekannteste Konzeption für inklusiven Unterricht“ (S. 55). Diese Pädagogik hat den Anspruch an das Bildungssystem, Menschen gemeinsam zu bilden und somit alle Kinder in einer Schule zu unterrichten. Das von Feuser geforderte „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ durch Kooperation der Kinder auf unterschiedlichen Entwicklungsniveaus am gemeinsamen Lerngegenstand wird im Sinne des Autors vor allem durch Projektunterricht realisiert.

Hingegen, die inklusive Didaktik nach Reich (2013, 2014) nennt als einen besonderen Bezugspunkt den Konstruktivismus, „denn inklusive Ansätze bauen auf dem aktuellen Stand der konstruktivistisch orientierten Lerntheorien grundsätzlich auf“ (Reich, 2014, S. 50; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 58). Der Autor schlägt – mit Bezug auf den Index für Inklusion – eine Konzeption mit zehn Bausteinen vor: „Beziehungen und Teams, demokratische und chancengerechte Schule, qualifizierende Schule (d.h. alle Lernenden umfassend qualifizieren), Ganztag und Rhythmisierung, förderliche Lernumgebungen, Lernende mit Förderbedarf, differenzierte Beurteilung, eine geeignete Schularchitektur, eine Schule in der Lebenswelt sowie Beratung, Supervision und Evaluation“ (Reich, 2014; zitiert nach Moser Opitz, 2014, S. 58).

### **3.1.2 Kriterien zur Analyse von Konzeptionen inklusiven Unterrichts**

Auch die Autorin der vorliegenden Arbeit betrachtet die von Moser Opitz (2014) definierten vier didaktischen Merkmale, als eine Möglichkeit zur Analyse von Konzeptionen inklusiven Unterrichts, als grundlegend. Diese Kriterien, nämlich „eine optimale Förderung aller Schüler\*innen einer heterogenen Lerngruppe; Differenzierungsmöglichkeiten; Tiefenstruktur von Unterricht und dessen Qualität: Berücksichtigung der Aspekte transparenter Stoffaufbau, Verstehensklarheit, Klassenführung, kognitive Aktivierung und lernförderliches Sozialklima; und das Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ (S. 53) werden folgend herausgearbeitet und in Verbindung mit einem inklusiven Mathematikunterricht in der Primarstufe und in Verbindung mit dem Bildungssystem in Österreich gesetzt.

### ***Optimale Förderung aller Schüler\*innen einer heterogenen Lerngruppe und inhaltliche Differenzierungsmöglichkeiten***

Anders als zum Zeitpunkt der Entstehung der Sonderschulen in Österreich (zur Entwicklung des österreichischen *Sonderschulwesens* siehe Abschnitt 4.1.2), werden heutzutage Schüler\*innen mit Lernbeeinträchtigung und/oder geistiger Behinderung in unterschiedlichen schulischen Institutionen gefördert. Eine Möglichkeit davon stellt in Österreich die inklusive Regelklasse dar (siehe Abschnitt 4.1.2 dieser Arbeit und Abbildung 10). In diesem Zusammenhang hat die Frage nach geeigneten Differenzierungsmaßnahmen im (Mathematik-)Unterricht eine Bedeutung gewonnen.

Hingegen, in den gegenübergestellten Konzeptionen inklusiven Unterrichts sei nach Moser Opitz (2014) das Kriterium Differenzierungsmöglichkeit „unbefriedigend gelöst“. Deshalb stellt sich für die Autorin „die Frage, in welche Richtung die vorliegenden Konzeptionen weiter entwickelt werden müssten“ (S. 63). Abschließend beschreibt sie in ihrem Beitrag wesentliche Überlegungen zur Weiterentwicklung von Differenzierungsangeboten. Laut Moser Opitz können solche Differenzierungsangebote im inklusiven Unterricht *nur* dann verwirklicht werden, wenn „fachdidaktische Erkenntnisse berücksichtigt werden“ (Moser Opitz, 2014, S. 63). Eine Erkenntnis sei in diesem Zusammenhang nach Moser Opitz das „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ von Feuser. Bezogen auf das Konzept „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ könne demnach nach Moser Opitz „der Einbezug der Fachdidaktik dazu dienen, den ‚gemeinsamen Gegenstand‘ klarer zu fassen und zu beschreiben und unter Berücksichtigung der individuellen Voraussetzungen [...] und des Aneignungsniveaus [...] Lernangebote zu entwickeln“ (Moser Opitz, 2014, S. 63 f.). Aus fachdidaktischer Sicht resümiert Moser Opitz (2014) in diesem Zusammenhang allerdings klar:

Unbefriedigend gelöst ist bisher in allen Ansätzen die Frage nach der inhaltlichen Differenzierung. Fachdidaktische Überlegungen und Analysen, die ‚von der Sache her‘ denken, gleichzeitig individuelle Kompetenzen und Lebenslagen mitberücksichtigen und von der Sache her nach den gemeinsamen Lernmöglichkeiten für alle Schüler\_innen suchen, können dazu beitragen, die Didaktik für inklusiven Unterricht weiterzubringen. Dazu ist jedoch auch die Auseinandersetzung mit Erkenntnissen zur Tiefenstruktur des Unterrichts zwingend notwendig. Nur unter Voraussetzungen kann es gelingen, inklusiven Unterricht zu gestalten, der wirksame Förderung durch das Lernen am gemeinsamen Gegenstand möglich macht. (S. 65)

In eine ähnliche Richtung argumentieren auch Krauthausen und Scherer (2014) mit Verweis auf Wittmann (1996) im Mathematikunterricht, wonach laut den Autor\*innen für einen differenzierten Umgang mit unterschiedlichen Lernständen eine *Orientierung am Fach* notwendig zu sein scheint (Abschnitt 3.2).

Zusammenfassend beschreibt Moser Opitz (2014) in ihrem Beitrag als die größte Herausforderung einer optimalen Förderung aller Lernenden einer heterogenen Lerngruppe „den Umgang mit dem Spannungsfeld ‚gemeinsam lernen‘ und ‚effektiv fördern‘“ (S. 65). Weitere Überlegungen in eine ähnliche Richtung werden folgend herausgearbeitet.

### ***Lernen am gemeinsamen Gegenstand***

Grundsätzliche Überlegungen über das Lernen an einer gemeinsamen Aufgabe mit einer mathematikdidaktischen Begründung forderte der Mathematikdidaktiker Freudenthal (1974) bereits in den 1970er Jahren:

Ich glaube an den sozialen Lernprozeß und deswegen eifere ich für die heterogene Lerngruppe. [...] Die heterogene Lerngruppe umfaßt Schüler verschiedener Niveaus, die an *einer* Aufgabe – jeder auf der ihm eigenen Stufe – zusammenarbeiten, so wie in den im allgemeinen heterogenen Arbeitsgruppen der Gesellschaft Menschen verschiedener Niveaus, jeder seiner Stufe entsprechend, eine gemeinschaftliche Aufgabe erfüllen. (S. 63, Hervorhebung im Original)

Auch in der Sonderpädagogik wurden in den darauffolgenden Jahren Überlegungen in eine ähnliche Richtung angestellt. Im deutschsprachigen Raum verweisen etwa Moser Opitz (2014), Werning und Lütje-Klose (2016) und andere auf Feuser als einen der ersten deutschen Sonderpädagogen, der sich mit didaktischen Fragen zum inklusiven Kontext beschäftigte. In diesem Rahmen soll im Sinne von Feuser „durch innere Differenzierung in Bezug auf die Ziele, Methoden und Medien jeder Unterrichtsgegenstand so aufbereitet werden, dass er den Lernmöglichkeiten jedes einzelnen Kindes entsprechend bearbeitet werden kann“ (Werning & Lütje-Klose, 2016, S. 147). Zentral ist bei Feuser (1989) das bereits mehrfach genannte „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ (S. 32).

Nach Feuser soll jeder Lernende – gemäß den je eigenen Möglichkeiten – die Gelegenheit haben, sich gemeinsam mit anderen Lernenden einer Klasse mit demselben Lerngegenstand auseinanderzusetzen. In den Worten Feusers (1989):

Der ‚*gemeinsame Gegenstand*‘ integrativer Pädagogik ist nicht *das materiell Fassbare*, das letztlich in der Hand des Schülers zum Lerngegenstand wird, sondern *der zentrale Prozess*, der hinter den Dingen und beobachtbaren Erscheinungen steht und sie hervorbringt. (S. 32, Hervorhebungen im Original)

Wenngleich Feusers Ansatz des „Lernens am gemeinsamen Gegenstand“ (1989, S. 32) von anderen (Inklusions-)Pädagog\*innen im Verlauf der Jahrzehnte immer wieder in Frage gestellt wurde, würden sich laut Textor et al. (2017) gegenwärtige Überlegungen zu einer inklusiven Didaktik als Ausgangspunkt für einen inklusiven Mathematikunterricht grundsätzlich eben an Feusers Theorem orientieren.

Ausdrücklich tut dies Wocken (1988), da laut ihm das Konzept des Lernens am gemeinsamen Gegenstand und damit zusammenhängend die kooperative Tätigkeit das Alleinstellungsmerkmal erhebe, als das einzige didaktische Theorem zu gelten, welches integrativ und aufmerksamkeitsstiftend wirken könne. Vielmehr sieht Wocken (1998) inklusiven Unterricht als eine „dynamische Balance von integrierenden und differenzierenden Lernsituationen“ (S. 40) und beschreibt in weiterer Folge unterschiedliche kooperative Lerngelegenheiten.

Die von Wocken formulierten kooperativen Lerngelegenheiten werden aus fachdidaktischer Perspektive von einigen Autor\*innen im deutschsprachigen Raum aufgegriffen. In diesem Zusammenhang stellen einige Autor\*innen (Fetzer, 2016; Häsel-Weide 2019; Häsel-Weide et al., 2014; Häsel-Weide & Wittich, 2014; Käpnick, 2016; Nührenbörger, 2007; Steinbring, 2005) und andere explizit in ihren didaktischen Konzeptionen für einen Mathematikunterricht die Bedeutung *des Lernens im Diskurs* in den Mittelpunkt. Aus fachdidaktischer Sicht soll der (Mathematik-)Unterricht – im Sinne der genannten Autor\*innen – möglichst viele gemeinsame Lerngelegenheiten schaffen, an denen sich alle Lernenden mit ihren unterschiedlichen Voraussetzungen beteiligen können (siehe dazu auch Abschnitt 2.1.2).

Vor diesem Hintergrund unterscheidet Wocken (1998) drei verschiedene Arten gemeinsamer Lernsituationen: i) koexistente Lernsituationen; ii) subsidiäre Lernsituationen

nen; iii) kooperative Lernsituationen. Nach Weidner (2003) eignen sich von den kooperativen Methoden für eine Umsetzung in Unterricht vor allem strukturierte Möglichkeiten der Partnerarbeit, welche auch eine intensive Interaktion ermöglichen.

Auch Röhr (1995) nahm sich dieser Thematik an und überlegte in den 1990er Jahren Aufgabenformate für den Mathematikunterricht, an denen Lernende miteinander kooperieren können. Der Autor schlussfolgerte daraus, dass kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe „von der Sache her durch geeignete Aufgaben entwickelt werden“ (S. 258) soll und auch kann.

Häsel-Weide und Wittich (2014) argumentieren in eine ähnliche Richtung wie Weidner, wonach kooperative Arbeitsphasen im Mathematikunterricht stark strukturiert sein sollten und hier insbesondere für Kinder mit mathematischen Lernschwächen. Ähnlich wie Röhr entwickelten Häsel-Weide et al. (2014) in einem Projekt zwanzig kooperativ-strukturierte Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen, welche systematisch erprobt und evaluiert wurden. Die Autorinnen formulieren dabei zwei methodische Settings, nämlich das kooperative Setting „Wippe“ und das kooperative Setting „Weggabelung“ (Häsel-Weide, 2019, S. 84 f., Häsel-Weide et al., 2014, S. 44; Häsel-Weide & Wittich, 2014, S. 38), in denen Lernende im Mathematikunterricht zu zweit tätig werden.

Diese beiden methodischen Settings werden auch in den Unterrichtsbausteinen der vorliegenden Arbeit berücksichtigt. Abschnitt 6.2 widmet sich dieser Thematik.

Neben dem gemeinsamen Lernen im inklusiven Mathematikunterricht gilt als breiter Konsens unter den genannten Autor\*innen, dass Lernen in dieser frühen Phase auch individuelle Phasen berücksichtigen muss. Vor diesem Hintergrund sprechen sich aus fachdidaktischer Sicht die Autor\*innen dafür aus, dass beides – Individualisierung einerseits und der bewussten Herstellung von gemeinsamem Lernen andererseits – in Unterricht lohnend sind, um integrative Prozesse in einer Lerngruppe zu ermöglichen (Gummels, 2020; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Korten, 2020; Riegert et al., 2015; Stöckli et al., 2014).

Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) formulieren in diesem Zusammenhang im Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 1: „Einerseits ist das übergeordnete Ziel, möglichst oft möglichst viele Kinder am gemeinsamen Unterricht teilhaben zu lassen. Andererseits sind fokussierte und vertiefende Unterstützungsangebote für einzelne Kinder bereitzuhalten“ (S. 4).

Diese Überlegungen von Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) können im Sinne des in Abschnitt 4.1 definierten Begriffes der Inklusion, wonach die Vielfalt als gleichwer-



tig anerkannt wird und die in Abschnitt 4.1.1 geforderte qualitativ hochwertige Schulbildung für alle Kinder durchaus als Widerspruch zum aktuellen Verständnis inklusiver Bildung und inklusivem Unterricht gesehen werden.

### ***Auseinandersetzung mit der Tiefenstruktur des Unterrichts und der Einbezug von Ergebnissen der Unterrichtsforschung***

Moser Opitz (2014) nennt es als Aufgabe einer inklusiven Didaktik, sich sowohl auf die Fachdidaktik zu beziehen als auch Überlegungen zur Tiefenstruktur des Unterrichts mit zu berücksichtigen. Sie verweist als ein Beispiel zum inklusiven Mathematikunterricht in der Primarstufe auf Stöckli et al. (2014), die ihrer Ansicht nach beide Vorschläge – der Einbezug von fachdidaktischen Überlegungen und Erkenntnissen aus der Unterrichtsforschung – aufnehmen.

Aus fachdidaktischer Sicht können im deutschsprachigen Raum weitere Beispiele von Unterrichtsforschung insbesondere der letzten Jahre genannt werden, die sich der Thematik des „gemeinsamen lernens“ und „effektiv fördern“ aller Lernenden im inklusiven Mathematikunterricht annehmen. So führen Jütte und Lüken (2021) auf Grundlage der in Abschnitt 3.1 von Moser Opitz (2014) genannten didaktischen Kriterien drei weitere Beispiele zum inklusiven Mathematikunterricht im deutschsprachigen Raum an: Die bereits beschriebenen substantiellen Lernumgebungen von Häsel-Weide (2015, 2016a, 2016b, 2017; zitiert nach Jütte & Lüken, 2021), Mathe inklusiv mit PIKAS (DZLM, 2015; zitiert nach Jütte & Lüken, 2021) und das Zahlenbuch (Wittmann et al., 2017a, 2017b, 2018, 2019; zitiert nach Jütte & Lüken, 2021).

Andere Autor\*innen im deutschsprachigen Raum (Moser Opitz, 2016; Ratz, 2017; Scherer, 2017) differenzieren im Fach Mathematik ihre Konzeptionen für Lernende mit dem Förderbedarf geistige Entwicklung weiter aus. Weitere Überlegungen in diese Richtung werden in den folgenden Abschnitten angestellt.

### **3.2 Fachdidaktische Empfehlungen für einen inklusiven Mathematikunterricht**

*„Es gibt keine Notwendigkeit, den Lerninhalt für Kinder mit Lernbeeinträchtigung zu verändern. Was getan werden muss ist das, was alle guten LehrerInnen tun: Man muss dem Kind Aufmerksamkeit schenken und genau beobachten, wie es lernt; und man muss die Instruktion (nicht den Inhalt) so gestalten, dass die Stärken des Kindes bestmöglich genutzt und die Schwächen bestmöglich kompensiert werden.“*

*van de Walle (2004, p. 93); entnommen aus Gaidoschik (2007, S. 9)*

## **Grundsätzliche Überlegungen**

Vor dem Hintergrund eines mehrdimensionalen Inklusionsverständnisses wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, wonach die unterschiedlichen Fähigkeiten und Fertigkeiten aller Schüler\*innen in der Institution Schule *ausdrücklich* willkommen sind, wird im Folgenden der Mathematikunterricht aus (inklusions-)pädagogischer und vor allem aus fachdidaktischer Sicht betrachtet. In diesem Zusammenhang wird besonders auf die Förderbereiche Lernen und geistige Entwicklung in Unterricht und Förderung eingegangen, da die Lernenden dieser Untersuchung (Kapitel 6 und Kapitel 8) diesen beiden Förderbereichen zugeordnet werden können.

Ganz generell können Kinder in unterschiedlichen Bereichen Schwierigkeiten beim Lernen von mathematischen Inhalten haben, die sich wiederum in verschiedenen Ausprägungen zeigen: Manche Kinder haben Schwierigkeiten beim Rechnen, andere Kinder tun sich beim Lernen allgemein schwer (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017). Diese Schwierigkeiten beim Mathematiklernen können über einen begrenzten Zeitraum anhalten oder sich zu einem sogenannten (Sonderpädagogischen) Förderbedarf ausprägen. Wie in Abschnitt 4.3 näher beschrieben, wird in Österreich der Oberbegriff Sonderpädagogischer Förderbedarf (SPF) verwendet; in weiterer Folge werden innerhalb dieses Oberbegriffes Förderschwerpunkte und -bereiche festgelegt.

Mit Bezug auf Kinder, denen das mathematische Lernen schwerfällt, deuten wesentliche fachliche Überlegungen, die in den letzten Jahren im deutschsprachigen Raum veröffentlicht wurden, darauf hin, dass sie *keine* wesentlich anderen Konzepte für die Unterstützung des fachlichen Lernens benötigen, als sie ohnehin für alle Kinder generell empfohlen werden (Gaidoschik et al., 2019a, 2019b; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Moser Opitz, 2008; Schnepel et al., 2015; Wember, 2013). Die *fachlichen* Überlegungen hinsichtlich eines „guten“ Mathematikunterrichts können demnach Großteils auf einen inklusiven Unterricht übertragen werden. Wygotski (1975) zitiert in diesem Zusammenhang Troschin, der feststellt:

Im Grunde besteht zwischen normalen und anormalen Kindern kein Unterschied. Die einen wie die anderen sind Menschen, die einen wie die anderen sind Kinder, bei den einen wie bei den anderen verläuft die Entwicklung nach den gleichen Gesetzen. Der Unterschied besteht nur in dem Verfahren der Entwicklung. (S. 69)

Aktuelle empirische Untersuchungen geben jedoch Anlass zur Annahme, dass eine klassenintegrierte Förderung für Lernende, die Probleme beim Lernen von mathematischen Inhalten haben, zu wenig sein könnte (Moser Opitz et al., 2018; Stöckli, 2019). Einige Kinder benötigen demnach neben der klassenintegrierten Förderung mehr Übung und zusätzliche Maßnahmen. Gezielte Fördermaßnahmen können für einzelne Kinder – je nach schulischer Gegebenheit – im Rahmen einer Förderung außerhalb des Klassenverbandes und zusätzlich zum Regelunterricht und/oder gegebenenfalls auch im Rahmen von Unterstützungsmaßnahmen außerhalb der Schule sinnvoll und erforderlich sein (Gaidoschik et al., 2021). Die in Abschnitt 3.1 dargestellten *didaktischen* Überlegungen für einen guten Mathematikunterricht gelten, so der Konsens, somit auch in einem inklusiven Mathematikunterricht, jedoch sind diese den Rahmenbedingungen heterogener Lerngruppen anzupassen (Scherer & Moser Opitz, 2010).

Innerhalb dieser heterogener Lerngruppen gilt es im Mathematikunterricht beispielsweise Lernende, denen der Schwerpunkt „geistige Entwicklung“ zugeschrieben wurde, bestmöglich zu fördern. Nach Moser Opitz (2008) hatte bei diesen Kindern die Förderung pränumerischer Kompetenzen wie der Klassifikation, Seriation oder Mengeninvarianz und/oder die Förderung in den Bereichen der Wahrnehmung, Motorik und Raumorientierung über eine lange Zeit in Unterricht und Förderung eine große Bedeutung. Besonders pränumerische Kompetenzen galten laut Moser Opitz als *Voraussetzung* für den Erwerb von numerischen Kompetenzen. Das führte dazu, dass nicht-numerische Bereiche häufig besonders gefördert und das Arbeiten mit Zahlen zurückgestellt wurden (zusammenfassend siehe dazu Moser Opitz, 2008 oder Moser Opitz et al., 2014).

Aufgaben zur Förderung pränumerischer Kompetenzen finden sich nach wie vor in gängigen – jedoch laut Moser Opitz et al. (2014) empirisch nicht überprüften – Förderkonzepten für Lernende mit dem Schwerpunkt „geistige Entwicklung“ (de Vries, 2014; Verein Hand in Hand, 2011). Daneben wird in diesen Förderkonzepten ein besonderer Schwerpunkt auf das Rechnen im kleinen Zahlenraum gelegt, kleinschrittig vorgegangen und Abzählhilfen mit Fingern und/oder Zählrahmen angeboten (Moser Opitz et al., 2014; Schnepel et al., 2015).

Die Bedeutung dieser pränumerischen Aufgaben für die Zahlbegriffsentwicklung bei Kindern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung wird aufgrund neuerer Untersuchungen in Zweifel gestellt (Moser Opitz, 2008; Moser Opitz et al., 2014; Schnepel et al., 2015; Siegemund, 2016, 2017). Ganz generell seien Untersuchungen zum Erwerb von mathematischen Kompetenzen bei Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung nach Moser Opitz et al. (2014) im deutschsprachigen Raum rar. Zwei

wesentliche Untersuchungen in diesem Zusammenhang werden nachfolgend beschrieben.

Bashash et al. (2003) zeigen in ihrer Untersuchung mit Schüler\*innen mit einer mittelschweren intellektuellen Beeinträchtigung (IQ zwischen 36 und 54) im Alter zwischen sieben und 18 Jahren, dass deren Zählentwicklung jener von Schüler\*innen ohne intellektuelle Beeinträchtigung in den wesentlichen Entwicklungsschritten gleicht. Bei der Ausbildung einzelner mathematischer Kompetenzen habe sich lediglich eine zeitliche Verzögerung von einigen Jahren gezeigt. Die Autor\*innen empfehlen deshalb, bei diesen Lernenden diese grundlegenden mathematischen Kompetenzen in höherem Alter weiter zu fördern.

Garrote et al. (2015) führten eine Untersuchung in der Schweiz und Deutschland durch. Bei 109 Kindern und Jugendlichen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung stellten sie fest, dass die Lernenden mit einer intellektuellen Beeinträchtigung (leicht und mittelgradig) zwischen sechs und 18 Jahren in der Regel über bestimmte mathematische Basisfertigkeiten, wie das Benennen von Zahlwörtern, arabischen Zahlen in Ziffernschreibweise und das Aufsagen der Zahlwortreihe verfügen. Schwierigkeiten zeigten die Lernenden im Bereich der präzisen Größenrepräsentationen. Vor diesem Hintergrund sind Aktivitäten zum Rückwärtszählen und/oder zum Zählen in Schritten für sie schwieriger. Auch konnte von den Autor\*innen gezeigt werden, dass die pränumerische Invarianzaufgabe, wie sie von Piaget als Voraussetzung für den Zahlbegriffserwerb postuliert wurde und die in den oben genannten Konzeptionen berücksichtigt wird, *deutlich schwieriger* für die untersuchte Gruppe ist als numerische Aufgaben.

Welche Folgerungen können vor diesem Hintergrund für die Förderung von Lernenden mit dem Förderschwerpunkt „geistige Entwicklung“ im Mathematikunterricht gezogen werden? Siegemund (2016, 2017) bezieht in diesem Zusammenhang eine klare Position, indem er der *Förderung* pränumerischer Kompetenzen bei diesen Lernenden generell *keine* Bedeutung zuschreibt. Der Autor stellt fest, dass „die Unterteilung der basalen mathematischen Unterrichtsinhalte in einen pränumerischen und einen numerischen Bereich [...] nicht aufrechtzuerhalten“ (S. 203) sei. Demzufolge sollten „logische Grundstrukturen [...] von Beginn an mit numerischen Übungen kombiniert werden“ (S. 203). Autor\*innen wie Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) verbinden in ihren Konzeptionen, beispielsweise im Förderkommentar und Förderheft zum „Zahlenbuch. Klasse 1“ (Nührenbörger et al., 2017), denn auch pränumerische Aktivitäten mit numerischen Aktivitäten.

Auch Moser Opitz et al. (2014) und Schnepel et al. (2015) mit Siegemund: Ansätze, welche die pränumerischen Fertigkeiten als *notwendige* Basis für ein tragfähiges Zahlverständnis fordern (etwa jene von de Vries, 2014), sind klar kritisch zu sehen. Und mehr noch in dieselbe Richtung: Es sei kein direkter Einfluss der Förderung in den Bereichen Wahrnehmung und Raumorientierung, wie sie beispielsweise in der aktuellen Konzeption „Yes we can“ (Verein Hand in Hand, 2011) empfohlen wird, auf den numerischen Kompetenzerwerb zu beobachten.

Moser Opitz et al. (2014) argumentieren weiters, dass mathematische Kompetenzen der Kinder mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung sehr heterogen zu sein scheinen. Deshalb sprechen sie gerade einer hohen Adaptivität des Unterrichts eine wesentliche Bedeutung zu, welche mit einer professionellen Kompetenz von Lehrkräften einhergehe (Abschnitt 3.3).

Breiter Konsens unter den genannten Fachautor\*innen besteht jedenfalls darüber, dass Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung schon früh Lernangebote erhalten sollen, bei denen *Zahlen und Anzahlen* verknüpft werden (Brankaer et al., 2013).

Die in diesem Abschnitt eingangs von van de Walle (2004) zitierte Position, wonach es „keine Notwendigkeit [gibt], den Lerninhalt für Kinder mit Lernbeeinträchtigung zu verändern“, wird auch von Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) im Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch geteilt und gilt gleichzeitig als Abschluss dieses Abschnittes: „Inklusion erfordert keinen *besonderen* Mathematikunterricht, sondern einen, der die individuellen Stärken und Schwächen eines jeden Kindes zu berücksichtigen und zugleich die Heterogenität einer Lerngruppe für gemeinsames Lernen zu nutzen weiß“ (S. 4, Hervorhebung im Original).

### **3.2.1 Die Bedeutung von substantiellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule**

*„Das Aufgabenfeld der Mathematikdidaktik ist die Erforschung und Entwicklung des Lernens und Lehrens von Mathematik in allen Altersstufen einschließlich seiner Voraussetzungen, Zielsetzungen und Rahmenbedingungen.“*

*Wittmann, 1998, S. 330*

„Inklusion“ und „Mathematikdidaktik“ sind zwei Begrifflichkeiten, die vor allem seit der Debatte um die schulpraktischen Folgen der UN-Konvention über die Rechte von Menschen mit Behinderung in Verbindung gebracht werden (Abschnitt 4.2). Wie in den

vorangehenden Abschnitten dargestellt, sei das Unterrichten in inklusiven Klassen aus (inklusions-)pädagogischer Sicht (Korff, 2018; Moser Opitz, 2014) und aus fachdidaktischer Perspektive (Gaidoschik 2019a, 2019b; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Moser Opitz, 2008; Schnepel et al., 2015) *nicht grundlegend* anders, im Sinne einer speziellen Didaktik. Vielmehr gelten beim Unterrichten die gängigen Kriterien eines guten inklusiven Mathematikunterrichtes (Abschnitt 3.2.2). Nach Korff geht es „[...] nicht etwa um einen *besonderen* Mathematikunterricht, welcher aufgrund der Anwesenheit ‚besonderer‘ Schüler\_innen notwendig wäre“ (2018, S. 10, Hervorhebung im Original). Ein guter inklusiver Anfangsunterricht in Mathematik zeichnet sich laut der Autorin dadurch aus, dass er die individuellen Stärken und Schwächen aller Kinder berücksichtigt und zugleich die Heterogenität einer Gruppe als Potenzial ansieht.

Korff (2018) macht jedoch auch deutlich, dass es für Lehrkräfte in der Primarstufe besonders herausfordernd zu sein scheint, gemeinsame Lernsituationen im Fach Mathematik zu ermöglichen: „Mathematik ist ein schlechtes Fach für den gemeinsamen Unterricht“ (S. 205). Laut den im Rahmen ihrer Dissertation befragten deutschen Lehrkräften scheint es, als seien vor allem „die Inhalte der *Arithmetik* ‘zu abstrakt’ für einen Teil der Schüler\_innen“ (S. 205, Hervorhebung C.G.). Die Inhalte der Geometrie, der Größen und der Sachrechnen-Themen würden sich nach den von Korff befragten Lehrkräften besser für ein gemeinsames Lernen eignen. Bezüglich arithmetischer Inhalte beschreibt Korff die Einschätzungen der Lehrkräfte wie folgt: „Der entlang des unterschiedlichen Zahlenraums ‚hierarchisch‘ aufgebaute Stoff erschwert es, dass alle Schüler\_innen in ihrer Vielfalt an gemeinsamen arithmetischen Themen mit- und voneinander lernen können“ (S. 205).

Für die Weiterentwicklung einer inklusiven Mathematikdidaktik sei es schlussfolgernd nach Korff (2018) unentbehrlich das „Konzept der natürlichen Differenzierung“ (S. 251) weiter auszuarbeiten. Auch „eine Konzentration auf das Wesentliche, i. S. der fundamentalen Ideen der Mathematik, kann die Voraussetzung schaffen für ein mit- und voneinander Lernen aller Schüler\_innen“ (S. 252). Im Folgenden wird auf das genannte Konzept der natürlichen Differenzierung eingegangen, Abschnitt 3.2.2. beschreibt die fundamentalen Ideen der Mathematik, die anschlussfähig und bruchlos im Verlauf des gesamten Lernprozesses (Abschnitt 2.1.1) gelten.

### ***Natürliche Differenzierung und substantielle Lernumgebungen***

Krauthausen und Scherer (2014) beschreiben, dass spätestens seit den 1970er Jahren – wie eingangs dieses Kapitels skizziert – in Bezug auf einen adäquaten Umgang mit

einer zunehmend heterogeneren Lerngruppe zeitgemäße Differenzierungsmöglichkeiten im (Mathematik-)Unterricht notwendig wurden. Vor diesem Hintergrund greifen Klafki und Stöcker als Vertreter der allgemeinen Didaktik das Postulat „Innere Differenzierung“, das mindestens seit der Reformpädagogik gefordert wurde auf und argumentieren Anfang der 1970er Jahre wie folgt:

„Innere Differenzierung“ meint dabei all jene Differenzierungsformen, die innerhalb einer gemeinsam unterrichteten Klasse oder Lerngruppe vorgenommen werden, im Unterschied zu allen Formen sog. Äußerer Differenzierung, in der Schülerpopulationen nach irgendwelchen Gliederungs- oder Auswahlkriterien – z.B. den Gesichtspunkten unterschiedlichen Leistungsniveaus oder unterschiedlichen Interessen – in Gruppen aufgeteilt werden, die räumlich getrennt und von verschiedenen Personen bzw. zu verschiedenen Zeiten unterrichtet werden. (2007, S. 173)

Auch in den „Neuen Studien zur Bildungstheorie und Didaktik“ bezieht sich Klafki (2007) auf Fragestellungen seiner früheren „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik“. Die Ähnlichkeit beider Buchtitel betonen den für Klafki unentbehrlichen Stellenwert einer bildungstheoretischen Didaktik, d.h. er hält „die Fundierung der Didaktik in einer Bildungstheorie für *notwendig*“ (S. 9, Hervorhebung im Original). Vor dem Hintergrund des Postulates „Innerer Differenzierung“ betonen Klafki und Stöcker (2007): „Wenn Unterricht jeden einzelnen Schüler optimal fördern will, wenn er jedem zu einem möglichst hohen Grad von Selbsttätigkeit und Selbstständigkeit verhelfen und Schüler zu sozialer Kontakt- und Kooperationsfähigkeit befähigen will, dann muß er im Sinne Innerer Differenzierung durchdacht werden“ (S. 181). Diese Forderung nach Innerer Differenzierung hat als Zielsetzung „Abbau von Chancenungleichheiten.“ Deswegen müsse „Schule [...] optimale Lernmöglichkeiten für *alle* Kinder, und das heißt: für *jedes* Kind schaffen“ (S. 175, Hervorhebung im Original).

In diesem Zusammenhang verweisen Krauthausen und Scherer (2014) auf Wittmann, der erstmals in den 1990er Jahren aus mathematikdidaktischer Perspektive das Konzept der *natürlichen Differenzierung* im Fach Mathematik als eine Möglichkeit der Inneren Differenzierung etablierte. Krauthausen und Scherer formulieren, dass das Konzept der natürlichen Differenzierung eine *mathematikdidaktische Konzeption* von hoher Bedeutung und gerade für einen angemessenen Umgang mit einer zunehmenden Heterogenität gut anwendbar ist. Wittmann kritisiert, dass die Debatte um offenen Unterricht

in der Grundschule ausschließlich pädagogisch diskutiert wurde und forderte mit Verweis auf Dewey, dass diese Öffnung auch vom „FACH“ aus gedacht werden muss (1996, S. 8, Großschreibung im Original).

Vor diesem Hintergrund schreiben Wittmann und Müller (2004), dass im Gegensatz zu anderen Möglichkeiten der Differenzierung, bei denen wesentliche Entscheidungen des Unterrichts, wie die Bearbeitung unterschiedlich schwerer Aufgaben zu einem Unterrichtsthema von der Lehrkraft ausgeht (siehe dazu auch Käpnick & Benölken, 2020), die natürliche Differenzierung „vom Kind aus“ gedacht ist: „Die gesamte Lerngruppe erhält einen Arbeitsauftrag, der den Kindern Wahlmöglichkeiten bietet. [...] Sowohl Kinder mit Lernschwierigkeiten als auch leistungsstarke Kinder können *aus dem Unterricht* heraus gefördert werden“ (S. 15, Hervorhebung im Original). Diese Vorstellung einer Differenzierung „vom Kind aus“, die im besten Fall *natürlich* stattfindet, bedeutet nach Wittmann (1996), beziehungsweise Wittmann und Müller (2004) aber gerade nicht eine Freigabe der Inhalte im Unterricht. Innerhalb *fachlicher Rahmung* (etwa Organisation der Lernprozesse) wird bei Wittmann an mehreren Stellen und sehr eindeutig die verantwortliche Aufgabe der Lehrkraft betont. In diesem Zusammenhang betont er, dass „die produktiven Leistungen der Kinder umso höher sein werden, je besser der fachliche Rahmen überlegt ist“ (1996, S. 9).

Krauthausen und Scherer (2014) verweisen auf die von Wittmann (dazu auch Wittmann und Müller, 2004, S. 15 ff.) definierten Merkmale der natürlichen Differenzierung: „die gesamte Lerngruppe erhält das gleiche Lernangebot, das Lernangebot ist inhaltlich ganzheitlich und hinreichend komplex, Freiheitsgrade der Lernenden, soziales Lernen von- und miteinander“ (S. 49 f.).

Didaktisch umgesetzt werden kann die natürliche Differenzierung aus fachdidaktischer Sicht in Form von substantiellen Lernumgebungen (Krauthausen und Scherer, 2014; Scherer, 1999b, 2003, 2005; Wittmann 1995, 1996; Wittmann und Müller, 2004), auch benannt als offene substanzielle Problem- beziehungsweise Aufgabenfelder (etwa Benölken, 2016; Benölken et al., 2018) oder Lernumgebung (Hirt & Wälti, 2008; Nührenbörger & Pust, 2006). Vor diesem Hintergrund beschreiben Hirt und Wälti (2008) eine Lernumgebung wie folgt:

Eine Lernumgebung ist eine flexible große Aufgabe. Sie besteht in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen, die durch bestimmte Leitgedanken – immer basierend auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur – zusammengebunden sind. Der Terminus beschreibt als Erweiterung des üblichen Begriffs „Aufgabe“



somit im Wesentlichen eine Unterrichtssituation mit Zielen, Inhalten und Vorgehensweisen bzw. Tätigkeiten der Lehrperson wie auch der Schülerinnen und Schüler. (S. 13)

Innerhalb der deutschsprachigen Fachdidaktik der letzten zwanzig bis dreißig Jahre wurde und wird fortlaufend darauf hingewiesen, dass offene substantielle Lernumgebungen eine gute Möglichkeit auch und gerade für die Gestaltung eines inklusiven Mathematikunterrichts sein können (Benölken, 2016; Benölken et al., 2018, Berlinger & Dixel, 2017; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Hirt & Wälti, 2008; Moser Opitz, 2008, 2016; Ratz, 2017; Scherer, 2017; Schnepel et al., 2015).

Diese offenen, substanziellen Problemfelder bieten nach Benölken et al. (2018) ein Lernangebot in besonderer Weise für den inklusiven Mathematikunterricht, „an dem ein mit- und ein voneinander Lernen aller Schülerinnen und Schüler an demselben Lerngegenstand auf partizipative Weise, ohne irgendeine Form des Ausschlusses möglich sind“ (S. i). Benölken et al. nähern sich dieser Thematik aus einer *potenzialorientierten Perspektive*, bei der „die Vielfalt als Chance für die Realisierung von gemeinsamen Lehr-Lern-Prozessen gesehen“ (Benölken et al., 2018, S. i) wird.

Die generelle und wesentliche Bedeutung von substantiellen Lernumgebungen im Mathematikunterricht kommt etwa bei Wittmann (1998) zum Ausdruck, wenn er davon spricht, dass es die dringliche Aufgabe der Mathematikdidaktik sei, sich auf *einen* ihrer Kernbereiche zu konzentrieren, „nämlich die Konstruktion und Erforschung von Lernumgebungen einschließlich der begleitenden Theoriegerüste“ (S. 334). Wittmann (1998) benennt folgende Kriterien für „Lernumgebungen bester Qualität“, sogenannte „substantielle Lernumgebungen“:

- i) Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.
- ii) Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/-innen bieten.
- iii) Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepaßt [sic!] werden können.
- iv) Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten. (S. 337 f.)

Bei der Entwicklung der vorliegenden Bausteine dieser Arbeit (Abschnitt 6.2.1) hat sich die Autorin an den oben formulierten Kriterien orientiert und zusätzlich, da es sich

um Lernumgebungen für die mathematische Frühförderung handelt, insbesondere jene von Wittmann (2016) herangezogen:

i) Die Kinder sollen *echter Mathematik* in einer Form begegnen, die sowohl ihren natürlichen Neigungen als auch dem wahren Wesen der Mathematik entspricht, nämlich *spielerisch*. ii) Inhaltlich soll sich die Frühförderung auf eine kleine Zahl *mathematischer Grundideen* beschränken, die den Anschluss an den Anfangsunterricht sichern und für den Mathematikunterricht über die Grundschule hinaus bedeutsam sind. iii) Die Kinder sollen für ihre mathematischen Aktivitäten Freiräume erhalten. Dies schließt die Fixierung auf kurzfristige Lernziele und Tests zur Überprüfung der Lernfortschritte aus. (S. 8)

### **3.2.2 Leitideen inklusiven Mathematikunterrichts**

Abschnitt 3.2 hat bisher gezeigt, dass Inklusion aus fachdidaktischer Sicht keinen *gänzlich* besonderen Mathematikunterricht erfordert. In einem inklusiven Mathematikunterricht sind die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Überlegungen hilfreich.

Nach Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) seien im inklusiven Mathematikunterricht im Wesentlichen sieben Leitideen maßgeblich, die genauso im Allgemeinen für alle Kinder im Mathematikunterricht gelten: „Entdeckendes, verstehensorientiertes Lernen, Arbeiten in Ganzheiten, Konzentration auf den mathematischen Basisstoff, Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel, Produktives Üben, Lernen im Austausch mit anderen, Lernen auf eigenen Wegen“ (S. 5).

Auch die Autorin der vorliegenden Arbeit sieht die von Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) genannten Leitideen als bedeutende fachdidaktische Überlegungen für einen inklusiven Mathematikunterricht. Im Folgenden wird auf die einzelnen Leitideen ausführlich eingegangen, wobei die letzten beiden Bereiche „Lernen im Austausch“ und „Lernen auf eigenen Wegen“ an dieser Stelle nur knapp beschrieben werden, da sie in Abschnitt 3.1.2 ausführlich behandelt wurden.

#### ***Entdeckendes, verstehensorientiertes Lernen***

*„Das aktiv-entdeckende Lernen bestimmt als Leitidee den  
Mathematikunterricht unserer Zeit.“*

*Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017, S. 5*

Betrachtet man die historische Entwicklung der Erforschung mathematischer Grunderfahrungen, ist nach Käpnick und Benölken (2020) als *ein* bedeutendes Beispiel Hartmanns „Analyse des kindlichen Gedankenkreises als die naturgemäße Grundlage des ersten Schulunterrichts“ vom Jahr 1896 zu nennen. Hartmann forderte, dass die kindlichen Grundkenntnisse bei der Unterrichtsgestaltung und der Entwicklung von Lehrplänen beachtet werden müssten. Weiters verweisen Käpnick und Benölken (2020) auf Johannes Kühnel. Er greift die grundlegend wichtige Idee auf und mahnt in seinem epochalen Werk „Neubau des Rechenunterrichts“ vom Jahr 1916, dass die kindlichen Kenntnisse entscheidend für die Gestaltung von Mathematikunterricht sein müssen. Alle fachlichen Themen sollten sich den Lernvoraussetzungen der Schüler\*innen (und nicht umgekehrt!) anpassen. Für Kühnel war die Stofffülle des damaligen Erstrechenunterrichts zu groß. Erst durch eine gezielte Stoffreduktion könne ein Schwerpunkt auf das von ihm neu definierte Ziel im arithmetischen Anfangsunterricht, den *Erwerb des Zahlbegriffs*, gesetzt werden. Insbesondere die Erarbeitung der natürlichen Zahlen und ihrer Beziehungen zueinander im Sinne einer ganzheitlichen Bearbeitung der Zahlenräume erachtete er als eine besonders hilfreiche Voraussetzung für die Einführung der Rechenoperationen.

Erst die 1970er Jahre führten in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik zu einer grundlegenden Abkehr, von der über Jahrhunderte praktizierten, reinen Wissensvermittlung im Mathematikunterricht hin zu „*aktiv entdeckenden*“ Lehr- und Lernformen (Moser Opitz, 2008, siehe dazu auch Wittmann, 1995). Wittmann (1995) zitiert in diesem Zusammenhang den schon erwähnten Rechendidaktiker Kühnel, der davon spricht, dass „beibringen, darbieten, vermitteln [...] Begriffe der Unterrichtskunst vergangener Tage“ (S.11) seien. Nach Wittmann (1995) ist es wichtig, dass die Schüler\*innen Kenntnisse und Fähigkeiten im Mathematikunterricht selbsttätig, somit „aktiv entdeckend“ erwerben.

Innerhalb der Fachdidaktik wurden in diesem Zusammenhang Überlegungen angestellt, wie ein traditioneller Rechenunterricht überwunden werden kann hin zu einem aktiven Unterricht, in dem Kinder Mathematik durch Entdecken, Beschreiben und Begründen aktiv betreiben. Dieses Konzept des „entdeckenden Lernens“ findet 1985 erstmals im Lehrplan Mathematik für Grundschulen in Nordrhein-Westfalen, der wesentlich unter der Leitung von Heinrich Winter entstanden ist, eine zentrale Bedeutung. Wittmann und Müller (2017) zitieren das Konzept „entdeckendes Lernen“ aus dem Lehrplan des Landes Nordrhein-Westfalen von 1985 wie folgt:

Den Aufgaben und Zielen des Mathematikunterrichts wird in besonderem Maße eine Konzeption gerecht, in der das Mathematiklernen als ein konstruktiver, entdeckender Prozeß

[sic!] aufgefaßt [sic!] wird. Der Unterricht muß [sic!] daher so gestaltet werden, daß [sic!] die Kinder möglichst viele Gelegenheiten zum selbsttätigen Lernen in allen Phasen eines Lernprozesses erhalten. [...] Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, herausfordernde Anlässe zu finden und anzubieten, ergiebige Arbeitsmittel und produktive Übungsformen bereitzustellen und vor allem eine Kommunikation aufzubauen und zu erhalten, die dem Lernen aller Kinder förderlich ist. (S.16)

Heute findet man diese Auffassung zum Lehren und Lernen von Mathematik in den Lehrplänen der deutschsprachigen (Bundes-)Länder. Vor diesem Hintergrund berichten mehrere Autor\*innen (Moser Opitz, 2008; Ratz, 2009; Scherer, 1995) davon, dass diese Überlegungen zum Lehren und Lernen von Mathematik für Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und/oder Kinder mit geistiger Behinderung mitunter von Praktiker\*innen in Frage gestellt werden. Einige Skeptiker würden nach Moser Opitz (2008) die Auffassung vertreten, dass ein Entdecken und Verstehen von mathematischen Zusammenhängen und Mustern wie es beim aktiv-entdeckenden Lernen gefordert werde, vor allem Kinder mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung „überfordern“ und „demotivieren“. In Frage gestellt wird außerdem, ob es „nicht gerade diejenigen Fähigkeiten seien, welche im Fall einer Lernbehinderung fehlen“ (Moser Opitz, 2008, S.112).

Entgegen dieser Auffassung zeigen empirische Untersuchungen zum aktiv-entdeckenden Lernen bei Schüler\*innen mit geistiger Behinderung (Moser Opitz, 2008; Ratz, 2009; Scherer, 1995, 1996, 1997, 1999a), dass ein Mathematikunterricht nach den Grundsätzen des aktiv-entdeckenden Lernens in der Regel auch für diese Kinder von Nutzen sein kann. Scherer (1999a) zeigt in ihrer Untersuchung, dass das Arbeiten im Mathematikunterricht nach den Leitideen des entdeckenden Lernens und mit entsprechenden Materialien im Zahlenraum 100 zu einer Verbesserung der Lernleistungen der untersuchten Kinder geführt hat. Ratz (2009) befürwortet das aktiv-entdeckende Lernen insbesondere auch bei Kindern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. Mit seiner Untersuchung weist er darauf hin, dass der Unterricht von Kindern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung davon profitieren kann, wenn er an aktuellen fachlichen und fachdidaktischen Empfehlungen ausgerichtet ist. Kinder mit einer geistigen Behinderung können demnach nach Ratz nachweislich davon profitieren, eigenständig Inhalte zu entdecken und nach Lösungen für Probleme zu suchen.

Dieses Verständnis von Lehren und Lernen (Abschnitt 5.3.2), welches nicht nur in der Mathematikdidaktik seinen Platz gefunden hat, orientiert sich stark an der konstruktivistischen Sichtweise für das Lernen (vertreten beispielsweise etwa von Duit, Cobb, Piaget, Steffe, von Glasersfeld). Verstehen basiert demnach auf einem aktiven Aufbau von Wissen, bei dem der neue Lernstoff mit vorhandenem Wissen verknüpft und so Wissensnetze aufgebaut werden würden beziehungsweise neues Wissen wird in das bereits bestehende Wissensnetz eingefügt (Schütte, 2008; Winter, 2016).

Bei Kindern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung – ähnlich bei Kindern, die generell Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben – bezeichnet Siegemund (2016, 2017) eine Begleitung in besonderer Weise von qualifizierten Lehrkräften als notwendig. In eine ähnliche Richtung sind Autor\*innen in Metastudien zu übereinstimmenden Ergebnissen gekommen, wonach die Interventionen für Kinder mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung erfolgreicher sind, wenn die Lehrkraft Arbeitsanweisungen entsprechend *direkter* und/oder *expliziter Instruktion* durchführt (Browder et al., 2008; Kroesbergen & van Luit, 2003).

Verbunden mit dem aktiv-entdeckenden Lernen scheint hier zunächst ein Widerspruch in der aktuellen Literatur zu bestehen. Dieser scheinbare Widerspruch kann allerdings nach Ratz und Moser Opitz dann aufgelöst werden, wenn Lernen unter Anleitung so verstanden wird, dass die Lehrkraft die Lernprozesse der Schüler\*innen in geeigneten Aufgaben und Arbeitsmitteln durch entsprechende Anleitung, Fragen o.Ä. und durch Versprachlichung der einzelnen Aktivitäten adaptiv begleitet (Ratz & Moser Opitz, 2016; dazu auch Abschnitt 3.3 dieser Arbeit).

Vor diesem Hintergrund machen Haruehansawasin und Kiattikomol (2018) ergänzend klar deutlich, dass Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen mehr kognitiv aktivierende Begleitung beim aktiv-entdeckenden Lernen brauchen als die gleichaltrigen Regelschulkinder. Die Autor\*innen weisen jedoch auch darauf hin, dass die Lehrkraft diesen Kindern die *aktive Vertiefung* mit dem jeweiligen mathematischen Gegenstand nicht abnehmen soll und kann. Dementsprechend schließen sich Lernen unter Anleitung und aktiv-entdeckendes Lernen im Sinne der Autor\*innen nicht aus.

Auch Wittmann (1995, 2015) argumentiert in eine ähnliche Richtung. Nach Wittmann (1995, 2015) habe die Lehrkraft die herausfordernde Aufgabe, für alle Kinder Angebote zur mathematischen Förderung bereitzustellen, die in ihrer individuellen Zone der nächsten Entwicklung liegen und die somit Voraussetzungen für aktiv-entdeckendes Lernen schaffen.

### **Arbeiten in Ganzheiten**

Das Arbeiten in Ganzheiten ist ein zentraler Bereich des aktiv-entdeckenden Lernens. Gemäß Moser Opitz (2008) sei jedoch in der Förderung mit Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Behinderung oder lernschwachen Schüler\*innen häufig das Vorgehen in kleinen Schritten praktiziert worden. In der Vorstellung, dass dadurch stoffliche Lücken verhindert werden können, wurden – so Moser Opitz (2008), die einzelnen Schritte gründlich geübt, bevor der nächste Schritt eingeführt wurde.

Das lange Verweilen im Zahlenraum bis 6 in der Lernbehindertenschule (teilweise bis zu 8 Monaten im ersten Schuljahr ...), verleitet die Kinder dazu, die Strategie ‚Abzählen‘ statt ‚Bündeln‘ oder ‚Strukturieren‘ zu verwenden. Dass die Kinder dann im Zahlenraum 6 noch an den Fingern abzählen, rechtfertigt dann den Lehrer, weiterhin in diesem Zahlenraum zu verweilen. (Scherer, 1995b, S. 57)

Ganz generell meint ein ganzheitlicher Zugang im Erstrechenunterricht der Grundschule, dass Zahlen bis 20 nicht schrittweise und somit Zahl für Zahl eingeführt werden. Mit Blick auf das Ganze müssen Kinder lernen, Zahlen in Beziehungen mit anderen Zahlen zu verstehen, und das ohne künstliche Zahlenraumgrenzen (Gaidoschik, 2007; 2010; Schipper et al., 2015; Wittmann, 1995; Wittmann & Müller, 2017). Dieser weitgehende Konsens in der Fachdidaktik habe nach Padberg und Benz (2020) bewirkt, „dass die in den letzten Jahren neu konzipierten Schulbücher bei der Thematisierung der Zahlen ‚ganzheitlich‘ vorgehen“ (S. 29).

Aus der Perspektive der gängigen fachdidaktischen Literatur im deutschsprachigen Raum ist auch im inklusiven Erstrechenunterricht eine Orientierung in Ganzheiten wie den Zahlenräumen bis zehn beziehungsweise bis 20 für alle Lernenden sinnvoll (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Moser Opitz, 2008; Ratz, 2009; Scherer, 1995, 1996, 1997, 1999a, 1999b).

Zu einem Arbeiten in Ganzheiten unmittelbar zu Beginn des Schuljahres für *alle* Kinder raten Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) explizit im Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch, wobei sie im Förderheft im Verlauf des ersten Schuljahres für Kinder mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen angepasste Aktivitäten *im Zahlenraum bis 12* und den Vielfachen von fünf anstreben. Im Förderkommentar Lernen heißt es in diesem Zusammenhang:

Ganzheiten wie die Zahlenräume bis 10 bzw. bis 20 werden ebenso wie die zentralen Operationen des ersten Schuljahres Addition und Subtraktion im Zusammenhang für alle Kinder eingeführt. Dies erscheint für einige Kinder möglicherweise als Überforderung, aber es ist zu unterscheiden zwischen einer ersten Orientierung in der Ganzheit und einem Verstehen und Beherrschen jeder Einzelheit. Eine Orientierung in der Ganzheit kann Schwierigkeiten sogar vorbeugen, da nicht viele Einzelheiten, sondern ein Zusammenhang gelernt wird. (S. 5)

Wenn es um das Erfassen des Teile-Ganzes-Verständnisses (Abschnitt 2.2.3.1) geht, wäre demnach eine kleinschrittige Zahlerarbeitung (zunächst nur bis..., dann in Einerschritten bis zehn) *kontraproduktiv* und wird, wie oben angedeutet, in der aktuellen Mathematikdidaktik als eher hinderlich gesehen. Wesentliche Strukturen wie die *Kraft der Fünf* erschließen sich für Kinder eher, wenn von Anfang an die Zahlen zumindest bis 10 behandelt werden. Eine durch das Dezimalsystem gerechtfertigte Unter-Einheit stellen gemäß Gaidoschik (2007, 2010) die Zahlen bis fünf dar (Abschnitt 2.2.3). Bei Kindern, die auch bei den Zahlen bis fünf noch keine Zahl-Ganzes-Beziehungen erkennen, könne es sinnvoll sein, diesen Zahlen zunächst besondere Aufmerksamkeit zu widmen, ohne aber größere Zahlen deswegen gänzlich auszublenden (Gaidoschik, 2007, 2010).

### ***Konzentration auf den Basisstoff***

Ein weiterer wichtiger Grundsatz des aktiv-entdeckenden Lernens ist gemäß Wittmann (1995) die Konzentration auf zentrale Inhalte des Rechenunterrichts in der Grundschule. In der Arithmetik werden folgende fundamentalen Grundideen angegeben (Wittmann, 1995): „Zahlreihe; Rechnen, Rechengesetze, Rechenvorteile; Zehnersystem; Rechenverfahren; Arithmetische Gesetzmäßigkeiten und Muster; Zahlen in der Umwelt; Übersetzung in die Zahl- und Formensprache.“ (S. 8) In diesem Zusammenhang spielen die von Heinrich Winter (1975) formulierten allgemeinen Lernziele (Wittmann, 1995, S. 21) eine wesentliche Rolle: „Mathematisieren; Entdecken; Argumentieren; Darstellen.“

Auch die frühe mathematische Bildung orientiert sich, wie in Abschnitt 2.1.1, beschrieben an fachliche Ideen. An diesen Grundideen wird in der Grundschule fortlaufend und anschlussfähig ab dem ersten Schuljahr und nach dem Spiralprinzip (Bruner, 1973) gearbeitet. Dabei werden „grundlegende Begriffe und Zusammenhänge [...] in mehreren

Durchgängen auf jeweils verschieden hohem Niveau bearbeitet, wobei jeweils Darstellungsmittel, Sprache und didaktische Modelle verwendet werden, die dem Entwicklungsstand der Schüler angemessen sind“ (Käpnick & Benölken, 2020, S. 65).

Vor diesem Hintergrund werden im Mathematikunterricht Themen ganzheitlich angeboten (siehe Abschnitt „Arbeiten in Ganzheiten“). Gerade Schüler\*innen mit Unterstützungsbedarf beim Mathematiklernen bräuchten nach Gaidoschik et al. (2021), Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) und Moser Opitz (2008) mehr Wiederholungsschleifen, mehr Zeit, und mehr fachkundige Lernbegleitung, um sich mit diesen zentralen Inhalten auseinanderzusetzen. Da die Unterrichtszeit begrenzt ist, raten Häsel-Weide und Nührenbörger sowie Moser Opitz, den fachlichen Stoff auch bei lernschwachen und/oder Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung auf diese wesentlichen Inhalte zu konzentrieren.

Eine Reduktion des Lernstoffes als eine Möglichkeit der inneren Differenzierung im klassischen Sinn (Abschnitt 3.1.2), ein nach Moser Opitz (2008) häufig verwendetes Werkzeug in *vielen sonderpädagogischen Konzeptionen*, um Überforderung vorzubeugen, sei hingegen bei diesen Kindern in der Regel nicht von Vorteil. Die Autorin bezieht sich dabei auf Scherer (1995) und Willand (1983), wonach ein vereinfachtes Vorgehen im Sinne der Reduktion des Lernstoffes bestimmte Entwicklungsschritte verhindern und die Lernmöglichkeiten dieser Kinder zu stark einschränken würde. Hingegen, ein aktiv-entdeckender Mathematikunterricht mit Fokus auf die fundamentalen Inhalte kann laut Moser Opitz für alle Schüler\*innen im Erststufenunterricht förderlich sein.

In eine ähnliche Richtung argumentieren auch Ratz und Wittmann (2011), wonach bei Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung „zunächst von den für das gleiche Alter vorgesehenen Themengebieten“ aus unterrichtet werden sollten. Erst in weiterer Folge sollte „über notwendige Reduktionen und über die Möglichkeit, persönliche, biografische und subjektive Erfahrungen einzubringen, nachgedacht werden“ (S. 137).

### **Verwendung strukturierter Arbeitsmittel**

*„Children learn what is number, what are circles, what is adding, what is plotting a graph. They grasp them as mental objects and carry them out as mental activities.“*

*Freudenthal, 1983, X*



Ganz generell haben Materialien und Veranschaulichungen zur Darstellung arithmetischer und/oder mathematischer Sachverhalte eine wichtige Aufgabe im Lernprozess aller Schüler\*innen (Lorenz, 1992). Besonders im arithmetischen Anfangsunterricht seien diese zur Ausbildung mentaler Bilder unterstützend:

Die wesentlichen mentalen Vorstellungsbilder und Operationen werden im 1. Schuljahr ausgebildet. Aufgrund der fundamentalen Bedeutung des Vorstellens und mentalen Operierens für spätere Lernprozesse liegt hier eine entscheidende Stelle der Unterrichtspraxis vor. Eine verfrühte Abkehr von anschaulichen Darstellungen, bevor wirklich tragfähige mentale Bilder vom Kind konstruiert und genutzt werden, kann als Kardinalfehler des Anfangsunterrichts bezeichnet werden. (Krauthausen & Scherer, 2007, S. 247)

Die Frage, ob ein Material für den Mathematikunterricht geeignet ist, lässt sich prinzipiell nur mit Blick auf ein klar definiertes Lernziel bestimmen. Diese Lernziele sind *fachlich* und *pädagogisch* zu begründen. In der deutschsprachigen Literatur wird als ein fachliches Teilziel des Rechenunterrichts im ersten Schuljahr die Absicherung der „additiven Grundaufgaben“ genannt (Gaidoschik 2010; Gerster, 2009; Schipper et al., 2015).

Als „additive Grundaufgaben“ verstehen Fachdidaktiker\*innen automatisiertes Abrufen der Additionen und Subtraktionen zumindest im Zahlenraum bis zehn oder teilweise bis 20. Schipper (2005) formuliert in diesem Zusammenhang: „Am Ende des ersten Schuljahres sollten möglichst alle Kinder alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im ZR bis 10 [...] auswendig wissen“ (S. 7).

Wittmann und Müller fokussieren in den „Blitzrechenübungen“ die „arithmetischen Basisfakten“ im Zahlenraum 20 (Abschnitt 2.2.3). Diese Übungen werden als „Grundbestand von Wissenselementen und Fertigkeiten“ bezeichnet, die die Kinder im Unterricht und in der häuslichen Förderung „abschließend auswendig lernen müssen“ (Wittmann & Müller, 2004, S. 7).

Mit welchen Materialien und Veranschaulichungen man die genannten fachlichen Ziele im Rechenunterricht am besten erreichen kann, dazu existieren in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik unterschiedliche Positionen (Hasemann & Gasteiger, 2014). Es ist nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit, Möglichkeiten und Grenzen aller für den arithmetischen Anfangsunterricht vorgeschlagenen Materialien zu erörtern. Letztlich geht es gemäß Krauthausen und Scherer auch nicht um die Frage, welches das einzig geeignete, unfehlbare, beste ... Material zur Entwicklung und Festigung des Zahlver-

ständnisses sei. Mit dem in Abschnitt 3.2.1 dargestellten Paradigmenwechsel im Mathematikunterricht sei aber auch die Frage nach der Funktion und der Nutzung von Materialien und Erarbeitungsmitteln im Mathematikunterricht in den Fokus gerückt. Im Sinne des aktiv-entdeckenden Lernens habe sich der Begriff in der Literatur von Werkzeugen des *Lehrens* hin zu Werkzeugen des *Lernens* gewandelt, um auch hier die aktive Rolle der Kinder zu unterstreichen (Krauthausen & Scherer, 2014).

Im Lernprozess selbst sind nach Wittmann nicht die Materialien und Mittel entscheidend, sondern vielmehr die „strukturierenden Operationen der Lernenden an den Anschauungsmitteln“ (Wittmann, 1995, S. 25). Es seien die Lernenden, die *aktiv* mathematische Strukturen und Beziehungen am Material erkunden. Mathematische Strukturen müssen dabei, so Söbbeke, aktiv in das Anschauungsmittel hineingedeutet werden, ein tätiger Umgang mit Anschauungsmitteln allein sei für die Entwicklung dieses Muster- und Strukturverständnisses nicht ausreichend (Söbbeke, 2005).

Die Verwendung insbesondere von strukturiertem arithmetischem Material *kann* eine hilfreiche Unterstützung für die Erarbeitung und Festigung einer strukturierten Zahlaufassung sein (Abschnitt 2.2). Jedoch, der Umgang mit geeigneten Materialien muss den Kindern erst vertraut gemacht werden. Ein Verständnis für abstrakte Muster und Strukturen von Zahldarstellungen entwickelt sich somit bei Kindern nicht selbstständig im Unterricht, sondern muss mit ihnen konkret erarbeitet werden (Gaidoschik, 2007; Häsel-Weide et al., 2014, Schultz et al., 2017).

In eine ähnliche Richtung formulieren Häsel-Weide et al. (2014) und sprechen davon, dass die Entwicklung mathematischen Denkens stark geprägt von interaktiven Prozessen der gemeinsamen Erkundung von Mathematik und deren Muster und Strukturen im Unterricht sei: „Erst das eigenständige und im Gespräch mit anderen gefestigte Erkennen von mathematischen Zusammenhängen in der Auseinandersetzung mit Anschauungsmitteln und Arbeitsmaterialien schafft die Basis für mentale Operationen und sichert zugleich den weiteren Umgang mit denselben“ (S. 34).

Auch im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung hat „materialgeleitetes Lernen“ im Generellen und speziell im Mathematikunterricht eine hohe Bedeutung (Raeggel & Sackmann, 1997; Ratz & Schneider, 1998). Gerade im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung sehr verbreitet seien nach Müller die Entwicklungsmaterialien von Maria Montessori (Müller, 1995).

Im Sinne Häsel-Weide und Nührenbörger, Moser Opitz, Ratz, Scherer, Schnepel können Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung in der Regel mit

den gleichen Materialien gefördert werden wie Regelschulkinder. Dafür können das Zehnerfeld, die Zehnerreihe und die Fingerbilder genutzt werden (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Moser Opitz, 2008; Ratz, 2009; Scherer, 1995, 1996, 1997, 1999a, 1999b; Schnepel, 2018). In der vorliegenden Arbeit wird besonders auch die Nutzung der Finger thematisiert (Kapitel 6 und Kapitel 8). Nachfolgend wird auf diese wesentlich wichtige Thematik eingegangen.

### ***Nutzung der Finger***

*„Es wäre wünschenswert, wenn die Kinder auf die empörte Frage,  
ob sie denn immer noch mit Fingern rechnen, ganz selbstbewusst  
„Aber sicher!“ antworten“.*

*Steinweg (2009)*

Fragt man ein kleines Kind nach seinem Alter, streckt es in der Regel als Unterstützung der verbalen Antwort die Finger aus. Es möchte uns Erwachsenen stolz mitteilen: „So alt bin ich schon!“ Die Finger stellen für das Kind eine Möglichkeit dar, auch ohne Zahlwort eine Menge entsprechend darzustellen (Brissiaud, 1992).

Jordan und Levine (2009) berichten davon, dass soziokulturell benachteiligte Vorschulkinder um etwa ein Jahr später ihre Finger zum Ermitteln von Anzahlen nutzen als gleichaltrige Vorschulkinder aus bürgerlichen Elternhäusern: „They do not use their fingers adaptively to represent and manipulate the quantities that are represented with number words“ (Jordan & Levine, 2009, S. 64).

Auch Schäfer (2014) berichtet in ihrem Beitrag von ihrer Untersuchung mit mehr als 100 Vorschulkindern aus städtischen Einrichtungen in Deutschland. Alle Kinder konnten die Zahlwortreihe bis zehn aufsagen, jedoch nur etwa 80 Prozent der Kinder wussten, wie viele Finger eine Hand hat.

Mit zunehmendem Alter ist die Verwendung der Finger beim Rechnen aus Sicht vieler Erwachsener problematisch, mitunter verpönt und mit einem Tabu belegt.

Das Rechnen mit den Fingern im Sinne eines *rein abzählenden* Rechnens wird auch innerhalb der Fachdidaktik kritisch gesehen (Gaidoschik 2007, 2016; Steinweg, 2009). Hingegen hat sich in den letzten Jahrzehnten weitgehend ein breiter Konsens darüber eingestellt, dass die Finger bei nicht-zählender Verwendung ihre Berechtigung als Arbeitsmittel im Mathematikunterricht haben.

Bauer (1992) gibt einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Diskussion zum Fingerrechnen. Einige Fachdidaktiker\*innen sehen das Erarbeiten eines „inneren *Fingerbildes*“ als einen wichtigen Lernschritt in der Erarbeitung einer tragfähigen Zahlauffassung. Sofern die Finger nicht für ein reines Abzählen verwendet würden, könne die Nutzung der Finger und Fingerbilder für eine Ausbildung von Vorstellungen über Zahlen sehr hilfreich sein (Gaidoschik, 2007, 2010, 2016; Steinweg, 2009; Walter, 2015). Für Steinweg (2009, S. 123) sind „die Finger eines der ursprünglichsten Anschauungsmittel, die zur Ausbildung von tragfähigen und mathematisch sinnvollen mentalen Vorstellungsbildern beitragen könnten“.

Auch aktuelle kognitionspsychologische und neurowissenschaftliche Untersuchungen schreiben der Verwendung von Fingern als körpereigenes Anschauungsmittel eine wichtige Bedeutung in der numerischen Entwicklung zu; die Rede ist hier von *embodied numerosity* (Konrad & Lindtner, 2017). Vermittelt über körperliche und motorische Erfahrungen könnten die Finger die numerische Entwicklung von Kindern beeinflussen (Boaler & Chen, 2017; Domahs et al., 2010; Klein et al., 2011; Moeller et al., 2011). Der Aufbau von abstrakten Zahlvorstellungen kann demzufolge durch die Verwendung der Finger unterstützt werden, sie sind jedoch nicht auf jeden Fall Bedingung für die numerische Entwicklung (Crollen et al., 2011).

Im Vergleich zu anderen Anschauungs- und Erarbeitungsmaterialien haben die Finger ganz offensichtliche und praktische Vorzüge: Sie kosten nichts, als fixer Bestandteil unseres Körpers haben wir diese immer dabei und sie können auch nicht verloren gehen. Röder (1941) beschreibt die Vorzüge der Finger durch den Pragmatismus eines Lehrmeisters (der damaligen Zeit) wie folgt:

Die Finger sind stets zur Hand und gebrauchsfertig. Sie verursachen kein störendes Geräusch, sie fallen nicht auf den Boden, sie werden nicht zerbrochen oder sonstwie verdorben. Sie werden auch nicht vergessen oder gestohlen; man braucht sie nicht auszu- teilen und nicht einzusammeln. Und wenn sie nicht ordentlich gewaschen sind, so merkt es der Lehrer wenigstens und vergißt [sic!] nicht, Versäumtes nachholen zu lassen. (S. 34)

Ein weiterer Vorzug der Finger: Aufgrund der Struktur der Finger (fünf und fünf) scheinen sie als Begleiter für den Aufbau eines tragfähigen Verständnisses unseres Zehnersystems gut geeignet zu sein: „Durch ihre Struktur (zehn Finger verteilt auf zwei Händen zu jeweils fünf) [bieten die Finger] beste Voraussetzungen dafür, um mit ihrer Hilfe

zu wichtigen Erkenntnissen über Zahlen und Rechenoperationen zu gelangen“ (Gaidoschik, 2007, S. 44, Anmerkung C.G.). In diesem Sinne sollten gemäß Gaidoschik in einer frühen Phase des Mathematiklernens alle Kinder, sofern noch nötig, lernen, dass sie fünf Finger an einer und zehn Finger an beiden Händen zusammen haben. Diese Bezugspunkte 5 (als eine ganze Hand) und 10 (beide Hände zusammen) sind wichtige Gliederungshilfen für unsere Zahlen. Studien zeigen, dass nicht jedes Kind dieses Wissen zu Schulbeginn bereits hat, manche müssen jedes Mal aufs Neue nachzählen, wenn man sie auffordert, fünf oder zehn Finger zu zeigen (Gaidoschik, 2010, 2016).

Bei der Nutzung der Finger ist, wie ausgeführt, aus Sicht der Fachdidaktik darauf zu achten, *wie* diese verwendet werden, ob zählend oder nicht-zählend. In diesem Zusammenhang unterscheidet die Literatur bei der Verwendung der Finger zwischen einer *statischen und einer dynamischen Verwendung* (Scherer & Moser Opitz, 2010). Gaidoschik (2007) spricht bei statischer Verwendung auch von „*Fingerpaketen*“. Diese Begriffe sollen verdeutlichen, dass die Finger auch bei „statischer Verwendung“ bewegt werden können, aber dann „auf einen Sitz“ ausgestreckt und/oder „auf einen Blick“ gezeigt werden sollen (Brissiaud, 1992; Gaidoschik, 2007, 2016; Gaidoschik & Bayer, 2017).

Bei *dynamischer* Fingernutzung werden, so Gaidoschik und Hess, die Finger hingegen einzeln nacheinander ausgestreckt. So wird beispielsweise bei der Aufgabe  $5 + 3$  mit der Strategie des Alleszählens der erste Summand mit fünf Fingern abgezählt, um dann drei Finger zählend noch dazuzugeben; die Gesamtanzahl der nun ausgestreckten Finger wird ermittelt, indem alle Finger, mit „eins“ beginnend, neuerlich gezählt werden (Gaidoschik, 2010; Hess, 2012).

Bei der Strategie Weiterzählen wird dieselbe Aufgabe  $5 + 3$  so gelöst, indem der erste Summand nicht mit den Fingern dargestellt, sondern als Zahlwort ausgesprochen wird. Von diesem ausgehend wird mit „sechs, sieben, acht“ um drei weitergezählt, wobei nacheinander drei Finger zur Kontrolle der Anzahl der Zählschritte ausgestreckt werden (Gaidoschik, 2010; Hess, 2012).

Hingegen bei *statischer* Verwendung der Finger werden nach Gaidoschik (2010) und Hess (2012) Zahlen mit den Fingern *nicht-zählend* dargestellt. Die Aufgabe  $5 + 3$  kann durch gleichzeitiges Ausstrecken von fünf Fingern an einer Hand und drei weiteren der anderen Hand dargestellt werden; die Summe wird erneut nicht-zählend als „acht“ erfasst. Die Finger werden somit jeweils in einer Bewegung, „auf einen Sitz“ oder in „Fingerpaketen“ ausgestreckt oder, bei Darstellung einer Subtraktion als Wegnehmen, auch in „Paketen“ weggeklappt (Gaidoschik, 2010; Hess, 2012).

Bei dieser nicht-zählenden Fingerverwendung wird die simultane beziehungsweise quasi-simultane Anzahlerfassung angeregt. Nach Gaidoschik (2007) stehe bei dieser Art der Fingerverwendung der kardinale Zahlaspekt im Vordergrund (Abschnitt 2.2.3). In der entsprechenden Fachliteratur hat man sich zu dem Konsens durchgerungen, dass die statische Verwendung der Finger als „wertvollere Art des Fingerrechnens“ gegenüber der dynamischen vorzuziehen sei (Gaidoschik, 2007, 2016; Häsel-Weide, 2016; Hess, 2012; Kaufmann & Wessolowski, 2011; Scherer & Moser Opitz, 2010; Steinweg, 2009; Walter, 2015).

Einige Anregungen für Aktivitäten mit Fingern im Erstrechenunterricht, die das Ziel verfolgen, den Aufbau tragfähiger Vorstellungen von Zahlen zu unterstützen und die für die vorliegende Arbeit wesentlich sind, werden im Folgenden herausgearbeitet. Weitere und ausführliche Vorschläge für die Fingerverwendung im Klassenzimmer und/oder in der Förderung sind bei Gaidoschik (2007, 2016), Gaidoschik und Bayer (2017), Steinweg (2009) und anderen ausführlich thematisiert.

### ***Aktivitäten mit Fingern im inklusiven Mathematikunterricht***

Als erstes Zwischenziel bei der Fingernutzung nennt Gaidoschik (2007, 2016) die Fähigkeit, alle Zahlen bis zehn mit den Fingern zeigen zu können, ohne die Finger einzeln abzuzählen. Dieses Ziel gelte für alle Schüler\*innen in einer Klasse. Die Kinder sollten dabei mit fünf die Vorstellung „alle Finger auf einer Hand“, mit zehn „alle Finger auf beiden Händen zusammen“ verbinden und in weiterer Folge fünf und zehn als wichtige „geistige Stützpunktzahlen“ (Gaidoschik, 2007, 2016; Steinweg, 2009) verwenden, um bei acht beispielsweise zu denken „fünf Finger an einer Hand, an der anderen drei Finger“.

Wie in Abschnitt 3.2 geklärt, kommen Kinder mit ganz unterschiedlichen Vorerfahrungen in Mathematik in die Schule – so auch beim Fingergebrauch. Im Arithmetikunterricht in den ersten Schulwochen stellt sich nun die Frage, ob und wie der Fingergebrauch für *alle* Schüler\*innen gelingen kann. Prinzipiell scheinen die Finger eine Möglichkeit der Veranschaulichung auch für Schüler\*innen mit kognitiver Beeinträchtigung (Moser Opitz, 2008; Schnepel, 2018) und/oder für Schüler\*innen mit körperlicher Beeinträchtigung (Gaidoschik & Bayer, 2017) zu sein.

So berichten Gaidoschik und Bayer (2017) von ihren diesbezüglichen Erfahrungen bei Kindern mit körperlicher Beeinträchtigung. Ein ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger durch die Lehrkraft wirke bei diesen Kindern unterstützend, um Denken und Tun auf die Fingeranzahlen zu konzentrieren. Schnepel (2018) entwickelte im Rahmen

ihrer Dissertationsarbeit Materialien für den integrativen Mathematikunterricht, die zusätzlich zu verwendeten Lehrmitteln eingesetzt werden können. Im Rahmen konkreter Ideen für die Förderung der Kinder mit einer kognitiven Beeinträchtigung seien gemäß Schnepel gerade auch die Finger ein wesentlicher und lohnender Bestandteil in dieser frühen Phase des Mathematiklernens.

Mit Blick auf die besonders deutliche Leistungsschere im Fach Mathematik und um den verschiedenen Vorerfahrungen der Kinder, im Speziellen hier beim Fingergebrauch gerecht zu werden, empfiehlt Gaidoschik, die Kinder von Anfang an dazu anzuregen, *verschiedene* Zeigeweisen für eine Zahl zu zeigen (Gaidoschik, 2007; Gaidoschik & Bayer, 2017; Steinweg, 2009). Für Schüler\*innen mit Lernschwierigkeiten sei es aber unter Umständen förderlich, wenn sie sich zunächst auf die „Hauptzeigeweise“ der Zahlen bis zehn unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ konzentrieren und zunächst einmal diese verinnerlichen und festigen könnten. Andere Kinder hingegen würden problemlos von sich aus auch weitere Zeigeweisen entdecken und nicht-zählend anwenden. So könne ein Kind beispielsweise sieben auch durch drei Finger an der einen und vier an der anderen Hand zeigen.

Zahlen verdeckt zu zeigen und dabei die Finger nicht tatsächlich zu sehen, aber zu spüren, ist eine geeignete Aktivität als Zwischenschritt, der Kindern hilft, Fingerhandlungen in der Vorstellung vorwegzunehmen und später (hoffentlich!) nur noch in der Vorstellung durchzuführen. Nach Gaidoschik (2007) gehe es bei diesen „inneren Fingerbildern“ „nicht um eine ‚geistige Fotografie‘ von Finger-Darstellungen, sondern um das jederzeit verfügbare Wissen über die darin enthaltenen Zahl-Zusammenhänge.“ (S.47) Der Autor betont, dass nicht alle Kinder das Ziel, Fingerhandlungen nur noch in der Vorstellung durchzuführen, gedanklich rasch verarbeiten können. Die Versprachlichung hilft den Kindern dabei, ihr Denken auf die Fingeranzahlen zu fokussieren, ohne sie tatsächlich auszustrecken. Letztlich gehe es – wie bei allen Materialien – bei allen Kindern um die schrittweise Ablösung des Fingergebrauchs. Die Kinder sollten demnach „innere Fingerbilder“ als Vorstellung zu abstrakten Zahlen gewinnen.

### **Produktives Üben**

Im deutschsprachigen Raum waren es vor allem Wittmann und Müller (1990, 1992) und Winter (1984), die die Auffassung geprägt haben, wonach ein Unterrichtsstoff im Mathematikunterricht nicht zwingend zuerst eingeführt werden und sich danach auch nicht eine längere Phase automatisierenden Übens anschließen müsse. Vor diesem Hintergrund verweist Krauthausen (2018) auf Winter (1984) und Wittmann (1981, 1992), die einen

fachlichen Rahmen überlegten, der Üben „als integralen Bestandteil eines aktiven Lernprozesses versteht“ (S. 189). Die Phasen der Einführung und des Übens seien nach Winter (1984) und Wittmann (1992) *keine* klar zu trennenden. Vielmehr fordert Winter (1984) für den Mathematikunterricht der Grundschule eine produktive Übungspraxis in Form von ergiebigen Lernangeboten, die basierend auf dem Leitgedanken „entdeckend geübt und ühend entdeckt“ (S. 6 f.) durchdrungen werden:

Üben ist damit im Wesentlichen das Wiederaufnehmen eines (entdeckenden) Lernprozesses, das Nocheinmalnachbilden, Nocheinmalnachbauen von Lernsituationen. An der zunehmenden (und nicht schon gleich vermittelten) Mechanisierung von Verfahren, an der Verflechtung von Wissen sowie an der geläufigeren Handhabung von Strategien werden die Schüler bewußt [sic!] und aktiv beteiligt (S.10).

In diesem Zusammenhang benennen Wittmann und Müller (2017) im „Handbuch produktiver Rechenübungen“ als ein grundlegendes Kennzeichen produktiver Rechenübungen, sowohl inhaltliche Kompetenzen als auch prozessbezogene Kompetenzen (in Österreich: allgemeine Kompetenzen) zu fördern.

Im Mathematikunterricht der Grundschule sollten nach Wittmann (1992) bzw. Wittmann und Müller (1990) neben operativ strukturierten Übungsformen auch problem- und sachstrukturierte Übungsformen verwendet werden. Bei ersteren, wie beispielsweise bei den Zahlenmustern in sogenannten „schönen Päckchen“, gehe es um das Entdecken, Erforschen und Erklären von mathematischen Gesetzmäßigkeiten. Bei problem- und sachstrukturierten Aufgabenformaten stünden Alltagssituationen und/oder Sachzusammenhänge wie das Einkaufen, Rechnen mit Zeiteinheiten o.Ä. im Vordergrund des Mathematiklernens und -treibens (Moser Opitz, 2008).

Im inklusiven Mathematikunterricht hat die Lehrkraft die Aufgabe, einer heterogenen Lerngruppe gerecht zu werden und passende Lernaktivitäten für alle Kinder bereitzustellen. Scherer (2017b) berichtet davon, dass in diesem Zusammenhang oftmals Bedenken hinsichtlich der Kinder, die Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben, festgemacht werden. Angenommen werde nicht selten, dass leistungsschwächere Kinder und/oder Kinder mit Unterstützungsbedarf mit solchen Lernangeboten überfordert sein könnten. Dementsprechend erhalten diese Kinder oftmals Aktivitäten, „die eher reproduktive Leistungen und damit nur eingeschränkte Ziele der Bildungsstandards einfordern“ (S. 4). Für ein erfolgreiches Bearbeiten produktiver Übungsformate listet Scherer (2017b) in ihrem Beitrag unterschiedliche Anforderungen auf. Diese sind laut der Autorin gerade lohnend



für eine heterogene Lerngruppe. So weist Scherer (2017b) unter anderem darauf hin, dass diese Übungsformate bei auftretenden Schwierigkeiten in Unterricht und Förderung nicht vermieden werden sollten, sondern vielmehr müssten diese an die unterschiedlich vorhandenen Kompetenzen der Lernenden angepasst werden. Auch diese Kinder könnten in Unterricht und Förderung Teilfertigkeiten in den Lernprozess einbringen, ihre eigenen Kompetenzen erweitern und Teilaufgaben lösen.

In eine ähnliche Richtung wie Scherer argumentieren Häsel-Weide und Nührenbörger (2017), wonach bei Lernenden mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen und/oder bei Lernenden mit Unterstützungsbedarf dem Üben in Unterricht und Förderung oftmals eine besondere Bedeutung zugesprochen werde. Dabei werde aber das Üben im Sinne eines „Trainierens“ nicht selten mehr gewichtet als das „Verstehen“ des mathematischen Unterrichtsstoffes. In Abgrenzung dazu fordern Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) im Zahlenbuch: „Für *alle Kinder* gilt, dass das Ziel mathematischen Lernens das Verstehen sein muss. Vor einer Automatisierung zentraler Inhalte muss das Erarbeiten und Verstehen stehen.“ (S.6, Hervorhebungen C.G.)

### ***Lernen im Austausch***

Wie in Abschnitt 3.1.2 dargestellt, ist ein Lernen mit- und voneinander in Gemeinschaft ein anzustrebendes (Unterrichts-)Ziel, auch und gerade im inklusiven Mathematikunterricht. Kinder mit Unterstützungsbedarf und Schwierigkeiten beim Mathematiklernen können in der Regel von einem gemeinsamen Mathematikunterricht profitieren (Abschnitt 3.1.2). Im inklusiven Mathematikunterricht sei deshalb auf „eine ausgewogene Balance zwischen differenzierenden und integrierenden Lernsituationen“ (Wocken, 1998, S. 50) zu achten. Bedeutend sei ein Mathematikunterricht, der allen Lernenden die Möglichkeit gibt „eigene Ideen zu entwickeln und über diese in Austausch zu treten, um somit gemeinsame, an der Mathematik orientierte, Gespräche zu initiieren, die nicht alleine durch die Perspektive der Lehrkraft geprägt sind“ (Brandt & Nührenbörger, 2009, S. 29).

### ***Lernen auf eigenen Wegen***

Neben einem Mathematikunterricht, in dem Kinder gemeinsam an *einer Kernidee* arbeiten, gilt es nach Häsel-Weide und Nührenbörger (2017), Korten (2020), Krauthausen und Scherer (2014) und anderen, allen Kindern ein Lernen auf eigenen Wegen zu ermöglichen (Abschnitt 3.1.1 und Abschnitt 3.1.2). Die Auffassung, wonach nicht jedes Kind dasselbe zur selben Zeit tun und lernen kann, hat gerade in den letzten Jahrzehnten im deutschsprachigen Raum dazu geführt, dass Konzepte und Materialien für das inklusive

Klassenzimmer im Mathematikunterricht (weiter-)entwickelt wurden (Abschnitt 3.2). Aktuelle Entwicklungsforschungsarbeiten wie jene von Gummels (2020) und Korten (2020) geben Hinweise, dass ein gemeinsames Lernen und ein von- und miteinander Lernen auch im inklusiven Mathematikunterricht gelingen kann.

Obwohl Prozesse des Lernens an sich individuell sind, sind sie in soziale und interaktive Zusammenhänge eingebunden (Abschnitt 5.3.2). Bei der Bildung neuen Wissens ist die Kommunikation zwischen den Kindern genauso wichtig wie die Kommunikation mit der Lehrkraft (Abschnitt 5.3.2 und Abschnitt 3.2).

### ***Zur Umsetzung der fachlichen und (fachrichtungs-)didaktischen Prinzipien in den österreichischen Lehrplänen für die Volksschule***

Die in den vorangehenden Abschnitten dargestellten fachlichen und (fachrichtungs-)didaktischen Prinzipien sind zum Teil und/oder in Abstufungen in der Formulierung in den neuen österreichischen Lehrplänen für die Volksschule (BGBl. II Nr. 1/2023) verankert. Die neuen Lehrpläne treten ab dem Schuljahr 2023/2024 aufsteigend in Kraft, beginnend mit der Vorschulstufe und der 1. Schulstufe (BMBWF, 2023).

So sind beispielsweise folgende mit Moser Opitz (2014) übereinstimmende und in Abschnitt 3.1 genannten Kriterien als grundlegende didaktische Überlegungen für einen inklusiven Unterricht im „Lehrplan der Volksschule. Erster Teil. Allgemeines Bildungsziel. Gesetzlicher Auftrag der Volksschulen“ verschriftlicht. Das von Moser Opitz genannte Kriterium „optimale Förderung aller Schüler\*innen einer heterogenen Lerngruppe“ kommt hierbei insofern zum Ausdruck: „Der umfassende Bildungsauftrag der Volksschule setzt die individuelle Förderung eines Kindes zum Ziel. [...] In diesem Zusammenhang spielt auch eine verstärkte Individualisierung des Lernprozesses eine wichtige Rolle“ (BGBl. II Nr. 1/2023, S. 1). Die Begriffe „Heterogenität einer Lerngruppe“, „inklusive Schule“, „inklusive Unterricht“, „inklusive Lernumgebung“ o.Ä. werden in den neuen österreichischen Lehrplänen (BGBl. II Nr. 1/2023) mehrfach angeführt, wie beispielsweise im „Lehrplan der Volksschule. Dritter Teil. Allgemeine didaktische Grundsätze. Grundsatz 3“: „Schule hat die Aufgabe, die Heterogenität von Schülerinnen und Schülern als Chance für das gemeinsame Lernen [...] wahrzunehmen. [...] Inklusive Schule hat den gemeinsamen Unterricht aller Schülerinnen und Schüler durch die Zusammenarbeit aller am Unterricht beteiligten Personen zum Ziel. Dies erfordert die gemeinsame Gestaltung einer inklusiven Lernumgebung“ (BGBl. II Nr. 1/2023, S. 5). Das Kriterium „Differenzierungsmöglichkeiten“ kommt an mehreren Stellen zum Ausdruck,

wenngleich die von Moser Opitz in diesem Zusammenhang aufgelisteten Voraussetzungen „Einbezug der Fachdidaktik“, „Auseinandersetzung mit Erkenntnissen zur Tiefenstruktur des Unterrichts“, um so einen „inklusiven Unterricht zu gestalten, der wirksame Förderung durch das Lernen am gemeinsamen Gegenstand möglich macht“ (Abschnitt 3.1.2), werden in dieser Klarheit in den neuen österreichischen Lehrplänen für die Volksschule nicht angeführt. Der Bereich der „kognitiven Aktivierung“, welche Moser Opitz im Kriterium „Tiefenstruktur von Unterricht und dessen Qualität“ subsumiert, ist in den neuen österreichischen Lehrplänen für die Volksschule (BGBl. II Nr. 1/2023) genau einmal im „Zweiten Teil. Kompetenzorientierung. Kennzeichen kompetenzorientierten Unterrichts“ angeführt: „Kompetenzorientierter Unterricht ist dadurch gekennzeichnet, dass die aktive Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit dem jeweiligen Thema angestrebt wird“ (BGBl. II Nr. 1/2023, S. 4).

Weitere fachliche und (fachrichtungs-)didaktische Prinzipien, welche in den vorangehenden Abschnitten beschrieben wurden, sind in dieser Klarheit in den neuen österreichischen Lehrplänen für die Volksschule nicht aufgelistet. Die „Bedeutung von substantiellen Lernumgebungen für den Mathematikunterricht“, das „Konzept der natürlichen Differenzierung“, „entdeckendes, verstehensorientiertes Lernen“, „produktives Üben“, o.Ä. werden aus Sicht der Autorin dieser Arbeit eher als professionsspezifische Voraussetzungen gewertet und lassen sich unter anderem aus dem Profil *Teacher Education for Inclusion (TE4I)* – Lehrerbildung für Inklusion der European Agency for Development in Special Needs Education (Merz-Atalik & Franzkowiak, 2011) für inklusive Lehrkräfte ableiten. In diesem Zusammenhang handelt es sich um ein europaweites Profil, welches in der europäischen Bildungspolitik Relevanz zu haben scheint. Die Autorin dieser Arbeit verwendet an dieser Stelle bewusst den Konjunktiv, um hier sachlich nachvollziehbar und unvoreingenommen den Bogen zu der in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Kritik zu spannen. An dortiger Stelle beschrieben, ortet der aktuelle Prüfbericht des unabhängigen Monitoringsausschusses (UMA Sonderbericht Bildung zur Staatenprüfung, 2023) in Österreich kontinuierliche Verletzungen der Umsetzung der UN-Konvention über die Rechte von Menschen mit Behinderung und hier unter anderem im Bildungsbereich. Um mit den Autor\*innen des UMA Sonderberichts Bildung zur Staatenprüfung zu argumentieren, wonach „seit der letzten Staatenprüfung kaum Fortschritte bezüglich des Aufbaus eines inklusiven Bildungssystems verzeichnet werden. Im Gegenteil: Gerade in den letzten Jahren vermehren sich die Anzeichen für Rückschritte“ (S. 12), wird dieser Abschnitt mit einem kritischen Verweis geschlossen. Vor dem Hintergrund, dass einige und aus Sicht der Autorin wesentlichen fachlichen und (fachrichtungs-)didaktischen

Überlegungen und Prinzipien in den neuen österreichischen Lehrplänen für die Volksschulen und hier im Speziellen im Teil des Pflichtgegenstandes Mathematik nicht explizit verankert sind und diese, wie oben beschrieben, als eher professionsspezifische Voraussetzungen gelten, ist die Bedeutung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften unumgänglich. Diese wird nun folgend aufgegriffen.

### 3.3 Zur Bedeutung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften

Was kennzeichnet eine gute Lehrkraft und in der Regel fortlaufend einen erfolgreichen Unterricht? In der Vergangenheit wurde diese Frage insbesondere aus Sicht der Allgemeinen Pädagogik und/oder der Bildungswissenschaften versucht zu beantworten. In diesem Zusammenhang haben sich Vertreter\*innen dieser Disziplinen in der Diskussion über Schule und Unterricht in den letzten Jahrzehnten zu dem Konsens durchgerungen, dass es verschiedene Gelingensbedingungen für Bildungsprozesse gibt. In der Literatur aufgelistet werden die Bereiche i) Beziehungsgestaltung; ii) Organisation des Alltags (*classroom management*) und iii) entwicklungsangemessene und adaptive Lernunterstützung (Klieme & Rakoczy, 2008; Klieme et al., 2006; Mackowiak et al., 2022). Vor diesem Hintergrund stellt als *ein* wesentlicher Bereich für ein erfolgreiches Lernen die Qualität von Unterricht dar (Helmke, 2001, 2006; Helmke & Weinert, 1997; Klieme & Reusser, 2003).

Die Qualität von Unterricht und die damit meist einhergehenden Lernangebote werden entscheidend durch die professionelle Kompetenz von Lehrkräften beeinflusst. Ein gängiges Modell zur Beschreibung dieser professionellen Kompetenz von Lehrkräften wird im Folgenden ausführlich beschrieben.

#### 3.3.1 Modell zur Erfassung und Beschreibung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften

Das im Rahmen der COACTIV-Studie 03/04 (*Professional Competence of Teachers, Cognitively Activating Instruction, and the Development of Students' Mathematical Literacy*) entstandene Modell aus dem Kontext der Unterrichtsforschung professioneller Kompetenz von Baumert und Kunter (2011) wird als eines zur Beschreibung der professionellen Kompetenz der Lehrkräfte herangezogen.

Wie in Abbildung 8 dargestellt, unterscheiden die Autor\*innen im Wesentlichen vier Bereiche professioneller Handlungskompetenzen der Lehrkräfte: „Professionswissen, Überzeugungen/Werthaltungen, Motivation, Selbstregulation“ (S. 32) mit den Kompe-

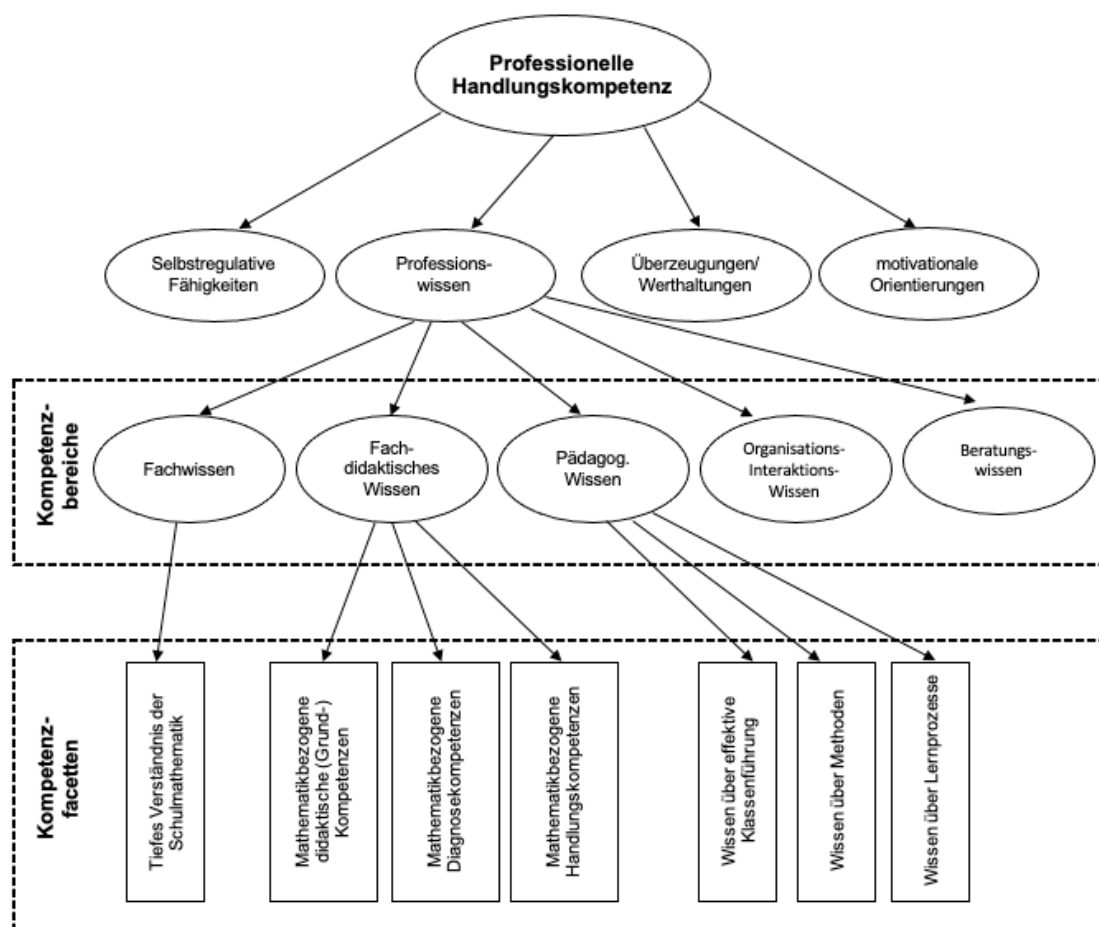
tenzbereichen „Fachwissen, Fachdidaktisches Wissen, Pädagogisches Wissen, Organisations-/ Interaktionswissen, Beratungswissen“ (S. 32) und den jeweiligen Kompetenzfacetten.

Im Sinne der Autor\*innen des Sammelbandes (Kunter et al., 2011) sollen die einzelnen aufgelisteten Aspekte professioneller Kompetenzen in COACTIV nicht als abgeschlossen verstanden werden und somit kann die bestehende Konzeptualisierung an sich keine vollständige Erfassung professioneller Kompetenzen darstellen. Eine endgültige Festlegung der einzelnen Konzepte sei nach Blum et al. (2011) aber auch nicht Ziel und Anspruch dieser Konzeption; vielmehr sollten die im Rahmen des Modells vorgeschlagenen Konzepte weiterentwickelt werden.

Die Autorin der vorliegenden Arbeit sieht die von Baumert und Kunter (2011) beschriebenen professionellen Kompetenzen der Lehrkräfte als wesentlich für Lernprozesse. Im nachfolgenden Abschnitt werden diejenigen Bereiche näher beschrieben, die fachbezogen sind. Die Arbeit geht bewusst nicht auf die Unterbereiche des pädagogischen Wissens, des Organisations-/Interaktionswissens und des Beratungswissens ein, da diese als bereichsübergreifend gelten.

**Abbildung 8**

*Professionelle Handlungskompetenz von Lehrkräften (Baumert und Kunter, 2011, S. 32)*



### **Professionswissen**

Folgende Kompetenzbereiche, die direkte Bedeutung für den Unterricht und Förderung haben, gehören nach Baumert und Kunter (2011) zum Wissensbereich Professionswissen: „Fachwissen, Fachdidaktisches Wissen, Pädagogisches Wissen, Organisations-/Interaktionswissen, Beratungswissen“ (S. 32). Das Fachwissen in Mathematik (*mathematical content knowledge*) wird in inhaltsbezogene mathematische und allgemeine mathematische Kompetenzen eingeteilt, die in Abschnitt 3.3.3 dieser Arbeit aufgegriffen werden. Bei der Kategorie Fachdidaktisches Wissen (*pedagogical content knowledge*) argumentiert die Autorin dieser Arbeit mit der deutschsprachigen fachdidaktischen Literatur für den Elementar- und Primarbereich (Benz et al., 2017; Gasteiger, 2010), wonach bei dieser Kategorie eine Aufteilung in I. mathematikbezogene didaktische (Grund-)Kompetenzen, II. mathematikbezogene Diagnosekompetenzen und III. mathematikbezogene

Handlungskompetenzen vorgenommen werden kann. Diese Bereiche werden folgend herausgearbeitet und in Verbindung mit der vorliegenden Arbeit gesetzt.

### ***I. Mathematikbezogene didaktische (Grund-)Kompetenzen***

Die Empfehlungen der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (Ziegler et al., 2008) formulieren konkrete mathematikdidaktische Grundkompetenzen für den schulischen Bereich: Die Lehrkräfte ...

i) kennen und bewerten Konzepte von ‚mathematischer Bildung‘ und die Bedeutung des Schulfaches Mathematik für die Gesellschaft und die Schulentwicklung, ii) verfügen über theoretische Konzepte zu zentralen mathematischen Denkhandlungen wie Begriffsbilden, Modellieren, Problemlösen und Argumentieren, iii) beschreiben zu den zentralen Themenfeldern des Mathematikunterrichts verschiedene Zugangsweisen, Grundvorstellungen und paradigmatische Beispiele; begriffliche Vernetzungen, u.a. durch fundamentale Ideen, typische Präkonzepte und Verstehenshürden, Stufen der begrifflichen Strenge und Formalisierung und deren altersgemäße Umsetzungen, iv) stellen Verbindungen her zwischen den Themenfeldern des Mathematikunterrichts und ihren mathematischen Hintergründen, v) reflektieren die Rolle von Alltagssprache und Fachsprache bei mathematischen Begriffsbildungsprozessen, vi) kennen und bewerten Konzepte für schulisches Mathematiklernen und -lehren (genetisches Lernen, entdeckendes Lernen, dialogisches Lernen usw.), vii) beschreiben Möglichkeiten fächerverbindenden Lernens im Verbund mit dem Fach Mathematik, viii) bewerten Bildungsstandards, Lehrpläne und Schulbücher und nutzen sie reflektiert für die Unterrichtsgestaltung, ix) rezipieren fachdidaktische Forschungsergebnisse und vernetzen sie mit ihren Kenntnissen. (S. 13)

Der oben benannte Bereich i) der generellen Bedeutung mathematischer Bildung wird in Abschnitt 2.1 dieser Arbeit beschrieben; dabei wird ein Schwerpunkt auf die frühe mathematische Bildung im Übergang von elementaren Bildungseinrichtungen hin zum frühen Arithmetikunterricht gelegt. Abschnitt 2.2 dieser Arbeit beschreibt grundsätzliche inhaltliche Überlegungen für einen arithmetischen Anfangsunterricht. Bezogen auf die Bereiche ii) sowie iii) und im Sinne des Qualitätsmerkmals von (Mathematik-)Unterricht können gut ausgebildete Lehrkräfte gemäß Gerster (2009) das kindliche Lernen in der frühen Phase des Mathematiklernens ganz wesentlich erleichtern, wenn sie „stoffliche

Hürden“ verstehen. Einige der „stofflichen Hürden“, denen Kindern beim Lernen im arithmetischen Anfangsunterricht generell schwer fallen könnten, werden in Abschnitt 2.2 dargestellt; „stoffliche Hürden“ bezogen auf dieses Dissertationsprojekt in Kapitel 9 dieser Arbeit.

## ***II. Mathematikbezogene Diagnosekompetenzen***

In den Empfehlungen der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (Ziegler et al., 2008) werden im Primarbereich folgende mathematikdidaktische Diagnosekompetenzen formuliert. Die Lehrkräfte ...

i) beobachten, analysieren und interpretieren mathematische Lernprozesse, ii) kennen und reflektieren Ziele, Methoden und Grenzen der Leistungsüberprüfung und -bewertung im Mathematikunterricht, iii) kennen Grundlagen empirischer Kompetenzmessung und können deren Ergebnisse handhaben (z. B. Intelligenz- und Schulleistungstests, zentrale Lernstandserhebungen), iv) führen strukturierte Interviews und informelle Gespräche als individualdiagnostische Verfahren durch und werten sie aus, v) konstruieren diagnostische Aufgaben und analysieren und interpretieren Schülerleistungen, vi) beschreiben Unterrichtsarrangements und -methoden mit diagnostischem Potenzial, vii) erstellen auf diagnostischen Ergebnissen beruhende Förderpläne für einzelne Schüler oder Lerngruppen, viii) beschreiben Konzepte und Untersuchungen von Rechenschwäche und mathematischer Hochbegabung. (S. 14)

In eine ähnliche Richtung wie der oben aufgelistete Bereich i) argumentieren Hußmann et al. (2007), wonach Beobachten in Unterricht und Förderung dazu „dient, [Kinder]leistungen zu verstehen und einzuschätzen mit dem Ziel, angemessene pädagogische und didaktische Entscheidungen zu treffen“ (S. 1). Auch Schrader und Helmke (2001) nehmen sich dieser Thematik an. Die Autor\*innen bezeichnen im Allgemeinen die Diagnosekompetenz von Lehrkräften als „die Fähigkeit, Schülermerkmale und Aufgabenschwierigkeiten zutreffend einzuschätzen. Dazu seien nach Schrader und Helmke (2001) „diagnostisches Wissen (über Fähigkeiten und Leistungen von Schülern und die Schwierigkeit von Aufgaben) und diagnostische Fertigkeiten (Beobachtungsfähigkeiten, Beherrschung von Diagnoseinstrumenten) erforderlich“ (S. 48).



Diese Diagnosen seien nach Wember (1998) eine notwendige Voraussetzung, um Kinder individuell fördern zu können, denn „ohne diagnostische Daten lässt sich im konkreten Fall eine bestimmte Intervention nicht indizieren [...]. Ohne differentielle diagnostische Daten ist auch nicht zu entscheiden, in welchen spezifischen Bereichen ein Kind gefördert werden soll und in welchen nicht“ (S. 116).

Aus fachdidaktischer Perspektive betonen Scherer und Moser Opitz (2010), dass eine aus dem Fach geprägte Diagnose „eine differenzierte Analyse von Lernprozessen und Überlegungen der Lernenden sowie von auftretenden Fehlern und möglichen Fehlerursachen“ (S. 23) berücksichtigt.

Vor diesem Hintergrund erfordert dies im Fach Mathematik, dass Lehrkräfte wissen, wie ein Kind über Zahlen denkt, in welchen Bereichen es Schwierigkeiten hat und welche Form der Unterstützung es benötigt (Gaidoschik et al., 2021; Montague, 2011).

Bezogen auf die oben benannten Bereiche ist der Erstrechenunterricht aus fachdidaktischer Sicht in der Grundschule im besten Fall präventiv und durchgängig ausgerichtet und kann so (mitunter) das Entstehen von Schwierigkeiten beim Mathematiklernen vorbeugen, beziehungsweise die Entwicklung von fachlichen Schwierigkeiten verringern (Benz et al., 2017; Gaidoschik et al., 2021; Wittmann & Müller, 2017).

Im Rahmen einer fachlichen Lernbegleitung bestehe aus Sicht der Fachdidaktik eine erste Aufgabe der Lehrkraft zu Schulbeginn darin festzustellen, wie weit das mathematische Verständnis aller Kinder entwickelt ist beziehungsweise welche Fähigkeiten noch nicht entwickelt sind (Radatz et al., 1996; Wittmann und Müller, 2004, 2009). Um dieser Aufgabe gerecht werden zu können, muss die Lehrkraft ein weitreichendes Bild über die Vorkenntnisse und die möglichen Leistungsunterschiede der Schulanfänger\*innen haben (Gaidoschik, 2007; Radatz et al., 1996; und Abschnitt 2.1.2 dieser Arbeit).

Damit die in diesem Projekt involvierten Lehrkräfte die unterschiedlichen Fähigkeiten und Fertigkeiten aller Kinder bestmöglich erkennen und fördern konnten, war es am Beginn der Datenerhebung dieser Arbeit notwendig und sinnvoll, eine Eingangs-Standortbestimmung durchzuführen. Die im Rahmen des vorliegenden Projektes durchgeführte „Weißblatt-Erhebung“ ist in Abschnitt 6.1.2 beschrieben.

Zu einer (Eingangs-)Standortbestimmung rät eben die Mathematikdidaktik im deutschen Sprachraum (Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Moser Opitz & Nührenbörger, 2015; Radatz et al., 1996; Rasch, 2007; Selter, 2017; Wittmann & Müller, 2004, 2009, 2017). Die Lehrkraft erhält dabei Auskunft über mathematische Stärken und Schwächen einzelner Kinder, welche als Grundlage die Planung des Unterrichts erleichtert und sich

dieser (im besten Fall) an den Kenntnissen der Lernenden ausrichten lässt (Selter, 2017; Voßmeier, 2012).

Damit einhergehend setzt die geforderte Prävention im (Mathematik-)Unterricht der Grundschule freilich nicht erst im ersten Schuljahr an, sondern beginnt schon in der Zeit vor der Schule (Abschnitt 2.1).

### **III. Mathematikbezogene Handlungskompetenzen**

Die folgenden mathematikbezogenen Handlungskompetenzen für die Grundschule werden in den Empfehlungen der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (Ziegler et al., 2008) angegeben. Die Lehrkräfte ...

i) kennen wesentliche Elemente von Lernumgebungen und nutzen diese zur zielgerichteten Konstruktion von Lerngelegenheiten (Aufgaben als Ausgangspunkt für Lernprozesse; Lehr- und Lernmaterialien als Mittel fachlichen Lernens; Unterrichtsmethoden in ihrer fachspezifischen Ausformung, ii) verfügen über fachspezifische Interventionsmöglichkeiten (z. B. Umgang mit vorläufigen Begriffen, Reaktionen auf Fehler, heuristische Hilfen), iii) kennen und bewerten Verfahren für den Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht (z. B. Lernausgangsdiagnosen, Prozesshilfen, natürlich differenzierende Aufgaben und Lernarrangements), iv) kennen Verfahren qualitativer und quantitativer empirischer Unterrichtsforschung im Fach Mathematik (z. B. Fallstudien, Feldstudien) und können Ergebnisse bei der Gestaltung von Lernprozessen berücksichtigen, v) reflektieren den Umgang mit Verfahren empiriegestützter Unterrichtsentwicklung (z. B. durch zentrale Leistungsmessung). (S. 14)

Das im Bereich i) geforderte Wissen der Lehrkräfte über die Gestaltung und den Nutzen von Lerngelegenheiten und der im Bereich iii) formulierte adäquate Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht werden in dieser Arbeit bei der Entwicklung der 13 Unterrichtsbausteine für den arithmetischen Anfangsunterricht auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens besonders berücksichtigt (Abschnitt 6.2.1).

Als übergeordnetes Ziel zu den oben benannten Bereichen gilt im Erstrechenunterricht in der deutschsprachigen Fachdidaktik und darüber hinaus weitgehend Konsens darüber, Kinder so früh wie möglich zu Rechenstrategien *ohne* Zählen anzuleiten. Im

Laufe des ersten Schuljahres sollen Kinder Additionen und Subtraktionen so weit als möglich als Fakten abrufen (Abschnitt 3.2.1).

Um dieses formulierte Ziel im arithmetischen Anfangsunterricht mit (möglichst) allen Kindern zu erreichen, sowie vor dem Hintergrund der historischen Entwicklung des Rechenunterrichts der letzten ca. 50 Jahre (Abschnitt 3.2.2), und der zunehmenden Bedeutung der konstruktivistischen Sichtweise auf das Lernen (Abschnitt 5.3.2), gehen Fachdidaktiker\*innen im deutschsprachigen Raum im heutigen Mathematikunterricht davon aus, dass jedes Kind am besten lernen kann, wenn es seinen „eigenen Wegen“ und Lernen im Rahmen einer adaptiven Lernbegleitung erfolgt. Aus fachdidaktischer Perspektive (Benz et al., 2017; Breidenbach, 1963; Gaidoschik, 2007, Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013; Wittmann, 1995; Wittmann & Müller, 2017) sei folglich die Aufgabe der Lehrkraft im Unterricht die fachliche *Begleitung* des Lernens. Wittmann und Müller (2017) sprechen in diesem Zusammenhang bei Lehrpersonen von einem „Coach“ (S. 17).

Vor diesem Hintergrund können Lehrkräfte die Kinder darin begleitend unterstützen, das Ziel des nicht-zählenden LöSENS dieser „additiven Grundaufgaben“ im Verlauf des ersten Schuljahres zu erreichen. Allerdings wäre es nach Gerster (2009) „ein gravierendes Versäumnis, sähe man Ursachen der Schwierigkeiten vieler Kinder nur in ungünstiger Beeinflussung durch Lehrer und Eltern und beschäftigte sich nicht mit Schwierigkeiten der mentalen Konstruktionen, die Kinder beim Erwerb elementarer arithmetischer Konzepte leisten müssen“ (S.97).

Fortlaufend bestünde nach Gaidoschik (2007, 2010, 2019b), Hasemann und Gastеiger (2014), Radatz et al. (1996), Wittmann und Müller (2004) und anderen die Aufgabe der Lehrkraft in Unterricht und Förderung im ersten Schuljahr darin, die anfänglich informellen, kindlichen Strategien aufzugreifen, zu festigen und/oder zu erweitern. Diese Systematisierung beziehungsweise Erweiterung der Vorkenntnisse gelänge, indem – als *eine* Möglichkeit – kindliche Entdeckungen auf eine ganze Reihe von Anwendungsfällen übertragen werden, die Fachsprache der Mathematik weiterentwickelt beziehungsweise operative Zusammenhänge an anderen, differenzierten Beispielen verdeutlicht werden. Auf diese Weise lasse sich im Sinne *fortschreitender Schematisierung* (Treffers, 1983) an die informellen Strategien und Vorerfahrungen der Kinder anknüpfen.

Breidenbach (1963) forderte bereits in den 1960er Jahren:

Die Forderung nach Selbsttätigkeit des Kindes ist seit Jahrzehnten unbestritten. [...] Im Rechnen meint Selbsttätigkeit auf der höchsten Ebene geistige Selbsttätigkeit. Das Kind soll nach Möglichkeit aus eigener Kraft die Probleme lösen. [...] Natürlich ist mit der Forderung nach Selbsttätigkeit nicht gemeint, daß [sic!] jedes Kind alle Rechensätze und

Rechenerkenntnisse auf sich allein gestellt finden soll. [...] Das heißt: das Herzstück des Rechenunterrichts ist das gebundene Unterrichtsgespräch von Lehrer und Kindern miteinander. (S. 36)

In eine ähnliche Richtung argumentiert Krammer (2009) und betont in diesem Zusammenhang die hohe Bedeutung kognitiv aktivierender Unterstützung der individuellen Lernprozesse der Kinder im Mathematikunterricht durch die Lehrkräfte. Krammer schreibt in ihrer Arbeit, „die Lehrpersonen in der Aus- und Weiterbildung einerseits für die Bedeutung der kognitiv aktivierenden, verstehensorientierten individuellen Lernunterstützung zu sensibilisieren und sie zu deren Umsetzung zu befähigen. Andererseits bedarf es der Erweiterung der Kompetenzen zur Gestaltung eines Unterrichts, in welchem die Lehrpersonen ausreichend Zeit für die individuelle Lernunterstützung haben“ (S. 290). Im Kontext der individuellen Lernunterstützung hält die Autorin fest, dass „bezüglich der adaptiven, kognitiv aktivierenden Unterstützung im Unterricht noch relativ grosser Entwicklungsbedarf vorhanden ist“ (S. 292).

Wesentlich bedeutend bei der individuellen Lernunterstützung ist, ob die Denk- und Verstehensleistungen der Kinder angeregt werden. In eine ähnliche Richtung argumentieren auch Florian und Spratt (2013), wonach ein wirksamer inklusiver Unterricht ganz allgemein in hohem Maß von erfolgreichen Interaktionen zwischen der Lehrkraft und dem Kind abhängt. Dieser Diskurs sei nach Williams und Baxter (1996) ein entscheidendes Instrument, um die Schüler\*innen beim Erwerb mathematischen Wissens zu unterstützen. Der gelenkte Diskurs ermöglicht den Austausch über mathematische Inhalte zwischen der Lehrkraft und den Schüler\*innen und/oder zwischen den Schüler\*innen selbst (Abschnitt 4.2.1.2). Nach Alexander (2008) bietet ein solcher Diskurs auch die Gelegenheit, das Wissen der Schüler\*innen zu überprüfen, und im Falle von falsch angeeignetem Wissen zu reorganisieren. In diesem Zusammenhang wird dem gemeinsamen, intensiven Nachdenken, dem sogenannten *sustained shared thinking* eine wesentliche Bedeutung zugeschrieben (Mackowiak et al., 2021).

Die Lernbegleitung handelt dabei in der *Zone der nächsten Entwicklung*, welche auf Vygotskij (1987) zurückzuführen ist (Schuler, 2013): "Sie ist der Abstand zwischen dem tatsächlichen Entwicklungsniveau, das durch eigenständiges Problemlösen bestimmt wird, und dem Niveau der möglichen Entwicklung, das durch Problemlösen unter Anleitung von Erwachsenen oder in Zusammenarbeit mit fähigeren Gleichaltrigen bestimmt wird" (Vygotskij, 1987, S. 86). Dies meint, dass die auszuführende Aktivität des Kindes

den individuellen Lernstand um eine Schwierigkeit übersteigt und somit nur mithilfe entwicklungsangepasster Lernbegleitung bewältigbar ist (Schuler, 2013). Im Sinne eines entwicklungsorientierten Lernens schreibt Vygotskij (1987) weiters, dass beim Lernen nicht nur die aktuellen Fähigkeiten des Kindes im Zentrum stehen, sondern der Fokus besser auf die in naher Zukunft erreichbaren Kompetenzen gelegt werden soll.

Seitens der Fachdidaktik ist man sich darüber einig, dass Kinder mit Schwierigkeiten im Fach Mathematik und Kinder, die sich beim Lernen generell schwertun, eine Lernbegleitung in besonderer Weise brauchen, insbesondere bei der Absicherung der gefundenen (Teil-)Lösungen. Oftmals benötigen diese Kinder besondere Anstöße der Reflexion, Unterstützung bei der Einordnung von gelerntem Wissen und/oder beim Verbinden von bereits Gelerntem (Gaidoschik et al., 2021). Diese Kinder brauchen mehr kognitiv aktivierende Begleitung beim Mathematiklernen und -treiben (Haruehansawasin & Kiatikomol, 2018; siehe dazu auch „entdeckendes, verstehensorientiertes Lernen“ in Abschnitt 3.2.2).

In weiterer Folge besteht ein Konsens darüber, dass Fachlernen und Sprachlernen in einem direkten Zusammenhang stehen (Götze et al., 2019; Korten, 2020; Krauthausen & Scherer, 2014; Leisen, 2015; 2022; Meyerhöfer, 2018; Meyer & Prediger, 2012; Montague, 2011; Moser Opitz & Schindler, 2021; Steinbring, 2005; Wittmann, 1996). Vor diesem Hintergrund schreibt Steinbring (2005) davon, dass mathematisches Tun und Können auf interaktive Verständigung angewiesen ist und die Aufgabe der Lehrkraft im Lernprozess darin besteht, die Kinder zum inhaltbezogenen Kommunizieren, Begründen und Argumentieren anzuregen. Leisen (2015) berichtet weiters davon, dass durch den kompetenten Umgang mit mathematischer Sprache auch fachliche Kompetenzen erweitert werden.

Kinder, denen das Verbalisieren ihrer Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen im Mathematikunterricht schwerfällt, sind in besonderer Weise auf das „laute Denken“ (Montague, 2011; Moser Opitz & Schindler, 2021), das mündliche Begleiten der Lernprozesse und/oder den Diskurs in Lern- und Fördersituationen (Meyerhöfer, 2018) angewiesen. Keineswegs sollte aus fachdidaktischer Sicht bei diesen Kindern auf das Verbalisieren ihres mathematischen Tuns und Denkens verzichtet werden.

Vor diesem Hintergrund ist es im (Anfangs-)Unterricht unentbehrlich, dass Kinder in der Lage sind, ihre Entdeckungen zu versprachlichen. Nach Häsel-Weide und Nührenbörger (2017), Korten (2020), Krauthausen und Scherer (2014), Wittmann (1996), und anderen sei es im Mathematikunterricht lohnend, an einer „Kernidee“ mit „gemeinsamen Inhalten“ zu arbeiten, sodass alle Kinder über „das Gleiche miteinander reden können“.

Auch Breidenbach (1963) findet hier klare Worte, wonach „es Kunstpausen und Überlegungspausen [gibt]. Die Kunstpausen verschuldet meist der Lehrer, sie sind zu verwerfen. Auf die Überlegungspausen hat das Kind ein Anrecht, doch werden sie ihm öfters vorenthalten“ (S. 63).

Götze et al. (2019) sprechen in diesem Zusammenhang von einer *prozessorientierten Erfassung* der Kompetenzen und Defizite eines Kindes. Diese prozessorientierten Lernstandserhebungen sind seitens der Fachdidaktik insofern für Lehrkräfte lohnend, weil sie über einen längeren Zeitraum differenzierte Einblicke über inhaltliche Zugänge und Kompetenzen der Lernenden erhalten. Die gewonnenen Rückschlüsse zum individuellen Lernstand, Lernverhalten und Lernzuwachs sind eine wesentliche Voraussetzung für eine adäquate Förderung.

Auch in dieser Arbeit wird der Lernstand, das Lernverhalten und der Lernzuwachs der Lernenden über einen längeren Zeitraum beobachtet. Ob und wie es den Lehrkräften im Rahmen der Umsetzung der Lernumgebungen der zweiten Durchführung gelingt adäquate Rückschlüsse für eine individuelle und situationsbedingte Förderung zu gewinnen, wird in Abschnitt 9.4 beschrieben. Zur Einschätzung der Unterrichtseinheiten wird das von Steinweg (2010, 2011) vorgeschlagene Instrument zur Erfassung der „Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht“ eingesetzt (Abschnitt 9.3).

Nach Wittmann und Müller sei es ein grundlegender Schwerpunkt der Qualitätssicherung von Mathematikunterricht „die Kinder zum Sprechen“ (2017, S. 21) zu bringen. In diesem Zusammenhang verweisen sie auf die „klinischen Interviews“, wie sie von Piaget in seinen Untersuchungen zur Entwicklung des mathematischen Denkens eingesetzt wurden und auf den amerikanischen Didaktiker Fehr, der auf besondere Diagnosebögen bei Lernenden verzichte. In den Worten Howard Fehrs (1988; zitiert nach Wittmann und Müller, 2017): „Während des Unterrichts müssen die Überlegungen der Kinder ständig beobachtet und bewertet werden. Schriftliche Tests reichen hierfür nicht aus. Häufige mündliche Erklärungen bilden eine bessere Grundlage, um das Verständnis zu überprüfen“ (S. 21).

Worauf Wittmann und Müller (2017) mit Verweis auf Howard Fehr (1988) hinweisen möchten, ist die Überlegung, im Mathematikunterricht insbesondere auf das Denken und ihr Verbalisieren zu achten. Nur so könne die Lehrkraft einen sicheren Ein- und Überblick in die kindlichen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen erhalten. Diese individuellen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen der Lernenden bezogen auf diese Arbeit werden in Abschnitt 9.4 beschrieben.

### 3.3.2 Zur Rolle einer fachlich fundierten Aus-, Fort- und Weiterbildung

Ein wesentlicher Schlüssel zu einer Qualifizierung von Pädagog\*innen und der Qualität von Lernbegleitung der Kinder in dieser frühen Phase des Mathematiklernens liegt aus fachdidaktischer Perspektive in einer pädagogisch wie auch fachlich fundierten Aus-, Fort- und Weiterbildung von pädagogischen Fach- und Lehrkräften (Benz et al., 2017; Gaidoschik, 2019a; Steinweg, 2010, Wittmann, 1998).

Wittmann (1998) betonte bereits in den 1990er Jahren, dass „man eine praxisorientierte Mathematiklehrerbildung nur aus dem Kern heraus konzipieren kann“ (S. 332). Was genau Wittmann unter „dem Kern“ der Mathematikdidaktik versteht, beschreibt Abschnitt 3.2.1.

Die entscheidende Rolle der Qualifizierung von Pädagog\*innen ist nach wie vor aktuell, betrachtet man die fachlichen Kompetenzen der Pädagog\*innen im Elementar- und Primarbereich im deutschsprachigen Raum: Blömeke et al. (2015) konnten in diesem Zusammenhang im Elementarbereich zeigen, dass angehende Erzieher\*innen über unzureichende fachliche Kompetenzen im Bereich Mathematik verfügen.

Fortlaufend legen die im Rahmen der Untersuchung von TIMMS 2015 („Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich“, Wendt et al., 2016) veröffentlichten Ergebnisse nahe, dass der Großteil der in der Primarpädagogik in Deutschland unterrichtenden Lehrkräfte zwar Mathematik als Haupt- oder Nebenfach studiert haben, im internationalen Vergleich gut ausgebildet sind und über eine vergleichsweise lange Berufserfahrung verfügen. Allerdings: Etwa 20 Prozent aller deutschen Lehrkräfte in der Primarpädagogik unterrichten „fachfremd“; das heißt, sie haben andere Fächer als Mathematik und/oder Naturwissenschaften im Studium belegt.

In Österreich werden die Lehrkräfte im Primarbereich in ihrer Ausbildung – im Gegensatz zu anderen deutschsprachigen Ländern – als Generalist\*innen ausgebildet und decken in der Regel eine Reihe an Unterrichtsfächern in der Grundschule ab. Vor diesem Hintergrund zeigen Daten der Untersuchung von TIMMS 2019 (Itzlinger-Bruneforth, 2020), dass in Österreich 51 Prozent (EU-Schnitt: 49 Prozent) der Lehrkräfte in der Primarstufe als höchsten Bildungsabschluss ein Bakkalaureat einer Pädagogischen Hochschule, Fachhochschule oder Universität vorweisen. Im Vergleich zu anderen europäischen Staaten falle Österreich gerade durch einen hohen Anteil der Lehrkräfte (38 Prozent; ISCED-Level 5; EU-Schnitt: 6 Prozent) auf, die als höchsten Bildungsabschluss ein Kolleg oder eine Akademie abgeschlossen haben. Eine beachtenswerte Erkenntnis ist weiters, dass laut Itzlinger-Bruneforth (2020) jede fünfte Lehrkraft (19 Prozent) angibt,



dass sie sich durch Aus- und Fortbildung im Fach Mathematik auf den *Umgang mit mathematisch leistungsschwachen Kindern* sehr schlecht beziehungsweise schlecht vorbereitet fühle. Itzlinger-Bruneforth (2020) schreibt weiters, dass nur die Zahl der Lehrkräfte, die sich sehr schlecht bzw. schlecht auf den Umgang mit aggressiven (57 Prozent) oder verhaltensauffälligen Kindern (51 Prozent) vorbereitet fühlt, noch höher ist.

Ganz allgemein wurden innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik in den vergangenen Jahren einige Überlegungen, Konzepte und Leitideen erfolgreicher Fort- und Weiterbildungen für Lehrkräfte ausgearbeitet (z.B. Biehler & Scherer, 2015; DZLM, 2015; Gaidoschik et al., 2017) und empirische Untersuchungen durchgeführt (z.B. Bosen, 2010; Clarke, 1994; Gräsel et al., 2006; Lipowsky, 2010; Moser Opitz et al., 2021).

Vor diesem Hintergrund gilt es allerdings zu bedenken, dass es im Allgemeinen keinen signifikanten Zusammenhang zwischen der Anzahl der besuchten Fortbildungen und den Kompetenzen der Pädagog\*innen zu geben scheint (Baumert & Kunter, 2006). Yamauchia et al. (2013) konnten jedoch klar hervorheben, dass sich eine Fortbildung gerade dann lohnend auf die Förderung des komplexen mathematischen Denkens von Kindern auswirke, wenn sie sich über einen längeren Zeitraum erstreckt, die Lehrkraft begleitet, Feedback ermögliche und sie in der praktischen Arbeit unterstützt werde.

Als ein Beispiel einer solchen Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens durch fachdidaktisch fundierte Anregungen ist jene von Gaidoschik et al. (2017). Die an der Fortbildungsreihe teilgenommenen österreichischen Lehrkräfte absolvierten zuerst eine fünfteilige Seminarreihe und sollten im Folgejahr einmal wöchentlich von einer Begleitlehrkraft – im Sinne einer Intensivbegleitung – im Unterricht besucht und beraten werden. Alle acht teilgenommenen Lehrkräfte konzentrierten sich auf das Erarbeiten von Ableitungsstrategien, auch und obwohl die gezielten Maßnahmen im Unterrichtsgeschehen klar voneinander abwichen. In Klassen mit Lehrkräften, die eine Intensivbegleitung erhielten, benützten die Kinder signifikant seltener nicht-tragfähige Strategien des Zählens als in Klassen mit Lehrkräften, bei denen keine Begleitung vorgenommen wurde. Die Autor\*innen dieser Untersuchung schlussfolgern, dass Fortbildungsmaßnahmen zum Arithmetikunterricht im ersten Schuljahr *mit Intensivbegleitung* effizienter zu sein scheinen als ohne Intensivbegleitung (Gaidoschik, 2017).

*Zusammenfassend:* In Abschnitt 3.1.2 dieses Kapitels 3 wird auf die von Moser Opitz (2014) festgelegten vier didaktischen Kriterien zur Analyse von Konzeptionen inklusiven Unterrichts eingegangen und einzelne Konzeptionen inklusiven Unterrichts werden ge-



genübergestellt. Abschnitt 3.2.1 beschreibt die Bedeutung von substantiellen Lernumgebungen für den heutigen Mathematikunterricht. Fortlaufend wird das Konzept der natürlichen Differenzierung als *ein* gut geeignetes im Mathematikunterricht ausführlich beschrieben. Ausgehend von diesen grundlegenden didaktischen und fachdidaktischen Überlegungen für einen inklusiven Unterricht, schließt dieses Kapitel in Abschnitt 3.3 mit dem COACTIV-Modell und damit zusammenhängend mit der hohen Bedeutung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften sowie der Rolle einer fachlich fundierten Aus-, Fort- und Weiterbildung. Kapitel 3 dieser Arbeit soll gleichzeitig anregen, sich mit inklusiver Beschulung und inklusivem Unterricht – insbesondere mit Schwerpunktsetzung auf Österreich –, die in Kapitel 4 dieser Arbeit weiterführend dargestellt werden, auseinander zu setzen.

## 4 Inklusive Bildung und inklusiver Unterricht

*“Inclusion and education: ALL MEANS ALL.”*

*UNESCO Global education monitoring report, 2020*

Dieses Kapitel 4 widmet sich dem Konzept der Inklusion im Kontext der internationalen und nationalen Fachdebatte. Im internationalen Diskurs hat sich eine klare Definition von Inklusion bisher als *schwer fassbar* erwiesen (Abschnitt 4.1.1). Eine Entwicklung inklusiver Schulbildung erfordert ein Vorgehen auf mehreren Ebenen und kann im vertikalen und horizontalen Modell von Haug (2020) eingeordnet werden (Abschnitt 4.1.1). Durch die Ratifizierung internationaler Vereinbarungen über inklusive Bildung (unter anderem die Salamanca-Erklärung der UNESCO oder die UN-Behindertenrechtskonvention), haben sich viele Länder auf einen Weg hin zu inklusiver Bildung und inklusivem Unterricht gemacht (Abschnitt 4.1.2). Abschnitt 4.1.2 bringt die bildungspolitischen Bedingungen und den rechtlichen wie historischen Kontext von inklusiver Bildung in Österreich. Wie in anderen Ländern gibt es in österreichischen Schulen unterschiedliche inklusive Praktiken. Abgeschlossen wird dieses Kapitel in Abschnitt 4.1.3 mit der Wirksamkeit inklusiver Beschulung und der Vereinbarkeit inklusiver Beschulung mit einer leistungsorientierten Gesellschaft.

### 4.1 Terminologische Fragen um Inklusion in der internationalen Fachdebatte

Nur wenige Bildungsphänomene sind so häufig untersucht und breit diskutiert worden wie das Konzept und die Umsetzung inklusiver Bestrebungen (Florian, 2014). Eine klare Unterscheidung zwischen den Begriffen Integration und Inklusion wurde im englischsprachigen Raum insbesondere vor der Salamanca-Erklärung kaum vorgenommen (Sander, 2002). Die aktuelle deutschsprachige Literatur hingegen unterscheidet in der Regel bewusst zwischen beiden Begriffen (Werning & Avci-Werning, 2015). Im Sinne Wockens (2014) sollen die Begriffe nicht als gegensätzlich, sondern als kontinuierliche Entwicklung verstanden und je nach Originalliteratur herangezogen werden. In dieser Arbeit wird übergreifend der international anschlussfähige und aktuellere Begriff der inklusiven Didaktik verwendet. Das Verständnis inklusiver Didaktik für dieses Dissertationsprojekt wird mittels der nächsten Abschnitte erläutert.

### ***Integration – ein mehrdeutiger Begriff***

Seit den 1960er Jahren hat der wissenschaftliche Fachdiskurs diesem Konzept, als Antwort und Kritik auf die separate Sonderbeschulung, viel Aufmerksamkeit geschenkt. Im gegenwärtigen Diskurs stellt ein inklusives Bildungssystem die vorzuziehende Leitidee schulischer und unterrichtlicher Entwicklungsvorhaben dar (Deutsche UNESCO-Kommission, 2017). In den vergangenen 20 bis 30 Jahren entstanden in diesem Zusammenhang grundlegende Überlegungen zur Entwicklung von Schule hin zu einer „Schule für Alle“, wie jene von Booth und Ainscow (2002) mit dem „Index für Inklusion“ (*Index for Inclusion*) oder dem „Rahmen für einen inklusiven pädagogischen Ansatz der Praxis“ (*Inclusive Pedagogical Approach in Action Framework*) von Florian und Spratt (2013). Diese Konzeptionen für inklusive Bildung und weitere Konzeptionen und Überlegungen dazu werden in Abschnitt 3.1.1 dieser Arbeit beschrieben und gegenübergestellt.

Trotz dieser und weiterer Bemühungen fehlt aus Sicht der internationalen Fachdebatte eine einheitliche Definition von inklusiver Bildung. Der Begriff werde sowohl in den verschiedenen Fachrichtungen, aber (mitunter) auch innerhalb der Fachdebatte kontrovers diskutiert (Florian, 2014). Viele Autor\*innen sind sich einig, dass es bei Inklusion nicht nur um die *physische Platzierung* von Kindern mit Beeinträchtigung geht (Mitchell, 2014; Slee, 2008), sondern ein Konzept sei, welches generell schwer definierbar sei und verschiedene Interpretationen beinhalte (Artiles et al., 2006). Diese unterschiedlichen Konzeptualisierungen von Inklusion und inklusiver Bildung haben in den einzelnen Ländern über die Jahre zu verschiedenen Forschungsprojekten und Forschungsinteressen geführt.

Vor diesem Hintergrund analysierten Nilholm und Göransson (2017) die 30 meistzitierten Zeitschriftenartikel aus der nordamerikanischen und europäischen Forschungslandschaft und schlussfolgern aus dieser Analyse, dass der Inklusionsbegriff uneinheitlich von Artikel zu Artikel und manchmal auch innerhalb desselben Artikels stark variiert, verwendet wird. Die Autor\*innen schreiben in weiterer Folge, dass es den Anschein mache, als werde ein und dasselbe Phänomen „Inklusion“ zwar analysiert, obwohl dies häufig nicht der Fall ist. Diese konzeptionelle Kluft ist laut den Autor\*innen insofern höchst problematisch, da das Konzept der Inklusion zur Definition von Forschung und Praxis verwendet wird und diese unklare Begriffsdefinition der Inklusion problematisch sei. Nilholm und Göransson (2017) schließen den Artikel mit ihrer Forderung in der Forschung deutlicher zu machen, was unter dem Begriff Inklusion klar zu verstehen ist.

Das dieser Dissertationsarbeit zu Grunde liegende Verständnis von Inklusion stützt sich mit Ainscow (2007) auf folgende Grundannahmen: Inklusion i) heißt die Diversität

aller Schüler\*innen willkommen, ii) hat als Zielsetzung, soziale Exklusion zu vermeiden, iii) überwindet Marginalisierung und Behinderung von Bildungsprozessen. Auch findet sich das Inklusionsverständnis der Autorin dieser Arbeit in der Definition von Inklusion in jener von Biewer (2009) wieder:

Inklusive Pädagogik bezeichnet Theorien zur Bildung, Erziehung und Entwicklung, die Etikettierungen und Klassifizierungen ablehnen, ihren Ausgang von den Rechten vulnerabler und marginalisierter Menschen nehmen, für deren Partizipation in allen Lebensbereichen plädieren und auf strukturelle Veränderungen der regulären Institutionen zielen, um der Verschiedenheit der Voraussetzung und Bedürfnisse aller Nutzer/innen gerecht zu werden. (S. 193)

Konkret betrachtet es die Autorin dieser Arbeit als ein Grundrecht, dass jede Person in seiner Individualität als Ressource wahrgenommen, angenommen und wertgeschätzt wird. Bezogen auf Bildung in der Schule bedeutet Inklusion ein Ort des Miteinanders. Jedes Kind ist ein anerkannter und wertvoller Teil der Schule. Im Unterricht wird auf die Vielfalt aller Kinder und die jeweiligen Bedürfnisse von Individuen eingegangen sowie individuelle Lernvoraussetzungen werden erkannt, berücksichtigt und dementsprechend gefordert und gefördert. Im Folgenden wird das Themenfeld Inklusion aus nationaler und internationaler Sicht als ein Konzept beschrieben, das eindimensional oder mehrdimensional eingeordnet werden kann.

### ***Konzept Inklusion: eindimensional oder mehrdimensional***

In der internationalen Fachdebatte wird der Begriff Inklusion sowohl als ein *eindimensionales* als auch als *mehrdimensionales* Konzept definiert. Ersteres steht für eine enge Fassung, letzteres steht für eine Pluralität. Bei dem eindimensionalen Ansatz geht es um die Platzierung, also darum, wo ein Kind physisch unterrichtet wird (Norwich, 2008; Vislie, 2003). In einer (inklusive) Schulklasse unterrichtet zu werden, ist dann die ideale Verwirklichung von inklusiver Bildung. Ein solches Verständnis ist nach Ansicht einiger Autor\*innen (Ainscow, 2007; Hinz, 2002; Wocken, 2014) nicht grundlegend falsch, greift aber im Sinne der Mehrdeutigkeit des Begriffs Inklusion zu kurz.

Der mehrdimensionale Ansatz von Inklusion enthält den Zugang zur wohnortsnahen wie der barrierefreien Bildung, der Teilhabe an der Schulkultur und an den Lehrplänen.

Die Herausforderung der inklusiven Bildung bestehe demnach darin, diese für alle Kinder so anzupassen, dass sie für jedes Kind das bestmögliche Angebot darstelle (Booth, 1996). Die physische Platzierung der Kinder allein bietet keine Garantie, wie theoretische Überlegungen, aber auch empirische Forschungsergebnisse unterstreichen (Haug, 2020; Vislie, 2003; Wendelborg & Tøssebro, 2011).

Eben diese Überlegungen nimmt der mehrdimensionale Ansatz von Inklusion an und setzt sich damit vertieft auseinander. Neben der Platzierung werden zusätzliche Kriterien (wie das positive Lernumfeld o. Ä.) beschrieben, um die Lernentwicklung aller Kinder bestmöglich zu unterstützen. Die nationale und internationale Fachgemeinschaft würdigt einen solchen mehrdimensionalen Bildungsansatz (Ainscow, 2007; Göransson & Nilholm, 2014; Wocken, 2014). Der mehrdimensionale Ansatz in der inklusiven Bildung bedeutet auch einen grundlegenden Wandel im Verständnis der Entwicklungs- und Lernbedingungen der Schüler\*innen, und das sowohl in der allgemeinen als auch in der Sonderpädagogik. Skrtic forderte bereits in den 1990er Jahren einen solchen Ansatz der Bildung und beschreibt diesen Wandel als einen paradigmatischen Wechsel (1991).

In weiterer Folge konnte Florian (2008) zeigen, dass in den letzten Jahrzehnten der Schwerpunkt inklusiven Unterrichts von der Erklärung des Lernens mit den individuellen Merkmalen der Schüler:innen vermehrt auf die *Qualität* und die *Relevanz* von Lehr- und Lernsituation gelegt wurde. Die schulische Realität zeige jedoch auch, dass sowohl auf internationaler wie auch auf nationaler Ebene Unsicherheiten darüber bestehen, wie ein *inklusives Umfeld* in Schulen geschaffen und inklusiver Unterricht konkret gestaltet werden könne: „There appears, however, to be uncertainty about how to create inclusive environments within schools and about how to teach inclusively“ (Allan, 2008, S.10).

Haug (2020) beschreibt den mehrdimensional inklusiven Ansatz von Inklusion und die Dimensionen wie folgt:

**Abbildung 9**

*Horizontale und vertikale Dimensionen von Inklusion (Haug, 2020, S. 304)*

|                                                                        | Gemeinschaft | Partizipation | Demokratisierung | Nutzen |
|------------------------------------------------------------------------|--------------|---------------|------------------|--------|
| Parlamentarische<br>und Regierungs-<br>politik                         |              |               |                  |        |
| Gemeindepolitik                                                        |              |               |                  |        |
| Schulpolitik                                                           |              |               |                  |        |
| Aktivitäten und<br>Erfahrungen von<br>Lehrkräften und<br>Schüler*innen |              |               |                  |        |

Nach Haug bezieht sich ein mehrdimensionaler, inklusiver Bildungsansatz (siehe Abbildung 9) auf eine horizontale und vertikale Dimension. Die *vertikale Dimension* be-  
schreibe wie die verschiedenen organisatorischen und politischen Ebenen eines Landes  
– vom Parlament, Regierung über Gemeinden, Schulen, Lehrkräfte und Schüler\*innen  
– Inklusion definieren und (er)leben. Meist würden die zentralen nationalen Behörden  
Inklusion mehr fördern und fordern als die, welche die Verantwortung für die konkrete  
Umsetzung hatten und aktuell haben. Diese *Implementation gap*, also eine Lücke zwi-  
schen der inklusiven Bildung und einer mangelnden Kohärenz zwischen den verschie-  
denen Ebenen in der Schulorganisation, sei in vielen Ländern (mitunter) ähnlich (Haug,  
2020). Die *horizontale Dimension* beziehe sich auf die Teilhabebereiche in einer inklusi-  
ven Gesellschaft – Gemeinschaft, Partizipation, Demokratisierung und Nutzen. Diese  
vier Kernelemente erklären die praktischen Herausforderungen bei der Arbeit einer in-  
klusiven Schule, welche von der Organisation des Unterrichts, der Lehrer- und Schüler-  
aktivitäten, bis hin zu den Erfahrungen der Schüler und deren Nutzen aus dem Unterricht  
reichen (Haug, 2020).

#### **4.1.1 Internationale Vereinbarungen über inklusive Bildung und inklusiven Unterricht**

Betrachtet man verschiedene internationale Organisationen wie die Vereinten Nationen, UNICEF, UNESCO oder die Europäische Union, so hat das Konzept der Inklusion mehrere gemeinsame Ideale (Hardy & Woodcock, 2015). Ein wesentliches Ideal an der gleichberechtigten Teilhabe am gesellschaftlichen Leben stellt das *Recht auf Bildung* für alle Kinder im Regelunterricht dar (UNICEF, 2010). Dieses Ideal einer Bildung für alle Kinder im Regelunterricht wurde bislang verfehlt, wenn man aktuelle Schätzungen der UNESCO vom Jahr 2018 betrachtet: Weltweit bleibt etwa 258 Millionen Kindern und Jugendlichen im Alter zwischen sechs und 17 Jahren der Zugang zu Bildung verwehrt; diese Zahl stagniert seit 2018. 63 Millionen davon sind im Grundschulalter (in etwa im Alter zwischen sechs bis elf Jahren), 39 Millionen haben eine oder mehrere Behinderungen. Zudem ist in einem Viertel aller weltweiten Länder eine getrennte Bildung von Kindern mit und ohne Beeinträchtigung gesetzlich vorgeschrieben (UNESCO, 2020).

Im Folgenden werden in chronologischer Ordnung die Kinderrechtskonvention, die Salamanca-Erklärung und die UN-Behindertenrechtskonvention in ihrer Bedeutung für die Inklusion dargestellt.

##### ***Kinderrechtskonvention der Vereinten Nationen***

In dem völkerrechtlich verbindenden Übereinkommen der UN-Kinderrechtskonvention, UN-KRK (*Convention on the Rights of the Child* beziehungsweise CRC), werden weltweit grundlegende Standards zum Schutz, dem Überleben, der Entwicklung und der Beteiligung des Kindes festgelegt. Artikel 28 und 29 präzisieren das *Grundrecht auf Bildung und Ausbildung*. In Artikel 28, Absatz 1 der UN-KRK lautet es: „...den Besuch der Grundschule für alle zur Pflicht und unentgeltlich machen“. Artikel 23 und Artikel 24 widmen sich den *Rechten geistig oder körperlich behinderter Kinder*. Neben der Anerkennung der besonderen Bedürfnisse, der Gesundheitsvorsorge, der Berücksichtigung der finanziellen Unterstützung usw. sind in Artikel 23, Absatz 1 der UN-KRK die Würde aller Kinder und deren aktive Teilnahme in der Gesellschaft verankert: „Die Vertragsstaaten erkennen an, daß [sic!] ein geistig oder körperlich behindertes Kind ein erfülltes und menschenwürdiges Leben unter Bedingungen führen soll, welche die Würde des Kindes wahren, seine Selbstständigkeit fördern und seine aktive Teilnahme am Leben der Gemeinschaft erleichtern“. Im Jahr 1992 ist die UN-Kinderrechtskonvention in Österreich formal in Kraft getreten. Im Jahr 2011 wurden von den mehr als 50 Artikeln der festge-

legten Rechte der Kinder wesentlich wichtige in die österreichische Verfassung aufgenommen. Sind in diesem Zusammenhang Entscheidungen zu treffen, müssen sich das Parlament und die Landtage, aber auch die Gerichte und Behörden an dem „Kinderrechte“-Verfassungsgesetz orientieren (Bundeskanzleramt, 2019).

### ***Salamanca-Erklärung der UNESCO***

Bei der Weltkonferenz in Salamanca, Spanien, trafen sich im Jahr 1994 92 Regierungen und 25 internationale Organisationen mit der Intention „Bildung für Alle“ zu unterstützen. Ein erster internationaler Rahmen für die Umsetzung der Inklusion war geschaffen. Das Leitprinzip, „dass Schulen alle Kinder, unabhängig von ihren physischen, intellektuellen, sozialen, emotionalen, sprachlichen oder anderen Fähigkeiten aufnehmen sollen. [...] Schulen müssen Wege finden, alle Kinder erfolgreich zu unterrichten, auch jene, die massive Benachteiligungen und Behinderungen haben“ (UNESCO, 1994, S.4) fand im Abschlussdokument von fast allen in diesem Prozess involvierten Staaten und internationalen Organisationen eine breite Zustimmung: Die Regelschulen seien der Ort, um alle Kinder willkommen zu heißen und Bildung für alle Kinder zu ermöglichen. Kiuppis (2014) zeigt hingegen, dass der Begriff Inklusion im Laufe der Jahre auch von Organisationen wie UNESCO, UNICEF und Weltbank keinesfalls einheitlich benutzt wurde. Im Betrachtungszeitraum von 1994 bis 2000 habe sich die Idee für *Inclusive Education* – nach Einfluss der jeweiligen Organisation – von einem dominierenden Denken der Behinderung im Kontext von Normalität und Abweichung, hin zu einem Denken der Diversität und Heterogenität (weiter)entwickelt.

Obwohl die Salamanca-Erklärung der UNESCO vom Jahr 1994 keine völkerrechtliche Verpflichtung in Zusammenhang mit inklusiver Bildung enthielt, konnte die Idee der inklusiven Bildung in den darauffolgenden Jahren in eine völlig neue Richtung gedacht werden (Textor, 2015). Fortan war eine sonderpädagogische Förderung für Schüler\*innen mit Beeinträchtigung nicht mehr ausschließlich an die Sonderschulen als der einzig richtige Platz der Beschulung gebunden (Textor, 2015).

### ***Behindertenrechtskonvention der Vereinten Nationen***

Ein wichtiges Rechtsdokument in diesem Zusammenhang ist die UN-Behindertenrechtskonvention, UN-BRK, (*Convention on the Rights of Persons with Disabilities* bzw. *UN-CRPD*). Artikel 24 gilt als rechtlicher Rahmen für die Umsetzung inklusiver Bildung. Nach jahrzehntelanger Vorbereitungsphase wurde das Übereinkommen bei der Generalversammlung der Vereinten Nationen am 13. Dezember 2006 verabschiedet und 2008 in



Österreich ratifiziert. Darin werden, neben den allgemeinen Menschenrechten, auch die Menschenrechte für Menschen mit Behinderung konkretisiert. Als gleichberechtigte Personen und Teil der Vielfalt menschlichen Lebens wurden einige wesentliche Regelungen, auf die Lebenssituation dieser Personen zugeschnitten, vorgenommen. Durch die Unterzeichnung der UN-Behindertenrechtskonvention verpflichten sich die Staaten zu einer gleichberechtigten Teilhabe aller Menschen am gesellschaftlichen Leben und einer Veränderung des nationalen Bildungssystems:

States Parties recognize the right of persons with disabilities to education. With a view to realizing this right without discrimination and on the basis of equal opportunity, States Parties shall ensure an inclusive education system at all levels and lifelong learning directed to: a. The full development of human potential and sense of dignity and self-worth, and the strengthening of respect for human rights, fundamental freedoms and diversity; b. The development by persons with disabilities of their personality, talents and creativity, as well as their mental and physical abilities, to their fullest potential; c. Enabling persons with disabilities to participate effectively in a free society. (Article 24, paragraph 1, UN-CRPD, 2016)

Diese Konvention gilt als ein wegweisender Meilenstein in Richtung „Bildung für Alle“ in Regelschulen.

### ***Hochwertige Bildung (SDG4) der UNESCO***

Während viele Staaten der Welt den Begriff Inklusion eindimensional als physische Platzierung von Kindern und den in diesem Zusammenhang zu diagnostizierenden Förderbedarf definieren, steht die UNESCO klar für einen Inklusionsbegriff ein, der *alle* Menschen – egal welchen Geschlechts, welcher sozialen oder ökonomischen Herkunft, welchen Lernbedürfnissen usw. einschließt. In der aktuellen Bildungsagenda der UNESCO verpflichteten sich im Jahr 2015 alle Mitglieder der Staatengemeinschaft der Vereinten Nationen, die Ziele des weltumspannenden Aktionsplans bis zum Jahr 2030 umzusetzen. *Bildung* steht dabei im Mittelpunkt für die Konkretisierung von Sustainable Development Goal 4 (SDG 4): „... bis 2030 für alle Menschen inklusive, chancengerechte und hochwertige Bildung sicherzustellen sowie Möglichkeiten zum lebenslangen Lernen zu fördern“ (Deutsche UNESCO-Kommission, 2017).

Dieses Ideal einer *Schule für Alle*, welches sich explizit auf die Auflösung des segregierenden Fördersystems bezieht, wurde stark von der oben beschriebenen Salamanca-Erklärung der UNESCO im Jahr 1994 geprägt.

#### **4.1.2 Umsetzung inklusiver Beschulung in Österreich**

Im Folgenden wird das österreichische Bildungssystem in Anlehnung an die Internationale Standardklassifikation (ISCED) dargestellt und ein für diesen Abschnitt relevanter Schwerpunkt auf die Möglichkeiten der Beschulung von Kindern und Jugendlichen mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf gelegt.

##### ***Sonderpädagogischer Förderbedarf in Österreich***

Auf Wunsch der Erziehungsberechtigten kann die Beschulung von Kindern und Jugendlichen mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf (SPF) in Österreich in einer Sonderschule oder in integrativer Form in einer Regelschule stattfinden. Ein Kind beziehungsweise ein Jugendlicher, dem in Österreich ein Sonderpädagogischer Förderbedarf zugeschrieben wird, hat eine Lernbehinderung, einen erhöhten Förderbedarf, eine motorische Störung, eine Seh- und Hörbehinderung, ein emotionales und Verhaltensproblem oder ist ein Kind beziehungsweise ein Jugendlicher an einer Krankenhausschule. Es liegt dann ein Sonderpädagogischer Förderbedarf vor, wenn ein Lernender „infolge einer nicht nur vorübergehenden körperlichen, geistigen oder psychischen Funktionsbeeinträchtigung oder Beeinträchtigung der Sinnesfunktionen dem Unterricht in der Volksschule, Neuen Mittelschule, oder Polytechnischen Schule ohne sonderpädagogische Förderung nicht zu folgen vermag und nicht gemäß § 15 Schulpflichtgesetz 1985 vom Schulbesuch befreit ist“ (Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung [BMBWF], 2019). In Österreich wird als Oberbegriff „Sonderpädagogischer Förderbedarf“ verwendet und in einzelne Förderbereiche (bspw. Förderbereich Lernen, Förderbereich Geistige Entwicklung, Förderbereich Sprache, o. Ä.) eingeteilt. In Österreich werden die Förderbereiche nicht zwingend auf einzelne Sonderschulen aufgeteilt, sondern können in der Regelschule in integrativer Form Berücksichtigung finden.

##### ***Das österreichische Bildungssystem***

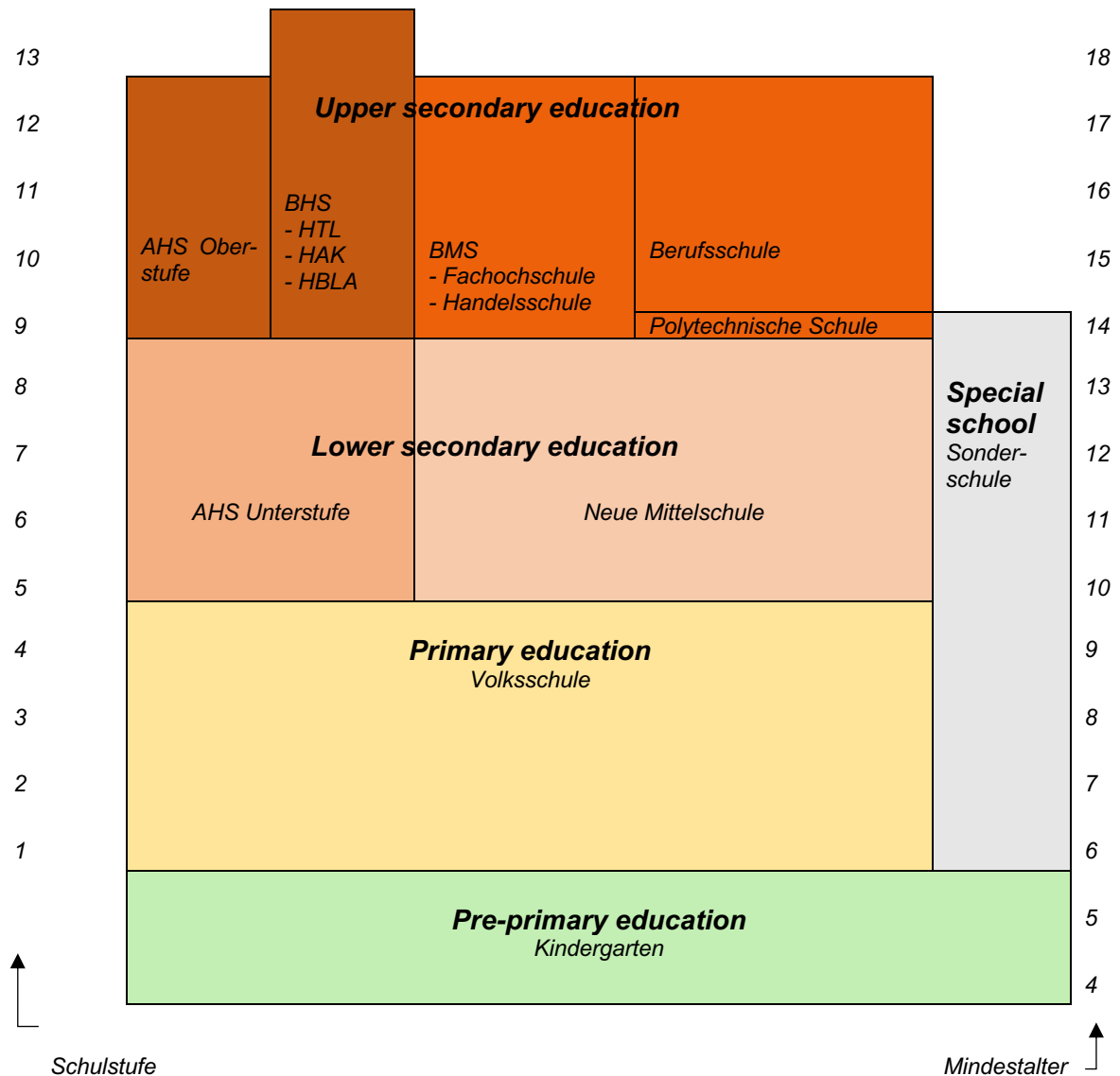
Wie in Abbildung 10 dargestellt, umfasst die Sonderschule in Österreich als *Allgemeinbildende Pflichtschule* die Primar- und Sekundarstufe I. Die Erziehungsberechtigten können zwischen sonderschulischen und integrativen Schulsettings wählen. Die integrative Volksschule dauert in Österreich vier Schulstufen. Anschließend kann ein\*e Schüler\*in mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf eine weiterführende Schule besuchen (BMBWF, 2019). Biewer (2021) bemängelt, „in der Sekundarstufe wurden integrative Systeme fast nur an Hauptschulen bzw. Neuen Mittelschulen etabliert, nicht jedoch an den Allgemeinbildenden Höheren Schulen“ (S. 239).

Die Sonderschule dauert acht Schulstufen, als neunte Schulstufe ist die Absolvierung der Polytechnischen Schule oder eines Berufsvorbereitungsjahres möglich (BMBWF, 2019). Aktuell gibt es in Österreich 11 Schulformen der Sonderpädagogik und je speziellen Lehrplänen: Allgemeine Sonderschule, Sonderschule für blinde Kinder, Sonderschule für erziehungsschwierige Kinder, Sonderschule für gehörlose Kinder, Sonderschule für mehrfach behinderte Kinder, Sonderschule für schwerstbehinderte Kinder sowie Sonderschulen mit dem Lehrplan der Volksschule: Heilstättenschule, Sonderschule für körperbehinderte Kinder, Sonderschule für schwerhörige Kinder, Sonderschule für sehbehinderte Kinder, Sonderschule für sprachgestörte Kinder (BMBWF, 2019). Kinder mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf werden nach den Zielen des Sonderschullehrplans unterrichtet, selbst wenn sie integrativ in Regelklassen unterrichtet werden. Es ist jedoch möglich, einen gemischten Lehrplan für Schüler\*innen mit SPF in integrativen Regelklassen zu verwenden. Vor diesem Hintergrund umfasst dieser sowohl spezielle Lehrpläne in (einzelnen) Unterrichtsfächern wie auch allgemeine Lehrpläne. So könnten beispielsweise in den Fächern Mathematik und Deutsch spezielle Sonderschullehrpläne für Schüler\*innen mit Lernproblemen Verwendung finden, während in allen anderen Fächern der reguläre Regelschullehrplan relevant ist (Biewer, 2021).

In § 17 Abs. 4 des Schulunterrichtsgesetzes steht dazu: „Für Kinder, bei denen gemäß § 8 Abs. 1 des Schulpflichtgesetzes 1985 ein sonderpädagogischer Förderbedarf festgestellt wurde, hat die Schulkonferenz unter Bedachtnahme auf die Feststellung zu entscheiden, ob und in welchen Unterrichtsgegenständen der Schüler oder die Schülerin nach dem Lehrplan einer anderen Schulstufe, als der seinem oder ihrem Alter entsprechenden, zu unterrichten ist. Dabei ist anzustreben, dass der Schüler oder die Schülerin die für ihn bestmögliche Förderung erhält“.

**Abbildung 10**

*Aufbau des österreichischen Bildungssystems in vereinfachter Darstellung in Anlehnung an die Internationale Standardklassifikation im Bildungswesen (ISCED)*



### **Die Entwicklung sonderpädagogischer Förderung von Kindern und Jugendlichen in Österreich seit den 1960er Jahren**

Ein Verständnis für die Entwicklung des österreichischen Sonderschulwesens kann nur gelingen, wenn sie in den gesellschaftlichen wie bildungspolitischen Zusammenhang der jeweiligen Zeit gestellt wird. Betrachtet werden wesentliche Eckdaten in der Entwicklung inklusiven Sonderschulwesens in Österreich, beginnend in den 1960er Jahren.

Bei der Entwicklung inklusiver Strukturen in österreichischen Schulen können verschiedene Phasen beschrieben werden: In den 1960er und 1970er Jahren wurde in Österreich ein Sonderschulsystem ausgebaut. Dieser Ansatz kann in Anlehnung an die Organisation *European Agency for Development of Special Needs Education* (EADSNE, 2003) als mehrgleisig bezeichnet werden: Das Sonderschulwesen wurde in Österreich massiv ausgebaut, Schüler\*innen mit und ohne Behinderung wurden getrennt voneinander unterrichtet. Zu dieser Zeit entwickelte sich eine *große Bandbreite* an Sonderschulen (bis zu zehn verschiedenen Schwerpunkten), die sich auf die Förderung der unterschiedlichen Beeinträchtigungen spezialisierten (Engelbrecht, 1988).

Bis Mitte der 1980er Jahre wurden Kinder und Jugendliche in Österreich ausschließlich in Sonderschulen unterrichtet (Feyerer, 2009). Einen ersten Schulversuch auf Initiative von Erziehungsberechtigten an der Volksschule Oberwart im Burgenland fand im Jahr 1984 mit der Implementierung der *ersten Integrationsklasse* statt, die gesetzliche Verankerung dieses Schulversuches und fortlaufend weiterer Schulversuche erfolgte im Jahr 1988 (Feyerer & Specht, 2009). Gleichzeitig gab es auch Widerstand, vor allem seitens einiger Lehrkräfte, gegen diese Entwicklungen der Sonderschulen hin zu integrativer Förderung in Regelschulen (Engelbrecht, 1988).

Durch die wissenschaftliche Evaluation dieser Schulversuche, welche federführend durch Specht (1991, 1993) durchaus positiv ausfiel und durch den medialen Druck der österreichweiten „Integrationsbewegung“ (Haider, 1998) in den 1980er Jahren, wurde 1993 für Kinder mit Beeinträchtigung das *Recht auf Regelschule in der Primarstufe* (15. Schulorganisationsgesetz-Novelle) und in weiterer Folge 1996 das *Recht für die Sekundarstufe I* (17. Schulorganisationsgesetz-Novelle) in vorliegenden Gesetzen verankert.

Diese Änderung des Schulorganisationsgesetzes (SchOG) führte zu weitreichenden Veränderungen: Die Erziehungsberechtigten konnten fortan zwischen einem Regel- oder einem Sonderschulbesuchsrecht ihres Kindes wählen. In den darauffolgenden Jahren kam es zu einem kontinuierlichen Anstieg an integrativ geführte Klassen in Österreich. Im Schuljahr 1988-1989 lag die Zahl an Integrationsklassen in Österreich in der Primar- sowie Sekundarstufe I bei 50, im Schuljahr 1995-1996 bei 873 (Feyerer, 1998). Bis ins Jahr 2000 stieg die Zahl der in Regelschulen unterrichteten Kinder und Jugendlichen mit SPF weiter an und pendelte sich bis Anfang 2010 bei einer österreichweiten Durchschnittsquote von etwa 50% ein (Altrichter & Feyerer, 2011; Biewer, 2021; Buchner & Gebhardt, 2011).

Insbesondere seit der Ratifizierung der UN-Behindertenrechtskonvention (Abschnitt 4.1.1) hat Österreich vermehrt Bestrebungen in Richtung eines *inklusiven Bildungssystems* erkennen lassen. Die Ratifizierung erfolgte am 30. März 2007 und ist am 26. Oktober 2008 in Kraft getreten. Seitdem hat Österreich – wie auch andere Staaten – inklusive Bildung als wichtige Prämisse anerkannt. Dessen ungeachtet ist der aktuelle praktische Stand integrativer und inklusiver Strukturen in den einzelnen Bundesländern sehr unterschiedlich (Biewer, 2021). Wie in Abschnitt 4.1 dargestellt, zeigt sich ein mitunter ähnliches Bild – bezogen auf die inklusive Bildungspolitik – in vielen Ländern der Welt. Es gibt innerhalb eines Landes, sowohl zwischen Schulen als auch innerhalb einer Schule *keine einheitliche Perspektive* von schulischer Inklusion (Booth, 1996; Booth & Ainscow, 1998; Haug, 2020).

Die Umsetzung inklusiven Unterrichts in Österreich, basierend unter anderem auf den Forderungen der UN-Behindertenrechtskonvention des §24 zur inklusiven Bildung (Abschnitt 4.1.1), soll allen Lernenden ermöglichen, von Beginn an optimal nach den jeweiligen Möglichkeiten gefördert zu werden. Der österreichische Nationale Aktionsplan Behinderung (NAP) 2012-2020, der die strategischen Ziele und geplanten Maßnahmen in einer vorab definierten Zeit zur Umsetzung der UN-Konvention festschreibt, forderte als eine zentrale Maßnahme die *flächendeckende Verankerung* inklusiver Modellregionen (IMR) bis zum Jahr 2020 (BMASK, 2012). Alle in dieser Region lebenden Schüler\*innen sollten die Möglichkeit erhalten, in der (Regel-)Schule unterrichtet zu werden und auf Sonderbeschulung zu verzichten (BMASK, 2012). Mehrere österreichische Bundesländer konnten in dieser Zeit das Sonderschulsystem mehr und mehr in Richtung dieser inklusiven Modellregionen ersetzen: In der Steiermark, mit einem ohnehin bereits hohen Integrationsanteil, wurden weitere Fortschritte in diese Richtung erzielt. Andere Bundesländer wie Tirol und Vorarlberg im Westen Österreichs stagnierten. In diesen Bundesländern seien laut Biewer die Sonderschulstrukturen immer noch stärker ausgeprägt. Folglich könne man bei dem Prozess der flächendeckenden Verankerung inklusiver Regionen beobachten, dass dieser „die bestehenden Ungleichheiten bei den Raten der Sonderschulung und der integrativen oder inklusiven Beschulung“ (Biewer, 2021, S. 243) erhöhe.

Der Evaluationsbericht des NAP der Menschen mit Behinderung 2012-2020 zeigte einerseits durchaus Fortschritte in der Umsetzung der UN-BRK, betonte aber andererseits auch großen Handlungsbedarf in mehreren Bereichen, unter anderem im Ausbau *inklusiver Strukturen* in der Schulbildung (Bundesministerium für Soziales, Gesundheit, Pflege und Konsumentenschutz [BMSGPK], 2020). Als ein wichtiger Faktor für eine

„hohe Wirkung“ von nationalen Aktionsplänen wurde ein nachhaltiger, politischer Wille angeführt. Der österreichische NAP für Menschen mit Behinderung 2012–2020 hatte laut BMSGPK (2020) gerade hier seine Schwächen: Die nicht als sonderlich hoch eingeschätzte strategische Relevanz des NAP Behinderung 2012–2020 kam beispielsweise durch die mangelnde strukturelle Einbindung der politischen Ebenen, hier vor allem des Parlamentes, zum Ausdruck (BMSGPK, 2020).

Auch der aktuelle Prüfbericht des unabhängigen Monitoringausschusses (UMA Sonderbericht Bildung zur Staatenprüfung, 2023) ortet kontinuierliche Verletzungen der Umsetzung der UN-Konvention über die Rechte von Menschen mit Behinderung und hier im Speziellen der Menschenrechte im Bildungsbereich. Im Bereich der inklusiven Bildung werden mehrere Punkte aufgelistet: i) „Ressourcenprobleme inklusiver Bildung und Stabilisierung des Sonderschulsystems; ii) zwischen Rückschritten und Stillstand in der Umsetzung inklusiver Bildung; iii) Passivität und Gleichgültigkeit gegenüber Menschenrechten; iv) Pseudo-Partizipation von Menschen mit Behinderungen; v) Massive Mängel in allen Bildungsbereichen“ (S. 1 f.). Resümierend stellen die Autor\*innen dieses Prüfberichtes fest, „seit der letzten Staatenprüfung [konnten] kaum Fortschritte bezüglich des Aufbaus eines inklusiven Bildungssystems verzeichnet werden. Im Gegenteil: Gerade in den letzten Jahren vermehren sich die Anzeichen für Rückschritte“ (S. 12).

Zusammenfassend kann der Nationale Aktionsplan zwar als ein Referenzrahmen für die Umsetzung der UN-BRK in Österreich gesehen werden, aber bei der Annäherung an die Zielsetzung der UN-Behindertenrechtskonvention gibt es in Österreich, gerade auch im Bereich des inklusiven Bildungssystems, noch Handlungsbedarf. Die Institution Sonderschule und deren Grundgedanke haben durch die Entwicklungen der 1980er bis Mitte der 1990er Jahren an exklusivem Status eingebüßt, allerdings sind sie bis heute *nicht* aus der österreichischen Bildungslandschaft verdrängt worden (Abbildung 9).

### ***Schulische Inklusion in Österreich in Zahlen***

Im aktuellen Nationalen Bildungsbericht des Bildungsministeriums (BMSGPK, 2022) wurde beschrieben, dass die Integrationsquote in Bezug zum letzten Nationalen Bildungsbericht von 61% auf 60% gesunken ist. Die Integrationsquote gibt Aufschluss über den Prozentsatz von Kindern und Jugendlichen mit Sonderpädagogischem Förderbedarf, welche in einer Regelschule unterrichtet werden. In einigen Bundesländern sei ein noch stärkerer Rückgang der Integrationsquote zu bezeichnen (beispielsweise in Wien zwischen dem Schuljahr 2016/2017 und dem Schuljahr 2019/2020 auf unter 45%).

Anzumerken ist an dieser Stelle, dass es sich bei diesen angeführten Zahlen um die reine *platzierungsorientierte* Definition von Inklusion handelt (siehe Abschnitt 4.1). Buchner und Proyer (2020) betonen in diesem Zusammenhang, dass der aus den 1960er Jahren stammende Diskurs über die Bildung von Schüler\*innen mit Behinderungen nach dem medizinischen Modell noch heute in Österreich fortgeführt und der Unterricht in inklusiven Settings aufgrund dieses defizitorientierten Verständnisses geleitet werde. Vor diesem Hintergrund sei zudem der kostenintensive Erhalt eines mehrgliedrigen Schulsystems von Regel- und Sonderschulen wie in Österreich kritisch zu betrachten (Buchner & Proyer, 2020). Biewer (2021) berichtet in diesem Zusammenhang von einigen wesentlichen Rahmenbedingungen in der österreichischen Gesetzgebung: In Österreich gebe es als einzigem deutschsprachigen Land bereits seit Anfang der 1990er Jahre eine einheitliche Bundesgesetzgebung für das Schulwesen. Dennoch sei der Anteil integrativer und inklusiver Strukturen in den einzelnen österreichischen Bundesländern sehr verschieden: Der Autor beschreibt die Sonderbeschulungsquote im Bundesland Vorarlberg mit rund 4%, in der Steiermark mit rund 0.6%.

### ***Inklusive Pädagogik in der Pädagog\*innenbildung***

Die gegenwärtigen Änderungen in der Pädagog\*innenbildung für die Primarstufe und die Sekundarstufe in Österreich gehen bereits auf 2009 zurück. Die damalige Bundesregierung beauftragte eine Expert\*innenkommission, die Ausbildungsstruktur von pädagogischen Fachkräften für die Altersgruppen von 0 bis 18 Jahren fachlich einzuschätzen. Die weitreichenden Vorschläge der Expert\*innen aus dem Jahr 2011 reformierten in weiterer Folge auch das bisherige Ausbildungssystem (sonder-)pädagogischer Fachkräfte. Bis 2014 sah die Struktur der Ausbildung in Österreich so aus, dass zwei unterschiedliche Gruppen von Lehrkräften mit verschiedenen langen Studienzeiten an unterschiedlichen tertiären Einrichtungen ausgebildet wurden. Während die eine Gruppe an Pflichtschullehrkräften (Volksschule, Hauptschule bzw. Neue Mittelschule, Sonderschule) die Ausbildung an den Pädagogischen Hochschulen mit einem Bachelorstudium von 3 Jahren erhielten, studierten Lehrkräfte der Allgemeinbildenden und Berufsbildenden Höheren Schulen etwa 4 ½ bis 5 Jahre an Universitäten und beendeten ihr Studium mit dem akademischen Grad Magister. Mit dem neuen Lehrer\*innenbildungsgesetz wurde diese Struktur der Ausbildung 2013 reformiert und im Wintersemester 2014 erstmals umgesetzt. Die grundlegendste Neuerung dieser neu aufgesetzten Pädagog\*innenbildung ist die Einführung eines 4 Jahre dauernden Bachelorstudiums für alle Pädagog\*innen, an



das ein Masterstudium anschließt, welches zumindest 1 oder 2 Jahre dauert. Die Studiendauer für angehende Pflichtschullehr\*innen ist somit etwa doppelt so lang wie zuvor (BMBWF, 2022).

Betrachtet man die bisherige Ausbildung Sonderschullehrer\*in gibt es aktuell ein einheitliches Primarstufenlehramt an den Pädagogischen Hochschulen, innerhalb dessen die Studierenden die Spezialisierung Inklusive Pädagogik wählen können. Im Sekundarstufenlehramt gibt es ähnliche Strukturen. Studierende des Sekundarstufenlehramtes wählen zwei gleichwertige Unterrichtsfächer. Im aktuellen System können sich Studierende in Inklusiver Pädagogik spezialisieren und eines der beiden Fächer durch diese Spezialisierung ersetzen (beispielsweise Deutsch/Inklusive Pädagogik statt Deutsch/Französisch). Im Rahmen der „Pädagog\*innenbildung Neu“ erwirbt jede Lehrperson grundlegende Kenntnisse in Inklusiver Pädagogik (BMBWF, 2022). Diese neuen Strukturen der Pädagog\*innenbildung für die Entwicklung inklusiver Schulen sieht Biewer (2021) als „vielversprechende Perspektive für die Zukunft“ (S. 244) und schreibt in diesem Zusammenhang weiter: „Die Etablierung der neuen Lehrer\*innenbildung mit der Ersetzung des Sonderschullehramtsstudiums durch die Spezialisierung in Inklusiver Pädagogik erscheint als langfristig nachhaltigste Maßnahme“ (S. 245).

Zum Zeitpunkt der Finalisierung dieser Arbeit im Jahr 2024 ist in Österreich erneut eine Reform der Lehrkräfteausbildung in Ausarbeitung.

Generell scheint eine fundierte Aus-, Fort- und Weiterbildung eine wesentliche Rolle bei der Qualifizierung von Pädagog\*innen zu spielen. Diese Thematik wird in Abschnitt 3.3.3 dieser Arbeit aufgegriffen.

#### **4.1.3 Zur Wirksamkeit inklusiver Beschulung und der Vereinbarkeit mit einer leistungsorientierten Gesellschaft**

Eine inklusive Schulbildung setzt sich konsequent mit der Beschulung heterogener Lerngruppen auseinander. Die Vielfalt aller Lernenden wird ausdrücklich gefordert und begrüßt (Deutsche UNESCO-Kommission, 2014). In diesem Zusammenhang unabdingbar ist eine Haltung im Umgang mit Diversität, welche die Vielfalt der Lernenden als gleichwertig wahrnimmt (Brügelmann, 2003; Prengel, 2001, 2006).

#### ***Ambivalente Entwicklungen von Inklusion und anderen Schulreforminitiativen***

Laut Florian (2014) wurden vor allem seit den 1990er Jahren weltweit unterschiedliche Anstrengungen unternommen, um die Strukturen und Praktiken der Sonderpädagogik grundlegend zu verändern. Die Autorin nennt in diesem Zusammenhang unter anderem

die Bemühungen der kanadischen Inklusions-Befürworter Forest und Pearpoint (1992, zitiert nach Florian, 2014), die mit personenzentrierten Interventionsansätzen Pionierarbeit im Inklusionsbereich leisteten. Auch verweist die Autorin auf Ainscow (1991, zitiert nach Florian, 2014), der schon früh dafür plädierte, den Schwerpunkt der Sonderpädagogik weg von den Unterschieden zwischen den Lernenden hin zu veränderten Schulpraktiken zu richten.

Rouse und Florian (1997) berichten in diesem Zusammenhang, dass weltweit die Politik der Inklusion zur gleichen Zeit entwickelt wurde wie andere Schulreforminitiativen. Gemäß Rouse und Florian wurden die daraus resultierenden Bewegungen der "Rechenschaftspflicht" und der "auf Standards basierenden Reformen" von vielen Pädagog\*innen mit Besorgnis aufgenommen, nicht zuletzt, weil sie befürchteten, dass die zugrunde liegende *Betonung des Wettbewerbs*, die diese Reformagenda kennzeichnete, mit dem moralischen Imperativ der Inklusion in Konflikt geraten könnte.

Während einige Autor\*innen inklusive Beschulung innerhalb der größeren Schulreformbewegung kritisch in Frage stellten (Slee et al., 1998), wurde in den vergangenen Jahrzehnten die Erforschung von Inklusion von anderen Autor\*innen aus einer Perspektive der Schulverbesserung klar verankert (Ainscow et al., 2006; Dyson & Milward 2000; Thomas et al., 1998).

Der mit den internationalen Schülerleistungsvergleichen eingesetzte PISA-Schock (*Programme for International Student Assessment* [PISA]) von 2001 entflammte eine öffentliche Diskussion zur Qualität der Schulen im deutschsprachigen Raum und leitete eine neue Phase der „Modernisierung der Schule“ (Brüsemeister & Eubel, 2003, S. 12) ein. Nicht nur in Österreich richtete sich der Fokus fortan auf die „Perspektive auf das Gesamtsystem“ (Altrichter & Feyerer, 2017, S. 32). Als eine wesentliche Kernaussage der PISA-Studie der OECD (seit dem Jahr 2001) geht hervor, dass das österreichische Schulwesen als sozial hochselektiv gelte. Zum Termin der Schuleinschreibungsfrist für weiterführende Schulen nach der Grundschule muss sich ein Kind in Österreich mit etwa neuneinhalb Jahren der Frage der institutionell getrennten Bildungsgänge unterwerfen. Laut einer OECD-Studie vom Jahr 2007 habe eine solch strikte und frühe Trennung zwischen Volksschule und Neuen Mittelschule, beziehungsweise Allgemeinbildende Höhere Schule (Abbildung 9) wie in Österreich generell negativere Auswirkungen auf das Leistungsniveau der zehn- bis 14-Jährigen, verglichen mit Ländern mit einem inklusiven Gesamtschulsystem. Das österreichische Bildungssystem stehe demnach im Widerspruch zu inklusiven Bildungszielen wie Heterogenität und Individualisierung.

Betrachtet man den gesamtgesellschaftlichen Kontext in deutschsprachigen Ländern – eine sich als Leistungsgesellschaft definierende Gesellschaft – seien Überlegungen über die schulische Vereinbarkeit von Inklusion und Leistung nach wie vor gegenwärtig (Textor et al., 2017). Vor diesem Hintergrund stellen die Autor\*innen wesentliche Fragen: Ist eine Vereinbarkeit von inklusiver Beschulung und einer gegenwärtig ergebnisorientierten Leistungsgesellschaft wie in den deutschsprachigen Ländern überhaupt möglich und wenn ja, wie umsetzbar?

Diese Thematik führte und führt zu einigen Diskussionen um Vor- und Nachteile von separierender beziehungsweise inklusiver Beschulung. Zu ihrer Beantwortung steht die Frage der Leistungsentwicklung und die der sozialen Entwicklung der Schüler\*innen im Zentrum des Interesses. Vor diesem Hintergrund werden nachfolgend zentrale empirische Untersuchungen auf nationaler und internationaler Ebene ausgewählt. Damit soll ein möglichst guter Überblick über den Forschungsstand in den deutschsprachigen Ländern geben werden.

### ***Empirische Befunde zu Heterogenität und Leistung***

Laut Stranghöner et al. (2017) gebe es nach einer inzwischen mehr als 30-jährigen Erfahrung mit „Gemeinsamen Unterricht“ international mehrere empirische Untersuchungen. Die Autor\*innen fassen diese Untersuchungsergebnisse wie folgt zusammen: „Die Mehrzahl nationaler [gemeint ist hier Deutschland] wie internationaler Befunde deuten darauf hin, dass Kinder mit SFB bessere Leistungen zeigen, wenn sie inklusiv beschult werden“ (S. 127, Anmerkung C.G.). Die Autor\*innen verweisen darauf, dass sich die meisten dieser Untersuchungen auf Kinder der Grundschulen beziehungsweise auf Förderschulen der Jahrgangsstufen 1 bis 4 beziehen. Viele dieser Untersuchungen benutzen keine standardisierten Leistungstests und beziehen sich auf keine adäquate Vergleichsgruppe. Gemäß Stranghöner et al. seien die meisten deutschen Untersuchungen den Förderschwerpunkten „Lernen“, „Sprache“ oder „emotionale und soziale Entwicklung“ zuzuschreiben.

Auch Klemm (2010) fasst empirische Ergebnisse zu pädagogischen Interventionen zusammen und vergleicht inklusive und separate Schulsettings, wobei der Schwerpunkt hauptsächlich auf den Ländern Deutschland, Österreich und Schweiz liegt. Inklusive Settings würden in der Regel bei schulischen Leistungen von Kindern mit Lernschwierigkeiten besser abschneiden. In einigen Untersuchungen konnten entweder keine Unterschiede zwischen inklusiven und separierten Settings gezeigt werden oder es werden gemischte Ergebnisse berichtet. Im Allgemeinen weisen Kinder mit Lernschwierigkeiten

nach diesen Untersuchungen in inklusiven Settings einen signifikanten Leistungsvorsprung gegenüber separierten Settings auf.

Schümer (2004) bezieht sich auf empirische Studien zu schulischen Leistungsvergleichen in unterschiedlichen Lerngruppen und stellt fest, dass viele Autor\*innen leistungsschwache Schüler\*innen besser in heterogenen Lerngruppen gefördert sehen, während leistungsstarke Kinder in homogenen Lerngruppen mit starken Schüler\*innen bessere Schulleistungen erzielen. Bekräftigt wird, „dass die Nachteile der leistungsstarken Schüler in heterogenen Gruppen weniger groß sind als die Vorteile, die leistungsschwache Schüler in Gruppen haben“ (Schümer, 2004, S. 79).

Die Unterschiede in der Leistung zwischen lernschwachen und lernstarken Kindern könnten durch gemeinsame Beschulung nicht ausgeglichen werden. Lernschwache Kinder könnten den Rückstand in den schulischen Leistungen zwar bedingt verringern, aber nicht gänzlich aufholen (Reiser, 1997). Weitere Untersuchungen haben zudem gezeigt, dass inklusive Beschulung vor allem dann negative Auswirkungen haben kann, wenn Kinder vorwiegend aus soziokulturell benachteiligten Bevölkerungsschichten gemeinsam unterrichtet werden und sich die Lerngruppe vor allem aus lernschwachen Kindern zusammensetzt (Hinz et al., 1998a, 1998b). Folglich solle laut den Autor\*innen eine gute inklusive Lerngruppe heterogen sein, das heißt sich aus leistungsschwachen und vor allem auch aus leistungsstarken Kindern zusammensetzen.

Feyerer (1998) zeigt in seiner österreichweiten Untersuchung mit dem Titel „Behindern Behinderte?“ in der Leistungsentwicklung von Schüler\*innen ohne sonderpädagogischen Förderbedarf im Sekundarbereich in Klassen mit „Gemeinsamen Unterricht“, dass sich deren schulischen Leistungen nicht von denen der Schüler\*innen in anderen Klassen unterscheidet. Diese Erkenntnisse gelten nach Feyerer sowohl für leistungsstarke wie für leistungsschwächere Kinder. Gemäß Feyerer weisen Schüler\*innen ohne sonderpädagogischen Förderbedarf im „Gemeinsamen Unterricht“ in der Regel ein höheres Selbstwertgefühl und ein positiveres Leistungsselbstkonzept auf als gleichaltrige Kinder aus Parallelklassen, in denen nicht gemeinsam mit Kindern mit sonderpädagogischem Förderbedarf gelernt wird.

In Bezug auf die Vereinbarkeit von Inklusion in einer Leistungsgesellschaft können derzeit empirische Ergebnisse aus Sicht der Leistungsentwicklung keine „zwingenden Argumente“ für die inklusive Beschulung von Schüler\*innen mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung liefern (Ratz, 2016, S. 169). Der Autor zeigt, dass es in den deutschsprachigen Ländern nur sehr vereinzelt Forschung zu dieser Thematik zu geben scheint. Die wenigen Untersuchungen würden sich – vor diesem Hintergrund wenig

überraschend – aufgrund unterschiedlicher Definitionen der Personengruppe, unterschiedlicher Settings und variierender Designs erheblich voneinander unterscheiden. Wegen dieser Unterschiedlichkeiten der Studien würde ein einheitliches Ergebnis nicht sichtbar werden.

Dell’Anna et al. (2020) zeigen in ihrer Literaturanalyse, dass sieben der insgesamt 18 in die Auswertung eingeschlossenen Forschungen spezielle und integrative Bildungseinrichtungen verglichen. Schulische Integration scheint gemäß diesen sieben Untersuchungen bessere akademische Ergebnisse (in den Bereichen Lesen und Schreiben), höhere Werte bei einigen Anpassungsfähigkeiten (beispielsweise Sozialverhalten, persönliche und soziale Verantwortung) und eine geringere Häufigkeit von herausfordernden Verhaltensweisen (beispielsweise Selbststimulation, Selbstverletzung) zu erzielen. Die Autor\*innen verweisen im Bereich Mathematik auf nur eine Schweizer Untersuchung von Sermier Dessemontet et al. (2011) beziehungsweise auf die Folgestudie von denselben Autor\*innen (Sermier Dessemontet et al., 2012). In beiden Untersuchungen wurden Kinder mit geistiger Behinderung in Einzelintegrationssettings mit Kindern in Förderschulen verglichen. In der ursprünglichen Untersuchung von Sermier Dessemontet et al. (2011) waren 134 achtjährige Kinder in der Stichprobe inbegriffen. Gebildet wurden „gematchte“ Kinderpaare, d.h. jeweils zwei Kinder, die sich in den Bereichen Alter, Geschlecht, sozioökonomischer Status, zusätzliche Behinderungen, IQ, sprachliche und mathematische Fähigkeiten und adaptive Fähigkeiten ähnelten. In der Schweizer Folgestudie von Sermier Dessemontet et al. (2012) wurde das Matching nun noch präziser durchgeführt, sodass sich die 34 in die Berechnung einbezogenen Kinderpaare in den oben genannten Bereichen laut den Autor\*innen glichen. Dafür wurden die Bereiche sowohl durch die Lehrkraft als auch durch die Erziehungsberechtigten eingeschätzt. Es zeigten sich keine Unterschiede bei den Fortschritten in den Leistungen in Mathematik, hingegen aber einen signifikanten Unterschied in den sprachlichen Leistungen (*literacy*). Im sprachlichen Bereich zeigten die Kinder in inklusiven Settings deutliche Fortschritte gegenüber den Kindern in Förderschulen. Die Ergebnisse sind stimmig mit den Ergebnissen der ursprünglichen Untersuchung von denselben Autor\*innen (Sermier Dessemontet et al., 2011).

Dell’Anna et al. (2020) schlussfolgern in ihrer Literaturanalyse, dass Platzierung (Abschnitt 4.1.1) allein nicht entscheidend für die Qualität von Unterricht ist:

Regarding activity participation, they were partially marginalized within the classes and sometimes physically excluded from the class context. With reference to social participation, students in some cases experienced low levels of social acceptance from peers,

especially those with non-visible disabilities, and endured social rejection and isolation, especially if they had socio-behavioural problems and severe disabilities. (S. 13)

*Zusammenfassend:* In diesem Kapitel 4 wurde aufgezeigt, dass es weiterer Forschung und Entwicklung zur Klärung des Inklusionsbegriffes bedarf (Abschnitt 4.1). Jedes Kind hat ein Recht auf eine qualitativ hochwertige Schulbildung, wie internationale Vereinbarungen, die in Abschnitt 4.1.1 dargestellt werden, fordern.

Vor dem geschichtlichen Hintergrund der Entwicklung des (Sonder-)Schulwesens in Österreich (Abschnitt 4.1.2) ist es wenig erstaunlich, dass es in der Schulentwicklung ambivalente Entwicklungen gegeben hat. Die in Abschnitt 4.1.3 beschriebenen empirischen Untersuchungen der vergangenen Jahre zeigen national wie international uneinheitliche Ergebnisse in den Schulleistungen und der sozialen Leistungsentwicklung der Kinder in integrativer und separierender Beschulung.

Mit Abschluss des inhaltlichen Themenbereiches der vorliegenden Arbeit drängen sich für die Autorin dieser Arbeit die Fragen auf: Benötigt ein Recht auf Inklusion (UN-BRK) überhaupt einen empirischen Nachweis? Wie können Bedingungen in Unterricht und Förderung und hier gerade auch im Fach Mathematik (weiter-)entwickelt werden, so dass erwünschte Auswirkungen hervortreten können?

## II Methodische Anknüpfungspunkte

### 5 Überblick über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt

Ausgehend von der Einordnung in den in den Kapiteln 2 bis 4 ausführlich dargestellten inhaltlichen Stand der Forschung, leitet dieses Kapitel die Zielsetzung der vorliegenden Dissertationsarbeit ab (Abschnitt 5.1) und konkretisiert sie in den übergeordneten Forschungsfragen (Abschnitt 5.2). Abschnitt 5.3 bringt die einzelnen methodischen Schritte, mit der in Abschnitt 5.3.1 dargestellten Designforschung, der in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen qualitativen multiplen Fallstudie, den in Abschnitt 5.3.3 formulierten Prinzipien qualitativer Forschung und mit der in Abschnitt 5.3.4 beschriebenen konstruktivistischen und der interaktionistischen Sicht auf das Lernen. Dieses Kapitel 5 schließt mit der Abbildung über den gesamten Forschungs- und Entwicklungsprozess.

#### 5.1 Zielsetzung

Wie im mehrdimensionalen Bildungsansatz von Inklusion in Abschnitt 4.1 gefordert und beispielsweise von Florian (2008) formuliert, soll der Fokus inklusiven Unterrichts und inklusiver Bildung auf die Qualität und die Relevanz der Lehr- Lernsituation gelegt werden.

Diesem Anspruch kommt das vorliegende Entwicklungsforschungsprojekt nach und verfolgt inhaltlich das übergeordnete Ziel, binnendifferenzierende Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht im Klassenzimmer zu entwickeln, zu erproben und weiterzuentwickeln.

Vor diesem Hintergrund kann die vorliegende Arbeit in der Dimensionsdarstellung von Inklusion (Haug, 2020) in mehreren Feldern eingeordnet werden. Abschnitt 4.1 bringt eine detaillierte Beschreibung dieses Modells. In diesem Zusammenhang leistet die Arbeit vor allem einen Beitrag zur Verbesserung des arithmetischen Anfangsunterrichts der Primarstufe, der im Sinne des Modells von Haug mit einem *praktischen Nutzen* für die Institution Schule einhergeht und in konkreten Aktivitäten für den frühen Arithmetikunterricht für Lehrkräfte und Schüler\*innen Form findet. Auch die Bereiche der *Gemeinschaft* und der *Partizipation* auf schulischer Ebene und der Ebene der Erfahrungen von Lehrkräften und Schüler\*innen werden in diesem Entwicklungs- und Forschungsprojekt avisiert.

Als Kernstück dieser Arbeit wurden im Verlauf dieser Arbeit Lernumgebungen entwickelt (Kapitel 6), die sich an den grundlegenden Überlegungen der TIGER Konzeption

(Teile im Ganzen erkennen und damit rechnen, Gaidoschik, 2019a, 2022) orientieren (Abschnitt 6.1) und im frühen Arithmetikunterricht in Grundschulen eingesetzt werden können.

Im Anschluss an die Beantwortung der vier übergeordneten Forschungsfragen (F1 bis F 4) wird rückblickend in Kapitel 10 dargestellt, ob und wie die in Abschnitt 5.3.3 von van den Akker et al. (2006) formulierten Kriterien von Entwicklungsforschung in dieser Dissertationsarbeit ausgearbeitet wurden.

Die Zielsetzungen der beiden Zyklen der Durchführungen der Lernumgebungen im Klassenzimmer werden nun folgend entlang der Forschungsfragen herausgearbeitet.

## **5.2 Forschungsfragen**

Aus den Überlegungen der vorangegangenen Kapitel werden folgende übergeordnete Forschungsfragen formuliert:

Fragestellung (F1): **Wie können Lernumgebung mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzen-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt werden?**

Die erste Fragestellung steht im Zentrum der ersten Erprobung der Lernumgebungen im Klassenzimmer und wird in Kapitel 7 ausführlich dargestellt. Dazu werden im Verlauf dieser Arbeit Lernumgebungen entwickelt (Kapitel 6), erprobt und weiterentwickelt (Kapitel 6 bis 8), die den in der ersten Forschungsfrage ausgedrückten Anspruch, Lernumgebungen mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzen-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht „gut“ umzusetzen versprechen. In Interviews mit Lehrkräften und in Erprobungen im frühen Arithmetikunterricht wird erforscht, ob und wie das tatsächlich gelingt. Um diese „Wie“-Frage zu beantworten, werden im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage F4 Gestaltungsprinzipien reflexiv abgeleitet. Basierend auf der in Abschnitt 2.2 vorgenommenen Bestimmung, welche inhaltlichen Überlegungen im frühen Arithmetikunterricht relevant sind, ergibt sich als zweite Forschungsfrage:

Fragestellung (F 2): **Welche stofflichen Hürden können bei Schüler\*innen bei der Erprobung der arithmetischen Lernumgebungen auf Basis des *Teile-Ganzen-Denkens* festgemacht werden, die im Klassenzimmer als Balance zwischen dem**



## **Gemeinsamen Lernen, dem Lernen in der Kleingruppe und dem Individuum eingesetzt werden?**

Die zweite Fragestellung wird im Zuge der zweiten Durchführung der Lernumgebungen im Unterricht (Kapitel 9) beantwortet. Einerseits ist die Frage im Mittelpunkt, welche fachlichen Hürden sich bei der Umsetzung der entwickelten Lernumgebungen im arithmetischen Anfangsunterricht zeigen. In diesem Zusammenhang ist das Ziel *qualitative* Aussagen über die Denkwege der Schüler\*innen (und nicht quantitative über Fehlerhäufigkeit oder Lösungsgeschwindigkeit) zu gewinnen.

Andererseits wird bei der zweiten Erprobung im Unterricht (Kapitel 9) neben den Lernprozessen der Schüler\*innen als weitere Analyseebene die *fachliche* Unterstützung durch die Lehrkräfte untersucht und in der dritten Forschungsfrage konkretisiert:

Fragestellung (F3): **Wie werden die fachlichen Lernprozesse der Schüler\*innen im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des *Teile-Ganzes-Denkens* von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Basierend auf diesen Auswertungsergebnissen der zweiten Erprobung der Lernumgebungen im Unterricht werden Kategorien definiert, die sich als durchgängige Kategorien beim fachlichen Lernen der Schüler\*innen und/oder durch die fachliche Lernbegleitung der Lehrkraft, beziehungsweise der Lehrkräfte – in unterschiedlichen Unterrichtssereignissen – gezeigt haben (Abschnitt 9.4). Ausgehend von diesen Ergebnissen und den Interviews mit den Lehrkräften werden die Lernumgebungen überarbeitet und weiter optimiert (Abschnitt 9.5). Als vierte Forschungsfrage ergibt sich:

Fragestellung (F4): **Wie können unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse durch die Erprobung die entwickelten Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des *Teile-Ganzes-Denkens* und unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse der Interviews weiterentwickelt werden?**

Aus den Untersuchungsergebnissen und unter Berücksichtigung der theoretischen Erkenntnisse werden ableitend *Gestaltungsprinzipien* für die Weiterentwicklung der 13 bindendifferenzierten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht generiert.

Resümierend wird in Kapitel 10 dieser Dissertationsarbeit rückblickend auf den durchlaufenen Entwicklungs- und Forschungsprozess reflektiert, wie die in der Literatur aufgelisteten Kriterien von Entwicklungsforschung in dieser Arbeit realisiert wurden:

Fragestellung (F5): **Wie werden die Kriterien von Entwicklungsforschung in dieser Dissertation realisiert?**

### **5.3 Methodologischer Rahmen**

Der nachfolgende Abschnitt dient der transparenten Darstellung und Begründung des Untersuchungsdesigns der vorliegenden Untersuchung. Allgemein lässt sich die vorliegende Arbeit der designbasierten Forschung zuordnen, welche in Abschnitt 5.3.1 dargestellt wird. Die Daten dieser Untersuchung werden mit qualitativen und interpretativen Methoden aufbereitet und ausgewertet. Im Speziellen wird, wie in Abschnitt 5.3.2 dargestellt, die qualitative multiple Fallstudie durchgeführt.

Ganz generell verzichtet das qualitative Forschungsparadigma in der Regel darauf, das Subjekt und seine Situation mit standardisierten Methoden, die vor allem in den Naturwissenschaften gelten, zu erforschen (Lamnek & Krell, 2016). Als Gegenbewegung zu klassischen quantitativen Verfahren werde stattdessen die Person und ihre subjektiv konstruierte Welt in ihrer Vielschichtigkeit untersucht. Die Zerteilung des Subjektes in einzelne Bereiche des Verhaltens, wie sie häufig in experimentell-quantitativen Verfahren praktiziert werde, sei wirklichkeitsfremd und folglich für praktische Zwecke kritisch zu betrachten (Flick et al., 2015). Im Mittelpunkt qualitativer Verfahren stehe die „Sicht des Subjekts“ (Bergold & Flick, 1987, S. 247), dessen Bedeutung des Sinns, die sich aus den Erfahrungen, Ereignissen und Interaktion ergeben. Ein qualitatives Vorgehen könne nach Mayring (2015) unter anderem bei Pilotstudien, Einzelfallstudien, Prozessanalysen und zur Vertiefung bisheriger Erkenntnisse eingesetzt werden.

Aus diesem Anspruch heraus ergeben sich die in Abschnitt 5.3.3 formulierten zentralen Prinzipien qualitativer Verfahren.

### 5.3.1 Designbasierter Forschungsansatz

Im Verlauf der Jahre wurden innerhalb der Mathematikdidaktik international verschiedene Versuche unternommen, unterschiedliche Konzeptionen zu überlegen und zu etablieren, die Forschung und Entwicklung miteinander verbinden. Vor diesem Hintergrund beschreibt Link (2011) in seiner Dissertationsarbeit, dass sich im Verlauf der Jahrzehnte drei wesentliche Grundorientierungen als angewandte Wissenschaften bildeten und nennt in diesem Zusammenhang i) Mathematikdidaktik als *Design Science* mit dem Hauptvertreter Erich Wittmann; ii) *Developmental Research* nach Hans Freudenthal und iii) *Engineering Research* nach dem britischen Ansatz des Shell Centre Nottingham mit Hugh Burkhardt. Diese Forschungsansätze der Lehr-Lern-Wissenschaften haben – wie von Link (2011) und anderen dargestellt – wesentliche Ansichten über Aufgaben und Zielsetzungen gemein und sehen ihre Aufgabe darin, „aktiv zu einer Weiterentwicklung der Praxis des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht beizutragen“ (S. 105). In diesen drei Richtungen, die eben auch Überlappungen und gemeinsame Zielsetzungen aufzeigen, wechselt der (Forschungs-)Schwerpunkt nach Link (2011) von i) Fachorientierung über ii) Lernprozessorientierung zu iii) Lehrkraftorientierung.

Nun gilt es in Abschnitt 5.3.1 dieser Arbeit nicht alle drei Grundorientierungen nachzuzeichnen (eine ausführliche Beschreibung dieser drei Richtungen siehe etwa bei Link, 2011), vielmehr wird *Design Research in Education* als eigenständiges und übergeordnetes Konzept von Forschung und Entwicklung der Lehr-Lern-Wissenschaften in dessen Ausführlichkeit zu beschreiben.

Innerhalb dieser Lehr-Lern-Wissenschaft listet die internationale Literatur unterschiedliche Begrifflichkeiten wie *Design Research*, *Design-Based-Research*, *Design Experiments*, *Design Science Research* o. Ä. auf (Hevner et al., 2004; Hußmann et al., 2013; van den Akker et al., 2006; Prediger & Link, 2012; Schoenfeld, 2006). *Design Research* wird dabei als eine Art gemeinsames Etikett, als Oberbegriff und „common label“, wie Link mit Verweis auf van den Akker et al. (2006, p. 4; zitiert nach Link, 2011, S. 102) bezeichnet, verwendet. Unter diesem Oberbegriff wird infolgedessen eine Vielzahl an Forschungsansätzen zusammengeführt. In diesem Zusammenhang schreiben van den Akker et al. (2006) in ihrem Herausgeberwerk *Educational Design Research*, wonach keine eindeutige Definition von *Design Research* existiert: „Clearly, we are dealing with an emerging trend, characterized by a proliferation of terminology and a lack of consensus on definitions“ (p. 4).

Unabhängig von der jeweiligen Bezeichnung haben diese Lehr-Lern-Wissenschaften als Zielsetzung, die Kluft zwischen Forschung und Praxis in der Bildungsforschung

zu reduzieren (Burkhardt & Schoenfeld, 2003; de Jong et al., 1999). In diesem Zusammenhang schreibt das Design-Based Research Collective (2003), dass es im Bildungsbereich einen Bedarf an „neuen“ Forschungsansätzen gäbe, die sich direkt auf die Probleme der Praxis beziehen sollten:

Educational research is often divorced from the problems and issues of everyday practice – a split that resulted in a credibility gap and creates a need for new research approaches that speak directly to problems of practice and that lead to development of ‘usable knowledge’. (p.5)

Infolgedessen seien diese Lehr-Lern-Wissenschaften mit ihren ähnlichen Grundzügen nach Hevner et al. (2004), Plomp (2013) und anderen gerade für die Bildungspraxis (und damit auch für die Bildungspolitik) insofern bedeutsam, da sie darauf abzielen, forschungsbasierte Lösungen für komplexe Probleme in der Bildungspraxis und/oder Theorien über Lehr- und Lernprozesse zu entwickeln oder zu validieren. Diese doppelte Zielsetzung zeige sich in der Entwicklung forschungsbasierter Lösungen für komplexe Probleme in der Bildungsforschung, wie auch in der Entwicklung wissenschaftlicher Theorien basierend auf komplexen Problemen (Bakker, 2018; Brahm & Jenert, 2014; Hiller, 2017; Hevner et al., 2004; Plomp, 2013). Diese forschungsbasierten Lösungen, bspw. die Entwicklung neuer Bildungsmaterialien in Form von Lernaktivitäten o. Ä. seien nach Bakker (2018) *ein wesentlicher* Bestandteil designbasierter Forschung.

Designbasierte Forschung habe nach Bakker (2018) auch eine beratende Funktion (oder ein Ziel), nämlich theoretische Erkenntnisse darüber zu vermitteln, wie bestimmte Lehr- und Lernmethoden gefördert werden könnten. In diesem Zusammenhang verweist er auf van den Akker et al.: „The type of theory developed can be of a predictive nature: Under conditions X using educational approach Y, students are likely to learn Z” (p. 9, van den Akker et al., 2006; zitiert nach Bakker 2018).

Die Autor\*innen dieser unterschiedlichen und doch verwandten Forschungsansätze definieren in ihren Beschreibungen designbasierte Forschung zwar unterschiedlich, aber sie sind sich in der Regel darüber einig, dass diese aus einer Reihe von *gemeinsamen* Merkmalen bestünden. Van den Akker et al. (2006, p. 6) beschreiben jene gemeinsamen Merkmale folgend: i) iterativ; in iterativen Zyklen umfasse die Forschung die Analyse, den Entwurf und die Entwicklung, die Bewertung und die Überarbeitung, ii) prozessorientiert; der Schwerpunkt liege auf dem Verständnis und der Verbesserung der Intervention, iii) nutzenorientiert; der Wert eines Designs werde unter anderem daran gemessen,

wie praktisch er für die Betroffenen in realen Kontexten ist, iv) theorieorientiert; die Konzeption basiere (zumindest teilweise) auf einem theoretischem Rahmen.

Mit Verweis auf einige Autor\*innen (van den Akker, 1999; Kelly, 2006; Nieveen, 1999), könne ein weiteres Merkmal hinzugefügt werden: v) Einbeziehung von Praktiker\*innen; die Forschung beinhaltet eine aktive Beteiligung oder Zusammenarbeit mit Praktiker\*innen in verschiedenen Phasen der Forschung; dieses Merkmal erhöhe die Chance, dass die Intervention tatsächlich relevant und praktisch für den Bildungskontext ist; und folglich steige auch die Wahrscheinlichkeit einer (erfolgreichen) Umsetzung.

Diese Aufzählung der Merkmale zur Beschreibung von Forschungs- und Entwicklungsprojekten ist nach Link (2011) „naturgemäß sehr grob“, da „sie das ganze Feld der Entwicklungsforschung umfassen soll“, dennoch „machen die darin genannten Merkmale aber immerhin eine erste Positionierung von Forschungsarbeiten zu dem noch unscharf umrissenen Konstrukt Entwicklungsforschung möglich“ (S. 102).

Die vorliegende Arbeit lehnt sich an den Dachbegriff *Design Research* an und nutzt insbesondere die Vorstellung der Verzahnung wissenschaftlicher Ideen in die Praxis und bettet Praxisrückmeldungen in wissenschaftliche Forschung ein, d.h. angestrebt wird eine zyklische Entwicklungsforschung. Vor diesem Hintergrund werden die beschriebenen Merkmale designbasierter Forschung wie folgt berücksichtigt: i) iterativ; die Lernumgebungen werden in mehreren Durchgängen erprobt (Kapitel 7 und Kapitel 9) und weiterentwickelt (Kapitel 8 und Abschnitt 9.5). ii) prozessorientiert; der Lernprozess der Schüler\*innen und die Handlungsmöglichkeiten der Lehrkräfte werden empirisch mit qualitativen Methoden erfasst (Abschnitt 7.2 und Abschnitt 9.2). iii) nutzenorientiert; die Interventionen zielen auf einen ableitbaren praktischen Nutzen für die Lehrkräfte im frühen Arithmetikunterricht – im Speziellen wird das Teile-Ganzes-Denken fokussiert – der ersten Schulwochen in der Grundschule ab (Abschnitt 5.1 und Abschnitt 6.2). iv) theorieorientiert; die Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens basieren auf aktuellen mathematikdidaktischen und inklusionspädagogischen Untersuchungen und Erkenntnissen (Kapitel 2, Kapitel 3 und Kapitel 4). v) Einbeziehung von Praktiker\*innen; mit der Kompetenz und der Erfahrung der Lehrkräfte und unter der Berücksichtigung der Merkmale für substanzielle Lernumgebungen im frühen Arithmetikunterricht werden die ausgearbeiteten Unterrichtsbausteine erprobt (Kapitel 7 und Kapitel 9) und weiterentwickelt (Kapitel 8 und Abschnitt 9.5).

### **Phasen designbasierter Forschungsansätze**

Von diesen obenstehend benannten Merkmalen nennt Bakker (2018) das Arbeiten mit Zyklen und Iterationen als die zentralen, die bei allen designbasierten Forschungsansätzen gemeinsam sein sollten. In diesem Zusammenhang verweist Bakker (2018, p. 59) auf Latour (2008), der treffend feststellte: „To design is always to redesign“.

Nach Bakker (2018) sei die Terminologie zur Beschreibung der verschiedenen Phasen innerhalb solcher Zyklen mitunter durchaus unterschiedlich; jedoch werden die folgenden Phasen bei den meisten Designforschungsprojekten gewählt: i) Phase 1: Vorbereitung und Design; ii) Phase 2: Durchführung; iii) Phase 3: Analyse und Weiterentwicklung. Diese Phasen werden im Folgenden aufgegriffen und in Bezug zur vorliegenden Dissertationsarbeit gesetzt.

#### **Phase 1: Vorbereitung und Design**

It is evident that the relevant present knowledge about a topic should be studied. [...]

Gravemeijer (1994) characterized the design researcher as a tinkerer or, in French, a *bricoleur*, who uses all the material that is at hand, including theoretical insights and practical experience with teaching and designing. (Bakker, 2018, p. 60)

Für die Entwicklung neuer Bildungsmaterialien, welche von Bakker (2018) als *ein wesentlicher* Bestandteil designbasierter Forschung formuliert wurde, soll jegliches relevante Wissen zu einer Thematik gesammelt werden. In dieser Arbeit wurde relevantes und aktuelles Wissen zur Thematik in den Kapiteln 1 bis 4 ausführlich dargestellt. Vor dem Hintergrund der Entwicklung neuer Bildungsmaterialien wurden im Verlauf dieser Arbeit binnendifferenzierende Lernumgebungen, sogenannte Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht (Abschnitt 6.1 und Abschnitt 6.2) entwickelt.

Neben diesem von Bakker (2018) mit Verweis auf Gravemeijer (1994) beschriebenen Anspruch, *jegliche* relevante und zur Verfügung stehende Wissensquelle zu einer Thematik zu nutzen, bezeichnet es Euler (2012) als notwendig, sowohl die Lerngruppe als auch deren spezifische Umgebungen und Rahmenbedingungen zu formulieren. Nur so könnten laut dem Autor Folgerungen auf andere, künftige Designforschungsprojekte abgeleitet werden.

Die Autorin der vorliegenden Arbeit versucht durch die möglichst transparente und offene Beschreibung des Forschungsprozesses (u.a. Beschreibung der Lerngruppe und

den spezifischen Rahmenbedingungen) mit den einzelnen Zyklen der ersten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer (Kapitel 7) und zweiten Durchführung der Lernumgebungen (Kapitel 9) und im Sinne der zentralen Prinzipien qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.3) vor allem die Nachvollziehbarkeit des gesamten Forschungsprozesses zu sichern. Vor diesem Hintergrund soll, so die Intention der Autorin eine Übertragbarkeit der Lernumgebungen, mögliche Gelingensbedingungen bei der Durchführung und Erkenntnisse und Gestaltungsprinzipien der Lernumgebungen auf andere Lerngruppen und (Anfangs-)Schulklassen sichergestellt werden.

In designbasierten Forschungsprojekten wird diese Lerngruppe häufig in Verbindung mit zielgerichteten Kooperationen gebracht und diese Lerngruppen stellen somit eine wesentliche Grundlage für diese Forschungsprojekte dar. Konkret bedeutet dies nach Euler (2014), dass in der Vorbereitungsphase der jeweiligen Kooperation ein *beidseitiges Bewusstsein* für die Relevanz des Projektes geschaffen werden muss. Dabei sei laut dem Autor die Formulierung eines gemeinsamen Zieles als sichtbarer praktischer Nutzen und dessen gemeinsame Verfolgung wesentlich.

In der vorliegenden Arbeit wird im Rahmen beider Durchführungen der Lernumgebungen im Klassenzimmer eine konstruktive Beziehungsarbeit und Gesprächsführung zwischen der Forscherin, den Kooperationspartner\*innen und den in der zweiten Durchführung involvierten studentischen Mitarbeiter\*innen gepflegt, um – wie in Abschnitt 5.3.3 dargelegt – den *natives point of view*, die Sichtweise des Gegenübers, zu verstehen und sich darin hineinversetzen zu können. Bei den als positiv unterstützenden Bereichen der zielgerichteten Kooperationen bezieht sich Gummels (2020) auf Euler (2014, S. 38) und beschreibt folgende Aspekte als lohnend:

- 1) „Offenlegung der verfolgten Ziele;
- 2) Aufbau einer Vertrauensbasis;
- 3) Akzeptanz von unterschiedlichen Werten und Handlungszielen;
- 4) Klärung von Zielidentitäten, -konflikten;
- 5) Annäherung an symmetrischen Gesprächsverlauf;
- 6) Berücksichtigung der institutionellen Rahmenbedingungen mit häufig heterogenen Interessen, wechselnden Zuständigkeiten und unterschiedlichen Graden von Innovationsbereitschaft;
- 7) Kultivierung von Zweifeln und konstruktiver Kritik“ (S. 158).

Auch die Autorin der vorliegenden Arbeit sieht diese Bereiche als wesentlich, weshalb diese in weiterer Folge die Grundlage für die Kooperationsarbeit mit den einzelnen

Klassen bildeten (Kapitel 7 und Kapitel 9). Im Zuge dieser zielgerichteten Kooperationen wurde vor den Erprobungen eine detaillierte Analyse des Kontextes durchgeführt. Dazu wurden Besonderheiten bezüglich institutioneller Rahmenbedingungen der einzelnen Kooperationsklassen gesammelt. Als Quelle für die Recherche dienten die Leitideen der Schulen und die leitfadengestützten Interviews vor und nach der ersten Durchführung der Unterrichtsbausteine mit den Lehrkräften (Kapitel 7) und die informellen Gespräche mit den einzelnen Lehrkräften der zweiten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer (Kapitel 9).

Bei diesen zielgerichteten Kooperationen war es der Autorin wichtig, Inklusion im schulischen Kontext explizit nicht als eine bloße Beschulung von Kindern mit und ohne Sonderpädagogischem Förderbedarf in inklusiven Klassenzimmern zu verstehen. Wie in Abschnitt 4.1 und Abschnitt 5.1 dieser Arbeit beschrieben, stützt sich das vorliegende Entwicklungs- und Forschungsprojekt auf den *mehrdimensionalen Ansatz* von Inklusion. Aufgrund dieser Grundüberzeugung der Forscherin wurden deswegen nicht nur Klassen mit einem Kind mit einem diagnostizierten Sonderpädagogischen Förderbedarf in die Auswahl der Kooperationsklassen aufgenommen. Die Beschreibung der Rahmenbedingungen der einzelnen Klassen sind in den jeweiligen Durchführungen der Lernumgebungen beschrieben.

### ***Phase 2: Erprobungen der Lernumgebungen***

There are different levels at which you can intervene. [...] During a teaching experiment, data collection typically includes student work, tests before and after instruction, field notes, audio recordings of whole-class discussions, and video recordings of every lesson and of the final interviews with students and teachers. I further find mini-interviews with students, lasting from about twenty seconds to four minutes, very useful provided that they are carried out systematically (Bakker, 2004; cited in Bakker, 2018, p. 61)

Generell wird von der Forscherin, wie in Abschnitt 5.3.3 dargestellt, ein offener Zugang angewandt, welcher durch Spezifizierung konkreter Annahmen im Vorfeld begrenzt werden würde: Alle Unterrichtsaktivitäten, wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, wurden im Vorfeld von zwei Lehrkräften mit langjährigen Unterrichtserfahrungen auf deren „innere Stimmigkeit“ eingeschätzt und teilweise in Unterricht mit Erstklässler\*innen erprobt.



Nach dieser Pilotierung erfolgte die in dieser Arbeit beschriebenen Erprobung im Unterricht. Im Rahmen eines designbasierten Forschungsprojektes hat die erste Erprobung der Lernumgebungen im Unterricht (Kapitel 7) das übergeordnete Ziel, die praktische Umsetzbarkeit und die innere Stimmigkeit der Lernumgebungen einzuschätzen. Vor und nach der ersten Erprobung wurde ein Interview mit den Lehrkräften der Kooperationsklassen geführt. Die zweite Erprobung der Lernumgebungen im Unterricht (Kapitel 9) betrachtet sowohl die fachlichen Hürden der Lernenden als auch die Handlungsmöglichkeiten der Lehrkräfte (Abschnitt 9.4). Dem vorausgehend wurden vor Beginn der Datenerhebung der beiden Erprobungen der Unterrichtsbausteine im Klassenzimmer die „Weißblatt-Erhebung“ als eine offene und geeignete Form von Standortbestimmungen durchgeführt (Abschnitt 6.2).

Alle Unterrichtseinheiten der ersten und zweiten Erprobung der Lernumgebungen wurden videographiert. Gerade bei der Erfassung der Lehr-Lern-Prozesse und der Unterrichtsqualität ist nach Mayring et al. (2005) der Einsatz von Videomethoden sehr hilfreich. Neben den Vorteilen von Videoaufnahmen von Unterricht betonen Mayring et al. (2005), dass vor allem die Kameraperspektive entscheidend ist, da nur ein Teil des Unterrichtsgeschehens aufgezeichnet werden kann.

Diese Überlegungen hinsichtlich videogestützter Unterrichtsbeobachtungen wurden in der vorliegenden Arbeit aufgegriffen und dienten als Grundlage für die Auswertung der zweiten Unterrichtseinheit, welche ausführlich in Abschnitt 9.3 und in Abschnitt 9.4 beschrieben werden. Bei der Datenanalyse im Rahmen der zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine werden, wie in obenstehendem Zitat von Bakker empfohlen, *mini-interviews*, die zwischen zwanzig Sekunden und vier Minuten dauern und/oder Unterrichtsgespräche in der Gesamtgruppe, die zeitlich länger als zwanzig Sekunden dauern herangezogen (Kapitel 9).

### ***Phase 3: Analyse und Weiterentwicklung der Lernumgebungen***

A comparison of hypothetical learning trajectories and observed learning is useful in the redesign process, and affords answers to research questions that ask how particular learning goals could be reached. However, in my experience additional analyses are often needed to gain more theoretical insights into learning process. (Bakker, 2018, p. 62)

Auch andere Autor\*innen wie Bikner-Ahsbahs und Prediger (2014) argumentieren in eine ähnliche Richtung wie Bakker (2018) im oben formulierten Zitat, wonach es hilfreich sein könnte, neben der Analyse und dem Vergleich von hypothetischen Lernverläufen und den beobachteten Lernprozessen, auch zusätzliche Analysen vorzunehmen, um mehr und tiefgreifendere Erkenntnisse über den Lernprozess von Lernenden zu gewinnen. So bestehe nach Bikner-Ahsbahs und Prediger (2014) eine Herausforderung in der (mathematikdidaktischen) Bildungsforschung darin, unterschiedliche Analysen und Methoden abzustimmen, um eine umfassendere Darstellung des Lehrens und Lernens zu ermöglichen. Vor diesem Hintergrund versuchen aktuelle Arbeiten in der mathematikdidaktischen Bildungsforschung, verschiedene theoretische Perspektiven und Ansätze zu integrieren (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014; Cobb, 2007; Hershkowitz, et al., 2014).

Für eine umfassende Darstellung des Lehrens und Lernens im Rahmen der design-basierten Entwicklungsforschung wird die qualitative *multiple case study* (Baxter & Jack, 2008) mittels leitfadengestützter Interviews im Verlauf der ersten Durchführung der Lernumgebungen und mittels strukturierter Unterrichtsbeobachtungen der Lernenden und der Lehrkräfte im Verlauf der zweiten Durchführung der Lernumgebungen durchgeführt. Die Methode wird nun folgend herausgearbeitet.

### **5.3.2 Qualitative *multiple case study***

Die Methode der qualitativen *multiplen case study*, der qualitativen multiplen Fallstudie (Baxter & Jack, 2008) bietet Forschern Instrumente zur Untersuchung komplexer Phänomene in den jeweiligen Kontexten. Vorweg: Die Darstellung über eine Fallstudie kann für jeden Forscher eine schwierige Aufgabe sein, da es sich um einen komplexen Ansatz handelt. Es ist schwierig, die Ergebnisse kurz und bündig darzustellen, und doch liegt es in der Verantwortung des Forschers, ein komplexes Phänomen in ein Format zu bringen, das für den jeweiligen Adressaten verständlich ist (Baxter & Jack, 2008). Die Autor\*innen berichten davon, dass das Ziel einer solchen Darstellung ist, die Untersuchung so umfassend zu beschreiben, dass der Adressat fühlt und denkt, aktiv an der Forschung teilgenommen zu haben, und auch selbst feststellen kann, ob die Ergebnisse der Untersuchung auf seine eigene Situation übertragbar sind oder nicht. In diesem Zusammenhang sei es wichtig, *the context within which the phenomenon is occurring* (Baxter & Jack, 2008, p. 555), also den Kontext, in dem das Phänomen auftritt, ausführlich zu beschreiben, als auch *the phenomenon itself* (Baxter & Jack, 2008, p. 555), also das Phänomen

selbst. Dazu sollen, so die Autor\*innen, Daten aus einer Fülle an Quellen zusammengetragen sowie zusammengeführt werden, um den Einzelfall facettenreich zu beleuchten. Dadurch wird gewährleistet, dass das Thema nicht durch eine Linse, sondern durch *eine Vielzahl von Linsen* erforscht wird, was es ermöglicht, mehrere Facetten des Phänomens aufzudecken und zu verstehen (Baxter & Jack, 2008).

Baxter und Jack (2008) verweisen in ihrem Artikel auf Yin (2003; zitiert nach Baxter & Jack, 2008), wonach ein Fallstudiendesign in Betracht gezogen werden, wenn: (i) der Schwerpunkt der Studie auf der Beantwortung von „Wie“- und „Warum“-Fragen liegt; (ii) man das Verhalten der an der Studie Beteiligten nicht manipulieren kann; (iii) man kontextuelle Bedingungen erfassen möchte, weil man glaubt, dass sie für das untersuchte Phänomen relevant sind; oder (iv) die Grenzen zwischen dem Phänomen und dem Kontext nicht eindeutig sind.

Baxter und Jack (2008) weisen auch darauf hin, dass es nicht *die eine* richtige Art gibt, um über eine Fallstudie zu berichten: „However, some suggested ways are by telling the reader a story, by providing a chronological report, or by addressing each proposition. Addressing the propositions ensures that the report remains focused and deals with the research question“ (p. 555). Diesen Empfehlungen entsprechend versucht die Autorin der vorliegenden Arbeit, beide Erprobungen der Lernumgebungen im Klassenzimmer ausführlich, facettenreich, chronologisch (Kapitel 7 und Kapitel 8), und unter der Berücksichtigung der Prinzipien qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.3.) darzustellen, sodass der gesamte Entwicklungs- und Forschungsprozess nachvollziehbar ist. Trotz der Ausführlichkeit ist die Beschreibung auf die jeweiligen Forschungsfragen fokussiert.

### **5.3.3 Prinzipien qualitativer Forschung**

Diese folgenden zentralen Grundsätze sind für die qualitative Forschung bindend: das Prinzip der Offenheit, das Kommunikationsprinzip, das Prinzip der Prozessualität, das Reflexivitätsprinzip, das Prinzip der Explikation wie das Prinzip der Flexibilität (Flick et al., 2015; Lamnek & Krell, 2016; Lüdders, 2017).

#### ***Das Prinzip der Offenheit***

Offenheit bedeutet in dieser Präzisierung, nicht vorweg das untersuchte Feld mit fixen Hypothesen zu überziehen, es bedeutet, offen für das möglicherweise Neue zu sein und zu bleiben. Offenheit in der qualitativen Forschung heißt jedoch nicht, dass Forscher\*innen im Hinblick auf den untersuchten Gegenstand, die Methodologie und die Methode,

bewusst ‚dumm‘ bleiben, sich vorab also nicht informieren. (Reichertz, 2009, Abs. 27; dazu auch Hitzler, 1991)

Diese von Reichertz (2009) in obenstehendem Zitat beschriebene Grundhaltung gilt gegenüber (i) den zu untersuchenden Personen, (ii) der zu untersuchenden Situation und (iii) den anzuwendenden Methoden (Lamnek & Krell, 2016, dazu auch Lüdders, 2017). Bezüglich der Offenheit gegenüber den anzuwendenden Methoden betonen auch Glaser und Strauss (1967) sowie Hoffmann-Riem (1980), dass die qualitative Forschung auf eine *Hypothesenbildung im Vorfeld* verzichte, folglich weniger hypothesenprüfend, als vielmehr hypothesengenerierend sei, mit Vorannahmen, die offen gelegt und reflektiert werden. Dies heißt allerdings nicht, dass in qualitativen Verfahren keine Vorannahmen bestünden, die dargestellt und reflektiert werden müssten (Dey, 1993; Hopf & Weingarten, 1984; Kleinig, 1995; Strauss & Corbin, 1996)

Die Parameter „Person“ und „Situation“ der zu untersuchenden Person werden im Rahmen der Datenerhebung dieser Arbeit durch die videobasierten Unterrichtsbeobachtungen wie auch durch die offenen Fragestellungen an die Lehrkräfte, die vor und nach der Erhebung stattgefunden haben (Abschnitt 7 und Abschnitt 9), definiert. Auch die Methoden der Datenanalyse der zweiten Durchführung der Lernumgebungen mit dem qualitativen Fokus auf das fachliche Lernen der Schüler\*innen und den Handlungsmöglichkeiten der Lehrkraft beziehungsweise der Lehrkräfte (Abschnitt 9.3) entsprechen dem Prinzip der Offenheit qualitativ-interpretativer Verfahren.

### ***Das Kommunikationsprinzip***

Bei qualitativen Verfahren sind zwischen Forschern und zu Erforschendem vor allem die Prozesse der Kommunikation und der Interaktion relevant (Heckmann, 1992; Lamnek & Krell, 2016). Diese Bereiche sind „keine Störgröße, sondern ein konstitutiver Bestandteil des Forschungsprozesses“ (Küchler, 1983; zitiert nach Lamnek, 2005, S. 22) und „Voraussetzung des Research Act“ (Denzin, 1978; zitiert nach Lamnek, 2005, S. 22). Der Forschende bemüht sich hierbei um das Verstehen des *native's point of view* (Malinowski, 1922, S. 25), also um das Verstehen der Sichtweise des Gegenübers. Das gegenseitige Aushandeln der Wirklichkeitsdefinition zwischen Forschendem und zu Erforschendem rückt in den Mittelpunkt (Lamnek & Krell, 2016). In diesem Zusammenhang akzeptiert der Forschende das Bestehen unterschiedlicher Weltansichten und Wirklichkeitskonzeptionen (Flick, 1992; Gross et al., 1989).

In der vorliegenden Arbeit wird im Rahmen der Interviews der ersten Durchführung der Lernumgebungen (Kapitel 7) und der zweiten Durchführung der Lernumgebungen (Kapitel 9) mit den Lehrkräften auf kommunikative und dialogische Elemente zurückgegriffen, um so die Sichtweisen der zu erforschenden Personen (Schüler\*innen und Lehrkräfte) und deren Lebenswelt im Rahmen des Unterrichts erschließen zu können.

### ***Das Prinzip der Prozessualität***

Im Sinne dieses Prinzips werden Forschungsprozesse, Verhaltensweisen und Aussagen der Beforschten nicht als statisch, sondern als „prozesshafte Ausschnitte der Reproduktion und Konstruktion sozialer Realität“ (Lamnek & Krell, 2016, S. 35) definiert. Neben dem Akt des Forschens bezieht sich Prozessualität auch auf den Forschungsgegenstand und den Prozess der Wirklichkeitsbildung (Lamnek, 1995).

Um die Prozesshaftigkeit sozialer Phänomene in dieser Arbeit zu berücksichtigen, sieht sich die Forscherin weniger als externe Beobachterin, sondern versucht durch Involviert-Sein im Reproduktionsprozess auf Verhaltensweisen und Aussagen der beforchten Schüler\*innen und Lehrkräfte zu schließen. Dieses Prinzip wird im Rahmen der zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine auch durch die Unterstützung der vier studentischen Hilfskräfte, welche im Prozess der Forschung involviert waren, unterstützt. In diesem Zusammenhang wurde am Ende jeder Schulwoche (in der Regel freitags) die Umsetzung der Unterrichtsbausteine der jeweiligen Schulwoche gemeinsam reflektiert und dokumentiert (Abschnitt 9.2).

### ***Das Reflexivitätsprinzip***

In der qualitativen Forschung nimmt die Reflexivität im Umgang mit sprachlichen Äußerungen oder Handlungen, im Analyseprozess der Sinnzuweisungen aber auch als Reaktion auf Unvorhergesehenes eine wichtige Rolle ein (Berg & Fuchs, 1993; Lamnek & Krell, 2016). In diesem Zusammenhang sind hermeneutische Verfahren hilfreich (Lamnek, 1995).

Mit Berücksichtigung des Reflexivitätsprinzips versucht die Forscherin im Verlauf dieser Arbeit und am Ende dieser Arbeit durch die Rückschau auf den durchlaufenen Forschungs- und Entwicklungsprozess den offenen und prozesshaften Akt des Forschens zu reflektieren und reflexiv zu beschreiben. Mögliche Befangenheiten oder Wahrnehmungsblockaden der Forscherin sollen so bemerkt und unerwartete und neu auftretende Bereiche sollen entsprechend integriert werden.

### ***Das Prinzip der Explikation***

Durch eine möglichst transparente Darstellung der Einzelschritte im Untersuchungsprozess soll die Nachvollziehbarkeit des Forschungsprozesses und in weiterer Folge die damit einhergehende Akzeptanz der Forschung erhöht werden (Lamnek & Krell, 2016). Dieses Prinzip sei „eher als Forderung, nicht als real praktiziertes Vorgehen im Rahmen qualitativer Sozialforschung zu verstehen. [...] Da dies auch für den Forscher gelten muss, ist die Forderung der Explikation kaum vollständig zu erfüllen“ (Lamnek & Krell, 2016, S. 36). Lüders und Reicherts (1986) mahnen zu Recht, dass eine Offenlegung jeglicher Schritte des Forschungsprozesses vom Forschenden nur bedingt erfüllt werden könnte. Dennoch habe dieses Prinzip eine wesentliche Bedeutung innerhalb der qualitativen Forschung.

Die Forscherin versucht in der vorliegenden Arbeit den Forschungsprozess mit den einzelnen Schritten von der Datenerhebung bis zur -analyse offen und so weit als möglich transparent darzustellen. Durch diese klare Darstellung der einzelnen Schritte wird ein Nachvollziehen des Forschungsprozesses angestrebt. Die einzelnen Schritte der Datenerhebung der ersten Durchführung der Unterrichtsbausteine sind in Kapitel 7 ausführlich beschrieben, die zweite Durchführung der Unterrichtsbausteine in Kapitel 9.

### ***Das Prinzip der Flexibilität***

Im Rahmen empirischer qualitativer Forschung muss der gesamte Forschungsprozess flexibel sein. „Es wird eine Orientierung der Erhebungsinstrumente bzw. deren Auswahl und Anwendung an der Problemstellung und der sozialen Realität gefordert – und nicht umgekehrt“ (Lamnek & Krell, 2016, S. 37). Darüber hinaus führe es zu einer Aufforderung zu einer breiten Methodenvielfalt (etwa Hopf & Weingarten, 1984; Kleining, 1995; Lamnek, 1995).

Die Forscherin versucht sowohl die Fragestellung in Hinblick auf den Zusammenhang der Untersuchungsgegenstände und der Erhebungsinstrumente flexibel anzupassen wie auch veränderte Bedingungen anzunehmen. So musste in einer Kooperationsklasse aufgrund der COVID-19-Situation und den damit einhergehenden nationalen Vorgaben die Datenerhebung im September 2020 nach einer Woche abgebrochen werden. Die Forscherin und die eingebundenen studentischen Hilfskräfte ließen sich flexibel, offen und zeitnah auf eine neue Kooperationsklasse und deren Rahmenbedingungen ein und begannen erneut den Prozess der Datenerhebung (Abschnitt 9.3).

#### 5.3.4 Konstruktivistische und interaktionistische Perspektive auf das Lernen

Mathematics cannot simply be written on the child's blank slate of mind. Mathematics is not liquid to be poured into an empty vessel: for one thing, the vessel is not empty, and for another, the liquid in it changes the composition of what is poured in. Instead, the teacher needs to foster understanding – to help the child make meaningful connections between existing informal knowledge and the socially structured system of formal mathematics. (Ginsburg & Baron in Jensen, 1993, p. 4)

##### ***Zur Sichtweise des Konstruktivismus***

Die *konstruktivistische Sichtweise* (vertreten beispielsweise von Duit, Cobb, Steffe, Piaget, von Glasersfeld) definiert Lernen im Sinne eines aktiven Konstruktionsprozesses, in dem der einzelne Lernende *seine* subjektive Realität erzeugt: „Wissenserwerb wird als aktive Konstruktion auf der Basis vorhandener Vorstellungen gesehen“ (Duit, 1995, S. 905). Der Prozess des Lernens wird dabei nicht als passives Rezipieren beschrieben, sondern vielmehr als ein aktiver und selbstgesteuerter Prozess. Eine *direkte* Wissensübertragung vom Lehrenden zum Lernenden sei demnach ausgeschlossen. Neues Wissen werde an bereits vorhandenen und individuell unterschiedlichen Konstrukten angeschlossen beziehungsweise bereits bestehende Wissenskonstrukte werden erweitert (von Glasersfeld, 1997). Die Lernstände der einzelnen Lernenden, welche unterschiedlich sind, gelten als Ausgangspunkt für weitere Prozesse des Lernens:

The assumption was that students connect new ideas to existing ideas, and that the existing knowledge thus serves as both a filter and a catalyst to the acquisition of new ideas. To understand what students will learn, one must first determine what they currently believe. (Confrey, 1990. S. 21)

In der konstruktivistisch orientierten *Mathematikdidaktik* wird auch hier der Fokus auf das aktive Lernen und nicht mehr auf das passive Lehren gelenkt (siehe dazu auch Abschnitt 3.2.1 und Abschnitt 3.2.2). Lernende werden „nicht mehr als Objekte der Belehrung, sondern als Subjekte ihres Lernens aufgefasst“ (Müller et al., 1997, S. 44). In weiterer Folge ist [...] „es nicht die Aufgabe der Lehrenden, den Stoff an die Kinder, sondern zwischen dem Stoff und den Kindern zu vermitteln“ (Selter, 1997, S.4). Steffe (1994) beschreibt Lernen in diesem Zusammenhang wie folgt:



Helping the child to learn these (formal mathematical) procedures means recognizing the methods that children actually use, and helping them both to understand the relationship between what they are doing and what the teacher is presenting, and to appreciate the value of making this connection, by helping them to recognize the limitations of their own approaches. The expression 'helping the children to recognize' is in obvious contrast with the notion that children can simply be *told*. They can, indeed, be told to do something, but they cannot be told to *understand*. (p. 4)

Den zentralen Zusammenhang von Kognition und Mathematiklernen arbeitet auch Sjuts (2003) in seiner Arbeit heraus und unterstreicht die Bedeutung von Metakognition per *didaktisch-sozialem Vertrag*: „Metakognition basiert auf der Fähigkeit des Menschen, über eigenes Wissen, über eigenes Handeln und Denken und somit auch über eigenes Lernen reflektieren zu können“ (S. 18). Die Förderung von Metakognition im unterrichtlichen Kontext erfordert demnach einen didaktisch-sozialen Vertrag („*cotract didactique*“ aus der französischen Mathematikdidaktik stammend), und beschäftigt sich mit „impliziten Regeln, die in einer Klasse die Beziehungen zwischen dem Lehrer und den Schüler bestimmen“ (Laborde, 1991, S. 39; zitiert nach Sjuts, 2003, S. 21). Eine Förderung von metakognitivem Denken kann allerdings nur unter bestimmten Bedingungen von Unterricht gedeihen: „Er zeichnet sich aus durch eine stillschweigende Übereinkunft zwischen Lehrperson und Lerngruppe, sich mit den Unterrichtsinhalten tiefgehend und gründlich auseinander zu setzen, durch Diskursivität hinsichtlich Verstehen und Verständigung sowie durch geeignete Aufgabenstellungen zum Denken und Wissen“ (Sjuts, 2003, S. 21). Die Lehrkräfte haben in diesem Zusammenhang die Funktion des „Anleitens, Beratens, Unterstützens und Sicherstellens bei der angestrebten Kultivierung von Metakognition“ (Sjuts, 2003, S. 20). Dementsprechend rückt auch hier die Bedeutung eines aktiven Lernprozesses im Sinne der konstruktivistischen Sichtweise des Lernens in den Mittelpunkt. Der Mathematikunterricht soll demnach bei allen Kindern berücksichtigen, dass der Stoff „zu einem aktiven Wissen der Schülerinnen und Schüler geworden ist“ (Sjuts, 2003, S. 23). Im Sinne eines „verständnisintensiven Lernens“ (Fauser, 2002, S. 60.; zitiert nach Sjuts, 2003, S. 23) zeichnet sich ein dementsprechender Unterricht dadurch aus, dass die unterschiedlichen mentalen Vorstellungen der Lernenden ernst genommen, wertgeschätzt und sich intensiv im Klassenverband damit auseinandergesetzt wird.



Auch ist ein solcher Unterricht gezeichnet „von Diskursivität, vom Austausch der individuellen Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler, vom Abgleich ihrer Argumente, von Anspruch und Ausmaß ihrer gedanklichen Klärungen“ (Sjuts, 2003, S. 23).

### ***Zur Sichtweise des Interaktionismus***

Ein Teilgebiet des Konstruktivismus, welches sich im Besonderen dem soziokulturellen Feld widmet, wird als soziokultureller Konstruktivismus (vertreten beispielsweise durch Bauersfeld, Krummheuer, Reich, Voigt, Vygotskij) bezeichnet. Aus soziokonstruktivistischer Sichtweise stehen die Prozesse des Lernens im Mittelpunkt, die die Lernenden im *sozialen* Kontext als soziale Gruppe bewusst reflektieren (Reich, 2002). Dabei nehme das Lernen im Kooperativ, als *Interaktion* und Teilhabe in einem sozialen Gefüge, eine wichtige Rolle ein: „Subjektive Theorien werden durch die gemeinsame Aushandlung zu kollektiven und anerkannten Theorien“ (Hußmann, 2001, S. 6). Besonders die Interaktion zwischen Lehrkraft und den Lernenden (Abschnitt 3.3.1) und Medien jeglicher Form (bspw. Schulbücher, Sprache, Lehr-Lern-Materialien o.Ä.) wird dabei berücksichtigt.

Auch Mathematiklernen wird im Sinne der soziokulturellen Sichtweise als ein interaktiver Prozess verstanden (Krummheuer, 1992). Lernen ist demzufolge „ein aktiver, selbstgesteuerter, konstruktiver, emotionaler, sozialer und situativer Prozess“ (Mandl, 2006, S. 29). In diesem Zusammenhang betont Krummheuer (1992), dass sich dieser vor allem in jungen Jahren in der Aushandlung mit Anderen und durch Partizipation an fachlichen Aushandlungsprozessen vollzieht. Darauf folgernd weisen Schülke und Söbbeke (2010) aus fachdidaktischer Perspektive darauf hin, dass ein zeitgemäßer Mathematikunterricht „nicht mehr als ein ausschließlich individueller, mentaler Konstruktionsprozess des Kindes angesehen wird, sondern als ein Lernprozess, in dem die soziale Interaktion und Kommunikation mit anderen zentral für die Entwicklung des mathematischen Wissens ist“ (S. 21). In eine ähnliche Richtung argumentieren andere Autor\*innen im deutschsprachigen Raum und darüber hinaus, wonach das Lernen im Diskurs – neben einer gezielt individuellen Förderung – in dieser frühen Phase des Mathematiklernens eine wesentliche Rolle spielt (Abschnitt 3.2.2.).

Die vorliegende Arbeit berücksichtigt die konstruktivistische und die soziokonstruktivistische Sichtweise des Wissenserwerbs. Weder die geistige Denkleistung der einzelnen Lernenden noch das gemeinsam geteilte Lernen im Klassenzimmer, bspw. umgesetzt durch Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag, kann ohne Berücksichtigung des jeweils anderen Bereiches angemessen beschrieben werden; beide Bereiche sind

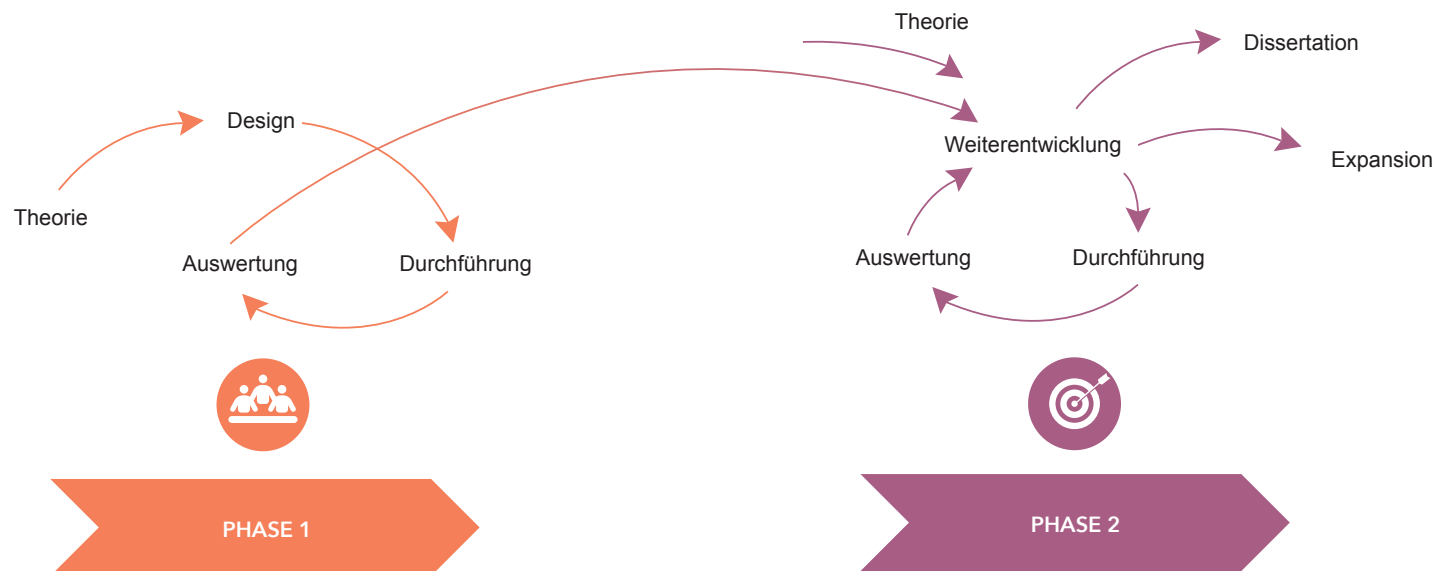
im (Mathematik-)Unterricht wesentlich miteinander verbunden. Im Sinne der konstruktivistischen Perspektive des Wissenserwerbes fokussiert diese Arbeit auf Seiten der Lernenden die individuellen Prozesse der Wissenskonstruktion und auf Seiten der Lehrkräfte die fachliche Unterstützung der Lernprozesse im Rahmen der Durchführung der Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens.

## Gesamtschau über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt

Nachfolgende Abbildung 11 visualisiert den Überblick über den in den einzelnen Kapiteln dargestellten Forschungs- und Entwicklungsprozess, der im Rahmen dieses Dissertationsvorhabens durchlaufen wurde.

### Abbildung 11

Überblick über den Forschungs- und Entwicklungsprozess mit der ersten und zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine (eigene Darstellung)



#### ERSTE DURCHFÜHRUNG IM UNTERRICHT

Durchführung in 2 Klassen (N = 45) von 9-11/2019

Qualitative Interviews mit Lehrkräften und Erprobung im Unterricht

Innere Stimmigkeit der Bausteine

Output: Handreichung zur Durchführung der Bausteine

Dissemination: MES 11

#### ZWEITE DURCHFÜHRUNG IM UNTERRICHT

Durchführung in 5 Schulklassen (N = 94) von 9-11/2020

Qualitative Interviews mit Lehrkräften und Erprobung im Unterricht

Fachliche Lernprozesse der Lernenden und fachliche Lernbegleitung der Lehrkräfte

Output: Weiterentwicklung der Bausteine und Gestaltungsprinzipien

Dissemination: CERME 12

## 6 Überblick über das Forschungs- und Entwicklungsprojekt

Aufbauend auf den wesentlichen fachlichen Überlegungen zum arithmetischen Anfangsunterricht (Kapitel 2), den (mathematik-)didaktischen Grundideen inklusiven Mathematikunterrichts (Kapitel 3), den Grundlagen inklusiver Bildung und inklusiven Unterrichts (Kapitel 4) und inhaltlich vor allem auf Grundlage der TIGER-Konzeption (Gaidoschik, 2019a, 2022) wurden im Verlauf dieser Dissertationsarbeit 13 binnendifferenzierende Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt. In Abschnitt 6.1 wird die Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) beschrieben. Im Anschluss erfolgt in Abschnitt 6.2 die Darstellung der entwickelten Lernumgebungen dieser Arbeit.

### 6.1 Konzeption TIGER

Die Konzeption TIGER (**T**eile **I**m **G**anzen **E**rkennen und damit **R**echnen) wurde von Michael Gaidoschik (2019a, 2022) entwickelt und hat als Zielsetzung den *Aufbau tragfähiger Zahlkonzepte im arithmetischen Anfangsunterricht in Mathematik*. Ein wichtiges Ziel für das Ende der Schuleingangsphase ist, dass Kinder Einsicht in grundlegende Zahlbeziehungen im Sinne des *Teile-Ganzes-Denkens (TGD)* erhalten und damit eine wesentliche Voraussetzung für *nicht-zählendes Rechnen* erworben haben. Für den arithmetischen Anfangsunterricht bedeutet dies, „dass eine Beschäftigung mit und das Erkunden von Strukturen und Zusammenhängen zwischen Zahlen und damit verbunden Zusammenhängen zwischen Operationen *von Beginn an* notwendig ist“ (Gaidoschik, 2007; zitiert nach DZLM, 2024).

Diese Konzeption beansprucht einen logischen Aufbau *aus dem Fach heraus zu verfolgen*. Gaidoschik (2019a, 2022) unterscheidet auf der ersten Ebene drei Basisbereiche: (1) *Zählen mit Verständnis von Anzahlen*, (2) *Anzahlvergleiche* und (3) *Nicht-zählende Erfassung strukturierter Anzahlen zumindest bis 5* (siehe Abbildung). Der Autor betont die Notwendigkeit, dass mit den Kindern im Anfangsunterricht in allen drei Bereichen zeitlich übergreifend gearbeitet werden soll (Gaidoschik, 2019a, 2022).

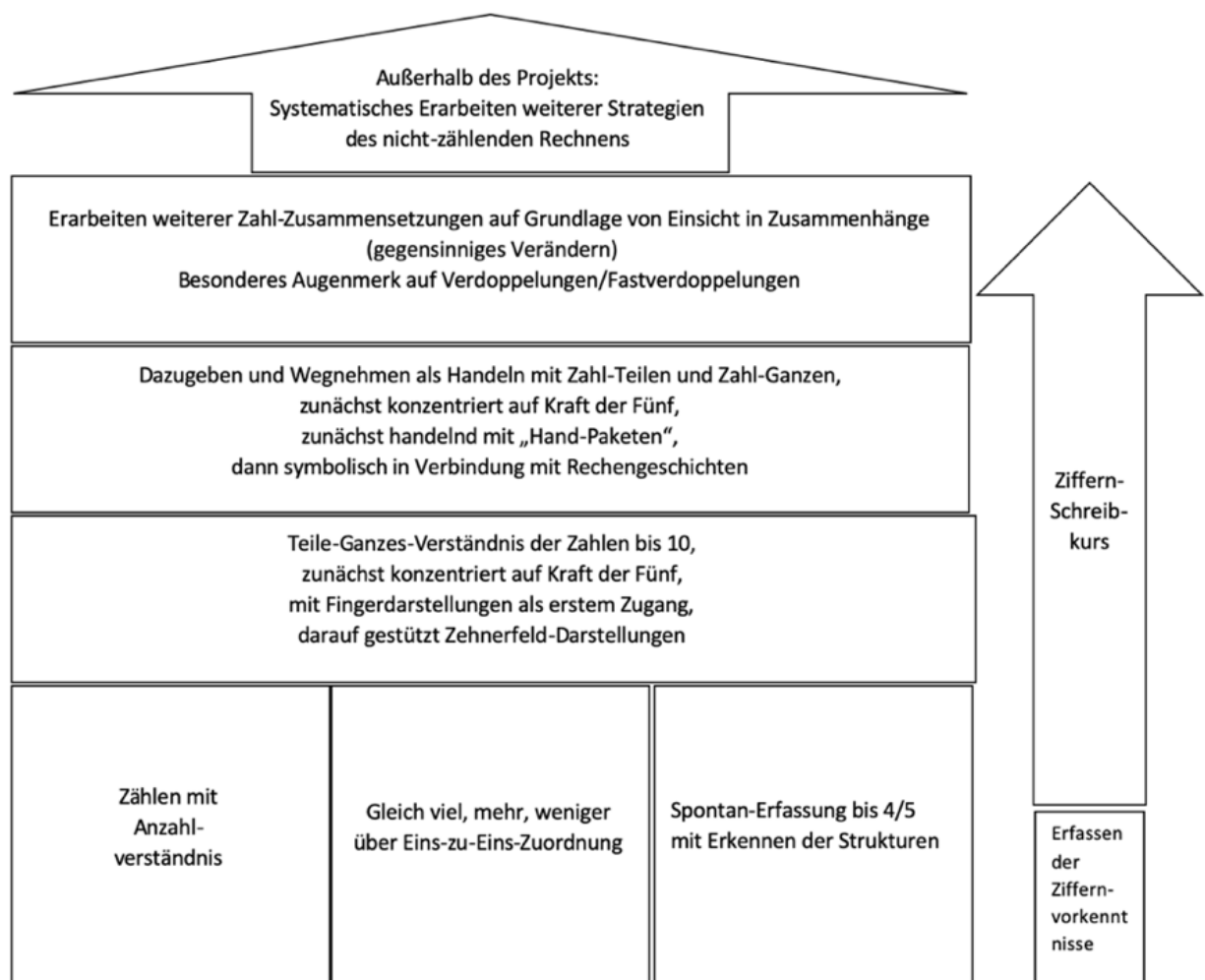
Im Bereich (1) *Zählen mit Verständnis von Anzahlen* geht es um das sichere Vorwärts- und Rückwärtszählen bis zumindest zehn und die Frage nach der Anzahl an Objekten (Abschnitt 2.2.1).

Im Bereich (2) *Anzahlvergleiche* geht es darum, die *Eins-zu-Eins-Zuordnung* als Grundlage für die Vergleichsbegriffe „gleich viel“, „mehr“, und „weniger“ zu verankern (Abschnitt 2.2.1).

Im Bereich (3) *Nicht-zählende Erfassung strukturierter Anzahlen zumindest bis 5* geht es darum, dass Kinder erste Einsichten in Teile-Ganzes-Beziehungen gewinnen, beziehungsweise festigen und ausbauen (Clements & Sarama, 2009; Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 2.2.3).

## Abbildung 12

Projektübersicht Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022)



## 6.2 Mit *allen* Kindern von Anfang an rechnen

Die im Verlauf dieser Dissertationsarbeit entwickelten 13 binnendifferenzierenden Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht stützen sich inhaltlich auf die im vorangehenden Abschnitt beschriebene Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022). Bei der Entwicklung dieser wurde darauf geachtet, dass alle drei Bereiche (1) *Zählen mit*

*Verständnis von Anzahlen, (2) Anzahlvergleiche und (3) Nicht-zählende Erfassung strukturierter Anzahlen zumindest bis 5* gleich häufig berücksichtigt wurden. Dies meint, dass ausgewogen gleich viele Unterrichtsbausteine, eben damit einhergehenden Unterrichtsaktivitäten zu den einzelnen Bereichen entwickelt wurden. In diesem Zusammenhang diente die Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) als lohnende Grundlage, von der ausgehend die Autorin dieser Arbeit, in Absprache mit dem Autor der Konzeption, die Lernumgebungen entwickelte und in weiterer Folge weiterentwickelte. Während die Lernumgebungen in einem ersten Schritt und als Grundlage für die erste Durchführung im Klassenzimmer (Kapitel 7) beispielhafte Aufgabenstellungen beinhaltete (Abschnitt 6.2, „13 Lernumgebungen als sogenannte Bausteine“), wurden die einzelnen Unterrichtsbausteine als Grundlage für die zweite Durchführung im Klassenzimmer, welche in Kapitel 9 nachzulesen ist, über- und weiter ausgearbeitet. Wie in Kapitel 8 dieser Arbeit dargestellt, erhielten die Lehrkräfte der zweiten Durchführung eine Schritt-für-Schritt-Anleitung zu den einzelnen Aktivitäten der Unterrichtsbausteine.

Vor der Durchführung beider Erprobungen der Lernumgebungen hat es sich als lohnend erwiesen, die Ausgangslage und die Vorkenntnisse der Kinder mit Hilfe der „Weißblatt-Erhebung“ zu bestimmen. Diese wird nachfolgend näher beschrieben, um in weiterer Folge die einzelnen Unterrichtsbausteine näher zu beschreiben.

### ***Eingangs-Standortbestimmung***

Vor beiden Erprobungen wurde in den im Projekt involvierten Klassen – als eine offene Form von Standortbestimmungen – eine „Weißblatt-Erhebung“ (in ähnlicher Art und Weise beschreibt diese offene Form von Standortbestimmungen Rasch, 2007) durchgeführt. Dazu schreiben oder zeichnen Kinder alles, was sie über *Zahlen und Rechnungen* bereits wissen, auf ein leeres Blatt Papier. Da das Projekt in den ersten Wochen des ersten Schuljahres durchgeführt wurde und ein großer Teil der Kinder im Schriftspracherwerb noch nicht weit genug war, um selbstständig aussagekräftige Antworten zu verfassen, wurden sie besonders auf die Möglichkeit des Zeichnens hingewiesen. Im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ werden die Kinder unter anderem mit folgenden Fragen konfrontiert:

- 1) Welche Zahlen kennst du schon?
- 2) Kennst du auch schon Rechnungen?
- 3) Wo sind Zahlen wichtig, wofür braucht man sie?
- 4) Hast du eine Lieblingszahl?

**Tabelle 4**

*Übersicht über Eingangs-Standortbestimmung (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr?                            | Inhalte und Ziele                                                                                                                                                                                                                        | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vor Beginn der Durchführung der Bausteine | <p>Erheben von aktuellen Entwicklungsständen</p> <p>(Dabei erhalten wir auch Hinweise dafür, welche Ziffern Kinder von sich aus wie schreiben/lesen; welche Kinder vielleicht auch schon Plus/Minus/Gleichheitszeichen verwenden...)</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Klassenkonferenz: <i>Was kann man mit Zahlen alles machen, wofür braucht man Zahlen, wofür sind Zahlen wichtig, nützlich, wo kommen Zahlen überall vor?</i></li> <li>Im Anschluss daran: <i>Schreibe und zeichne in deine Zahlenforscherbüchlein, was du zu Zahlen alles schon weißt und kennst!</i></li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Weitere Anregungen nur, wenn (einzelne) Kinder danach fragen oder nicht wissen, was zu tun: <i>Kannst du schon einige Ziffern schreiben? Schreibe Sie auf!</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Weitere Impulse: <i>Kannst du zu den Zahlen passende Zeichnungen machen? Hast du eine Lieblingszahl? Schreibe sie auf! Mach eine dazu passende Zeichnung. Warum ist gerade das deine Lieblingszahl?</i></li> <li><i>Kennst du schon Rechnungen? Welche? Schreibe auf! Kannst du eine Zeichnung machen, die zu der Rechnung passt?</i></li> </ul> <p>1.1.</p> <p>Hinweis zur Aktivität: LK beobachtet Kinder beim Schreiben, Zeichnen, fragt nach, gibt weitere Anregungen.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Klassenkonferenz, einige Kinder stellen Teile ihrer Zahlenforschermappe vor:</li> </ul> <p>1.2. Jedes Kind wählt ein Blatt aus, welches im Klassenzimmer aufgehängt wird.</p> |

Im Sinne der pädagogischen Diagnostik nimmt die Lehrkraft während der Durchführung dieser „Weißblatt-Erhebung“ eine beobachtende Rolle ein (Abschnitt 3.3.1). Auf eine Leistungsüberprüfung der Schulanfänger\*innen durch ein standardisiertes Instrument wurde zu Beginn der Datenerhebung verzichtet. Die Forscherin dieser Arbeit geht davon aus, dass durch die offenen und weit gefassten Fragestellungen bei der „Weißblatt-Erhebung“ das Denken der Schüler\*innen deutlich weniger eingeschränkt wird als durch

einzelne und/oder mehrere standardisierte Teilfragen. Als Grundlage zur fachlichen Einschätzung des Denkens der Schüler\*innen ermöglicht dieser Ansatz zudem im Sinne der Prinzipien qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1) einen offenen Zugang zur Reflexion der gewünschten Adaptivität der Lernumgebungen.

### **13 binnendifferenzierende Lernumgebungen als sogenannte Unterrichtsbausteine**

Im Verlauf dieser Arbeit werden 13 binnendifferenzierende Lernumgebungen mit einem Angebot an mehreren kleineren Aktivitäten, so genannten Unterrichtsbausteinen, für den frühen Arithmetikunterricht entwickelt, die im Wesentlichen, die in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Merkmale von Lernumgebungen berücksichtigen. In diesem Zusammenhang wurden insbesondere jene Kriterien von Wittmann (1998), „Lernumgebungen besser Qualität“ (Abschnitt 3.2.1), herangezogen. Da es sich bei den entwickelten Lernumgebungen um Lernumgebungen für den frühen Arithmetikunterricht handelt, wurden außerdem besonders jene von Wittmann (2016) aufgelisteten Kriterien für die mathematische Frühförderung (Abschnitt 3.2.1) berücksichtigt.

Als Ideal eines ganzheitlich binnendifferenzierenden Unterrichtskonzepts werden durch den Einsatz von reichhaltigen, gleichbedeutend binnendifferenzierenden Lernumgebungen Lernende individuell gefördert, sodass alle Lernende bestmögliche und dennoch verschiedene Fortschritte in deren individueller Entwicklung erzielen (Bruder & Reibold, 2010). Unterricht in diesem Sinne wird an die vorfindbaren Bedingungen angepasst - das kann implizieren, gleichschrittiges Lernen aufzulösen (Hußmann & Prediger, 2007).

Vor diesem Hintergrund verwendet die Autorin dieser Arbeit bewusst den plakativen Begriff „Unterrichtsbausteine“, da sie damit die vielseitigen Möglichkeiten der Gestaltung und der Umsetzung im Klassenzimmer hervorheben möchte. Die einzelnen Unterrichtsbausteine sind nicht starr, die genau in der in Kapitel 8 dargestellten Reihenfolge zu durchlaufen sind. Vielmehr sind diese, wie in Abschnitt 3.2.1, beschrieben, ein Angebot an mehreren kleineren Aktivitäten, Teilaufgaben, aus denen Lehrkräfte abhängig von den Vorerfahrungen der Kinder in ihrer Klasse auswählen können. Dabei ist der Einsatz der Unterrichtsbausteine ähnlich wie bei Spielsteinen: Die einzelnen Bausteine können und sollen beliebig, ähnlich wie Bausteine-Sets, miteinander verzahnt werden. Baustein für Baustein, Lernumgebung für Lernumgebung, werden tragfähige Zahlkonzepte im arithmetischen Anfangsunterricht der Primarstufe aufgebaut. Da der Begriff „Unterrichtsbausteine“ für die im Projekt beteiligten Lehrkräfte sprachlich geläufiger war als der Begriff „Lernumgebung“, wurde dieser bewusst im Forschungsprozess vor Ort in der Schule verwendet. Auch bei der nun folgenden Darstellung der einzelnen Aktivitäten, welche als



Grundlage für die erste Durchführung der Lernumgebungen für die Lehrkräfte dienten (Kapitel 7), wie auch weiterführend bei der Überarbeitung der Lernumgebungen (Kapitel 8), der Auswertung der zweiten Durchführung der Lernumgebungen und bei der Weiterentwicklung der Lernumgebungen (Kapitel 9.4) werden an der jeweiligen Stelle die Begriffe „Unterrichtsbausteine“ und „Lernumgebungen“ Großteils synonym verwendet.

### ***Balance zwischen individuell differenzierend und integrierend***

Die methodische Umsetzung der einzelnen Bausteine (Tabelle 5) berücksichtigt die von der Fachdidaktik proklamierte Balance zwischen Lernumgebungen in der Klasse (LK), Lernumgebungen mit einem Lernpartner (LL) und individuellen Lernphasen (IL). Vor diesem Hintergrund sollen Lernumgebungen im frühen Arithmetikunterricht, wie in Abschnitt 3.2.1 und in Abschnitt 3.2.2 dargestellt, eine ausgewogene Balance zwischen individuellen und gemeinsamen Lernphasen in der Kleingruppe und im Kollektiv ermöglichen.

Konkret ermöglichen die binnendifferenzierenden Lernumgebungen auf Basis der im vorigen Abschnitt inhaltlich dargestellten Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) *allen* Lernenden ein Lernen am gemeinsamen Gegenstand und ein von- und miteinander Lernen im fachlichen Austausch. Die einzelnen Phasen der Lernumgebungen dieser Arbeit können im Sinne Wockens (1998) folgend gestaltet werden: 1) Ein gemeinsamer Einstieg auf niedrigem Niveau ermöglicht allen Schüler\*innen einen Zugang zur Aufgabe; 2) offene Aufgabenformate in differenzierten Lernumgebungen ermöglichen auf allen Entwicklungsstufen ein gemeinsames Lernen am gleichen Lerngegenstand; in kooperativen Arbeitsphasen wird ein sozialer Austausch gewährleistet; 3) die neuen Wissenserkenntnisse werden abschließend entweder in Kleingruppen oder mit der gesamten Klasse ausgetauscht.

Diese kooperativen Phasen der entwickelten Lernumgebungen beruhen auf den von Häsel-Weide et al. (2014; siehe dazu auch Abschnitt 3.2.2) vorgeschlagenen zwei methodischen Settings; nämlich das kooperative Setting „Wippe“ und das kooperative Setting „Weggabelung“. In der Lernsituation „Wippe“ arbeiten die Kinder an einer gemeinsamen Aufgabenstellung und übernehmen unterschiedliche, miteinander verbundene Aktivitäten. Das eine Kind soll die Deutungen des Partnerkindes aufgreifen, interpretieren und daran weiterarbeiten. Wichtig ist, dass unterschiedliche Deutungen der Kinder erlaubt sind und ein Diskurs über die Struktur der Aufgabenstellung entstehen soll. In der Lernsituation „Weggabelung“ arbeiten die Kinder im ersten Schritt alleine, um dann ihre gewonnenen Erkenntnisse dem Partnerkind vorzustellen, diese zu vergleichen und anschließend für eine mögliche, darauf aufbauende Übung zu nutzen. Da die Umsetzung

dieser kooperativen Settings Übung wie Zeit benötigt, wurden sie in den ersten Schulwochen im Rahmen dieses Projektes mit den Kindern erarbeitet und immer wieder neu geübt. Die nun folgende Tabelle 5 gibt eine Übersicht über die Aktivitäten der einzelnen Unterrichtsbausteine, die als Grundlage für die erste Durchführung der Lernumgebungen dienten.

**Tabelle 5**

*Übersicht über die einzelnen Unterrichtsbausteine (eigene Darstellung)*

---

|                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Baustein I – Resultatives Zählen: Wir und unsere Klasse (LK)</i>                 |
| <i>Baustein II – Resultatives Zählen: Worauf muss man beim Zählen achten?</i>       |
| Aktivität: Zählen in der Klasse als Ritual in der Klasse (LK)                       |
| Aktivität: Zählen mit bewussten Zählfehlern (LK)                                    |
| Aktivität: Zählprinzipien (LK)                                                      |
| <i>Baustein III – Resultatives Zählen: Was ist beim Zählen nicht wichtig?</i>       |
| Aktivität: Wiederholung Zählprinzipien (LK)                                         |
| Aktivität: Zählschachtel (LK)                                                       |
| Aktivität: Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse (LK)                          |
| <i>Baustein IV – Zahlen und Finger: Wir finden Zahlen am eigenen Körper</i>         |
| Aktivität: Zahlen am eigenen Körper (LK)                                            |
| Aktivität: Zahlen mit Fingern darstellen (LK/LL)                                    |
| Aktivität: Bald auch erste Anstöße in Richtung Automatisierung (LK)                 |
| <i>Baustein V – mehr, weniger, gleich: Sind es mehr, weniger oder gleich viele?</i> |
| Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen - Partnersuche (LK)                           |
| Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Anzahlvergleiche im Klassenzimmer (LK)      |
| Aktivität: Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen (LL/IL)                   |
| <i>Baustein VI – Resultatives Zählen: mehr, weniger, gleich</i>                     |
| Aktivität: Im Raum Dinge suchen (LK)                                                |
| Aktivität: Plättchenwerfen (LL)                                                     |
| <i>Baustein VII – Zahlen und Finger: „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern &amp; Co</i> |
| Aktivität: Häschen-Ohren (LL)                                                       |
| Aktivität: Finger unter dem Tisch (LL)                                              |
| Aktivität: erst beschreiben, dann zeigen (LL)                                       |
| Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)                                       |

Aktivität: mehr und mehr in Richtung Automatisierung (LK/LL)

*Baustein VIII – Schnelles Sehen: Blitzblickübungen*

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Würfel (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbilddarstellungen (LL)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbild-, anderen Darstellungen (LK)

Aktivität: Beliebige Anzahlen strukturiert legen (IL)

*Baustein IX – Resultatives Zählen: Fingerbilder & Co*

Aktivität: Arbeit im Zahlenforscherheft (IL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Memory (LL)

*Baustein X – Um eins mehr: Um eins mehr mit den Fingern aufbauen*

Aktivität: Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen (LK)

Aktivität: um eins mehr in Partnerarbeit (LL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Ordnen! (LL)

*Baustein XI – Um eins weniger: Absteigende Zahlwortreihe*

Aktivität: Um eins weniger – mit Steckwürfeln (LK)

Aktivität: Um eins weniger – mit Fingern abbauen (LK)

Aktivität: ein erster Versuch in Richtung Automatisierung (LK)

*Baustein XII – Stützpunkt-Zahlen: Wie viele fehlen auf Fünf und Zehn?*

Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)

Aktivität: Die Finger werden verdeckt (LL)

Aktivität: Wie viele Finger fehlen auf fünf und zehn? (LL)

Aktivität: Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/zehn gewinnt (LL)

Aktivität: Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen (LL)

*Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellungen im Zehnerfeld*

Aktivität: In Richtung Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Wer hat mehr – Spielvariante mit Würfeln (LL)

---

Anmerkung. LK = Lernumgebung in der Klasse, LL = Lernumgebung mit einem Lernpartner, IL = Individuelle Lernphase.

Die fachlichen Überlegungen der entwickelten Lernumgebungen werden nachfolgend in ihren Zügen mit Verweis auf die aktuelle Fachliteratur im deutschsprachigen Raum und darüber hinaus beschrieben. Daran anschließend sind die beispielhaften Unterrichtsbauusteine zu jeder Lernumgebung skizziert. Diese dienen als Grundlage für die erste Durchführung der Lernumgebungen für die Lehrkräfte (Kapitel 7). Die im Verlauf

dieser Dissertationsarbeit überarbeiteten Lernumgebungen sind in Kapitel 8 und in Abschnitt 9.5 dieser Arbeit nachzulesen.

#### *Baustein I, Resultatives Zählen, Wir und unsere Klasse*

Die Aktivitäten im Baustein I können dem Basisbereich (1) Zählen mit Verständnis von Anzahlen der zugeordnet werden. In der fachdidaktischen Literatur wird von verschiedenen Autor\*innen betont (Baroody, 1987; Fuson, 1988; Gaidoschik, 2007; Hasemann & Gasteiger, 2014; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2013; Radatz, 1982; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schmidt & Weiser, 1982; Sophian, 1988), dass jedes Kind je nach Entwicklungspotential und Vorkenntnissen in den ersten Schulwochen viele Möglichkeiten erhalten soll, um Zählerfahrungen zu machen (Abschnitt 2.2.1). In Anlehnung an Radatz et al. (1996) und Gaidoschik (2007) werden in Baustein I Zählaktivitäten Klassenzimmer vorgeschlagen wie beispielsweise das Abzählen der Kinder nach unterschiedlichen Kriterien: die Anzahl der Mädchen/Buben, der Kinder insgesamt, der Kinder einer bestimmten Haarfarbe o.Ä. (Abschnitt 2.2.1).

Im Anschluss an diese Zählaktivitäten wird im Klassengespräch besprochen, wie man eine Anzahl von Gegenständen aufschreiben könnte; Ziffern werden in diesem Zusammenhang erstmals thematisiert. Das Anfertigen von Strichlisten ist in dieser frühen Phase des Mathematiklernens eine weitere Möglichkeit für Kinder, um Anzahlen schriftlich festzuhalten (Gaidoschik, 2007; Radatz et al., 1996; Wittmann & Müller, 2004). Die Kinder lernen, Strichlisten mit der Eins-zu-Eins-Zuordnung selbst zu erstellen. Dazu wird mit Hilfe einer Tabelle an der Tafel die Anzahl der Mädchen/Jungen/Kinder o.Ä. festgehalten. Die Lehrkraft selbst soll eine Fünferbündelung vornehmen und anregen, dass die Kinder diese übernehmen. Manche werden die Fünferbündelung beim Erstellen eigener Strichlisten übernehmen; in der Regel wird dies erst möglich sein, wenn ein Kind die „Kraft der Fünf“ erfasst und/oder in Fünferschritten zählen kann. Diese Annahme stützt sich auf den aktuellen fachrichtungsdidaktischen Empfehlungen, wonach im arithmetischen Anfangsunterricht strukturierte Materialien empfohlen werden, die die „Kraft der Fünf“ (*power of five* von Flexer, 1986) und die „Kraft der Zehn“ berücksichtigen (Abschnitt 2.2.2). Bei allen Aktivitäten in diesem Baustein gilt: Kinder, die bereits Ziffern schreiben können, sollen diese gerne verwenden, um die ermittelte Anzahl zu notieren. Kinder, die noch beim Zählen Probleme haben, sollten sich erst darauf konzentrieren können. Aufschlüsse über die Vorkenntnisse der Kinder in diesen und weiteren numerischen Bereichen liefert die in diesem Abschnitt beschriebene Weißblatt-Erhebung.

**Tabelle 6**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein I (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 1       | <p>Überprüfung, welche Kinder mit welchem Verständnis wie weit zählen können (zählen nicht nur als Wortreihe, sondern mit dem Zweck, herauszufinden, wie viele es sind, also „resultatives Zählen“)</p> <p>Hinweis:<br/>Kinder, die können, schreiben Anzahlen auch schon in Ziffernform. Kinder, die noch beim Zählen Probleme haben, sollten sich erst darauf konzentrieren können. Keinesfalls sollten Zählübungen und andere Aktivitäten mit Zahlen an das Ziffernschreiben gekoppelt werden.</p> <p>Hinweis:<br/>Erarbeiten / Absichern von Strichlisten als Möglichkeit, Anzahlen schriftlich festzuhalten; dabei Beachtung einer Fünferbündelung</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Wie viele Kinder sind in der Klasse?<br/>Wie viele Mädchen, wie viele Jungen?<br/>Wie können wir das herausfinden?</li> <li>Nach dem Zählen:<br/><i>Jetzt will ich das auch aufschreiben!<br/>Wie kann man denn aufschreiben, wie viel/e es ist/sind?</i></li> </ul> <p>Kinder, die sich melden und es können, schreiben Anzahlen der Kinder/Mädchen/Jungen in Ziffernschreibweise an die Tafel.</p> <p>LK macht dafür eine Tabelle mit Tafelbild als Darstellung der Kinder/Mädchen/Jungen.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Im Klassengespräch:<br/><i>1.3. Genau, wenn man aufschreiben will, wie viele es von etwas gibt, verwendet man ZIFFERN!</i><br/><i>Wie kann man aufschreiben, wie viel es ist?</i></li> </ul> <p>Man kann auch einfach genauso viele Striche machen, wie viele Kinder/Mädchen/Jungen es sind.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>So hat man Zahlen früher aufgeschrieben, als es noch keine Ziffern gab.<br/>Manche machen das aber auch heute noch so, ich zeige es euch.</i></li> </ul> <p>Jedes Kind sagt seinen Namen, der Reihe nach und die LK macht für jedes Kind einen Strich an die Tafel. Dabei zeigt sie vor, wie der fünfte Strich quer gemacht wird, vorerst noch, ohne das zu erklären.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Habt ihr gesehen, wie ich es mache?<br/>Was denkt ihr, warum ich das so mache, mit diesem Quer-Strich?</i></li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Klären, dass die Strichliste dadurch übersichtlicher wird und es das Zählen in Fünferschritten erlaubt.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Wenn man schon in Fünferschritten zählen kann, geht es so auch ganz schnell: fünf-zehn-fünfzehn-zwanzig, einundzwanzig.</i></li> </ul> |

### *Baustein II, Resultatives Zählen, Worauf muss man beim Zählen achten?*

Auch Baustein II ist dem Basisbereich (1) Zählen mit Verständnis von Anzahlen der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) zugeordnet.

Als Einstieg von Baustein II werden wieder die Buben/Mädchen/alle Kinder der Klasse gezählt, die ermittelte Anzahl wird in der Tabelle vom Vortag in einer neuen Zeile eingetragen und verglichen. Gemeinsam im Klassenverband wird überprüft, ob die Zahl gleich ist wie am Tag zuvor: *„Ist die Anzahl gleich wie gestern? Warum ist es heute anders als gestern? Was heißt es, wenn heute dieselbe Zahl da steht wie gestern? Was müsste passieren, damit es eine andere Zahl ist?“*

Anschließend werden erstmals die von Gelman und Gallistel (1986) beschriebenen Zählprinzipien (Abschnitt 2.2.1) thematisiert. Die Lehrkraft klebt magnetische Wendepüttchen an die Tafel oder legt sie im Sitzkreis vor die Kinder. *„Ich zähle jetzt einmal diese Plättchen, passt auf, ob ich es richtig mache!“* Dabei zählt sie einmal richtig, dann andere Anzahlen von Plättchen absichtlich falsch, wobei die Zählfehlern variiert, werden: Zahlwörter auslassen, Zahlwörter vertauschen, Eins-zu-Eins-Zuordnung falsch, weil Finger zu langsam, zu schnell, usw. Zählfehler bei ungeordneten Mengen durch Doppelzählungen mangels Strategie *„was ich gezählt habe, lege ich zur Seite“* (Abschnitt 2.2.1).

Einige dieser Zählstrategien werden die Kinder zu Schulbeginn vermutlich schon mitbringen. Entscheidend ist, dass die Kinder lernen, diese Strategien flexibel, je nach Aufgabe anzuwenden (Abschnitt 2.2.1).

**Tabelle 7**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein II (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                                                                                                                                       | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 2       | Aktivität: Tägliches Zählen der Kinder als Ritual.<br><br>Eintragen in Tabelle (Ziffern). Anfertigen einer Strichliste.<br><br>Weitere Übung zum „resultativen Zählen“. | <ul style="list-style-type: none"><li>• Zählen der Jungen/Mädchen/Kinder:<br/>1.4. <i>Wie viele Kinder sind <u>heute</u> in der Klasse? Wie viele Mädchen, wie viele Jungen?</i><br/>Vorschlag: Täglich andere Kinder übernehmen die Zählung.</li><li>• Eintragen der Ziffernschreibweise in Tabelle.<br/>1.5. Vorschlag: Täglich andere Kinder tragen die Ziffern ein, wenn nötig mit Unterstützung durch LK oder ein Kind, welches</li></ul> |

|  |                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Individuell dazu auch schon früh die Ziffernschreibweise.</p> <p>Hinweis: Kinder, die noch beim Zählen Probleme haben, sollten sich darauf konzentrieren können, also Zählübungen auch ohne Ziffernschreiben machen!</p> | <p>die Ziffernschreibweise schon beherrscht.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tägliches Anfertigen einer strukturierten Strichliste.</li> </ul> <p>1.6. Vorschlag: Täglich andere Kinder machen dazu die Strichliste an der Tafel.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tägliche Überprüfung, ob die Zahl gleich ist, wie am Tag zuvor. Dafür müssten Tabelle/Strichliste vom Vortag immer einen Tag lang auf der Tafel sichtbar stehen bleiben. Je nach Situation wird nachgefragt: <i>Warum ist es heute anders als gestern? Was heißt es, wenn heute dieselbe Zahl da steht wie gestern? Was müsste passieren, damit es eine andere Zahl ist?</i></li> </ul> |
|  | Aktivität: Zählen mit bewussten Zählfehlern                                                                                                                                                                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zählübungen mit bewussten Zählfehlern: LK gibt magnetische Wendeplättchen an die Tafel, oder legt sie im Sitzkreis vor die Kinder: <i>Ich zähle jetzt einmal, sagt mir, ob ich alles richtigmache!</i></li> <li>• Dabei einmal richtig, dann wieder mit unterschiedlichen Zählfehlern zählen. <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Zahlwörter auslassen</li> <li>○ Zahlwörter vertauschen</li> <li>○ 1-1-Zuordnung falsch, weil Finger zu schnell</li> <li>○ 1-1-Zuordnung falsch, weil Finger zu langsam</li> <li>○ Ungeordnete Menge, dabei offenkundige Doppelzählungen mangels Strategie.</li> </ul> </li> </ul>                   |
|  | Aktivität: Zählprinzipien                                                                                                                                                                                                   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Unterschiedliche Impulsfragen: <i>Ihr könnt ja schon super zählen, wann habt ihr denn das gelernt? Im Kindergarten! Aber könnt ihr einem Kind im Kindergarten auch erklären, wie das richtig geht, das Zählen? Worauf muss man da aufpassen?</i></li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Kinder formulieren gemeinsam mit der LK die Zählprinzipien.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

### Baustein III, Resultatives Zählen, Was ist beim Zählen nicht wichtig?

Baustein III gehört zum Basisbereich (1) Zählen mit Verständnis von Anzahlen der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022).

Im Klassenverband werden wieder unterschiedliche Mengen von Objekten gezählt (Abschnitt 2.2.1). Hierbei wird dieselbe Menge mehr als einmal gezählt, dabei werden aber unterschiedliche Startobjekte gewählt: *„Ist es egal, ob ich von vorne anfangen zu zählen*



oder hinten? Ist es egal, ob ich bei dieser Murmel beziehungsweise bei diesem Plättchen beginne oder bei dieser/diesem? Sind es trotzdem gleich viele?“

Anschließend führt die Lehrkraft den Begriff „Zählschachtel“ ein. Die Kinder werden aufgefordert, eine bestimmte Anzahl an Gegenständen in die Zählschachtel zu geben, diese zu verschließen und zu schütteln. Es wird kein Zählgegenstand dazu- oder weggegeben. „Wie viele sind nun in der Schachtel? Ändert sich das, wenn man schüttelt? Was müsste man tun, um die Anzahl in der Zählschachtel zu ändern?“ Ziel dieser Aktivität ist die Einsicht, die im Idealfall von den Kindern verbalisiert wird, dass in solchen Fällen nicht neu gezählt werden muss, also die Einsicht in die Konstanz der Anzahl (Abschnitt 2.2.1). Bei der Bearbeitung der Aufgabe ist darauf zu achten, welche Kinder hier noch zusätzlichen Bedarf haben. Mit diesen Kindern soll immer wieder an dieser grundlegend wichtigen Einsicht gearbeitet werden.

**Tabelle 8**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein III (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                                                                                             | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 3       | <p>Aktivität: Was ist beim Zählen nicht wichtig?</p> <p>Aktivität: Wiederholung Zählprinzipien</p>                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>Wiederholung der Zählprinzipien: <i>Wir haben gestern darüber gesprochen, worauf man beim Zählen aufpassen muss. Wisst ihr noch, worauf?</i></li> <li>Nach der Wiederholung: <i>Ist es eigentlich auch wichtig, auf welcher Seite man beim Zählen anfängt? Also z.B. bei diesen Magnetknöpfen hier? Wer möchte die für uns alle laut zählen?</i></li> <li>Kind kommt an Tafel, zählt von links beginnend; anderes Kind zählt von rechts beginnend.</li> <li>Dann zählt LK von rechts beginnend, mit Auslassungen; erneut Erkenntnis, dass es wichtig ist, keins auszulassen.</li> <li>Dann beginnt LK in der Mitte, von dort nach rechts, dann zurück in Mitte, von dort nach links. <i>Ist das auch richtig?</i></li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Es ist egal, wo man beginnt.</p> |
|                | <p>Aktivität: Zählschachtel</p> <p>Hinweis: Können Kinder bereits 1mehr/1weniger herausfinden und wie tun sie das? (Auto-</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Zählen in die Zählschachtel hinein: 1.7. Ein Kind bekommt den Auftrag, 6 oder 9 oder ... Kastanien oder ... in eine „Zählschachtel“, ein einfacher Schuhkarton mit Deckel, zu geben. Deckel drauf, LK schüttelt kräftig. <i>Wie viele sind drin?</i></li> <li>LK nimmt eine Kastanie raus/gibt eine dazu: <i>Wie viele?</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |



|  |                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|--|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | matisiert, durch verbales Zählen, oder durch Fingerzählen?) |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|  | Aktivität: Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse: Wie an den Tagen zuvor fragt die LK: <i>Wie viele Kinder sind heute in der Klasse? Wie viele Mädchen, wie viele Jungen?</i></li> </ul> <p>1.8. Vorschlag: Täglich andere Kinder übernehmen die Zählung, <u>aber immer in unterschiedlicher Reihenfolge.</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Eintragen der Ziffernschreibweise oder mit Strichliste in Tabelle.</li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Gemeinsam wird überprüft, ob die Ergebnisse unabhängig von der Richtung, in der gezählt wurde, gleich sind; und ob die Zahl gleich ist wie am Tag zuvor.</p> |

#### *Baustein IV, Zahlen und Finger*

In den Aktivitäten von Baustein IV werden die Fingerzahlen *erstmal*s thematisiert. Danach sollen die Übungen als Ritual für eine längere Zeit beibehalten, variiert und weiterentwickelt werden. Die generelle Eignung der Finger als Erarbeitungs- und Veranschaulichungsmittel als ersten Zugang in dieser frühen Phase des Mathematiklernens wird gerade auch unter Fachdidaktiker\*innen kontrovers diskutiert (Abschnitt 3.2.2). In den in diesem Zusammenhang entwickelten Bausteinen wird mit Gaidoschik (2007, 2010) oder Steinweg (2009) argumentiert, wonach sich die Finger – sofern sie *nicht* rein zählend verwendet werden – als „Material“ zum Sammeln von Erfahrungen im Zahlenraum zehn sehr gut eignen. In einer ersten Aktivität der entwickelten Bausteine geht es dementsprechend darum, dass die Kinder Zahlen am eigenen Körper finden.

Nachdem die Kinder bei fünf und zehn vermutlich von selbst einen Bezug zu den Fingern hergestellt haben, werden grundlegende Lernschritte wie die Konstanz einer Anzahl (Abschnitt 2.2.1) erarbeitet. „*Wir schütteln die Hände kräftig durch. Hat sich etwas daran geändert, wie viele Finger es an einer Hand sind? An beiden?*“ In weiteren Aktivitäten werden Zahlen mit den Fingern dargestellt und gemeinsam im Klassenverband erkundet, welche Zahlen mit nur einer Hand gezeigt werden können und für welche Zahlen man beide Hände braucht. Wie beschrieben, sollen Aktivitäten mit den Fingern als Ritual für eine längere Zeit beibehalten bleiben. Auf dieser Basis werden nach und nach *erste Anstöße* in Richtung Automatisierung der Fingerdarstellungen *versucht*.

**Tabelle 9**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein IV (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                              | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 4       | Aktivität: Wir finden Zahlen am eigenen Körper                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Fingerzahlen im Sitzkreis: Danach sollen die Übungen als Ritual für eine längere Zeit beibehalten, variiert und weiterentwickelt werden.</li> <li>Manchmal muss man nicht zählen, weil man es schon <u>weiß</u>, wie viele es sind: <i>Ich weiß genau, wie viele Nasen ich habe! Ihr wisst das doch sicher auch, ohne dass ihr zählen müsst, oder? Wovon hast du noch genau eins am Körper? Wovon zwei? Hast du drei von etwas an dir? Vier? Fünf? Zehn?</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                | Aktivität: Zahlen mit Fingern darstellen                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>Nachdem die Kinder bei fünf und zehn vermutlich von selbst einen Bezug zu den Fingern hergestellt haben, werden verschiedene Übungen gemacht: <i>Wie viel Finger an einer Hand? Wie viele an beiden zusammen? Schüttele deine Hände kräftig durch. Hat sich etwas geändert, wie viele Finger es an einer Hand sind? An beiden?</i></li> <li>Zahlen mit Fingern darstellen: <i>Zeige fünf, so schnell du kannst! Musst du dafür zählen? Ist es wichtig, ob du dafür die linke oder die rechte Hand nimmst? Zeige zehn, so schnell du kannst! Musst du dafür zählen?</i></li> <li>Welche Zahlen kann ich mit nur einer Hand zeigen? <i>Zeige vier! Geht das an einer Hand? Wie viele Finger an dieser Hand brauchst du nicht? Ist es wichtig, ob du den Daumen oder den kleinen Finger oder ... nicht ausstreckst? Ist es wichtig, ob du die linke oder die rechte Hand nimmst?</i></li> <li>Für welche Zahlen brauche ich beide Hände? <i>Zeige 4/9/7... ! Schaffst du das auch schon, ohne die Finger vorher abzuzählen?</i></li> </ul> |
|                | Aktivität: Bald auch erste Anstöße in Richtung Automatisierung | <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Kinder werden angespornt, die Zahlen von eins bis zehn mit den Fingern so schnell wie möglich zu zeigen: <i>Zeige 1 bis 10 Finger so schnell du kannst. Zeige 9/5/4 ... mit geschlossenen Augen/hinter dem Rücken/ unter dem Tisch...!</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

Baustein V, mehr, weniger gleich

In den entwickelten Aktivitäten zu Baustein V aus dem Basisbereich (2) gleich viel, mehr, weniger über „Eins-zu-Eins“-Zuordnung der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a,

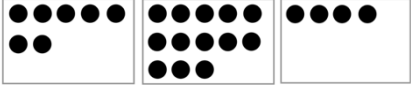
2022) stehen Aktivitäten zu Anzahlvergleichen im Mittelpunkt, die als Grundlage die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung haben. Ähnlich wie die vorgeschlagenen Übungen von Radatz et al. (1996) und Gaidoschik (2007) wird in diesem Baustein ausgehend von Aktivitäten, bei denen die Kinder bei Vergleichen nicht zählen müssen, in einem nächsten Schritt das Zählen zur Ermittlung von Anzahlen und das Vergleichen von Anzahlen durch Zählen in Verbindung zur „Eins-zu-Eins“-Zuordnung gebracht.

Dazu werden in einem ersten Schritt Anzahlvergleiche im Klassenzimmer ohne zählen durchgeführt. Nach diesen Aktivitäten zum „Vergleichen“ ohne zu zählen, sucht sich jedes Kind ein Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten aus, welches es bearbeiten kann und möchte (siehe Tabelle 10).

**Tabelle 10**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein V (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                                                                                      | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 5       | <p>Aktivität: Sind es mehr, weniger oder gleich viele?</p> <p>Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Partnersuche</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Klassenkonferenz: <i>Sind mehr Mädchen oder mehr Jungen in der Klasse? Wie können wir das feststellen? Geht das auch, ohne zu zählen?</i></li> <li>• Falls von Kinder Vorschlag kommt, anregen, dass die Kinder sich in zwei Reihen nebeneinander aufstellen: Eine Reihe mit Jungen, eine Reihe mit Mädchen. Wenn möglich nimmt jeder Junge ein Mädchen an die Hand.</li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Es sind gleich viele, wenn jeder Junge ein Mädchen an der Hand hat, bzw. mehr Jungen/Mädchen, wenn ein oder mehrere Jungen/Mädchen ohne Partner bleiben.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Falls in der Klasse die Frage uninteressant ist, weil Differenz Jungen/Mädchen sehr groß ist, diese Frage vielleicht besser an einem anderen Vergleich klären? Dafür eventuell auch Material vorbereiten, wo nicht auf den ersten Blick erkennbar, was mehr</li> </ul> |
|                | Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Anzahlvergleiche im Klassenzimmer                                              | <ul style="list-style-type: none"> <li>• In der Klasse sind Stühle und Kinder. <i>Sind mehr Stühle oder Kinder in der Klasse? Wie können wir das feststellen? Muss gezählt werden, um das sagen zu können? Warum nicht?</i></li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Vielleicht kommt auch hier die <u>Erkenntnis von den Kindern</u>, dass es immer dann gleich ist, wenn</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

|  |                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--|------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                                  | <p>es zu jedem von der einen Sache eins von der anderen Sache gibt.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mögliche Abschlussfrage: <i>Wie viele Stühle sind mehr in der Klasse?</i> (wenn ein Stuhl unbesetzt bleibt, sind die Stühle eins mehr als die Kinder) <i>Was können wir tun, damit gleich viele Stühle wie Kinder in der Klasse sind?</i></li> <li>• Andere Anzahlvergleiche im Klassenzimmer, soweit sich solche anbieten. Haken für Garderobe/Kinderjacken. Bei den einzelnen Kindern: Buntstifte/Stifthalterungen im Federpennal o.Ä.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                    |
|  | Vergleichen ohne und eventuell mit zählen –<br>Lege gleich viele | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aufgabenkärtchen <u>mit strukturierten Anzahlen</u> an Punkten:</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>Du siehst Aufgabenkärtchen mit Punkten. Lege gleich viele Plättchen auf deinen Tisch, wie Punkte auf der Karte sind!</i></li> </ul> <p>Hinweis zur Unterrichtsaktivität:<br/>Es sind gezielte Beobachtungen jedes Kindes an dieser Aktivität notwendig, um als Lernbegleitung Rückschlüsse darüber ziehen zu können, ob es die <u>Aufgabe zählend oder durch „Ein-zu-Eins“-Zuordnung</u> löst. Kinder, die nur durch Zählen zur Lösung kommen, sollen aufgefordert werden, einmal eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen.</p> |

#### *Baustein VI, Resultatives Zählen: mehr, weniger, gleich - Plättchen werfen*

Die Aktivitäten von Baustein VI „Im Raum Dinge suchen und zuordnen“ und „Plättchen werfen - Wer hat mehr?“ aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2019a) können dem Bereich (2) gleich viel, mehr, weniger über „Eins-zu-Eins“-Zuordnung zugeordnet werden. Dazu werden in einem ersten Schritt auf Tischen oder Papierbögen Aufgabenkärtchen mit Ziffern- und Würfelbilddarstellung vorbereitet. Die Kinder suchen Dinge im Klassenraum und ordnen diese den entsprechenden Ziffern- oder Würfelbilddarstellungen zu.

Bei der anschließenden Spielvariante „Plättchen werfen“ ist darauf zu achten, ob die Kinder bereits ein grundlegendes Verständnis für die Einsicht „gleich viel“ haben. Dieses

„Eindeutigkeitsprinzip“ von Gelman und Gallistel (1986) wird bei dieser Aktivität zwischen Plättchen hergestellt. Wenn jedem roten Plättchen genau ein blaues Plättchen zugeordnet werden kann, sind gleich viel rote wie blaue Plättchen. Dieses grundlegende Verständnis für „gleich viel“ kann (zusätzlich) sehr gut in Alltagssituationen geweckt und gefestigt werden (Abschnitt 2.2.1).

**Tabelle 11**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VI (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele               | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|----------------|---------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 6       | Aktivität: Im Raum Dinge suchen | <ul style="list-style-type: none"> <li>Im Raum Dinge suchen: Auf Tischen oder Papierbögen sind Aufgabekärtchen mit Ziffern- und Würfelbilddarstellung, beginnend bei null oder eins in aufsteigender Reihe bis zehn vorbereitet. Die LK zählt gemeinsam mit den Kindern bis zehn und zeigt auf das jeweilige Kärtchen mit der Ziffern- oder Würfelbilddarstellung: <i>Sucht Dinge im Raum. Lege genauso viele Dinge, wie die Ziffer- Punktekarte auf den Tischen (oder Papierbögen) zeigt.</i></li> <li>Die Kinder suchen Dinge im Raum und ordnen sie den entsprechenden Darstellungen zu.</li> </ul> <p>Ziel des Klassengesprächs: Bei diesen Aktivitäten wird mit allen Kindern das Vorwärtszählen bis zumindest zehn und die Zahlwort-Ziffer-Zuordnung geübt. Im besten Fall versuchen die Kinder Formulierungen selbst zu finden: Diese Dinge kommen zur Ziffer 2, weil es zwei Dinge sind.</p> |
|                | Aktivität: Plättchen werfen     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Plättchen werfen: Die Kinder bekommen als Spielerpaar Plättchen. Spieler eins nimmt alle Plättchen und wirft sie auf den Tisch: Beide Spieler ordnen ihre Plättchen als Reihe und achten dabei auf die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung. <i>„Sind es mehr rote oder mehr blaue Plättchen oder sind es gleich viele rote wie blaue Plättchen?“</i></li> <li>Auf dieser Basis kann geklärt werden, was mit „um eins/zwei ... mehr“ gemeint ist: Man führt eine Eins-zu-Eins-Zuordnung durch, auf einer Seite bleibt aber eins oder zwei ... übrig, „ohne Partner“ – um diese ein, zwei ... ist dann die eine Menge „mehr“ (und zugleich die andere Menge weniger).</li> </ul>                                                                                                                                                                                           |

|  |  |                                                                                                                          |
|--|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | Ziel dieser Spielvariante: Die Kinder bekommen die Gelegenheit, diese neue Art der Zahlverwendung spielerisch einzuüben. |
|--|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### *Baustein VII, Zahlen und Finger: „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern & Co*

Die entwickelten Aktivitäten aus dem Baustein VII können dem Basisbereich (3) Spontanerfassung bis 4/5 mit Erkennen der Strukturen der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) zugeordnet werden. Die Kinder sollen, sofern sie es nicht schon können, früh lernen, Fingerdarstellungen auf einen Blick *zu erkennen*. Auf dieser Basis können sie wichtige Einsichten in Zahlen gewinnen. Manche (viele?) Kinder werden es von Beginn an oder sehr bald schaffen, Fingeranzahlen „auf einen Sitz“ zu zeigen, ohne dass sie dabei ihre Finger einzeln hochzählen müssen; andere wiederum müssen die Fingeranzahl jedes Mals aufs Neue nachzählen. Die Kinder sollen mit (Zahl-)Worten beschreiben, wie sie die einzelnen Zahlen zeigen. Dazu werden sie angeregt, Fingerhandlungen in der mentalen Vorstellung durchzuführen, um schließlich ganz abstrakt über Zahlen zu sprechen (beispielsweise „acht besteht aus fünf und drei“). Viele Kinder werden auf diesem Weg viele Zwischenschritte brauchen, etwa: Die Finger werden noch verwendet, aber verdeckt. Auf derselben Grundlage sollte dann auch umgekehrt das Erkennen von Fingerdarstellungen auf einen Blick möglich werden, auf dieser Basis auch das nicht-zählende Erkennen anderer strukturierter Anordnungen (etwa im Zehnerfeld).

In einer ersten Aktivität dieses Bausteines werden die Zahlen mit Fingern als „Häschen-Ohren“ gezeigt: Dazu werden die Hände zunächst als Fäuste an die Ohren gelegt, sodass das Kind die eigenen Finger nicht sehen kann. Nun auf Kommando sechs/vier/sieben ... Finger ausstrecken.

In weiteren Aktivitäten werden Fingerdarstellungen in Partnerarbeit, aber mit verdeckten Fingern unter der Tischplatte und in weiterer Folge mit Beschreibungen von vorgestellten Fingerdarstellungen, wie in Abschnitt (3.2.2) dargestellt, durchgeführt.

Auf Grundlage dieser Aktivitäten werden im Klassenverband „Blitz-Blick“-Übungen (Abschnitt 2.2.3) mit Fingern durchgeführt: Die Lehrkraft zeigt mit ihren Händen Anzahlen bis zehn; nur kurz, für ein bis zwei Sekunden. Die Kinder sollen sagen, welche Zahl sie gezeigt hat; und *wie* sie das so schnell erkannt haben.

**Tabelle 12**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VII (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                        | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 7       | Aktivität: Häschen-Ohren                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Häschen-Ohren:<br/><i>Wir haben schon gelernt, wie man Zahlen mit Fingern zeigen kann. Das versuchen wir jetzt wieder, aber diesmal mit Häschen-Ohren.</i></li> <li>Geht das auch schon ohne Blick auf die Finger? Wenn nicht, Hände vor das Gesicht holen, Zahl einstellen, dann an die Ohren legen; beim nächsten Mal wieder als „Häschen-Ohren“ versuchen.</li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Kinder, die bereits alle Fingerdarstellungen in Beziehung mit fünf und zehn schnell und sicher zeigen können, können eingeladen werden, auch <u>andere Zeigeweisen</u> zu verwenden.</p> |
|                | Aktivität: Finger unter dem Tisch        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Finger unter dem Tisch in Partnerarbeit: Ein Kind nennt eine Zahl bis 10, das andere zeigt diese Anzahl an Fingern möglichst, ohne zu zählen, „auf einen Sitz“, aber unter der Tischplatte, ohne die Finger zu sehen. Das andere Kind steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Dann werden die Rollen getauscht.</li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Kinder, die diese Übung bereits beherrschen, sollen zusätzlich auch sagen, wie viele Finger es an der einen, wie viele an der anderen, wie viele also insgesamt ausgestreckt hat.</p>                              |
|                | Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern | <ul style="list-style-type: none"> <li>Blitzblickübungen mit Fingern. Die LK zeigt den Kindern mit ihren Händen Anzahlen bis zehn; nur kurz, für ein bis zwei Sekunden. <i>Ich zeige euch kurz Fingerdarstellungen. Ihr sagt, welche Zahl ich gezeigt habe.</i></li> </ul> <p>Ziel dieses Klassengesprächs: Die Kinder sollen versuchen zu verbalisieren, welche Zahl die LK gezeigt hat und wie sie das so schnell erkannt haben: <i>Ich habe sieben Finger gesehen. Eine Hand hast du voll gezeigt, bei der anderen waren nur zwei ausgestreckt, also waren es sieben!</i></p>                                                   |

|  |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | Aktivität: mehr und mehr in Richtung Automatisierung | <ul style="list-style-type: none"> <li>Mehr und mehr in Richtung Automatisierung: Die Kinder werden angespornt, die Zahlen von eins bis zehn mit den Fingern so schnell wie möglich zu zeigen: Zeige 10/5/8 ... so schnell du kannst.</li> </ul> |
|--|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### *Baustein VIII, Schnelles Sehen: Blitzblickübungen*

In den entwickelten Aktivitäten von Baustein VIII aus dem Basisbereich (3) Spontanerfassung bis 4/5 mit Erkennen der Strukturen der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) stehen das simultane Erkennen von Anzahlen, das Wiedererkennen gelernter „Muster“ und in weiterer Folge das Erkennen und Nutzen der (Zahl-)Struktur im Mittelpunkt. Die Fähigkeit zur Erfassung der Anzahlen „auf einen Blick“ von drei oder vier Elementen garantiert *noch nicht*, dass Kinder die Zahlen drei, vier usw. als Zusammensetzungen wahrnehmen und denken (Abschnitt 2.2.3). Deshalb sollen die Kinder von Beginn an immer wieder angeregt werden, Anzahlen schon bis vier als Zusammensetzungen beziehungsweise in Beziehung zu fünf zu beschreiben, wie beispielsweise „vier ist aus zwei und zwei zusammengesetzt“; oder „vier ist um eins weniger als fünf“. Solche Einsichten helfen auch jenen Kindern, die Defizite im Bereich der Simultanerfassung haben und anfangs auch Anzahlen von drei nur zählend ermitteln können.

In einer ersten Aktivität zum schnellen Sehen werden im Klassenverband Übungen mit Spielwürfeln und/oder mit einem Schaumstoffwürfel gemacht. Das nicht-zählende Erkennen dieser „Muster“ auf einem Spielwürfel wird thematisiert. Auch Aktivitäten zum schnellen Sehen mit Punktdarstellungen in zwei Farben wird gemacht.

In einer weiteren Aktivität bekommen die Kinder Wendeplättchen. *„Such dir eine Zahl aus, die du mit Plättchen legen willst. Du sollst die Plättchen aber so legen, dass man beim Umhergehen auf einen Blick sehen kann, wie viele Plättchen es sind!“* Es bedarf der sorgfältigen Beobachtung und Begleitung der Kinder. Kinder, die Darstellungen noch zählend ermitteln und bei dieser Aktivität noch Schwierigkeiten haben, profitieren, wenn andere Kinder oder Erwachsene nicht-zählend vorgehen und das dann auch verbalisieren: Ich sehe da zwei und da zwei, also sind es vier! Ich sehe da fünf und da eins, also zusammen sechs!



**Tabelle 13**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein VIII (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                                      | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 8       | Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Würfel                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Blitzblickübungen mit dem Würfel: <i>Wir haben schon gelernt, dass wir nicht immer zählen müssen. Das versuchen wir jetzt mit dem Würfel.</i></li> <li>• LK würfelt mehrmals mit einem großen Würfel: <i>Muss ich hier zählen, wie viele ich gewürfelt habe?</i></li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Erfassen die Kinder die Anzahl an Punkten zählend oder nicht-zählend (simultan)?</p>                                                                                                                                                                 |
|                | Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbilddarstellungen               | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Kinder arbeiten in Partnerarbeit mit kleinen Spielwürfeln. <i>Einer von euch würfelt, der andere sagt, so schnell er kann, wieviel gewürfelt wurde. Der andere macht dann in einer Tabelle einen Strich zu dieser Punkteanzahl. Dann Rollentausch.</i></li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Dazu der Auftrag, „ganz oft“ zu würfeln (oder so lange eine große Sanduhr abläuft ...) und überprüfen, ob eine Zahl öfter kommt oder alle gleich oft oder ...</p>                                                                                          |
|                | Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbild- und anderen Darstellungen | <ul style="list-style-type: none"> <li>• LK zeigt kurz (für ein bis zwei Sekunden) Würfelbilder- und andere Darstellungen von bis zu fünf oder sechs Punkten. Nachdem im Blitzblick möglichst viele Kinder an der Reihe waren, um die Anzahlen zu erkennen, werden die Darstellungen in Ruhe betrachtet. <i>Wie hast du das so schnell gesehen? Welche anderen Zahlen kannst du in der 4/5 noch erkennen und wie?</i></li> </ul> <p>Ziel dieser Aktivität: Möglichst alle Kinder erkennen und benennen in der 4 auch 3 und 1 oder 2 und 2, in der 5 auch die 4 und 1 erkennen, auch 3 und 2 ...</p> |
|                | Aktivität: beliebige Anzahlen strukturiert legen.                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Kinder bekommen Wendeplättchen: <i>Suche dir eine Zahl aus, die du mit Plättchen legen willst. Du sollst die Plättchen aber so legen, dass ich beim Umhergehen auf einen Blick sehen kann wie viele es sind!</i></li> <li>• Manche Kinder werden bei dieser Übung weit über zehn Plättchen hinaus</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                           |

|  |  |                                                                                                                                    |
|--|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | gehen – solange sie es strukturiert legen (Zehner und Einer ...) gut so, auch wenn die Lehrkraft vermutlich „zwei Blicke“ braucht. |
|--|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### *Baustein IX, Resultatives Zählen: Fingerbilder & Co*

Die Kinder sollen versuchen ihre bisher gewonnenen Erkenntnisse zur Anzahldarstellung mittels Strichlisten, zum Anordnen von Plättchen und (soweit bereits thematisiert) das Schreiben der Ziffern bis zehn oder zwanzig zusammen zu tragen. Dabei wird im Zahlenforscherbüchlein (Büchlein mit leeren Blättern, in dem Verlauf des Projektes immer wieder einmal gearbeitet wird) eine Seite für eine Zahl reserviert.

In einer weiteren Aktivität wird zu zweit oder in der Gruppe Fingerbilder & Co: Memory aus den Materialien zu TIGER (2019a) gespielt. Da die unterschiedlichen Darstellungen zum ersten Mal von den Kindern aktiv geübt werden, müssen diese genau eingeführt werden.

**Tabelle 14**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein IX (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                       | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 9       | Aktivität: Arbeit im Zahlenforscherheft | <ul style="list-style-type: none"> <li>Zahlenforscherheft: <i>Schreibe auf jede Seite in deinem Zahlenforscherbüchlein eine Zahl mit Ziffern oder mache die passende Anzahl von Stricherl für die Zahl. Beginne bei der Eins, blättere dann um; schreibe die Zwei, blättere dann um; usw. Zeichne dann zu jeder Zahl die passende Anzahl von Kreisen/Punkten, aber so, dass man schnell sehen oder leicht zählen kann, wie viele Kreise es sind.</i></li> </ul> Hinweis zur Aktivität: Kinder, die Schwierigkeiten beim Schreiben der Ziffern, der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung o.Ä. haben, bekommen dafür Hilfe von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften und/oder fertigen eine Stricherl-Liste an. |
|                | Aktivität: Fingerbilder & Co: Memory    | <ul style="list-style-type: none"> <li>Fingerbilder &amp; Co Memory: Die Paare oder eine Gruppe von Kindern erhalten 2 oder 4 Sets mit Kärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen, also beispielsweise ein Set mit Fingerbildern, ein Set mit Würfelbildern, ein Set mit Zehnerfeld-Darstellungen und wenn möglich ein Set mit Ziffernkarten. Ge-</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

|  |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  | spielt werden kann nach den Regeln eines klassischen Memorys: Spieler 1 dreht ein Kärtchen um, nennt die dargestellte Anzahl; dreht ein zweites Kärtchen um, nennt die dargestellte Anzahl; wenn die Anzahlen gleich sind, darf er das Paar nehmen, usw.<br>Hinweis zur Aktivität: Das Memory bedarf sorgfältiger Spielbegleitung. Kinder, die bestimmte Darstellungen noch zählend ermitteln, profitieren, wenn andere Kinder oder Erwachsene nicht-zählend vorgehen und dies in Worte fassen. |
|--|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### *Baustein X – Um eins mehr: Um ein mehr mit den Fingern aufbauen*

Die Aktivitäten aus dem Baustein X können den Basisbereichen (1) Zählen mit Anzahlverständnis und (2) gleich viel, mehr, weniger über „Eins-zu-Eins“-Zuordnung der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) zugeordnet werden. Im Unterschied zum Baustein IV liegt hier die Aufmerksamkeit auf das *um eins mehr*. Manche Schulanfänger können zwar sicher von eins beginnend raufzählen, sie können aber noch nicht von einer beliebigen Zahl ausgehend spontan weiterzählen. Die Frage „*was kommt gleich danach?*“ können manche Kinder nur dadurch beantworten, dass sie die ganze Reihe von eins startend bis zur gefragten Zahl raufzählen. In diesem Baustein geht es um die Verknüpfung von a) der Zahlwortreihe, vorwärts und rückwärts b) Zahlvergleichen, insbesondere „eins mehr, „eins weniger“ und c) bereits erworbenem Zahlwissen, insbesondere mit Bezug auf Fingerdarstellungen. Wenn ein Kind beispielsweise noch nicht spontan von fünf weiterzählen beziehungsweise sagen kann, was „eins mehr“ ist, kann es helfen, wenn es die fünf Finger in einer Bewegung als Gesamtheit, ausstreckt, dann einen Finger hinzufügt. Sofern die bereits angeregten Übungen zu Fingerdarstellungen gefruchtet haben, wird es die entstandene neue Anzahl spontan nennen können. Dieses wechselseitige Verstärken von Kenntnissen, die auf den unterschiedlichen „Baustellen“ gewonnen wurden, soll angestrebt werden, wo immer es möglich ist.

Dazu wird in ersten Aktivitäten die Zahlenreihe mit den Fingern und/oder mit Steckwürfeln aufgebaut. Vielleicht kommt von *den Kindern die Erkenntnis*, dass es immer genau um einen Finger beziehungsweise um einen Steckwürfel mehr wird. Nachdem diese Aktivitäten in Partnerarbeit gefestigt werden, folgen die Übung Fingerbilder & Co: Ordnen aus den Materialien zu TIGER (2019a). Grundlegende Einsichten in diesem Zusammenhang: Die Zahlen in der gewohnten Zahlenreihe null-eins-zwei-drei ... folgen nicht

nur nacheinander, sondern jede Zahl ist immer eins mehr als die Zahl, die in dieser Reihe vorangeht. Bei zwei benachbarten Zahlen ist die kleinere Zahl immer in der größeren Zahl als ein Teil enthalten – sieben ist sechs und noch eins, acht ist sieben und noch eins (Abschnitt 2.2.3).

**Tabelle 15**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein X (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                               | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 10      | Aktivität: Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen | <ul style="list-style-type: none"> <li>Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen: Die LK bittet die Kinder nacheinander eins, zwei, drei ... Finger zu zeigen und legt der Reihe nach beginnend bei eins das jeweilige Aufgabenkärtchen der Würfel- und/oder der Zifferndarstellung. Die Aufmerksamkeit liegt hier auf das um eins mehr. <i>Zu einem Finger einen dazu macht zwei; zu zwei Fingern einen dazu macht drei. Zu vier Fingern einen dazu macht fünf, eine volle Hand usw.</i></li> <li>Die Kinder erhalten Steckwürfen in zwei unterschiedlichen Farben. Sie stecken einen, zwei, drei, ... Steckwürfel zusammen. Nach diesem Prinzip werden alle Zahlen von null oder eins bis zehn durchgemacht.</li> </ul> <p>Ziel der Aktivität: Im besten Fall kommt hier die Erkenntnis von den Kindern, dass es immer genau um einen Finger mehr wird.</p> |
|                | Aktivität: um eins mehr in Partnerarbeit        | <ul style="list-style-type: none"> <li><i>Nennt euch wechselseitig Zahlen von null oder eins bis zehn. Ein Kind nennt die Zahl, das andere Kind zeigt zuerst diese Zahl, dann um eins mehr mit den Fingern. Zum Beispiel: Ich sage drei, du zeigst ... drei Finger und noch einen Finger dazu und sprichst: Drei, eins und noch dazu macht vier. Kinder, die diese Aktivität bereits können: Zeige um 2/ um 3 ... mehr Finger.</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|                | Aktivität: Fingerbilder & Co: Ordnen!           | <ul style="list-style-type: none"> <li>Fingerbilder &amp; Co: Ein Kind dreht Kärtchen seiner Wahl um und nennt die dargestellte Zahl. Dann überlegt es: <i>Liegt die Karte passend, wenn von links nach rechts die Anzahl immer größer werden soll?</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

### Baustein XI – Um eins weniger: Absteigende Zahlwortreihe

Die Aktivitäten aus dem Baustein XI können den Basisbereichen (1) Zählen mit Anzahlverständnis und (2) gleich viel, mehr, weniger über „Eins-zu-Eins“-Zuordnung der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) zugeordnet werden. Wie bereits beschrieben, soll das Vorwärts- und Rückwärtszählen mit den Kindern geübt und sinnvoll kombiniert werden; einerseits rein verbal (beispielsweise als „Countdown“), andererseits sollen die Kinder eine Vorstellung von „eins weniger“ als „umgedrehte Zahlwortreihe“ aufbauen. Viele Schulanfänger können die Zahlenreihe von zehn absteigend bis eins oder null oft weit weniger gut als die Zahlenreihe vorwärts, oder gar nicht. Die Frage „*was ist um eins weniger?*“ können viele Kinder ohne Zuhilfenahme von Zählmaterial nicht lösen. Auch hier ist anzustreben, dass die Kinder ihr bereits erworbenes Wissen über Fingerdarstellungen nutzen: Um schnell herauszufinden, was eins weniger ist als beispielsweise acht, kann es helfen, acht Finger auf einen Sitz zu zeigen, einen Finger wegzunehmen und die neue Fingeranzahl „auf einen Blick“ abzulesen (Abschnitt 3.2.2).

Ähnlich wie in Baustein X werden hier Aktivitäten mit Fingern und/oder Steckwürfeln gemacht, um Vorstellungen von einer absteigenden Zahlwortreihe aufzubauen und zu festigen.

**Tabelle 16**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XI (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                           | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 11      | Aktivität: Um eins weniger mit Steckwürfeln | <ul style="list-style-type: none"> <li>Zahlenreihe mit Steckwürfeln: Die Kinder stecken abwechselnd eine Steckwürfelstange mit 10 Steckwürfeln zusammen und verwenden dabei zwei Farben. Dann stecken andere Kinder eine Stange zusammen, die um einen Steckwürfel weniger hat, usw., bis nur noch ein Steckwürfel übrig ist. Die Stangen werden der Länge nach geordnet, begonnen mit der längsten Stange. Die Kinder sollen erkennen und in Worte fassen: <i>Hier sind zehn Würfel. Da sind neun Würfel. Da sind acht Würfel. Da sind ...</i> Durch gezielte Nachfragen sollen die Kinder gelenkt werden, ihre Beobachtungen zu formulieren: <i>Ihr habt Stangen vor euch liegen. Was fällt euch auf?</i></li> </ul> <p>Ziel dieser Aktivität: Vielleicht kommt auch hier die Erkenntnis von den Kindern: <i>Jede</i></p> |

|  |                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                           | <i>Zahl ist um eins weniger als die Zahl, die beim Rückwärtszählen nachher kommt.</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|  | Aktivität: um eins weniger mit Fingern abbauen            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Begleitend zum Zählen als Countdown wird die jeweilige Anzahl an Fingern gezeigt: <i>Das sind zehn Finger.</i> Pause, ein Finger weg. <i>Jetzt sind es neun.</i> Pause, ein Finger weg, usw.</li> <li>• Wenn beide Kinder sicher rückwärts zählen können, ist es wünschenswert, wenn der Zahlenraum geöffnet wird und sie gemeinsam von zwanzig rückwärts zählen: <i>Das sind zwanzig Finger.</i> Pause, einen Finger weg. <i>Jetzt sind es neunzehn Finger.</i> Pause, ein Finger weg, usw.</li> </ul> |
|  | Aktivität: ein erster Versuch in Richtung Automatisierung | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Die Kinder werden angespornt, die Zahlen von zehn bis null mit den Fingern so schnell als möglich zu zeigen: <i>Zeige 10 bis 0 und zähle laut mit, so schnell du kannst.</i></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

#### *Baustein XII – „Stützpunkt-Zahlen“: Wie viele fehlen auf Fünf und Zehn?*

In den Aktivitäten von Baustein XII aus dem Basisbereich (3) Spontanerfassung bis 4/5 mit Erkennen der Strukturen wird das schnelle, nicht-zählende Erfassen von strukturierten Zahldarstellungen als ein wichtiges Element in der Entwicklung von Teile-Ganzes-Denken (TGD) geübt. Von besonderer Bedeutung sind dabei alle Zusammensetzungen der Zahl fünf und alle Zusammensetzungen der Zahl zehn. Bei der Erarbeitung dieser „Stützpunkt-Zahlen“ und der Einsicht in diese Zusammenhänge ist es zielführend, die Hände und in weiterer Folge strukturierte Materialien wie das Zehnerfeld zu verwenden (Abschnitt 3.2.2). Bei allen Aktivitäten gilt, dass die Kinder verinnerlichen sollen, dass die Beziehung sowohl zu fünf als auch zu zehn wichtig ist. Bei manchen Kindern ist es hilfreich, wenn man sich zuerst nur auf die Beziehung zu fünf konzentriert; andere wiederum brauchen die Öffnung zu zehn oder vielleicht zwanzig (Abschnitt 3.2.2).

Ähnlich wie in Baustein VII, werden wirkliche Finger mehr und mehr durch vorgestellte Finger ersetzt. In einer ersten Aktivität werden Übungen mit verdeckten Fingern unter der Tischplatte gemacht und insbesondere auf die auf fünf/zehn fehlenden Finger geachtet und in Worte gefasst: *„Wie viel fehlt auf fünf / zehn?“*

Kinder, die diesen Zwischenschritt nicht mehr brauchen, werden angeregt ihre Zahlen in Beziehung zu fünf und zehn nicht gleich mit den Fingern zu zeigen, sondern zu *beschreiben*, wie sie das tun würden.

Abschließend wird Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/Zehn aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2019a) gespielt.

**Tabelle 17**

Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XII (eigene Darstellung)

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                            | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 12      | Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Wir üben wieder das Zeigen von Zahlen mit Fingern, immer schneller. Zeige vier/sieben/neun ...</li> </ul> <p>Ziel dieser Aktivität: Die Kinder sollen immer wieder zur Verbalisierung angeregt und mit ihnen gemeinsam auf Formulierungen hingearbeitet werden: <i>In der acht steckt fünf und drei drinnen. Acht besteht aus fünf und drei.</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|                | Aktivität: die Finger werden verdeckt                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Damit wirkliche Finger mehr und mehr durch vorgestellte Finger ersetzt werden, benötigen viele Kinder Aufgaben mit den Fingern, aber verdeckt (dazu auch Baustein VII). Ein Kind zeigt auf Aufforderung bspw. sieben Finger „auf einen Sitz“, aber unter der Tischplatte. Das andere Kind steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Dann die <u>weiterführende Frage</u>: <i>wie viel fehlt auf fünf / zehn?</i> Die Rollen werden getauscht.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                | Aktivität: wie viele Finger fehlen auf 5 und 10?             | <ul style="list-style-type: none"> <li>Kinder, die den Zwischenschritt (Übung 2) nicht mehr brauchen, werden angeregt ihre Zahlen in Beziehung zu fünf und zehn nicht gleich mit den Fingern zu zeigen, sondern zu beschreiben, wie sie das tun würden. Wenn möglich, bevor oder auch anstatt es wirklich zu machen: <i>Wie kannst du acht zeigen? Mit wie vielen Fingern an welcher Hand?</i> Und in weiterer Folge: <i>Wie viele von deinen insgesamt zehn Fingern sind nicht ausgestreckt, wenn du acht zeigst, wie viel fehlt also auf zehn?</i></li> </ul> <p>Hinweis zu dieser Aktivität: Bei manchen Kindern ist es hilfreich, wenn man sich zuerst nur auf die Beziehung zu fünf konzentriert; andere wiederum brauchen die Öffnung bis zehn oder vielleicht zwanzig.</p> |
|                | Aktivität: Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/zehn gewinnt | <ul style="list-style-type: none"> <li>Fünf gewinnt/zehn gewinnt: Beide Kinder nehmen nach dem Muster von „Schere, Stein, Papier“ zwei Mal im Gleichtakt mit geschlossenen Fäusten Schwung, beim dritten Runterfahren der Hand werden auf einen Sitz null bis fünf Finger ausgestreckt. Dann wird</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |

|  |                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                                      | überprüft, wie viele Finger es zusammen sind. Wenn es zusammen genau fünf sind, gibt das einen Punkt (oder einen Strich in der Strichliste oder ein Plättchen als Guthaben ...). Nach demselben Muster wird die Variante „Zehn gewinnt“ gespielt, jedoch verwenden beide Spieler gleichzeitig beide Hände und strecken beim dritten Schwung null bis zehn Finger aus. Wieder gibt es einen Punkt, wenn es zusammen genau zehn sind, etc.                        |
|  | Aktivität: Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen | <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Lehrkraft sagt Zahlen zwischen fünf und zehn. Zwei Kinder sollen die jeweilige Zahl in Partnerarbeit zeigen, jedes Kind darf dabei nur eine Hand verwenden. Abwechselnd zeigt ein Kind dabei jeweils die „volle Hand“, also fünf Finger. Das andere muss überlegen, wie viele Finger von seiner Hand noch dazukommen müssen. In einem weiteren Schritt kann gefragt werden, wie viel noch auf zehn fehlt.</li> </ul> |

### *Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellungen im Zehnerfeld*

In den Aktivitäten von Baustein XIII aus den Basisbereichen (2) gleich viel, mehr, weniger über „Eins-zu-Eins“-Zuordnung bei der abschließenden Aktivität Wer hat mehr? – Spielvariante Würfeln (siehe unten) und (3) Spontanerfassung bis 4/5 mit Erkennen der Strukturen der Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) wird das schnelle, nicht-zählende Erfassen von strukturierten Zahldarstellungen als ein wichtiges Element in der Entwicklung von Teile-Ganzes-Denken (TGD) geübt. Die Bedeutung von fünf und zehn als „Stützpunkt-Zahlen“ können einem Kind auch *mit Hilfe des Zehnerfeldes* deutlich werden.

In einer ersten Aktivität zeigt die Lehrkraft den Kindern ein Zehnerfeld und erarbeitet mit ihnen gemeinsam strukturierte Zahldarstellungen am Zehnerfeld (Abschnitt 2.2.2).

In weiteren Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld soll die Punktedarstellung trainiert und ebenso gut automatisiert werden wie Fingerdarstellungen. Die Kinder versuchen die dargestellte Zahl zu erkennen und zu erläutern, auf welche Weise sie die Zahl sehen (Abschnitt 2.2.2).

Abschließend wird das Spiel Wer hat mehr? – Spielvariante „Würfeln“ aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2019a) gespielt.

An dieser Stelle findet das Projekt und die Unterrichtsbausteine ein Ende, da mit den bisherigen Aktivitäten zu den einzelnen Bausteinen und im Sinne des Autors der



Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) die wesentlichen Grundlagen dafür gelegt wurden, um in Richtung Operieren im Zahlenraum 10 zu gehen (siehe Abbildung 11).

**Tabelle 18**

*Übersicht über die Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein XIII (eigene Darstellung)*

| Wann ungefähr? | Inhalte und Ziele                                           | Mögliche Unterrichtsaktivitäten                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------|-------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Stunde 13      | Aktivität: In Richtung Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld | <ul style="list-style-type: none"> <li>Zehnerfeld und strukturierte Zahldarstellung am Zehnerfeld wird gezeigt. Die Kinder sollen angeregt werden, genau zu beschreiben, was sie auf der Darstellung sehen; und auf welche Weise sie es sehen. Den Kindern soll, wenn nötig durch gezieltes Fragen, ermöglicht werden zu erkennen, dass der Rahmen Platz für zehn Punkte in zwei Reihen zu je fünf Punkten; also genau gleich wie bei den zehn Fingern auf zwei Händen zu je fünf Fingern. Die Lehrkraft stellt weitere, gezielte Fragen zu Zusammenhängen im Zehnerfeld mit den ihnen vertrauten Fingerdarstellungen: <i>Wie siehst du schnell, dass das acht Punkte sind?</i></li> </ul> <p>Hinweis zur Aktivität: Da Punktedarstellungen im Unterschied zu Fingern nur über die Augen wahrgenommen werden, ist es hilfreich, diese erst dann im Unterricht zu thematisieren, wenn mithilfe der Finger bereits eine Verständnisgrundlage dafür geschaffen ist.</p> <p>Ziel dieser Aktivität: Wenn möglich sollte die Erkenntnis von den Kindern kommen, dass beispielsweise acht Punkte als fünf und noch drei angeordnet sind; genau wie bei den Fingern.</p> |
|                | Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld             | <ul style="list-style-type: none"> <li>LK zeigt eine bestimmte Zahldarstellung im Zehnerfeld nur kurz (ein bis zwei Sekunden). <i>Achtung, genau schauen!</i> Die Kinder versuchen die dargestellte Zahl zu erkennen und zu erläutern, auf welche Weise sie die Zahl sehen.</li> </ul> <p>1.9.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

|  |                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  |                                                             | <p>Hinweis zur Aktivität: Wenn die Kinder die Punktedarstellung im Zehnerfeld in der oben beschriebenen Weise untersucht und Analogien zu den Fingerdarstellungen erkannt haben, sollen diese Punktedarstellungen in Blitzblickübungen trainiert und ebenso gut automatisiert werden wie Fingerdarstellungen.</p>             |
|  | <p>Aktivität: Wer hat mehr – Spielvariante mit Würfeln:</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wer hat mehr – Spielvariante mit Würfeln: Die Spieler würfeln abwechselnd und legen die gewünschte Anzahl von Plättchen in das jeweilige Spielfeld. Die Kinder vergleichen <i>Wer hat mehr?</i> Die Plättchen, die ein Spieler mehr hat, legt er in seinem Sammelfeld ab.</li> </ul> |

## 7 Erste Erprobung im Unterricht

Im Rahmen des in der vorliegenden Dissertationsarbeit gewählten DBR-Forschungsansatzes (Abschnitt 5.3.3), hat die erste Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer das Ziel, die *innere Stimmigkeit* und die praktische Umsetzbarkeit der Bausteine zu überprüfen. Vor diesem Hintergrund wurden alle Unterrichtssequenzen von der jeweiligen Lehrkraft durchgeführt und von der Verfasserin dieser Arbeit videographiert begleitet, vor und nach der ersten Durchführung fand ein qualitatives Interview mit den im Projekt beteiligten Lehrkräften statt (Abschnitt 7.2). Die in dieser Phase durchgeführten videogestützten Unterrichtssequenzen werden in der vorliegenden Arbeit nicht ausgewertet. In Kapitel 10 der Rückschau auf das gesamte Entwicklungsforschungsprojekt wird dieser Bereich als Ausblick aufgegriffen. Vielmehr sind bei der Auswertung dieser ersten Durchführung die Einschätzungen der Lehrkräfte hinsichtlich der entwickelten und erprobten Unterrichtsbausteine, die praktische Realisierbarkeit der Unterrichtsbausteine und die gemeinsame Reflexion darüber von Interesse.

In diesem Kapitel 7 werden zunächst in Abschnitt 7.1 die der ersten Erprobung im Unterricht zugrunde liegenden Fragestellungen beschrieben. Abschnitt 7.2 beschreibt den Ablauf der ersten Erprobung mit den Phasen der Datenerhebung, der Datenaufbereitung und der Datenauswertung. Abschnitt 7.3 bringt die Ergebnisse der ersten Erprobung im Unterricht. Diese Ergebnisse werden für die Weiterentwicklung der einzelnen Bausteine herangezogen und leiten in Kapitel 8 und in Kapitel 9 über.

### 7.1 Fragestellungen

Ausgehend von der Problemlage, dem aktuellen Stand der Forschung und dem Ziel der Untersuchung leitet sich folgende übergeordnete Forschungsfrage ab, welche im Rahmen der ersten Durchführung der Unterrichtsbausteine im Klassenzimmer beantwortet wird: **Wie können Lernumgebungen mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt werden?**

Die Forschungsfrage (F1) ist in folgende untergeordneten Forschungsfragen (F 1.1, F 1.2, ...) gegliedert. Untersucht wurden die Forschungsfragen F 1.1 und F 1.2 im Rahmen

eines qualitativen Interviews mit den Lehrkräften vor der ersten Durchführung im Klassenzimmer. Die Lehrkräfte wurden zeitnah im Anschluss an den Fortbildungstag (Abschnitt 7.2) befragt.

F 1.1: Welche **mathematikdidaktischen Kriterien** nennen Lehrkräfte, um Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht zu gestalten?

F 1.2: Welche **didaktischen Kriterien** nennen Lehrkräfte, um Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht zu entwickeln?

Nach der Durchführung der Unterrichtsbausteine im Klassenzimmer hatten die im Projekt beteiligten Lehrkräfte im Rahmen eines qualitativen Interviews die Möglichkeit, ihre Einschätzungen zu den entwickelten und erprobten Lernumgebungen darzustellen, sowie Anregungen zur Weiterentwicklung der Lernumgebungen zu geben. Die Forschungsfragen F 1.3 bis F 1.7 sind in dieser Phase:

F 1.3: Welches **Potenzial** haben die entwickelten Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht für die Lernenden?

F 1.4: Welches **Potenzial** haben die entwickelten Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht für die fachliche Lernbegleitung?

F 1.5: Welche **Hürden** wurden bei der Durchführung der Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht bei den Lernenden festgemacht?

F 1.6: Welche **Hürden** wurden bei der Durchführung der Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht bei der fachlichen Lernbegleitung festgemacht?

F 1.7: Welche **Verbesserungsvorschläge** haben die Lehrkräfte bei den Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht?

## **7.2 Durchführung**

Die erste Erprobung der Lernumgebungen fand im Zeitraum September bis November 2019 mit zwei Parallelklassen der ersten Klassenstufe und insgesamt 45 Schüler\*innen einer Grundschule in Innsbruck-Stadt statt. Die Schule liegt in einem Stadtteil, welcher als sozial benachteiligt mit einem überdurchschnittlich hohen Anteil von Bewohner\*innen mit Migrationshintergrund und nicht-deutscher Muttersprache gilt.

Die freiwillige Teilnahme der Lehrkräfte an dem Projekt erforderte die Bereitschaft, sich mit der Thematik des arithmetischen Anfangsunterrichts auseinanderzusetzen. Vor diesem Hintergrund absolvierten die Lehrkräfte und die Stütz(lehr-)kräfte vor Beginn der Durchführung der Unterrichtsbausteine einen (Fortbildungs-)Tag, welcher seitens der Verfasserin dieser Arbeit an der Pädagogischen Hochschule Tirol abgehalten wurde. Im Zuge dessen wurden alle Beteiligten in die inhaltliche Thematik eingeführt, in der Durchführung der einzelnen Unterrichtsbausteine für den arithmetischen Anfangsunterricht geschult, die Lehr-Lern-Materialien zur Unterstützung mathematischer Lehr-Lern-Prozesse wurden vorgestellt und deren Einsatz bei den Unterrichtsbausteinen wurde Schritt für Schritt besprochen. Die Lehrkräfte erhielten die in Kapitel 6 dieser Arbeit dargestellten beispielhaften Aufgabenstellungen für jeden Unterrichtsbaustein. In der anschließenden neun-wöchigen Phase der ersten Durchführung waren keine studentischen Hilfskräfte beteiligt. Alle Interviews und videogestützten Unterrichtsbeobachtungen wurden von der Verfasserin dieser Arbeit selbst erhoben.

### ***Rahmenbedingungen in den einzelnen Kooperationsklassen***

In den Kooperationsklassen A und B wurde der Mathematikunterricht von einer Haupt- und einer Stütz(lehr-)kraft gehalten. Bezogen auf die personelle Ressourcenverteilung war dies in diesen Klassen umsetzbar, da in beiden Klassen ein Kind mit Sonderpädagogischem Förderbedarf besuchte und die zusätzlichen Betreuungsstunden der Stütz(lehr-)kraft in den Hauptfächern verteilt war. Die Rolle einer Stütz(lehr-)kraft bestand in diesen beiden Klassen darin, das jeweilige Kind im Mathematikunterricht zu beobachten, zu begleiten und gezielte Fördermaßnahmen in Einzelsituationen, in der Klein- und/oder der Gesamtgruppe durchzuführen.

### ***Kooperationsklasse A***

Klasse A mit 22 Kindern (9 Mädchen/13 Jungen) besuchte ein Junge mit Sonderpädagogischem Förderbedarf, weswegen die Stunden im Fach Mathematik von einer Hauptlehrkraft und einer Stützlehrkraft gehalten wurden. Dabei arbeitete die Hauptlehrkraft mit der Gesamtgruppe. Die Aufgabe der Stützlehrkraft war es, Jonas, einen Jungen mit einem Förderbereich Lernen bei der Arbeit im Unterricht zu beobachten, zu begleiten und zu unterstützen. Beide Lehrkräfte hatten eine pädagogische Ausbildung. Diese Klasse bestand aus 20 Kindern mit einer anderen Erstsprache als Deutsch.

Jonas wurde nicht nach dem Lehrplan der Regelvolksschule unterrichtet, sondern nach einem individuell angepassten Förderplan der Allgemeinen Sonderschule. Laut Aussage der Klassenlehrkraft habe er ein tragfähiges Zahlverständnis im Zahlenraum 5. Er arbeite sehr gerne im Klassengeschehen mit anderen Kindern, weswegen vor Beginn der Durchführung bei den einzelnen Aktivitäten der Bausteine keine Anpassungen der Sozialformen vorgenommen werden mussten. In der vorliegenden Untersuchung zeigte sich, dass Jonas alle Aktivitäten der Unterrichtsbausteine kooperativ und motiviert in Einzel-, Klein- und/oder der Gesamtgruppe durchführte.

### ***Kooperationsklasse B***

In Klasse B mit 23 Kindern (11 Mädchen/12 Jungen) wurden die Mathematikstunden von einer Hauptlehrkraft und einer Stützkraft gehalten. In dieser Klasse waren 10 Kinder mit einer anderen Erstsprache als Deutsch. Eine Schülerin dieser ersten Klasse war seit wenigen Monaten in Österreich, sie war sehr schüchtern und sprach kaum.

Die Stützkraft begleitete und unterstützte ein Mädchen mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf. Laut Aussage der Klassenlehrkraft orientiere sich dieses Mädchen im Zahlenraum 3 und füge sich in größeren Gruppen wie im Klassengeschehen nur sehr schwer ein. Deswegen wurde dieses Mädchen begleitend von der Stützkraft betreut und besuchte den Unterricht im Klassenzimmer vor Beginn der Datenerhebung nur in verkürzten und überschaubaren Einheiten. Während des Untersuchungszeitraumes wurde versucht die Unterrichtsbausteine im Klassensetting so durchzuführen, wie sie von der Autorin dieser Arbeit (Einzel-, Klein- oder Gesamtgruppe) gedacht und entwickelt wurden. Nur in Ausnahmefällen wurde geraten, die Einheiten mit diesem Mädchen allein und in einem separaten Klassenzimmer zu halten. So kam es an einem Tag der Durchführung, dass sie gleich am Morgen von ihrem Haustier erzählte, welches am Tag zuvor verstorben war. Sie konnte sich an diesem Tag bereits in den einführenden Aktivitäten sichtlich sehr schwer konzentrieren. Das Mädchen ließ sich durch andere Kinder

und/oder andere Eindrücke in der Klasse schnell ablenken. Deswegen wurden die geplanten Aktivitäten an diesem Tag gemeinsam mit der Stützkraft in einem Zusatzraum abgehalten. Alle anderen Unterrichtsbausteine wurden, wie in Kapitel 6 dieser Arbeit ausformuliert, entweder in Einzel-, Klein- und/oder Gesamtgruppe durchgeführt.

### **7.3 Datenaufbereitung und Datenauswertung**

In der vorliegenden Phase der ersten Durchführung der entwickelten Unterrichtsbausteine wurde vor und nach der Datenerhebung ein qualitatives teilstrukturiertes Interview mit den im Projekt involvierten Lehrkräften der Kooperationsklassen geführt. Unter der Leitung der Verfasserin dieser Arbeit wurden somit vor und nach der Durchführung je vier Interviews gehalten. Alle Interviews mit der Hauptlehrkraft der Kooperationsklasse A, mit der Stützlehrkraft der Kooperationsklasse A, mit der Hauptlehrkraft der Kooperationsklasse B mit der Stützkraft der Kooperationsklasse B wurden getrennt voneinander und in einem separaten Klassenraum durchgeführt. Jedes Interview wurde mit Tonband aufgezeichnet und dauerte zwischen 90 Minuten und 120 Minuten.

#### ***Teilstrukturiertes Interview***

Die wissenschaftliche Befragung, synonym für Interview, wird nach Konrad (2010) als zielgerichtet und systematisch beschrieben und kann mit einer oder mehreren Personen zu einem konkreten Erhebungsgegenstand stattfinden. In der vorliegenden ersten Phase der Durchführung der Unterrichtsbausteine wurde die teilstrukturierte Form des Interviews gewählt.

Das teilstrukturierte Interview mit den Lehrkräften vor der Erprobung der Unterrichtsbausteine (Tabelle 19) ist hilfreich, um wichtige Informationen auf klassenorganisationaler Ebene, Einschätzungen in Bezug auf den Mathematikunterricht der einzelnen Klassen und um gezielte Überlegungen zur Gestaltung der Unterrichtsbausteine mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht einzuholen. Die Lehrkräfte werden gebeten, didaktische und mathematikdidaktische Kriterien zu nennen, die sie als wesentlich bei der Gestaltung der Unterrichtsbausteine erachten. Zielgerichtete Überlegungen dazu werden in der Phase der Entwicklung der Unterrichtsbausteine einbezogen. Das teilstrukturierte Interview nach der Erprobung mit den Einschätzungen der Lehrkräfte zu den entwickelten Unterrichtsbausteinen (Tabelle 20) ist wesentlich für den Prozess der Weiterentwicklung der einzelnen Unterrichtsbausteine.

Für die teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften wurde von der Verfasserin dieser Arbeit ein Gesprächsleitfaden entwickelt. Dieser dient als Orientierungshilfe bei den Interviews und beschreibt zentrale Schlüsselfragen und optionale Fragen (Stigler & Felbinger, 2005). Die optionalen Fragen dienen vor allem der Begründung der Aussagen der Lehrkräfte, wonach diese umfassender gestützt werden können. Die generell offenen Fragestellungen sollen im Sinne der qualitativen Forschung (4.2.2.1) die befragten Lehrkräfte anregen, die Darstellungen zu den einzelnen Bereichen so ausführlich wie möglich zu beschreiben (Konrad, 2010).

Der Gesprächsleitfaden vor Beginn der Durchführung umfasst die drei Bereiche: 1) Gründe für die Teilnahme; 2) didaktische Kriterien zur Gestaltung von Unterrichtsbausteinen; 3) mathematikdidaktische Kriterien zur Gestaltung von Unterrichtsbausteinen.

**Tabelle 19**

*Gesprächsleitfaden vor Beginn der Durchführung (eigene Darstellung)*

| <b>Gesprächsleitfäden mit den Lehrkräften vor Beginn der Durchführung</b>           |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Gründe für die Teilnahme und Besonderheiten bezogen auf die Klassensituation</b> | <b>Schlüsselfragen</b><br>Aus welchen Gründen haben Sie sich zur Teilnahme für das vorliegende Projekt entschieden?<br><br>Wie schaut die Studententaktung in Ihrer Schule aus? Wann finden die Mathematikstunden statt? | <b>Schlüsselfragen</b><br>Welche Besonderheiten gibt es in Ihrer Klasse bezogen auf die Heterogenität beim Lernen im Fach Mathematik, die wir in der Untersuchung berücksichtigen können?<br><br>Wie setzt sich Ihre Klasse hinsichtlich Geschlechterverteilung zusammen? | <b>Optionale Fragen</b><br>Gibt es sprachliche Barrieren? Gibt es Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf?<br><br>Wenn ja, gibt es konkrete Maßnahmen, die wir in der Untersuchung berücksichtigen können? |
| <b>Mathematikdidaktische Prinzipien zur Gestaltung von Unterrichtsbausteinen</b>    | <b>Schlüsselfrage</b><br>Welche mathematikdidaktischen Kriterien sind Ihrer Meinung nach bei Gestaltung von Unterrichtsbausteinen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-             | <b>Schlüsselfragen</b><br>Haben Sie bereits Unterrichtsbausteine in Ihrem Mathematikunterricht selbst gestaltet?<br><br><b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                           | <b>Optionale Fragen</b><br>Wie gestalten Sie Unterrichtsbausteine im Mathematikunterricht im Sinne der ‚natürlichen Differenzierung‘?                                                                          |



|                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                       | Ganzes-Denkens<br>wichtig zu beachten?                                                                                                                                                                                                     | Wenn ja, welche Erfahrungen haben Sie dabei gesammelt?                                                                                                                                                                                         |
| <b>Didaktische Kriterien zur Gestaltung von Unterrichtsbausteinen</b> | <b>Schlüsselfragen</b><br>Welche didaktischen Kriterien sind Ihrer Meinung nach bei der Gestaltung von Unterrichtsbausteinen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens wichtig zu beachten? | <b>Schlüsselfragen</b><br>Wie gestalten Sie Unterrichtsbausteine in Mathematik hinsichtlich der Balance zwischen gemeinsamen und individuellen Lernphasen?<br><br><b>Optionale Fragen</b><br>Können Sie den Verlauf einer solchen beschreiben? |

Der Gesprächsleitfaden des teilstrukturierten Interviews nach der Datenerhebung umfasst vier Bereiche (Tabelle 20): 1) Positive Eindrücke; 2) Hürden der Durchführung bei den Lernenden; 3) Hürden der Durchführung bei der Lernbegleitung; 4) Verbesserungsvorschläge. Im ersten Bereich werden die positiven Eindrücke der Durchführung im Allgemeinen, wie auch bezogen auf die einzelnen Unterrichtsbausteine erfragt. Anhand dieser wird der am einzelnen Kind und/oder der ganzen Klasse sichtbar gewordene fachliche Lernzuwachs thematisiert. Der zweite Bereich umfasst die Hürden der einzelnen Unterrichtsbausteine, die während der Durchführung bei einzelnen Lernenden und/oder der ganzen Klasse aufgetreten sind. Bereich drei beinhaltet wesentliche Hürden, die Lehrkräfte als Lernbegleitung während der Durchführung feststellen konnten. Durch die Frage nach Verbesserungsvorschlägen im Bereich vier zu den entwickelten arithmetischen Unterrichtsbausteinen haben die befragten Lehrkräfte Gelegenheit von ihren diesbezogenen Einschätzungen und Erfahrungen zu berichten.

Tabelle 20

Gesprächsleitfaden nach Beginn der Durchführung (eigene Darstellung)

| <b>Gesprächsleitfäden mit den Lehrkräften <i>nach</i> der Durchführung</b> |                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                |  |
|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>Positive Ein-drücke</b>                                                 | <b>Schlüsselfragen</b>                                                                                                                           | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                  | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                                                        |  |
|                                                                            | Was ist Ihnen während der Durchführung der Unterrichtsbausteine besonders positiv in Erinnerung?                                                 | Können Sie einzelne Unterrichtsbausteine nennen, die Sie als sehr gelungen wahrnehmen?                                                                   | Können Sie die positiven Eindrücke am Lernzuwachs einzelner Kinder und/oder der ganzen Klasse verdeutlichen?                                                                                   |  |
| <b>Hürden bei Lernenden</b>                                                | <b>Schlüsselfragen</b>                                                                                                                           | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                  | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                                                        |  |
|                                                                            | Welche Hürden sind Ihnen während der Durchführung der Unterrichtsbausteine bei den Lernenden aufgefallen?                                        | Können Sie einzelne Unterrichtsbausteine oder konkret eine Sequenz nennen, die bei Kindern zu Missverständnissen geführt haben?                          | Können Sie einzelne Kinder oder Gruppen von Kindern, bei denen die Aufgaben zu Missverständnissen geführt haben, näher beschreiben?<br><br>Können Sie konkret eine Sequenz beschreiben?        |  |
| <b>Hürden bei der Lernbegleitung</b>                                       | <b>Schlüsselfragen</b>                                                                                                                           | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                  | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                                                        |  |
|                                                                            | Welche Hürden sind Ihnen während der Durchführung der Unterrichtsbausteine bei der Lernbegleitung aufgefallen?                                   | Können Sie einzelne Unterrichtsbausteine oder konkret eine Sequenz nennen, die in der Umsetzung für Sie schwierig waren?                                 | Können Sie konkret eine einzelne Sequenz beschreiben, bei denen Sie Hürden bei der Umsetzung feststellen konnten?<br>Worauf beziehen sich diese Hürden konkret?                                |  |
| <b>Verbesserungsvorschläge der entwickelten Unterrichtsbausteine</b>       | <b>Schlüsselfragen</b>                                                                                                                           | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                  | <b>Optionale Fragen</b>                                                                                                                                                                        |  |
|                                                                            | Haben Sie Verbesserungsvorschläge der entwickelten Unterrichtsbausteine?<br><br>Können Sie konkret Sequenzen und Verbesserungsvorschläge nennen? | Haben Sie Verbesserungsvorschläge, wie man die Ausgewogenheit an gemeinsamen und individuellen Lernphasen bei den Unterrichtsbausteinen optimieren kann? | Haben Sie Verbesserungsvorschläge, wie man die Lernbegleitung bei den einzelnen Unterrichtsbausteinen verbessern kann?<br><br>Welche zusätzlichen Hilfestellungen würden Ihnen konkret helfen? |  |

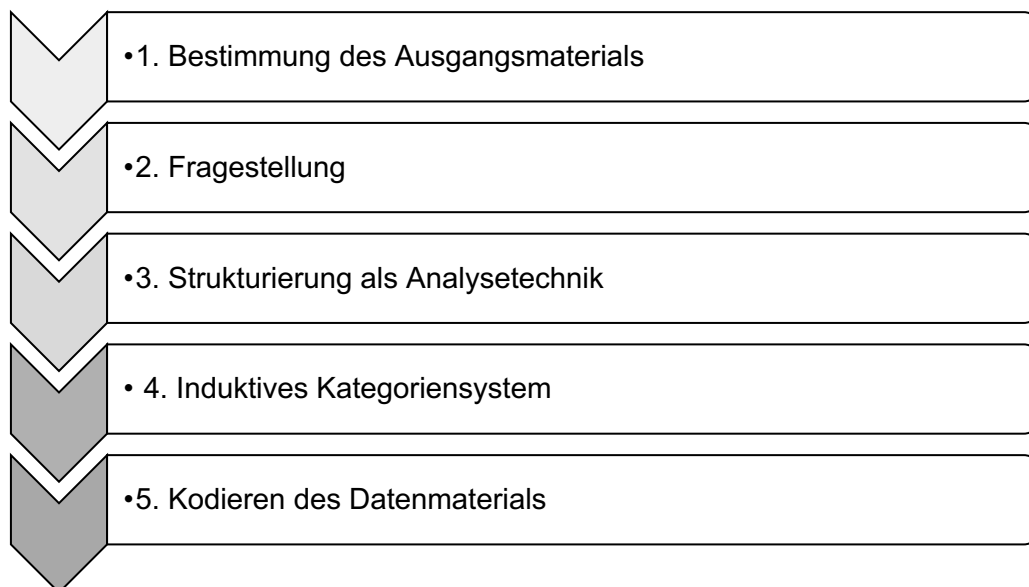
### ***Inhaltliche Strukturierung und Kategorienbildung***

Im Anschluss an die durchgeführten teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften wurden die Gesprächsteile transkribiert. Die Autorin bedient sich dabei der Teiltranskription, da nur für die Forschungsfragen interessante Gesprächsteile transkribiert werden. Daran anschließend wurde eine inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse als passende Analysemöglichkeit gewählt (ausführlich Abschnitt 9.3). Bei der inhaltlichen Strukturierung werden diejenigen Merkmale extrahiert und zusammengefasst, welche für die Untersuchung relevant sind (Mayring, 2015).

Das Ablaufmodell im Folgenden beschreibt überblicksartig die Schritte der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) und konkretisiert diese in der vorliegenden Untersuchung.

#### **Abbildung 13**

*Ablaufmodell der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015, S. 54 ff.) in Anlehnung an Bierbrauer, 2022*



- 1. Bestimmung des Ausgangsmaterials

*Festlegung des Materials:* Die Grundlage des Datenmaterials waren teilkodierte qualitative Interviews mit den 4 Lehrkräften aus den 2 Kooperationsklassen (Abschnitt 7.2).

*Analyse der Entstehungssituation:* Alle teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften wurden getrennt voneinander, an der jeweiligen Schule in einem separaten Klassenraum und von der Autorin durchgeführt (Abschnitt 7.2).

*Formale Charakteristika des Materials:* Die teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften wurde anhand eines Gesprächsleitfadens (Abschnitt 7.2) geführt und transkribiert. In diesem Zusammenhang wurde eine Teilkodierung durchgeführt (Abschnitt 7.2).

- 2. Fragestellung

Aus den vorhandenen theoretischen Überlegungen zum Thema (Kapitel 1 bis 4) ergaben sich die übergeordnete Forschungsfrage und die untergeordneten Fragestellungen zur ersten Durchführung (Abschnitt 7.1).

- 3. Strukturierung als Analysetechnik

Angepasst an die Forschungsfrage und das Datenmaterial wurde als geeignete Analysetechnik die Strukturierung ausgewählt. „Ziel inhaltlicher Strukturierungen ist es, bestimmte Themen, Inhalte, Aspekte aus dem Material herauszufiltern und zusammenzufassen. Welche Inhalte aus dem Material extrahiert werden sollen, wird durch theoriegeleitet entwickelte Kategorien und (sofern notwendig) Unterkategorien bezeichnet.“ (Mayring, 2015, S. 103) In der vorliegenden Durchführung wurde die inhaltliche Strukturierung verwendet.

- 4. Induktives Kategoriensystem

Um die Forschungsfrage F 1 und die untergeordneten Forschungsfragen F 1.1 bis F 1.7 beantworten zu können, wird das gesamte Datenmaterial induktiv bearbeitet. Die Codierung erfolgt möglichst interviewnah als paraphrasierte Stichworte und/oder als paraphrasierte Gesprächseinheiten. Die Forschungsfragen F1 und die untergeordneten Forschungsfragen F 1.1 bis F 1.7 werden dabei nicht entlang der Forschungsfragen beantwortet, sondern entlang der induktiv gewonnenen Hauptkategorien.

- 5. Kodieren des Datenmaterials

Die Untersuchungsergebnisse wurden hinsichtlich der Fragestellungen analysiert und interpretiert (Abschnitt 7.3 und Abschnitt 7.4).

## 7.4 Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews

Nun folgend werden die Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews und die Folgerungen für die Weiterarbeit vor und nach der Durchführung getrennt voneinander dargestellt.

### 7.4.1 Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews vor der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer

Die Beantwortung der Forschungsfrage F 1.1 steht im Mittelpunkt. Die Hauptkategorie *Gestaltung der Lernumgebungen* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.

#### ***Gestaltung der Lernumgebungen***

Alle Lehrkräfte haben bereits Lernumgebungen im Fach Mathematik gestaltet und betonen auch die Notwendigkeit dieser für den Mathematikunterricht. In diesem Zusammenhang nennen alle vier befragten Lehrkräfte mathematikdidaktische Kriterien als lohnend und wichtig zu berücksichtigen in der Phase der Gestaltung der Lernumgebungen. Die Aussagen der befragten Lehrkräfte von „guten“ mathematikdidaktischen Kriterien zur Gestaltung von Lernumgebungen bilden inhaltlich im Großen und Ganzen insgesamt ineinandergreifende Merkmale und nicht etwa gegensätzliche Merkmale ab. Wenngleich nicht alle Lehrkräfte alle Kriterien mit gleicher Gewichtung benennen, betonen alle Lehrkräfte, dass alle Schüler\*innen Mathematik und deren Inhalte (eigen-)aktiv und handelnd erleben sollen. Demonstrations- und Arbeitsmittel sind in dieser frühen Phase des Mathematiklernens laut Aussage aller wichtig und sollen den Kindern vor allem beim Aufbau von inneren Vorstellungsbildern helfen.

Lohnend sehen alle Lehrkräfte eine gute Mischung von Methoden und hier vor allem von Sozialformen. Aufgrund der im Anfangsunterricht oft beschriebenen „Leistungsschere“, betonen sie in weiterer Folge, wie wichtig eine Öffnung des Zahlenraums und eine Orientierung in Ganzheiten für alle Kinder ist. Gleichzeitig betonen alle Lehrkräfte, wie schwierig die Gestaltung gerade von arithmetischen Lernumgebungen ist. Hauptlehrkraft G. Mair erzählt auf die Frage, ob sie bereits Lernumgebungen im Fach Mathematik mit natürlich differierenden Aufgabenstellungen gestaltet hat, folgendes:

Ja, das versuche ich regelmäßig. Ich muss aber ehrlich sagen, in anderen Bereichen vom Mathematikunterricht ist das leichter. Besonders schwierig ist es, wenn ich *Lernumgebungen in der Arithmetik* überlegen und gestalten soll. Da ist jedes Kind einfach auf einem komplett anderen Stand. Die einen können schon bis 100 zählen und mit anderen zähle ich jeden Tag aufs Neue die Finger einzeln ab. Und dann zu überlegen, wie ich die Aufgaben *natürlich*

*differenzieren* und im besten Fall (lacht!) diese zu einem Überthema, eben ein „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ gestalten kann, ist wirklich schwierig. (G. Mair, M5:43, Hervorhebung kursiv C.G.)

Aus obenstehenden Ergebnissen kann schlussgefolgert werden, dass es grundsätzlich eine deutliche Übereinstimmung bei den von den Lehrkräften beschriebenen mathematikdidaktischen Kriterien zur Gestaltung von Lernumgebungen und den zentralen fachdidaktischen Leitideen für einen inklusiven Mathematikunterricht (Abschnitt 3.3.2) gibt. Auch decken sich die Berichte der vier Lehrkräfte, wie von G. Mair, wonach es für sie herausfordernd zu sein scheint, gemeinsame Lernsituationen gerade in der Arithmetik zu ermöglichen mit den von Korff (2018) befragten Lehrkräften (Abschnitt 3.2.1).

### ***Organisation der Lernumgebungen***

Nachfolgend wird die Forschungsfrage F 1.2 beantwortet. Die Hauptkategorie *Organisation der Lernumgebungen* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.

Alle Lehrkräfte thematisieren den Umgang mit der Vielfalt der Lerngruppe, den es gerade auch im frühen Arithmetikunterricht zu berücksichtigen gilt. In diesem Zusammenhang nennen alle befragten Lehrkräfte die Möglichkeiten der Differenzierung im Mathematikunterricht und eine optimale Förderung aller Schüler\*innen als wesentlich. Dabei scheint gerade die Organisation der Lernumgebungen und damit zusammenhängend der Einsatz von Sozialformen als zentral. Alle vier befragten Lehrkräfte geben an, dass es gerade in heterogenen Lerngruppen herausfordernd ist, geöffnete und auf entdeckendes Lernen gerichtete Lernumgebungen im Klassenzimmer zu organisieren. Hauptlehrkraft K. Stadler erzählt auf die Frage, wie sie Lernumgebungen in Mathematik hinsichtlich der Balance zwischen gemeinsamen und individuellen Lernphasen gestaltet, folgendes:

Ich versuche so gut als möglich gemeinsame Lernsituationen zu schaffen. In den letzten Jahren hatte ich immer eine so große Vielfalt und Leistungsschere in meiner Klasse. Wenn ich ehrlich bin ist es schon eine sehr große Herausforderung für unser tägliches Arbeiten. Und diese enorme *Spannung* zwischen „gemeinsam lernen“ und „effektiv fördern“ spüre ich schon oft. Da stelle ich mir oft die Frage und das tun wir auch gemeinsam im Kollegium, wie wir Lernumgebungen am besten organisieren können. Mache ich das am besten in Tandemarbeit, oder in Kleingruppen, oder mit allen gemeinsam. Das Gefühl, die einen könnten unter-

fordert sein und die anderen überfordert, schleicht sich bei mir ein. Und dann werde ich unsicher, dass ich allen Kindern so gut als möglich gerecht werde. (K. Stadler, S10:22, Hervorhebung kursiv C.G.)

Alle befragten Lehrkräfte nennen einhellig das Konzept „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ zwar als notwendig und sinnvoll im Unterricht, aber gleichzeitig werden auch Ängste und Unsicherheiten einiger Lehrkräfte wahrgenommen. Hauptlehrkraft G. Mair berichtet von ihren Erfahrungen:

Mir würde es konkret helfen, den Begriff „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ *klarer* zu fassen. Das liest sich alles so toll. Mir ist im Unterricht aber oft nicht klar, wie ich es *konkret* schaffe, dass alle Kinder gemeinsam *an einer Aufgabe* – jeder auf der ihm eigenen Stufe – arbeiten kann. Und dann noch dazu: Wie mache ich das konkret mit besonderen Kindern in der Klasse? Also ich stelle mir das sehr schwierig vor und das hat mitunter dazu geführt, dass ich das in meinem Unterricht oftmals vernachlässigt habe. Das gebe ich ehrlich zu. (G. Mair, M35:02, Hervorhebung kursiv C.G.)

Trotz der hier exemplarisch dargestellten Differenzen der Aussagen der Lehrkräfte, gibt es für alle – jeweils von ihrem persönlichen Standpunkt ausgehend – letztlich übereinstimmende didaktische Merkmale zur Gestaltung von Lernumgebungen, wie sie auch in der Literatur (Abschnitt 3.1.2) beschrieben werden. Zwar werden die einzelnen Kriterien obenstehend oftmals von den Lehrkräften nicht mit demselben Wortlaut wie beispielsweise jene von Moser Opitz (2014) definiert beschrieben, dennoch sind die Ausführungen der Lehrkräfte dazu in ihrem Wesen überwiegend deckend.

### **Folgerungen für die Weiterarbeit**

Wie dargestellt, wurden in einem ersten Schritt durch die teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften die Hauptkategorien „Gestaltung von Lernumgebungen“ und „Organisation von Lernumgebungen“ herausgearbeitet. Während der Phase der Entwicklung der Unterrichtsbausteine werden diese beiden Bereiche besonders berücksichtigt.

Vor diesem Hintergrund geben alle beteiligten Lehrkräfte an, bereits selbst Lernumgebungen im Mathematikunterricht gestaltet zu haben. G. Mair empfindet es als besonders herausfordernd, gemeinsame Lernsituationen für alle Kinder gerade in der Arithmetik zu ermöglichen. Gerade deswegen haben sich die im Projekt involvierten Lehrkräfte dazu entschlossen, bei dieser Untersuchung teilzunehmen um so den Einsatz der Lernumgebungen, das dazugehörige Lehr-Lern- Material kennenzulernen und im besten Fall, so die Aussage von K. Stadler, das eigene Professionswissen weiterzuentwickeln.

Da bei den Interviews alle Lehrpersonen als Kriterien zur Gestaltung von Lernumgebungen jene übereinstimmend nennen, welche auch als zentrale fachdidaktische Leitideen für einen inklusiven Mathematikunterricht gelten (Abschnitt 3.2.2), wurden sie bei der Gestaltung der Lernumgebungen besonders berücksichtigt. Dazu gehören die Kriterien i) Entdeckendes, verstehensorientiertes Lernen; ii) Arbeiten in Ganzheiten; iii) Konzentration auf den Basisstoff; iii) Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel; iv) Produktives Üben; v) Lernen im Austausch mit anderen; vi) Lernen auf eigenen Wegen.

Die Ängste und Befürchtungen führten, wie bei G. Mair dazu, dass das Konzept „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ im Fach Mathematik bislang noch nicht durchgängig im Unterricht verankert und umgesetzt wurde. Bei der Entwicklung der Lernumgebungen wurde dieses didaktische Kriterium, welches eben als Herausforderung wahrgenommen wird, besonders berücksichtigt, um so das Konzept „Lernen am Gemeinsamen Gegenstand“ auf differenten Ausgangs- und Zielniveaus der Schüler\*innen zu optimieren. Konkret wurden die Unterrichtsbausteine (Kapitel 6) so gestaltet, dass jeder Baustein zu einem übergeordneten Thema entwickelt wurde und die unterschiedlichen Aktivitäten zu diesen Bausteinen differente Ausgangs- und Zielniveaus der Kinder berücksichtigen.

Außerdem beansprucht die Konzeption der Bausteine den Anspruch, dass allen Lernenden ein „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ und ein von- und miteinander Lernen im fachlichen Austausch ermöglichen wird. Vor diesem Hintergrund werden bei der Gestaltung der Bausteine, die von der Fachdidaktik proklamierte Balance zwischen Lernumgebungen in der Klasse (LK), Lernumgebungen mit einem Lernpartner (LL) und individuellen Lernphasen (IL) berücksichtigt (Kapitel 6) und bei den einzelnen Aktivitäten der Unterrichtsbausteine aufgelistet. Diese Empfehlungen zur methodischen Umsetzung sollen nicht als starr und vorgegeben angesehen werden, vielmehr können sie als Orientierung für die Lehrkräfte dienen.

#### **7.4.2 Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews nach der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer**

Die Beantwortung der Forschungsfrage F 1.3 steht im Mittelpunkt. Die Hauptkategorie *Motivation der Lernenden in der Situation* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.



### ***Motivation der Lernenden in der Situation***

Drei von vier Lehrkräften geben an, dass sie die Motivation von allen Lernenden als Basis für eine fachlich vertiefte Auseinandersetzung mit den Inhalten der Mathematik sehen. Diese Lehrkräfte geben auch an, dass die Kinder ihrer Meinung nach bei den einzelnen Aktivitäten der Lernumgebungen motiviert waren und diese auch mit Freude und Eifer durchführten. Die Frage, welches Potenzial er bei den entwickelten Lernumgebungen für die Lernenden sieht, beantwortet M. Berger wie folgt:

Ich finde unsere Kinder waren mit Eifer und Freude dabei. Dadurch kam es vielleicht auch, dass sie dann *bei einigen Aktivitäten ins Knobeln* kamen. Besonders in Erinnerung geblieben ist mir das Spiel ‚Plättchen werfen‘ aus Baustein VI. Sie waren mit Inbrunst dabei und waren ganz gespannt, wer mehr, weniger oder gleiche viele blaue wie rote Plättchen wirft. Diese Aktivität, bei welchem sie ganz nebenbei so viel gelernt haben, hat ihnen totale Freude bereitet. Hmmm, da gibt’s mehrere Bausteine, aber auch Baustein VII, schnelles Sehen mit dem Würfel war das glaub ich. Ja da waren sie besonders motiviert. Auf die Fragen „Wie hast du das so schnell gesehen? Welche anderen Zahlen kannst du in der 4/5 noch erkennen und wie?“ konnten wir sie gar nicht mehr stoppen und (lacht!) sie haben von sich aus so viele Möglichkeiten gefunden. Da hat man gemerkt, sie haben *etwas durchdrungen*, etwas so richtig verstanden. (M. Berger, B55:22, Hervorhebung kursiv C.G.)

Hauptlehrkraft G. Mair zeigte sich anfangs vor der Durchführung der Unterrichtsbausteine unsicher darin, wie sie Lernumgebungen mit der ganzen Klasse auch mit besonderen Kindern konkret umsetzen kann, „Mir ist im Unterricht aber oft nicht klar, wie ich es *konkret* schaffe, dass alle Kinder gemeinsam *an einer Aufgabe* – jeder auf der ihm eigenen Stufe – arbeiten kann. Und dann noch dazu: Wie mache ich das konkret mit besonderen Kindern in der Klasse?“ (G. Mair, M35:02). Nach der Durchführung der Unterrichtsbausteine berichtet sie davon, dass sich ihre anfängliche Unsicherheit bei der Durchführung jener gerade auch bei leistungsstarken Kindern gelegt hat:

Also ich muss schon sagen, dass ich wirklich positiv überrascht war. In der Vergangenheit hatte ich oft das Gefühl, die Zeit reicht nicht aus. Sobald ich bei einem Kind war und mit diesem eine Aktivität machen wollte, hatte ich schon dahinter einen sitzen, der sich gelangweilt hat und im besten Fall noch gähnte (lacht.). Hier aber muss ich ehrlich sagen, waren alle Kinder, auch meine Überflieger, wirklich gut dabei und machten bei den Aktivitäten *spannende Entdeckungen*. Dass die das dann auch noch so toll in Worte fassen konnten, ich war ganz baff. Ich finde auch, dass die Kinder sich das gegenseitig so toll beigebracht haben. [...]

Was ich schon besonders betonen möchte, und das ist meines Erachtens eben auch eine Grundlage für aktives Lernen sind die Materialien. Alle Kinder hatten *ausgewählte Materialien* zur Verfügung, das war schon toll und hat sie noch mehr angespornt zu knobeln und mitzumachen. (G. Mair, M45:10, Hervorhebung kursiv C.G.)

Nachfolgend wird die Forschungsfrage F 1.4 beantwortet. Die Hauptkategorie *Empfundene Qualität* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.

### ***Empfundene Qualität***

Alle Lehrkräfte geben an, dass sie die Lernumgebungen für diese frühe Phase des Mathematiklernens generell als stimmig empfanden. Gerade die Aktivitäten der einzelnen Bausteine auf unterschiedlichen Ausgangs- und Zielniveaus betonen alle einhellig als gelungen. Drei von vier Lehrkräften sprachen explizit an, dass sie die Angabe von möglichen Sozialformen bei den einzelnen Aktivitäten als hilfreich wahrgenommen haben. Auf die Frage, welches Potenzial sie bei den entwickelten Lernumgebungen für die Lernbegleitung sieht, berichtete S. Bucher wie folgt:

Die Lernumgebungen sind für mich sehr stimmig. Ich wusste, wie ich diese einsetzen kann. Ich hab ja eine große Leistungsschere in meiner Klasse. Es gab genügend Aktivitäten für die Überflieger, aber auch für die, die ein bisschen ‚mehr‘ brauchen. Gut fand ich auch, dass konkret Möglichkeiten der Sozialformen dabeistand. Das hat mir ein wenig Sicherheit gegeben. Auch glaub ich, dass diese Dreiteilung – Einstieg gemeinsam, Erarbeitung je nach Sozialform und dann wieder Abschluss gemeinsam – für die Kinder und uns sehr hilfreich waren. Klar muss man das nicht bei jeder Stunde so machen, aber zu wissen, dass es Phasen gibt, die gemeinsam sind und dann wieder an denen sie alleine ‚losgelassen‘ werden, find ich super! (S. Bucher, B10:22, Hervorhebung kursiv C.G.)

Auch betonen alle Lehrkräfte, dass sich die Unsicherheit, wie man Lernumgebungen im Mathematikunterricht organisieren kann, verringerte. Vor Beginn der Durchführung der Lernumgebungen berichtete Frau K. Stadler, „da stelle ich mir oft die Frage und das tun wir auch gemeinsam im Kollegium, wie wir Lernumgebungen am besten organisieren können. [...] Das Gefühl, die einen könnten unterfordert sein und die anderen überfordert, schleicht sich bei mir ein. Und dann werde ich unsicher, dass ich allen Kindern so gut als möglich gerecht werde“. (K. Stadler, S10:22) Auf die Frage nach der Durchführung, welches Potenzial sie bei den entwickelten Lernumgebungen für die Lernbegleitung sieht, berichtet sie:

Also meine eigene Unsicherheit, wie ich Lernumgebungen konkret im Klassenzimmer umsetzen und organisieren kann, hat sich zum Großteil gelegt. Ich finde es gut, dass die Aktivitäten immer ein *konkretes gemeinsames Überthema* hatten. Ein „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ gerade im frühen Arithmetikunterricht ist zwar nach wie vor für mich nicht leicht, das gebe ich zu. Aber die Bausteine gaben mir eine *gute Orientierung* und ich werde das auch in eine ähnliche Richtung in Zukunft im Matheunterricht versuchen. (K. Stadler, S50:05, Hervorhebung kursiv C.G.)

Vor Beginn der Durchführung berichtete G. Mair davon, „Mir würde es konkret helfen, den Begriff ‚Lernen am gemeinsamen Gegenstand‘ *klarer* zu fassen. [...] Mir ist im Unterricht aber oft nicht klar, wie ich es *konkret* schaffe, dass alle Kinder gemeinsam *an einer Aufgabe* – jeder auf der ihm eigenen Stufe – arbeiten kann. Und dann noch dazu: Wie mache ich das konkret mit besonderen Kindern in der Klasse?“ (G. Mair, M35:02, Hervorhebung kursiv C.G.) Nach der Durchführung antwortet sie auf die Frage, welches Potenzial sie bei den Unterrichtsbausteinen für die Lernbegleitung sieht:

Ich hab ja zugegebenermaßen Lernumgebungen in meinem Unterricht eher vernachlässigt. Das hatte wohl auch vor allem damit zu tun, dass mir das fachliche ‚Rüstzeug‘ oftmals fehlte. Bei den besonderen Kindern habe ich an meine Überflieger gedacht, die die einfach schon weit mehr können als der Rest der Klasse. Und da war ich ursprünglich skeptisch bei den Bausteinen. Aber ich muss sagen, dass gerade die Aktivitäten der fortgeschrittenen Bausteine, also ab Baustein IV würde ich mal sagen, schon sehr viele und passende Aktivitäten gerade auch für meine Überflieger dabei waren. Das fand ich schon super! Und diese letzte gemeinsame Phase von jedem Baustein, also die Phase des Darüber-Sprechens, was sie heute konkret entdeckt haben, kommt natürlich diesen Überfliegern schon auch sehr zugute. (G. Mair, M70:10, Hervorhebung kursiv C.G.)

Nun folgend wird die Forschungsfrage F 1.5 beantwortet. Die Hauptkategorie *Zahldarstellungen mit Fingern* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.

### ***Zahldarstellungen mit Fingern***

Alle Lehrkräfte geben an, dass die Anzahl der wahrgenommenen Hürden bei den Lernenden überschaubar war. Zwei Lehrkräfte empfanden es als explizit lohnend, dass sie die Kinder durch ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger bei Zahldarstellungen

unterstützten. In der einen Klasse bezog sich diese Aussage auf das Mädchen mit Sonderpädagogischen Förderbedarf, in der anderen Klasse auf ein Regelschulkind. Auf die Frage, ob sie einzelne Lernumgebungen oder konkret eine Sequenz nennen könnten, die bei den Kindern zu Missverständnissen geführt hat, berichtete S. Bucher wie folgt:

Also ich muss ehrlich sagen, dass weit weniger Hürden bei den Bausteinen aufgetaucht sind als ursprünglich gedacht. Sicher, die ein oder andere Aktivität war für unsere Lisa schon schwierig. Gerade *Zahldarstellungen mit Fingern* zu zeigen, wie in Baustein IV beispielsweise, und dann am besten noch unterschiedliche Zeigeweisen für Zahlzerlegungen. Das war schon wirklich schwierig für sie. Es war sicherlich sehr hilfreich, dass ich sie durch *ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger* bei Zahldarstellungen unterstützt habe. (S. Bucher, B80:05, Hervorhebung kursiv C.G.)

Auch betonen zwei Lehrkräfte, dass es für einige Kinder schwierig war, unterschiedliche Zahldarstellungen mit Fingern zu zeigen und diese auch zu verbalisieren. Die Frage, ob einzelne Lernumgebungen oder konkret eine Sequenz genannt werden könne, die bei den Kindern zu Missverständnissen geführt habe, veranlasst G. Mair von ihren Erfahrungen in der Arbeit mit einem Kind zu erzählen, welches auch nach einiger Zeit der Übung jeden Finger einzeln hochzählte. Sie konnte keine tragfähige Strategie nutzen und bediente sich dafür des Alleszählens. An dieser Stelle wird eine gewisse Frustration auf Seiten der Lehrkraft wahrgenommen:

Bei einigen Kindern ist mir aufgefallen, dass sie sich sehr schwertaten, unterschiedliche Zahlzusammensetzungen mit den Fingern zu zeigen und dann auch noch zu versprachlichen. Bei manchen Kindern kann es auch an uns Lehrkräften liegen, dass wir jetzt nicht genau das anbieten, was sie eigentlich bräuchten. Aber man muss schon ehrlich sagen, bei einzelnen scheint es so, als sei das Ende der Fahnenstange erreicht. Ich habe mit allen Kindern, und das immer wieder, unterschiedliche *Zahldarstellungen mit den Fingern* geübt. Einige Kinder haben nach Wochen immer noch einen Finger nach dem andern hochgezählt. Also wenn bei jeder Aufgabe jeder Finger einzeln hochgezählt wird und bei keiner einzigen Aufgabe eine Strategie wie die ‚Hauptzeigeweise mit 5‘ genutzt wird, ist das für mich irgendwann auch Frust und für das Kind vermutlich auch. (G. Mair, M80:05, Hervorhebung kursiv C.G.)

Die Beantwortung der Forschungsfrage F 1.6 steht im Mittelpunkt. Die Hauptkategorie *Professionelle Entwicklung* wurde induktiv aus dem Datenmaterial gewonnen.

### **Professionelle Entwicklung**

Drei von vier Lehrkräften gaben an, dass sie sich vor der Durchführung der Unterrichtsbausteinen nochmals mit dem eigenen Professionsverständnis auseinandergesetzt haben. Auf die Frage, welche Hürden bei der Durchführung der Unterrichtsbausteine bei der Lernbegleitung aufgefallen sind, erzählt K. Stadler von ihren Überlegungen zu ihrem Professionsverständnis, welche sie gemeinsam im Team vor der Durchführung anstellte:

Ich wusste im Vorfeld, dass ich mit dieser Klasse eine ganz ‚besondere‘ übernehme. Es ist schon klar, dass es keinen Unterschied zwischen Mathe und den anderen Fächern gibt. Aber Mathe ist ein besonderes Fach für den gemeinsamen Unterricht. Ich würde sagen besonders schwierig. Im Vorfeld haben wir uns im Team darauf geeinigt, dass wenn wir eine Aktivität in der Klasse zusammen machen, dann machen *wir alles* zusammen. Wir machen nicht nur Sport oder Musik zusammen, sondern alles. Ich habe mich während der Durchführung der Bausteine immer wieder daran erinnert. Natürlich war das auch eine Herausforderung, auch für uns im Team, aber das ist unser Job. (K. Stadler, S90:09, Hervorhebung kursiv C.G.)

Mit „wir machen alles zusammen“ meinte K. Stadler, dass sie im Team mit allen Schüler\*innen gemeinsam jedes Fach unterrichteten. Kein Kind, auch nicht im Fach Mathematik, soll in einem separaten Raum beschult werden.

Alle befragten Lehrkräfte betonten einhellig, dass sie die einzelnen Aktivitäten der Lernumgebungen und auch die Lehr-Lern-Materialien als sehr stimmig empfunden haben. Alle Lehrkräfte betonen jedoch auch, dass es für sie leichter gewesen wäre, wenn sie eine begleitende Schritt-für-Schritt-Anleitung der einzelnen Bausteine gehabt hätten. M. Berger erzählt in diesem Zusammenhang:

Ich fand die Materialien und die Aktivitäten zu den drei Bereichen super. Hier würde ich nichts oder nur wenig ändern. Allerdings hab‘ ich ja keine vertiefte pädagogische Ausbildung. Ich hab mir nicht leicht getan, zu wissen, was ich als nächstes zu tun habe und wie ich das konkret umsetzen könnte. So etwas wie eine Anleitung hätte mir sicherlich geholfen. (M. Berger, B85:08)

In eine ähnliche Richtung argumentierte Frau G. Mair:

Da ich manchmal unsicher bin, hätte mir eine Schritt-für-Schritt-Anleitung sicherlich geholfen. Wenn ich diese Anleitung hab und diese ein paar Mal mit meinen Kindern gemacht hab, dann schule ich ja damit auch meinen Blick und ich weiß auch ein bisschen mehr, auf was ich achten muss und welche Schritte ich als nächstes machen kann. (G. Mair, M90:07)

### ***Begleitende sprachliche Anweisungen***

Alle vier befragten Lehrkräfte betonen, wie wichtig konkrete und schriftliche Ausformulierungen von sprachlichen Anweisungen, Fragen, Hilfestellungen, Formulierungen o.Ä. für die Lehrkräfte sind. Zwar wurden in der ursprünglichen Skizzierung der Bausteine (Kapitel 6) einzelne Formulierungshilfen für die Lehrkräfte ausformuliert, dennoch sind diese laut den Lehrkräften zu wenig klar und nicht durchgängig bei allen Bausteinen und Aktivitäten formuliert. Auf die Frage, welche Hürden bei der Durchführung der Lernumgebungen bei den Lernbegleitern wahrgenommen worden sind, berichtet K. Stadler:

Also mir hätte es sehr geholfen, wenn mehr konkrete sprachliche Anweisungen, Formulierungen bei den einzelnen Bausteinen gestanden wäre. Hin und wieder gab es zwar bei den einzelnen Bausteinen diese Hinweise, aber ich brauche das konkret. Vor allem im Unterrichtsgeschehen, wenn die Kinder beim Arbeiten und Forschen sind und der eine braucht noch das, tue ich mir echt schwer, passende Formulierungen in der Situation zu finden. Und dann war ich mir bei manchen Reaktionen der Kinder nicht sicher, ob sie nicht gewusst hatten, was sie tun sollten, weil sie es wirklich nicht wussten, also nicht konnten, oder ob es daran gelegen ist, dass meine Frage oder Anweisung einfach unklar und unpräzise war und sie deswegen nicht wussten, was zu tun ist. (K. Stadler, S95:08)

### ***Folgerungen für die Weiterarbeit***

Bei der Beantwortung der Forschungsfrage F 1.7 wird auf die gewonnenen Hauptkategorien der Forschungsfragen F 1.5 und F 1.6 verwiesen. Aus den dort dargestellten Ergebnissen der Hürden, welche bei der Durchführung der Unterrichtsbausteine bei den Lernenden und/oder bei den Lernbegleitern auftraten, kann schlussgefolgert werden, dass weitere Anpassungen der entwickelten Unterrichtsbausteine vorgenommen werden müssen. In diesem Zusammenhang wurde bei der Hauptkategorie „Professionelle Entwicklung“ von den vier befragten Lehrkräften als Verbesserungsvorschlag eine Schritt-für-Schritt-Anleitung der einzelnen Bausteine als Orientierungshilfe für die Lehrkräfte genannt. Ergänzend angeführt wurde bei der Hauptkategorie „Begleitende sprachliche Anweisungen“ eine konkrete Verschriftlichung sprachlicher Formulierungen als Hilfestellungen für die Lehrkräfte bei der Durchführung der einzelnen Lernumgebungen.

Diese Weiterentwicklungen der einzelnen Bausteine werden in Kapitel 8 ausführlich erläutert.

## 8 Überarbeitung der Unterrichtsbausteine

Aufbauend auf den Ergebnissen der teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften und deren Erfahrungen der Durchführungen der Lernumgebungen im Unterricht (Kapitel 7), wurden die einzelnen Unterrichtsbausteine für den frühen Arithmetikunterricht über- und weiter ausgearbeitet. Im Rahmen der ersten Erprobung der Unterrichtsbausteine im Unterricht konnte eine *generelle innere Stimmigkeit* und eine praktische Umsetzbarkeit dieser herausgearbeitet werden (Kapitel 7). Aus diesem Grund wurden die Unterrichtsaktivitäten in ihren inhaltlichen Grundzügen weitgehend so belassen.

In der ursprünglichen Ausarbeitung der Aktivitäten der Unterrichtsbausteine, welche in Kapitel 6 dieser Arbeit beschrieben werden, wurden beispielhafte Aufgabenstellungen ausgearbeitet. Hingegen bei dieser Durchführung erhielten die Lehrkräfte zusätzlich eine Handreichung zur Durchführung der Bausteine und ein Begleitmaterial, in welchem der aktuelle Wissensstand zu inklusiver Beschulung im frühen Arithmetikunterricht wie auch methodische und inhaltliche Überlegungen zum Projekt dargestellt werden. Die Handreichung zur Durchführung umfasst eine Übersicht über das Programm, eine Lernstandserhebung und eine ausführliche Beschreibung der 13 einzelnen Bausteine.

Jede dieser Lernumgebungen wird fachdidaktisch eingebettet, die Durchführung der einzelnen Unterrichtsbausteine wird ausführlich und Schritt-für Schritt dargestellt, bei einzelnen werden Erweiterungs- und Vertiefungsaufgaben als Ideen zur Differenzierung und zur Gestaltung gemeinsamer Lernsituationen aufgelistet und die Arbeits- und Demonstrationsmittel für die Unterrichtsbausteine werden konkret benannt. Bei diesen überarbeiteten Unterrichtsbausteinen werden zudem gezielte und überarbeitete sprachliche Formulierungen bei den einzelnen Unterrichtsbausteinen für die Lehrkräfte angeführt. Diese sollen den Lehrkräften im weiteren Verlauf der Durchführung als sprachliche Orientierung dienen.

Die methodische Umsetzung der einzelnen Unterrichtsbausteine (im Kollektiv in der Klasse, mit einem Lernpartner und/oder als individuelle Lernphase) wird nun als Visualisierung direkt bei den einzelnen Aktivitäten angeführt. Nun folgend werden die 13 überarbeiteten Lernumgebungen, welche die Grundlage für die zweite Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer (Kapitel 9) bilden, vorgestellt.

Als Orientierung, welche Unterrichtsbausteine überarbeitet und weiter ausgearbeitet wurden, wird an dieser Stelle der Arbeit die gleiche Tabelle wie in Abschnitt 6.2 angeführt. Die erweiterten und fokussierenden Aktivitäten zu den einzelnen Unterrichtsbausteinen werden an gegebener Stelle farblich gekennzeichnet.



**Tabelle 21**

*Übersicht über die einzelnen Unterrichtsbausteine (eigene Darstellung)*

---

*Baustein I – Resultatives Zählen: Wir und unsere Klasse (LK)*

*Baustein II – Resultatives Zählen: Worauf muss man beim Zählen achten?*

Aktivität: Zählen in der Klasse als Ritual in der Klasse (LK)

Aktivität: Zählen mit bewussten Zählfehlern (LK)

Aktivität: Zählprinzipien (LK)

Aktivität: Schätzen und Zählen (LK/LL)

*Baustein III – Resultatives Zählen: Was ist beim Zählen nicht wichtig?*

Aktivität: Wiederholung Zählprinzipien (LK)

Aktivität: Zählschachtel (LK)

Aktivität: Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse (LK)

*Baustein IV – Zahlen und Finger: Wir finden Zahlen am eigenen Körper*

Aktivität: Zahlen am eigenen Körper (LK)

Aktivität: Zahlen mit Fingern darstellen (LK/LL)

Aktivität: Bald auch erste Anstöße in Richtung Automatisierung (LK)

*Baustein V – mehr, weniger, gleich: Sind es mehr, weniger oder gleich viele?*

Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Partnersuche (LK)

Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Anzahlvergleiche im Klassenzimmer (LK)

Aktivität: Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen (LL/IL)

*Baustein VI – Resultatives Zählen: mehr, weniger, gleich*

Aktivität: Im Raum Dinge suchen (LK)

Aktivität: Plättchenwerfen (LL)

*Baustein VII – Zahlen und Finger: „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern & Co*

Aktivität: Häschen-Ohren (LL)

Aktivität: Finger unter dem Tisch (LL)

Aktivität: erst beschreiben, dann zeigen (LL)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Zahlen-Schnipp-Schnapp (LL)

Aktivität: mehr und mehr in Richtung Automatisierung (LK/LL)

*Baustein VIII – Schnelles Sehen: Blitzblickübungen*

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Würfel (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbilddarstellungen (LL)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbild-, anderen Darstellungen (LK)

Aktivität: Beliebige Anzahlen strukturiert legen (IL)

*Baustein IX – Resultatives Zählen: Fingerbilder & Co*

Aktivität: Arbeit im Zahlenforscherheft (IL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Memory (LL)

*Baustein X – Um eins mehr: Um eins mehr mit den Fingern aufbauen*

Aktivität: Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen (LK)

Aktivität: um eins mehr in Partnerarbeit (LL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Ordnen! (LL)

*Baustein XI – Um eins weniger: Absteigende Zahlwortreihe*

Aktivität: Um eins weniger – mit Steckwürfeln (LK)

Aktivität: Um eins weniger – mit Fingern abbauen (LK)

Aktivität: ein erster Versuch in Richtung Automatisierung (LK)

*Baustein XII – Stützpunkt-Zahlen: Wie viele fehlen auf Fünf und Zehn?*

Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)

Aktivität: Die Finger werden verdeckt (LL)

Aktivität: Wie viele Finger fehlen auf fünf und zehn? (LL)

Aktivität: Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/zehn gewinnt (LL)

Aktivität: Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen (LL)

*Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellungen im Zehnerfeld*

Aktivität: In Richtung Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Wer hat mehr – Spielvariante mit Würfeln (LL)

---

Anmerkung. LK = Lernumgebung in der Klasse, LL = Lernumgebung mit einem Lernpartner, IL = Individuelle Lernphase.

## Übersicht über das Programm

Im arithmetischen Anfangsunterricht soll auf eine ausgewogene **Balance** zwischen *individuellen Arbeitsphasen* und der *Arbeit in Gruppen* wie mit der *ganzen Klasse* geachtet werden. Einige Bausteine können so gestaltet werden, dass die Einheiten (v.a. die der gemeinsamen Klassensequenzen) **folgende Phasen** beinhalten:

**I. Gemeinsamer Einstieg** mit einer niedrigen Zugangsschwelle für *alle* Kinder an *einem gemeinsamen Lerngegenstand*. Die Schüler\*innen erhalten erste Einblicke, wie eine Herangehensweise an die Aufgabenstellung von anderen Kindern aussehen kann.

**II. Differenzierte und reichhaltige Lernumgebungen mit offenen Aufgabenstellungen** an *einem gemeinsamen Lerngegenstand* auf unterschiedlichen Entwicklungsniveaus unter der Berücksichtigung der Kooperation und des Austausches untereinander.

**III. Kleingruppenbesprechungen/ Gespräch mit der ganzen Klasse** und gemeinsame Reflexionen. Die Schüler\*innen können ihre gewonnenen Erkenntnisse einander mitteilen und darüber diskutieren.

Jede Einheit dieses Programmes versucht inhaltlich eine ausgewogene Balance aller drei „Baustellen“ (siehe Abbildung TIGER) anzubieten, wobei in jeder Einheit in der Regel auf zumindest zwei dieser „Baustellen“ gearbeitet wird.

### Abbildung 14

*Die drei wesentlichen Bausteine. Entnommen aus der Konzeption TIGER, Gaidoschik (2019a, 2022)*

|                                      |                                                           |                                                          |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Zählen mit<br>Anzahl-<br>verständnis | Gleich viel, mehr, weniger<br>über Eins-zu-Eins-Zuordnung | Spontan-Erfassung bis 4/5<br>mit Erkennen der Strukturen |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|

Die Unterrichtsbausteine sollen möglichst passend zur Klassensituation zusammengestellt und jeweils für sich auf die Klasse abgestimmt werden. Unter Berücksichtigung der individuellen Fähigkeiten *aller* Kinder in der Klasse werden arithmetische Inhalte zu ei-

nem früheren oder späteren Zeitpunkt des Schuljahres umgesetzt. Die Lehrperson entscheidet, wann der richtige Zeitpunkt ist, einen neuen Baustein in der Klasse oder bei einzelnen Kindern zu beginnen, oder ob es noch sinnvoll ist, andere Inhalte zu festigen. Die Umsetzung erfolgt durch **diese Lernsituationen**:



...Gemeinsame Lernsituation in der Klasse



...Gemeinsame Lernsituation mit einem Lernpartner



...Individuelle Lernsituation

Das **kooperative Lernen mit einem Lernpartner** erfolgt in zwei Grundformen:

In der **Lernsituation „Wippe“** arbeiten die Kinder an einem gemeinsamen Lerngegenstand und übernehmen dabei unterschiedliche, miteinander verbundene Aufgaben. Die Kinder sollen dabei jeweils die Deutungen des *Partnerkindes* aufgreifen, interpretieren und anknüpfend weiterarbeiten. Wichtig ist, dass unterschiedliche Deutungen der Kinder erlaubt sind und ein Diskurs über die Struktur der Aufgabenstellung entstehen soll.

**Abbildung 15**

„Wippe“ (Häsel-Weide, 2013, S.84)

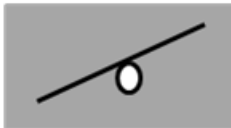


**Abbildung 16**

„Weggabellung“ (Häsel-Weide, 2023, S. 85)



In der **Lernsituation „Weggabelung“** arbeiten die Kinder im ersten Schritt alleine, um dann ihre gewonnenen Erkenntnisse mit dem Partner zu vergleichen und ggf. gemeinsam an einer darauf aufbauenden Übung weiterzuarbeiten. Dabei erhalten die Schüler:innen nicht gleiche, sondern analoge Übungen, um differenzierte Einblicke zu den Aufgaben zu erhalten.



### Darum geht es

Eine der wichtigsten Aufgaben des Anfangsunterrichts ist es festzustellen, wie das numerische Verständnis der Kinder bereits entwickelt ist. In dieser Einheit geht es um eine erste Überprüfung, welche Kinder mit welchem Verständnis wie weit *zählen* können. Zählen soll nicht nur im Sinne eines Aufsagens eines Gedichts verstanden werden, sondern als zielgerichtete Aktivität mit dem Zweck, herauszufinden, wie viele es sind. Man spricht dann von „resultativem Zählen“. Es handelt sich um die Fähigkeit, mit Hilfe der Zahlwortreihe **und** durch Einhaltung aller Zählprinzipien die Anzahl einer Menge von Objekten richtig angeben zu können.

### Material

- **Mein Zahlenforscherbüchlein**

### Durchführung

- 1) Vorerfahrung der Kinder einholen: Lehrperson stellt Impulsfragen: „*Was kann man mit Zahlen alles machen? Wofür braucht man Zahlen? Wo kommen Zahlen überall vor? Ein Tag ohne Zahlen – wo würden Zahlen überall fehlen?*“ Im Klassengespräch gewinnt man erste Einblicke, welche Vorerfahrungen Kinder hinsichtlich der Zahlen mitbringen.

Die verschiedenen Ideen der Kinder werden aufgegriffen, wo nötig, wird „richtig“ zurückgespiegelt. Impuls: „*In den nächsten Wochen werden wir mit Zahlen forschen und viel Neues über Zahlen entdecken. Dazu haben wir des Öfteren einen Gast zu Besuch. Er/Sie wird euch auch filmen. Lasst euch dabei nicht stören, er/sie ist neugierig und will sehen, was wir alles machen!*“

- 2) Zahlenforscherbüchlein: Die Lehrperson stellt die Arbeit in „Mein Zahlenforscherbüchlein“ vor. Es handelt sich dabei um leere Blätter, die mit Ringklammern gebunden sind. Einzelne Seiten lassen sich dabei jederzeit herausnehmen. Jedes Kind erhält ein eigenes Zahlenforscherbüchlein und dazu den Auftrag: „*Schreibe und zeichne in dein Zahlenforscherbüchlein, welche Zahlen du schon kennst und was du alles schon über Zahlen weißt und mit ihnen machen kannst!*“

Die Lehrperson erhält dabei einen Einblick in die Denkweisen der Kinder.

### **Mögliche Vorgehensweisen der Kinder**

Einzelne Kinder brauchen möglicherweise weitere Anweisungen bzw. Hilfestellungen: *„Kannst du zu den Zahlen eine Zeichnung machen? Hast du eine Lieblingszahl? Kennst du schon Rechnungen? Kannst du zu den Rechnungen eine Zeichnung machen, die zu der Rechnung passt?“*

### **Reflexion**

In der anschließenden Klassenkonferenz stellen einige/alle Kinder Teile ihres Zahlenforscherbüchleins vor. Einzelne Seiten werden herausgegeben und wenn möglich im Klassenzimmer aufgehängt.

### **Erweiterungsaufgaben**

In den ersten Schultagen/Schulwochen wäre es möglich, dass die Kinder auch außerhalb des Klassenzimmers und/oder außerhalb des Schulgebäudes auf „Ziffern-Entdeckungsreis“ gehen und Lehrpersonen mit ihnen anhand der Ziffern über Zahlen sprechen: *„Was zeigen/sagen uns die Ziffern? Wo gibt es Ziffern in der Schule, im Dorf? Welche Bedeutung haben diese Ziffern, die wir in der Schule, im Dorf...finden?“*

### Darum geht es

Für Zählaktivitäten finden sich spannende und interessante Zählübungen direkt im Klassenzimmer, wie z.B. das Abzählen der Kinder nach unterschiedlichen Kriterien: die Anzahl der Mädchen/ Jungen, der Kinder insgesamt, Kinder einer bestimmten Haarfarbe, Augenfarbe etc. Man kann viele der im folgenden beschriebenen Übungen auch durch *gemeinsames Zählen im Chor* durchführen oder durch *Zählen im Kreis* reihum. Im Gegensatz zu Zählübungen, bei denen Kinder alleine zählen, bietet insbesondere das *Zählen im Chor* den Vorteil, dass die Kinder hier einfach mitzählen, soweit sie eben können. Mögliche Schwierigkeiten einzelner Kinder treten in den Hintergrund. Kinder, die bereits Ziffern schreiben können, können eingeladen werden, nach abgeschlossenem Zählen die ermittelte Anzahl auch mit Ziffern aufzuschreiben. Das Anfertigen von Strichlisten ist eine weitere Möglichkeit, Anzahlen schriftlich festzuhalten. Dabei sollte die Lehrkraft selbst eine *Fünferbündelung* vornehmen und anregen, dass die Kinder diese übernehmen. Manche/viele Kinder werden den Sinn dieser Fünferbündelung anfangs noch nicht erfassen; solange die "Kraft der Fünf" mit ihnen noch nicht erarbeitet wurde, lohnt es sich auch nicht, Erarbeitungszeit in diese Form von Strichlisten zu stecken. Wenn aber die Lehrperson selbst eine Strichliste macht, dann mit Fünfergliederung; manche Kinder werden das aufgreifen und vielleicht sogar schon in Fünferschritten zählen. Für andere kommt dies später.

Bei allen Übungen gilt: Kinder, die bereits Ziffern schreiben können, dürfen und sollen diese gerne verwenden, um z.B. ermittelte Anzahlen zu notieren. Kinder, die noch beim Zählen Probleme haben, sollten sich erst darauf konzentrieren können; Zählübungen sollten also auch ohne Ziffernschreiben gemacht werden, keinesfalls sollten Zählübungen und andere Aktivitäten mit Zahlen an das Ziffernschreiben gekoppelt werden.

### Material

**Abbildung 18**

*Tafelbild: Buben/Mädchen an der Tafel  
(eigene Darstellung)*

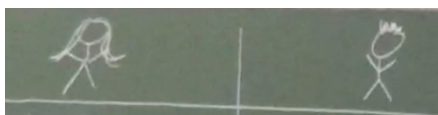
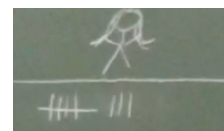


**Abbildung 17**

*Tafelbild: Fünferbündelung  
(eigene Darstellung)*



## Durchführung

- 1) Zählübungen in der Klasse: „Wie viele Kinder sind in der Klasse? Wie viele Mädchen, wie viele Jungen? Wie können wir das herausfinden?“ Die Lehrperson bitet einzelne Kinder, die Anzahl der Mädchen/ Jungen und die Kinder insgesamt abzuzählen. Nach dem Zählen: „Kann jemand diese Zahl schon schreiben? Wie kann man denn (noch) aufschreiben, wie viel/e es ist/sind“
  - Die Lehrperson zeichnet eine Tabelle für die Anzahl der Mädchen/Jungen/Kinder an die Tafel.
  - Kinder, die sich melden und es können, schreiben Anzahlen der Kinder/Mädchen/Jungen in Ziffernschreibweise an die Tafel.

Klassengespräch:

Um eine Anzahl von Gegenständen aufzuschreiben, verwendet man ZIFFERN.

Man kann aber auch einfach *genauso viele Striche* machen, wie viele Kinder, Buben, Mädchen, etc. es sind. Dabei macht man dann für jedes Kind genau einen Strich; damit es nicht unübersichtlich wird, bringt man aber eine Ordnung in diese Striche – jeder fünfte Strich wird quer gemacht. Wer in Fünferschritten zählen kann, kann dann sehr schnell herausfinden, wie viele es sind.

- 2) Zählen mit Strichlisten: Anschließend wird die Anzahl von Objekten mittels Strichen an der Tafel notiert. Die Lehrperson macht jeden fünften Strich quer und fragt die Kinder, ob sie es richtig gemacht hat. Manche Kinder werden protestieren, weil sie nur vier Striche „sehen“ (den Querstrich also nicht mitzählen). Ziel des Klassengespräches: Die Kinder verstehen, wie der Querstrich zu verstehen ist und welchen Zweck er hat: die Strichliste soll übersichtlicher werden, das Zählen in Fünferschritten erlauben (was freilich nur für die Kinder einsichtig sein kann, die bereits in Fünferschritten zählen können, s.o.).

Gemeinsam werden nun andere Gruppen/Mengen gezählt. Die Lehrperson und die Kinder machen Strichlisten, vergleichen diese, einzelne Kinder machen die Strichliste an der Tafel. Das Ziel dieser Einheit: Die Kinder lernen, Strichlisten mit Eins-zu-Eins-Zuordnung selbst zu erstellen. Manche werden nach und nach die Fünferbündelung beim Erstellen eigener Strichlisten übernehmen; in der Regel wird dies erst möglich sein, wenn ein Kind die Kraft der Fünf erfasst und/oder in Fünferschritten zählen kann.



## Baustein 2 Resultatives Zählen Worauf muss man beim Zählen achten?

### Darum geht es

Als Einstieg dieser Einheit werden wieder die Buben/Mädchen/Kinder der Klasse gezählt, in der Tabelle vom Vortag in einer neuen Zeile eingetragen und verglichen. „Ist die Anzahl gleich wie gestern?“

Anschließend werden die Zählstrategien besprochen. Je unübersichtlicher und größer eine Menge ist, umso entscheidender wird es, dass Kinder Zählstrategien entwickeln. Einige Strategien werden die Kinder vermutlich schon mitbringen. Entscheidend ist, dass sie lernen, sie flexibel, je nach Aufgabe anzuwenden. Anschließend formulieren die Kinder mit der Lehrperson Zählprinzipien. Diese können als Anker auf Plakaten festgehalten werden. Spannend wird Zählen auch dann, wenn es zum Überprüfen einer Schätzung notwendig ist. Als Abschluss dieser Einheit wird dies erstmals durchgeführt. Dabei kann bei ungeordneten Mengen für die Kinder eine mögliche, zielführende Strategie sein: Was gezählt wurde, wird zur Seite gegeben.

### Material

Abbildung 19  
Wendeplättchen in Fünferbündelung (eigene Darstellung)



- **Tafelbild:** Tabelle Kinder/Mädchen/Jungen vom Vortag an der Tafel
- magnetische **Wendeplättchen** an der Tafel oder Wendeplättchen im Sitzkreis

### Durchführung

- 1) Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse: „Wie viele Kinder sind heute in der Klasse? Wie viele Mädchen, wie viele Jungen?“ Wenn möglich übernehmen andere Kinder als am Vortag die Zählung; andere Kinder tragen die Anzahl in Ziffernschreibweise nach bzw. mit Strichliste zeitgleich mit dem Zählvorgang in die Tabelle ein.

Gemeinsam wird überprüft, ob die *Zahl gleich ist* wie am Tag zuvor; dafür müssten Tabelle/ Strichliste vom Vortag auf der Tafel sichtbar stehen bleiben. Je nach Situation wird

nachgefragt: Warum ist es heute anders als gestern? Was heißt es, wenn heute dieselbe Zahl da steht wie gestern? Was müsste passieren, damit es eine andere Zahl ist?

- 2) Zählen mit bewussten Zählfehlern: Die Lehrperson gibt magnetische Wendeplättchen an die Tafel, oder legt sie im Sitzkreis vor die Kinder. *„Ich zähle jetzt einmal diese Plättchen, passt auf, ob ich es richtig mache!“* Dabei zählt sie einmal richtig, dann eine neue Anzahl mit Zählfehlern: Zahlwörter auslassen, Zahlwörter vertauschen, 1-1-Zuordnung falsch, weil Finger zu schnell, 1-1-Zuordnung falsch, weil Finger zu langsam, zu schnell etc., Zählfehler bei ungeordneten Mengen durch Doppelzählungen mangels Strategie *„was ich gezählt habe, lege ich zur Seite“*...
- 3) Zählprinzipien: Die Lehrperson stellt unterschiedliche Impulsfragen, etwa wie folgt: *„Ihr könnt ja schon super zählen, wann habt ihr das gelernt? Im Kindergarten! Aber könnt ihr einem Kind im Kindergarten auch erklären, wie das richtig geht, das Zählen? Worauf muss man aufpassen, damit man auch wirklich RICHTIG zählt?“*

Gemeinsam werden die Zählprinzipien besprochen (siehe Begleitmaterial)!

Die Aktivität „Möglicher Abschluss – Schätzen und Zählen“ wird an dieser Stelle der Arbeit und in Unterrichtsbaustein II neu aufgenommen. Im Anschluss an die erste Durchführung der Unterrichtsbausteine haben alle vier beteiligten Lehrkräfte rückgemeldet, wonach es lohnend sei, im Anschluss an Übung 3 von Unterrichtsbaustein II eine weiterführende Aktivität zu ergänzen. Hierbei erhalten die Kinder die Möglichkeit, die vorher besprochenen Prinzipien des Zählens von Übung 3, neben der so wichtigen Kompetenz des Schätzens, selbst anzuwenden.

### Baustein 3 Resultatives Zählen Was ist beim Zählen nicht wichtig?

#### Darum geht es

Die Thematik dieser Einheit schließt an die vorherige an. Gemeinsam mit den Kindern werden wieder unterschiedliche Mengen von Objekten gezählt. Hierbei wird dieselbe Menge mehr als einmal gezählt, dabei werden aber unterschiedliche Startobjekte gewählt: *"Ist es egal, ob ich vorne anfangen zu zählen oder hinten? Ist es egal, ob ich bei dieser Murmel/ diesem Wendeplättchen beginne oder bei dieser/diesem? Sind es trotzdem immer gleich viele?"*

Anschließend werden Kinder aufgefordert, eine bestimmte Anzahl an Gegenständen in die „Zählschachtel“ zu geben, diese zu verschließen und zu schütteln. *„Wie viele sind nun in der Schachtel? Ändert sich das, wenn man schüttelt? Was müsste man tun, um die Anzahl in der Zählschachtel zu ändern?“*

Zum Abschluss wird das Wissen beim Abzählritual der Kinder/Mädchen/Buben der Klasse genützt. Dabei stellen sich die Kinder im (Halb-)Kreis auf, es wird in unterschiedlicher Richtung gezählt; oder vielleicht von der Mitte des Halbkreises beginnend; oder bei einem bestimmten Kind beginnend...

#### Material

**Abbildung 20**  
*Zählschachteln mit unterschiedlichen Gegenständen (eigene Darstellung)*



- **Zählschachteln** mit unterschiedlichen Gegenständen
- **Tafelbild: Tabelle** Kinder/Mädchen/Jungen vom Vortag an der Tafel

#### Durchführung

- 1) Wiederholung Zählprinzipien: Die Lehrperson gibt vor Unterrichtsbeginn eine Anzahl an magnetischen Wendeplättchen in linearer Anordnung an die Tafel und

stellt unterschiedliche Impulsfragen: „*Wir haben bereits darüber gesprochen, worauf man beim Zählen aufpassen muss. Wisst ihr noch, worauf?*“ Nach der Wiederholung werden einzelne Kinder an die Tafel geholt und sollen laut zählen. Wenn das erste Kind von links beginnend gezählt hat, wird das zweite Kind aufgefordert, von rechts beginnend zu zählen. „*Was passiert, wenn man einmal von links beginnt zu zählen und einmal von rechts?*“ Die Lehrperson kreist das Plättchen in der Mitte mit Kreide ein und beginnt von da ausgehend nach rechts zu zählen. „Wie muss ich weitermachen, damit ich die Zahl der Plättchen rausbekomme?“

Ziel des Klassengesprächs: Erkenntnis, dass es **egal ist, wo man beginnt**. Wichtig ist nur, dass jedes Plättchen genau einmal gezählt wird. Wenn man sich an diese Regel hält, wird die ermittelte Zahl immer gleich sein.

Mögliche Abschlussfrage: „*Was müsste passieren, dass es nicht gleich viele sind?*“

- 2) Zählschachtel: Lehrperson führt den Begriff der „Zählschachtel“ ein, lässt ein Kind eine vorgegebene Anzahl von Gegenständen hineingeben. Frage an die Klasse: Wie viele sind in der Schachtel? Dann mischt sie die Zählgegenstände durch kräftiges Schütteln durcheinander, ohne etwas weg- oder dazu zu geben. Frage an die Kinder: „*Jetzt habe ich ordentlich geschüttelt. Wisst ihr, wie viele Dinge in der Schachtel sind?*“ Mögliche weitergehende Fragen: „*Wie ist es eigentlich, wenn man etwas gezählt hat, und dann bringt man Unordnung hinein? Muss man dann noch einmal zählen, wenn man wissen will, wie viele es sind?*“

Reflexion: Sind (einzelne) Kinder verunsichert oder wissen nicht, wie viele Gegenstände in der Schachtel sind, wird der Deckel gehoben und erneut gezählt. Dann Schachtel wieder schließen, erneut schütteln, Frage wiederholen. Ziel ist die Einsicht, die im Idealfall von den Kindern selbst verbalisiert wird, dass in solchen Fällen nicht neu gezählt werden muss; dass die Menge sich nur ändert, wenn etwas dazu- oder wekommt. Wie andere Einsichten auch, kann diese nicht erzwungen werden; manche Kinder werden solche Experimente/ Erfahrungen wiederholt machen müssen, auch für sich alleine. Die Lehrkräfte sollte für sich registrieren, welche Kinder hier noch weiteren Bedarf haben, und in Phasen, in denen die Kinder an offenen Aufgaben arbeiten, mit diesen Kindern immer wieder an dieser wichtigen Einsicht der Erhaltung der Anzahl weiterarbeiten.

- 3) Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse: Wie an den Tagen zuvor, fragt die Lehrkraft: „*Wie viele Kinder sind heute in der Klasse? Wie viele Mädchen, wie viele Jungen?*“ Wieder übernehmen andere Kinder als an den Tagen zuvor die Zählung. Die Lehrkraft regt an, dass immer zwei Kinder die Buben, die Mädchen, die ganze Klasse zählen, aber immer in unterschiedlicher Reihenfolge. Andere Kinder tragen die ermittelten Anzahlen in Ziffernschreibweise oder mit Strichliste zeitgleich mit dem Zählvorgang in die Tabelle ein. Gemeinsam wird überprüft, ob die Ergebnisse unabhängig von der Richtung, in der gezählt wurde, gleich sind; und ob die *Zahl gleich ist* wie am Tag zuvor; dafür müssten Tabelle/ Strichliste vom Vortag auf der Tafel sichtbar stehen bleiben. Abschließend wird noch einmal (im Idealfall von den Kindern) festgehalten, dass man in beliebiger Reihenfolge zählen kann, wenn man nur aufpasst, dass wirklich jedes Kind genau einmal gezählt wird.

Erweiterung: Falls (einzelne) Kinder schon wissen, wie viele Kinder es sind, kann es ein Anreiz sein, wenn man die Frage umdreht: „*Fehlt heute jemand? Wie viele müssen wir dann sein? Kontrollieren wir, ob das stimmt.*“

**Darum geht es**

In dieser Einheit werden die Fingerzahlen im Sitzkreis erstmals thematisiert, danach sollen die Übungen als Ritual für eine längere Zeit beibehalten, variiert und weiterentwickelt werden. Die Kinder sollen „innere Fingerbilder“ als Vorstellung und letztlich abstraktes Zahlwissen aufbauen. Sie sollen lernen, mit Fünf die Vorstellung „alle Finger auf einer Hand“ spontan zu verknüpfen. Mit Zehn „alle Finger auf beiden Händen zusammen.“ Mit z.B. Acht die Vorstellung „auf einer Hand fünf Finger, an der anderen drei Finger“. Und in weiterer Folge mit z.B. Sechs auch die weitere Vorstellung „vier Finger brauche ich dafür nicht; also vier Finger noch dazu zu den sechs, dann sind's alle zehn“.

Damit die Kinder diese mentalen Vorstellungen aufbauen, bedarf es Übung; für die einen mehr, die anderen weniger, weil sie solche Vorstellungen und Wissen schon (teilweise) mitbringen.

Zahlen lassen sich unterschiedlich mit Fingern darstellen, deshalb sei hier betont: Von entscheidender Bedeutung ist zunächst die Beziehung der anderen Zahlen zu fünf und zehn, diese beiden Zahlen sind wichtige „geistige Stützpunkte“.

Beobachten Sie die Kinder, wie sie die Zahlen mit Fingern darstellen. Muss das Kind immer wieder von eins beginnend hochzählen, wenn es gebeten wird, fünf Finger an einer, zehn Finger an beiden Händen zu zeigen? Bei diesem Kind ist es ratsam, sich zunächst auf diese beiden Stützpunktzahlen zu konzentrieren (fünf Finger an einer Hand, zehn Finger an beiden zusammen). Dann wird es in der Regel zielführend sein, sich zuerst auf die Fingerdarstellungen bis fünf zu konzentrieren und sich erst dann auch den Zahlen sechs bis neun zu widmen. Für manche Kinder wird aber vielleicht neun (von zehn ausgehend eins weg) früher "auf einen Sitz" möglich sein als drei.

Manche Kinder werden von sich aus z.B. sechs als drei und drei, acht als vier und vier zeigen, ohne dafür zählen zu müssen. Natürlich ist auch das eine willkommene Lösung. Die Lehrkraft sollte sich jedoch vergewissern, dass diese Kinder auch wissen, dass sechs auch als fünf und eins, acht auch als fünf und drei gezeigt werden kann und dass z.B. vier um eins weniger als fünf ist. Andererseits sollten Kinder, die noch gar nicht in der Lage sind, die Zahlen bis zehn nicht-zählend mit den Fingern darzustellen, sich zunächst auf die "Hauptzeigeweise" mithilfe der "Kraft der Fünf" konzentrieren können.

Letztlich ist es für *alle Kinder* wichtig, die *Beziehungen aller Zahlen zu fünf und zu zehn zu verinnerlichen*, auf dieser Basis dann auch alle anderen Zerlegungen/Zusammensetzungen der Zahlen bis zehn. Aber das ist für viele Kinder ein Thema für Monate!

## Material

- **Die eigenen Finger** der Kinder!

## Durchführung

1) Zahlen am eigenen Körper: Die Lehrperson gibt möglichen Impuls:

*„Manchmal muss man nicht zählen, weil man schon weiß, wie viele es sein müssen. Zum Beispiel: Ich weiß genau, wie viele Nasen ich habe! Ihr wisst das doch sicher auch, ohne dass ihr zählen müsst oder? Wovon hast du genau eins am Körper? Wovon zwei? Hast du drei von etwas an dir? Vier? Fünf? Zehn?“*

Nachdem die Kinder bei fünf und zehn vermutlich von selbst einen Bezug zu den **Fingern** hergestellt haben, werden verschiedene Fragen gestellt bzw. Übungen gemacht:

- *„Wie viel Finger hast du an einer Hand? Wie viele an beiden zusammen? Jetzt schüttele deine Hände kräftig durch. Hat sich etwas daran geändert, wie viele Finger es an einer Hand sind? An beiden? Wie ist das bei deinem Sitznachbarn/deiner Sitznachbarin? Bei mir?“*

- Zahlen mit den Fingern darstellen: *„Zeige fünf Finger, so schnell du kannst! Musst du dafür zählen? Ist es wichtig, ob du dafür die linke oder die rechte Hand nimmst? Zeige zehn, so schnell du kannst! Musst du dafür zählen?“*

- *„Welche Zahlen kann ich **mit nur einer Hand** zeigen? Zeige vier! Geht das an einer Hand? Wie viele Finger an dieser Hand brauchst du nicht? Ist es wichtig, ob du den Daumen oder den kleinen Finger oder ... nicht ausstreckst? Ist es wichtig, ob du die linke oder die rechte Hand nimmst?“* Eventuell erweitert: *Kannst du die Zahl auch mit Fingern an beiden Händen zeigen?“* (Siehe dazu oben zur "Hauptzeigeweise")

- *„Für welche Zahlen brauche ich **beide** Hände? Zeige neun/ sechs/ acht..., so schnell du kannst! Schaffst du das auch schon, ohne die Finger vorher abzuzählen?“*

2) Zahlen mit den Fingern darstellen: „Zeige fünf/vier/eins/null/sieben/neun... so schnell du kannst! Musst du dafür zählen?“

3) Bald auch **erste** Anstöße in Richtung Automatisierung: Spornen Sie die Kinder an, die Zahlen von eins bis zehn mit den Fingern so schnell wie möglich zu zeigen:

„Zeige 10/5/8/3... so schnell du kannst.“ Ebenso: "Zeige 9/5/8/4... mit geschlossenen Augen/hinter dem Rücken/unter dem Tisch..."



## Baustein 5 mehr, weniger, gleich Sind es mehr, weniger oder gleich viele?

### Darum geht es

Schulanfänger vergleichen Anzahlen in der Regel a) nach dem Augenschein und b) zählend. Daran ist nichts Falsches. Wichtig ist aber, dass die Kinder die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung als Grundlage des Anzahlvergleiches verstehen, und in weiterer Folge auch solche Zuordnungen nutzen, um herauszufinden ob es *gleich* oder *mehr* oder *weniger* sind. Durch geeignete Arbeitsaufträge im (Schul-)Alltag wird mit den Kindern der Zusammenhang zwischen *gleich viel*, *mehr* und *weniger* herausgearbeitet. Ausgehend von Aufgaben, bei denen die Kinder bei Vergleichen nicht zählen müssen, wird in einem nächsten Schritt das Zählen zur Ermittlung von Anzahlen und das Vergleichen von Anzahlen durch Zählen in Verbindung zur „Eins-zu-Eins“-Zuordnung gebracht.

### Material

- **Buben/Mädchen** der Klasse
- **Kinder** und **Stühle** der Klasse
- **Aufgabenkärtchen** mit strukturierten Punkte-Darstellungen

### Durchführung

- 1) „Vergleichen“ ohne zu zählen - Partnersuche: Jedes Kind sucht sich einen Partner. „*Sind mehr Mädchen oder Buben in der Klasse? Sind es gleich viele? Können wir das feststellen, ohne zu zählen?*“

Falls der Vorschlag nicht von einem Kind kommt, anregen, dass die Kinder sich in zwei Reihen nebeneinander aufstellen: eine Reihe mit Jungen, eine Reihe mit Mädchen. Wenn möglich, nimmt jeder Junge ein Mädchen bei der Hand.

Erkenntnis (vielleicht kommt das von den Kindern?): Es sind gleich viele, wenn jeder Junge ein Mädchen an der Hand hat, bzw. mehr Jungen/Mädchen, wenn ein oder mehrere Jungen/Mädchen ohne Partner bleiben. Bsp.: **Es sind mehr Jungen als Mädchen, weil ein Junge ohne Partnerin bleibt.** Falls in der Klasse die Frage uninteressant ist, weil die Differenz zwischen Jungen und Mädchen sehr groß ist, diese Frage vielleicht

besser an einem anderen Vergleich klären? Dafür eventuell auch Material vorbereiten, wo nicht auf den ersten Blick erkennbar, was mehr ist.

- 2) „Vergleichen“ ohne zu zählen – Anzahlvergleiche im Klassenzimmer: „In der Klasse sind Stühle und Kinder. Sind es gleich viele? Muss gezählt werden, um das sagen zu können? Warum nicht? Wann ist etwas „gleich viel“?“

Vielleicht kommt auch hier die Erkenntnis von den Kindern, dass es immer dann gleich ist, wenn es zu jedem von der einen Sache eins von der anderen Sache gibt.

Mögliche Abschlussfrage: „Es sind also mehr Stühle als Kinder – um wie viele? Was können wir tun, damit gleich viele Stühle wie Kinder in der Klasse sind?“

- 3) „Vergleichen“ ohne und

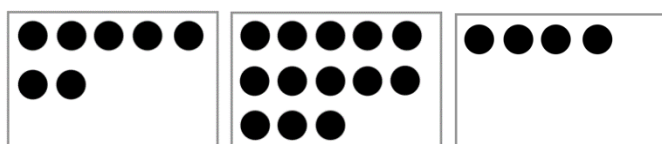
eventuell auch mit Zählen - Lege gleich viele:



Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten liegen im Sitzkreis. Zur Bearbeitung werden verschiedene Niveaus angeboten, sodass die Kinder auch Aufgaben bearbeiten können, die ihre Zählkenntnisse übersteigen.

#### Abbildung 21

Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten (eigene Darstellung)



Jedes Kind sucht sich das Aufgabenkärtchen aus, welches es bearbeiten kann und möchte. „Du siehst Aufgabenkärtchen mit Punkten. Lege gleich viele Plättchen auf deinen Tisch, wie Punkte auf der Karte sind!“

Dieses Material ist den Kindern noch nicht bekannt; sie erklärt ihnen, dass sie auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau sind. **Beobachten Sie die Kinder, ob sie die Aufgabe zählend oder durch Eins-zu-Eins-Zuordnung lösen!** *Durch Zählen:* Das Kind zählt die Anzahl der Punkte auf dem Kärtchen und legt dann, mitzählend, ebenso viele Plättchen auf den Tisch. *Durch Zuordnen:* Das Kind legt für jeden Punkt auf dem Aufgabenkärtchen ein Plättchen auf den Tisch, dabei wird die Eins-zu-Eins-Zuordnung vielleicht durch Mitzeigen mit dem Finger der Hand, die nicht legt, unterstützt.

Ermutigen Sie einzelne Kinder, Aufgabenkärtchen zu wählen, die ihre Zählkenntnisse übersteigen. Fordern Sie Kinder, die nur durch Zählen zur Lösung kommen auf, einmal eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen. Überprüft werden die Lösungen wechselseitig vom Sitznachbarn. Kinder, die bereits Ziffernkenntnisse haben, schreiben die Anzahlen auch mit Ziffern auf Papier.

Die Aktivität „Erweiterung – gerade auch für schnellere Kinder“ wird in Unterrichtsbaustein V neu aufgenommen. Im Anschluss an die erste Durchführung der Unterrichtsbausteine sprachen sich die befragten Lehrkräfte dafür aus, gerade für Kinder, welche die vorangehende Übung 3 bereits verinnerlicht haben, eine erweiternde Aktivität und abgestimmt auf den Unterrichtsbaustein V, zu ergänzen. Hierbei erhalten die Kinder die weiterführende Übung, um 1/ um 2/ um 3 ... mehr/weniger Plättchen, als Punkte auf der Karte sind, zu legen.

Erweiterung – gerade auch für schnellere Kinder:

*„Lege um 1/ um 2/ um 3.... mehr/ weniger Plättchen, als es Punkte auf der Karte sind!“*

Auch hier können Kinder, die bereits Ziffernkenntnisse haben, die Anzahlen auch mit Ziffern auf Papier schreiben.

## Baustein 6 Resultatives Zählen; mehr, weniger, gleich

### Darum geht es

Für Kinder interessante Zählübungen finden sich bekanntlich im Klassenzimmer. Schulanfänger verfügen, wie bereits beschreiben, über unterschiedliche Zählfertigkeiten. Wichtig ist deshalb, dass ihnen keine künstlichen Grenzen gesetzt werden. Bei den nachfolgenden Aufgaben wird für alle Kinder das Vorwärtszählen bis zumindest zehn und die Zahlwort-Ziffer-Zuordnung geübt. Durch Öffnung der Aufgabe können auch Kinder gefordert werden, die bereits über zehn hinaus zählen und eventuell auch schon mit Ziffern notierte zweistellige Zahlen lesen können. Durch gezielte Fragen der Lehrperson wird die Aufmerksamkeit der Kinder auf wesentliche Aspekte ihrer Handlungen gelenkt, die ihnen mitunter bislang vielleicht nicht aufgefallen sind, oder über die sie bislang nicht oder zu wenig nachgedacht haben. Die abschließende Spielvariante „Plättchen werfen“ bietet Kindern Gelegenheit, das Verständnis für Zahlvergleiche spielerisch einzuüben. Ziel ist dabei die Sprechweise „um \_\_\_ mehr/weniger“.

### Material

- **Dinge**, die im Raum zur Verfügung stehen
- **Tische** (oder große Bogen Papier), auf jedem ein Aufgabekärtchen mit **Ziffern- / Würfelbilddarstellung**
- Mindestens 20 **Wendeplättchen**
- Eventuell Filztuch als Landeplatz
- Eventuell Würfelbecher zum Schütteln und Werfen
- Eventuell je eine „Schatztruhe“ für jeden Spieler

### Durchführung

#### 1) Im Raum Dinge suchen und zuordnen:

Auf Tischen oder Papierbögen sind Aufgabekärtchen mit Ziffern- und Würfelbilddarstellung, beginnend bei null oder eins in aufsteigender Reihe bis zehn vorbereitet. Die Lehrperson zählt gemeinsam mit den Kindern bis zehn und zeigt auf das jeweilige Kärtchen mit der Ziffern- bzw. Würfelbilddarstellung. Als Impuls gibt sie den Kindern den Auftrag:

*„Sucht Dinge im Raum. Lege genauso viele Dinge, wie die Ziffern-/ Punktekarte auf den Tischen (oder Papierbögen) zeigt.“*

Die Kinder suchen Dinge im Raum und ordnen diese den entsprechenden Ziffern- und Würfelbilddarstellungen zu. Sie versuchen Formulierungen zu finden wie: *„Diese Dinge kommen zur Ziffer 2, weil es zwei Dinge sind.“* Dabei werden sich die einen Kinder auf die Suche nach Dingen im Zahlenraum bis fünf machen; während andere Kinder die Anzahlen größer als fünf bevorzugen.

Mögliche Öffnung: Weitere Bögen werden vorbereitet für "mehr als zehn Dinge". Kinder, die diese Bögen bearbeiten wollen, sollen aber nicht nur mehr als zehn von etwas suchen und hinlegen, sondern auch entweder eine Strichliste (am besten mit Fünfer-Bündelung!) dazu anfertigen – oder, wenn sie das schon können, mit Ziffern aufschreiben, wie viele es sind.

- 2) Mögliche Abschlussfragen: Die Lehrperson nimmt Dinge, die die Kinder zugeordnet haben, bittet einzelne Kinder, ihr nochmals beim Zählen zu helfen, und legt dabei die Dinge in einer Reihe hin, z.B.: *„Super, ihr habt so viele Stifte gefunden. Wer kann mir helfen diese zu zählen?“* Danach nimmt die Lehrperson andere Dinge, die die Kinder gefunden haben und legt sie als Reihe und unter Beachtung der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung unter den Stiften (wie bei der nächsten Übung mit Plättchen) hin:

**Abbildung 22**  
Übung: „Eins-zu-Eins“-Zuordnung mit Plättchen (eigene Darstellung)



Die Lehrperson achtet darauf, dass es mehr von einem Zählgegenstand ist und stellt die Frage: *„Um wie viel ist es mehr?“* Vielleicht kann schon ein Kind in Wort fassen: *„Es sind (um) ein / zwei Stifte ..... mehr als Kleber.“*

Je nach Klassensituation werden ähnliche Übungen, wie oben beschrieben, wiederholt durchgeführt.

3) Spielvariante „Plättchenwerfen“:



Beim letzten Durchgang nimmt die Lehrperson Wendeplättchen. Sie nimmt mind. 20 Wendeplättchen, wählt ein Kind als Gegenspieler und erklärt das Spiel „Plättchenwerfen“. Jeder sucht sich eine Farbe aus; ähnlich wie bei der vorigen Übung ordnet man die Plättchen als Reihen und beachtet die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung... Anleitung in Materialien zu TIGER.

### Darum geht es

Die Kinder sollen, sofern sie es nicht schon können, früh lernen, Fingerdarstellungen auf einen Blick zu erkennen. Auf dieser Basis können sie wichtige Einsichten in Zahlen gewinnen. Manche (viele?) Kinder werden es von Beginn an oder sehr bald schaffen, Fingeranzahlen auf einen Sitz zu zeigen, ohne dass sie dabei ihre Finger einzeln hochzählen zu müssen. Fordern Sie immer wieder Versprechlichkeiten ein. Die Kinder sollen mehr und mehr lernen, mit (Zahl-)Worten zu beschreiben, wie sie die einzelnen Zahlen zeigen. Dazu werden die Kinder angeregt, Fingerhandlungen in der Vorstellung vorwegzunehmen, später nur noch in der Vorstellung durchzuführen, schließlich ganz abstrakt über Zahlen zu sprechen ("acht besteht aus fünf und drei"). Viele Kinder werden auf diesem Weg viele Zwischenschritte brauchen, etwa: Die Finger werden noch verwendet, aber verdeckt.

Auf derselben Grundlage sollte dann auch umgekehrt das Erkennen von Fingerdarstellungen auf einen Blick möglich werden, auf dieser Basis auch das nicht-zählende Erkennen anderer strukturierter Anordnungen (etwa im Zehnerfeld).

### Material

- **Die eigenen Finger** der Kinder

### Durchführung

1) Häschen-Ohren: Lehrperson gibt möglichen Impuls:

*„Wir haben schon gelernt, wie man Zahlen mit Fingern zeigen kann. Das versuchen wir jetzt wieder, aber diesmal mit Häschen-Ohren!“*

Die Hände werden dabei zunächst als Fäuste an die Ohren gelegt, sodass das Kind die eigenen Finger nicht sehen kann. Nun auf Kommando sechs/vier/sieben... Finger ausstrecken. Geht das auch schon ohne Blick auf die Finger? Wenn nicht, Hände vor das Gesicht holen, Zahl einstellen, dann an die Ohren legen; aber beim nächsten Mal wieder als „Häschen-Ohren“ versuchen.

Kinder, die bereits alle Fingerdarstellungen in Beziehung mit fünf und zehn schnell und sicher zeigen können, können eingeladen werden, auch andere Zeigeweisen zu verwenden (siehe Baustein 4). „Kannst du sechs/vier/sieben... auch noch anders zeigen?“ Thematisieren Sie mit den Kindern *alle* Zahlzerlegungen.

2) Finger unter dem Tisch:



Partnerarbeit: Ein Kind nennt eine Zahl bis 10, das andere Kind zeigt diese Anzahl an Fingern möglichst ohne zu zählen, „auf einen Sitz“, aber unter der Tischplatte, ohne die Finger zu sehen. Das andere Kind steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Dann werden die Rollen getauscht.

Variante: Zusätzlich zum Zeigen unter dem Tisch soll das Kind auch SAGEN, wie viele Finger es an der einen, wie viele an der anderen, wie viele also insgesamt ausgestreckt hat.

Die Aktivität „Erst beschreiben, dann zeigen“ wird in Unterrichtsbaustein VII neu aufgenommen. Im Anschluss an die erste Durchführung der Unterrichtsbausteine haben drei von vier befragten Lehrkräften gemeint, dass es gerade für Kinder, welche Übung 2 von Unterrichtsbaustein VII bereits verinnerlicht haben, im Anschluss eine weiterführende Aktivität durchführen. Hierbei sollen die Kinder ihre Zahlen nicht gleich mit den Fingern zeigen, sondern erst beschreiben, WIE sie das tun würden.

3) Erst beschreiben, dann zeigen:



Kinder, die Übung 2 bereits beherrschen, werden angeregt, ihre Zahlen nicht gleich mit den Fingern zu zeigen, sondern zuerst zu beschreiben, wie sie das tun würden. Die Beschreibungen sollen sich auf die jeweiligen Anzahlen konzentrieren; Kinder, die bereits ohne Probleme die jeweils gezeigten Fingeranzahlen nennen können, können zum Perspektivenwechsel eingeladen werden: Wie viele Finger hast du NICHT ausgestreckt, wenn du sechs, acht, vier... zeigst?

Ein Kind nennt eine Anzahl von null oder eins bis zehn. „Wie kannst du ... zeigen?“ Das andere Kind sagt z.B.: „Für acht brauche ich eine volle Hand und noch drei Finger. Oder ich brauche auf der einen Hand vier Finger und auf der anderen vier.“ „Bei vier brauche ich nur eine Hand und lasse einen Finger weg.“



- 4) „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern: Die Lehrperson gibt möglichen Impuls:  
*„Wir versuchen es jetzt umgekehrt. Ich zeige euch kurz Fingerdarstellungen. Ihr sagt, welche Zahl ich gezeigt habe.“*

Die Lehrperson zeigt den Kindern mit ihren Händen Anzahlen bis zehn; nur kurz, für ein bis zwei Sekunden. Die Kinder sollen sagen, welche Zahl sie gezeigt hat; und wie sie das so schnell erkannt haben: *„Ich habe sieben Finger gesehen. Eine Hand hast du voll gezeigt, bei der anderen waren nur zwei ausgestreckt, also waren es sieben!“*

Die Aktivität „Fingerbilder & Co: Zahlen-Schnipp-Schnapp“ aus den Materialien zu TIGER (2019a) werden in Unterrichtsbaustein VII gerade für Kinder neu aufgenommen, die mit den vorangehenden Übungen aus Baustein VII keine Schwierigkeiten zeigen und an dieser Stelle bereits erweiternde Aktivitäten können. Bei dieser weiterführenden Aktivität erhalten die Kinder mehrere Sets (mindestens 4) mit Kärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen von 0 bis 5. Die Darstellungen können auch gemischt werden, also ein Set mit Fingerbildern, ein Set mit Würfelbildern, einer mit Zehnerfelddarstellungen und möglich ein Set mit Ziffernkärtchen. Gespielt wird nach dem klassischen „Schnipp-Schnapp“-Kinderspiel. Gewonnen hat jenes Kind, welches mehr Karten „geschnappt“ hat. Die Ermittlung kann durch Abzählen, oder durch Vergleichen der Dicke der „geschnappten“ Kartenstöße erfolgen.

- 5) Fingerbilder & Co: Zahlen-Schnipp-Schnapp: Anleitung in Materialien zu TIGER.

- 6) Mehr und mehr in Richtung Automatisierung **versuchen:** Spornen Sie die Kinder an, die *Zahlen von eins bis zehn* mit den Fingern so schnell wie möglich zu zeigen: *„Zeige 10/5/8/3... so schnell du kannst.“*

### Darum geht es

Die meisten Schulanfänger haben die Fähigkeit, Objekte von bis zu drei oder vier *simultan*, also „auf einen Blick“ zu erfassen. Man unterscheidet bei dieser Fähigkeit, ob es ein Wiedererkennen gelernter „Muster“ wie etwa beim Spielwürfel ist, oder ob Anzahlen auch in anderen Anordnungen, insbesondere auch ungegliedert linearen Anordnungen simultan erfasst werden. Die Fähigkeit zur Simultanerfassung von drei und mehr Objekten garantiert nicht, dass die Kinder die Zahlen drei, vier... als Zusammensetzungen wahrnehmen und denken! Deshalb sollen die Kinder von Beginn an immer wieder angeleitet werden, Anzahlen schon bis vier *als Zusammensetzungen bzw. in Beziehung zur fünf* zu beschreiben, z.B. „vier ist aus zwei und zwei zusammengesetzt“, „vier ist um eins weniger als fünf“. Solche Einsichten helfen auch jenen Kindern, die Defizite im Bereich der Simultanerfassung haben und anfangs auch Anzahlen von drei nur zählend ermitteln können. Diese werden zunächst drei bewusst als zwei und eins erfassen müssen und erst dann in der Lage sein, etwa auch „fünf als zwei und drei“ zu erfassen. Es bedarf also seitens der Lehrperson differenzierte Beobachtung der entsprechenden Ausgangslage und darauf abgestimmt differenzierte Aufgaben zum "schnellen Sehen".

Als Grundlage für die weitere Nutzung der Kraft der Fünf sollten jedenfalls zunächst die Zusammensetzungen bis fünf schon gut abgesichert sein.

### Material

- Schaumstoffwürfel
- **Aufgabenkärtchen** mit Würfelbild- und anderen Darstellungen

### Durchführung

#### 1) Blitzblickübungen mit dem Würfel:

„Wir haben schon gelernt, dass wir nicht immer zählen müssen. Das versuchen wir jetzt mit dem Würfel.“ Im Sitzkreis versammeln sich die Kinder. Die Lehrperson würfelt mehrmals mit einem großem Schaumstoffwürfel. „Muss ich hier zählen, wie viel ich gewürfelt habe?“

Möglichst alle Kinder nennen die Anzahl der Würfelbilder. Achten Sie darauf (so weit als möglich im Klassenverband), ob die Kinder die Anzahl der Punkte zählend oder nicht-zählend (simultan) erfassen.

2) Blitzblickübungen mit Würfelbild- und anderen Darstellungen:



*Die Kinder arbeiten in Partnerarbeit mit kleinen Spielwürfeln. Auftrag: „Einer von euch würfelt, der andere sagt, so schnell er kann, wieviel gewürfelt wurde. Der andere macht dann in einer Tabelle einen Strich zu dieser Punkteanzahl.“ Dann Rollentausch.*

Dazu der Auftrag, "ganz oft" zu würfeln (oder solange eine große Sanduhr abläuft...), und überprüfen, ob eine Zahl öfter kommt oder alle gleich oft oder... (zugleich also ein Experiment zur Wahrscheinlichkeit...). Die Lehrkraft hat dann Zeit, umher zu gehen und zu schauen, wie die einzelnen Kinder das machen.

3) Blitzblickübungen mit Würfelbild- und anderen Darstellungen:

Die Lehrperson zeigt (am Overhead?) kurz (für ein bis zwei Sekunden) Würfelbilder und andere Darstellungen von bis zu fünf oder sechs Punkten. Nachdem im Blitzblick möglichst viele Kinder dran waren die Anzahlen zu erkennen, werden die Darstellungen in Ruhe betrachtet. „*Wie hast du das so schnell gesehen? Welche anderen Zahlen kannst du in der 4 / 5 noch erkennen, und wie?*“

Das Ziel dieser Übung: Möglichst alle Kinder erkennen und benennen in der 4 auch 3 und 1 oder auch 2 und 2, in der 5 auch die 4 und 1 erkennen, auch 3 und 2, usw.

4) Beliebige Anzahlen strukturiert legen:



Die Kinder bekommen Wendeplättchen. „*Such die eine Zahl aus, die du mit Plättchen legen willst. Du sollst die Plättchen aber so legen, dass ich beim Umhergehen auf einen Blick sehen kann, wie viele Plättchen es sind!*“ Die Lehrperson geht herum und fragt gezielt nach: Manche Kinder werden bei dieser Übung weit über zehn Plättchen hinaus gehen – solange sie es strukturiert legen (Zehner und Einer...), gut so, auch wenn dann die Lehrkraft vermutlich "zwei Blicke" braucht!

Alle befragten Lehrkräfte beschreiben es als lohnend, erweiternde und vertiefende Überlegungen hinsichtlich der Differenzierung der Sozialform zu Übung 4 anzuführen.

Kinder, die bei dieser Übung auch mit Zahlen bis zehn noch Schwierigkeiten haben, kommen in den Sitzkreis zur Lehrperson; Kinder, die bereits „reif“ für größere Anzahlen sind, legen solche an ihrem Platz bzw. zeichnen sie am Blatt. Dazu eventuell Partnerarbeit: Jeweils ein zweites Kind soll dem ersten Kind erklären, wie man da auf einen Blick so viele Plättchen/Punkte erkennen kann.

Möglicher Abschluss: Alle Kinder und Lehrperson treffen sich im Sitzkreis, einige Kinder erklären ihre eigenen Darstellungen mit Plättchen oder mit Zeichnungen den anderen Kindern, diese vergleichen eventuell mit eigener Darstellung auf Basis einer anderen Strukturierung (z.B. ein Kind hat acht als fünf und drei, ein anderes als vier und vier gezeichnet).



### Darum geht es

Die Kinder sollen versuchen, ihre bisher gewonnenen Erkenntnisse zur Anzahldarstellung mittels Strichlisten, zum Anordnen von Plättchen und (soweit bereits thematisiert) das Schreiben der Ziffern bis zehn oder zwanzig zusammen zu tragen. Dabei wird im Zahlenforscherheft eine Seite für eine Zahl reserviert; Kinder, die Schwierigkeiten beim Schreiben der Ziffern haben, bekommen dafür Hilfe von der Lehrperson und/oder fertigen eine Stricherl-Liste an. Das anschließend durchgeführte Memory bedarf sorgfältiger Spielbegleitung. Kinder, die bestimmte Darstellungen noch zählend ermitteln, profitieren, wenn andere Kinder oder Erwachsene nicht-zählend vorgehen und dies in Worte fassen.

### Material

- **Zahlenforscherheft**
- eventuell Wendeplättchen zum Umkreisen
- **Mehrere Sets** mit Kärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen von 0 bis 5 oder auch von 0 bis 10; ein Set mit Fingerbildern, ein Set mit Würfelbildern, ein Set mit Ziffernkärtchen; möglich: ein Set mit Zehnerfelddarstellungen

### Durchführung

#### 1) Arbeit im Zahlenforscherheft:

Für jede Zahl bis zehn (oder zwanzig für die Kinder, die reif dafür sind) wird eine Seite angelegt. Die Lehrperson gibt den Auftrag:

*„Schreibe auf jede Seite in deinem Zahlenforscherheft eine Zahl mit Ziffern oder mache die passende Anzahl von Stricherl für die Zahl. Beginne bei der Eins, blättere dann um; schreibe die Zwei, blättere dann um; usw.“ „Zeichne dann zu jeder Zahl die passende Anzahl von Kreisen/Punkten, aber so, dass man schnell sehen oder leicht zählen kann, wie viele Kreise es sind.“*

Hier bereits strukturierte Darstellungen einbringen, aber differenziert: Die Kinder, die noch mit der Eins-zu-Eins-Zuordnung, Zahlwortreihe etc. kämpfen, könnten überfordert sein, wenn zugleich schon auf Fünferstruktur gedrängt wird; umgekehrt ist es für Kinder,

die beim zählenden Ermitteln keine Probleme haben, wichtig, den nächsten Schritt in Richtung Nicht-(Alles-)Zählen-Müssen zu machen.

2) Fingerbilder & Co: Memory: 

Im Sitzkreis versammeln sich die Kinder; je nach Gruppe braucht man 2 Sets (Fingerbilder- und Würfelbilder) oder eventuell 4 Sets mit Kärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen.

Da die unterschiedlichen Darstellungen zum ersten Mal von den Kindern aktiv geübt werden, müssen diese genau eingeführt werden. Die Lehrperson bespricht die unterschiedlichen Aufgabekärtchen mit Darstellungen; und wie man die Anzahl schnell erkennen kann. Vielen Kindern wird die Würfelbild- und Fingerbild-darstellung vom Kindergarten her bekannt sein. Die Zehnerfeld-Darstellung wird vielen Kindern neu sein. Die Kärtchen werden gemischt, am Boden verteilt und wie das Klassische Memory gespielt. Anschließend erhalten die Kinder in Paaren je 2 oder eventuell 4 Sets mit strukturierten Zahldarstellungen und spielen in Paaren das Klassische Memory.

Die erweiterte Aktivität „Blitzblick-Memory“ aus den Materialien zu TIGER (2019a) wird in Unterrichtsbaustein IX gerade für jene Kinder neu aufgenommen, welche an dieser Stelle und im Anschluss an die Übung 2 aus Unterrichtsbaustein IX bereits „reif“ dafür sind. Bei dieser weiterführenden Aktivität, vom Autor im Bereich Variante B beschrieben, dürfen die Karten immer nur ganz kurz umgedreht werden. Die Kinder versuchen „auf einen Blick“ zu erkennen, welche Zahl dargestellt ist. Um sich die Position zu merken, kann dann auf den Rücken der Karten ein Plättchen gelegt werden, ehe man die zweite Karte – wieder nur „ganz kurz“ – aufdeckt.

Erweiterung - „Blitzblick-Memory“: Anleitung in Materialien zu TIGER. Die Karten dürfen immer nur ganz kurz umgedreht werden.

**Darum geht es**

Im Unterschied zum Baustein 4 liegt hier die Aufmerksamkeit auf das um eins mehr. Manche Schulanfänger können zwar sicher von eins beginnend raufzählen, können aber noch *nicht von einer beliebigen Zahl ausgehend* spontan weiterzählen. Die Frage „was kommt gleich danach?“ können manche Kinder nur dadurch beantworten, dass sie die ganze Reihe von eins startend bis zur gefragten Zahl raufzählen.

In diesem Baustein geht es um eine Verknüpfung von a) Zahlwortreihe, vorwärts und rückwärts b) Zahlvergleichen, insbesondere "eins mehr", "eins weniger" und c) bereits erworbenem Zahlwissen, insbesondere mit Bezug auf Fingerdarstellungen. Wenn ein Kind z.B. noch nicht spontan von fünf weiterzählen bzw. sagen kann, was "eins mehr" ist, kann es helfen, wenn es die fünf Finger in einer Bewegung als Gesamtheit, ausstreckt, dann einen Finger hinzufügt. Sofern die bereits angeregten Übungen zu Fingerdarstellungen gefruchtet haben, wird es die entstandene neue Anzahl spontan nennen können. Dieses wechselseitige Verstärken von Kenntnissen, die auf den unterschiedlichen "Baustellen" gewonnen wurden, soll angestrebt werden, wo immer es möglich ist.

**Material**

- Die eigenen Finger der Kinder
- **Kärtchen von 1 bis 10** mit Würfelbildern; differenzierend auch ein Set mit Ziffernkarten für Kinder, die bereits die Ziffern lesen können
- Eventuell **Steckwürfel** in zwei Farben
- 2 Sets mit **Kärtchen mit strukturierten Zahldarstellungen** (Kärtchen nur von einer Sorte verwenden, also Fingerbilder ODER Würfelbilder)

**Durchführung**

- 1) Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen: Die Lehrperson bittet die Kinder nacheinander eins, zwei, drei ... Finger zu zeigen und legt der Reihe nach beginnend bei eins das jeweilige Aufgabenkärtchen der Würfel- und/ oder der Zifferndarstellung im Sitzkreis.

Im Gegensatz zur Übung „Zahlen auf einen Sitz zeigen“, liegt bei dieser Übung die Aufmerksamkeit auf das um eins mehr. „Zu einem Finger einen dazu macht zwei; zu zwei Fingern einen dazu macht drei“, usw. „zu vier Fingern einen dazu macht fünf, eine volle Hand“, usw.

Dann bittet sie die Kinder einen, zwei, drei... Steckwürfel in zwei unterschiedlichen Farben zusammen zu stecken. Nach diesem Prinzip werden alle Zahlen von null oder eins bis zehn durchgemacht.

Durch gezieltes Nachfragen werden die Kinder zum Nachdenken über ihr Handeln angeregt: „Wenn ich zähle: eins, und noch einen Finger dazu macht zwei; und noch einen Finger dazu macht drei...wie ändern sich die Zahlen?“

Vielleicht kommt auch hier die Erkenntnis von den Kindern, dass es immer um *genau um einen Finger mehr* wird.

2) Um eins mehr in Partnerarbeit: 

„Nennt euch wechselseitig Zahlen von null oder eins bis zehn. Ein Kind nennt die Zahl, das andere Kind zeigt zuerst diese Zahl, dann um eins mehr mit den Fingern. Also z.B. ich sage drei; du zeigst...drei Finger und noch einen Finger dazu, und sprichst dazu: "Drei, eins noch dazu macht vier"?"

Mögliche Differenzierung: „Zeige um 2/ um 3.... mehr Finger!“

3) Fingerbilder & Co: Ordnen! 

Ein Kind dreht Kärtchen seiner Wahl um und nennt die dargestellte Zahl. Dann überlegt es: „Liegt die Karte passend, wenn von links nach rechts die Anzahl immer größer werden soll?“ Anleitung in Materialien zu TIGER.



## Baustein 11 „um eins weniger“ Absteigende Zahlwortreihe



### Darum geht es

Wie bereits beschrieben, soll das Vorwärts- und Rückwärtszählen mit den Kindern geübt und sinnvoll kombiniert werden; einerseits rein verbal (z.B. als „Countdown“), andererseits sollen die Kinder eine Vorstellung von „eins weniger“ als „umgedrehte Zahlwortreihe“ aufbauen. Viele Schulanfänger können die Zahlenreihe rückwärts von zehn absteigend bis eins oder null oft weit weniger gut als die Zahlenreihe vorwärts, oder gar nicht. Die Frage „*was ist um eins weniger?*“ können viele Kinder ohne Zuhilfenahme von Zählmaterial nicht lösen. Auch hier ist anzustreben, dass die Kinder ihr bereits erworbenes Wissen über Fingerdarstellungen nutzen: Um schnell herauszufinden, was eins weniger ist als z.B. acht, kann es helfen, acht Finger auf einen Sitz zu zeigen, einen Finger wegzunehmen und die neue Fingeranzahl "auf einen Blick" abzulesen.

### Material

- **Steckwürfel** in zwei verschiedenen Farben
- die **eigenen Finger** der Kinder

### Durchführung

#### 1) „Um eins weniger“ – mit Steckwürfeln:

Die Kinder sammeln sich im Sitzkreis oder erhalten in Partnerarbeit Steckwürfel. Sie stecken abwechselnd eine Steckwürfelstange mit 10 Steckwürfeln zusammen und verwenden dabei zwei Farben. Dann stecken andere Kinder eine Stange zusammen, die um einen Steckwürfel weniger hat, usw., bis nur noch ein Steckwürfel übrig ist. Die Stangen werden der Länge nach geordnet, begonnen mit der längsten Stange. Die Kinder sollen erkennen und Worte fassen: *„Hier sind zehn Würfel. Da sind neun Würfel. Da sind acht Würfel. Da sind...“* Durch gezieltes Nachfragen sollen die Kinder gelenkt werden, ihre Beobachtungen zu formulieren. *„Ihr habt die Stangen vor euch liegen. Was fällt euch auf?“*

Erkenntnis (vielleicht kommt das von Kindern?):

*„Es sind zehn, neun, acht...Steckwürfel. Es wird immer um einen weniger. Neun ist um eins weniger als zehn. Acht ist um eins weniger als neun. Jede Zahl ist um eins weniger als die Zahl, die beim Rückwärtszählen nachher kommt.“*

2) „Um eins weniger“ – mit Fingern abbauen:

Begleitend zum Zählen als „Countdown“ wird die jeweilige Anzahl an Fingern gezeigt: *„Das sind zehn Finger.“* Pause, ein Finger weg. *„Jetzt sind es neun.“* Pause, ein Finger weg, usw.

Wenn zwei Kinder bereits sicher rückwärts zählen können, ist es wünschenswert, wenn der Zahlenraum geöffnet wird und sie gemeinsam von zwanzig rückwärts zählen: *„Zeigt eure Finger. Das sind zwanzig Finger.“* Pause, einen Finger weg. *„Jetzt sind es neunzehn Finger.“* Pause, ein Finger weg, usw.

3) Ein **erster** Versuch in Richtung Automatisierung:

Spornen Sie die Kinder an, die *Zahlen von zehn bis null* mit den Fingern so schnell als möglich zu zeigen: *„Zeige 10 bis 0 und zähle laut mit, so schnell du kannst.“*

## Baustein 12 „Stützpunkt-Zahlen“ Wie viele fehlen auf Fünf und Zehn?

### Darum geht es

Das schnelle, nicht-zählende Erfassen von strukturierten Zahldarstellungen ist ein wichtiges Element in der Entwicklung von Teile-Ganzes-Denken (TGD). Von besonderer Bedeutung sind dabei alle Zusammensetzungen der Zahl fünf und alle Zusammensetzungen der Zahl zehn. Bei der Erarbeitung dieser „Stützpunkt-Zahlen“ und der Einsicht in diese Zusammenhänge ist es zielführend, die Hände und in weiterer Folge strukturierte Materialien wie das Zehnerfeld zu verwenden.

### Material

- die eigenen **Finger** der Kinder

### Durchführung

- 1) Blitzblickübungen mit Fingern:

*„Wir üben wieder das Zeigen von Zahlen mit Fingern, immer schneller! Zeige vier/sieben/neun...“*

Fordern Sie die Kinder immer wieder auch zur Verbalisierung auf; dabei auf Formulierungen hinarbeiten wie: *„In der acht steckt fünf und drei drinnen.“* *„Acht besteht aus fünf und drei.“*

Alle befragten Lehrkräfte bekräftigen, erweiternde Aktivitäten zu Übung 1 aus Unterrichtsbaustein XII gerade für jene Kinder zu beschreiben, welche bereits einen sicheren Umgang mit Fingerdarstellungen in Beziehung mit fünf und zehn haben.

Die Kinder, die bereits alle Fingerdarstellungen in Beziehung mit fünf und zehn, also die Hauptzeigeweise sicher zeigen können, sollen alternative Zeigeweisen verwenden (siehe Baustein 4) und alle diese Varianten auch schriftlich festhalten. *„Kannst du vier/sieben/neun... auch noch anders zeigen?“* Wenn zwei Kinder bereits über dieses Wissen verfügen und zusammenarbeiten, gibt es zusätzliche, interessante Anregungen: *„Neun mit drei Händen – wie viele Varianten gibt es? Mit vier Händen?“*

## 2) Die Finger werden verdeckt:



Damit wirkliche Finger mehr und mehr durch vorgestellte Finger ersetzt werden, benötigen viele Kinder Aufgaben mit den Fingern, aber verdeckt. (siehe Baustein 7).

Ein Kind zeigt auf Aufforderung z.B. sieben Finger „auf einen Sitz“, aber unter der Tischplatte. Das andere Kind steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Dann die weiterführende Frage: „*Wie viel fehlt auf fünf / zehn?*“. Im Anschluss werden die Rollen getauscht.

Wichtig: Die auf fünf/zehn fehlenden Finger sollte nicht gezählt werden müssen, sondern als zweiter Teil der Fünf/Zehn (ergänzend zur bereits ausgestreckten Anzahl) erfasst werden. Sofern die Zahlen bis 9 in der Struktur "Kraft der Fünf" bereits automatisiert wurden, sollte das möglich sein – von z.B. drei fehlt ja zwei und fünf, also sieben. Diese Strukturen müssen aber wieder bewusst gemacht werden, also gilt auch hier: Immer wieder zum Verbalisieren auffordern; und zuvor: So weit wie möglich individuell beobachten, ob Kinder die fehlende Zahl spontan erkennen oder eventuell noch durch Abzählen ermitteln!

## 3) Wie viele Finger fehlen auf fünf und zehn?



Kinder, die den Zwischenschritt (Übung 2) nicht mehr brauchen, werden angeregt ihre Zahlen in Beziehung zu fünf und zehn nicht gleich mit den Fingern zu zeigen, sondern zu beschreiben, wie sie das tun würden. (Wenn möglich, bevor oder auch anstatt es wirklich zu machen).

Ein Kind nennt eine Anzahl von null oder eins bis zehn. „*Wie kannst du acht zeigen? Mit wie vielen Fingern an welcher Hand?*“ Und in weiterer Folge: „*Wie viele von deinen insgesamt zehn Fingern sind nicht ausgestreckt, wenn du acht zeigst, wie viel fehlt also auf zehn?*“

Die Kinder sollen verinnerlichen, dass die Beziehung sowohl zu fünf als auch zu zehn wichtig ist. Bei manchen Kindern ist es hilfreich, wenn man sich zuerst nur auf die Beziehung zu fünf konzentriert; andere wiederum brauchen die Öffnung bis zehn oder vielleicht zwanzig.

## 4) Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/Zehn gewinnt



Nach dem Muster von „Schere, Stein, Papier“ wird entweder bis „Fünf gewinnt“ oder „Zehn gewinnt“ gespielt. Anleitung in Materialien zu TIGER.

Ermitteln die Kinder die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger zählend, ist das Spiel vielleicht verfrüht; andere Aktivitäten wären sinnvoller (siehe Aufgabe 5).

5) Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen:



Die Lehrkraft sagt Zahlen zwischen fünf und zehn. Zwei Kinder sollen die jeweilige Zahl in Partnerarbeit zeigen, jedes Kind darf dabei nur eine Hand verwenden. Abwechselnd zeigt ein Kind dabei jeweils die „volle Hand“, also fünf Finger. Das andere muss überlegen, wie viele Finger seiner Hand noch dazukommen müssen. In einem weiteren Schritt kann gefragt werden, wie viel noch auf zehn fehlt.

## 9 Zweite Erprobung im Unterricht

Die zweite Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer gilt als die zentrale Phase und ist für die *Weiterentwicklung* der Lernumgebungen wesentlich. Für diese Erprobung der überarbeiteten Lernumgebungen im frühen Arithmetikunterricht konnten fünf Lehrkräfte, die eine erste Grundschulklasse unterrichten, gewonnen werden.

In diesem Kapitel werden zunächst die der zweiten Erprobung im Unterricht zugrunde liegenden Fragestellungen dargestellt. Danach wird in Abschnitt 9.2 der Ablauf der zweiten Erprobung mit den Phasen der Datenerhebung, Datenaufbereitung und Datenauswertung beschrieben (Abschnitt 9.3). Abschnitt 9.4 bringt die Ergebnisse der zweiten Erprobung im Unterricht. Daraus ableitend werden Gestaltungsprinzipien für die Unterrichtsbausteine generiert (Abschnitt 9.5). Das Kapitel schließt mit der Beschreibung des vorläufigen Abschlusses des Forschungs- und Entwicklungsprojektes.

### 9.1 Fragestellungen

Die übergeordnete Fragestellung (F2), die im Rahmen der zweiten Durchführung beantwortet wird, lautet: Welche stofflichen Hürden können bei Schüler\*innen bei der Erprobung der arithmetischen Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens erfasst werden, die im Klassenzimmer als Balance zwischen dem Gemeinsamen Lernen, dem Lernen in Kleingruppen und dem Individuum eingesetzt werden?

Strukturgebend für die Beantwortung der Forschungsfrage 2 sind die untergeordneten Forschungsfragen (F 2.1, F 2.1.1, ...).

F 2.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie **Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel** einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?

F 2.1.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Materialwechsel* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?

F 2.1.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Halten und Führen der Finger* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?

F 2.1.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?

F 2.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie ***Innermathematische Struktur*** einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.2.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der *Zuordnung* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.2.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Anzahlerfassenden Zählen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.2.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Nicht-zählenden Erfassen strukturierter Mengen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie ***Fachsprache der Mathematik*** einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.3.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der *Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.3.2: Wie häufig zeigen sich Hürden bei *Fachlich verständlichen Arbeitsaufträgen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

F 2.4: Wie häufig zeigen sich Hürden bei der Hauptkategorie ***Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse*** einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?

Im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 2 und den untergeordneten Forschungsfragen (F 2.1, F 2.1.1 ...) wird der Schwerpunkt bei der Entwicklung der Kategorien (Abschnitt 9.3) auf die *stofflichen Anforderungen der Lernenden* und in diesem Zusammenhang auf die individuellen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen der Lernenden beim Erlernen elementarer arithmetischer Inhaltsbereiche gelegt.

Freilich darf nicht übersehen werden, dass das Lernen der Kinder von vielen weiteren Faktoren abhängt, wie beispielsweise von der Motivation des Kindes, von der Geborgenheit und Sicherheit in der Familie, von der jeweiligen Tagesverfassung, vom Befinden in der Klasse, von den Beziehungen zu den Lehrkräften und seinen Mitschüler\*innen und von vielen weiteren. Diese mitunter nicht weniger bedeutenden Bereiche des Lernens werden beispielsweise von Hurrelmann und Rathmann (2018) und Schürer et al. (2021) beleuchtet und sollen hier nicht fokussiert werden.

Neben den stofflichen Anforderungen der Lernenden wird in dieser zweiten Durchführung auch die Lernbegleitung durch die Lehrkraft betrachtet. Dazu wird die Forschungsfrage 3 (F 3) beantwortet: **Wie werden die fachlichen Lernprozesse der Schüler\*innen im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Die übergeordnete Fragestellung F 3 lässt sich in die folgenden untergeordneten Forschungsfragen (F 3.1, F 3.1.1, ...) untergliedern.

F 3.1: Wird und – falls ja – wie wird die ***Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel*** im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-



Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.1.1: Wird und – falls ja – wie wird der *Individuelle Materialwechsel* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.1.2: Wird und – falls ja – wie wird das *Halten und Führen der Hände und Finger bei Zahldarstellungen* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.1.3: Wird und – falls ja – wie wird das *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.2: Wird und – falls ja – wie wird die **Innermathematische Struktur** im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.2.1: Wird und – falls ja – wie wird die *Zuordnung* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.2.2: Wird und – falls ja – wie wird das *Anzahlerfassende Zählen* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.2.3: Wird und – falls ja – wie wird das *Nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.3: Wird und – falls ja – wie wird die **Fachsprache der Mathematik** im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.3.1: Wird und – falls ja – wie wird die *Verbalisierung des Teile Ganzes-Denkens* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-

Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.3.2: Werden und – falls ja – wie werden *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

F 3.4: Werden und – falls ja – wie wird die **Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse** im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?

Die zur Beantwortung der Forschungsfrage 3 und der untergeordneten Forschungsfragen (F 3.1, F 3.1.1, ...) verwendeten Kategoriensysteme (Abschnitt 9.3) wurden zunächst aus theoretischen Überlegungen und mit Bezug auf die von Steinweg (2010, 2011) genannten Dimensionen zur fachdidaktischen Analyse mathematischer Lehr-Lernsituationen des Anfangsunterrichts in der Grundschule entwickelt (deduktive Herangehensweise) und in weiterer Folge von ersten Sichtungen des Datenmaterials verfeinert (induktive Herangehensweise; die ausführlichen Darstellungen zu den Kategoriensystemen sind in Abschnitt 9.3).

## 9.2 Durchführung

Die Kontaktaufnahme mit den einzelnen Kooperationspartnern fand im Frühjahr 2020 statt. Im Zuge dieses Gesprächs und um eine Passung der weiterentwickelten Lernumgebungen (Kapitel 8) für die teilnehmenden Klassen festzumachen, wurde im Rahmen eines informellen Austausches mit den Lehrkräften die Lernausgangslagen der Schüler\*innen festgehalten. Zudem wurden die Erfahrungen der Lehrkräfte hinsichtlich des „Lernens am gemeinsamen Gegenstand“ (Abschnitt 3.1.1) im arithmetischen Anfangsunterricht und hinsichtlich der Verwendung von strukturierten Erarbeitungsmaterialien (Abschnitt 3.2.2) eingeholt.

Die freiwillige Teilnahme der Lehrkräfte an diesem Projekt erforderte deren Bereitschaft, sich mit der Thematik des inklusiven arithmetischen Anfangsunterrichts auseinanderzusetzen. Diese Bereitschaft sei laut den befragten Lehrkräften der zweiten Durchführung aus unterschiedlichen Gründen entstanden: Vier Lehrkräfte gaben an,

dass sie selbst methodisch-didaktische Unsicherheiten zum arithmetischen Anfangsunterricht hätten. Sie hätten zu wenig Wissen darüber, wie sie diesen für alle Kinder gestalten könnten. Sie bekundeten Interesse an einer Zusammenarbeit, um so neue Anregungen für die Gestaltung der ersten Schulwochen im Arithmetikunterricht zu erhalten. Eine Lehrkraft stimmte einer Kooperation aufgrund der bereits entwickelten Lernumgebungen und den von ihr als „anschaulich“ befundenen Materialien zu.

Alle in den Klassen im Mathematikunterricht involvierten Lehrkräfte und die studentischen Mitarbeiter\*innen wurden in die Unterrichtsbausteine eingewiesen. Die Grundlage dieses Zyklus bilden die weiterentwickelten Lernumgebungen, die im voranstehenden Kapitel 8 ausführlich beschrieben werden. Dazu wurden an einem (Fortbildungs-)Tag die involvierten Personen (fünf Lehrkräfte, drei Stützlehrkräfte und vier studentische Mitarbeiter\*innen) in die inhaltliche Thematik eingeführt und in der Durchführung der einzelnen Unterrichtsbausteine für den arithmetischen Anfangsunterricht geschult. In dieser zehn-wöchigen Phase der zweiten Durchführung waren vier studentische Hilfskräfte beteiligt, die gleichzeitig ihre Masterarbeit im Rahmen des Forschungsprojektes schrieben (Erber, 2021; Koidl, 2021; Mattersberger, 2021; Wibmer, 2021).

Je eine studentische Hilfskraft begleitete eine Kooperationsklasse. Im Rahmen der Umsetzung galt es als Aufgabe der Klassenlehrkraft, gemeinsam mit der Projektleitung beziehungsweise den studentischen Hilfskräften die Unterrichtsbausteine auf die jeweilige Klassensituation abzustimmen: Die Lehrkraft entschied gemeinsam mit der Projektleitung und/oder mit der studentischen Hilfskraft, wann der richtige Zeitpunkt ist, einen neuen Unterrichtsbaustein in der Klasse oder bei einzelnen Kindern zu beginnen, oder ob es sinnvoll ist, additive Inhalte zu festigen. Folgerichtig wurden unter Berücksichtigung der individuellen Fähigkeiten der Kinder in der Klasse arithmetische Inhalte zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt des Schuljahres – oder bei einzelnen Kindern erst außerhalb des Durchführungszeitraumes – umgesetzt. Konkret bedeutet dies, dass einige Aktivitäten der entwickelten Unterrichtsbausteine in der Klasse C bei einem Kind mit Trisomie-21 innerhalb der zehnwöchigen Durchführung deswegen nicht umgesetzt werden konnten, da dieses Kind in diesem Zeitraum viele Fehlzeiten aufwies. Nach Absprache mit der Klassenlehrkraft und der Stützlehrkraft wurden die fehlenden und nicht gelernten Inhalte des Projektes mit diesem Kind nach Abschluss des Projektes aufgegriffen und weitergeführt. Ausführliche Darstellungen der Umsetzung in dieser Klasse sind bei Mattersberger (2021) zu finden.

Ganz allgemein wurde in jeder Kooperationsklasse vor und nach jeder Lernumgebung die Vorgehensweise für die nächste Unterrichtseinheit gemeinsam besprochen.

Am Ende jeder Schulwoche (in der Regel freitags) wurde die Umsetzung der Unterrichtsbausteine der jeweiligen Schulwoche reflektiert und dokumentiert. Die ausgearbeiteten Unterrichtsbausteine wurden demnach an die jeweilige Klassensituation angepasst und entsprechend den in den unterschiedlichen Klassen gemachten Erfahrungen modifiziert.

Zum Zeitpunkt der Kontaktaufnahme galten aufgrund der COVID-19-Situation in Österreich andere Vorgaben als bei der Datenerhebung zwischen September und November 2020. Die schulpolitischen Regeln im Herbst 2020 forderten unter anderem, *direkte Kontakte* von Kindergruppen aus unterschiedlichen Klassen so weit als möglich zu reduzieren. Umgesetzt wurde diese Vorgabe unter anderem durch eine schulinterne Einteilung der Jausenpausen und Benützung des Pausenhofes. Die Umsetzung des Projektes in der Klasse war durch die COVID-19 Vorgaben *kaum* eingeschränkt. Die Lehrkräfte achteten beim *kooperativen Lernen* im Rahmen der Lernumgebungen (Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 6.2) vor allem auf gleichbleibende Partner wie auch auf bewusste Einhaltung sozialer Distanzen (soweit dies im Kontext des Grundschulunterrichts möglich ist).

Die Datenerhebung der zweiten Durchführung fand zwischen September 2020 und November 2020 statt. Bei der Datenerhebung der zweiten Durchführung wurde mit fünf Tiroler Grundschulklassen aus mehreren Bezirken kooperiert. Die Kooperationsschulen sind eine Grundschule aus dem Bezirk Innsbruck-Stadt, eine aus dem Bezirk Innsbruck-Land, drei weitere aus dem Bezirk Lienz mit je einer ersten Klasse und jeweils einer beziehungsweise mehreren Lehrkräften (siehe Tabelle 4). Aufgrund der COVID-19 Situation im September 2020 und der politischen Ampelschaltung rot, welche explizit außerschulische Angebote von Personen innerhalb der Schulklassen ausschlossen, musste die Kooperation mit einer Klasse abgebrochen werden. Dies hatte – wie in Abschnitt 5.3.1 dargestellt – zur Folge, dass flexibel und zeitnah gehandelt werden musste und eine neue Kooperationsklasse des Bezirkes Innsbruck-Stadt in der Studie mitaufgenommen wurde. Im Folgenden werden nur die Daten dieser neuen Schulklasse beschrieben und in die Datenauswertung mitaufgenommen.

Eine weitere besondere Herausforderung ergab sich für einzelne Lehrkräfte der zweiten Durchführung dadurch, dass sie aufgrund der COVID-19-Pandemie zum Zeitpunkt der Kontaktaufnahme im Frühjahr 2020 die künftigen Erstklässler\*innen und deren individuelle Fähigkeiten im Vorfeld nicht kennenlernen konnten. Im Regelfall ist in Österreich vor Schuleintritt in die Volksschule ein Zeitfenster eingeplant, in welchem die Lehrkräfte im Austausch mit den Elementarpädagog\*innen die Kinder und deren Fähigkeiten

und Fertigkeiten kennenlernen. Deshalb begann aus organisatorisch-logistischen Gründen (beispielsweise Kinder kennenlernen, Schulgebäude erkunden, Erarbeitung der Klassenregeln, usw.) die Erhebung dieser zweiten Durchführung je nach Klassensituation erst in der zweiten oder dritten Schulwoche.

### ***Rahmenbedingungen in den einzelnen Kooperationsklassen***

In einigen Klassen wurde der Unterricht von einer Haupt- und einer Stütz(lehr-)kraft gemeinsam gehalten. Die Rolle einer Stütz(lehr-)kraft bestand in diesen Kooperationsklassen darin, dass sie das jeweilige Kind mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf beobachtete, begleitete und gezielte Fördermaßnahmen in Einzelsituationen, in Klein- und/oder in der Gesamtgruppe durchführte.

Die Unterrichtserprobungen der zweiten Durchführung fanden in fünf Tiroler Grundschulen mit insgesamt  $N = 94$  Schüler\*innen (45 Mädchen/ 49 Jungen) statt. Tabelle 22 gibt eine Übersicht über klassenbezogene Rahmenbedingungen der einzelnen Kooperationen. Daran anschließend werden die einzelnen Kooperationsklassen und deren Rahmenbedingungen beschrieben.

**Tabelle 22**

*Rahmenbedingungen in den einzelnen Kooperationsklassen (eigene Darstellung)*

| <b>Schule</b> | <b>Klassenbezogene Rahmenbedingungen</b>                                                                                                                     |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>A</b>      | - 23 Kinder (8 Mädchen/ 15 Jungen); ein Kind mit SPF; eine Lehrkraft und eine Stützlehrkraft (Lehrkraft A/ Stützlehrkraft A)                                 |
| <b>B</b>      | - 18 Kinder (12 Mädchen / 6 Jungen); kein ausgewiesenes SPF-Kind; fünf Schüler*innen nicht-deutscher Muttersprache; eine Lehrkraft (Lehrkraft B)             |
| <b>C</b>      | - 10 Kinder (6 Mädchen/ 4 Jungen); ein ausgewiesenes SPF-Kind; zwei Lehrkräfte und eine Stützkraft (Lehrkraft C/ Stützlehrkraft C)                           |
| <b>D</b>      | - 19 Kinder (7 Mädchen/ 12 Jungen); kein ausgewiesenes SPF-Kind; eine Lehrkraft und eine Stützkraft (Lehrkraft D/ Stützlehrkraft D)                          |
| <b>E</b>      | - 24 Kinder (12 Mädchen / 12 Jungen); kein ausgewiesenes SPF-Kind; ein Drittel der Schüler*innen nicht-deutscher Muttersprache; eine Lehrkraft (Lehrkraft E) |

### **Kooperationsklasse A**

23 Kinder (8 Mädchen/15 Jungen) besuchten die Kooperationsklasse A. In der Kooperationsklasse A wurde eine Fächerteilung praktiziert, das heißt, dass die Hauptlehrkraft ausschließlich das Fach Mathematik in allen Schulstufen und Schulklassen unterrichtete.

Wie in Abschnitt 9.2 beschrieben, fand in dieser Klasse aufgrund der COVID-19-Maßnahmen kein Kennenlernen der Kindergartenkinder des letzten Kindergartenjahres vor Schuleintritt statt. Laut Aussage der Klassenlehrkraft gab es mehrere gute und gewinnbringende Gespräche mit der Elementarpädagogin und der Stützkraft gerade auch deswegen, da Rosa, ein Mädchen mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf und hier insbesondere mit dem Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung, einschulte. Im Zuge der Schuleinschreibung wurde von den Erziehungsberechtigten ein Antrag auf Feststellung eines sonderpädagogischen Förderbedarfs gestellt, dieser wurde von allen beteiligten Personen als notwendig erachtet und eingeleitet. Aus diesem Grund wurden fortlaufend alle Mathematikstunden in der Volksschule von einer Hauptlehrkraft und einer Stützkraft gemeinsam gehalten.

Die Hauptlehrkraft berichtet davon, dass die Elementarpädagogin sehr erfahren und seit mehreren Jahren die gruppenleitende Pädagogin mit der persönlichen Schwerpunktsetzung in der frühen mathematischen Bildung sei. Mit den Kindergartenkindern habe sie vielfältige Aktivitäten zum Zählen gemacht und insbesondere auf die Erarbeitung und Festigung der Finger- und Würfelbilder besonders geachtet. Bei der Arbeit mit Rosa sei ihr in dieser frühen Phase des Mathematiklernens wichtig gewesen, sowohl pränumerische und numerische Aufgaben, so gut es im Rahmen ihrer kognitiven Kapazitäten eben ging, miteinander zu verknüpfen. Von diesen Ansätzen habe sie zum ersten Mal im Rahmen einer Fortbildung erfahren. Sie zeigte sich begeistert, weshalb sie diese Überlegungen in der Arbeit mit Rosa einbauen wollte. Ähnliche Überlegungen, wonach beide Bereiche in dieser frühen Phase des Mathematiklernens in Aktivitäten mit Kindern mit dem Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung geübt werden sollten, sind auch in der gängigen Literatur zu finden (Abschnitt 3.2).

Auch berichtete die Stützkraft, welche sehr viel mit Rosa im vorschulischen Bereich arbeitete, davon, dass ihr das Zählen im Vergleich zu den gleichaltrigen Regelkindergartenkindern sehr schwergefallen sei (Abschnitt 2.2.1). Gerade deswegen haben sie verbale Zählaktivitäten mit unterschiedlichsten (Alltags-)Materialien täglich gemacht. Während die gleichaltrigen Kindergartenkinder bereits andere numerische Aktivitäten wie die Finger- und Würfelbilder übten, hätten sie mit Rosa einen besonderen Schwerpunkt auf

das verbale Zählen gelegt. Dazu habe sie beobachtet, dass Rosa eine Vorliebe für Enten gehabt habe. Sie sei auf einem Bauernhof aufgewachsen, mit der Hausnummer 3 und unterschiedlichen Hoftieren. Rosas Lieblingstier die Ente veranlasste die Elementarpädagoginnen dazu, kleine Spielenten für die elementare Bildungseinrichtung und der Arbeit mit Rosa anzuschaffen. Diese wurden laut deren Aussage täglich gezählt, mit weiterführenden Aktivitäten „Wie viele Enten sind es heute? Es wurde keine Ente dazu- und keine weggeben. Müssen wir nochmals abzählen?“ Unter konkreter Anleitung war es Rosa am Ende des letzten Kindergartenjahres auch möglich, die Zahlwortreihe und das anzahlerfassende Zählen sicher zu erwerben.

Im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ (Abschnitt 6.2), welche vor Beginn der Durchführung der Unterrichtsbausteine mit allen Kindern der Klasse gemacht wurde, zeigt sich ein vielfältiges Bild hinsichtlich der numerischen Vorläuferfertigkeiten der Schulanfänger\*innen: Während Kinder wie Rosa ein Haus mit der Hausnummer 3 und Enten malte, schrieben andere Kinder die Zahlenreihe von 0-20, zwei Kinder von 0-30 in symbolischer Schreibweise korrekt auf. Wiederum ein anderer Junge zeichneten einen Sack, darüber beschriftet 18 €. In diesen Sack malte der Junge 3 5-Euro-Scheine und 1 2-Euro-Münze und 1 1-Euro-Münze. Ein Mädchen hingegen zeichnete mehrere geometrische Formen und beschriftete diese selbst korrekt: Dreieck, Viereck, Kreis. Alle Schulanfänger\*innen konnten ohne Vorstrukturierung von den Lehrkräften ihre numerischen Vorkenntnisse individuell unterschiedlich darstellen. Kein Kind benötigte im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ zusätzliche und individuelle Hilfestellungen seitens der Lehrkräfte.

### ***Kooperationsklasse B***

Die Kooperationsklasse B bestand aus 18 Kindern mit 12 Mädchen und 6 Buben. Es befanden sich fünf Schulanfänger\*innen in der Klasse, welche eine andere Erstsprache als Deutsch hatten. Diese Klasse wurde im „Team-Teaching“ geführt. Dies meint, dass eine Hauptlehrkraft das Hauptfach Mathematik alleine unterrichtete und die andere für das Hauptfach Deutsch zuständig war. Bei dieser Ganztagesklasse mit einer anderen Taktung der Fach- und der Freizeitstunden, wurden die Mathematikstunden auch nachmittags gehalten.

Eine weitere Besonderheit dieser Klasse war, dass sie als „schulsprengelfreie Schule“ im Raum Innsbruck-Stadt geführt wird. Dies meint, dass sie Schulanfänger\*innen aus unterschiedlichen elementaren Bildungseinrichtungen aufnimmt. Sofern sich Erziehungsberechtigte für diese Schule entscheiden, müssen sie alle notwendigen Unterlagen der vorangegangenen elementaren Bildungseinrichtung dieser zuständigen Schulleitung

vorlegen. Auch muss das Kind für schulreif gelten und kann dann, bei positivem Vorliegen beider Bereiche, in weiterer Folge diese Schule besuchen.

Im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ (Abschnitt 6.2) zeigte sich, dass überdurchschnittlich viele Schulanfänger\*innen dieser Klasse als leistungsstark in dieser frühen Phase des Mathematiklernens gelten: Ohne Vorstrukturierung seitens der Lehrkraft und ohne die Kinder im Vorfeld dahingehend zu lenken, schrieben 10 Kinder (6 Mädchen / 4 Buben) dieser Klasse die Zahlenreihe bis 20 in Zweierschritten, eingeschlossen der 0, auf: 0, 2, 4, 6, ... bis 20. 3 Kinder schrieben Dementsprechendes bis 30. Weitere 11 Kinder (7 Buben/ 4 Mädchen) schrieben erste Rechnungen in Ziffernschreibweise auf. Rechnungen wie z.B.  $3 + 4 = 7$ ;  $4 + 4 = 8$ ;  $2 + 2 = 4$ ;  $1 + 3 = 4$ ;  $5 + 5 = 10$ , aber auch  $5 + 0 = 5$ ;  $5 + 6 = 11$ ;  $8 + 5 = 13$ ;  $9 + 9 = 18$ ;  $20 + 20 = 40$  und  $50 + 30 = 80$  wurden korrekt notiert. Auch in dieser Klasse arbeiteten alle Schulanfänger\*innen ohne Vorstrukturierung von der Hauptlehrkraft und ohne namhafte Unterstützung seitens der Hauptlehrkraft.

### ***Kooperationsklasse C***

10 Kinder (6 Mädchen/4 Buben) der ersten Schulstufe einer jahrgangsübergreifenden Klasse besuchten die Kooperationsklasse C, mit einem Kind mit einem Sonderpädagogischen Förderbedarf (Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung: Trisomie-21). Bei Felix, ähnlich wie bei Rosa, die im Rahmen der Beschreibung der Kooperationsklasse A beschrieben wird, wurde ein entsprechender Antrag dafür bereits mit Schuleinschreibung gestellt.

Aus diesem Grund hatte Felix fortlaufend in den Mathematikstunden der Volksschule eine Stützlehrkraft an seiner Seite. Zusätzlich und aufgrund der gemeinsamen Beschulung der ersten und zweiten Schulstufe in dieser Klasse, unterrichteten zwei Hauptlehrkräfte und eine Stützlehrkraft in der Klasse. In den Fächern Deutsch und Mathematik wurden die Kinder der jeweiligen Schulstufen getrennt voneinander unterrichtet, weshalb in der Beschreibung der Auswertung der Unterrichtsgeschehen lediglich die Hauptlehrkraft C und die Stützlehrkraft C beschrieben wird. Alle Schüler\*innen hatten Deutsch als Muttersprache.

Im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ (Abschnitt 6.2) mit den Schulanfänger\*innen konnte rückgeschlossen werden, dass einige leistungsschwache Schüler\*innen in dieser Klasse beschult wurden. Lediglich ein Mädchen dieser Klasse konnte ohne Vorgabe und ohne weitere Hilfestellung seitens der Lehrkräfte ihre numerischen Vorkenntnisse aufs Blatt Papier selbstständig zeichnen: Sie fertigte mehrere Strichlisten korrekt mit Hilfe der



5-er Bündelung, das Würfelbild der Zahl 5 und das Würfelbild der Zahl 6 an. Auch schrieb sie das Datum 01.02.2014 und die Zahlenreihe 1-10 mit Ziffern korrekt auf. Alle anderen Schulanfänger\*innen dieser Klasse konnten ohne Unterstützung seitens der Lehrkräfte nicht selbstständig arbeiten und auch nicht ihre Vorerfahrungen zeichnerisch alleine festhalten. Durch konkretes Nachfragen und Anleitung seitens der Lehrkräfte, wie z.B. „Wie heißt deine Lieblingszahl?“ und „Sollen wir die Zahlen bis 5/10 gemeinsam schreiben?“, gelang es allen Kindern, gemeinsam einfache Aktivitäten zu verschriftlichen.

### ***Kooperationsklasse D***

In Kooperationsklasse D waren insgesamt 19 Kinder (7 Mädchen/12 Jungen). Der Mathematikunterricht wurde von der Hauptlehrkraft gehalten und von einer weiteren Stützlehrkraft begleitet, da insgesamt 14 Schulanfänger\*innen mit einer anderen Muttersprache als Deutsch einschulten. Nach Aussage der Hauptlehrkraft besuchte ein Mädchen und ein Junge vor diesem Schuljahr die Vorschulklasse in derselben Schule.

Auch in dieser Klasse konnte im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ (Abschnitt 6.2) festgestellt werden, dass die Schulanfänger\*innen der Klasse D über weitreichende, aber sehr unterschiedliche numerische Vorkenntnisse verfügen: Ein Junge schrieb die Zahlenfolge 7, 14, 21, 28 als Ziffern richtig auf. Derselbe Junge schrieb auch erste Rechnungen korrekt auf:  $7 + 7 = 14$ ;  $100 + 100 = 200$ ;  $8 - 5 = 3$ . Ein anderer Junge malte ein Auto in einfacher Darstellung mit einer dargestellten Autokennzahl. Ein Mädchen wiederum malte ein Telefon und schrieb die Ziffernfolge 00137451.

Zwei Mädchen verstanden den Auftrag nicht und konnten ohne Hilfestellung seitens der Lehrkraft nichts verschriftlichen. Auf die Frage „Welche ist deine Lieblingszahl?“ schrieben beide Mädchen, nebeneinandersitzend, die eine 3 und die andere 5 auf. Beide Mädchen malten um die jeweilige Ziffer ein Herz. Alle anderen Kinder dieser Klasse arbeiteten selbstständig.

### ***Kooperationsklasse E***

In Kooperationsklasse E mit insgesamt 24 Kindern (12 Mädchen/12 Buben) waren ein Drittel der Klasse mit nicht-deutscher Muttersprache und ein Junge mit körperlicher Beeinträchtigung im Rollstuhl. Die Mathematikstunden wurden von der Hauptlehrkraft alleine gehalten, es gab keine zusätzliche Stützkraft in der Klasse.

In dieser Kooperationsklasse begann das Projekt erst in der 3. Schulwoche, da die Lehrkraft im Vorfeld um genügend Zeit gebeten hat, um alle Schulanfänger\*innen und deren Besonderheiten kennenzulernen. Bei unserem Kennenlernen berichtete sie davon, dass

ihre wahrgenommene Heterogenität in dieser Klasse sehr groß und sie über die Mithilfe im Fach Mathematik durch dieses Projekt erleichtert sei. Der Junge mit körperlicher Beeinträchtigung, Lukas, sei fachlich in allen Bereichen leistungsstark. Im Hauptfach Mathematik gab es aus ihrer Sicht keine Einschränkungen, ihrer Meinung nach könne und solle er an allen geplanten Aktivitäten teilnehmen. Schwierigkeiten sähe sie vor allem darin, dass 8 Kinder über geringe sprachliche Kompetenzen in Deutsch verfügten. Da sie sich im Vorfeld gut auf die Klasse vorbereitet hätte, besuchte sie mehrere Fortbildungen im Bereich „Deutsch als Zweitsprache“ und bat beim Kennenlernen der Projektmitarbeiter\*innen gerade darum, sie bei der Verwendung der Fachsprache im frühen Arithmetikunterricht und beim Aufbau eines Fachwortschatzes bei den Kindern im Rahmen des Projektes gut zu unterstützen. Eine Arbeit mit einem Wortspeicherplakat wäre ihr ein Anliegen.

Im Rahmen der „Weißblatt-Erhebung“ (Abschnitt 6.2) zeigte sich die Hauptlehrkraft insofern überrascht, dass alle Kinder selbstständig und ohne Mithilfe ihre numerischen Vorkenntnisse verschriftlichen konnten und über durchaus weitreichende Vorerfahrungen verfügten: Ein Mädchen schrieb die Zahl 18 in Ziffernschreibweise und zeichnete darunter korrekt die Punktedarstellung mit der Struktur der Fünferschiffchen. Drei Mädchen malten unterschiedliche Strichlisten korrekt mit Hilfe der 5-er Bündelung, ein Mädchen malte das Würfelbild der Zahl 2 und das Würfelbild der Zahl 3. Ein Junge wiederum malte in einfacher Darstellung das Fingerbild der Zahl 5 und das Fingerbild der Zahl 7 und hier mit Darstellung der „Hauptzeigeweise“. Drei weitere Jungen schrieben die Zahlenreihe von 0-10 korrekt auf, ein weiteres Mädchen die Zahlenreihe von 0-30.

Die Besonderheiten der jeweiligen Kooperationsschulen der zweiten Durchführung, welche für die Datenauswertung und Weiterentwicklung der Lernumgebungen relevant sind, werden in der Tabelle 5 zusammengefasst. Das Einschlusskriterium für die Teilnahme an dem Projekt sind die im Vorfeld gesammelten und unterschriebenen Einverständniserklärungen der Erziehungsberechtigten der Kinder.

**Tabelle 23**

*Rahmenbedingungen der einzelnen Kooperationsschulen (eigene Darstellung)*

| Schule | Besonderheiten                                                                                                                                                                         |
|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A      | - Reguläre Stundentaktung von 50 Minuten; Fachlehrersystem; nach der zweiten Stunde gibt es eine 10-minütige Jausenpause und eine 15-minütige Erholungspause im Schulhof; aufgrund der |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          | COVID-19-Vorschriften fand der Unterricht ausschließlich im Klassenzimmer statt                                                                                                                                                                                |
| <b>B</b> | - Ganztagesklasse; reguläre Stundentaktung von 50 Minuten; Unterrichtseinheiten auch am Nachmittag; Fachlehrersystem; aufgrund der COVID-19-Vorschriften fand der Unterricht ausschließlich im Klassenzimmer statt                                             |
| <b>C</b> | - Reguläre Stundentaktung von 50 Minuten; nach der zweiten Stunde folgt die Pause in der Klasse; aufgrund der COVID-19-Vorschriften fand der Unterricht ausschließlich im Klassenzimmer statt; ein Kind mit Trisomie-21 durfte den Gang als Rückzugsort nutzen |
| <b>D</b> | - Reguläre Stundentaktung von 50 Minuten; aufgrund der COVID-19-Vorschriften fand der Unterricht ausschließlich im Klassenzimmer statt                                                                                                                         |
| <b>E</b> | - Reguläre Stundentaktung von 50 Minuten; aufgrund der COVID-19-Vorschriften fand der Unterricht ausschließlich im Klassenzimmer statt; nur an festgelegten Tagen und bestimmten Zeiten durften die Kinder in den Pausenhof                                    |

### 9.3 Datenaufbereitung und Datenauswertung

„Da bei der wissenschaftlichen Beobachtung die interessierten Daten zum Zeitpunkt ihres Auftretens sozusagen ‚live‘ erfasst werden, überfordert die Fülle und Frequenz der Informationen menschliche Beobachter potenziell“ (Döring & Bortz, 2016, S. 324).

Daraus folgend wurden zur Beantwortung der Forschungsfragen (Abschnitt 9.1) videogestützte Unterrichtsbeobachtungen herangezogen. Diese sensiblen Daten erforderten im Vorfeld der Durchführung eine Genehmigung der zuständigen Landesbehörde, der Schulleitung und der Erziehungsberechtigten aller Schüler\*innen.

In jedem Klassenzimmer wurde eine Kamera aufgestellt beziehungsweise mobil verwendet. Die Videokamera wurde je nach Unterrichtssituation entweder hinten im Klassenzimmer platziert, um das Ganze im Blick zu haben oder mobil bei Einzel-, Partner-, und/oder Gruppenarbeiten verwendet. Alle Videoaufnahmen wurden entweder von der Forscherin selbst oder den studentischen Hilfskräften aufgezeichnet.

Alle Videomitschnitte von Unterrichtseinheiten lagen somit als digitale Aufnahmen vor und waren so in PC-Programmen zur computerunterstützten Analyse einspielbar.

Dadurch werden sie analysierbar (Döring & Bortz, 2016). Vor diesem Hintergrund wurden die Daten durch einen mehrgliedrigen Ansatz aufbereitet: In einem ersten Schritt werden die für die Datenanalyse relevanten videographierten Lernumgebungen sequenziert. In einem weiteren Schritt wurden durch die computergestützte Software f4 regelgeleitet Transkripte erstellt. Da die Datenmenge der Durchführung in fünf Grundschulklassen durchaus erheblich war, war eine gezielte Auswahl relevanter Videomitschnitte notwendig. Ein Kriterium für diese Auswahl wurde so festgelegt, dass diese Mitschnitte – wie in Abschnitt 5.3.3 von Bakker (2004; cited in Bakker, 2018, p. 61) als *mini-interview* bezeichnet – zeitlich etwa zwanzig Sekunden bis etwa 4 Minuten dauern. Die weiteren Schritte der Datenaufbereitung werden folgend dargestellt.

### ***Regelgeleitete Transkripte***

Von den 769 Transkripten der Unterrichtseinheiten der zweiten Durchführung wurden 395 in die Datenauswertung einbezogen (Abschnitt 9.4). Bei diesen Transkripten wurde im Sinne Dresing und Pehl (2018) die Verschriftlichung des Gesprochenen so facettenreich und detailgetreu als möglich wiedergegeben, ohne sich in zu vielen Details und Informationen zu verstricken. Zusätzlich wurde im Sinne der Autoren auf eine ausgewogene Balance beider Pole „facettenreich“ und „detailgetreu“ geachtet, um dem Leser einen Eindruck des Unterrichtsgeschehens beziehungsweise der Gesprächsführung zu geben (Dresing und Pehl, 2018).

Die einzelnen Transkripte wurden nach dem inhaltlich-semanticen Regelsystem nach Kuckartz et al. (2008) erstellt. Dieses Regelsystem beschreibt wesentliche Grundlagen der Transkriptionsarbeit, welche auch bei den Transkripten der vorliegenden Arbeit beachtet wurden: i) Dialekte werden möglichst wortgetreu ins Hochdeutsche übersetzt; ii) es wird wörtlich transkribiert; iii) umgangssprachliche Partikel wie „ge, gell“ werden wortwörtlich transkribiert; iv) Stottern wird geglättet oder ausgelassen, Wortdopplungen werden nur verwendet, wenn sie als Mittel für eine Betonung eingesetzt wird (etwa Dresing & Pehl, 2018; Kuckartz et al., 2008).

### ***Qualitative Inhaltsanalyse***

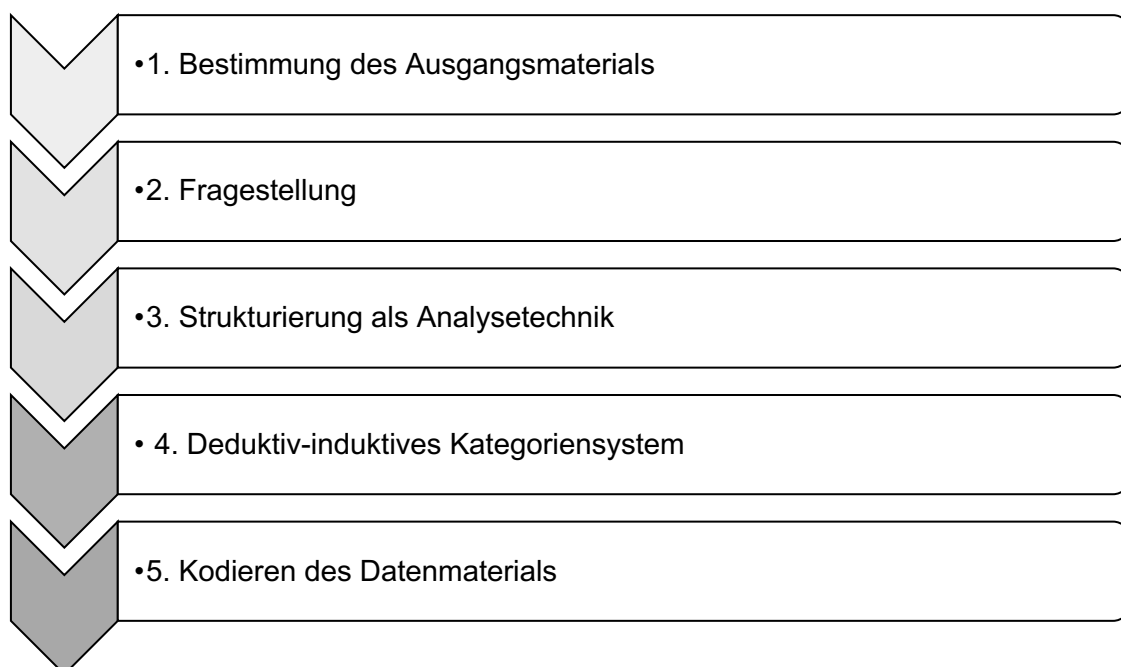
Die Auswertung der Unterrichtssequenzen dieser zweiten Durchführung erfolgte mittels qualitativer Inhaltsanalyse. Nach Mayring (2015, 2016) ist die qualitative Inhaltsanalyse keine feststehende Technik. Je nach Forschungsfrage und Material wird eine der drei von Mayring (2015, 2016) festgelegten Grundformen des Interpretierens ausgewählt.

Neben der Explikation und der Strukturierung gilt die Zusammenfassung als eine dieser drei Grundformen. Angepasst an den konkreten Untersuchungsgegenstand, das Datenmaterial und die Fragestellung wird ein konkretes Ablaufmodell der Analyse festgelegt. Bei diesem systematischen Vorgehen der Inhaltsanalyse werden einzelne Schritte der Analyse und deren Reihenfolge bestimmt (Mayring, 2015).

Das Ablaufmodell im Folgenden beschreibt überblicksartig die Schritte der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) und konkretisiert diese in der vorliegenden Untersuchung.

#### Abbildung 23

*Ablaufmodell der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015, S. 54 ff.) in Anlehnung an Bierbrauer, 2022*



- 1. Bestimmung des Ausgangsmaterials

*Festlegung des Materials:* Als Grundlage des Datenmaterials bei der Auswertung der zweiten Durchführung dienten transkribierte Unterrichtseinheiten aus den 5 Kooperationsklassen (Abschnitt 9.2), welche im Rahmen der zweiten Durchführung gewonnen wurden. Von den 769 transkribierten Sequenzen wurden 395 in die Auswertung einbezogen (Abschnitt 9.4). Bei dieser Auswertung werden die individuellen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen der Lernenden und

die fachliche Lernbegleitung der Lehrkraft, beziehungsweise der Lehrkräfte anhand der Aktivitäten der im Rahmen des (Dissertations-)Projektes entwickelten 13 Lernumgebungen (Abschnitt 6.2) untersucht.

*Analyse der Entstehungssituation:* Alle Lernumgebungen wurden an der jeweiligen Schule und von der jeweiligen Lehrkraft beziehungsweise den jeweiligen Lehrkräften durchgeführt (Abschnitt 9.2). Die videogestützten Beobachtungen wurden von der Verfasserin der Arbeit oder von einer studentischen Hilfskraft durchgeführt (Abschnitt 9.3).

*Formale Charakteristika des Materials:* Das Unterrichtsgeschehen wurde mit Hilfe einer Kamera videografiert (Abschnitt 9.3) und in weiterer Folge mit einem Textverarbeitungsprogramm transkribiert. In diesem Zusammenhang wurden konkrete Regeln des Transkribierens bestimmt (Abschnitt 9.3).

- 2. Fragestellung  
Aus den vorhandenen theoretischen Überlegungen zum Thema (Kapitel 1 bis 4) ergaben sich die übergeordneten Forschungsfragen der Arbeit (Abschnitt 5.2) und die untergeordneten Fragestellungen zur zweiten Durchführung, welche in Abschnitt 9.1 konkretisiert werden.
- 3. Strukturierung als Analysetechnik  
Angepasst an die Forschungsfrage und das Datenmaterial wurde als geeignete Analysetechnik die inhaltliche Strukturierung ausgewählt. „Ziel inhaltlicher Strukturierungen ist es, bestimmte Themen, Inhalte, Aspekte aus dem Material herauszufiltern und zusammenzufassen. Welche Inhalte aus dem Material extrahiert werden sollen, wird durch theoriegeleitet entwickelte Kategorien und (sofern notwendig) Unterkategorien bezeichnet.“ (Mayring, 2015, S. 103)
- 4. Deduktiv-induktives Kategoriensystem  
Im Zusammenspiel des aktuellen Forschungsstandes, des Datenmaterials und der Forschungsfragen wurde ein Kategoriensystem ausgearbeitet. Dabei wurde vorwiegend deduktiv und in weiterer Folge induktiv ausgewertet. Dieses Kategoriensystem wird im Folgenden ausführlich beschrieben.
- 5. Kodieren des Datenmaterials  
Mit Hilfe der Analysesoftware f4 wurde das Datenmaterial kodiert, die Untersuchungsergebnisse hinsichtlich der Fragestellungen analysiert und interpretiert (Abschnitt 9.4 und Abschnitt 9.5).

### ***Inhaltliche Strukturierung und Kategorienbildung***

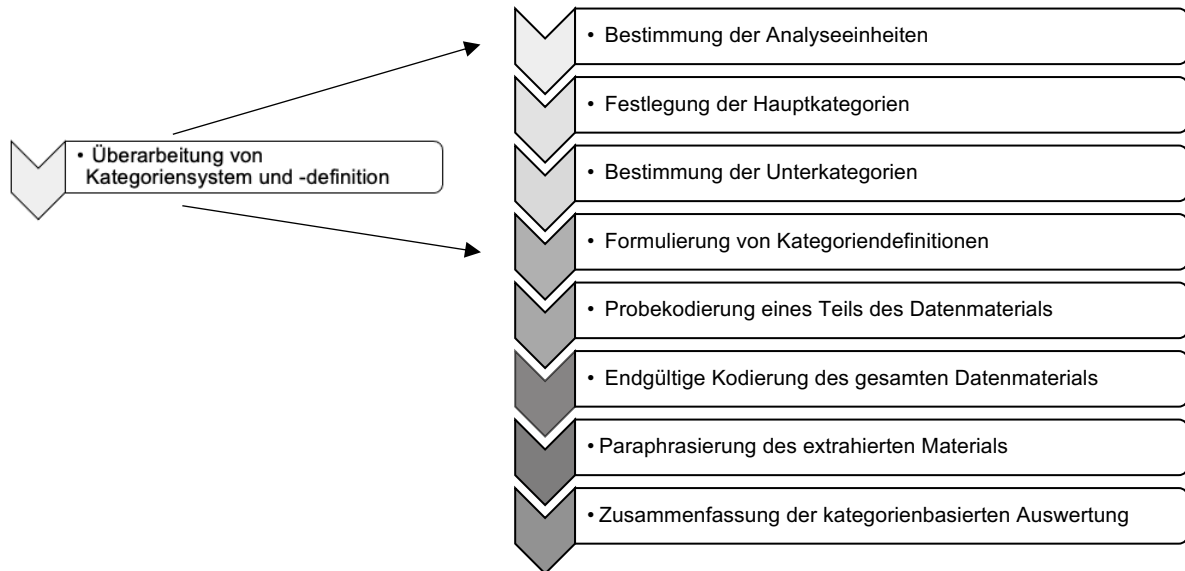
Das Kernstück der Qualitativen Inhaltsanalyse und der Auswertung der zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine ist ein Kategoriensystem mit definierten Kategorien und Unterkategorien, die im Vorhinein klar bestimmt und mit Festlegung der inhaltsanalytischen Vorgehensweise den Textstellen zugewiesen werden (Mayring, 2015). Trotz diesem vorgegebenen Rahmen sei nach Mayring et al. (2005) das Vorgehen der Zuordnung von Kategorie zu Material ein „zwar regelgeleiteter, aber interpretativer“ (S. 14).

Vor diesem Hintergrund wurden die einzelnen Videosequenzen von der Autorin der vorliegenden Arbeit und von den vier intensiv geschulten studentischen Hilfskräften sorgfältig angesehen und diejenigen ausgewählt, welche für die Untersuchung und die Forschungsfragen relevant sind (Abschnitt 9.1). Dabei arbeiteten alle Beteiligten zunächst parallel und unabhängig voneinander. Die abschließende Kodierung mit den ausgearbeiteten Kategoriensystemen erfolgte wiederum gemeinsam im Team mit der Projektleitung und den vier studentischen Hilfskräften, unterschiedliche Kodierungen wurden abschließend zwischen involvierten Kodierenden diskutiert, bis ein Konsens gefunden wurde. Von diesen vier studentischen Hilfskräften legten zwei Kodierer den Forschungsschwerpunkt auf „Fachsprache der Mathematik“ (Erber, 2021; Wibmer, 2021) und zwei Kodierer auf „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ (Mattersberger, 2021; Koidl, 2021). Die Erkenntnisse dieser Arbeiten werden in der vorliegenden Arbeit aufgenommen (ausführlich bei der Beschreibung der Kategorie *Fachsprache der Mathematik* in Abschnitt 9.4).

Die forschungsrelevanten Merkmale des Datenmaterials wurden systematisch herausgearbeitet und interpretiert. Daraus ergibt sich nun folgendes Modell des Ablaufs inhaltlicher Strukturierung gemäß Mayring (2015), welches an das vorliegende Forschungs- und Entwicklungsprojekt angepasst wurde.

**Abbildung 24**

Ablaufmodell der inhaltlichen Strukturierung (Mayring, 2015, S. 104 ff.) in Anlehnung an Bierbrauer, 2022



Im Verlauf der Überarbeitungsphase von Kategoriensystem und -definition und um die *stofflichen Hürden der Schüler\*innen* (Forschungsfrage 2) und die *Begleitung der fachlichen Lernprozesse* von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften (Forschungsfrage 3) untersuchen und Forschungsfragen beantworten zu können, wurden folgende Kategorien und (Unter-)Kategorien finalisiert definiert:

- **Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel** (Abschnitt 9.4.1): Bewusster Materialwechsel (Abschnitt 9.4.1.1), Halten und Führen von Fingern (Abschnitt 9.4.1.2), Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel (Abschnitt 9.4.1.3);
- **Innermathematische Struktur** (Abschnitt 9.4.2): Zuordnung (Abschnitt 9.4.2.1), Anzahlerfassendes Zählen (Abschnitt 9.4.2.2), Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen (Abschnitt 9.4.2.3);
- **Mathematische Sprache** (Abschnitt 9.4.3): Teile-Ganzes-Denken (Abschnitt 9.4.3.1), fachlich verständliche Arbeitsaufträge (Abschnitt 9.4.3.2);
- **Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse** (Abschnitt 9.4.4).

Diese Kategorien zeigen sich als durchgängige Kategorien bei den ausgewerteten Unterrichtssequenzen in Abschnitt 9.4 – in unterschiedlichen Unterrichtsereignissen – beim fachlichen Lernen der Lernenden und/oder durch die fachliche Lernbegleitung der



Lehrkraft, beziehungsweise der Lehrkräfte. Die Kategorien werden nun folgend einzeln beschrieben.

### ***Festlegung der Hauptkategorien und Bestimmung der Unterkategorien***

#### ***1. Verwendung Strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel***

Die Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* folgt aus theoretischen Überlegungen und mit Bezug auf die in Abschnitt 3.2.2 von Häsel-Weide und Nührenbörger (2017) benannten Leitideen inklusiven Mathematikunterrichts (deduktive Herangehensweise).

Zur Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* werden die drei Unterkategorien i) Individueller Materialwechsel; ii) Halten und Führen der Hände und iii) Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel zugeordnet. Die einzelnen Unterkategorien wurden induktiv aus dem Datenmaterial generiert.

**Tabelle 24**

*Präzisierung zu Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel (eigene Darstellung)*

| Hauptkategorie                                                     | Unterkategorien                         | Formulierung von Kategoriendefinitionen                         |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <i>Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel</i> | Individueller Materialwechsel           | Der Zeitpunkt des Materialwechsels.                             |
|                                                                    | Halten und Führen der Hände             | Halten und Führen der Hände und Finger bei Aktivitäten.         |
|                                                                    | Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel | Bei Materialwechsel Anzahlen in ihren Teilen und Ganzen denken. |

#### ***2. Innermathematische Struktur***

Die Hauptkategorie *Innermathematische Struktur* vereint die Unterkategorien i) Zuordnung; ii) Anzahlerfassendes Zählen und iii) Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen. Diese Subkategorien resultieren aus der Stoffdidaktischen Analyse und den fach-

didaktischen Empfehlungen einiger nationaler wie internationaler Autor\*innen, die in Abschnitt 2.2.1, 2.2.2 und 2.2.3 dieser Arbeit beschrieben werden (deduktive Herangehensweise).

**Tabelle 25**

*Präzisierung zu Innermathematische Struktur (eigene Darstellung)*

| Hauptkategorie                     | Unterkategorien                                | Formulierung von Kategoriendefinitionen                  |
|------------------------------------|------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| <i>Innermathematische Struktur</i> | Zuordnung                                      | Zuordnung als Grundlage für Anzahlvergleiche.            |
|                                    | Anzahlerfassendes Zählen                       | Verständnis für Kardinalität.                            |
|                                    | Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen | Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen. |

#### **4. Fachsprache der Mathematik**

Die Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* mit den Unterkategorien i) Versprachlichung des Teile-Ganzes-Denkens und ii) Fachlich verständliche Arbeitsaufträge. Die Unterkategorie Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens resultiert aus den Empfehlungen einiger Fachdidaktiker wie Gaidoschik (2008), Gerster (2007, 2009), Gerster und Schultz (2004), Resnick (1983, 1989, 1992) und Schultz et al. (2017). Diese fachdidaktischen Überlegungen zur Gestaltung des Erstunterrichts sind in Abschnitt 3.3.4 dargestellt.

Die Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* folgt aus der Stoffdidaktischen Analyse wie den Empfehlungen der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (Ziegler et al., 2008) und sind in Abschnitt 3.3.1 beschrieben (deduktive Vorgehensweise).

**Tabelle 26***Präzisierung zu Fachsprache der Mathematik (eigene Darstellung)*

| Hauptkategorie                    | Unterkategorien                           | Formulierung von Kategoriendefinitionen                                                  |
|-----------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Fachsprache der Mathematik</i> | Versprachlichung des Teile-Ganzes-Denkens | Versprachlichung von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen                                         |
|                                   | Fachlich verständliche Arbeitsaufträge    | Fachlich richtige, sinnvoll didaktisch reduzierte und klar verständliche Arbeitsaufträge |

**5. Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse**

Die Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* wird in keine Unterkategorie eingeteilt. Die Hauptkategorie folgt aus der Stoffdidaktischen Analyse wie den Empfehlungen der „Gesellschaft für Didaktik der Mathematik“ (Ziegler et al., 2008) und sind in Abschnitt 3.3.1 beschrieben (deduktive Vorgehensweise).

**Tabelle 27***Präzisierung zu Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse (eigene Darstellung).*

| Hauptkategorie                                                            | Unterkategorien | Formulierung von Kategoriendefinitionen                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> | ---             | Die Lernunterstützung durch die Lehrkraft muss adaptiv begleitet werden und passende Aufgaben- und Problemstellungen sind so bereitzustellen, dass die individuellen Denk- und Verstehensleistungen der Kinder angeregt werden. |

Bei der *Begleitung der fachlichen Lernprozesse* von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften (Forschungsfrage 3) werden zur Auswertung der Unterrichtseinheiten

neben diesen beschriebenen Kategorien die Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011) herangezogen. Diese werden folgend ausführlich beschrieben.

### ***Dimensionen zur Analyse pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht***

Wie in Abschnitt 5.3.3 beschrieben, haben tragfähige Unterrichtsanalysen von Lehr-Lernsituationen in der bildungswissenschaftlichen und in der mathematikdidaktischen Forschung eine wesentliche Bedeutung und sind als Instrument für die Professionalisierung von Lehrkräften in der Aus-, Fort- und Weiterbildung lohnend.

Vor diesem Hintergrund sind aus fachdidaktischer Sicht vor allem diejenigen Unterrichtsanalysen hilfreich, die die *Qualität* des (Fach-)Unterrichts in den Blick nehmen. Aus fachdidaktischer Perspektive gibt es durchaus Interesse daran, wie unterschiedliche Forschungsansätze zu dieser Thematik zeigen (5.3.3), bei denen – laut Steinweg (2010) – jedoch häufig der fachspezifische Blick mit mathematikdidaktischen Elementen fehlen.

Infolgedessen hat Steinweg (2010, 2011) einen Ansatz zur *fachdidaktischen* Analyse mathematischer Lehr-Lernsituationen des Anfangsunterrichts der Grundschule ausgearbeitet. Im Sinne der Autorin können diese Dimensionen auch als ergänzendes Verfahren zum bereits vorliegenden, bildungswissenschaftlichen Instrument *Classroom Assessment Scoring System* (Pianta et al., 2008, zitiert nach Steinweg 2010, 2011), eingesetzt werden. In ihrem Ansatz verbindet die Autorin ein bildungswissenschaftliches Instrument zur *Classroom Quality* mit mathematikdidaktischen Kriterien.

Die herausgearbeiteten mathematikdidaktischen Dimensionen umfassen die Bereiche der Unterrichtsgestaltung

- 1) „Anschauung/Mentale Bilder
- 2) Aufgabenqualität/Problemstellungen
- 3) Denkfreiheiten/Kommunikation
- 4) Fehlerkultur/Leistungsbewertung
- 5) Ziele/Zieltransparenz“ (Steinweg, 2011, S. 11).

Im Fokus dieser Dimensionen mit beschreibenden Indikatoren stünden nach Steinweg Lehrkräfte und deren Handlungspotenziale im Anfangsunterricht (Steinweg, 2011). Weiters wird jede Dimension in drei Ausprägungsniveaus eingeteilt. Bei der Einschätzung der Handlungen und des Verhaltens der Lehrkraft beziehungsweise der Lehrkräfte sei darauf zu achten, dass nicht ein einmaliges Ereignis herangezogen wird, sondern

eine möglichst breite Gesamteinschätzung über mehrere – in unterschiedlichen Unterrichtseignissen – sichtbar gezeigten Interaktionen erfolgt (Steinweg, 2011). Die Unterrichtsbeobachtungen werden im Sinne Steinwegs am sinnvollsten über Videoaufnahmen festgehalten, um eine Einschätzung im Nachhinein zu erleichtern. Die Gesamtsituation wird im Sinne der Autorin *kompetenzorientiert* in den Blick genommen, das heißt der Blick liege weniger auf den Defiziten, sondern mehr auf den vorhandenen Leistungen der Lehrkraft beziehungsweise der Lehrkräfte. Diese Dimensionen zur Unterrichtsbeurteilung des mathematischen Anfangsunterrichts orientieren sich laut Steinweg (2011) an aktuellen Ansätzen fachdidaktischer Theorien sowie an den allgemeinen Forderungen mit Bezug auf die prozessbezogenen Kompetenzen (in Österreich: allgemeine Kompetenzen; Anmerkung C.G.) gemäß den Bildungsstandards. Im Folgenden werden die einzelnen Dimensionen beschrieben.

### **I) Dimension: Anschauung/Mentale Bilder**

Gerade im Anfangsunterricht ist aus Sicht der Fachdidaktik die Bedeutung von Anschauung abstrakten Wissens für Kinder unbestritten (Abschnitt 3.2.2), um in weiterer Folge „innere“ Bilder und tragfähige Grundvorstellungen von mathematischem Wissen (Freudenthal, 1983; vom Hofe, 1995, zitiert nach Steinweg, 2011, S. 12) aufzubauen. Die Dimension „Anschauung/Mentale Bilder“ betont nach Steinweg (2010, 2011) die *generelle* Bedeutung von Anschauung in dieser frühen Phase des Mathematiklernens und verzichte bewusst auf die Vorgabe und Beschreibung „geeigneter“ oder „adäquater“ Anschauungsmaterialien. Steinwegs Auffassung wird aus der Überlegung begründet, da man sich aus Sicht der Fachdidaktik nicht immer einig sei über die Frage des „geeigneten“ Materials (Abschnitt 3.2.2). Vielmehr soll die Auswahl didaktischen Materials durch die Lehrkraft nach *fachlichen* Kriterien gewählt werden (Bruner, 1970; Radatz et al., 1996; Wittmann & Müller, 2004; zitiert nach Steinweg, 2011). Innerhalb dieser Dimension werden die Indikatoren „Angebot von Anschauungsmitteln, Auswahl der Anschauungsmittel, Ausbildung von Grundvorstellungen“ (Steinweg, 2011, S. 13) beschrieben. Bezogen auf die Prozessziele der Bildungsstandards beziehe sich die Dimension – neben anderen – gerade auf die Kompetenz „Darstellen“ (Steinweg, 2010, 2011).

### **II) Dimension: Aufgabenqualität/Problemstellungen**

Die Fachdidaktik schreibt der „neuen Aufgabenkultur“ (Steinweg, 2011, S. 14) im Mathematikunterricht eine hohe didaktische Tauglichkeit zu. Im Unterschied zu den Grundanforderungen mit Aufgaben zu festgelegten und eingeübten Routinen (Abschnitt 3.2.2),

werden im Unterricht zunehmend mathematisch gehaltvolle Aufgaben gefordert. Diese verlangen von den Schüler\*innen den Aufbau und die Nutzung neuer Strategien und eigener Überlegungen. Demnach werde der heutige Mathematikunterricht als ein „Mehr als Rechnen“ (Steinbring, 1995, 2004, zitiert nach Steinweg, 2011, S. 14) betrachtet. Als Indikatoren werden von Steinweg (2010, 2011) innerhalb der Dimension „kognitive Herausforderung, Möglichkeiten der Entdeckung und Erklärung von Zusammenhängen, Bedeutung der Sicherung von Grundwissen und Routinen (Üben)“ (S. 14) benannt. Steinweg (2010, 2011) bezieht sich in dieser Dimension unter anderem auf Vygotskij (1987), der wiederum in seiner kritischen Auseinandersetzung mit Piaget beschrieben hat, dass der Unterricht durch kognitive Herausforderung der Schüler\*innen in geeigneten Lernumgebungen und durch gezielte Fragen stets die „Zone der nächsten Entwicklung“ anstreben soll (dazu auch Abschnitt 3.3.1). Das Prozessziel „Problemlösen“ ist in dieser Dimension zu finden (Steinweg, 2010, 2011).

### ***III) Dimension: Denkfreiheiten/Kommunikation***

Steinweg (2010, 2011) stützt sich bei dieser Dimension auf so genannte „produktive Aufgabenformate“ (Wittmann & Müller, 1990, 1992). Diese wurden neben reinen Rechenaufgaben und -routinen seit über 20 Jahren immer öfter im Mathematikunterricht verwendet (Abschnitt 3.2.2). Bei diesen reichhaltigen Übungsformaten stehe nicht mehr (nur) das Ergebnis einer Aufgabe im Vordergrund, sondern die verschiedenen Rechenwege der Kinder, die zum Ergebnis führen. Im Sinne eines aktiv-entdeckenden Lernens (Abschnitt 3.2.2) biete sich eine Differenzierung innerhalb der Lerngruppe: Die Lerngruppe erhält eine herausfordernde Aufgabe, bei denen jedes Kind das Schwierigkeitsniveau der Aufgabenstellung selbst wählen könne. Im Vertrauen auf die „natürliche Differenzierung“ (Abschnitt 3.2.1) könnten Kinder ihre Lernprozesse – nach ihren individuellen Voraussetzungen und Möglichkeiten – so weit wie möglich selbst steuern. Die Arbeit an Aufgaben zum Beobachten, Entdecken, Fragen, Beschreiben und Forschen erfolge im Unterricht mehr und mehr im sozialen Austausch der Kinder. Die Kommunikation über Entdeckungen und die eigenen Denkwege unterstützen die Denkentwicklung der Kinder (Abschnitt 3.3.1). Steinweg (2011, S. 15) führt die Indikatoren „kognitive Aktivierung, individuelle Denkwege, (fachliche) Diskussion von Lösungswegen“ an. Als Prozessziele werden „Kommunizieren“ und „Argumentieren“ formuliert (Steinweg, 2010, 2011).

#### ***IV) Dimension: Fehlerkultur/Leistungsbewertung***

Bei dieser Dimension bezieht sich Steinweg (2010, 2011) im Zusammenhang mit dem aktiv-entdeckenden Unterricht (Abschnitt 3.2.2) auf eine neue „Fehlerkultur“ im Mathematikunterricht. Der Blick gehe weg von einer defizitorientierten Fehlerkultur, hin zu einer kompetenzorientierten Sicht auf die Stärken des Kindes. Die Kinder erhalten Zeit und Raum, sich entdeckend mit neuen Aufgaben auseinanderzusetzen. Auch im Unterricht können das die Kinder alleine, im Austausch und Tun mit anderen oder in der ganzen Gruppe machen (Abschnitt 3.1.2 und Abschnitt 3.2.2). Jedes Kind könne so die nötige Verbindung zu seinem individuellen Vorwissen herstellen. Die Orientierung am Vorwissen der Kinder (Selter, 1995; Wittmann & Müller, 2004, zitiert nach Steinweg, 2011, S. 16; dazu auch Abschnitt 3.3.1) sei der Anknüpfungspunkt des heutigen Anfangsunterrichts. Bei den Versuchen der Kinder, Muster zu entdecken, passieren Fehler. Im Unterricht brauche jedes Kind eine angemessene und individuelle Rückmeldung, wenn es gegebenenfalls (noch) ein unzureichendes Verständnis bei einer Aufgabe zeigt. Diese Dimension richte im Sinne Steinwegs den Fokus auf die Lehrkräfte und deren Umgang mit Verständnisproblemen und Fehlantworten der Lernenden. Steinweg nennt hierfür als Indikatoren „Reaktion auf Fehler und Fehlvorstellungen, Beurteilungsmechanismen, Einbezug in individuelle Bewertung“ (Steinweg, 2011, S. 16), und verweist auf das Bildungsziel „Argumentieren“ (Steinweg, 2010, 2011).

#### ***V) Dimension: Ziele/Zieltransparenz***

Steinweg (2010, 2011) beschreibt innerhalb dieser Dimension, dass im Anfangsunterricht in Mathematik über lange Zeit die Ansicht verbreitet war, dass mathematische Inhalte „kindgemäß“ eingekleidet werden müssten (Abschnitt 2.1). Nur so könnten Kinder die abstrakte Welt der Mathematik verstehen. Steinweg (2010, 2011) bezieht sich auf John Dewey. Er habe in seinem Werk „The Child and the Curriculum“ schon Anfang des 20. Jahrhunderts aufgezeigt, wie die Klarheit der Fachinhalte die kindliche Entwicklung unterstützen und die Auseinandersetzung mit dem Stoff vereinfachen kann. Lernen im Mathematikunterricht finde dabei sinnvollerweise in Verbindung von inhaltlichen und allgemeinen Zielen der Mathematik statt (Abschnitt 3.2.2). Weiters bezieht sich Steinweg (2011) auf Erich Wittmann (2001), der den Fokus des Unterrichtsstoffes auf mathematischen Grundideen (Abschnitt 3.2.2) fordert. Die Grundideen sollten nach dem Spiralprinzip (Bruner, 1970, 1974) im Unterricht immer wieder aufgegriffen, vertieft und in die nächstfolgenden Stufen weitergeführt werden. Die Autorin (Steinweg, 2010, 2011) nennt

für diese Dimensionen als Indikatoren „Inhalts- und Prozessziele, Stiftung von Sinnzusammenhängen, Transparenz der Ziele“ (S. 17) und verweist auf den Bereich „Modellieren“ in den Bildungsstandards.

### ***Kritische Anmerkungen von Steinweg zu den von ihr entwickelten Dimensionen***

Steinweg (2010, 2011) formuliert, dass inhaltliche Beschreibungen und Einteilungen in Kategorien die große Gefahr in sich bergen, wenn sie „einen Absolutheitsanspruch aufstellen“ (S. 5), als Checkliste missverstanden eingesetzt werden, und folglich die Komplexität von Unterricht negieren. Die Autorin benennt, dass ihre beschriebenen Dimensionen so weit möglich trennscharf ausgearbeitet wurden. Sie weist auch darauf hin, dass sich die beobachteten Handlungen der Lehr-Lernsituationen in den Dimensionen überschneiden können. Bei der Beurteilung seien die Überlegungen mit einzubeziehen und gegebenenfalls in verschiedenen Dimensionen abzubilden. Die Autorin möchte bei der Auflistung der als relevant bezeichneten Dimensionen keinen Absolutheitsanspruch erheben. Es sei ein Vorschlag, um Lehr-Lernsituationen im Anfangsunterricht durch mathematikdidaktische Kriterien *vom Fach aus* zu analysieren. Steinweg (2011, S. 23) schließt mit den Worten:

Letztlich verbindet sich mit dem hier dargelegten Vorschlag die Hoffnung, Unterrichtsbeobachtungen und -analysen auf theoretisch fundierte und allen Beteiligten transparente Kriterien gründen zu helfen sowie damit die Diskussion über ‚guten Unterricht‘, bereits erreichte Ziele und neu zu formulierende Veränderungen von Unterrichtsgestaltung im mathematischen Anfangsunterricht auf konkret individueller oder auch bildungspolitischer Ebene anzuregen.

Dieser Ansatz (2010, 2011) soll im Sinne Steinwegs als *Vorschlag* verstanden werden, weshalb die Autorin den Anspruch, „dass es *die* Kriterien auch für den kleinen Ausschnitt des mathematischen Anfangsunterrichts nicht geben kann“ (Steinweg, 2011, S. 6, Hervorhebungen im Original) deutlich betont.

Aus fachdidaktischer Sicht eignen sich diese Dimensionen von Steinweg (2010, 2011) als geeignete Kriterien, um einen „guten“ arithmetischen Anfangsunterricht aus fachdidaktischer Sicht darzustellen, weshalb sie im folgenden Abschnitt 9.4 bei der Auswertung der einzelnen Unterrichtseinheiten herangezogen werden. Die Analyse der Unterrichtseinheiten wird in Abschnitt 9.4 mit Hilfe der folgenden Tabelle nach Steinweg visualisiert.



**Tabelle 28***Dimensionen zur Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität (eigene Darstellung)*

|                               |                                        |                                  |                                       |                            |
|-------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| Anschauung,<br>Mentale Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problemstellungen | Denkfreiheiten,<br>Kommunikation | Fehlerkultur, Leis-<br>tungsbewertung | Ziel, Zieltranspa-<br>renz |
|-------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

---

Bei dieser Analyse der Unterrichtseinheiten wird bewusst auf eine Bewertung im ursprünglichen Sinne Steinwegs (2010, 2011) verzichtet. Anstelle des von Steinweg empfohlenen bildungswissenschaftlichen Instrumentes *CLASS* (Pianta et al., 2008, zitiert nach Steinweg 2010, 2011) werden die Dimensionen als ergänzendes Verfahren zu den in Abschnitt 9.3 beschriebenen deduktiven und induktiven Kategorien verwendet. Dadurch erfolgt die Auswertung der Unterrichtsgeschehen facettenreicher. Vor diesem Hintergrund werden die Scores (1 – 7) bei den einzelnen Unterrichtsanalysen nicht vergeben. Vielmehr werden jene Dimensionen: „Anschauung/ Mentale Bilder, Aufgabenqualität/ Problemstellungen, Denkfreiheiten/ Kommunikation, Fehlerkultur/ Leistungsbeurteilung, Ziel/ Zieltransparenz“ (Steinweg, 2010, 2011, S. 11) von der Autorin der vorliegenden Arbeit subjektiv und nah am Unterrichtsgeschehen so gewählt, dass das Unterrichtsgeschehen und die Handlungsmöglichkeiten der Lehrkraft bzw. der Lehrkräfte durch diese bestmöglich kompetenzorientiert eingeschätzt werden. Zur Analyse wird folgend und wiederum auf Basis der subjektiven Einschätzung des Unterrichtsgeschehens entweder nur eine Dimension herangezogen oder mehrere Dimensionen.

#### 9.4 Ergebnisse der zweiten Durchführung

Im vorliegenden Kapitel werden die empirischen Befunde des Forschungs- und Entwicklungsprojektes der zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine dargestellt: die Häufigkeiten der Unterrichtsszenen der einzelnen (Sub-)Kategorien werden der Reihe nach *deskriptiv* präsentiert. Die Kategorien mit deduktiv-induktivem Zugang sind im vorangehenden Abschnitt 9.3 dargestellt.

Neben der deskriptiven Häufigkeitsdarstellung der Unterrichtsszenen werden nachfolgend zu jeder (Sub-)Kategorie Transkriptausschnitte *exemplarisch* dargestellt, um so die fachlichen Hürden der Schüler\*innen und/oder die Hürden der Lernbegleitung bei der Umsetzung der entwickelten Lernumgebungen durch *konkrete Unterrichtsbeispiele* aufzuzeigen. Folgend werden die Unterrichtsszenen zu den einzelnen Bausteinen *im Ganzen* dargestellt, um den inhaltlich vollständigen Blick auf das Unterrichtsgeschehen und damit zusammenhängend den Lesefluss nicht zu brechen. Die vorangehenden exemplarischen Transkriptausschnitte sind aus den jeweils dazugehörenden Beschreibungen der einzelnen Bausteine im Ganzen entnommen, weshalb Überschneidungen sinnvoll und erwünscht sind.

Die beobachteten Schüler\*innen sind über einen längeren Zeitraum meist dieselben (Abschnitt 9.2). Eine in dieser Hinsicht *prozessorientierte* Erfassung der Kompetenzen und Defizite eines Kindes sind – wie in Abschnitt 3.3.1 dargestellt – insofern bedeutend, um Rückschlüsse zu dessen individuellem Lernstand, Lernverhalten und Lernzuwachs zu ziehen und in weiterer Folge durchgehende Handlungsorientierung aufzeigen zu können.

Die Beschreibungen der stofflichen Hürden werden nicht bei allen Schüler\*innen im Detail durchgeführt; es erfolgt eine Begrenzung auf passend gewählte Fallbeispiele. Um die im Abschnitt 2.1.2 beschriebene Heterogenität von Schulanfänger\*innen im arithmetischen Anfangsunterricht angemessen abbilden zu können, wurden in der vorliegenden Arbeit Kinder(paare) ausgewählt, die die Heterogenität der im Projekt beteiligten Klassen bestmöglich darstellen (Abschnitt 9.2). Konkret werden sowohl Kinder(paare) beschrieben, die von der Klassenlehrkraft als leistungsstark bezeichnet wurden, als auch Kinder(paare), die über ein Zahldenken in einem begrenzten Zahlenraum verfügen.

Auch die beobachtete Lehrkraft beziehungsweise die beobachteten Lehrkräfte der zweiten Durchführung sind über den Projektzeitraum dieselben (Abschnitt 9.2), um bestmögliche Rückschlüsse zu den in Abschnitt 4.1 beschriebenen professionellen Kompetenzen und Handlungsmöglichkeiten von Lehrkräften zu ziehen. Die Lehrkräfte werden nachfolgend als Lehrkraft A, Stützlehrkraft A, Lehrkraft B, Lehrkraft C, Stützlehrkraft C,

Lehrkraft D, Stützlehrkraft D und Lehrkraft E bezeichnet. Diese Bezeichnungen der einzelnen Lehrkräfte wurden den Klassen insofern neu zugeordnet, sodass keine Rückverfolgung zu den einzelnen Klassen, wie in Abschnitt 9.2 dargestellt, gemacht werden kann. Bei den ausführlichen Beschreibungen der einzelnen Transkripte wird zudem auf die konkrete Benennung der einzelnen Lehrkräfte (A, B, C, Stützlehrkraft A, C usw.) bewusst verzichtet; stellvertretend werden die bevorzugten Bezeichnungen Hauptlehrkraft, beziehungsweise Stützlehrkraft verwendet.

Die Prozentangaben in den Tabellen dieses Kapitels sind auf eine Nachkommastelle gerundet, sodass die Summe der Prozentangaben genau oder gerundet 100% ergibt.

Nachfolgend werden die in Abschnitt 5.2 formulierten übergeordneten Forschungsfragen und Zielsetzungen und die in Abschnitt 9.1 konkretisierten untergeordneten Forschungsfragen (F 2.1, F 2.2, ... F 3.1, F 3.2, ...) dieser zweiten Durchführung aufgegriffen und an dieser Stelle der Arbeit beantwortet.

#### **9.4.1 Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel**

Zur Kategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* werden die Subkategorien Bewusster Materialwechsel, Halten und Führen der Hände und Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel zugeordnet.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.1:

**F 2.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?**

Verbunden mit allen *in die Auswertung einbezogenen Szenen* ( $N = 395$ ) zeigen sich in 23,8 % der Szenen der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationenmittel Probleme in der Umsetzung. Wie in Tabelle 29 ersichtlich, können 5,6 % der Szenen Baustein IV zugeordnet werden, 6,3 % der Szenen Baustein V, 1,0 % der Szenen Baustein VI und 10,9 % der Szenen Baustein VIII zugeordnet werden.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung* ( $N = 94$ ) gibt es in 100 % der Szenen Schwierigkeiten. Davon können 23,4 % der Szenen

Baustein IV, 26,6 % der Szenen Baustein V, 4,3 % der Szenen Baustein VI und 45,7 % der Szenen Baustein VIII zugeordnet werden.

**Tabelle 29**

*Häufigkeit von Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel (eigene Darstellung)*

| Kategorie                                                                              | Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                                                       | 94                                                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IV                                     | 22                                                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V                                      | 25                                                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI                                     | 4                                                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII                                   | 43                                                          |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )                               | 23,8                                                        |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                                                      | 5,6                                                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                                                       | 6,3                                                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                                                      | 1,0                                                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                                                    | 10,9                                                        |
| 1.10.                                                                                  |                                                             |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie Probleme in der Lernumgebung ( $N = 94$ ) | 100                                                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                                                      | 23,4                                                        |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                                                       | 26,6                                                        |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                                                      |                                                             |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                                                    | 4,3                                                         |
|                                                                                        | 45,7                                                        |

#### 9.4.1.1 Kategorie Individueller Materialwechsel

Nachfolgend wird beschrieben, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden beim *Materialwechsel* der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel zeigen.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.1.1:

**F 2.1.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Materialwechsel* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?**

### *Häufigkeit der Kategorie Individueller Materialwechsel*

Wie in Tabelle 30 ersichtlich, zeigen sich verbunden mit allen *in die Auswertung einbezogenen Szenen* in 8,8 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Materialwechsel. 5,3 % der Szenen gehören zu Baustein V, 1,0 % der Szenen zu Baustein VI und 2,5 % der Szenen zu Baustein VIII.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten in der Lernumgebung* gibt es in 37,2 % der Szenen Probleme, wovon 22,3 % der Szenen dem Baustein V, 4,3 % der Szenen dem Baustein VI und 10,6 % der Szenen dem Baustein VIII zugeschrieben werden.

**Tabelle 30**

*Häufigkeit von Individueller Materialwechsel (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                                           | Materialwechsel |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                                                       | 35              |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V                                      | 21              |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI                                     | 4               |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII                                   | 10              |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )                               | 8,8             |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                                                   | 5,3             |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                                                  | 1,0             |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VIII                                                | 2,5             |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie Probleme in der Lernumgebung ( $N = 94$ ) | 37,2            |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                                                   | 22,3            |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                                                  | 4,3             |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                                                    | 10,6            |

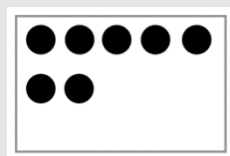
Nachfolgende Transkriptausschnitte aus Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen (Abschnitt 6.2) – zeigen exemplarisch, dass sich ein Wechsel des Materials von den Fingern hin zum strukturierten Legen mit Plättchen bei einigen Lernenden als schwierig erwiesen hat. **Das Material Plättchen wird in Baustein V erstmals von den Lernenden verwendet.**

## Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen

**Tabelle 31**

Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen (eigene Darstellung)

- 1 Chiara: *(Chiara und Felix haben ihre Aufgabenstellung am Platz bereits begonnen. Die Stützlehrkraft kommt hinzu, setzt sich ihnen gegenüber, um die beiden Kinder in ihrer Arbeit zu beobachten. Sie sieht, dass Chiara die Punkte der Aufgabenkarte sehr schnell abtippt. Ohne erkennbare Strategie versucht sie die Punkte zu zählen, die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Finger und zu zählendem Punkt stimmt nicht. Sie ist verwirrt.)*



*Da haben wir aufgehört! (Chiara beginnt nochmals zu zählen). Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. (Bei sechs zögert die Schülerin kurz. Dann tippt sie wiederholt den fünften Punkt in der oberen Reihe des Aufgabenkärtchens an).*

- 2 Stütz-  
lehrkraft: *(Die Stützlehrkraft fragt.) Wie viele Punkte sind das, Chiara?*
- 3 Chiara: *Warte! (Chiara beginnt die Punkte auf der Karte erneut zu zählen). Eins, zwei, zwei, (zählt leise weiter), drei, vier, fünf, sechs. (Ohne erkennbare Strategie tippt sie zwischen den Punkten hin und her. Die Zahlwortreihe ist nicht korrekt, zwei wird doppelt gezählt.) Sechs.*

## Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen

**Tabelle 32**

Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen (eigene Darstellung)

- 6 Stütz-  
lehrkraft: *Mhm! Willst du mal kontrollieren, ob das stimmt? (Sie bittet den Nachbar-  
jugen Luis zur Kontrolle.) Kontrollier mal!*
- 7 Luis: *(Luis platziert die Aufgabenkarte vor den Plättchen. Mit dem Zeigefinger tippt er jeden Punkt der Aufgabenkarte an und zählt leise jeden Punkt der linear angeordneten Reihe. Dann tippt er jedes Plättchen an und zählt die linear angeordneten Plättchen der oberen Reihe. Ähnlich geht er in der nächsten Reihe der Aufgabenkarte und der Plättchen vor. In der dritten Reihe tippt er die Punkte der Karte an und tippt das erste Plättchen an. Er beginnt wiederum die Punkte der Punktekarte anzutippen und dann*

- die Plättchen einzeln. Ein Plättchen liegt weniger.) Hmm.. (Luis beginnt von vorne. Er tippt wieder jeden Punkt der linear angeordneten obersten Reihe der Aufgabenkarte an und tippt dann jedes Plättchen an.)
- 8 Felix: (Felix schreitet ein und zählt jedes Plättchen. Er tippt jedes Plättchen an und zählt laut.) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn. (In der dritten linear angeordneten Reihe an Plättchen stimmt die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Finger und zu zählendem Plättchen nicht.) elf, zwölf, ... siebzehn, acht. Fertig!

Wie diese Ausschnitte zeigen, ist ein angemessener Zeitpunkt des Materialwechsels – in dieser Szene von den Fingern hin zu Plättchen – entscheidend. Lernende wie Felix und Chiara in Beispiel 1, die in den vorangegangenen Bausteinen gerade erst beginnen, sich mit dem Material Finger und Alltagsmaterialien zurechtzufinden, sollten aus diesem Finden nicht durch Materialwechsel herausgerissen werden. Zuordnungsaufgaben, welche in vorangegangenen Aktivitäten zu Baustein V mit der ganzen Klasse gemeinsam gemacht wurden, scheinen für Kinder wie Felix und Chiara nicht ausreichend, um dieses Wissen auf ein anderes Material (hier Plättchen) zu übertragen. Bei diesen Zuordnungsaufgaben wurden nicht-zählende Anzahlvergleiche, wie im Rahmen der Beantwortung der F 3.1.1 dargestellt, gemacht. Vielmehr scheinen für Kinder wie Felix und Chiara zusätzliche, vertiefende Zuordnungsaufgaben mit Alltagsgegenständen lohnend. Geeignete (Arbeits-)Aufträge zu „Eins-zu-Eins“-Vergleichen als logische Grundlage von „gleich viele“ ergeben sich im Schulalltag laufend und sollten für das mathematische Lernen genutzt werden. Eine einfachere Variante des Zuordnens mit Spielsteinen, bei welcher das Lernen von Felix und Chiara weiter beschrieben wird, wird in Abschnitt 9.4.2.1 dargestellt.

Um diese Aussage zu unterstreichen, steht nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf den *individuellen Materialwechsel* der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel im Interesse.

Verbunden mit der Subkategorie *Individueller Materialwechsel* werden 4 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D aus Unterrichtsbaustein VI beobachtet.

Verbunden mit der Subkategorie *Individueller Materialwechsel* werden 10 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E aus Unterrichtsbaustein VIII beobachtet.

Verbunden mit der Subkategorie *Individueller Materialwechsel* werden 21 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E, sowie der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C aus Baustein V beobachtet, wobei untenstehend beispielgebend zwei Unterrichtsbeobachtungen einer dieser Lehrkräfte beschrieben wird; an dieser Stelle wird die bevorzugte Bezeichnung Stützlehrkraft verwendet.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.1.1 beantwortet:

**F 3.1.1: Wird und – falls ja – wie wird der *Individuelle Materialwechsel* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

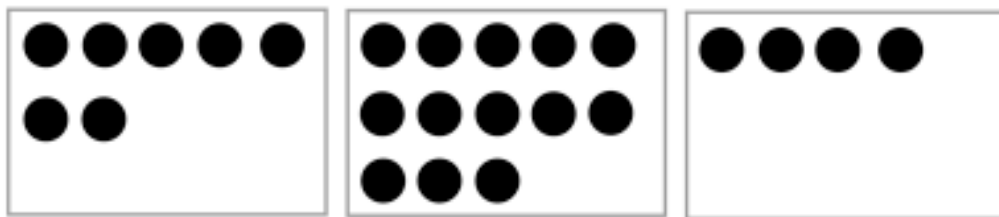
Um die Forschungsfrage 3.1.1 zu beantworten, werden im Folgenden die Beobachtungen zu Unterrichtsbaustein V im Ganzen dargestellt.

In vorangegangenen Aktivitäten zu **Baustein V (Abschnitt 6.2)** wurden mit der ganzen Klasse Anzahlvergleiche im Klassenzimmer gemacht: „In der Klasse sind Stühle und Kinder. Sind es gleich viele? Muss gezählt werden, um das sagen zu können? Warum nicht? Wann ist etwas ‚gleich viel‘?“ Auch wurden nicht zählende Vergleiche in Partner-suche aufgespürt: „Jedes Kind sucht sich einen Partner. Sind es mehr Mädchen oder Buben in der Klasse? Sind es gleich viele? Können wir das feststellen, *ohne* zu zählen?“ Bei der nun folgenden Unterrichtsbeobachtung zu **Baustein V** arbeiten die Kinder in Paaren. Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten (siehe Abbildung 25) liegen im Sitzkreis in der Mitte des Klassenzimmers. Zur Bearbeitung werden verschiedene Niveaus angeboten, sodass die Kinder auch Aufgaben bearbeiten können, die ihre Zählkenntnisse übersteigen. Die Kinderpaare suchen sich das Aufgabenkärtchen aus, welches sie bearbeiten möchten.



**Abbildung 25**

*Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten (eigene Darstellung)*



Die Hauptlehrkraft bespricht mit den Kindern die Aufgabe im Sitzkreis: „Du siehst Aufgabenkärtchen mit Punkten. Lege gleich viele Plättchen, wie Punkte auf der Karte sind! Achte darauf, dass du für jeden Punkt auf dem Aufgabenkärtchen ein Plättchen legst. Du tust dir leichter, wenn du mit dem Finger der Hand, die nicht legt, mitzeigst. Lege für jeden Punkt ein Plättchen.“ **Dieses Material ist den Kindern noch nicht bekannt. Gemeinsam mit den Kindern werden zwei Aufgabenkärtchen *durch Zuordnung* (Abschnitt 9.4.2.1) im Sitzkreis gelegt.**

Kinderpaare, die die Aufgabenstellung verstanden haben, suchen sich anschließend gemeinsam ein Aufgabenkärtchen aus und legen am Platz mit Plättchen. Kinderpaare, die noch Schwierigkeiten bei der Aufgabenstellung zeigen, bleiben im Sitzkreis und machen die Aufgabe gemeinsam mit der Hauptlehrkraft oder mit der Stützlehrkraft. Die Hauptlehrkraft beobachtet beim Herumgehen im Klassenzimmer, ob die Kinder die Aufgabe zählend oder durch Eins-zu-Eins-Zuordnung lösen.

Die Beschreibung der Beobachtung bei der Arbeit am Baustein V beginnt mit Felix und Chiara. Die Stützlehrkraft sitzt den beiden Kindern gegenüber und arbeitet mit ihnen an der Aufgabe. In Tabelle 33 sind die Aktivitäten und die Aussagen der Kinder und der Stützlehrkraft dargestellt.

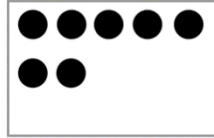
**Tabelle 33**

*Chiara und Felix („Vergleiche ohne und eventuell auch mit Zählen – Lege gleich viele“) (eigene Darstellung)*

|   |         |                                                                                                                                                                                                                            |
|---|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Chiara: | <i>(Chiara und Felix haben ihre Aufgabenstellung am Platz bereits begonnen. Die Stützlehrkraft kommt hinzu, setzt sich ihnen gegenüber, um die beiden Kinder in ihrer Arbeit zu beobachten. Sie sieht, dass Chiara die</i> |
|---|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

---

*Punkte der Aufgabenkarte sehr schnell abtippt. Ohne erkennbare Strategie versucht sie die Punkte zu zählen, die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Finger und zu zählendem Punkt stimmt nicht. Sie ist verwirrt.)*



Da haben wir aufgehört! *(Chiara beginnt nochmals zu zählen).* Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. *(Bei sechs zögert die Schülerin kurz. Dann tippt sie wiederholt den fünften Punkt in der oberen Reihe des Aufgabenkärtchens an).*

- 2 Stütz-  
lehrkraft: *(Die Stützlehrkraft fragt.)* Wie viele Punkte sind das, Chiara?
- 3 Chiara: Warte! *(Chiara beginnt die Punkte auf der Karte erneut zu zählen).* Eins, zwei, zwei, *(zählt leise weiter),* drei, vier, fünf, sechs. *(Ohne erkennbare Strategie tippt sie zwischen den Punkten hin und her. Die Zahlwortreihe ist nicht korrekt, zwei wird doppelt gezählt.)* Sechs.
- 4 Felix: *(Der Sitznachbar Felix schaut auf die gezählten Punkte und bewertet die Aufgabe als richtig.)* Richtig, Chiara.
- 5 Stütz-  
lehrkraft: Ihr habt jetzt die Aufgabe ohne mich begonnen. Könnt ihr die Aufgabe auch anders lösen? Ich meine, ohne zu zählen? So wie wir das vorhin im Sitzkreis gemacht haben? Legt gleich viele Plättchen, wie Punkte auf der Karte sind! *(Die Lehrperson zeigt auf die Punkte der Aufgabenkarte und auf den Plättchenhaufen.)* Achtet darauf, dass ihr für jeden Punkt auf dem Aufgabenkärtchen ein Plättchen legt.
- 6 Felix: *(Die Kinder schauen sich an und scheinen die Frage nicht zu verstehen. Felix beginnt zu zählen. Er tippt nicht auf die Punkte der Aufgabenkarte, noch führt er eine Zuordnung durch, sondern zählt die Zahlwortreihe auf).* Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht. Acht. Richtig!
- 7 Stütz-  
lehrkraft: Felix, du hast jetzt einfach losgezählt. Die Aufgabe an euch war aber nicht, dass ihr mir zeigen sollt, wie weit ihr zählen könnt. Auch war es nicht die Aufgabe, die Punkte auf diesem Aufgabenkärtchen *(die Stützlehrkraft zeigt auf das Aufgabenkärtchen)* einzeln zu zählen. Die Aufgabe ist für jeden Punkt hier *(sie zeigt auf das Aufgabenkärtchen)* ein Plättchen von dem Haufen zu legen. Versuchen wir es gemeinsam. Zeige mit dem Finger auf einen Punkt der Aufgabenkarte und lege ein Plättchen auf den Tisch.

- 8 Chiara: *(Chiara zeigt mit dem Zeigefinger der einen Hand auf den Punkt der Aufgabekarte, und nimmt mit der anderen Hand ein Plättchen vom Haufen. Sie legt das Plättchen auf den Tisch). Eins, weiter?*
- 9 Stützlehrkraft: Ja gerne! Der Zeigefinger der einen Hand geht jeweils um einen Punkt auf der Punktekarte weiter. *(Die Stützlehrkraft zeigt es auf dem Aufgabenkärtchen vor.)*
- 10 Chiara: Ok! *(Chiara senkt den Blick und führt den Finger in horizontaler Richtung. Sie zeigt mit dem Zeigefinger der einen Hand auf den nächsten Punkt des Aufgabenkärtchens, nimmt mit der anderen Hand ein Plättchen vom Plättchenhaufen und zählt weiter). Zwei. (Chiara blickt zur Stützlehrkraft, die bestätigend nickt, sodass das Mädchen die Aktivität fortsetzt. Chiara ordnet je einen Punkt ein Plättchen zu und zählt laut.) Drei, vier, fünf.*
- 11 Stützlehrkraft: *(Die Stützlehrkraft unterbricht Chiara in ihrer Arbeit und bittet Felix diese fortzusetzen.)* Gut gemacht Chiara! Felix, jetzt bist du an der Reihe. Versuche es gleich wie Chiara in der unteren Reihe der Punkte des Aufgabenkärtchens. Zeige mit dem Finger der einen Hand und lege je ein Plättchen.
- 12 Felix: Ok! Hier? *(Felix zeigt mit dem Finger auf den ersten Punkt des Aufgabenkärtchens in der oberen Reihe. Hilfesuchend schaut er die Stützlehrkraft an.)*
- 13 Stützlehrkraft und Felix: Warte Felix. Ich helfe dir. *(Sie nimmt seinen Zeigefinger der einen Hand, führt ihn zum Punkt der unteren Reihe des Aufgabenkärtchens, nimmt seine andere Hand und führt diese zum Plättchenhaufen.)* Nimm dir davon ein Plättchen und lege es auf den Tisch. *(Gemeinsam führen sie die Hände und legen die Plättchen.)*
- 

### **Unzureichendes Verständnis von Eins-zu-Eins-Vergleichen**

Die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung kann Chiara bei dieser Aktivität nicht korrekt anwenden. Stattdessen nützt sie mehrmals die Strategie des Abzählens und den indirekten Anzahlvergleich über die Zahlenreihe. Beim ersten Zählversuch ist sie beim fünften Punkt in der oberen Reihe irritiert. Die strukturierte Anordnung der Punkte in Fünfergliederung scheint sie durcheinander zu bringen.

Auf die Frage der Lehrkraft „wie viele sind das?“ beginnt Chiara wieder von vorne zu zählen. Erneut zeigt sie keine Strategie beim Abtippen und Abzählen der geordneten Punkte, sondern zählt bei diesem zweiten Zählversuch eine Zahl doppelt: Sie beginnt

die Zahlwortreihe bei eins, zählt zwei doppelt und nennt ihre Antwort „sechs“. Ihr Sitznachbar Felix sagt richtig; was er damit meint, bleibt offen. Chiara hat die Zählprinzipien noch nicht in ausreichendem Maß verstanden (Abschnitt 2.2.1). In dieser Szene scheint es auch so, als habe sie die Aufgabe nicht als Aufforderung zum Vergleichen, sondern zum Zählen verstanden.

Felix zählt die Zahlwortreihe als Gedicht auf, ohne die Punkte anzutippen (Abschnitt 2.2.1). Bei acht hält er kurz inne, schaut auf das Aufgabenkärtchen und nennt seine Antwort „acht“. Ob er die Aufgabe wirklich verstanden hat, je ein Plättchen zu jedem Punkt zuzuordnen, wird an dieser Stelle nicht klar deutlich.

Beide Kinder führen keine Anzahlvergleiche ohne Zählen durch die Strategie der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung aus: Chiara passieren Zählfehler durch mangelhafte Beachtung der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung und zählt sechs Punkte, Felix ist auf acht gekommen.

In dieser Szene macht es den Eindruck, als ob beide Kinder nicht versucht hätten, einen Anzahlvergleich durchzuführen, weil sie nicht verstanden haben, was zu tun ist. **Auch scheint es, als sei der Materialwechsel für diese Kinder – von Aktivitäten mit Fingern wie im vorangehenden Baustein IV und einzelnen Zuordnungsaufgaben mit Alltagsgegenständen hin zu Plättchen – an dieser Stelle eine zu große Herausforderung.** Ob die Kinder an dieser Stelle Schwierigkeiten aufgrund des Materialwechsels haben oder sie aufgrund fehlender fachlicher Arbeitsaufträge grundsätzlich nicht verstanden haben, was sie überhaupt zu machen haben, kann an dieser Stelle nicht klar beantwortet werden.

Auf alle Fälle scheint es lohnend, diesen Wechsel des Materials (von den Fingern hin zu ... bzw. von den Alltagsgegenständen hin zu ...) und individuell abgestimmt auf das einzelne Kind zu überlegen.

Daraus folgernd sind in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ Überlegungen zum individuellen Materialwechsel zu wenig klar formuliert. Diese Überlegungen werden bei der Weiterentwicklung des Bausteins V in Abschnitt 9.5 aufgegriffen und optimiert weiterentwickelt.

Abschließend führt die Stützlehrkraft gemeinsam mit den Kindern Anzahlvergleiche ohne Zählen durch. Dazu zeigen sie mit dem Finger auf einen Punkt der Aufgabenkarte und legen für jeden Punkt ein Plättchen auf den Tisch (Abschnitt 6.2).

In der gemeinsamen Nachbesprechung mit der Stützlehrkraft wurde besprochen, als weiterführende und einfachere Aktivität Zuordnungen mit Spielsteinen zu machen (Abschnitt 9.4.2.1).

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein V im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein V beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ eingeschätzt.

**Tabelle 34**

*Einschätzung pädagogischer fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Die Stützlehrkraft bemerkt, dass die Kinder die Aufgabe „Vergleiche ohne zu Zählen“ nicht korrekt ausführen: In dieser Szene macht es den Eindruck, als ob beide Kinder nicht versucht hätten, einen Anzahlvergleich durchzuführen, weil sie nicht verstanden haben, was zu tun ist.

Mit den Fragen der Stützlehrkraft „Könnt ihr die Aufgabe auch anders lösen? Ohne zu zählen?“ möchte sie die Kinder zu einer Lösung ohne Zählen (also durch Zuordnen) auffordern. Sie möchte die Kinder an vergangene Aufgaben zu „Eins-zu-Eins“-Zuordnungen, wie jedes Mädchen hat einen Buben, jeder Spitzer einen Bleistift, usw. erinnern (Abschnitt 6.2). Die Kinder scheinen die Frage nicht zu verstehen.

In dieser Sequenz wäre eine adäquate Lernbegleitung sinnvoll gewesen, um beurteilen zu können, ob die Kinder überhaupt verstanden haben, was sie bei dieser Aufgabe machen sollten. Konkret sollten die fachlichen Arbeitsaufträge klar und reduziert formuliert werden und nicht – wie in dieser Sequenz – mit mehreren Fragen („Könnt ihr die Aufgabe

auch anders lösen? Ohne zu zählen? So wie wir das vorhin im Sitzkreis gemacht haben?“) überladen werden.

**Auch scheint es in dieser Sequenz, im Sinne des von Steinweg (2010, 2011) zur Dimension „Aufgabenqualität/Problemstellung“ zugeordneten Merkmals der kognitiven Aktivierung, dass Zuordnungsaufgaben (jedem Jungen ein Mädchen zuordnen, jedem Tisch einen Stuhl, etc.), welche mit allen Kindern im Klassenverband gemacht wurden, für einige Kinder nicht ausreichend, sodass diese Kinder beim Materialwechsel hin zu Plättchen Schwierigkeiten zeigen.** So konnte in der gemeinsamen Nachbesprechung vereinbart werden, dass an dieser Stelle nicht nur Rezepte im Sinne von Imitation („Könnt ihr...? So wie vorhin...?“) hilfreich gewesen wären, sondern die Kinder hin zu eigenaktiver Bearbeitung geführt werden sollten. Überlegungen in diese Richtung, wonach die Kinder bei dieser Aktivität gefordert werden sollten, eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen, wurden in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ klar festgehalten. Der Transfer auf weiterführende und vereinfachte Aktivitäten für Felix und Chiara (in diesem Fall Zuordnungsaufgaben mit Spielsteinen) werden in Abschnitt 9.4.2.1 aufgegriffen und beschrieben.

**Auch das ruhige Halten und Führen der Hände und Finger (Abschnitt 3.2.2 und Abschnitt 9.4.1.2) von Felix durch die Stützlehrkraft hat sich in dieser Sequenz – wie bereits im vorangegangenen Baustein IV (im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2) – als hilfreich erwiesen. Die Stützlehrkraft unterstützt ihn dabei, den Punkt des Aufgabenkärtchens in der unteren Reihe zu finden.**

Luis und Felix werden nachfolgend bei der Partnerarbeit von Baustein V beschrieben. Wie in Abschnitt 9.4.2.1 ausführlich dargestellt, werden mit Felix und Rosa Erweiterungsaktivitäten mit Spielsteinen durchgeführt. In einer weiteren gemeinsamen Nachbesprechung mit der Stützlehrkraft wurde vereinbart, als weiterführende Aktivität und im Anschluss an die Aktivitäten mit den Spielsteinen nochmals jene Zuordnungsaufgaben mit Plättchen zu machen, welche im Rahmen der Beantwortung dieser Forschungsfrage 3.1.1 dargestellt wurden. Die Stützlehrkraft wurde gebeten, eine Lösung durch Zuordnen, also ohne die Plättchen zu zählen, nicht vorzuzeigen.

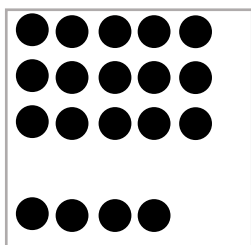
In Tabelle 35 sind die Aktivitäten und die Aussagen der Kinder und der Stützlehrkraft dargestellt. Wie in der Einleitung von Abschnitt 9.4 beschrieben, sind die beobachteten

Kinder(paare) über einen längeren Zeitraum meist dieselben. In der nachfolgenden Unterrichtsszene arbeitet Felix mit Luis, weil sein Partnerkind Chiara an diesem Tag krank war.

### Tabelle 35

Luis und Felix („Vergleich ohne und eventuell auch mit zählen – Lege gleich viele“) (eigene Darstellung)

- |   |        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Felix: | <i>(Felix hält die Aufgabenkarte mit Punktedarstellung in der Luft. Er nimmt immer ein Wendeplättchen, ordnet je ein Plättchen in der Luft einem Punkt der Aufgabenkarte zu und legt das Plättchen in einer linear angeordneten Reihe an. Er ordnet korrekt jedem Punkt ein Plättchen zu, jedoch ohne erkennbare Strategie.)</i> |
|---|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



*In der zweiten linear angeordneten Reihe der Punktedarstellung ordnet er noch ein Plättchen in der Luft zu, legt dann die Aufgabenkarte auf den Tisch und nimmt immer ein Plättchen nach dem anderen, um die Reihe der Plättchen fortzusetzen. Felix geht so weiter vor, bis er keine Plättchen mehr am Tisch vor sich liegen hat. Er versucht die Aufgabenkarte vor sich hinzustellen und nützt dabei sein Federpennal als Stütze.)*

- |   |                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|---|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Stütz-<br>lehrkraft: | Sind das schon alle oder brauchst noch welche?                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 3 | Felix:               | <i>(Felix zeigt mit dem Zeigefinger entlang der Punktekarte. Er beginnt in der ersten oberen Reihe und zeigt alle Punkte von links nach rechts. Dann zeigt er ohne Strategie über die Punktekarte. Er schaut die Stützlehrkraft fragend an.)</i>                                               |
| 4 | Stütz-<br>lehrkraft: | Brauchst noch welche? Schau, vielleicht kannst du da ... <i>(die Hauptlehrkraft zeigt auf die Plättchen des Sitznachbarn.)</i> ein paar noch nehmen.                                                                                                                                           |
| 5 | Felix:               | <i>(Felix nimmt wieder die Punktekarte und zeigt mit dem Zeigefinger entlang der Punktekarte. Er beginnt in der oberen Reihe und zeigt nach rechts, fährt hier mit dem Zeigefinger einen Punkt nach unten, zeigt die zweite linear angeordnete Reihe der Punkte von rechts nach links, die</i> |

- dritte linear angeordnete Reihe von links nach rechts und die vierte linear angeordnete Reihe von links nach rechts.)
- 6 Stütz- Mhm! Willst du mal kontrollieren, ob das stimmt? (Sie bittet den Nachbar-  
lehrkraft: jungen Luis zur Kontrolle.) Kontrollier mal!
- 7 Luis: (Luis platziert die Aufgabenkarte vor den Plättchen. Mit dem Zeigefinger tippt er jeden Punkt der Aufgabenkarte an und zählt leise jeden Punkt der linear angeordneten Reihe. Dann tippt er jedes Plättchen an und zählt die linear angeordneten Plättchen der oberen Reihe. Ähnlich geht er in der nächsten Reihe der Aufgabenkarte und der Plättchen vor. In der dritten Reihe tippt er die Punkte der Karte an und tippt das erste Plättchen an. Er beginnt wiederum die Punkte der Punktekarte anzutippen und dann die Plättchen einzeln. Ein Plättchen liegt weniger.) Hmm.. (Luis beginnt von vorne. Er tippt wieder jeden Punkt der linear angeordneten obersten Reihe der Aufgabenkarte an und tippt dann jedes Plättchen an.)
- 8 Felix: (Felix schreitet ein und zählt jedes Plättchen. Er tippt jedes Plättchen an und zählt laut.) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn. (In der dritten linear angeordneten Reihe an Plättchen stimmt die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Finger und zu zählendem Plättchen nicht.) elf, zwölf, ... siebzehn, acht. Fertig!
- 9 Luis Nicht siebzehn, acht! Elf, zwölf. Nicht irgendwie! (Luis tippt wieder jeden Punkt der linear angeordneten obersten Aufgabenkarte an. Dieses Mal und Fe- spricht er energisch und zählt laut.) Eins, zwei, drei, vier, fünf. (Luis tippt  
lix: jedes Plättchen der oberen linear angeordneten Reihe an.) Eins, zwei, drei, vier, fünf. (Luis tippt jeden Punkt der zweiten Reihe der Aufgabenkarte an. Er tippt jedes Plättchen, aber wieder der oberen Reihe an und beginnt bei fünf.) Fünf, sechs, sieben, acht, neun. (Luis tippt jeden Punkt der dritten Reihe der Aufgabenkarte an. Er beginnt bei zehn.) Zehn, elf, zwölf, dreizehn, vierzehn. (Er tippt jedes Plättchen an.) Zehn, elf, zwölf, dreizehn.
- 10 Felix und (Felix gibt beide Hände über alle Plättchen, sodass diese verrücken. Luis  
Luis: schiebt ihm ein Plättchen von seinem Sitzplatz zu. Felix legt dieses Plättchen in seine nun neu angeordnete Reihe und greift nach weiteren Plättchen von Luis. Luis greift dazwischen und behält sich „seine“ Plättchen. Felix nimmt alle angeordneten Plättchen und bringt diese in Unordnung.)
- 

### **(Teilweise) unzureichendes Verständnis von Eins-zu-Eins-Vergleichen**

Zu Beginn dieser Aktivität ordnet Felix jedem Punkt der Aufgabenkarte ein Plättchen zu. Dabei hält er die Aufgabenkarte in der Luft und reiht die Plättchen linear angeordnet am



Tisch. In der zweiten linear angeordneten Reihe der Punktedarstellung legt er die Aufgabenkarte auf den Tisch und reiht die Plättchen, eins zu eins zugeordnet, bis er keine Plättchen mehr vor sich liegen hat.

Auf die Frage der Stützlehrkraft „sind das schon alle oder brauchst noch welche?“ zeigt er mit dem Zeigefinger und ohne Strategie entlang der Punktekarte. Auf die wiederholte Nachfrage der Stützlehrkraft mit der Anregung „vielleicht kannst du da ... noch ein paar (Plättchen) nehmen?“, zeigt Felix wieder mit dem Zeigefinger entlang der Punktekarte.

In der anschließenden Kontrolle nützt Luis nicht die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung. Stattdessen tippt er mit dem Zeigefinger jeden Punkt der Aufgabenkarte an, zählt leise jeden Punkt und zählt jedes Plättchen der linear angeordneten Reihen. In der dritten Reihe der Plättchen tippt er eines an, ist irritiert und beginnt die Punkte der Punktekarte erneut von vorne zu zählen. Die Tatsache, dass ein Plättchen weniger am Tisch liegt als auf der Aufgabenkarte, bringt ihn durcheinander. Luis beginnt seinen Zählvorgang erneut von vorne.

Felix schreitet ein und zählt jedes Plättchen, ohne die Zählprinzipien richtig zu verwenden (Abschnitt 2.2.1). Die Eins-zu-Eins-Zuordnung von Finger und zu zählendem Plättchen stimmt nicht. Mit der verbalisierten Zahlenreihe „elf, zwölf, ... siebzehn, acht. Fertig!“ wird ersichtlich, dass er diese noch nicht in ausreichendem Maß automatisiert hat (Abschnitt 2.2.1).

Mit der Frage der Stützlehrkraft „willst du mal kontrollieren, ob das stimmt?“ scheint es, als haben beide Kinder die Frage nicht als Aufforderung zum Vergleichen, sondern zum Zählen verstanden.

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein V im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein V beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ eingeschätzt.

**Tabelle 36**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | X                                           | X                                       |                                          |                               |

### **Denkfreiheiten, Kommunikation**

Mit der Frage der Stützlehrkraft „sind das schon alle oder brauchst noch welche?“ und der anschließenden „brauchst noch welche? Schau, vielleicht kannst du da ... ein paar noch nehmen“ möchte sie Felix unterstützen, seinen begonnen Anzahlvergleich durch die Eins-zu-Eins-Zuordnung weiter fortzusetzen. Seine dafür fehlenden Plättchen könne er sich von seinem Sitznachbarn Luis „borgen“.

Felix versteht diese Aufforderung nicht, zeigt wieder mit dem Zeigefinger entlang der Aufgabenkarte und schaut die Stützlehrkraft fragend an. Die Frage der Stützlehrkraft an Luis gerichtet, „willst du mal kontrollieren, ob das stimmt?“ setzt er als indirekten Anzahlvergleich um und zählt die Plättchen einzeln.

Im Sinne des von Steinweg (2010, 2011) zur Dimension „Aufgabenqualität/Problemstellung“ zugeordneten Merkmals der kognitiven Aktivierung, konnte jedes Kind dieser Klasse das Schwierigkeitsniveau der Aufgabenstellung selbst wählen. Wünschenswert an dieser Stelle wären Nachfragen seitens der Stützlehrkraft, wie beispielsweise „kannst du die Aufgabe auch anders lösen?“ und in weiterer Folge „ohne zu zählen?“ Stattdessen gibt sie keine weiteren Hilfestellungen und/oder stellt keine Fragen, die die Kinder anregen, Anzahlvergleiche, ohne zu zählen durchzuführen. Überlegungen in diese Richtung sind in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ angeführt: „Beobachten Sie die Kinder, ob sie die Aufgaben zählend oder durch Eins-zu-Eins-Zuordnung lösen! Fordern Sie Kinder, die nur durch Zählen zur Lösung kommen auf, einmal eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen“.

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Auch in dieser Sequenz wäre eine adäquate Lernbegleitung sinnvoll, um beurteilen zu können, ob die Kinder überhaupt verstehen, was sie bei dieser Aktivität machen sollten. Felix kann sein Wissen der Zuordnung (im Rahmen der Beantwortung dieser Forschungsfrage 3.1.1) am Beginn dieser Sequenz transferieren. Er ordnet jedem Punkt der Aufgabenkarte ein Plättchen zu, ohne diese zu zählen. Er ist sich dabei so lange sicher, wie er Plättchen vor sich liegen hat. Im Verlauf dieser Sequenz wird er unsicher und löst die Aufgabe, ähnlich wie Luis, durch Zählen der einzelnen Plättchen. Er nützt die Zählprinzipien nicht richtig und zählt die Zahlwortreihe wie ein Gedicht, jedoch nicht korrekt (Abschnitt 2.2.1).

Im Sinne der kognitiven Aktivierung kann Felix, im Gegensatz zur vorangehenden Aktivität, Zuordnungsaufgaben mit Plättchen alleine lösen und muss nicht mehr durch Halten und Führen der Hände und Finger unterstützt werden. Ein lohnender Schritt im Sinne der kognitiven Aktivierung. **Jedoch, in dieser Sequenz macht es den Eindruck, dass die Aufgabenkarte mit strukturierten Anzahlen an Punkten nicht in der „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) beider Jungen liegt.**

Luis löst Anzahlvergleiche in dieser Sequenz durchgängig zählend. Auch im fortführenden Baustein VIII (und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.3) kann Luis Anzahlen an Plättchen nur zählend ermitteln.

Ähnlich wie in der vorangehenden Sequenz und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1 beschrieben, kann an dieser Stelle nicht klar beantwortet werden, ob die Kinder Schwierigkeiten aufgrund des Materialwechsels (von Fingern hin zu Plättchen) haben oder ob sie aufgrund fehlender fachlicher Arbeitsaufträge grundsätzlich nicht verstanden haben, was sie überhaupt zu machen haben.

**Auf alle Fälle scheint es lohnend, diesen Wechsel des Materials (von den Fingern hin zu ... bzw. von den Alltagsgegenständen hin zu ...) individuell abgestimmt auf das einzelne Kind zu überlegen.**

Daraus folgernd sind in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ Überlegungen zum individuellen Materialwechsel zu wenig klar formuliert. Diese Überlegungen werden bei der Weiterentwicklung des Bausteins V in Abschnitt 9.5 aufgegriffen und optimiert weiterentwickelt.

#### 9.4.1.2 Kategorie Halten und Führen der Hände und Finger

Nachfolgend wird beschrieben, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden beim *Halten und Führen der Hände und Finger* der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel zeigen.

Es wird dabei die Forschungsfrage 2.1.2 beantwortet:

**F 2.1.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Halten und Führen der Finger* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?**

##### *Häufigkeit der Kategorie Halten und Führen der Finger*

Tabelle 37 gibt einen Überblick, ob und wie häufig stoffliche Hürden beim Halten und Führen der Hände und Finger bei Zahldarstellungen beobachtet werden. Bezieht man alle *in die Auswertung verbundenen Szenen* der Subkategorie Halten und Führen der Hände zeigen sich in 6,6 % der Szenen Probleme in der Umsetzung. Davon sind 5,6 % der Szenen Baustein IV zuzuordnen, 1,0 % der Szenen Baustein V. Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung* gibt es in 27,7 % der Szenen Probleme, wovon 23,4 % der Szenen dem Baustein IV und 4,3 % der Szenen dem Baustein V zugeschrieben werden.

**Tabelle 37**

*Häufigkeit von Halten und Führen der Hände und Finger (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                                           | Halten und Führen der Finger |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                                                       | 26                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IV                                     | 22                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V                                      | 4                            |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )                               | 6,6                          |
| - Prozent bezogen auf den Baustein IV                                                  | 5,6                          |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                                                   | 1,0                          |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie Probleme in der Lernumgebung ( $N = 94$ ) | 27,7                         |
| - Prozent bezogen auf den Baustein IV                                                  | 23,4                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                                                       | 4,3                          |

Nachfolgende Transkriptausschnitte aus dem Baustein IV – Zahlen mit den Fingern darstellen und dem Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit Zählen – Lege gleich viele, zeigen beispielhaft, dass sich das Halten und Führen der Hände und Finger eines Lernenden durch die Hauptlehrkraft beziehungsweise der Stützlehrkraft als hilfreich erwiesen hat.

**Tabelle 38**

*Baustein IV – Zahlen mit Fingern darstellen (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | Zeig mir bitte sechs.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 2 | Klasse:         | <p><i>(Jedes Kind streckt die Anzahl von Fingern hinter dem Rücken aus, jedes Kind in seinem Tempo. Die Hände werden auf Kommando nach vorne gebracht: Der Großteil der Kinder zeigt sechs Finger mit der „Hauptzeigeweise“ fünf an einer Hand und einen Finger an der anderen; mehrere Kinder zeigen sechs Finger als drei Finger an der einen Hand und drei Finger an der anderen Hand. Chiara und Felix tun sich sichtlich schwer. Chiara senkt den Blick auf ihre Hände und kontrolliert nochmals ihre ausgestreckten Finger. Dazu zählt sie die Finger einzeln ab – zunächst die ausgestreckten Finger der linken vollen Hand und schließlich den Daumen der rechten Hand. <b>Felix hat alle zehn Finger ausgestreckt und blickt auf die Zeigeweisen der anderen Kinder. Die Stützlehrkraft führt die Hände von Felix und unterstützt ihn, einen Finger nach dem anderen auszustrecken. Gemeinsam zählen sie, indem sie gemeinsam einen Finger nach dem anderen ausstrecken, bis eine volle Hand der einen Hand ausgestreckt ist und dann der Daumen der anderen Hand. Felix fixiert die Hände, blickt auf und antwortet sichtlich stolz: „Sechs!“)</b></i></p> <p>...</p> |
| 8 | Klasse:         | <p><i>(Jedes Kind streckt wieder die Anzahl von Fingern hinter dem Rücken aus, auf Kommando kommen die Finger sichtbar vor den Körper: Wieder zeigt die Mehrheit der Kinder acht mit der „Hauptzeigeweise“. Viele zeigen fünf Finger an der linken Hand und drei Finger an der rechten; andere wiederum zeigen fünf Finger an der rechten Hand und drei Finger an der linken Hand; zwei Kinder zeigen acht Finger als vier Finger an der einen Hand und vier Finger an der anderen Hand. Erneut ist es für Chiara und Felix eine schwierige Aufgabe, jedoch scheint es, dass Chiara bei dieser Aufgabe die „Kraft der Fünf“ mitgedacht hätte. Sicher hält sie alle Finger der linken Hand gleichzeitig ausgestreckt, senkt den</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

*Blick auf ihre Hände und zählt anschließend drei Finger der rechten Hand einzeln dazu. Felix blickt zu Chiara und scheint es ihr gleich zu tun. Er streckt alle Finger der linken Hand aus und schaut hilfeschend zur Stützlehrkraft. Bejahend lobt sie ihn für das „Imitieren“ der „Kraft der Fünf“. **Wieder führt sie die Hände von Felix und unterstützt ihn, einen Finger nach dem anderen der rechten Hand auszustrecken.** Gemeinsam zählen sie, beginnend bei fünf, bis sie acht Finger ausgestreckt haben. Felix fixiert die Hände, blickt kurz auf und antwortet etwas bedächtig: „Acht!“)*

**Tabelle 39**

*Baustein V – Vergleichen ohne und eventuell auch mit Zählen – Lege gleich viele (eigene Darstellung)*

|    |                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----|----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 11 | Stütz-<br>lehrkraft:                   | <i>(Die Stützlehrkraft unterbricht Chiara in ihrer Arbeit und bittet Felix diese fortzusetzen.) Gut gemacht Chiara! Felix, jetzt bist du an der Reihe. Versuche es gleich wie Chiara in der unteren Reihe der Punkte des Aufgabenkärtchens. Zeige mit dem Finger der einen Hand und lege je ein Plättchen.</i> |
| 12 | Felix:                                 | <i>Ok! Hier? (Felix zeigt mit dem Finger auf den ersten Punkt des Aufgabenkärtchens in der oberen Reihe. Hilfesuchend schaut er die Stützlehrkraft an.)</i>                                                                                                                                                    |
| 13 | Stütz-<br>lehrkraft<br>und Fe-<br>lix: | <i>Warte Felix. Ich helfe dir. <b>Nimm dir davon ein Plättchen und lege es auf den Tisch. (Gemeinsam führen sie die Hände und legen die Plättchen.)</b></i>                                                                                                                                                    |

Um die Annahme, wonach es ratsam ist, Lernende (mit körperlicher Behinderung) beim Zeigen von Zahldarstellungen durch ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger zu unterstützen (Abschnitt 2.2), zu unterstreichen, steht nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften anhand der Subkategorie *Halten und Führen von Fingern* im Interesse.

Verbunden mit der Subkategorie *Halten und Führen der Finger bei Zahldarstellungen* werden Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C und Hauptlehrkraft D aus Baustein IV herangezogen, wobei untenstehend beispielgebend eine Unterrichtsbeobachtung einer dieser Lehrkräfte beschrieben wird; an dieser Stelle wird die bevorzugte Bezeichnung Hauptlehrkraft verwendet.

In Baustein V wird eine Stützlehrkraft bezogen auf die Subkategorie *Halten und Führen der Finger bei Zahldarstellungen* beschrieben.

Dazu wird die Forschungsfrage 3.1.2 beantwortet:

**F 3.1.2: Wird und – falls ja – wie wird das *Halten und Führen der Hände und Finger bei Zahldarstellungen* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.1.2 zu beantworten, werden im Folgenden die Beobachtungen zu Unterrichtsbaustein IV im Ganzen dargestellt. Die Beschreibung des Unterrichtsbausteines V ist im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1 zu finden.

In **Unterrichtsbaustein IV** (Abschnitt 6.2) handelt es sich um Aktivitäten zu Fingerbildern, die die ganze Klasse als Morgenritual bereits *einige Wochen* geübt hat. Bei der nun beschriebenen Unterrichtsbeobachtung zu Baustein IV nennt die Lehrkraft jeweils eine Zahl, die mit den 10 Fingern darstellbar ist. Jedes Kind soll die entsprechende Anzahl von Fingern zuerst alleine für sich hinter dem Rücken ausstrecken. Auf Anweisung werden die Hände sichtbar vor dem Körper gezeigt (muss nochmals nachgezählt oder die Zahl neu eingestellt werden?). Unterschiedliche Darstellungen mit Fingern sind erlaubt und eine willkommene Lösung: So zeigen manche Kinder von sich aus zum Beispiel sechs als drei und drei, acht als vier und vier, ohne dafür die Finger einzeln zählen zu müssen. Andere wiederum nützen die „Hauptzeigeweise“ mithilfe der „Kraft der Fünf“. Sie zeigen sechs als fünf und eins, acht auch als fünf und drei, usw. Alle Varianten werden mit der ganzen Klasse betrachtet, überprüft und versprochen.

Alle Kinder sitzen im Sitzkreis, die Stützlehrkraft sitzt zwischen Felix und Chiara.

#### **Tabelle 40**

*Arbeit im Klassenverband (Zahlen und Finger) (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | Zeig mir bitte sechs.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 2 | Klasse:         | <i>(Jedes Kind streckt die Anzahl von Fingern hinter dem Rücken aus, jedes Kind in seinem Tempo. Die Hände werden auf Kommando nach vorne gebracht: Der Großteil der Kinder zeigt sechs Finger mit der „Hauptzeigeweise“ fünf an einer Hand und einen Finger an der anderen; mehrere Kinder zeigen sechs Finger als drei Finger an der einen Hand</i> |

*und drei Finger an der anderen Hand. Chiara und Felix tun sich sichtlich schwer. Chiara senkt den Blick auf ihre Hände und kontrolliert nochmals ihre ausgestreckten Finger. Dazu zählt sie die Finger einzeln ab – zunächst die ausgestreckten Finger der linken vollen Hand und schließlich den Daumen der rechten Hand. Felix hat alle zehn Finger ausgestreckt und blickt auf die Zeigeweisen der anderen Kinder. Die Stützlehrkraft führt die Hände von Felix und unterstützt ihn, einen Finger nach dem anderen auszustrecken. Gemeinsam zählen sie, indem sie gemeinsam einen Finger nach dem anderen ausstrecken, bis eine volle Hand der einen Hand ausgestreckt ist und dann der Daumen der anderen Hand. Felix fixiert die Hände, blickt auf und antwortet sichtlich stolz: „Sechs!“)*

- 3    Hauptlehrkraft:    *(Die Hauptlehrkraft greift die Zeigeweisen der Kinder auf.)* Alle, die sechs als fünf Finger und einen Finger eingestellt haben, stehen bitte auf. Maria, kannst du uns zeigen, wie du sechs mit den Fingern zeigst?
  
- 4    Maria:                *Ja! Hier (Maria zeigt auf ihre linke Hand) sind fünf Finger und hier (sie zeigt auf den Daumen ihrer rechten Hand) ist es ein Finger. Fünf und eins ist sechs.*
  
- 5    Hauptlehrkraft:    Super, Maria! Ganz richtig erklärt! Sechs besteht aus fünf - eine volle Hand - und einen Finger mehr. *(Die Hauptlehrkraft zeigt zuerst fünf Finger an der einen Hand und schließlich den Daumen der anderen Hand. Nach einer kurzen Pause greift sie die Zeigeweisen der Kinder auf, die noch sitzen.)* Alle, die sechs als drei Finger und drei Finger eingestellt haben, stehen bitte auf. Ihr habt noch eine andere Lösung gefunden. Sandro, kannst du uns erklären, warum deine Zeigeweise auch stimmt?
  
- 6    Sandro:                *Ja. Weil, ich habe hier drei Finger (Sandro zeigt auf die drei Finger der linken Hand) und hier drei Finger (er zeigt auf die drei Finger der rechten Hand). Zusammen sind das sechs! Wie bei den anderen. Sie zeigen fünf Finger und einen Finger. Das ist genau dasselbe.*
  
- 7    Hauptlehrkraft:    Ja genau. Sehr gut! *(Die Hauptlehrkraft zeigt diese Zeigeweise den Kindern, die sitzen.)* Man kann sechs auch als drei Finger *(sie zeigt drei Finger der linken Hand)* und drei Finger *(sie zeigt drei Finger der rechten Hand)* zeigen. Sechs besteht aus fünf und eins oder auch als drei und drei. Bravo! Achtung, Hände wieder hinter den Rücken! Es gibt eine neue Zahl: Zeig mir bitte acht.



- 8 Klasse: *(Jedes Kind streckt wieder die Anzahl von Fingern hinter dem Rücken aus, auf Kommando kommen die Finger sichtbar vor den Körper: Wieder zeigt die Mehrheit der Kinder acht mit der „Hauptzeigeweise“. Viele zeigen fünf Finger an der linken Hand und drei Finger an der rechten; andere wiederum zeigen fünf Finger an der rechten Hand und drei Finger an der linken Hand; zwei Kinder zeigen acht Finger als vier Finger an der einen Hand und vier Finger an der anderen Hand. Erneut ist es für Chiara und Felix eine schwierige Aufgabe, jedoch scheint es, dass Chiara bei dieser Aufgabe die „Kraft der Fünf“ mitgedacht hätte. Sicher hält sie alle Finger der linken Hand gleichzeitig ausgestreckt, senkt den Blick auf ihre Hände und zählt anschließend drei Finger der rechten Hand einzeln dazu. Felix blickt zu Chiara und scheint es ihr gleich zu tun. Er streckt alle Finger der linken Hand aus und schaut hilfesuchend zur Stützlehrkraft. Bejahend lobt sie ihn für das „Imitieren“ der „Kraft der Fünf“. Wieder führt sie die Hände von Felix und unterstützt ihn, einen Finger nach dem anderen der rechten Hand auszustrecken. Gemeinsam zählen sie, beginnend bei fünf, bis sie acht Finger ausgestreckt haben. Felix fixiert die Hände, blickt kurz auf und antwortet etwas bedächtig: „Acht!“)*
- 9 Hauptlehrkraft: *Toll! Jetzt haben wir viele unterschiedliche Zeigeweisen. Manche von euch zeigen fünf Finger an der einen Hand (sie zeigt fünf Finger der linken Hand) und drei Finger an der anderen (sie zeigt drei Finger der rechten Hand); andere wiederum zeigen fünf Finger an dieser Hand (sie zeigt fünf Finger der rechten Hand) und drei Finger an dieser Hand (sie zeigt drei Finger der linken Hand); und wieder andere zeigen vier (sie zeigt vier Finger der linken Hand) und vier (sie zeigt vier Finger der rechten Hand). Maria, kannst du uns deine Lösung zeigen und erklären?*
- 10 Maria: *(Maria zeigt acht mit der „Hauptzeigeweise“. Sie hat fünf Finger an der linken Hand ausgestreckt und drei Finger an der rechten.)* Ja. Fünf und drei ist acht.
- 11 Hauptlehrkraft: *Ja! Super. Acht besteht aus fünf und drei. (Die Hauptlehrkraft zeigt Marias Zeigeweise den Kindern, die sitzen. Sie zeigt fünf Finger an der linken Hand und drei Finger an der rechten.)* Bleib bitte kurz stehen, Maria. Jonathan, steh bitte einmal auf und erkläre, wie du acht zeigst.

- 12 Jonathan: *(Jonathan zeigt acht ebenso mit der „Hauptzeigeweise“. Er hat hingegen fünf Finger an der rechten Hand ausgestreckt und drei Finger an der linken). Ich hab hier fünf (er zeigt fünf Finger an der rechten Hand) und hier drei (er zeigt drei Finger an der linken Hand). Zusammen sind es acht. Du hast ja gestern gesagt, dass es egal ist, mit welcher Hand wir zeigen.*
- 13 Hauptlehrkraft: Genau Jonathan. Wir haben ja gelernt und das hast du dir super gemerkt, dass es egal ist, welche Hand dabei fünf zeigt. Ich kann bei dieser Hand fünf Finger ausstrecken *(sie zeigt fünf Finger an der rechten Hand)* und auf der anderen drei Finger *(sie zeigt drei Finger an der linken Hand)* oder umgekehrt. Beides ergibt zusammen acht Finger. Acht besteht aus fünf und drei. Acht besteht aber auch aus drei und fünf. *(Nach einer kurzen Pause.)* Wir haben aber noch eine andere Lösung. Schaut die Finger von Lara und Ilke an. Steht mal beide bitte auf! Wie zeigt ihr acht?
- 14 Lara & Ilke: Wir haben hier vier *(Lara zeigt vier Finger an der linken Hand)* und hier vier *(Ilke unterbricht sie und zeigt vier Finger an der rechten Hand).*
- 16 Ilke: Ja. Das können wir auch bei sechs machen, oder? Wenn ich bei fünf und eins einen Finger hier wegnehme *(Ilke klappt einen Finger der linken Hand um)*, muss ich auf der anderen Seite einen Finger dazu geben *(sie streckt den Zeigefinger der rechten Hand aus)*. Und ich habe wieder sechs.
- 17 Hauptlehrkraft: Super erkannt, Ilke. Ganz richtig! Ich kann diesen „Trick“ auch bei anderen Zahlen anwenden. Wenn ich an der vollen Hand einen Finger umklappe *(die Hauptlehrkraft klappt einen Finger der linken Hand um)*, muss ich zum Ausgleich an der anderen Hand einen dazugeben *(die Lehrkraft streckt den Zeigefinger der rechten Hand aus.)* Aus fünf und eins wird so vier und zwei. Die Zahl bleibt gleich, „sechs!“.

---

### **Zahl-Denken, bei dem Zahlen als Zusammensetzungen mitgedacht werden**

Es scheint, als haben einige Kinder dieser Klasse *erste* entscheidende Entdeckungen bereits gemacht: *Zahlen sind aus anderen Zahlen zusammengesetzt* (Abschnitt 2.2.3.1). Für Maria ist sechs ein Ganzes mit seinen Teilen fünf und eins. Sechs ist für Sandro hingegen ein Ganzes mit den Teilen drei und drei. Acht hingegen ist für Maria aus den Teilen fünf und drei zusammengesetzt, für Jonathan ebenso aus denselben Teilen fünf

und drei; er zeigt alle fünf ausgestreckten Finger an der anderen Hand als Maria es beispielsweise tut. Und für Lara und Ilke wiederum ist acht ein Ganzes mit den Teilen vier und vier.

Freilich sind *verschiedene* Zeigeweisen wie in dieser Klasse nicht nur richtig, sondern auch eine wünschenswerte Lösung. Wesentlich ist, dass sie gemeinsam mit der ganzen Klasse betrachtet, überprüft und versprachlicht werden: Jonathan, Sandro, Maria, Ilke und Lara sind Kinder, die Zahlen sechs und acht „*auf einen Sitz*“ mit unterschiedlichen Zeigeweisen zeigen können, ohne dass sie dabei ihre Finger einzeln hochzählen müssen. Einige Kinder können bereits auch mit (Zahl-)Worten beschreiben, wie sie die einzelnen Zahlen zeigen: Maria nützt bei sechs und acht die „Hauptzeigeweise“ „*fünf und ...*“. Sandro hat beispielsweise festgestellt, dass seine Zeigeweise bei sechs (drei Finger an der linken Hand und drei Finger an der rechten Hand) „wie bei den anderen ... genau dasselbe“ sei. Beide Kinder zeigen sechs als fünf Finger an der linken Hand und einen Finger an der rechten Hand. Jonathan hat bereits erkannt und sich vom Vortag gemerkt (gemeint hat er wohl nicht „gestern“, sondern mehrere Tage zuvor, als das Thema Fingerdarstellungen mit überkreuzten Händen von der Lehrkraft besprochen wurde), dass es egal ist, welche Hand bei der „Hauptzeigeweise“ fünf zeigt; es spielt keine Rolle, ob die linke oder rechte Hand und kann dies auch in Worten fassen. Und Lara und Ilke wiederum entdecken acht als Verdoppelung mit vier und vier.

### ***Zahl-Denken, bei dem Zahlen als Positionen gedacht werden***

Chiara und Felix benötigen für die Lösung der Aufgabe sechs mit Fingern zu zeigen mehr Zeit. Dennoch schaffen es beide Kinder (Felix *nur* mit Unterstützung der Stützlehrkraft) sechs als fünf Finger an der einen Hand und einen Finger an der anderen Hand zu zeigen. Chiara zählt bei sechs die ausgestreckten Finger einzeln ab – zunächst die ausgestreckten Finger der linken vollen Hand und schließlich den Daumen der rechten Hand. ***Felix hat alle zehn Finger ausgestreckt und kann die Aufgabe nicht selbstständig lösen. Die Stützlehrkraft hilft ihm durch Halten und Führen der einzelnen Finger gemeinsam die Fingeranzahl sechs zu bestimmen. Jeder Finger wird einzeln ausgestreckt und abgezählt (Abschnitt 2.2.3).*** Beide Kinder lösen die Aufgabe, wenn auch auf unterschiedliche Art und Weise. Und doch können wir davon ausgehen, dass Felix und Chiara über ein unterschiedliches Zahldenken verfügen als einige/viele Kinder dieser Klasse.

Vermutlich denkt Chiara bei sechs wohl eher an die sechste Position in der Zahlwortreihe, an die Position, die nach fünf und vor sieben kommt; an den sechsten Finger (Abschnitt 2.2.3.3). Freilich wäre es noch zu früh in dieser frühen Phase des Mathematiklernens von *zählendem Rechnen* zu sprechen, welches sich verfestigen *könnte*, dennoch sollten alle Kinder darin unterstützt werden, ein Zahldenken mit Zahl-Ganzen und Zahl-Teilen zu aufzubauen – und das von Anfang an!

Bei der Zahl acht zeigen Chiara und Felix unterschiedliche Herangehensweisen. Es scheint so, als habe Chiara bei dieser Aufgabe die „Kraft der Fünf“ mitgedacht. Sie muss nicht erneut die Finger der einen Hand abzählen, um zu wissen, dass es fünf Finger an einer Hand sind. Sie zeigt (zumindest bei dieser Aufgabe) einen grundlegenden Lernschritt, nämlich die Einsicht in die *Konstanz einer Anzahl*: Wenn nichts dazu- oder weggegeben wird, bleibt die Anzahl gleich. Es können die Finger auch gut durchgeschüttelt werden – und dennoch bleibt die Anzahl gleich! Die Gesamtzahl acht zählt Chiara ausgehend von fünf ab. Dazu streckt sie immer einen Finger der anderen Hand einzeln aus, bis sie bei acht angelangt ist (Abschnitt 2.2.3). ***Felix versucht es Chiara gleich zu tun und streckt eine volle Hand aus und weiß nicht, wie er weiter vorgehen soll. Ebenso gemeinsam mit der Stützlehrkraft zählen sie beginnend bei fünf, bis sie acht Finger ausgestreckt haben.***

Es wird anhand der Unterrichtsbeobachtung nicht klar deutlich, ob Felix *überhaupt versteht*, was die Lehrkraft bei beiden Aufgaben von ihm (numerisch betrachtet) möchte. Bei der Zahl sechs streckt er alle 10 Finger aus, wodurch durchaus anzunehmen ist, dass er nicht weiß, was er tun solle. Auch bei der Zahl acht liegt die Vermutung nahe, dass er es Chiara gleichtun möchte und deshalb (ohne mathematisches Verständnis) alle Finger einer Hand ausstreckt.

Berechtigterweise muss man sich an dieser Stelle fragen, ob es überhaupt *allen Kindern* etwas bringe diese Vielzahl an Zeigeweisen mit der ganzen Klasse zu überlegen und zu vergleichen. Sind Kinder wie Felix oder Chiara mit diesen unterschiedlichen Zeigeweisen und der Beschreibung unterschiedlicher Lösungswege nicht verwirrt und überfordert? Sollten diese Kinder nicht viel eher diese Aufgaben einzeln und/oder in kleinen Kindergruppen außerhalb des Klassenverbandes erarbeiten und üben, jeder in seinem Tempo und entsprechend seinen mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten?

Vermutlich sind diese Fragen differenzierter und mit Blick auf die Strategien jedes einzelnen Kindes zu beantworten. Chiara scheint durch „Nachahmung“ der anderen Kinder (oder vielleicht auch bereits durch eigene Erkenntnis?) eine wesentliche Einsicht gemacht zu haben (von einer automatisierten Handlung kann man freilich noch nicht sprechen): Bei der Nutzung der „Kraft der Fünf“ werden alle Finger an einer Hand ausgestreckt; es muss nicht jedes Mal erneut nachgezählt werden, sondern man kann eine Hand ungezählt ausstrecken. So tut Chiara es auch bei der Zahl acht: Sie streckt eine volle Hand aus und muss dafür nicht erneut nachzählen. Von fünf aus überlegt sie weiter und zählt die Finger einzeln ab, bis sie bei acht ankommt. Im Sinne ihrer individuellen „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) scheint es ratsam zu sein, dass sie sich (vorerst) auf die „Hauptzeigeweise“ mit der Nutzung der „Kraft der Fünf“ (sechs, sieben, acht und neun werden als „fünf und ...“ gezeigt) konzentriert, bis diese abgesichert und weitgehend automatisiert ist (Abschnitt 3.2.2).

Kinder wie Felix hingegen werden sich (vermutlich) mit der Vielzahl von Zeigeweisen schwertun. Er sollte nicht gedrängt werden, alle mitzumachen. Jene Kinder sollten geduldig und konsequent unterstützt werden, auch durch *zusätzliche* Förderung außerhalb des Klassenverbandes, um im (*nicht-zählenden*) *Darstellen* der Zahlen mit Fingern sicher zu werden. Anfänglich wird er die eigenen Finger immer wieder *abzählen* müssen. Dabei sollte darauf geachtet werden, ob Felix beim Zählen *die Zahlwortreihe* (Abschnitt 2.2.3 und Abschnitt 9.4.2.2) sicher beherrscht, eine unverzichtbare Grundlage für die Erarbeitung der Fingerdarstellungen. Erst auf Basis einer sicheren Zahlwortreihe eignen sich weitere Aktivitäten, die teils schon auf nächste Ziele verweisen: Sind es fünf Finger an einer Hand? An beiden Händen zusammen zehn? Was passiert, wenn man die Finger gut durchschüttelt, muss dann jedes Mal neu abgezählt werden? Weiterführend wird es in der Regel zielführend sein, sich mit Felix zuerst auf die Fingerdarstellungen nur bis fünf zu konzentrieren und sich erst dann auch (mit ausreichend Übung, Zeit und Geduld) den Zahlen sechs bis neun zu widmen. Gelänge es Schulkindern wie Felix nach und nach je eine „Hauptzeigeweise“ unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ sicher anzuwenden, wäre es tatsächlich auch für Kinder wie ihn ein großer Fortschritt (Abschnitt 2.2).

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein IV im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein IV beschriebene Lernbegleitung der Hauptlehrkraft und der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010,

2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ den Kriterien „Aufgabenqualität, Problemstellungen“, „Denkfreiheiten, Kommunikation“ und „Ziel, Zieltransparenz“ eingeschätzt. Bei Kriterien, bei denen es für die Einschätzung der ‚Lehr-Lernsituation‘ wertvoll erscheint, werden die Handlungsmöglichkeiten getrennt für beide Lehrkräfte beschrieben:

**Tabelle 41**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein IV anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | X                                           | X                                       |                                          | X                             |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Die Hauptlehrkraft stellt die Aufgabe ‚verschiedene Zeigeweisen für eine Zahl zu überlegen‘ nicht nur einzelnen Kindern oder einem Teil der Klasse, sondern versucht alle Kinder miteinzubeziehen. Freilich sind die mathematischen Entdeckungen der Kinder vielfältig; und auch die Tiefe des Verständnisses unterscheidet sich nach der Durchführung selbstverständlich (in manchen Klassen sogar gewaltig): Während Kinder wie Jonathan und Sandro beziehungsweise Lara und Ilke weitreichende Entdeckungen offenbar bereits gemacht haben, nämlich, dass *Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt* sind, ist es für Maria ein anfängliches Sich-Bewusstwerden der „Hauptzeigeweise“ der Zahlen bis 10 unter Nutzung der „Kraft der Fünf“. Und für Felix wiederum ist es die Aufgabe, die Zahlen mit Fingern durch Unterstützung der Stützlehrkraft darzustellen und dabei jeden Finger einzeln hochzuzählen (Abschnitt 2.2).

Die beschriebene Hauptlehrkraft scheint Wert auf die kindlichen Entdeckungen zu legen, da einige Kinder dieser Klasse von *sich aus* auf die mathematischen Entdeckungen des Teile-Ganzes-Denkens hinweisen, diese beschreiben und erklären; wie beispielsweise bei der sehr beachtlichen Entdeckung von Ilke zum Abschluss dieser Sequenz: „Das können wir auch bei sechs machen, oder? Wenn ich bei fünf und eins einen Finger hier wegnehme, muss ich auf der anderen Seite einen Finger dazu geben. Und ich habe wieder sechs“. Ilke vernetzt das gerade besprochene Wissen (wenn auf der einen Seite ein Finger weniger wird, muss zum Ausgleich auf der anderen Seite ein Finger mehr

ausgestreckt werden) mit der vorherigen Aufgabe, die Zahl sechs mit Fingern zu zeigen und erklärt selbstbewusst und bestimmt seine mathematische Entdeckung. Die Hauptlehrkraft greift im Sinne der kognitiven Herausforderung die Entdeckungen Ilkes nochmals auf und bespricht diese mit allen Kindern.

**Die Stützlehrkraft unterstützt Felix beim Halten und Führen der Hände und Finger und zählt mit ihm gemeinsam die einzeln ausgestreckten Finger ab (Abschnitt 2.2). Durch das gemeinsame Abzählen der Finger wird, eins-zu-eins-zugeordnet, ein Finger dem Zahlwort zugeordnet. Bei acht scheint Felix unsicher, mit verunsichertem Gesichtsausdruck schaut er die Stützlehrkraft hilfesuchend an.** Überlegungen in diese Richtung sind in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ nicht verankert, werden aber bei der Weiterentwicklung des Bausteins IV in Abschnitt 9.5 aufgenommen.

Unterstützend wirkt ihre positive Grundhaltung und ihr Lob beim Versuch des „Imitierens“ von Chiaras „Kraft der Fünf“. Es hat sich an dieser Stelle als sehr hilfreich erwiesen, dass die Stützlehrkraft Felix auch sprachlich unterstützt, indem sie die Zahlwortreihe gemeinsam aufsagen.

### ***Denkfreiheiten und Kommunikation***

Die Hauptlehrkraft nützt bei der Erarbeitung der Einsichten, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind die Finger (Abschnitt 2.2.3). Sie stellt wiederholt Fragen nach den Beziehungen von Zahlen zueinander und fordert die Kinder zum Versprachlichen auf: „Ich kann diesen ‚Trick‘ auch bei anderen Zahlen anwenden. Wenn ich an der vollen Hand einen Finger umklappe, muss ich zum Ausgleich an der anderen Hand einen dazugeben. Aus fünf und eins wird so vier und zwei. Die Zahl bleibt gleich, ‚sechs!‘.“ Mit „Trick“ meint die Hauptlehrkraft an dieser Stelle wohl das sich wiederholende Muster von mathematischen Zusammenhängen; in diesem Fall die mathematische Gesetzmäßigkeit des „gegensinnigen Veränderns“: Aus acht, gezeigt als fünf und drei, wird vier und vier. Aus sieben, gezeigt als fünf und zwei, wird vier und drei, usw.

Durch geeignete Aktivitäten, Zahlen mit den Fingern darzustellen, bietet die Hauptlehrkraft den Lernenden eine gute Gelegenheit, *eigene Lösungswege* zu suchen. So hat die Aufgabe „Zeige ... durch das Ausstrecken der entsprechenden Anzahlen von Fingern hinter dem Rücken“ das Potenzial, verschiedene Zeigeweisen für eine Zahl zu finden, von jedem Kind in seinem Tempo und jedes kann sein Niveau der Schwierigkeit selbst

wählen. Die Hauptlehrkraft betrachtet, überprüft und versprachlicht gemeinsam mit der Klasse die *unterschiedlichen* Varianten. Dazu lässt sie einige Kinder der Klasse ihre individuellen Denkwege versprachlichen. Mit der Frage: „Geht es noch anders?“ werden alle individuellen Lösungswege aufgespürt.

### ***Ziel und Zieltransparenz***

**Es liegt der beschriebenen Hauptlehrkraft sehr daran, das vorhandene Wissen der Kinder mit dem gerade diskutierten Inhalt zu vernetzen.** Dies zeigt sich beispielsweise bei der folgenden Aktivität: Zu wissen, dass es egal ist, welche Hand bei der „Hauptzeigeweise“ fünf zeigt, ist auch eine wesentliche Erkenntnis bei den Zusammensetzungen einer Zahl: „Wir haben ja gelernt ..., dass es egal ist, welche Hand dabei [gemeint ist bei der „Hauptzeigeweise“ mit Nutzung der „Kraft der Fünf“, Anmerkung C.G.] fünf zeigt. Ich kann bei dieser Hand fünf Finger ausstrecken und auf der anderen drei Finger, oder umgekehrt. Beides ergibt zusammen acht Finger. Acht besteht aus fünf und drei. Acht besteht aber auch aus drei und fünf.“

**Beide Lehrkräfte scheinen das gemeinsame inhaltliche Ziel, innerhalb desselben Rahmens unterschiedlich weit gesteckte Teilziele zu verfolgen:** Die einen Kinder entdecken nach und nach mehrere Zusammensetzungen von Zahlen (vielleicht auch bereits unabhängig von (Finger-)Handlungen?), andere wiederum erarbeiten und festigen die „Hauptzeigeweise“ unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ der Zahlen bis 10. Und wieder andere versuchen sich beim Abzählen und Aufsagen der Zahlwortreihe (Abschnitt 2.2.3).

#### **9.4.1.3 Kategorie Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel**

Nachfolgend wird beschrieben, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden beim *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel zeigen.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.1.3:

**F 2.1.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit in der Lernumgebung*?**



### *Häufigkeit der Kategorie Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel*

Tabelle 42 gibt an, dass sich verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* in 8,4 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Materialwechsel zeigen. Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten in der Lernumgebung* gibt es in 22,8 % der Szenen Probleme. Alle Unterrichtsszenen sind aus Baustein VIII entnommen.

**Tabelle 42**

*Häufigkeit von Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                                           | TGD bei Materialwechsel |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                                                       | 33                      |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )                               | 8,4                     |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie Probleme in der Lernumgebung ( $N = 94$ ) | 35,1                    |

Wie exemplarisch in den nachfolgenden Transkriptausschnitten aus Baustein VIII – schnelles Sehen – beschrieben, zeigt sich, dass es sich für einige Lernende als schwierig erwiesen hat, *beim Materialwechsel* Anzahlen in ihren Teilen und Ganzen zu denken:

Anna wird nachfolgend in zwei Transkriptausschnitten betrachtet. Im ersten kann sie die Fünfergliederung, die sie mit den Fingern kennengelernt und gekonnt hat, auf ein anderes Material und auf einen anderen Kontext übertragen; in diesem Fall auf Plättchen. Jedoch findet sie – im Gegensatz zu den vorangegangenen Bausteinen mit Fingern (siehe Beantwortung Forschungsfrage 3.1.3) – keine weitere Darstellung mit sieben Plättchen, sondern nützt die Strategie des Weiterzählens (Abschnitt 2.2.1).

**Tabelle 43**

*Baustein VIII – Beliebige Anzahlen strukturiert legen (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6 | Anna:           | (Anna holt ihre Hände unter dem Tisch hervor.) <b>Schau, wie bei den Händen. Wir haben ja gelernt, die fünf hilft mir. Das sind fünf (Anna streckt eine volle Hand mit fünf Fingern aus) und sechs (sie streckt den Daumen der rechten Hand aus) und sieben (sie streckt den Zeigefinger der rechten Hand aus). Sieben! Sieben!</b> |
| 7 | Hauptlehrkraft: | (Die Hauptlehrkraft fragt weiter.) Ok. Ich verstehe! <b>Kannst du</b>                                                                                                                                                                                                                                                               |

**sieben Plättchen auch *anders* ordnen, sodass wir beide sofort sehen wie viele es sind?**

- 8 Anna: *(Anna ist verwundert. Sie denkt eine Zeit nach.) Anders? Nein, etwas anderes fällt mir grad nicht ein!*

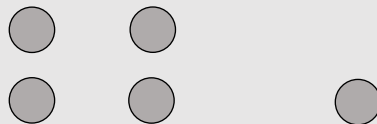
Auch in der darauffolgenden Aktivität in dem nachfolgend beschriebenen Transkriptausschnitt fünf Plättchen als Zusammensetzungen darzustellen, zeigt Anna Schwierigkeiten. Anna kann zwar figurale Muster, wie hier Würfelbilder (Abschnitt 2.2.3) mit Plättchen korrekt legen, aber sie findet keine weiteren Zusammensetzungen der Zahl fünf (Abschnitt 2.2.3.1).

#### Tabelle 44

*Baustein VIII – Beliebige Anzahlen strukturiert legen (eigene Darstellung)*

- 7 Hauptlehrkraft: *(Die Hauptlehrkraft fragt weiter.)* Gut. Jetzt schmeiß sie *(die Plättchen)* mal auf den Teppich. Kannst du fünf Plättchen auch anders legen, dass wir beide sofort sehen, wie viele es sind? Also **nicht die Würfel fünf bitte.**

- 8 Anna: *(Anna wirft die Plättchen auf den Teppich und betrachtet die Plättchen. Sie überlegt eine Zeit.) Anders? Hmm...anders. (Anna überlegt weiter.)* Ja ich probier's!



*(Anna legt fünf Plättchen als Würfelvier und als Würfeleins.)* Hier vier *(Anna zeigt auf das Muster der Würfelvier und muss sie nicht einzeln zählen.)* und hier eins *(Anna zeigt auf das Muster der Würfeleins.)* Vier und eins mehr ist die fünf. Ja das geht auch, oder?

- 9 Hauptlehrkraft: Ok. Und du denkst hier die Würfelvier und die Würfeleins, stimmt's? *(Die Hauptlehrkraft möchte wissen, wie Anna bei der Aufgabe denkt.)*

- 10 Anna: *(Anna antwortet in ruhigem Ton und lächelt.)* Ja, wir spielen daheim immer „Mensch ärgere dich nicht“ und da muss ich mir immer die Würfel merken. Das ist einfach!

- 11 *(Die Hauptlehrkraft nimmt die Plättchen und ordnet sie neu an.)* Ich find es toll, dass du die Würfelbilder schon so gut kannst. **Ich lege jetzt fünf Plättchen einmal ganz anders. Wir müssen die**

**Plättchen nicht immer so wie am Spielwürfel legen. Wir können ganz viele Muster machen.**



*(Die Hauptlehrkraft legt fünf Plättchen in linearer Anordnung. Dann verschiebt sie ein Plättchen nach oben.) Vier (Die Hauptlehrkraft umkreist mit dem Zeigefinger die vier Plättchen.) und eins (sie umkreist das eine Plättchen) ergibt fünf. Es geht aber auch noch anders.*

Wie beispielhaft in dieser Fallbeschreibung dargestellt, ist es für Lernende wie Anna entscheidend, das Teile-Ganzes-Denken von Fingerhandlungen zu sichern, bevor ein Wechsel des Materials hin zu weiterem arithmetischem Material erfolgt.

Um diese Behauptung hervorzuheben, steht nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf das *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* der Kategorie Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel im Interesse.

Verbunden mit der Subkategorie *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* werden Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D, Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, Stützlehrkraft C, Stützlehrkraft D aus Baustein VIII beobachtet, wobei untenstehend beispielgebend eine Unterrichtsbeobachtung einer dieser Lehrkräfte beschrieben wird; an dieser Stelle wird die bevorzugte Bezeichnung Hauptlehrkraft verwendet.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.1.3 beantwortet:

**F 3.1.3: Wird und – falls ja – wie wird das *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.1.3 zu beantworten, folgt nachstehend die Beschreibung des Unterrichtsbausteines VIII im Ganzen.

In den vorherigen Aktivitäten zum schnellen Sehen von **Baustein VIII** (Abschnitt 6.2) wurden bereits mit der ganzen Klasse Übungen mit Spielwürfeln beziehungsweise einem Schaumstoffwürfel gemacht. Das *nicht-zählende* Erkennen dieser „Muster“ auf einem Spielwürfel wurde im Klassenverband thematisiert. Auch Aktivitäten zum schnellen Sehen mit Punktedarstellungen in zwei unterschiedlichen Farben wurden im Klassenverband gemacht (Abschnitt 6.2). Nachdem im Blitzblick möglichst viele Kinder an der Reihe waren die Anzahlen zu erkennen, wurden die Darstellungen in Ruhe betrachtet. „Wie hast du das so schnell gesehen? Welche anderen Zahlen kannst du in der 4 / 5 noch erkennen, und *wie?*“

Einige Kinder(-paare) kommen in den Beschreibungen bei der Arbeit am Baustein VIII vor, die auch in anderen Bausteinen dargestellt werden:

Für Anna war es in Baustein VII noch zu schwierig, Fingeranzahlen nur mehr verdeckt zu zeigen (im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3). Bei zusätzlichen Übungen zu Fingerdarstellungen außerhalb des Klassenverbandes wird klar, dass es sich lohnt, sich bei Kindern wie Anna vorerst auf die sichere Fingerdarstellung bis fünf (Abschnitt 3.2.2) zu konzentrieren, diese abzusichern und in weiterer Folge die Darstellung sechs bis neun zu erarbeiten. Anna kann die Zahl drei mit „Häschen-Ohren“ (Abschnitt 6.2) darstellen. Nach und nach kann sie *erste* Zusammensetzungen von Zahlen mit Fingern zeigen.

Julia hat bereits die entscheidende Entdeckung gemacht, dass *Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind*. Sie kann Anzahlen „auf einen Sitz“ mit den Fingern zeigen, auch mit *verdeckten Fingern* unter der Tischplatte. Bei den Zahlen sechs und acht nützt sie nicht mehr die „Hauptzeigeweise“ als „*fünf und...*“, sondern weiß bereits *andere* Zusammensetzungen (Abschnitt 2.2.3.1), wie in Baustein VII die Zahlen sechs als drei und drei und acht als vier und vier. Sie kann die Beziehungen der Zahlen zur Fünf (als eine ganze Hand) und zur Zehn (beide Hände zusammen) herstellen.

Luis hingegen konnte durch gezieltes Nachfragen seitens der Hauptlehrkraft, ob er acht auch noch anders als die Finger einzeln auszustrecken könne, über seinen Fingerge-

brauch nachdenken. Er erkennt selbst, dass es geschickter sei „fünf auf einen Sitz auszustrecken“ als jeden Finger einzeln. So tut er es auch bei der Zahl sieben. Er streckt fünf Finger der einen Hand gleichzeitig aus, überlegt weiter und streckt dann zwei Finger der anderen Hand gleichzeitig aus.

Bei der folgenden Aktivität zu **Baustein VIII** arbeiten die Kinder möglichst selbstständig: Die Kinder suchen sich eine Zahl aus, die sie mit Plättchen strukturiert legen können (Abschnitt 6.2). Die Plättchen sollen so gelegt werden, dass die Lehrkraft auf einen Blick sehen kann, wie viele es sind. Die Art, Plättchen (strukturiert) zu legen, ist für uns Erwachsene besonders aufschlussreich. Manche Kinder werden bei dieser Übung weit über zehn Plättchen hinaus gehen – solange sie diese strukturiert legen (Zehner und Einer ...), gut so, auch wenn die Lehrkraft vermutlich „zwei Blicke“ braucht!

**Tabelle 45**

*Anna (beliebige Anzahlen an Plättchen strukturiert legen, dass man sie simultan erkennt) (eigene Darstellung)*

|   |                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Haupt-<br>lehrkraft: | <p><i>(Die Hauptlehrkraft kommt hinzu, um Anna in ihrer Arbeit mit den Plättchen zu beobachten. Sie sieht, dass Anna sieben Plättchen auf den Tisch gelegt hat. Sie legt mit Plättchen eine Würfel-Fünf und eine Würfel-Zwei.)</i></p> <div data-bbox="544 584 978 703" data-label="Image"> <p>Das Diagramm zeigt zwei separate Ansammlungen von grauen Kreisen, die Plättchen darstellen. Die linke Ansammlung besteht aus fünf Kreisen, die in einer Form angeordnet sind, die einer Fünf auf einem Würfel entspricht (eine Reihe von vier Kreisen mit einem fünften Kreis in der Mitte). Die rechte Ansammlung besteht aus zwei Kreisen, die nebeneinander angeordnet sind, was eine Zwei auf einem Würfel darstellt.</p> </div> <p>Ich sehe Anna, dass du Plättchen gelegt hast. Kannst du mir erklären, welche Anzahl du gelegt hast und wie wir beide auf einen Blick erkennen können, wie viele es sind?</p> |
| 2 | Anna:                | <p><i>(Anna schaut die Hauptlehrkraft etwas verwundert an.)</i> Schau, das ist einfach. Du musst an die Würfel denken <i>(damit meint sie die Spielwürfel)</i>. Hier <i>(zeigt auf das Muster mit fünf Plättchen)</i> fünf, hier <i>(zeigt auf das Muster mit zwei Plättchen)</i> zwei.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 3 | Haupt-<br>lehrkraft: | <p><i>(Die Hauptlehrkraft fragt weiter.)</i> Aha, und dann siehst du sofort, dass es sieben Plättchen sind?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 4 | Anna:                | <p><i>(Anna ist sich sicher.)</i> Ja klar. Es ist ja die Sieben!</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 5 | Haupt-<br>lehrkraft: | <p><i>(Die Hauptlehrkraft fragt nochmals.)</i> Es ist DIE Sieben? Erklär mir das bitte nochmals!</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 6 | Anna:                | <p><i>(Anna holt ihre Hände unter dem Tisch hervor.)</i> Schau, wie bei den Händen. Wir haben ja gelernt, die fünf hilft mir. Das sind fünf <i>(Anna streckt eine volle Hand mit fünf Fingern aus)</i> und sechs <i>(sie streckt den Daumen der rechten Hand aus)</i> und sieben <i>(sie streckt den Zeigefinger der rechten Hand aus)</i>. Sieben! Wie hier, fünf <i>(Anna zeigt auf das Muster der Würfel-Fünf)</i>, sechs <i>(sie tippt mit dem Zeigefinger auf ein Plättchen der Würfel-Zwei)</i>, sieben <i>(sie tippt mit dem Zeigefinger auf das andere Plättchen der Würfel-Zwei.)</i> Sieben!</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 7 | Haupt-<br>lehrkraft: | <p><i>(Die Hauptlehrkraft fragt weiter.)</i> Ok. Ich verstehe! Kannst du sieben Plättchen auch <i>anders</i> ordnen, sodass wir beide sofort sehen wie viele es sind?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 8 | Anna:                | <p><i>(Anna ist verwundert. Sie denkt eine Zeit nach.)</i> Anders? Nein, etwas anderes fällt mir grad nicht ein! <i>(Die Tür öffnet und die Musiklehrkraft kommt in den Klassenraum. Der rechtzeitige</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

**Anna weiß das Zahlbild der Würfelfünf (Abschnitt 2.2.3) und versucht unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ – wie bei den Fingern – weiter zu überlegen. Anna kann die Fünfergliederung, die sie mit den Fingern kennengelernt hat, auf ein anderes Material und auf einen anderen Kontext übertragen (Abschnitt 3.2.2); in diesem Fall auf Plättchen. Sie zeigt damit einiges an Routine und Wissen. Dann zählt sie die Plättchen einzeln dazu, nutzt die Strategie Weiterzählen (Abschnitt 3.2.2), bis sie bei der Sieben ankommt. Anschließend fällt ihr keine weitere Zusammensetzung bzw. Anordnung von sieben Plättchen ein.**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VIII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach folgenden Kriterien eingeschätzt:

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VIII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

X

### **Fehlerkultur und Leistungsbewertung**

Der Hauptlehrkraft *versteht*, dass Anna die Zahl „sieben“ mit der Vorstellung von den figuralen Mustern eines Spielwürfels verbindet (Abschnitt 2.2.3). Sie fordert Anna auf, zu erklären, wie sie bei sieben denkt. Durch die Versprachlichung ihres Zahldenkens in (Zahl-)Worten wird klar, dass das Mädchen über ein unzureichendes Zahlverständnis der „sieben“ verfügt.

**Anna erinnert sich an die „Hauptzeigeweise“ mit den Händen, dennoch zählt sie bei der Würfelfünf in Einerschritten weiter, bis sie bei sieben ankommt. Die Hauptlehrkraft versteht, dass Anna bei „der Sieben“ vermutlich an die *Position* der Zahl denkt (Abschnitt 2.2.3.3). Auf das Nachfragen der Lehrkraft, wonach sie sieben Plättchen auch noch anders, strukturiert legen könnte, überlegt Anna eine Zeit. Es falle ihr keine weitere Möglichkeit der strukturierten Anordnung mit Plättchen ein.**

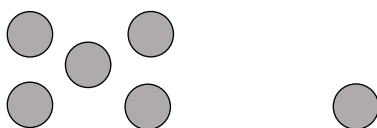
Der pünktliche Wechsel mit der anschließenden Unterrichtsstunde wird eingehalten und die beobachtete Aktivität wird an dieser Stelle beendet. In der darauffolgenden Aktivität arbeiten die Kinder nochmals an derselben Aufgabe. Kinder, die bei der Aufgabe mit Zahlen bis zehn Schwierigkeiten hatten, kommen in den Sitzkreis zur Lehrkraft; Kinder, die bereits „reif“ für größere Anzahlen sind, legen solche am Platz.

Tabelle 47 beschreibt die Aktivitäten und die Aussagen der darauffolgenden Aktivität von Anna und der Hauptlehrkraft von Baustein VIII – strukturiertes Anordnen der Plättchen:

**Tabelle 47**

*Anna (beliebige Anzahl an Plättchen strukturiert legen, dass man sie simultan erkennt) (eigene Darstellung)*

|   |                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Haupt-<br>lehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft bittet Anna nochmals sechs Plättchen so auf den Teppichboden zu legen, dass man auf einen Blick erkennen kann, wie viele es sind.) Anna, gestern haben wir Plättchen so gelegt, dass man schnell erkennen kann, wie viele es sind. Ohne zu zählen. Kannst du mir heute nochmals sechs Plättchen so legen, dass ich nicht zählen muss?</i> |
|---|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



*(Sie sieht, dass Anna sechs Plättchen auf den Teppich gelegt*



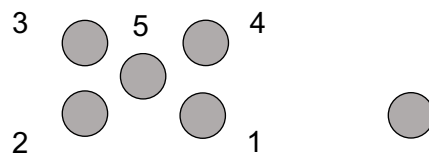
---

hat. Sie legt mit Plättchen eine Würfel-Fünf und eine Würfel-Eins.) Ok. Kannst du mir erklären, welche Zahl du heute gelegt hast und wie wir beide auf einen Blick erkennen können, wie viele es sind?

- 2 Anna: (Anna antwortet selbstbewusst.) Schau, die Aufgaben sind einfach. Wie gestern, hier fünf (zeigt auf das Muster mit fünf Plättchen) hier eins (zeigt auf das Muster mit einem Plättchen). Die Fünf merk ich mir immer und dann zählst du wie bei den Händen (Anna zeigt eine volle Hand in einer Ausstreckbewegung) weiter (sie streckt den Daumen der anderen Hand aus). Fünf, sechs. Sechs. Fertig!

- 3 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft fragt weiter.) So denkst du? Nimm bitte fünf Plättchen von deinem Muster. Überleg wie du das geschickt machen könntest!

- 4 Anna: (Anna überlegt kurz.) Ja.



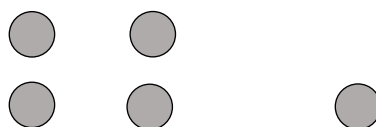
(Anna zählt die Plättchen einzeln von der Würfel-Fünf ab, tippt dabei jedes Plättchen einzeln mit dem Zeigefinger an und nimmt immer ein Plättchen in die Hand.) Eins, zwei, drei, vier, fünf. Aja! Das ist ja die Fünf. Hätt ich gar nicht mehr zählen müssen!

- 5 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft fragt nochmals.) Es ist DIE Fünf? Schüttel die Plättchen in den Händen kräftig durch! Musst du nochmals zählen, um zu wissen wie viele Plättchen es sind?

- 6 Anna: (Anna schüttelt die Plättchen kräftig in beiden Händen. Dann antwortet sie sofort.) Nein, es sind fünf. Das weiß ich ja!

- 7 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft fragt weiter.) Gut. Jetzt schmeiß sie mal auf den Teppich. Kannst du fünf Plättchen auch anders legen, dass wir beide sofort sehen, wie viele es sind? Also nicht die Würfel-fünf bitte.

- 8 Anna: (Anna wirft die Plättchen auf den Teppich und betrachtet die Plättchen. Sie überlegt eine Zeit.) Anders? Hmm...anders. (Anna überlegt weiter.) Ja ich probier's!

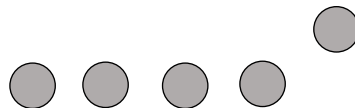


(Anna legt fünf Plättchen als Würfelvier und als Würfeins.) Hier vier (Anna zeigt auf das Muster der Würfelvier und muss sie nicht einzeln zählen.) und hier eins (Anna zeigt auf das Muster der Würfeins.) Vier und eins mehr ist die fünf. Ja das geht auch, oder?

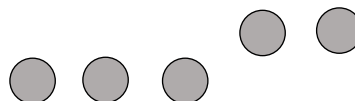
9 Hautlehrkraft: Ok. Und du denkst hier die Würfelvier und die Würfeins, stimmt's? (Die Hautlehrkraft möchte wissen, wie Anna bei der Aufgabe denkt.)

10 Anna: (Anna antwortet in ruhigem Ton und lächelt.) Ja, wir spielen daheim immer „Mensch ärgere dich nicht“ und da muss ich mir immer die Würfel merken. Das ist einfach!

11 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft nimmt die Plättchen und ordnet sie neu an.) Ich find es toll, dass du die Würfelbilder schon so gut kannst. Ich lege jetzt fünf Plättchen einmal ganz anders. Wir müssen die Plättchen nicht immer so wie am Spielwürfel legen. Wir können ganz viele Muster machen.

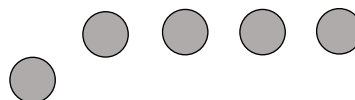


(Die Hauptlehrkraft legt fünf Plättchen in linearer Anordnung. Dann verschiebt sie ein Plättchen nach oben.) Vier (Die Hauptlehrkraft umkreist mit dem Zeigefinger die vier Plättchen.) und eins (sie umkreist das eine Plättchen) ergibt fünf. Es geht aber auch noch anders.



(Die Lehrkraft verschiebt noch ein Plättchen nach oben). Drei (sie umkreist mit dem Zeigefinger die drei Plättchen) und zwei (sie umkreist mit dem Zeigefinger die zwei Plättchen) ergibt fünf. Vier und eins ergibt fünf. Aber auch drei und zwei ergibt fünf. Möchtest du ein Muster mit fünf Plättchen legen, Anna?

12 Anna: Ja!



(Anna verschiebt zwei weitere Plättchen nach oben). Eins und ...

*(Anna macht eine kurze Pause und blickt auf die Plättchen). Eins und ... eins, zwei, drei vier. (Sie zählt die Plättchen einzeln ab und nickt bei jedem Plättchen mit dem Kopf. Dann wiederholt sie nochmals.) Eins und ... vier ist fünf.*

---

### **Zahlen, die vor allem als Position verstanden werden**

Anna ordnet, wie am Vortag, sechs Plättchen als Würfelbilder (Abschnitt 2.2.3) an. So ist sechs für sie eine Würfelfünf und eine Würfeleins. Die Hauptlehrkraft bittet Anna fünf Plättchen *geschickt* wegzunehmen. Auch wenn für uns Erwachsene das Zahlbild der Würfelsechs deutlich in eine Würfelfünf und in eine Würfeleins gegliedert ist, scheint das für Anna wahrscheinlich nicht bewusst. Jedenfalls nutzt sie dieses Wissen beim einzelnen Abzählen der Plättchen nicht. Ihre Aussage, wonach sie die Plättchen nicht mehr hätte zählen müssen, weil es „die Fünf“ sei, zeigt, wie wenig sie bei Zahlen an Anzahlen denkt, sondern an die Position; die fünfte Position in der Zahlwortreihe (Abschnitt 2.2.1).

Einen grundlegenden Lernschritt, nämlich die *Konstanz* einer Anzahl, scheint sie bereits gemacht zu haben: Sie könne die Plättchen in den Händen gut schütteln. Wenn kein Plättchen weg und keines dazukäme, blieben es fünf Plättchen (Abschnitt 2.2.1).

Bei der Aktivität fünf Plättchen strukturiert nicht als Würfelfünf zu legen, wusste sie vermutlich keine andere Strategie und greift auf ihr bekanntes Wissen zurück. Anna legt vier Plättchen als Würfelveier und ein Plättchen als Würfeleins. Auch hier kann sie das tragfähige Zahldenken „fünf besteht aus vier und eins“ nicht anwenden, sondern sie begründet ihr (Zahl-)Denken über die Zahlwortreihe (Abschnitt 2.2.1).

Ihr Wissen über ein Zahlbild ist fest mit den Würfelbildern verbunden. Anna weiß nicht, dass eine Anzahlen von Plättchen *unterschiedlich* strukturiert gelegt werden kann. Das Anordnen der Plättchen als Würfelbilder erklärt sie folgendermaßen: da sie in der Familie gerne „Mensch ärgere dich nicht“ spielen und sie die Zahlbilder auf dem Spielwürfel deswegen kennen würde.

Die Hauptlehrkraft legt weitere Muster mit Plättchen. Sie legt die Plättchen in linearer Anordnung, verschiebt Plättchen nach oben und erklärt ihr (Zahl-)Denken mit Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen. Sie bittet Anna ein weiteres Muster zu finden.

Anna legt ein weiteres Muster mit fünf Plättchen. Sie verschiebt zwei weitere Plättchen nach oben. Sie kann die Zahl-Teile nur *zählend* ermitteln. So zählt sie jedes der vier Plättchen einzeln ab und nickt bei jedem Plättchen mit dem Kopf (Abschnitt 2.2.1).

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VIII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VIII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach folgenden Kriterien eingeschätzt:

**Tabelle 48**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VIII nach den Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  |                                             |                                         | X                                        |                               |

### ***Fehlerkultur und Leistungsbewertung***

Der Hauptlehrkraft *versteht*, dass Anna in dieser Szene Schwierigkeiten hat, eine Anzahl an Plättchen anders als Würfelbilder strukturiert zu legen. Anna kann Plättchen wie die Muster auf einem Spielwürfel anordnen (Abschnitt 2.2.3) und erkennt die Muster „auf einen Blick“. Sie kann aber Zahlen nicht als Zusammensetzungen denken, sondern zählt die Positionen in der Zahlwortreihe weiter (Abschnitt 2.2.1).

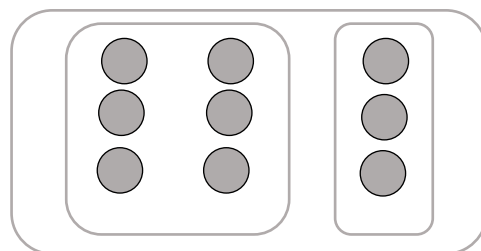
Um ein tragfähiges Verständnis von Zahlen als Anzahlen aufzubauen, ist es ratsam bei Kindern wie Anna, die *Strukturen* von Mengen zu erkunden. Eine Anzahl an Plättchen kann unterschiedlichst angeordnet werden. Werden Plättchen bis vier Elemente strukturiert angeordnet beziehungsweise verschoben, können die Teile *quasi* „auf einen Blick“ erfasst werden (Abschnitt 2.2.3). So tut es die Hauptlehrkraft. Sie bittet Anna die Plättchen anders anzuordnen als die Zahlbilder auf einem Spielwürfel. Die Hauptlehrkraft zeigt ihr durch Legen der Plättchen in linearer Anordnung, dass Plättchen auch ganz anders gelegt werden können als die Würfelbilder. Im Sinne dieser Dimension Steinwegs (2010) braucht das Kind eine individuelle Rückmeldung, wenn es gegebenenfalls (noch) ein unzureichendes Verständnis bei einer Aufgabe zeigt.

**Annas Versprachlichung ihrer Lösung zum Muster „eins und ... vier ist fünf“ ist mit ihrem Zahldenken logisch nachvollziehbar. Sie kann bei Zahlen noch nicht verschiedene Anzahlen mitdenken (bei einzelnen Fingerdarstellungen schon, bei Plättchen nicht!), sondern denkt bei fünf an die figuralen Würfelbilder (Abschnitt 2.2.3). Überlegungen in diese Richtung, wonach auf ein Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel zu achten ist, sind nicht ausdrücklich in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ verankert. Diese werden in Abschnitt 9.5 bei der Weiterentwicklung von Baustein VIII berücksichtigt. Demzufolge ist es bei Lernenden wie Anna ratsam, ein Teile-Ganzes-Denken von Fingerhandlungen zu sichern, bevor dieses Denken in Zahlganzen und Zahlteilen mit einem anderem arithmetischem Material durchgeführt wird.** Lernende wie Julia hingegen, nachfolgend beschrieben, die ein Teile-Ganzes-Denken bei Fingerdarstellung abgesichert haben, übertragen dieses Wissen auf ein anderes Material wie Plättchen.

**Tabelle 49**

*Julia (beliebige Anzahl an Plättchen strukturiert legen, dass man sie simultan erkennt) (eigene Darstellung)*

- |   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft kommt zu Julia, um sie in ihrer Arbeit mit den Plättchen zu beobachten. Sie sieht, dass Julia neun Plättchen strukturiert auf den Tisch gelegt hat. Sie legt mit Plättchen eine Würfel-Sechs und mit Abstand drei Plättchen.)</i> |
|---|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

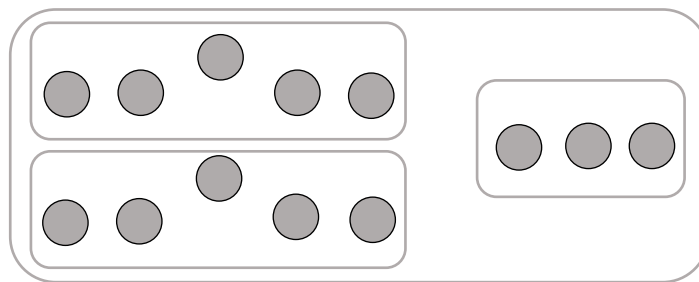


Kannst du mir erklären, Julia, welche Anzahlen du gelegt hast und wie wir beide auf einen Blick erkennen können, wie viele es sind?

- |   |        |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Julia: | <i>(Julia antwortet zügig.) Ja. Sechs (Julia umkreist am Muster mit dem Zeigefinger die Würfelsechs) und drei (sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger die drei Plättchen) noch dazu sind neun (Julia umkreist am Muster mit dem Zeigefinger alle Plättchen). Ist ja easy!</i> |
|---|--------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- 3    Hauptlehr-    Ja genau Julia, super beschrieben. So wie du die Plättchen ge-  
kraft:    legt hast, können wir sie beide auf einen Blick erkennen. *(Die Hauptlehrkraft macht eine kurze Redepause.)* Ich weiß, dass du Zahlen bis zehn bereits so legen kannst, dass wir sie beide mit einem Blick erfassen können. Und du kannst das bereits in Worten erklären. Ich möchte jetzt mit dir etwas probieren. Ich sage dir eine Zahl, die größer ist als zehn und du versuchst sie mit Plättchen zu legen. Ich weiß, das haben wir noch nie gemacht, aber wir versuchen das jetzt einfach. Los geht's! Lege dreizehn Plättchen so, dass wir beide mit einem Blick ... *(die Hauptlehrkraft korrigiert sich selbst)* ... ah nein, mit zwei Blicken erkennen können, wie viele es sind.

- 4    Julia:    Hmm ... dreizehn Plättchen. *(Julia überlegt eine Weile.)* Dreizehn. Das ist eine große Zahl! *(Julia überlegt weiter.)* Ich hab was. So geht's! Warte!



- 5    Hauptlehr-    *(Die Hauptlehrkraft sieht, dass Julia dreizehn Plättchen strukturiert legt. Sie legt fünf Plättchen in linearer Anordnung und verschiebt ein Plättchen nach oben. Dann legt sie dasselbe Muster nochmals unterhalb, fünf Plättchen linear und eins nach oben. Sie legt weitere drei Plättchen linear.)* Toll, einfach toll hast du das gemacht! Es sind dreizehn Plättchen. Ich sehe es mit zwei ... oder drei Blicken. Wie hast du geschaut?
- 6    Julia:    *(Julia lächelt und blickt auf die Plättchen.)* Schau, es sind fünf *(sie zeigt mit dem Zeigefinger am Muster, wie sie fünf Plättchen erkennt)* und fünf *(sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger wieder fünf Plättchen)* und drei *(sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger drei Plättchen)* noch dazu sind dreizehn. Fünf und fünf sind zehn und drei sind dreizehn. Dreizehn! *(Julia umkreist am Muster alle Plättchen mit dem Zeigefinger.)*
- 7    Hauptlehr-    Toll. Einfach toll hast du das Muster gelegt und auch in Worten  
kraft:    erklärt. Bravo!
-

### **Strukturiertes Anordnen der Plättchen, das das Teile-Ganze-Denken berücksichtigt**

Julia kann neun Plättchen strukturiert nach dem Muster der Würfelsechs legen und gliedert „noch drei dazu“. Sie kann in (Zahl-)Worten beschreiben, wie sie mit Zahl-Ganzen und Zahl-Teilen denkt, ohne die Anzahlen der beiden Teile einzeln abzuzählen: „Sechs und drei noch dazu sind neun. Ist ja easy!“ Sie findet die Aufgabe einfach.

Bei der Aktivität dreizehn Plättchen strukturiert zu legen, (eine Anzahlen mit mehr als zehn Plättchen strukturiert zu legen, wurde in der Klasse noch nicht thematisiert!) geht sie so vor: Sie legt fünf Plättchen linear in einer Reihe und verschiebt ein Plättchen nach oben; dann legt sie nochmals dasselbe Muster und gliedert noch drei Plättchen dazu. Sie zeigt *gar kein* Zählverhalten und erklärt: „fünf und fünf sind zehn und drei noch dazu sind dreizehn“. Julia zeigt am Muster, wie sie es in zwei Reihen mit je fünf linearen Plättchen und „noch drei dazu“ gliedert. Julia hat die Anzahl der Teile – unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ – unmittelbar (ohne abzuzählen) erfasst (Abschnitt 2.2.2).

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VIII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach dem Kriterium „Aufgabenqualität/Problemstellungen“ eingeschätzt:

**Tabelle 50**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Bei der Beobachtung von Julias Aktivität neun Plättchen strukturiert zu legen und in (Zahl-)Worten zu beschreiben, erkennt die Hauptlehrkraft, dass es lohnt, Aktivitäten zur

strukturierten Plättchenanordnung anzuregen, die den Zahlenraum zehn übersteigen. Dazu wird auch seitens der Fachdidaktik geraten (Abschnitt 3.2.2).

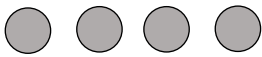
Im Sinne der „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) stellt die Hauptlehrkraft Julia die für sie kognitive herausfordernde Aufgabe, („dreizehn. Das ist eine große Zahl!“) dreizehn Plättchen strukturiert zu legen, ohne ihr konkrete Hilfen zur Lösung zu geben. Julia versucht die für sie vermeintlich schwere Aufgabe eigenständig zu lösen.

Durch diese Öffnung des Zahlenraums (Abschnitt 2.2) zeigt sich, dass Julia eine (und dazu eine eindrucksvolle!) Möglichkeit *selbstständig* findet, dreizehn Plättchen strukturiert zu legen. Obwohl sie die Fünfergliederung im strukturierten Zehnerfeld noch nicht kennengelernt zu haben scheint, zeigt sie einiges an Wissen. So legt sie (vielleicht bereits wissend?) zwei Reihen mit fünf Plättchen in linearer Anordnung und begründet ihr Denken auch mit der *Fünf*: „fünf und fünf sind zehn und drei noch dazu sind dreizehn“.

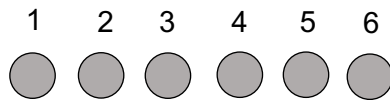
Am Ende der Beschreibungen dieses Bausteins wird Luis beim (strukturierten) Anordnen der Plättchen dargestellt. Tabelle 51 beschreibt die Aktivitäten und die Aussagen von Luis und der Lehrkraft.

**Tabelle 51**

*Luis (beliebige Anzahl an Plättchen strukturiert legen, dass man sie simultan erkennt) (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                         |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | (Die Hauptlehrkraft sieht, dass Luis vier Plättchen in linearer Anordnung auf den Tisch legt.) Luis, kannst du mir erklären, wie wir mit einem Blick die Plättchen erkennen können, sodass wir uns das Zählen ersparen? |
|   |                 |                                                                                                                                      |
| 2 | Luis:           | (Luis antwortet sicher.) Schau, das sieht man einfach. Es sind vier (Luis umkreist die Plättchen mit dem Zeigefinger.) Du musst gar nicht zählen.                                                                       |
| 3 | Hauptlehrkraft: | Ja genau, Luis. Wir können Plättchen wie hier vier mit einem Blick erkennen, ohne diese zählen zu müssen. (Die Hauptlehrkraft fragt weiter.) Kannst du auch sechs Plättchen so legen, ohne dass wir zählen müssen?      |
| 4 | Luis:           | (Luis überlegt nicht lang.) Logisch!                                                                                                                                                                                    |





(Luis beginnt die Plättchen zu zählen. Dazu tippt er mit dem Zeigefinger jedes Plättchen an.) Eins, zwei, drei, vier. Vier! (Er nimmt noch ein weiteres Plättchen und lässt den Zeigefinger auf dem zuletzt gezählten Plättchen liegen.) Fünf! (Luis gibt den Zeigefinger auf das fünfte Plättchen und nimmt ein weiteres Plättchen.) Sechs (Luis tippt das sechste Plättchen an.) Sechs! Siehst du, sechs!

5 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft beobachtet sein Vorgehen und fragt nochmals.) Du kannst mit einem Blick erkennen, wie viele Plättchen es sind?

6 Luis: (Luis antwortet sofort.) Ja klar, es sind sechs. Siehst du ja!

7 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft nimmt die Plättchen und ordnet sie neu an.) Schau mal, jetzt lege ich eine Anzahl an Plättchen. Ich bin gespannt, ob wir sie beide erkennen, ohne zu zählen. (Sie reiht acht Plättchen in linearer Darstellung; fünf blau, drei rot. Nach fünf Plättchen lässt sie einen kleinen Abstand.) Wie viele sind es jetzt?



8 Luis: (Luis starrt auf die Plättchen.) Uii ... das sind ganz schön viele! Ok, warte! (Luis zählt die Plättchen einzeln ab und tippt dabei jedes Plättchen mit dem Zeigefinger an.) Eins, zwei, drei, vier, fünf ... fünf! (Er macht eine kurze Pause.) Sechs, sieben, acht. Acht!

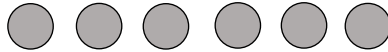
9 Hauptlehrkraft: Ok. Aber jetzt hast du zählen müssen, damit du weißt, wie viele Plättchen es sind, oder?

10 Luis: (Luis antwortet unsicher.) Ja, ich wollt nochmals sicher gehen, dass es so viele sind.

11 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft schiebt alle Plättchen zur Seite.) Wir probieren es nochmals. Lege bitte sechs Plättchen so, dass wir beide erkennen, wie viele es sind. Aber ohne zu zählen dieses Mal!

12 Luis: (Luis senkt den Blick. Er betrachtet eine Weile den Plättchenhaufen. Die Hauptlehrkraft beobachtet, wie Luis die Plättchen einzeln nimmt und sie linear anordnet. Wieder geht er ähnlich vor. Er legt sechs Plättchen in einer Reihe, zählt jedes Plättchen

*einzel*n ab, und *tippt* dazu jedes Plättchen mit dem Zeigefinger an.) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. (Verlegen schaut er die Hauptlehrkraft an.) Passt, oder? Also ich seh' sechs Plättchen und weiß es auch.



- 13 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft schiebt alle Plättchen zur Seite). Ok, versuchen wir noch eine Zahl. Leg bitte sieben Plättchen so, dass wir beide erkennen, wie viele es sind.

- 14 Luis: (Luis überlegt. Er schaut die Hauptlehrkraft an, dann den Plättchenhaufen und wieder die Hauptlehrkraft. Die Hauptlehrkraft beobachtet, wie Luis wieder die Plättchen einzeln nimmt und sie linear anordnet. Wieder geht er ähnlich vor. Er legt sieben Plättchen in einer Reihe, zählt jedes Plättchen einzeln ab, und tippt dazu jedes Plättchen mit dem Zeigefinger an.) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. Passt. Sieben!



- 15 Hauptlehrkraft: (Die Hauptlehrkraft fragt nochmals nach.) Du weißt es gerade deshalb, weil du sie gezählt hast, oder?

- 16 Luis: Ja, zählen hilft mir immer!

### **Zahlen, die nur zählend ermittelt und als Positionen verstanden werden**

Luis legt vier Plättchen in linearer Anordnung und weiß, ohne die Plättchen erneut abzuzählen, wie viele es sind. Er *kann* vier Plättchen simultan erkennen (Abschnitt 2.2).

Bei der Aufgabe sechs Plättchen strukturiert anzuordnen, legt er Plättchen in linearer Anordnung und geht dabei *zählend* vor. Beim Abzählen wendet er die erforderlichen Zählprinzipien an (Abschnitt 2.2.1). So zählt er jedes Plättchen einzeln und tippt jedes mit dem Zeigefinger an. Luis könne sechs und sieben Plättchen auf einen Blick erkennen (gerade deswegen, weil er sie vorher gezählt hat!).

Die Hauptlehrkraft reiht acht Plättchen mit Fünfer-Struktur in linearer Anordnung an und bittet Luis zu erkennen, wie viele es sind, ohne die Plättchen tatsächlich zu zählen. Wieder kann Luis die Anzahl der Plättchen nur bestimmen, indem er sie *einzel*n abzählt. Bei den Aufgaben, sechs und sieben Plättchen zu legen, geht er in der gleichen Art und

Weise vor. Einzelne zählt und legt er die Plättchen in linearer Anordnung. Luis wüsste und sähe die Anzahl der Plättchen, weil er sie abgezählt habe. Zählen helfe ihm immer!

Luis beschreibt in (Zahl-)Worten, woran er bei sechs und sieben vermutlich denkt. Mit den Zahlen „sechs“ und „sieben“ verbindet er vor allem die Vorstellung von der Ziffer „6“ oder der Ziffer „7“. Er versteht Zahlen als *Positionen* in der Zahlwortreihe, bspw. als siebente Position, die vor acht und nach sechs kommt (Abschnitt 2.2.3.3). Im vorgehenden Baustein VII hat Luis nach und nach erste Zahlzusammensetzungen unter Nutzung der Hauptzeigeweise mit den Fingern verstanden. So konnte er sieben als „fünf ... und zwei“ mit den Fingern zeigen und begründen. Dieses Wissen konnte er nicht auf das Erkennen der acht Plättchen als „fünf ... und drei“ übertragen und nützen.

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VIII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VIII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt:

**Tabelle 52**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VIII anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|

X

### **Fehlerkultur und Leistungsbewertung**

Auf ein Teile-Ganzes-Denken ist bei Baustein VIII besonders zu achten, andernfalls greifen Kinder wie Luis auf ihre bereits bekannten Strategien des Zählens (Abschnitt 2.2.1) und des Wiedererkennens der figuralen Muster zurück (Abschnitt 2.2.3). Im Sinne dieser Dimension Steinwegs (2010) braucht das Kind eine individuelle Rückmeldung, wenn es gegebenenfalls (noch) ein unzureichendes Verständnis bei einer Aufgabe zeigt. In dieser Sequenz versteht die Hauptlehrkraft, dass Luis Schwierigkeiten hat Anzahlen strukturiert zu legen. Ihre mehrmaligen Aufforderungen, Anzahl an Plättchen strukturiert zu legen

(vermutlich weitgehend in der Hoffnung, dass das mehrmalige Legen die gewünschte Einsicht bringt), verdeutlicht die Schwierigkeiten bei der Aufgabe: Luis kann die Fünferstruktur von acht Plättchen (fünf blau, drei rot) in linearer Darstellung nicht nützen. Auf die Frage, ob er, ohne zu zählen, wüsste, wie viele Plättchen es sind, zählt er sie dennoch nochmals einzeln ab. *Zählend* geht er auch bei den weiteren Aktivitäten vor.

Das wiederholte Legen der einzelnen Plättchen bringt nicht die gewünschten Zahl-Einsichten. Vielmehr nützt sie Luis als Zählhilfe. Er kann seine „Aufgabe“ mithilfe der Plättchen zählend bewältigen. Das Ziel der Aufgabe bestand aber nicht darin, zu zählen wie viele Plättchen es sind, sondern eine Plättchenanzahl strukturiert so zu legen, dass das Zählen überflüssig wird. Dieses Wissen hat Luis noch nicht. Überlegungen in diese Richtung wurden in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ zu wenig berücksichtigt und werden in Abschnitt 9.5 bei der Weiterentwicklung von Baustein VIII mitgedacht.

**Bei Kindern wie Luis lohnt es, das Teile-Ganzes-Denken von Fingerhandlungen** (sie Beantwortung im Rahmen der Forschungsfrage F 3.2.2) **zu sichern, bevor ein Wechsel des Materials erfolgt.** An dortiger Stelle wird gezeigt, dass Luis im vorangehenden Baustein VII die Zusammensetzungen der Zahl acht und der Zahl sieben mit Fingern noch nicht automatisiert hat.

#### **9.4.2 Innermathematische Struktur**

Zur Kategorie *Innermathematische Struktur* werden die Subkategorien Zuordnung, Anzahlerfassendes Zählen und Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen zugeordnet.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.2:

**F 2.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte*?**

Verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* ( $N = 395$ ) zeigen sich in 31,6 % der Szenen der Kategorie Innermathematische Struktur Probleme in der Umsetzung. Tabelle 53 zeigt, dass 2,8 % der Szenen Baustein II, 1,0 % der Szenen Baustein III, 2,8 % der Szenen Baustein IV, 1,0 % der Szenen Baustein V, 3,3 % der Szenen Baustein VI, 3,8 % der Szenen Baustein VII, 6,1 % der Szenen Baustein VIII, 2,0 % der Szenen Baustein IX, 2,0 % der Szenen Baustein XII und 6,8 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkraft bei der Umsetzung* ( $N = 301$ ) gibt es in 41,5 % der Szenen Schwierigkeiten. Davon können 3,7 % der Szenen Baustein II, 1,3 % der Szenen Baustein III, 3,7 % der Szenen Baustein IV, 1,3 % der Szenen Baustein V, 4,3 % der Szenen Baustein VI, 5,0 % der Szenen Baustein VII, 8,0 % der Szenen Baustein VIII, 2,7 % der Szenen Baustein IX, 2,7 % der Szenen Baustein XII und 9,0 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

**Tabelle 53**

*Häufigkeit Innermathematischer Struktur (eigene Darstellung)*

| Kategorie                                                      | Innermathematische Struktur |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                               | 125                         |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein II             | 11                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein III            | 4                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IV             | 11                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V              | 4                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI             | 13                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VII            | 15                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII           | 24                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IX             | 8                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XII            | 8                           |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XIII           | 27                          |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )       | 31,6                        |
| - Prozent bezogen auf Baustein II                              | 2,8                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein III                             | 1,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                              | 2,8                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                               | 1,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                              | 3,3                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                             | 3,8                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                            | 6,1                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein IX                              | 2,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                             | 2,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                            | 6,8                         |
| 1.11.                                                          |                             |
| 1.12.                                                          |                             |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie                   |                             |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung ( $N = 301$ ) | 41,5                        |
| - Prozent bezogen auf Baustein II                              | 3,7                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein III                             | 1,3                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                              | 3,7                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                               | 1,3                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                              | 4,3                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                             | 5,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                            | 8,0                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein IX                              | 2,7                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                             | 2,7                         |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                            | 9,0                         |

#### 9.4.2.1 Kategorie Zuordnung

Im nachfolgenden Abschnitt steht die Beantwortung der Frage, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden bei der *Zuordnung* der Kategorie Innermathematische Struktur zeigen.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.2.1:

**F 2.2.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Zuordnung einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?**

##### *Häufigkeit der Kategorie Zuordnung*

Wie in Tabelle 54 dargestellt, zeigen sich verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* in 4,3 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Zuordnung. Davon gehören 1,0 % der Szenen zu Baustein V, 3,3 % der Szenen zu Baustein VI.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 5,6 % der Szenen Probleme. Davon werden 1,3 % der Szenen dem Baustein V und 4,3 % der Szenen dem Baustein VI zugeschrieben.

**Tabelle 54**

*Häufigkeit von Zuordnung (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                                      | Zuordnung |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                                                  | 17        |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V                                 | 4         |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI                                | 13        |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )                          | 4,3       |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                                              | 1,0       |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                                             | 3,3       |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie Probleme der Lehrkraft ( $N = 301$ ) | 5,6       |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                                              | 1,3       |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                                             | 4,3       |

Nun folgend wird exemplarisch ein Transkriptausschnitt aus Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen (Abschnitt 6.2) – beschrieben. Wie in dieser Szene von Baustein V dargestellt, ist es dringend zu empfehlen, die Zuordnung als Grundlage für Anzahlvergleiche bei Lernenden zu sichern. Vor diesem Hintergrund wird eine Sequenz mit denselben Kindern wie in Tabelle 33 betrachtet. Aufgrund der dort dargestellten Schwierigkeiten von Felix und Chiara beim Zuordnen ohne zu zählen (Abschnitt 9.4.1.1: Kategorie *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1), macht die Stützlehrkraft mit diesen Kindern – im Anschluss an eine gemeinsame Nachbesprechung – in der darauffolgenden Einheit eine einfachere Variante in Partnerarbeit.

**Tabelle 55**

*Baustein V – „Vergleichen“ ohne und eventuell auch mit zählen (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3 | Stützlehrkraft: | Ihr habt hier Bausteine. Eure Aufgabe ist: Einer legt einen weißen Stein auf den Tisch, der andere einen roten daneben, dann wieder das erste Kind einen weißen Stein und das zweite einen roten daneben. Ihr baut sozusagen zwei Türme. Chiara, beginn du. |
| 4 | Chiara:         | Jo. <i>(Sie nimmt einen weißen Stein aus der Kiste und gibt ihn auf den Tisch.)</i> Jetzt du!                                                                                                                                                               |
| 5 | Felix:          | Ok. <i>(Felix nimmt einen roten Stein aus der Kiste und legt ihn neben den weißen Stein.)</i> (...)                                                                                                                                                         |
| 7 | Chiara:         | Mein Turm ist ein Stein kleiner als der rote. Bei dem Turm hätte noch ein Teil gefehlt, dann wäre er gleich hoch. <i>(Das Mädchen zeigt beim Sprechen auf die jeweilige Reihe.)</i>                                                                         |
| 8 | Stützlehrkraft: | Aha. Super erkannt. Also es sind nicht gleich viele rote und weiße Steine. Das kann man an der Höhe der beiden Türme erkennen. Felix, welcher Turm hat mehr Steine?                                                                                         |

Auch im folgenden Transkriptausschnitt aus Baustein VI – „Plättchen werfen“ gilt es die Zuordnung als Grundlage für Anzahlvergleiche bei Lernenden zu sichern.

**Tabelle 56**

*Baustein VI – „Plättchen werfen“ (eigene Darstellung).*

|    |                 |                                                                                                                                                                                     |
|----|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 13 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft nimmt die blauen Plättchen und ordnet sie in einer Reihe.)</i> Anna hat sechs blaue Plättchen. Kannst du jedem blauen Plättchen ein rotes von dir dazulegen? |
| 14 | Rosa:           | Ja. <i>(Rosa ordnet in einer zweiten Reihe jedem blauen Plättchen ein rotes zu.)</i>                                                                                                |



- 15    Haupt-  
       lehrkraft:    Wer von euch beiden hat mehr Plättchen? *(Die Hauptlehrkraft zeigt mit dem*  
 16    Rosa:         *Finger auf die obere Reihe der Plättchen, dann auf die untere Reihe.)*  
 17    Haupt-        Anna.  
       lehrkraft:    Super. Und um wie viele Plättchen hat Anna mehr als du? *(Die Lehrkraft*  
 18    Rosa:         *zeigt mit dem Zeigefinger auf beide Reihen.)*  
                       Sechs? *(Rosa ist unsicher in der Beantwortung.)*

Die Annahme, wonach es wichtig ist, dass die Lernenden die Eins-zu-Eins-Zuordnung als Grundlage des Anzahlvergleiches verstehen (Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 6.2), und in weiterer Folge auch solche Zuordnungen nutzen sollen, um herauszufinden, ob es gleich oder mehr oder weniger sind, wird nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf die *Zuordnung* der Kategorie Innermathematische Struktur betrachtet.

Verbunden mit der Subkategorie *Zuordnung* werden Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C aus Baustein V und Unterrichtsbeobachtungen der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft D und Hauptlehrkraft E aus Baustein VI beobachtet. Nachfolgend wird exemplarisch eine Unterrichtsbeobachtung einer dieser Lehrkräfte aus Baustein V beschrieben; an dieser Stelle steht die bevorzugte Bezeichnung Stützlehrkraft. In der ausgewählten Unterrichtsbeobachtung aus Baustein VI wird stellvertretend die Bezeichnung Hauptlehrkraft verwendet.

Dabei steht die Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.1 im Interesse:

**F 3.2.1: Wird und – falls ja – wie wird die *Zuordnung* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.2.1 zu beantworten, werden im Folgenden die Beobachtungen zu Unterrichtsbaustein V und Unterrichtsbaustein VI im Ganzen dargestellt. Vorangehende Aktivitäten mit den beiden Kindern aus Baustein V sind in Abschnitt 9.4.1.1 dargestellt.

Ausgehend von Aufgaben, bei denen die Kinder bei Vergleichen nicht zählen müssen – bspw. durch geeignete Arbeitsaufträge im (Schul-)Alltag – wird mit allen Kindern der Zusammenhang zwischen gleich viel, mehr und weniger herausgearbeitet (Abschnitt 2.2.2).

Bei den folgenden Aktivitäten aus **Baustein V** (Abschnitt 6.2) arbeiten die Kinder Felix und Chiara mit Bausteinen in zwei unterschiedlichen Farben. Ein Kind legt einen roten Stein auf den Tisch, ein anderes Kind einen weißen daneben, dann wieder das erste Kind einen roten, das zweite einen weißen daneben, usw. Auf diese Weise entstehen – ohne dass gezählt wird – zwei Türme mit Bausteinen, eins-zu-eins nebeneinander angeordnet.

**Tabelle 57**

*Chiara und Felix („Gleichmachen“ ohne zu zählen – Anzahlvergleiche mit Bausteinen) (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Felix:          | <i>(Felix zeigt sich begeistert von den Bausteinen. Er kennt sie vom Spiel zu Hause. Bestimmt nennt er seine Farbwahl.)</i> Ich nehme die roten, das ist meine Lieblingsfarbe.                                                                                                                                |
| 2 | Chiara:         | <i>(Chiara ist einverstanden mit der Farbwahl.)</i> Gut, ich die weißen.                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3 | Stützlehrkraft: | Ihr habt hier Bausteine. Eure Aufgabe ist: Einer legt einen weißen Stein auf den Tisch, der andere einen roten daneben, dann wieder das erste Kind einen weißen Stein und das zweite einen roten daneben. Ihr baut sozusagen zwei Türme. Chiara, beginn du.                                                   |
| 4 | Chiara:         | Jo. <i>(Sie nimmt einen weißen Stein aus der Kiste und gibt ihn auf den Tisch.)</i> Jetzt du!                                                                                                                                                                                                                 |
| 5 | Felix:          | Ok. <i>(Felix nimmt einen roten Stein aus der Kiste und legt ihn neben den weißen Stein.)</i> (...)                                                                                                                                                                                                           |
| 6 | Stützlehrkraft: | <i>(...) (Die Kinder verfahren mit der Übung so weiter, bis kein Stein mehr in der Kiste ist und sie zwei ungleich hohe Türme gebaut haben. Der rote Turm ist um einen Stein größer als der weiße Turm. Die Lehrkraft fragt die Kinder.) Sind es gleich viele rote und weiße Steine? Woher wisst ihr das?</i> |
| 7 | Chiara:         | Mein Turm ist ein Stein kleiner als der rote. Bei dem Turm hätte noch ein Teil gefehlt, dann wäre er gleich hoch. <i>(Das Mädchen zeigt beim Sprechen auf die jeweilige Reihe.)</i>                                                                                                                           |

- 8 Stützlehrkraft: Aha. Super erkannt. Also es sind nicht gleich viele rote und weiße Steine. Das kann man an der Höhe der beiden Türme erkennen. Felix, welcher Turm hat mehr Steine?
- 9 Felix: Meiner. *(Der Junge zeigt sofort und sichtlich stolz auf den roten, höheren Turm.)*
- 10 Stützlehrkraft: Ja, super. Sehr gut. Und jetzt versuchen wir die Steine zu zählen. Dazu gebt ihr immer einen von eurer Reihe runter, zählt ihn und legt ihn zur Seite. Los geht's!
- 11 Chiara: Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. *(Chiara beginnt zu zählen, sie macht keine Zählfehler bei der Zahlwortreihe. Sie gibt immer einen Stein runter, zählt jeden Stein einzeln und legt ihn dann zur Seite.)*
- 12 Felix: *(Felix macht die Übung gleich nach. Auch ihm gelingt das Abzählen ohne Fehler.)* Eins, zwei, drei, vier fünf, sechs, sieben. Ich hab sieben!
- 13 Stützlehrkraft: Gut. Also du hast sechs Steine und du hast sieben, Felix. Es sind also nicht gleich viele rote und weiße Steine. Nochmal: Wer hat mehr Steine?
- 14 Felix: *(Felix zeigt sich demonstrativ sicher.)* Ich hab mehr!
- 

### **„Gleichmachen“ ohne Zählen**

Chiara und Felix können im Vergleich zur schwierigeren Variante der Zuordnung mit Plättchen (Abschnitt 9.4.1.1: Kategorie *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) die einfachere Variante der *Zuordnung* von Bausteinen lösen (Abschnitt 2.2.2). Dazu legen sie abwechselnd je einen roten und einen weißen Stein nebeneinander, bauen zwei Reihen, bis keine Steine mehr in der Kiste übrig sind.

Auf die gestellten Fragen der Stützlehrkraft „Sind es gleich viele rote und weiße? Woher wisst ihr das?“ antwortet Chiara, dass es nicht gleich viele rote und weiße Steine seien, weil ihr Turm kleiner als der rote Turm von Felix ist. Es hätte ihr noch ein Stein gefehlt, dann wären sie gleich hoch. Auf die Frage der Stützlehrkraft an Felix gerichtet, welcher Turm mehr Steine habe, kann er richtig antworten, dass seiner höher sei und er somit mehr Steine habe.

**Es wird in dieser Szene nicht klar deutlich, ob die Kinder das Zuordnen (Abschnitt 2.2.2) als Mittel des Anzahlvergleiches deutlich erkannt haben, da die Stützlehrkraft im Sinne der Imitation sehr klar formulierte und vorgegebene Rezepte nutzte. Beide Kinder können zwar auf Anleitung Türme bauen, die Frage, welcher höher**

**sei, richtig beantworten und den Schluss richtig ziehen, dass im höheren mehr Steine sind.**

Dennoch wäre an dieser Stelle eine, oder mehrere zusätzliche Aktivitäten wünschenswert gewesen, um beurteilen zu können, dass die Kinder Zuordnen als Mittel des Anzahlvergleiches nicht nur erkannt, sondern auch in weiteren Aktivitäten umsetzen können. Dazu könnte die Stützlehrkraft die Kinder zwei Reihen in Eins-zu-Eins-Anordnung bauen lassen: gleich viele Radiergummis und Spitzer, gleiche viele Bücher wie Hefte ... und bei jeder Aktivität sollten die Kinder verstehen, dass die Eins-zu-Eins-Zuordnung eine Möglichkeit ist um „gleich viel“ herzustellen. Weiterführend könnten die Kinder zum Beispiel von den Radiergummis, ohne zu zählen (also durch Eins-zu-eins-Vergleich), um einen mehr (um einen weniger) hinlegen als von den Spitzern.

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein V im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein V beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ eingeschätzt.

**Tabelle 58**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein V anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

In der vorangegangenen Aktivität zu Baustein V (Abschnitt 9.4.1.1: Kategorie *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) wird mit der Stützlehrkraft in einer gemeinsamen Nachbesprechung reflektiert, dass das Zuordnen ohne Zählen, im Sinne der kognitiven Herausforderung, für beide Kinder noch zu schwierig ist (Abschnitt 2.2.2).

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ wurde beschrieben, dass das Zuordnen als Möglichkeit von Anzahlvergleichen zu sichern ist. **Die einfachere Variante mit Bausteinen scheint vor allem Felix sichtlich zu motivieren. Durch gezielte Fragen der Stützlehrkraft „Sind es gleich viele rote und weiße Steine? Woher wisst ihr das?“ sollen die Kinder angeregt werden, ihre Entdeckungen zu versprachlichen.** Die Stützlehrkraft versucht beide Kinder gleichermaßen einzubinden, indem sie zuerst Chiara ihre Entdeckung erklären lässt und dann nochmals Felix um seine Entdeckungen bittet.

Anschließend fordert die Stützlehrkraft die Kinder auf, ihre Steine zu zählen. Dazu sollen sie immer einen Stein von ihrem Turm geben, zählen und zur Seite legen. Beide Kinder zählen die Anzahl der Steine. Beiden Kindern passieren (im Gegensatz zur vorangegangenen Übung, wie oben dargestellt) *keine* Zählfehler (Abschnitt 2.2.1). Es werden keine Zahlwörter ausgelassen oder doppelt genannt. Auch auf die Frage „Wer hat mehr Steine?“ kann Felix sicher antworten, dass er mehr habe als Chiara.

Folgend werden Beobachtungen zu den Erstklässlerinnen Anna und Rosa aus **Baustein VI** – „Resultatives Zählen“ (Abschnitt 6.2) – beschrieben, die gemeinsam an der Spielvariante „Plättchen werfen“ in Partnerarbeit arbeiten. Bei dieser Spielvariante bekommen die Kinder als Spielerpaar Plättchen. Beide Spieler ordnen ihre Plättchen als Reihe und achten dabei auf die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung. Dieses „Eindeutigkeitsprinzip“ von Gelman und Gallistel (1986) wird bei dieser Aktivität zwischen Plättchen hergestellt. Wenn jedem roten Plättchen genau ein blaues Plättchen zugeordnet werden kann, sind gleich viel rote wie blaue Plättchen (Abschnitt 2.2.1).

**Tabelle 59**

*Rosa und Anna („Plättchen werfen“) (eigene Darstellung)*

---

|   |       |                                                                                                                                                                                |
|---|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Anna: | Ich mach da jetzt zwei so. <i>(Anna nimmt die geworfenen Plättchen und ordnet sie farblich in zwei Reihen an. Jedem roten Plättchen wird paarweise ein blaues zugeordnet.)</i> |
| 2 | Rosa: | <i>(Rosa nimmt ihre roten Plättchen von der unteren Reihe weg.)</i> Ich nehm jetzt meine und zähle sie. Eins, zwei, drei, vier. Vier. Wie viele hast du?                       |
| 3 | Anna: | <i>(Anna nimmt ihre Plättchen und zählt sie in Zweierschritten ab.)</i> Zwei, vier, sechs. Sechs.                                                                              |
| 4 | Anna: | Wir können das aber anders machen, schau! <i>(Anna nimmt nochmals alle Plättchen, ordnet in zwei Reihen jedem roten Plättchen ein blaues zu.)</i> Ich                          |

- habe mehr als du!
- 5    Haupt-    *(Die Hauptlehrkraft kommt hinzu und bittet die Kinder ihre Entdeckungen in*  
lehrkraft:    *Worte zu fassen.)* Könnt ihr mir erklären, wie ihr das gemacht habt? Wer von  
                 euch hat mehr Plättchen und um wie viele mehr?
- 6    Anna:     Also man legt die so nebeneinander hin. *(Anna zeigt auf die Plättchen und*  
                 *schiebt beide Reihen an Plättchen zusammen. Ein rotes Plättchen wird je*  
                 *einem blauen Plättchen zugeordnet. Zwei blaue Plättchen bleiben übrig.)*  
                 Dann weiß man, wie viele mehr man hat. Ich hab mehr. Um zwei mehr. *(Das*  
                 *Kind zeigt mit dem Zeigefinger mit.)*
- 7    Haupt-    Super. Ihr habt zwei Reihen gebildet und jedem roten Plättchen ein blaues  
lehrkraft:    zugeordnet. Ihr seht, dass zwei blaue Plättchen mehr sind. Anna hat um zwei  
                 Plättchen mehr als du, Rosa. Um wie viele Plättchen hast du weniger, Rosa?
- 8    Rosa:     Ich? Ähm. *(Rosa schaut zu Anna und zögert.)* Ich weiß nicht. Ich hab vier.  
                 Anna sechs.
- 9    Haupt-    *(Die Hauptlehrkraft zeigt mit dem Finger auf die obere Reihe der Plättchen,*  
lehrkraft:    *dann auf die untere Reihe.)* Hier liegen sechs blaue Plättchen, hier vier rote  
                 Plättchen. Wer von euch hat mehr Plättchen?
- 10   Rosa:    Besser ich zähl sie nochmal. *(Rosa nimmt die roten Plättchen und beginnt*  
                 *nochmals die Plättchen zu zählen.)*
- 11   Haupt-    Wie viele Plättchen hast du, Rosa? Musstest du dafür nochmals zählen?  
lehrkraft:
- 12   Rosa:    Ich hab vier. *(Rosa zeigt sich unsicher. Die Hauptlehrkraft geht auf die zweite*  
                 *Frage nicht weiter ein).*
- 13   Haupt-    *(Die Hauptlehrkraft nimmt die blauen Plättchen und ordnet sie in einer*  
lehrkraft:    *Reihe.)* Anna hat sechs blaue Plättchen. Kannst du jedem blauen Plättchen  
                 ein rotes von dir dazulegen?
- 14   Rosa:    Ja. *(Rosa ordnet in einer zweiten Reihe jedem blauen Plättchen ein rotes zu.)*
- 15   Haupt-    Wer von euch beiden hat mehr Plättchen? *(Die Hauptlehrkraft zeigt mit dem*  
lehrkraft:    *Finger auf die obere Reihe der Plättchen, dann auf die untere Reihe).*
- 16   Rosa:    Anna.
- 17   Haupt-    Super. Und um wie viele Plättchen hat Anna mehr als du? *(Die Lehrkraft zeigt*  
lehrkraft:    *mit dem Zeigefinger auf beide Reihen.)*
- 18   Rosa:    Sechs? *(Rosa ist unsicher in der Beantwortung.)*
- 19   Haupt-    Ok. Wir machen diese Übung später nochmals mit der ganzen Klasse. Bitte  
lehrkraft:    gebt eure Plättchen in die Schatztruhe und räumt euren Platz auf.
-

### ***Anzahlvergleiche mittels Zuordnung und Abzählens***

**Anna reiht die geworfenen Plättchen in zwei Reihen. Jedem roten Plättchen wird ein blaues paarweise zugeordnet.** Beide Kinder nehmen ihre Plättchen und zählen sie ab. Anna zählt die Plättchen in Zweierschritten, nützt die effiziente Strategie der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung, um so Aussagen treffen zu können, dass sie „um zwei mehr“ Plättchen als ihre Mitschülerin hat. Anna nützt die Strategie der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung von Plättchen (Abschnitt 2.2.1) und erklärt ihr Vorgehen Rosa. Sie vergleicht die beiden Anzahlen und stellt fest, dass sie mehr Plättchen hat. Anschließend betrachtet Anna den Unterschied der beiden Plättchenanzahlen, um die Aussage treffen zu können, dass sie „um zwei mehr“ hat.

### ***Anzahlvergleiche mittels Abzählens***

Rosa nützt mehrmals die Strategie des Abzählens und zählt die Plättchen in Einerschritten ab. Bei der Frage „Um wie viele Plättchen hast du weniger?“, scheint Rosa irritiert zu sein und nennt die Anzahl an Plättchen, die sie und ihre Mitspielerin Anna hat. Auf die erneute Frage der Hauptlehrkraft zählt Rosa die einzelnen Plättchen nochmals ab. Die wiederholte Strategie des Abzählens legt die Vermutung nahe, dass sie zwar versteht, wer mehr Plättchen hat, aber nicht die aufbauende Frage „(um) wie viele mehr?“ (Abschnitt 2.2.1). Anzahlvergleiche durch Zuordnen scheinen für sie auf dieser Entwicklungsstufe (noch) zu fordernd zu sein.

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VI im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VI beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt.

**Tabelle 60**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VI anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  |                                             |                                         | X                                        |                               |

### **Fehlerkultur und Leistungsbewertung**

Die Hauptlehrkraft hat in der dargestellten Szene erkannt, dass der aufbauende Schritt „*Um wie viel* mehr“ in dem Spiel ‚Plättchen werfen‘ für Rosa (noch) zu schwierig ist (Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 6.2). Sie orientiert sich am Vorwissen von Rosa, um mit ihr gemeinsam die Plättchen nach der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung zu legen. Durch Vorzeigen der Lehrkraft ordnen sie jedem blauen Plättchen ein rotes Plättchen zu. Auf das gezielte Nachfragen der Hauptlehrkraft „Wer hat mehr Plättchen?“ nennt Rosa die richtige Antwort. Durch das bewusste Nachfragen der Lehrkraft „*Um wie viele* Plättchen hat Anna mehr?“ nennt Rosa die Zahl die mehr ist, „sechs“.

Im Sinne dieser Dimension Steinwegs (2010) braucht das Kind eine individuelle Rückmeldung, wenn es gegebenenfalls (noch) ein unzureichendes Verständnis bei einer Aufgabe zeigt. In dieser Sequenz geht die Hauptlehrkraft nicht weiter auf das Verständnisproblem von Rosa ein. **Sie gibt keine weiteren Anregungen oder nützt gezielte Fragen um die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung zu erarbeiten beziehungsweise zu sichern.**

Überlegungen in folgende Richtung wurden klar in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ vorgegeben: Die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung muss als Grundlage für „gleich viel“ gesichert sein. Aufbauende Übungen „*um wie viel* mehr/weniger“ können erst dann aufgegriffen und verstanden werden, wenn dieses Verständnis erarbeitet und richtig angewendet wird (Abschnitt 2.2.2).

Lernende wie Jonathan und Sandro nachfolgend beschrieben, die eine Zuordnung bei Anzahlvergleichen bereits abgesichert haben, zeigen keine Schwierigkeiten in aufbauenden Aktivitäten „um wie viel mehr?“ oder „um wie viel weniger?“ In Tabelle 61 sind die Aussagen der Jungen, der Hauptlehrkraft und die Aktivitäten von „Plättchen werfen“ dargestellt.



**Tabelle 61**

*Jonathan und Sandro („Plättchen werfen“) (eigene Darstellung)*

- 
- |    |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|----|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | Jonathan:       | <i>(Jonathan reiht die Plättchen mit der „1zu1“-Zuordnung. Es sind vier rote Plättchen mehr als blaue. Er erkennt die Differenz auf „einen Blick“.) Du hast vier mehr. Du hast gewonnen. Du bist an der Reihe.</i>                                                                                                                                                        |
| 2  | Sandro:         | <i>(Sandro nimmt die Plättchen, gibt seine Vermutung ab und wirft die Plättchen.) Ich glaub, jetzt hast du mehr.<br/>(Sandro reiht die Plättchen in „1zu1“-Zuordnung, erkennt die Differenz auf „einen Blick“.) Siehst du! Du hast drei mehr. Punkt für dich! Schau, die sind verheiratet!</i>                                                                            |
| 3  | Jonathan:       | <i>Was? (Jonathan zeigt sich verwundert über die Aussage.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 4  | Sandro:         | <i>Da sind immer zwei zusammen. Die sind verheiratet! (Sandro zeigt je auf ein rotes und blaues Plättchen.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 5  | Jonathan:       | <i>(Jonathan versteht den Zusammenhang der Aussage und ist begeistert.) Stimmt, immer zwei zusammen. Die sind verheiratet!</i>                                                                                                                                                                                                                                            |
| 6  | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Lehrkraft kommt hinzu.) Verheiratet? Wie bitte? Wer von euch hat mehr Plättchen?</i>                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 7  | Jonathan:       | <i>(Jonathan greift die Entdeckung Sandros auf und erklärt anhand der Plättchen.) Also da sind immer zwei. Sandro hat gesagt die sind verheiratet, siehst du?</i>                                                                                                                                                                                                         |
| 8  | Hauptlehrkraft: | <i>Ah. (Die Lehrkraft schmunzelt und greift das scheinbare Verständnis der „1zu1“-Zuordnung auf.) Das ist aber eine interessante Entdeckung. Immer <b>ein</b> rotes Plättchen gehört zu <b>einem</b> blauen. Man könnte sagen, die sind verheiratet. Gut beschrieben! Könnt ihr einmal ein Spiel vorzeigen. Werft mal die Plättchen. Wer von euch hat mehr Plättchen?</i> |
| 9  | Sandro:         | <i>(Sandro nimmt die Plättchen, wirft sie und reiht sie mit der „1zu1“-Zuordnung. Es sind drei rote Plättchen mehr als blaue. Sandro sieht es auf „einen Blick“.) Drei mehr. Ich hab gewonnen.</i>                                                                                                                                                                        |
| 10 | Hauptlehrkraft: | <i>Oh, du siehst das auf einen Blick? (Die Lehrkraft zeigt sich erstaunt.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 11 | Sandro:         | <i>Ja, das sieht man ja sofort. Das sind drei. (Sandro zeigt auf die Plättchen.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 12 | Hauptlehrkraft: | <i>Super! Wer von euch hat jetzt mehr Plättchen, Jonathan? (Die Lehrkraft möchte sich vergewissern, dass auch Jonathan diesen Schritt verstanden hat.)</i>                                                                                                                                                                                                                |
| 13 | Sandro:         | <i>Sandro. Er hat drei mehr! (Jonathan zeigt mit dem Finger auf die Plättchen.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

- 14   Hauptlehr-   Genau, super! Sandro hat drei rote Plättchen mehr. Ihr musstet gar nicht  
kraft:           zählen. Um wie viele Plättchen hast du weniger, Jonathan?
- 15   Sandro:       Ich hab drei weniger.
- 16   Hauptlehr-   Gut gemacht! Dann dürft ihr noch eine Runde spielen.  
kraft:
- 

### **Anzahlvergleiche mittels Eins-zu-Eins-Zuordnung**

**Jonathan reiht die geworfenen Plättchen in zwei Reihen als doppelte Anordnung, nützt die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung und stellt fest, dass sein Partner Sandro vier rote Plättchen mehr hat. Die Differenz erkennt er „auf einen Blick“ (Abschnitt 2.2.2).**

Sandro wirft die Plättchen, reiht auch sie mit der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung in zwei Reihen und erkennt ebenso „auf einen Blick“, dass sein Partner Jonathan um drei Plättchen mehr hat. Er beschreibt in Worten, dass die Plättchen-Paare „verheiratet“ sind. Je ein rotes und ein blaues Plättchen gehören zusammen.

Die Hauptlehrkraft kommt hinzu, versteht – aus dem Kontext gerissen und da dieser Begriff vorher nicht im Unterricht thematisiert wurde – den Zusammenhang der Eins-zu-Eins-Zuordnung mit dem Begriff „verheiratet“ nicht und lässt sich die Beschreibung von den Kindern erklären. Sie zeigt sich begeistert von der Entdeckung der Kinder und der verbalen Beschreibung der Zuordnung. Anschließend bittet sie die Kinder eine Runde ‚Plättchen werfen‘ vorzuzeigen.

**Sandro wirft erneut die Plättchen, reiht sie mit der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung in zwei Reihen und erkennt „auf einen Blick“, dass er drei rote Plättchen mehr als Jonathan hat.** Die Lehrkraft ist erstaunt, dass die Kinder die Differenz „auf einen Blick“, also ohne zu zählen ermitteln können, woraufhin Sandro erklärt, dass man den Unterschied „sofort sehen“ könne. Auf die Frage der Hauptlehrkraft „Wer von euch hat mehr Plättchen?“ an Jonathan gerichtet, möchte sie sich vergewissern, dass auch er den Anzahlvergleich verstanden hat. Jonathan reagiert, indem er, ohne erneut zu zählen erklärt, dass Sandro mehr Plättchen hat und er in weiterer Folge „um drei Plättchen mehr habe“ als er.

Auch auf die gestellte Frage der Hauptlehrkraft „um wie viele hast du weniger?“, antwortet Jonathan angemessen mit der Antwort „ich hab um drei weniger“.

Jonathan und Sandro nutzen die tragfähige Strategie der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung, um in mehreren Durchgängen feststellen zu können, „um wie viel mehr/weniger“ Plättchen sie haben. Beide Kinder haben die Differenz auf „einen Blick“ ermittelt, das heißt, ohne die Plättchen gezählt zu haben (Abschnitt 2.2.3). Ob die Kinder die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung als Grundlage für „gleich viel“ auch im größeren Zahlenraum nutzen können, wird an dieser Stelle nicht deutlich.

***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VI im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VI beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt.

**Tabelle 62**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein VI anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

**Denkfreiheiten und Kommunikation**

Wie in dieser Szene dargestellt, können die beiden Kinder diese Aktivität eigenaktiv bearbeiten. Dabei lässt sich die Hauptlehrkraft, im Sinne des Merkmals „Kommunikation der Lösungen“ dieser Dimension Steinwegs, den in diesem Zusammenhang durch die Kinder Jonathan und Sandro erfundenen Begriff „verheiratet“ erklären. Sie verstehen darunter, dass je ein rotes Plättchen mit einem blauen Plättchen ein „verheiratetes“ Paar ergeben – ganz im Sinne der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung: Jedem Element der einen Menge wird ein Element der anderen zugeordnet. Um die individuellen, kindlichen Denkwege beim ‚Plättchen werfen‘ zu verstehen, bittet sie die Kinder, eine Runde vorzuzeigen.

Sandro wirft die Plättchen, reiht sie mit der „Eins-zu-Eins“-Zuordnung in zwei Reihen und kann geschickt auf „einen Blick“ erkennen, dass er um drei rote Plättchen mehr als Jonathan hat. Die Hauptlehrkraft reagiert überrascht, worauf das Kind auf die gestellte

Frage „oh, du siehst das auf einen Blick?“ erklärt, dass man den Unterschied „sofort sehen“ könne.

Mit der Frage der Hauptlehrkraft „wer von euch hat mehr Plättchen?“ an Jonathan gerichtet, möchte sie sein Wissen identifizieren. Jonathan reagiert, indem er – ohne erneut zu zählen – erklärt, dass Sandro mehr Plättchen hat und er in weiterer Folge „um drei Plättchen mehr habe“ als er. Auch auf die umgekehrte Fragestellung der Hauptlehrkraft „um wie viele hast du weniger?“, kann Jonathan die richtige Antwort nennen.

#### **9.4.2.2 Kategorie Anzahlerfassendes Zählen**

Nachfolgend wird beschrieben, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden bei der Subkategorie *Anzahlerfassendes Zählen* der Kategorie Innermathematische Struktur zeigen.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.2.2:

**F 2.2.2: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Anzahlerfassenden Zählen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?**

##### *Häufigkeit der Kategorie Anzahlerfassendes Zählen*

Wie in Tabelle 63 angegeben, zeigen sich verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* in 3,8 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Anzahlerfassendes Zählen. 2,8 % der Szenen können Baustein II zugeordnet werden, 1,0 % der Szenen Baustein III.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 5,0 % der Szenen Probleme, wovon 3,7 % der Szenen aus Baustein II und 1,3 % der Szenen aus Baustein III entnommen sind.

**Tabelle 63***Häufigkeit von Anzahlerfassendes Zählen (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                   | Anzahlerfassendes Zählen |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                               | 15                       |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein II             | 11                       |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein III            | 4                        |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )       | 3,8                      |
| - Prozent bezogen auf den Baustein II                          | 2,8                      |
| - Prozent bezogen auf den Baustein III                         | 1,0                      |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie                   | 5,0                      |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung ( $N = 301$ ) |                          |
| - Prozent bezogen auf den Baustein II                          |                          |
| - Prozent bezogen auf den Baustein III                         | 3,7                      |
|                                                                | 1,3                      |

Wie exemplarisch im folgenden Transkriptausschnitten aus Baustein II – Resultatives Zählen; was ist beim Zählen wichtig? – beschrieben, zeigt sich, dass es sich für einige Lernende als schwierig erwiesen hat, Zählstrategien (Abschnitt 2.2.1) bei größeren und unübersichtlichen Mengen anzuwenden.

Maria und Ilke werden im nachfolgenden Transkriptausschnitt bei ihrer Arbeit beobachtet. Die Kinder schätzen zuerst die Anzahl der Nudeln in ihrem Schätzglas und zählen diese anschließend. Während Ilke weiß, dass es egal ist, bei welchem Startobjekt er zu zählen beginnt, ordnet Maria die Nudeln in einer Reihe und kann die Zählstrategien nicht richtig anwenden.

**Tabelle 64***Baustein II – Resultatives Zählen (eigene Darstellung)*

- 2 Maria: *(Maria nimmt eine Nudel nach der anderen und reiht sie in einer linearen Reihe.) Schau, ich mach so eine Reihe wie an der Tafel. Dann kann ich leichter zählen! (Maria nimmt eine Nudel nach der anderen, macht eine Reihe und zählt.) Eins, zwei, drei, vier, fünf ... (Sie macht eine längere Pause, schaut die Nudeln an, tippt mehrmals die fünfte Nudel an, nimmt die nächste Nudel und reiht sie in der Reihe an. Sie tippt mehrmals die fünfte*

- Nudel an und zählt diese doppelt.)** Fünf, sechs. *(Maria macht wieder eine Pause. Dann zeigt sie mit dem Zeigefinger auf die sechste Nudel in ihrer Reihe und zählt weiter.)* Sieben. *(Maria nimmt eine Nudel nach der anderen, reiht eine nach der anderen in der Reihe an und zählt in ihrer Reihe weiter, bis sie alle Nudeln aufgereiht hat.)* Acht, neun, zehn. Fertig. Zehn sind's!
- 3 Ilke: Warte, das stimmt so nicht! **(Er tippt eine Nudel nach der anderen an – beginnt aber rechts zu zählen.)** Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. Neun! Es sind neun und nicht zehn Nudeln! Du hast eine Nudel doppelt gezählt *(Ilke zeigt auf die fünfte Nudel in der Reihe.)*
- 4 Maria: *(Maria ist verwundert. Sie denkt eine Zeit nach.)* **Nein, so stimmt das nicht. Du hast falsch gezählt. So wie du** *(Maria zeigt mit ihrem Zeigefinger von rechts nach links)* **darf man nicht zählen.** Das kann nicht sein! Hier musst du beginnen! *(Maria zeigt mit ihrem Zeigefinger auf die erste Nudel der Reihe, beginnend von links.)*
- 5 Hauptlehrkraft: Weißt du noch, wie vorher, Maria? *(Die Hauptlehrkraft umkreist mit dem Zeigefinger die fünfte Nudel und beginnt von da ausgehend nach links zu zählen.)* Eins, zwei, drei, vier, fünf. **Maria, wie muss ich weitermachen, damit ich die Zahl der Nudeln rausbekomme?** *(Die Hauptlehrkraft umkreist nochmals die fünfte Nudel mit dem Zeigefinger.)*
- 6 Maria: Aja, genau! **Ich zähle noch die Nudeln in die andere Richtung.** *(Maria beginnt ausgehend von der fünften Nudel nach rechts zu zählen, tippt immer eine Nudel nach der anderen an und zählt richtig ohne Zählfehler.)* Fünf, sechs, sieben, acht, neun. Neun sind's jetzt doch!
- 7 Hauptlehrkraft: Sehr gut, Maria! Wie du jetzt richtig erkannt hast, ist es egal, ob ich hier beginne zu zählen. *(Die Hauptlehrkraft umkreist die fünfte Nudel der Reihe und zeigt mit dem Zeigefinger nach links.)* Und dann zähle ich alle hier. *(Die Hauptlehrkraft umkreist alle Nudeln – beginnend bei der fünften Nudel – nach rechts.)* Oder, ich zähle, wie du es vorher gemacht hast Maria von links beginnend. *(Sie umkreist alle Nudeln beginnend von links.)* Oder wie du, Ilke, es gemacht hast von dieser Seite. *(Sie umkreist alle Nudeln beginnend von rechts.)* **Es ist egal, wo ich beginne zu**

**zählen. Wichtig ist nur, dass man jede Nudel nur genau einmal zählt!**

Um diese Aussage zu untermauern, wonach es notwendig ist, ein Verständnis für Kardinalität bei Lernenden zu sichern, steht nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf die Kategorie *Anzahlerfassendes Zählen* im Interesse.

Verbunden mit der Subkategorie *Anzahlerfassendes Zählen* werden Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft B und Hauptlehrkraft C aus Baustein II und Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft D und der Stützlehrkraft D aus Baustein III beobachtet. Nachfolgend wird exemplarisch eine Unterrichtsbeobachtung einer dieser Lehrkräfte aus Baustein II beschrieben; an dieser Stelle steht die bevorzugte Bezeichnung Hauptlehrkraft.

Dabei steht die Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.2 im Interesse:

**F 3.2.2: Wird und – falls ja – wie wird das *Anzahlerfassende Zählen* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.2.2. zu beantworten, werden im Folgenden die Beobachtungen zu Unterrichtsbaustein II im Ganzen dargestellt.

Ausgehend von mehreren Aufgaben, bei denen Zählstrategien im Klassenverband (bspw. Zählaktivitäten, bei denen die Buben/Mädchen/Kinder der Klasse gezählt werden) thematisiert wurden, wird bei der nun folgend beschriebenen Aktivität aus **Baustein II** Zählen zum Überprüfen einer Schätzung **erstmal**s durchgeführt.

Bei den anschließenden Aktivitäten aus **Baustein II** (Abschnitt 6.2) arbeiten die Kinder Maria und Ilke mit einem Schätz- und Zählglas mit Nudeln gefüllt. Die Aufgabe lautet „Schätzt zuerst, wie viele Gegenstände im Glas sind. Zählt dann gemeinsam nach, wie viele es wirklich sind!“ Durch das anschließende Abzählen von den Nudeln wird das Geschätzte überprüft.

**Tabelle 65**

*Maria und Ilke (Schätzen und Zählen) (eigene Darstellung)*

- 
- |   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Ilke:           | Du hast elf geschätzt, ich zwölf! Komm, wir tun alle raus und zählen sie ab. <i>(Ilke öffnet das Schätz- und Zählglas und leert alle Nudeln auf den Tisch.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 2 | Maria:          | <i>(Maria nimmt eine Nudel nach der anderen und reiht sie in einer linearen Reihe.)</i> <b>Schau, ich mach so eine Reihe wie an der Tafel. Dann kann ich leichter zählen!</b> <i>(Maria nimmt eine Nudel nach der anderen, legt sie in einer linearen Reihe und zählt.)</i> Eins, zwei, drei, vier, fünf ... <i>(Sie macht eine längere Pause, schaut die Nudeln an, tippt mehrmals die fünfte Nudel an, nimmt die nächste Nudel und reiht sie in der Reihe an. Sie tippt mehrmals die fünfte Nudel an und zählt diese doppelt.)</i> Fünf, sechs. <i>(Maria macht wieder eine Pause. Dann zeigt sie mit dem Zeigefinger auf die sechste Nudel in ihrer Reihe und zählt weiter.)</i> Sieben. <i>(Maria nimmt eine Nudel nach der anderen, reiht eine nach der anderen in der Reihe an und zählt in ihrer Reihe weiter, bis sie alle Nudeln aufgereiht hat.)</i> Acht, neun, zehn. Fertig. Zehn sind's! |
| 3 | Ilke:           | Warte, das stimmt so nicht! <b><i>(Er tippt eine Nudel nach der anderen an – beginnt aber rechts zu zählen.)</i></b> Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. Neun! Es sind neun und nicht zehn Nudeln! Du hast eine Nudel doppelt gezählt <i>(Ilke zeigt auf die fünfte Nudel in der Reihe.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 4 | Maria:          | <i>(Maria ist verwundert. Sie denkt eine Zeit nach.)</i> <b>Nein, so stimmt das nicht. Du hast falsch gezählt. So wie du</b> <i>(Maria zeigt mit ihrem Zeigefinger von rechts nach links)</i> <b>darf man nicht zählen.</b> Das kann nicht sein! Hier musst du beginnen! <i>(Maria zeigt mit ihrem Zeigefinger auf die erste Nudel der Reihe, beginnend von links.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 5 | Hauptlehrkraft: | Weißt du noch, wie vorher, Maria? <i>(Die Hauptlehrkraft umkreist mit dem Zeigefinger die fünfte Nudel und beginnt von da ausgehend nach links zu zählen.)</i> Eins, zwei, drei, vier, fünf. <b>Maria, wie muss ich weitermachen und zählen, damit ich die Zahl der Nudeln rausbekomme?</b> <i>(Die Hauptlehrkraft umkreist nochmals die fünfte Nudel mit dem Zeigefinger.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 6 | Maria:          | Aja, genau! <b>Ich zähle noch die Nudeln in die andere Richtung.</b> <i>(Maria beginnt ausgehend von der fünften Nudel nach</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |



*rechts zu zählen, tippt immer eine Nudel nach der anderen an und zählt richtig ohne Zählfehler.) Fünf, sechs, sieben, acht, neun. Neun sind's jetzt doch!*

- 7 Haupt- Sehr gut, Maria! Wie du jetzt richtig erkannt hast, ist es egal, ob  
lehrkraft: ich hier beginne zu zählen. *(Die Hauptlehrkraft umkreist die fünfte Nudel der Reihe und zeigt mit dem Zeigefinger nach links.)* Und dann zähle ich alle hier. *(Die Hauptlehrkraft umkreist alle Nudeln – beginnend bei der fünften Nudel – nach rechts.)* Oder, ich zähle, wie du es vorher gemacht hast Maria von links beginnend. *(Sie umkreist alle Nudeln beginnend von links.)* Oder wie du, Ilke, es gemacht hast von dieser Seite. *(Sie umkreist alle Nudeln beginnend von rechts.)* **Es ist egal, wo ich beginne zu zählen. Wichtig ist nur, dass man jede Nudel nur genau einmal zählt!**
- 

### **Schätz- und Zählaufgaben mit und ohne Beachtung der Zählstrategien**

Maria reiht die Nudeln vom Schätz- und Zählglas in einer linearen Reihe an, weil diese Anordnung – in ihren Worten – für sie einfacher zum Abzählen sei. Sie tippt die fünfte Nudel in der Reihe mehrmals mit dem Zeigefinger an und zählt diese doppelt. Anschließend zählt sie, eins-zu-eins-zugeordnet weiter, bis sie bei ihrer Endzahl zehn ankommt.

Ilke korrigiert sie und zählt die Nudeln – jedoch von rechts beginnend – bis zu seinem Ergebnis neun aus. Er beachtet dabei die Eins-zu-Eins-Zuordnung (Abschnitt 2.2.1) und erklärt Maria, dass sie eine Nudel doppelt gezählt habe.

**Maria zeigt sich verwundert und betont, dass man eine gewisse Abfolge beim Abzählen von Zählobjekten einhalten müsse. Ihrer Meinung nach müsse man immer von links beginnen.**

Im Anschluss daran weist die Hauptlehrkraft darauf hin, worauf beim Zählen aufgepasst werden muss bzw. was beim Zählen nicht wichtig ist: Es ist egal, wo man zu zählen beginnt. Wichtig ist nur, dass jede Nudel genau einmal gezählt wird. Wenn man sich an diese Regel hält, wird die ermittelte Zahl gleich sein (Abschnitt 2.2.1).

### ***Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein II im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)***

Die in der Unterrichtsbeobachtung zu Baustein II beschriebene Lernbegleitung der Stützlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ mit dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt.

**Tabelle 66**

*Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Baustein II anhand der Dimensionen nach Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

#### **Fehlerkultur und Leistungsbewertung**

Wie in Tabelle 65 dargestellt, möchte die Hauptlehrkraft Maria an vorangehende Aktivitäten, die gemeinsam mit allen Kindern im Klassenverband besprochen wurden, erinnern: Im Sinne der Zählprinzipien ist die Richtung des Zählens egal, solange alle Zähl-objekte genau einmal gezählt werden. Beginnend von einer von der Hauptlehrkraft festgelegten Startposition (fünfte Nudel der Reihe) kann Maria gemeinsam mit der Hauptlehrkraft die Zahl ermitteln (Abschnitt 2.2.1).

**Wünschenswert wäre es an dieser Stelle gewesen, wenn die Hauptlehrkraft die Erkenntnis, wonach es egal ist, bei welcher Position man zu zählen beginnt, gemeinsam mit Maria erarbeitet und diese Erkenntnis nicht vorwegnimmt.** Es scheint so, als habe Ilke diese Erkenntnis bei dieser Aktivität verstanden. Jedoch wird es an dieser Stelle nicht klar, ob Maria wirklich verstanden hat, worauf es beim Zählen ankommt. Sie kann – auf Anforderung der Hauptlehrkraft – von einer bestimmten Position aus eine Anzahl auszählen. Ein Verweis, wonach es bei Lernenden wichtig ist, auf ein Anzahlerfassendes Zählen zu achten, ist in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ verankert. Eine zusätzliche (Zähl-)Aktivität wäre im Sinne ihrer (möglichen) „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) lohnend gewesen, um beurteilen zu können, ob Maria ein Anzahlerfassendes Zählen nicht nur einmalig anwenden kann, sondern auch in *weiteren Aktivitäten* umsetzen kann.

#### 9.4.2.3 Kategorie Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen

Im folgenden Abschnitt wird die Frage, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden bei der Kategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* zeigen, beantwortet.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.2.3:

**F 2.2.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden beim *Nicht-zählenden Erfassen strukturierter Mengen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?**

##### *Häufigkeit der Kategorie Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen*

Wie in Tabelle 67 abgebildet, zeigen sich verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* der Subkategorie Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in 23,5 % der Szenen Probleme in der Umsetzung. Davon sind 2,8 % der Szenen Baustein IV, 3,8 % der Szenen Baustein VII, 6,1 % der Szenen Baustein VIII, 2,0 % der Szenen Baustein IX, 2,0 % der Szenen Baustein XII und 6,8 % der Szenen Baustein XIII zuzuordnen.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 30,9 % der Szenen Probleme, wovon 3,7 % der Szenen Baustein IV, 5,0 % der Szenen Baustein VII, 8,0 % der Szenen Baustein VIII, 2,7 % der Szenen Baustein IX, 2,7 % der Szenen Baustein XII und 9,0 % der Szenen Baustein XIII entnommen sind.

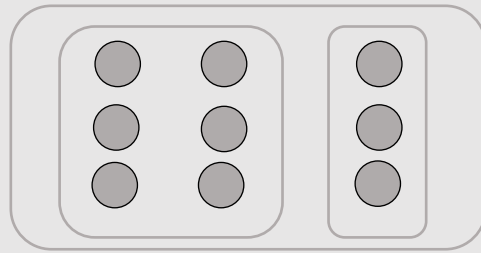
**Tabelle 67***Häufigkeit von Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                   | Nicht-zählendes Erfassen<br>strukturierter Mengen |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                               | 93                                                |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IV             | 11                                                |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VII            | 15                                                |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII           | 24                                                |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IX             | 8                                                 |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XII            | 8                                                 |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XIII           | 27                                                |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ )       | 23,5                                              |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                              | 2,8                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                             | 3,8                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                            | 6,1                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein IX                              | 2,0                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                             | 2,0                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                            | 6,8                                               |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie                   | 30,9                                              |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung ( $N = 301$ ) |                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                              | 3,7                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                             | 5,0                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                            | 8,0                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein IX                              | 2,7                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                             | 2,7                                               |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                            | 9,0                                               |

Nachfolgender Transkriptausschnitt aus Baustein VIII – Schnelles Sehen (Abschnitt 6.2)  
– zeigt exemplarisch, dass es bei Lernenden lohnend ist, nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen, wie in diesem Baustein konkret von figuralen Mustern, zu sichern.

**Tabelle 68***Baustein VIII – Schnelles Sehen (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | (Die Hauptlehrkraft kommt zu Julia, um sie in ihrer Arbeit mit den Plättchen zu beobachten. Sie sieht, dass Julia neun Plättchen strukturiert auf den Tisch gelegt hat. Sie legt mit Plättchen eine Würfel-Sechs und mit Abstand drei Plättchen.) |
|---|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



Kannst du mir erklären, Julia, welche Anzahl du gelegt hast und wie wir beide auf einen Blick erkennen können, wie viele es sind?

- 2 Julia: *(Julia antwortet zügig.)* Ja. Sechs *(Julia umkreist am Muster mit dem Zeigefinger die Würfelsechs)* und drei *(sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger die drei Plättchen)* noch dazu sind neun *(Julia umkreist am Muster mit dem Zeigefinger alle Plättchen)*. Ist ja easy!

In diesem Fallbeispiel handelt es sich um ein *figurales Wiedererkennen* gelernter *Muster* eines Spielwürfels (Abschnitt 2.2.3). In der üblichen Zahldarstellung auf Spielwürfeln kann man beispielsweise auch sechs Punkte simultan erkennen, da man diese Anordnung als Standard-Darstellung bereits kennt.

Auch bei der spontanen Darstellung mit Fingern – wie im folgenden Fallbeispiel aus Baustein IV – ist es möglich ein Muster einzuprägen, wiederzuerkennen und mit einem Zahlwort zu verknüpfen, ohne einen Zählvorgang tatsächlich durchzuführen.

**Tabelle 69**

*Baustein IV – Zahlen und Finger (eigene Darstellung)*

- |   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | Zeig mir bitte sechs.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 2 | Klasse:         | <i>(Jedes Kind streckt die Anzahl von Fingern hinter dem Rücken aus, jedes Kind in seinem Tempo. Die Hände werden auf Kommando nach vorne gebracht: Der Großteil der Kinder zeigt sechs Finger mit der „Hauptzeigeweise“ fünf an einer Hand und einen Finger an der anderen; mehrere Kinder zeigen sechs Finger als drei Finger an der einen Hand und drei Finger an der anderen Hand...)</i> |
| 3 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft greift die Zeigeweisen der Kinder auf.)</i> Alle, die sechs als fünf Finger und einen Finger eingestellt haben, stehen bitte auf. Maria, kannst du uns zeigen, wie du sechs mit den Fingern zeigst?                                                                                                                                                                    |

- 4 Maria: Ja! Hier (*Maria zeigt auf ihre linke Hand*) sind fünf Finger und hier (*sie zeigt auf den Daumen ihrer rechten Hand*) ist es ein Finger. Fünf und eins ist sechs.

Wie in Abschnitt 2.2.3 ausführlich beschrieben, ist an dieser Stelle nochmals klar hervorzuheben, dass das ganzheitlich figural erkannte Würfel- und/oder Fingerbild noch keine Garantie dafür ist, dass Kinder Zahlen als *Zusammensetzungen aus anderen Zahlen* denken (Abschnitt 2.2.3.1).

Auch die nun folgenden Transkriptausschnitte aus dem Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger ersetzen, zeigen beispielhaft, dass ein Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei Lernenden explizit anzuleiten sind. Bei diesen Beispielen arbeiten die Kinder mit dem Material Finger.

**Tabelle 70**

*Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger (eigene Darstellung)*

- 2 Julia: Ok, dann geht's los! Zeig sechs.
- 3 Anja: (*Anja überlegt nicht lange und zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Lehrkraft beobachtet, dass sie die Zahl sechs „auf einen Sitz“ ausstrecken kann. Dazu streckt Anja drei Finger an der linken Hand aus und drei Finger an der rechten; zusammen sechs. Julia steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung.*)
- 4 Julia: Stimmt! Drei und drei ist sechs.
- 5 Anja: Jetzt bin ich an der Reihe! Zeig mir acht. Acht.
- 6 Julia: (*Julia zeigt die Anzahlen unter der Tischplatte. Die Lehrkraft hat weiterhin den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch zu beobachten. Julia zeigt acht als vier und vier. Sie kann die Anzahl mit einer simultanen Ausstreckbewegung zeigen. Anja kontrolliert und gibt eine Rückmeldung.*)
- 7 Anja: Ok. Du zeigst acht als vier und vier. Passt!

**Tabelle 71**

*Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger (eigene Darstellung)*

- 2 Anna: Ja! Rosa, zeig acht.

- 3 Rosa: *(Rosa schaut Anna etwas bedächtig an und überlegt. Dann streckt sie die Anzahl an Fingern unter der Tischplatte aus. Die Stützlehrkraft beobachtet, dass sie beide Hände ausstreckt; fünf Finger links und fünf Finger rechts. Immer wieder zieht sie einen Finger ein; einmal den Daumen an der linken Hand und dann einzeln den Zeige-, Mittel-, Ring-, und den kleinen Finger an der rechten Hand. Sie spielt mit den Fingern ein wenig herum und lässt eine Fingerdarstellung stehen. Anna steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung.)*
- 4 Anna: *Warte, lass die Finger mal so. Ich zähl sie ab! (Anna zählt die ausgestreckten Finger einzeln ab. Dazu tippt sie mit dem Zeigefinger einen Finger nach dem anderen an und zählt laut.) Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. (Anna beginnt die Finger der vollen rechten Hand einzeln zu zählen und dann den Daumen der linken Hand.) Sechs? Die Zahl war doch acht, oder? (Anna kommt unter der Tischplatte hervor und schaut Rosa verwirrt an.)*
- 5 Rosa: *(Rosa zuckt die Achseln und sagt mit leiser Stimme.) Ich weiß nicht, wie acht geht. Die ist auch schwierig!*
- 6 Anna: *Ja stimmt, das war eine schwierige Zahl. Entschuldige. Aber jetzt bist du an der Reihe, komm! (Anna ermutigt Rosa, indem sie die Rollen tauschen.)*

**Tabelle 72**

*Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte Finger (eigene Darstellung)*

- 1 Hauptlehrkraft: *(Die Hauptlehrkraft kommt hinzu und möchte die Kinder in ihrer Arbeit mit den Fingern beobachten.) Ich möchte euch gerne zuschauen und lasse meinen Kopf unter der Tischplatte. Ich habe gehört Luis, dass du schon die Zahl sechs gesagt hast. (Luis nickt bejahend. Die Hauptlehrkraft bückt sich und lässt den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch der Kinder zu beobachten.)*
- 2 Max: *(Max überlegt kurz und zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Hauptlehrkraft beobachtet, dass er die Zahl sechs mit einer Ausstreckbewegung zeigt. Dazu streckt er fünf Finger an der rechten Hand aus und einen Finger an der linken Hand.) Hab's, kannst schauen! Fünf und eins ist sechs.*

- 3 Luis: *(Luis steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Die Kontrolle dauert eine Weile, Luis fixiert die Hände und sagt dann etwas bedächtig.)* Passt, sechs. Du bist an der Reihe. *(Luis kommt unter der Tischplatte hervor.)*
- 4 Max: Ok, zeig acht. Acht.

Weiterführend zeigt das Transkriptausschnitt aus dem Baustein XII – Finger-Schnipp-Schnapp: Bei allen Kindern ist darauf zu achten, wie sie die Gesamtanzahl der ausgestreckten Finger ermitteln. Tun sie das zählend, ist das Spiel verfrüht und andere Aktivitäten wären sinnvoller.

### **Tabelle 73**

*Baustein XII – Finger-Schnipp-Schnapp (eigene Darstellung)*

- 3 Luis: *(Luis zählt mit dem Zeigefinger seiner linken Hand alle ausgestreckten Finger einzeln ab.)* Warte, lass kurz ausgestreckt. *(Er tippt jeden ausgestreckten Finger von Max an und zählt.)* Eins, zwei, drei, vier. *(Bei vier hält er kurz inne, schaut auf die nächste Hand und beginnt dort einzeln weiter zu zählen.)* Fünf, sechs. Und jetzt noch die Finger von mir. *(Luis tippt beide ausgestreckten Finger mit seinem Zeigefinger an.)* Sieben, acht. *(Nach einer Pause schaut er die Hauptlehrkraft fragend an.)* Ich hatte doch einen Finger ausgestreckt, oder? Oder waren es zwei? Also dann wären es neun, zehn. *(Er streckt die beiden Finger der anderen Hand einzeln aus.)* Richtig?

**Wie exemplarisch in diesen Fallbeschreibungen dargestellt, ist es entscheidend, dass das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen explizit bei Lernenden angeleitet werden müssen.**

Um diese Annahme zu unterstreichen, steht nachfolgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf die Fokussierung auf die strukturierte Anzahlerfassung der Kategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* im Interesse.



Verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter* werden 11 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D und Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, Stützlehrkraft C und Stützlehrkraft D aus Baustein IV entnommen. Aus Baustein VII werden 15 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D, Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, Stützlehrkraft C, Stützlehrkraft D beobachtet.

24 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C und Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A sind aus Baustein VIII entnommen. Aus Baustein IX sind 8 Beobachtungen der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E. Auch aus Baustein XII sind 8 Beobachtungen der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E. 27 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D und Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, Stützlehrkraft C und Stützlehrkraft D sind aus Unterrichtsbaustein XIII.

Beispielgebend werden nachfolgend Unterrichtsbeobachtungen einer dieser Lehrkräfte und Unterrichtsbeobachtungen einer dieser Stützlehrkräfte beschrieben; an dieser Stelle werden die bevorzugten Bezeichnungen Hauptlehrkraft und Stützlehrkraft verwendet.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.2.3 beantwortet:

**F 3.2.3: Wird und – falls ja – wie wird das *Nicht-zählende Erfassen strukturierter* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3 folgt an dieser Stelle die Beschreibung des Unterrichtsbausteines VII im Ganzen. Die Beschreibung des Unterrichtsbausteines IV im Ganzen ist im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2 zu finden, die Beschreibung des Unterrichtsbausteines VIII im Ganzen im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.3.

Bei den Aktivitäten von **Baustein VII** arbeiten die Kinder in Partnerarbeit: Ein Kind nennt eine Zahl bis 10, das andere Kind zeigt diese Anzahl an Fingern möglichst, ohne zu

zählen, „auf einen Sitz“, aber unter der Tischplatte, ohne die Finger zu sehen. Das andere Kind steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Dann werden die Rollen getauscht.

Die Beschreibung der Beobachtung beginnt mit den Kinderpaaren Julia und Anja. Tabelle 74 beschreibt die Aktivitäten und die Aussagen der Kinder:

**Tabelle 74**

*Julia und Anna (Fingerzahlen werden „verdeckt“ unter der Tischplatte gezeigt.) (eigene Darstellung)*

|   |                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Haupt-<br>lehrkraft: | <i>(Die Lehrkraft kommt hinzu, um die Kinder in ihrer Arbeit an den Fingern zu beobachten) Ich möchte euch gerne zuschauen und stecke schon mal meinen Kopf unter die Tischplatte. (Die Lehrkraft bückt sich und lässt den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch der Kinder zu beobachten.)</i>                                                                              |
| 2 | Julia:               | Ok, dann geht's los! Zeig sechs.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 3 | Anja:                | <i>(Anja überlegt nicht lange und zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Lehrkraft beobachtet, dass sie die Zahl sechs „auf einen Sitz“ ausstrecken kann. Dazu streckt Anja drei Finger an der linken Hand aus und drei Finger an der rechten; zusammen sechs. Julia steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung.)</i>                                               |
| 4 | Julia:               | Stimmt! Drei und drei ist sechs.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5 | Anja:                | Jetzt bin ich an der Reihe! Zeig mir acht. Acht.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 6 | Julia:               | <i>(Julia zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Lehrkraft hat weiterhin den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch zu beobachten. Julia zeigt acht als vier und vier. Sie kann die Anzahl mit einer simultanen Ausstreckbewegung zeigen. Anja kontrolliert und gibt eine Rückmeldung.)</i>                                                                              |
| 7 | Anja:                | Ok. Du zeigst acht als vier und vier. Passt!                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 8 | Haupt-<br>lehrkraft: | <i>(Die Lehrkraft kommt unter der Tischplatte hervor.)</i> Ihr macht das schon super! Bravo! Jetzt versuchen wir eine neue Aufgabe. Nennt euch gegenseitig Zahlen bis 10. Dieses Mal zeigt ihr die Zahlen nicht mit den Fingern unter der Tischplatte, sondern ihr stellt euch nur vor, wie ihr das tun würdet. Verstanden? Also ich sage zum Beispiel neun. Wie würdet ihr neun zeigen? |
| 9 | Anja:                | Also ich würde bei neun, fünf Finger auf einer Hand zeigen, vier                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

- auf der anderen.
- 10 Julia: Ja genau! Ein Finger bleibt eingezogen. Einer fehlt auf zehn! (*Julia streckt beide Hände aus, um zehn Finger zu zeigen.*)
- 11 Haupt- Super. Ihr habt die Aufgabe bereits super verstanden. Jetzt dürft  
lehrkraft: ihr euch wieder gegenseitig Zahlen nennen. Aber denkt daran,  
dass ihr euch nur vorstellt, wie ihr diese mit den Fingern darstel-  
len würdet; mit wie vielen Fingern an welcher Hand? Aber ohne  
die Finger wirklich auszustrecken!
- 12 Anja: Ok, also sieben. Wie würdest du das machen?
- 13 Julia: Einfach! Fünf hier und zwei da.
- 14 Anja: Ja das war einfach, oder?! (*Anja macht eine kurze Denkpause.*  
*Mit Nachdruck fragt sie weiter.*) Würde es noch anders gehen?
- 15 Julia: Anders? Hm... (*Julia überlegt eine Weile.*) Ich weiß grad nicht,  
wie...
- 16 Anja: Auch vier und drei ist sieben. Schau! (*Anja zeigt sieben mit den*  
*wirklichen Fingern; dazu streckt sie vier an einer Hand gleichzei-*  
*tig aus und drei an der anderen Hand gleichzeitig aus.*)
- 17 Haupt- Sehr gut erkannt, Anja!  
lehrkraft:
- 18 Julia: Ja stimmt. Fünf und zwei (*Julia zeigt sieben mit den Fingern; fünf*  
*an der einen Hand, zwei an der anderen*) oder vier und drei ist  
sieben (*Sie zeigt sieben wieder mit den Fingern; vier an der ei-*  
*nen Hand, drei an der anderen.*) Daran habe ich jetzt nicht ge-  
dacht!
- 19 Haupt- Das habt ihr beide sehr gut erkannt. Super!  
lehrkraft
- 

### ***Fingerhandlungen, die nach und nach zu „inneren Fingerbildern“ werden***

Es scheint so, als haben beide Mädchen dieser Klasse die entscheidende Entdeckung, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, bereits gemacht. Für Anja scheint sechs ein Ganzes mit seinen Teilen drei und drei. Für Julia scheint acht ein Ganzes mit den Teilen vier und vier. Beide Kinder können die Anzahlen „auf einen Sitz“ mit den Fingern zeigen. Dabei sehen die Kinder die Finger nicht tatsächlich, sondern sie verwenden die Finger verdeckt unter der Tischplatte. Zu beobachten ist, dass beide Kinder die Zahlen sechs und acht nicht mit der „Hauptzeigeweise“ als „fünf und...“ zeigen,

sondern bereits andere Zusammensetzungen mitdenken. Sie verwenden die Verdoppelungs-Zeigeweisen bei der Zahl sechs als drei und drei und bei der Zahl acht als vier und vier. Ob die Kinder nur diese Verdoppelungs-Zeigeweisen zu acht und sechs können oder bereits weitere Zusammensetzungen mitdenken, wird anhand dieser Szene nicht klar deutlich.

**Die Versprachlichung soll den Kindern dabei helfen, ihr Denken auf die Fingeranzahlen zu fokussieren, ohne sie tatsächlich auszustrecken – so tun es auch die beiden Mädchen Julia und Anja in dieser Szene:** „Ich würde bei neun, fünf Finger auf einer Hand zeigen, vier auf der anderen“. Und Julia weiß bereits die Beziehung zu zehn, neun ist um eins weniger als zehn: „Ein Finger bleibt eingezogen. Einer fehlt auf zehn!“ Diese Bezugspunkte 5 (als eine ganze Hand) und 10 (beide Hände zusammen) sind wichtige Gliederungshilfen für unsere Zahlen (Abschnitt 2.2).

Sieben hingegen würde Julia als fünf Finger und zwei Finger mit der „Hauptzeigeweise“ unter Nutzung der „Kraft der Fünf“ zeigen. Auf die Frage von Anja, ob sie noch eine weitere Zeigeweise wüsste, kann sie – nach einer Zeit des Nachdenkens – keine weitere Zeigeweise. Anja hingegen denkt noch eine weitere Zusammensetzung der sieben als vier und drei. Ihr Zahldenken erklärt sie Julia unter *tatsächlichem* Einsatz der Finger. **Sie führt an ihren Händen eine Teile-Ganzes-Reflexion durch: Ein Ganzes (sieben) bestünde aus einem Teil (vier) und einem anderen Teil (drei).** In dieser Szene kann Anja sieben als fünf und zwei aber auch als vier und drei zeigen. Ihr Zahldenken scheint nicht mehr an die Zahlreihe gebunden zu sein (Abschnitt 2.2.3).

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VII beschriebene Lernbegleitung der Hauptlehrkraft wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der „Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht“ nach den Kriterien „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ und „Denkfreiheiten, Kommunikation“ eingeschätzt:

**Tabelle 75**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | X                                           | X                                       |                                          |                               |

### ***Aufgabenqualität und Problemstellungen***

Die Hauptlehrkraft stellt den Kindern in Paaren die Aufgabe, Zahlen verdeckt unter der Tischplatte zu zeigen. Sie erkennt, dass es beiden Mädchen gelingt, die Zahlen sechs und acht mit Fingern darzustellen. Die Kinder benützen „Fingerpakete“ und müssen die Finger nicht einzeln hochzählen (Abschnitt 2.2.1).

Im Sinne der kognitiven Aktivierung fordert die Hauptlehrkraft Julia und Anja im Anschluss daran auf, Zahlen nicht mehr mit tatsächlichen Fingern zu zeigen, sondern sich diese nur mehr vorzustellen und zu beschreiben, *wie* sie es mit Fingern tun würden. Die Versprachlichung hilft den Kindern dabei, die eigenen Denkwege mitzuteilen und mit anderen darüber zu diskutieren (Abschnitt 2.2).

### ***Denkfreiheiten und Kommunikation***

Der grundlegende Lernschritt, wirkliche Finger durch vorgestellte Finger zu ersetzen, sodass der Vorgang (so das Ziel!) nur mehr „im Kopf“ abläuft, ist ein wesentlicher im kindlichen Mathematiklernen (Abschnitt 2.2). Die Hauptlehrkraft nützt mit den Kindern bei der Erarbeitung der dafür nötigen Zwischenschritte die Finger.

Die Hauptlehrkraft gibt den Kindern in Partnerarbeit Gelegenheit, den Denkweg des anderen zu entdecken. Dazu steckt sie den Kopf unter die Tischplatte und beobachtet den Fingergebrauch der Kinder. Die Art und Weise, wie sie das Material, hier die Finger eingesetzt haben, wird vor allem durch die *Versprachlichung* ihrer Denkwege deutlich – diese fordert sie im Laufe der Beobachtung von den Kindern mehrmals ein.

**Julia und Anja haben ihre Teile der Zahlen sechs und acht (die Lehrkraft konnte sich durch die tatsächliche Beobachtung der Finger unter der Tischplatte vergewissern) *simultan* mit den Fingern ausgestreckt.** Auch können sie ihre Denkwege korrekt in (Zahl-)Worten beschreiben.

In den darauffolgenden Aktivitäten die Zahl sieben nicht mehr mit ausgestreckten Fingern, sondern in der Vorstellung durchzuführen, scheint es, als seien diese Aktivitäten nicht in der „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) für Julia. Julia kann zwar den Bezugspunkt 5 nützen, aber sie weiß keine weitere Zusammensetzung der Zahl sieben. In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ ist in Baustein VII beschrieben, dass die Kinder angeregt werden sollen, Fingerhandlungen in der Vorstellung vorwegzunehmen, später nur noch in der Vorstellung durchführen und schließlich ganz abstrakt über Zahlen sprechen („acht besteht aus fünf und drei“) sollen.

**In dieser Szene wäre mehr an kognitiver Aktivierung seitens der Hauptlehrkraft möglich gewesen, indem sie die Lernprozesse individuell fördernd unterstützt, Impulse gibt und/oder eine Fragehaltung entwickelt, die zu einer weiteren Beschäftigung mit dieser Thematik motiviert.**

Konkret und bezogen auf die von Steinweg (2014; dazu auch 2001) in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen wesentlichen Tätigkeiten, um Muster und Gesetzmäßigkeiten im Unterricht und Förderung mit den Kindern zu erkennen, fortzusetzen und zu begründen wäre es an dieser Stelle seitens der Hauptlehrkraft lohnend gewesen, gemeinsam mit Julia alle Zerlegungen in vier und drei, drei und vier, zwei und fünf, fünf und zwei, eins und sechs, sechs und eins, etc. zu deuten, aber auch in weiteren Analogien zu nutzen und diese zu beschreiben und zu begründen. Diese individuelle Rückmeldung wäre an dieser Stelle lohnend gewesen, da sie (noch) ein unzureichendes Verständnis dieser Aufgabe zeigte.

Nachfolgend wird die Beschreibung der Beobachtung mit den Kinderpaaren Anna und Rosa fortgesetzt. Die Stützlehrkraft sitzt beiden Mädchen gegenüber. Nach Absprache mit der Hauptlehrkraft und durch fachliche Begleitung im Rahmen dieses Dissertationsprojektes, arbeitete die Stützlehrkraft mit Rosa und Anna in der Kleingruppe zusätzlich zu der Arbeit im Klassenverband an der Zahldarstellung der Zahlen bis fünf.

Tabelle 76 gibt den Verlauf der Aktivitäten und die Aussagen der Kinder wieder:

**Tabelle 76**

*Rosa und Anna (Fingerzahlen werden „verdeckt“ unter der Tischplatte gezeigt.) (eigene Darstellung)*

- 
- |   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|---|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Stützlehrkraft: | <i>(Die Stützlehrkraft sitzt den Kindern gegenüber und möchte die Kinder in ihrer Arbeit an den Fingern beobachten und unterstützen.) Anna, beginne du. Nenne eine Zahl, die Rosa mit den Fingern zeigen soll. Ich schau einfach mal zu und lass den Kopf unter der Tischplatte. Dann tauscht ihr die Rolle und Rosa, du nennst eine Zahl, die Anna mit den Fingern zeigen soll. Ich bin schon gespannt! (Die Stützlehrkraft bückt sich und lässt den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch der Kinder zu beobachten.)</i>                             |
| 2 | Anna:           | Ja! Rosa, zeig acht.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 3 | Rosa:           | <i>(Rosa schaut Anna etwas bedächtig an und überlegt. Dann streckt sie die Anzahl an Fingern unter der Tischplatte aus. Die Stützlehrkraft beobachtet, dass sie beide Hände ausstreckt; fünf Finger links und fünf Finger rechts. Immer wieder zieht sie einen Finger ein; einmal den Daumen an der linken Hand und dann einzeln den Zeige-, Mittel-, Ring-, und den kleinen Finger an der rechten Hand. Sie spielt mit den Fingern ein wenig herum und lässt eine Fingerdarstellung stehen. Anna steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung.)</i> |
| 4 | Anna:           | Warte, lass die Finger mal so. Ich zähl sie ab! <i>(Anna zählt die ausgestreckten Finger einzeln ab. Dazu tippt sie mit dem Zeigefinger einen Finger nach dem anderen an und zählt laut.)</i> Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. <i>(Anna beginnt die Finger der vollen rechten Hand einzeln zu zählen und dann den Daumen der linken Hand.)</i> Sechs? Die Zahl war doch acht, oder? <i>(Anna kommt unter der Tischplatte hervor und schaut Rosa verwirrt an.)</i>                                                                                              |
| 5 | Rosa:           | <i>(Rosa zuckt die Achseln und sagt mit leiser Stimme.)</i> Ich weiß nicht, wie acht geht. Die ist auch schwierig!                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 6 | Anna:           | Ja stimmt, das war eine schwierige Zahl. Entschuldige. Aber jetzt bist du an der Reihe, komm! <i>(Anna ermutigt Rosa, indem sie die Rollen tauschen.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 7 | Rosa:           | Ja! Neun. Zeig neun, Anna.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

- 8 Anna: *(Anna zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Stützlehrkraft hat weiterhin den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch zu beobachten. Anna zeigt neun als fünf und vier. Dazu zählt sie die Finger einzeln hoch. Sie streckt einen Finger nach dem anderen der linken Hand aus, „legt“ die fünf Finger auf ihren Oberschenkel und drückt die Finger am Oberschenkel nochmals nach. Dann streckt sie vier Finger der rechten Hand einzeln aus, bis sie bei neun ankommt. Rosa steckt den Kopf unter die Tischplatte. Die Stützlehrkraft ermuntert Rosa, die Anzahl gemeinsam zu kontrollieren).*
- 9 Stützlehrkraft: Komm Rosa, wir kontrollieren jetzt gemeinsam! *(Die Stützlehrkraft nimmt den Zeigefinger und beginnt zu zählen. Rosa tut es ihr gleich. Gemeinsam zählen sie, beginnend beim kleinen Finger der linken Hand, bis sie alle fünf Finger der linken Hand gezählt haben; dann die vier Finger der rechten Hand, beginnend beim Daumen der rechten Hand.)* Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. Neun!
- 10 Rosa: *(Die Stützlehrkraft und Rosa kommen unter der Tischplatte hervor.)* Neun, gut gemacht! Du kannst das schon super, Anna!
- 11 Stützlehrkraft: *(Das Signal für die Pause ertönt.)* Kinder, wir haben jetzt Pause! Wir machen dann weiter!
- 

### ***Fingerbilder, die nur zählend ermittelt werden***

Die Aufgabe, Finger verdeckt unter der Tischplatte zu zeigen, wird von Anna und Rosa unterschiedlich gelöst. Anna zeigt die Zahl neun mit den Fingern, indem sie die Finger einzeln hochzählt. Dazu streckt sie einen Finger nach dem anderen der linken Hand aus; dann einzeln vier der rechten Hand. Die fünf Finger „drückt“ sie am Oberschenkel nochmals an. Ob Anna Probleme mit der Fingermotorik hat und deswegen die Finger an einer Oberfläche andrücken muss, wird in der Beschreibung der nachfolgenden Szene relativiert. Die Fingerdarstellung der Zahl neun ermittelt sie jedenfalls *alleszählend* (Abschnitt 3.2.2). Auch benützt sie das Alleszählen, um die ausgestreckte Fingeranzahlen von Rosa zu kontrollieren. Sie erfasst die acht von Rosas ausgestreckten Finger nicht als „fünf und ...“, sondern zählt die Finger einzeln ab. Mit dem Zeigefinger tippt sie jeden Finger an und *zählt*, bis sie bei sechs ankommt.

Rosa tut sich bei dieser Aufgabe sichtlich schwer und formuliert es auch in Worten: „Ich weiß nicht, wie acht geht. Die ist auch schwierig!“ Bei ihrem Versuch acht mit Fingern



darzustellen, streckt Rosa beide Hände unter der Tischplatte aus; fünf Finger links und fünf rechts. In dieser Szene scheint es, als wüsste Rosa einfach nicht, was sie tun soll. Sie spielt mit den Fingern herum und lässt auf Geratewohl eine Fingerdarstellung stehen. Offenbar hat sie nicht zählend mit Fehler dargestellt, sondern – auf Basis einer Überforderung – mit Fingern herumgespielt. An dieser Stelle kann dazu keine Vermutung geäußert werden, da keine weiteren Aktivitäten in diesem Bereich gemacht wurden.

**Das Zahldenken, über welches Rosa und Anna verfügen, unterscheidet sich hierbei wesentlich von dem, wie Julia und Anja denken: Beide können bei Zahlen (so das Ziel!) nicht andere Zahlen mitdenken (Abschnitt 2.2.3.1).** Anhand dieser Szene kann man infrage stellen, ob Rosa überhaupt versteht, was sie bei der Aufgabe machen muss. Ihre Aussage, wonach acht für sie schwierig sei, könnte interpretiert werden, als verstünde sie prinzipiell die Aufgabenstellung, aber acht sei als „große Zahl“ für sie noch zu schwierig mit Fingern darzustellen. Um gezielte Aussagen über diese Behauptung machen zu können, müsste man jedoch wissen, ob sie es mit kleineren Zahlen anders macht.

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VII beschriebene Lernbegleitung der *Stützlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der „Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht“ nach dem Kriterium „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ eingeschätzt:

**Tabelle 77**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Die Stützlehrkraft erklärt beiden Mädchen die Aufgabe, Zahlen verdeckt unter der Tischplatte zu zeigen, und beobachtet unter der Tischplatte den Fingergebrauch der Kinder. Sie bemerkt, dass beide Mädchen Schwierigkeiten haben, Zahlen mit Fingern darzustellen. Anna muss die Finger einzeln hochzählen, Rosa weiß nicht, was sie tun soll.

Die Stützlehrkraft unterstützt Rosa beim Kontrollieren der ausgestreckten Finger von Anna. Gemeinsam zählen sie diese ab, indem sie mit dem Zeigefinger jeden Finger antippen und einzeln abzählen. Bei neun angelangt, zeigt sich Rosa sichtlich zufrieden mit dem Fingerbild von Anna. Sie spart nicht mit Lob und Anerkennung. Es hat sich bei dieser Beobachtung als sinnvoll gezeigt, dass die Stützlehrkraft den *Fingergebrauch* von Rosa und Anna unter der Tischplatte beobachtet. Die Schulpause im Anschluss wird eingehalten.

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ zu Baustein VII steht, dass die Kinder angeregt werden sollen, in Zahl-Ganzen und Zahl-Teilen zu denken. In dieser Sequenz scheint dies aber nicht in der Zone ihrer nächsten Entwicklung zu sein.

Im Folgenden wird nochmals dasselbe Kinderpaar Rosa und Anna bei einer anderen Aktivität mit den Fingern beobachtet. Im Anschluss an die Unterrichtseinheit zur ersten Szene mit Rosa und Anna werden mit der Stützlehrkraft die weiteren Unterrichtsschritte besprochen. Gemeinsam wird reflektiert, dass die Aktivitäten für beide Kinder noch zu schwierig waren.

Bei dieser Aktivität nennt die Stützlehrkraft Zahlen bis fünf, die Kinder dürfen selbst entscheiden, ob sie die Finger sehen möchten oder ob sie Zahlen mit „Häschen-Ohren“ (Abschnitt 6.2) darstellen.

Beispielgebend betrachtet wird das Zahldenken der Mädchen zur Zahl drei.

**Tabelle 78**

*Rosa und Anna (Fingerzahlen mit tatsächlichen Fingern werden bis fünf erarbeitet.) (eigene Darstellung)*

- 
- 1 Stützlehrkraft: *(Die Stützlehrkraft sitzt den Kindern gegenüber.) Ich nenne euch jetzt Zahlen und ihr streckt die passende Anzahl an Fingern so schnell als möglich aus. Vielleicht schafft ihr das auch schon, ohne die Finger einzeln auszustrecken, sondern gleichzeitig? Ihr könnt entweder die Finger sichtbar vor euch auf den Tisch legen, oder das mit Häschen-Ohren probieren. Wisst ihr noch? Da legt ihr die Fäuste so an die Ohren (Die Stützlehrkraft legt die Hände als Fäuste an die Ohren) und könnt dann auch die eigenen Finger nicht sehen. Auf Kommando sollt ihr dann zwei/vier/drei...Finger ausstrecken. Los geht's! Wir versuchen es einmal.*
  - 2 Rosa und Anna: *(Beide Kinder nicken zustimmend. Rosa gibt die Hände sichtbar auf den Tisch. Sie streckt alle zehn Finger aus und begutachtet sie. Anna gibt die Hände als Fäuste an die Ohren. Sie versucht die Fingerdarstellung mit Häschen-Ohren. Mit Nachdruck sagt Anna.) Die Zahlen bis 5 kann ich. Ich versuch's gleich so!*
  - 3 Stützlehrkraft: *(Zustimmend nickt die Stützlehrkraft.) Zeig mir bitte drei.*
  - 4 Rosa: *(Rosa schaut auf ihre Finger und zieht alle Finger ein. Eine Weile überlegt sie. Sie streckt drei Finger der rechten Hand gleichzeitig aus und sagt sichtlich stolz.) Drei!*
  - 5 Anna: *(Anna streckt drei Finger mit Häschen-Ohren aus, ohne dass sie die Finger tatsächlich sieht. Dazu steckt sie den Zeigefinger der linken Hand und den Daumen und Zeigefinger der rechten Hand gleichzeitig aus.) Hab ich auch!*
  - 6 Stützlehrkraft: *Das habt ihr beide super gemacht. Anna, hol mal deine Hände so wie du sie jetzt ausgestreckt hast vor das Gesicht. (Anna kommt der Aufforderung nach und gibt die Hände sichtbar auf den Tisch.) Schaut mal beide, Rosa zeigt drei, indem sie den Mittelfinger, Zeigefinger und den Daumen ausstreckt. Und Anna, du zeigst drei mit einem Finger an dieser Hand und zwei Fingern an der anderen. Stimmt beides, Rosa?*
  - 7 Rosa: *(Rosa betrachtet die unterschiedlichen Zeigeweisen. Sie zählt die Anzahl der Finger von Anna laut ab und nickt dabei für jede Zahl mit dem Kopf.) Eins, zwei, drei! (Dann drückt sie nochmals leicht ihre ausgestreckten Finger, zuerst den Daumen, dann den*

*Zeigefinger, und dann den Mittelfinger und zählt laut.) Eins, zwei, drei! Stimmt!*

- 8 Stützlehrkraft: Genau, Rosa. Gut erkannt! Zahlen sind nun einmal vielfältig. Ich kann drei so (*Sie streckt den Daumen, den Zeigefinger und den Mittelfinger der linken Hand aus*), oder so zeigen. (*Sie streckt den Zeigefinger der rechten und den Daumen und den Zeigefinger der linken Hand aus.*) Geht es noch anders?
- 9 Anna: Ja klar. Ich kann auch drei so zeigen, (*Sie streckt den Daumen und den Zeigefinger der linken Hand aus und den Daumen der rechten Hand.*) oder so (*Sie streckt den kleinen Finger, Mittelfinger und Ringfinger der rechten Hand aus.*), oder einfach auch so (*sie streckt beide Daumen aus und den Zeigefinger der linken Hand*).
- 10 Stützlehrkraft: Ganz genau. Das waren jetzt sehr kreative Lösungen. Drei kann ja ganz unterschiedlich sein. So wie alle Zahlen. Das versuchen wir jetzt auch noch mit anderen Zahlen.
- 

### ***Fingerdarstellungen bis fünf***

Bei der vorangegangenen Aktivität hat sich gezeigt, dass es für Rosa und Anna zu schwierig war, Fingeranzahlen nur verdeckt darzustellen (Abschnitt 3.2.2). Bei dieser Aktivität entscheiden die Kinder von sich aus, ob sie die Finger sichtbar sehen möchten oder die Übung bereits als „Häschen-Ohren“ (Abschnitt 6.2) versuchen möchten. So tun es beide Kinder auch unterschiedlich: Anna versucht die anspruchsvollere Variante mit den „Häschen-Ohren“, Rosa entscheidet sich dafür, dass sie die Finger sichtbar auf den Tisch gibt.

**Beide können drei Finger gleichzeitig ausstrecken, die Art und Weise wie sie dabei vorgehen, ist unterschiedlich:** Rosa zeigt drei mit dem Daumen, Zeige-, und Mittelfinger derselben Hand. Anna hingegen zeigt drei mit einem Finger an der einen und zwei Fingern an der anderen Hand. Beide Kinder müssen bei der Zahl drei die Finger nicht einzeln hochzählen, sondern können diese simultan ausstrecken. In dieser Szene scheint es, als seien sich beide ihrer simultanen Zeigeweise sicher.

Um zu kontrollieren, ob Anna drei Finger korrekt ausgestreckt hat, muss Rosa die Finger einzeln *abzählen* (Abschnitt 2.2.1). Sie tut das, indem sie die ausgestreckten Finger mit dem Kopf nickend für jede Zahl zählt. Ihre ausgestreckten Finger drückt sie einzeln leicht an. Vermutlich muss sie die Anzahl nochmals *spüren* und sich so vergewissern, dass es

wirklich drei sind. Das Abzählen der Anzahl drei gelingt ihr sicher; sie beachtet die dabei wesentlichen Zählprinzipien (Abschnitt 2.2.1). Es könnte sein, dass sie nur deshalb noch einmal zählt, weil sie die Nachfrage der Lehrkraft so verstanden hat, als solle sie das nun tun.

**Bei Anna hingegen zeigt sich, dass sie keine Probleme hat, mehrere unterschiedliche Fingerdarstellungen für die Zahl drei zu finden. Sie zeigt sicher unterschiedliche Fingerdarstellungen für die Zahl drei in *einer* Ausstreckbewegung, ohne die Finger einzeln zu sehen. Über ihr Zahlwissen bezogen auf drei kann man vermuten, dass sie ein *erstes Verständnis* für ein Zahldenken mit Zahl-Ganzen und Zahl-Teilen hat: Drei ist für Anna ein Ganzes mit den Teilen eins und zwei (Abschnitt 2.2.3.1). Auf Nachfrage der Stützlehrkraft findet sie noch weitere Zusammensetzungen der drei.**

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VII beschriebene Lernbegleitung der *Stützlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der „Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht“ nach den Kriterien „Aufgabenqualität, Problemstellungen“ und „Denkfreiheiten, Kommunikation“ eingeschätzt:

**Tabelle 79**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | X                                           | X                                       |                                          |                               |

### **Aufgabenqualität und Problemstellungen**

Im Sinne der kognitiven Herausforderung bietet die Aufgabe Gelegenheit, mathematische Entdeckungen zu machen und Zusammenhänge zu erklären. Die Stützlehrkraft bespricht in dieser Szene mit den Mädchen unterschiedliche Zeigeweisen zur Zahl drei und fordert sie auf, noch weitere zu finden.

Durch die Aufforderung der Stützlehrkraft, die ausgestreckten Finger zu kontrollieren, zeigt sich, dass Rosa die ausgestreckten Finger einzeln nochmals nachzählt. Gezielte und fachlich klare Fragen der Stützlehrkraft wären an dieser Stelle hilfreich gewesen, um zu beurteilen, ob sie die Fragestellung überhaupt verstanden hat und wusste, was sie tun soll, ob die Aufgabe in ihrer „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) lag, um in weiterer Folge grundlegende Lernschritte, nämlich in Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen zu denken, zu machen.

### **Denkfreiheiten und Kommunikation**

In dieser Szene wurden die verschiedenen Zerlegungen zur Zahl drei mit Fingern nur gezeigt („so und so und so auch“). Teile-Ganzes-Beziehungen wurden aber nicht verbalisiert und wurden auch nicht von der Stützlehrkraft angeregt. Entscheidend und im Sinne des Merkmals „Kommunikation der Lösung“ dieser Dimension nach Steinweg (2010) zugeordnet, wäre an dieser Stelle die Verbalisierung von der Zahl drei als „zwei und eins“ und „eins und zwei“ und vielleicht auch „null und drei“ und „drei und null. Eine Versprachlichung der Teile-Ganzes-Beziehungen wurde in dieser Sequenz von der Stützlehrkraft nicht angeregt und auch sie selbst hat sie nicht gezielt selbst durchgeführt. Stattdessen beschränkte sich die Stützlehrkraft auf eine Verbalisierung mit „so und so und so auch“. Ein entscheidendes Mittel des Unterrichts, nämlich des Gebrauchs von Überlegungspausen, um über die Aktivität nachzudenken, und wie in Abschnitt 3.3.1 bereits von Breidenbach 1963 gefordert, wurde dem Mädchen vorenthalten.

Das letzte Kinderpaar, welches bei der Arbeit am Baustein VII kennengelernt wird, sind Luis und Max. Tabelle 80 beschreibt die Aktivitäten und die Aussagen der Kinder:

**Tabelle 80**

*Max und Luis (Fingerzahlen werden „verdeckt“ unter der Tischplatte gezeigt.) (eigene Darstellung)*

---

|   |                 |                                                                                                                                                                                                 |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft kommt hinzu und möchte die Kinder in ihrer Arbeit mit den Fingern beobachten.) Ich möchte euch gerne zuschauen und lasse meinen Kopf unter der Tischplatte. Ich habe</i> |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- gehört Luis, dass du schon die Zahl sechs gesagt hast. *(Luis nickt bejahend. Die Hauptlehrkraft bückt sich und lässt den Kopf unter der Tischplatte, um den Fingergebrauch der Kinder zu beobachten.)*
- 2 Max: *(Max überlegt kurz und zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Hauptlehrkraft beobachtet, dass er die Zahl sechs mit einer Ausstreckbewegung zeigt. Dazu streckt er fünf Finger an der rechten Hand aus und einen Finger an der linken Hand.)* Hab's, kannst schauen! Fünf und eins ist sechs.
- 3 Luis: *(Luis steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung. Die Kontrolle dauert eine Weile, Luis fixiert die Hände und sagt dann etwas bedächtig.)* Passt, sechs. Du bist an der Reihe. *(Luis kommt unter der Tischplatte hervor.)*
- 4 Max: Ok, zeig acht. Acht.
- 5 Luis: *(Luis zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Die Hauptlehrkraft beobachtet ihn dabei, wie er die Finger einzeln ausstreckt. Zuerst einzeln alle Finger der linken Hand; dann macht er eine kurze Pause und streckt dann einzeln drei Finger der rechten Hand aus.)* Ich glaub es stimmt!
- 6 Max: *(Max steckt den Kopf unter die Tischplatte und gibt Rückmeldung.)* Fünf und drei ergibt acht, passt. Super!
- 7 Hauptlehrkraft: *(Die Hauptlehrkraft kommt unter der Tischplatte hervor.)* Wartet kurz, Jungs. Luis, du hast das super gemacht. Du hast acht richtig gezeigt. *(Die Hauptlehrkraft wiederholt die Zeigeweise von Luis, indem sie einen Finger nach dem anderen ausstreckt, bis sie bei acht ankommt.)* Überleg nochmal, wie könntest du acht geschickter, also schlauer zeigen?
- 8 Luis: *(Luis denkt eine Weile nach. Er streckt nochmals acht Finger einzeln aus, betrachtet seine Finger und erklärt.)* Ja klar, das haben wir ja gelernt. Ich kann die „Kraft der Fünf“ nehmen und weiter überlegen. Das hab ich jetzt total vergessen!
- 9 Hauptlehrkraft: *(Die Hauptlehrkraft nickt bejahend.)* Genau Luis! Bei den Zahlen fünf, sechs, sieben, acht, zeigen wir „fünf und ...“ und überlegen bei fünf weiter. Auch hier muss ich die Finger nicht einzeln ausstrecken. Ich zeige fünf *(die Lehrkraft streckt eine volle Hand aus)* und überlege wie viele Finger fehlen auf acht, drei Finger. *(Die Hauptlehrkraft streckt gleichzeitig drei Finger der anderen Hand aus.)* Acht, das sind alle Finger auf einer Hand und drei

- Finger der anderen Hand. Versuch es nochmals Luis und denk dieses Mal an die „Kraft der Fünf“.
- 10 Max: *(Die Hauptlehrkraft steckt den Kopf wieder unter die Tischplatte.)* Komm Luis, zeig sieben! sieben! Und denk an unseren Trick!
- 11 Luis: *(Luis zeigt die Anzahl unter der Tischplatte. Er streckt sofort fünf Finger der linken Hand gleichzeitig aus. Er macht eine kurze Pause. Dann streckt er zwei Finger der rechten Hand aus.)* Sieben, fünf und *(er macht eine kurze Redepause)* zwei ist sieben.
- 

### ***Fingerbilder, die nach und nach nicht-zählend ermittelt werden***

Die Aufgabe, Finger verdeckt unter der Tischplatte zu zeigen, wird von beiden Buben unterschiedlich gelöst. Max zeigt sechs als fünf und eins mit einer Ausstreckbewegung. Luis zeigt acht mit den Fingern, indem er die Finger einzeln hochzählt (Abschnitt 3.2.2). Dazu streckt er einen Finger nach dem anderen der linken Hand aus; dann einzeln drei der anderen Hand. Die Hauptlehrkraft bittet Luis im Anschluss an diese Aktivität nochmals nachzudenken, wie er acht Finger geschickter zeigen könnte. Nach einer Nachdenkpause gelingt es Luis, das bisher erlernte Wissen zur „Kraft der Fünf“ bei dieser Aufgabe anzuwenden: Acht besteht aus „fünf und ... drei.“ Bei sieben nützt er bereits dieses Wissen: Er streckt fünf Finger an einer Hand gleichzeitig aus, überlegt weiter und streckt dann zwei Finger der anderen Hand gleichzeitig aus. **Die beiden Nachdenkpausen von Luis in dieser Szene lassen vermuten, dass er die Zeigeweise der Zahl acht und der Zahl sieben noch nicht automatisiert hat.**

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein VII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein VII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt:



**Tabelle 81**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein VII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
|                                  |                                             |                                         | X                                        |                               |

### ***Fehlerkultur und Leistungsbewertung***

Der Hauptlehrkraft gelingt es, Luis auf den *nicht-zielführenden* Fingergebrauch des einzelnen Ausstreckens und Abzählens der Finger hinzuweisen. Dazu fordert sie ihn nochmals auf, darüber nachzudenken, wie er acht „geschickter“ zeigen könne. An dieser Stelle war es lohnend eine Überlegungspause, um über die Aktivität des Unterrichts nachzudenken, und wie in Abschnitt 3.3.1 bereits von Breidenbach 1963 gefordert, zu nutzen.

Die Hauptlehrkraft streckt zur Verdeutlichung von zählendem und nicht-zählendem Einsatz der Finger einen Finger nach dem anderen aus, bis sie bei acht ankommt. Luis erinnert sich an die „Hauptzeigeweise“: Die Zahlen bis fünf werden an einer Hand dargestellt; sie müssen nicht nochmals abgezählt werden, sondern können in einer Bewegung ausgestreckt werden (Abschnitt 2.2.1).

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ zu Baustein VII ist beschreiben, dass alle Zahlzerlegungen gemeinsam verbalisiert werden sollten. An dieser Stelle ist es kein produktives Nutzen von Fehlern, sondern die Hauptlehrkraft gibt ihm klare Rezepte vor, wie er acht mit Hilfe der „Hauptzeigeweise“ zeigen könne. Diese „Hauptzeigeweise“ kann zwar als Anker für Kinder wie Luis sein, dennoch sollten alle weiteren Zerlegungen besprochen werden. So greift die Hauptlehrkraft an dieser Stelle ein, um den vermeintlichen Lösungsweg als gut gemeinte Alternative vorzuschlagen. Lohnend wäre es an dieser Stelle alle Zerlegungen in deren Verständnistiefe zu erkunden.

Anna und Rosa werden nun folgend in Baustein IX bei den gemeinsamen Aktivitäten zu „Blitzblick-Memory“ beschrieben. Tabelle 82 beschreibt die Aktivitäten und Aussagen beider Kinder:

**Tabelle 82**

*Anna und Rosa (Blitzblick-Memory) (eigene Darstellung)*

---

|   |       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Rosa: | Ich bin an der Reihe. <i>(Rosa dreht eine Karte um und zählt die dargestellte Anzahl der Würfelfünf einzeln aus.)</i> Eins, zwei, drei, vier, fünf. <i>(Sie dreht eine zweite Karte um und zählt die dargestellte Anzahl der Fingerbilddarstellung.)</i> Eins, zwei, drei. Passt nicht, du bist an der Reihe!                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2 | Anna: | <i>(Anna dreht eine Karte um und nennt die Anzahl sofort.)</i> Drei. <i>(Sie dreht eine weitere Karte um und nennt die Anzahl wiederum sofort.)</i> Drei. Die zwei passen. Ich bin nochmals dran! <i>(Sie dreht eine weitere Karte um, schaut die Darstellung eine Zeit an und zählt dann die Anzahl der Punkte einzeln aus.)</i> Ui...das sind viele Punkte! Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs. <i>(Sie deckt eine zweite Karte um und geht wiederum zählend bei der Anzahl der Finger vor.)</i> Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun. Die passen mal nicht zusammen. Du bist an der Reihe! |
| 3 | Rosa: | <i>(Dreht eine Karte um und nennt die Anzahl sofort.)</i> Eins. <i>(Sie dreht eine weitere Karte um und nennt die Anzahl sofort.)</i> Zwei. Mist!                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| 4 | Anna: | Ich bin an der Reihe! <i>(Anna dreht eine Karte um und nennt die Anzahl sofort.)</i> Vier. <i>(Sie dreht eine weitere Karte um und nennt die Anzahl wieder sofort.)</i> Vier. Ich hab schon wieder ein Paar! <i>(Sie dreht eine weitere Karte um und schaut die Anzahl der Würfel an.)</i> Schon wieder so viele Punkte! <i>(Anna dreht eine weitere Karte um und wartet eine Weile.)</i> Ui...da sind viele Punkte! Die Karte ist mir zu schwierig! <i>(Sie dreht beide Karten um, ohne die Anzahlen zu bestimmen.)</i>                                                                                          |

---

Diese beobachtete Unterrichtseinheit aus Baustein IX wird nicht mit den Dimensionen von Steinweg (2010, 2011) eingeschätzt, da die Lehrkraft in dieser Sequenz nicht mit den Kindern Anna und Rosa agiert und somit keine Handlungsmöglichkeiten beschrieben werden können.

Luis und Max werden in Baustein XII nochmals bei deren gemeinsamen Aktivitäten „Finger-Schnipp-Schnapp“ beobachtet. Tabelle 83 beschreibt die Aktivitäten und die Aussagen der Kinder:

**Tabelle 83**

*Max und Luis (Finger-Schnipp-Schnapp: Zehn gewinnt) (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|---|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Max und Luis:   | Schere, Stein, Papier. <i>(Beide Kinder strecken gleichzeitig Finger aus. Luis zwei Finger an der einen Hand und zwei Finger an der anderen und Max vier Finger an der einen und einen Finger an der anderen Hand.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 2 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft kommt hinzu und beobachtet das Arbeiten der Kinder.)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3 | Luis:           | <i>(Luis zählt mit dem Zeigefinger seiner linken Hand alle ausgestreckten Finger einzeln ab.)</i> Warte, lass kurz ausgestreckt. <i>(Er tippt jeden ausgestreckten Finger von Max an und zählt.)</i> Eins, zwei, drei, vier. <i>(Bei vier hält er kurz inne, schaut auf die nächste Hand und beginnt dort einzeln weiter zu zählen.)</i> Fünf, sechs. Und jetzt noch die Finger von mir. <i>(Luis tippt beide ausgestreckten Finger mit seinem Zeigefinger an.)</i> Sieben, acht. <i>(Nach einer Pause schaut er die Hauptlehrkraft fragend an.)</i> Ich hatte doch einen Finger ausgestreckt, oder? Oder waren es zwei? Also dann wären es neun, zehn. <i>(Er streckt die beiden Finger der anderen Hand einzeln aus.)</i> Richtig? |
| 4 | Hauptlehrkraft: | Jungs, wisst ihr noch, wer wie viele Finger ausgestreckt hat? Max?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 5 | Max:            | <i>(Max sagt bestimmend.)</i> Ja klar! Also ich hatte vier <i>(er streckt nochmals gleichzeitig vier Finger der einen Hand aus)</i> und zwei <i>(er streckt gleichzeitig zwei Finger der anderen Hand aus)</i> und du hattest zwei und EINS. Nicht zwei und zwei.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 6 | Hauptlehrkraft: | <i>(Die Hauptlehrkraft nickt bejahend.)</i> So ist es, Max. Du hattest vier und zwei und du, Luis hattest zwei und eins. Wie viele sind das insgesamt?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 7 | Max:            | Also insgesamt sind das neun. Weil vier und zwei sind sechs <i>(er zeigt seine ausgestreckten Finger an beiden Händen)</i> und zwei von dir sind acht und eins ist neun.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 8 | Hauptlehrkraft: | Gut gemacht Max und Luis. Dann dürft ihr weiterspielen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

### ***Gesamtanzahl der Finger, die nur zählend ermittelt wird***

Die Aufgabe, die Gesamtanzahl der ausgestreckten Finger zu ermitteln, kann Luis nur zählend lösen. Einen Finger nach dem anderen tippt er an und zählt die Anzahl aus (Abschnitt 2.2.1). Er ist sich unsicher, ob er selbst zwei oder einen Finger an der anderen Hand ausgestreckt hatte. Die Hauptlehrkraft fragt im Anschluss, ob sie noch wüssten, wie viele Finger sie ausgestreckt hatten. Max beantwortet diese Frage, indem er die Teilanzahl der ausgestreckten Finger ermittelt. Er verbalisiert die Teile im Ganzen: „Weil vier und zwei sind sechs und zwei von dir sind acht und eins ist neun.“

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein XII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein XII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach dem Kriterium „Fehlerkultur, Leistungsbewertung“ eingeschätzt:

**Tabelle 84**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein XII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung, Mentale Bilder | Aufgabenqualität, Problemstellungen | Denkfreiheit, Kommunikation | Fehlerkultur, Leistungsbewertung | Ziel, Zieltransparenz |
|----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|-----------------------|
|                            | X                                   |                             | X                                |                       |

### ***Fehlerkultur und Leistungsbewertung***

In dieser Szene gelingt es der Hauptlehrkraft nicht, Luis auf den *nicht-zielführenden* Fingergebrauch des einzelnen Abzählens der Finger hinzuweisen. Sie begnügt sich mit der Antwort von Max, der das nicht-zählende Erfassen strukturierter Fingeranzahlen bereits verinnerlicht hat und dieses verbalisieren kann.

An dieser Stelle ist es kein produktives Aufgreifen der Hauptlehrkraft von Fehlern. Bereits in Baustein VII (Tabelle 80) zeigte Luis Unsicherheiten, die Finger nicht-zählend zu verwenden. Die Hauptlehrkraft forderte ihn an dortiger Stelle auf, nochmals darüber nachzudenken, *wie* er acht „geschickter“ zeigen könne. Dabei erinnerte sich Luis an die

„Hauptzeigeweise“: Die Zahlen bis fünf werden an einer Hand dargestellt; sie müssen nicht nochmals abgezählt werden, sondern können in einer Bewegung ausgestreckt werden (Abschnitt 2.2.1).

### ***Aufgabenqualität und Problemstellungen***

Bereits die beiden Nachdenkpausen von Luis im Rahmen der Arbeit an Baustein VII ließen vermuten, dass er die Zeigeweisen der Zahl acht und der Zahl sieben noch nicht automatisiert hat. Dementsprechend sind weiterführende und aufbauende Aktivitäten, wie hier in Baustein XII, verfrüht. Es liegt nahe zu begründen, dass diese Aktivitäten nicht in seiner „Zone der nächsten Entwicklung“ (Vygotskij, 1987) lagen.

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ aus Baustein XII und bei dem Spiel „Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/Zehn gewinnt“ aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2017) ist beschrieben, dass es „in der Spielbegleitung vor allem darauf ankommt zu beobachten, ob Kinder die Gesamtzahl der von Spieler 1 und Spieler 2 ausgestreckten Finger zählend ermittelt wird. Wenn dies noch der Fall ist, ist das Spiel vielleicht verfrüht, und andere Aktivitäten wären zielführender“. Deswegen wird in der Handreichung Aktivität 5, „Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen“ aufgelistet.

**Im Anschluss an oben beschriebene Unterrichtsaktivität wurde im Rahmen einer Nachbesprechung mit der Hauptlehrkraft kommuniziert, dass es mit Luis lohnend ist, die vereinfachte Variante wie in Aktivität 5 beschrieben, zu machen. Dieser Aktivität vorausgehend, wurde gemeinsam mit Luis und außerhalb des Unterrichtsgeschehens alle Zahlzerlegungen, wie in Unterrichtsbaustein VII beschrieben, thematisiert und Schritt für Schritt automatisiert.** Erst nach einer gewissen Zeit dieser Festigung wurde mit Luis die oben dargestellte Aktivität des „Finger-Schnipp-Schnapps“ durchgeführt. Allerdings wurde nicht sofort die schwierigere Variante „Zehn gewinnt“ gespielt, sondern die vereinfachte Form „Fünf gewinnt“.

### **9.4.3 Fachsprache der Mathematik**

Zur Kategorie *Fachsprache der Mathematik* werden die Subkategorien Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens und Fachlich verständliche Arbeitsaufträge zugeordnet.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.3:

**F 2.3: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte*?**

Verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* ( $N = 395$ ) zeigen sich in 16,0 % der Szenen der Kategorie *Fachsprache der Mathematik* Probleme in der Umsetzung. Tabelle 84 zeigt, dass 0,8 % der Szenen Baustein V, 0,8 % der Szenen Baustein VI, 4,8 % der Szenen Baustein VII, 5,6 % der Szenen Baustein VIII, 0,2 % der Szenen Baustein X, 0,5 % der Szenen Baustein XI und 3,3 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* ( $N = 301$ ) gibt es in 21,0 % der Szenen Schwierigkeiten. Davon können 1,0 % der Szenen Baustein V, 1,0 % der Szenen Baustein VI, 6,3 % der Szenen Baustein VII, 7,3 % der Szenen Baustein VIII, 0,3 % der Szenen Baustein X, 0,7 % der Szenen Baustein XI und 4,3 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

**Tabelle 85***Häufigkeit von Fachsprache der Mathematik (eigene Darstellung)*

| Kategorie                                                | Fachsprache der Mathematik |
|----------------------------------------------------------|----------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                         | 63                         |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V        | 3                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI       | 3                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VII      | 19                         |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII     | 22                         |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein X        | 1                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XI       | 2                          |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XIII     | 13                         |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ) | 16,0                       |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                     | 0,8                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                    | 0,8                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VII                   | 4,8                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VIII                  | 5,6                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein X                     | 0,2                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XI                    | 0,5                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XIII                  | 3,3                        |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie             | 21,0                       |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte ( $N = 301$ )             | 1,0                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                     | 1,0                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                    | 6,3                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VII                   | 7,3                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VIII                  | 0,3                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein X                     | 0,7                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XI                    | 4,3                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XIII                  |                            |

#### 9.4.3.1 Kategorie Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens

Nachfolgend steht die Beantwortung der Frage im Interesse, ob, wie häufig und inwiefern sich stoffliche Hürden bei der *Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens* der Kategorie Fachsprache der Mathematik zeigen.

Beantwortet dazu wird die Forschungsfrage 2.3.1:

**F 2.3.1: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung?**

### *Häufigkeit der Kategorie Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens*

Verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen*, zeigen sich, wie in Tabelle 85 ersichtlich, in 10,4 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens. Davon gehören 4,8 % der Szenen zu Baustein VII, 5,6 % der Szenen zu Baustein VIII.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 13,6 % der Szenen Probleme. Davon werden 6,3 % der Szenen dem Baustein VII und 7,3 % der Szenen dem Baustein VIII zugeschrieben.

**Tabelle 86**

*Häufigkeit von Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                             | Verbalisierung des TGD |
|----------------------------------------------------------|------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                         | 41                     |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VII      | 19                     |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII     | 22                     |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ) | 10,4                   |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VII                   | 4,8                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VIII                  | 5,6                    |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie             | 13,6                   |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte ( $N = 301$ )             |                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VII                   | 6,3                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VIII                  | 7,3                    |

Der nun folgende Transkriptausschnitt aus Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte ersetzen – zeigt exemplarisch, dass Lehrkräfte zwar verschiedene Zerlegungen zu einer Zahl – hier mit den Fingern darstellten („so und so und so auch“) –, häufig aber nicht Teile-Ganzes-Beziehungen *verbalisierten* (Abschnitt 2.2.3). In dieser Sequenz wäre es dringend lohnend, von Anfang an in der Klasse über Lösungswege zu sprechen und gemeinsam mit den Kindern zu verbalisieren, was in der Mathematik steckt. An mehreren Stellen der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ wird darauf hingewiesen, dass die Lehrkräfte mit den Kindern auf Formulierungen hinarbeiten sollen wie beispielsweise: „In der acht steckt fünf und drei drinnen.“ „Acht besteht aus fünf und drei.“

Erst später (so das Ziel und im Sinne der fortschreitenden Automatisierung) haben die Kinder Zerlegungen und Zusammensetzungen verinnerlicht und der gesamte Vorgang



läuft „im Kopf“ ab, wie beispielsweise: „Neun kann ich als fünf und vier zeigen. Wenn ich von den neun die fünf wegnehme, bleiben die vier übrig. Wenn ich von den neu die vier wegnehme, dann bleiben die fünf übrig. Vier und fünf zusammen, und es sind wieder neun.“

Auch die in der folgenden Szene dargestellte Stützlehrkraft verbalisierte nicht die Teile-Ganzes-Beziehungen und es wurden auch keine weiteren Zerlegungen von ihr angeregt (Abschnitt 9.4.2.3: Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen). Entscheidend wäre an dieser Stelle die konkrete Verbalisierung der Zerlegung von der Zahl drei als „zwei und eins“ und „eins und zwei“ und vielleicht auch „null und drei“ und „drei und null“. Stattdessen beschränkte sich die Stützlehrkraft auf eine Verbalisierung mit „so und so und so auch“:

**Tabelle 87**

*Baustein VII – Wirkliche Finger durch vorgestellte ersetzen (eigene Darstellung)*

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6 | Stützlehrkraft: | Das habt ihr beide super gemacht. Anna, hol mal deine Hände so wie du sie jetzt ausgestreckt hast vor das Gesicht. <i>(Anna kommt der Aufforderung nach und gibt die Hände sichtbar auf den Tisch.)</i> Schaut mal beide, Rosa zeigt drei, indem sie den Mittelfinger, Zeigefinger und den Daumen ausstreckt. Und Anna, du zeigst drei mit einem Finger an dieser Hand und zwei Fingern an der anderen. Stimmt beides, Rosa? |
| 7 | Rosa:           | <i>(Rosa betrachtet die unterschiedlichen Zeigeweisen. Sie zählt die Anzahl der Finger von Anna laut ab und nickt dabei für jede Zahl mit dem Kopf.)</i> Eins, zwei, drei! <i>(Dann drückt sie nochmals leicht ihre ausgestreckten Finger, zuerst den Daumen, dann den Zeigefinger, und dann den Mittelfinger und zählt laut.)</i> Eins, zwei, drei! Stimmt!                                                                 |
| 8 | Stützlehrkraft: | Genau, Rosa. Gut erkannt! Zahlen sind nun einmal vielfältig. Ich kann drei so <i>(Sie streckt den Daumen, den Zeigefinger und den Mittelfinger der linken Hand aus)</i> , oder so zeigen. <i>(Sie streckt den Zeigefinger der rechten und den Daumen und den Zeigefinger der linken Hand aus.)</i> Geht es noch anders?                                                                                                      |
| 9 | Anna:           | Ja klar. Ich kann auch drei so zeigen, <i>(Sie streckt den Daumen und den Zeigefinger der linken Hand aus und den Daumen der rechten Hand.)</i> oder so <i>(Sie streckt den kleinen Finger, Mittelfinger und Ringfinger der rechten Hand aus.)</i> , oder einfach auch so <i>(sie streckt beide Daumen aus und den Zeigefinger der linken</i>                                                                                |

*Hand*).

- 10 Stützlehrkraft: Ganz genau. Das waren jetzt sehr kreative Lösungen. Drei kann ja ganz unterschiedlich sein. So wie alle Zahlen. Das versuchen wir jetzt auch noch mit anderen Zahlen.

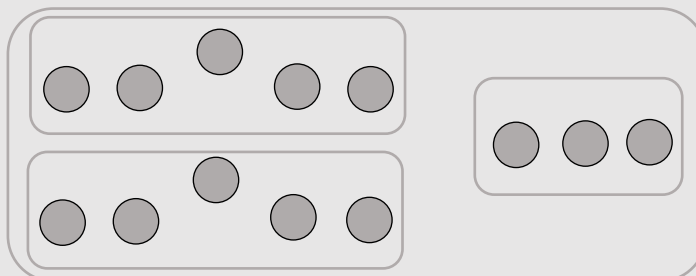
**Wie exemplarisch in dieser Fallbeschreibung dargestellt, ist es entscheidend darauf zu achten, dass die Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens explizit bei Lernenden angeleitet wird.** Vor diesem Hintergrund müssen die Kinder immer wieder dazu aufgefordert werden, zu beschreiben, auf welche Weise sie eine Aufgabe gelöst haben. Auch ist es unentbehrlich, dass eine Verbalisierung durch die Lehrkraft bzw. der Stützlehrkraft selbst geschieht und weitere Zerlegungen bewusst angeregt werden.

Bei der nachfolgenden Szene aus **Baustein VIII** – beliebige Anzahlen strukturiert legen –, wird von der Hauptlehrkraft eine Aktivität zur Zahlzerlegung im Zahlenraum 20 gewählt, die sie vorher noch nicht im Klassenverband thematisiert haben. Die Hauptlehrkraft bittet das Mädchen dreizehn Plättchen strukturiert zu legen und die Teile und das Ganze in Worte zu fassen. Julia geht so vor: Sie legt fünf Plättchen linear in einer Reihe und verschiebt ein Plättchen nach oben; dann legt sie nochmals dasselbe Muster und gliedert noch drei Plättchen dazu. Sie zeigt *gar kein* Zählverhalten und erklärt: „fünf und fünf sind zehn und drei noch dazu sind dreizehn.“ Julia zeigt am Muster, wie sie dieses in zwei Reihen mit je fünf linearen Plättchen und „noch drei dazu“ gliedert. Sie hat die Anzahlen der Teile – mit Nutzung der „Kraft der Fünf“ – unmittelbar (ohne abzuzählen) erfasst (Abschnitt 3.2.2). Sie zeigt somit einiges an Wissen über Zahlbeziehungen und kann dieses Wissen bereits sehr gut in Worte fassen.

**Tabelle 88**

*Baustein VIII – Schnelles Sehen (eigene Darstellung)*

- 4 Julia: Hmm ... dreizehn Plättchen. *(Julia überlegt eine Weile.)* Dreizehn. Das ist eine große Zahl! *(Julia überlegt weiter.)* Ich hab was. So geht's! Warte!



- 5 Hauptlehrkraft: *(Die Hauptlehrkraft sieht, dass Julia dreizehn Plättchen strukturiert legt. Sie legt fünf Plättchen in linearer Anordnung und verschiebt ein Plättchen nach oben. Dann legt sie dasselbe Muster nochmals unterhalb, fünf Plättchen linear und eins nach oben. Sie legt weitere drei Plättchen linear.)* Toll, einfach toll hast du das gemacht! Es sind dreizehn Plättchen. Ich sehe es mit zwei ... oder drei Blicken. Wie hast du geschaut?
- 6 Julia: *(Julia lächelt und blickt auf die Plättchen.)* Schau, es sind fünf *(sie zeigt mit dem Zeigefinger am Muster, wie sie fünf Plättchen erkennt)* und fünf *(sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger wieder fünf Plättchen)* und drei *(sie umkreist am Muster mit dem Zeigefinger drei Plättchen)* noch dazu sind dreizehn. Fünf und fünf sind zehn und drei sind dreizehn. Dreizehn! *(Julia umkreist am Muster alle Plättchen mit dem Zeigefinger.)*
- 7 Hauptlehrkraft: Toll. Einfach toll hast du das Muster gelegt und auch in Worten erklärt. Bravo!

Um die Annahme, wonach es ratsam ist auf die Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens zu achten, zu unterstreichen, steht folgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf die Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens im Interesse.

Bezogen auf die Subkategorie *Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens* werden 19 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D, Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, Stützlehrkraft C, Stützlehrkraft D aus Baustein VII und 22 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B,

Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E aus Baustein VIII beobachtet.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.3.1 beantwortet:

**F 3.3.1: Wird und – falls ja – wie wird die Verbalisierung des *Teile-Ganzes-Denkens* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des *Teile-Ganzes-Denkens* von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.3.1 zu beantworten, wird ein Verweis auf andere Abschnitte der Auswertung dieser Arbeit gegeben. Die Beschreibung des Unterrichtsbausteines VII im Ganzen ist im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3 zu finden, die Beschreibung des Unterrichtsbausteines VIII im Ganzen im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2.

#### **9.4.3.2 Kategorie Fachlich verständliche Arbeitsaufträge**

Nachfolgend steht die Beantwortung der Frage im Interesse, ob, wie häufig und inwiefern sich Hürden bei *Fachlich verständlichen Arbeitsaufträgen* der Kategorie Fachsprache der Mathematik zeigen.

Beantwortet dazu wird die Forschungsfrage 2.3.2:

**F 2.3.2: Wie häufig zeigen sich Hürden bei *Fachlich verständlichen Arbeitsaufträgen* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte bei der Umsetzung*?**

##### *Häufigkeit der Kategorie Fachlich verständliche Arbeitsaufträge*

Verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* zeigen sich, wie in Tabelle 88 ersichtlich, in 5,6 % der Szenen Schwierigkeiten in der Umsetzung der Subkategorie Fachlich verständliche Arbeitsaufträge. Davon können 0,7 % der Szenen Baustein V, 0,7 % der Szenen Baustein VI, 0,2 % der Szenen Baustein X, 0,5 % der Szenen Baustein XI und 3,3 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 7,3 % der Szenen Probleme. Davon können 1,0 % der Szenen Baustein V, 1,0 % der Szenen Baustein VI, 0,3 % der Szenen Baustein X, 0,7 % der Szenen Baustein XI und 4,3 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

**Tabelle 89**

*Häufigkeit von fachlich verständliche Arbeitsaufträge (eigene Darstellung)*

| Subkategorie                                                 | Fachlich verständliche Arbeitsaufträge |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                             | 22                                     |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V            | 3                                      |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI           | 3                                      |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein X            | 1                                      |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XI           | 2                                      |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XIII         | 13                                     |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen ( <i>N</i> = 395) | 5,6                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                         | 0,8                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                        | 0,8                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein X                         | 0,2                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XI                        | 0,5                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XIII                      | 3,3                                    |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie                 | 7,3                                    |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte ( <i>N</i> = 301)             |                                        |
| - Prozent bezogen auf den Baustein V                         | 1,0                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein VI                        | 1,0                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein X                         | 0,3                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XI                        | 0,7                                    |
| - Prozent bezogen auf den Baustein XIII                      | 4,3                                    |

Im Folgenden wird der Transkriptausschnitt aus **Baustein XIII** – Wer hat mehr? Zahldarstellungen im Zehnerfeld – dargestellt. Der Ausschnitt zeigt exemplarisch, wie wichtig fachlich richtige, sinnvoll didaktisch reduzierte und klar verständlich formulierte Arbeitsaufträge durch Lehrkräfte sind. Entscheidend wäre an dieser Stelle und darauf wurde im Rahmen des Bausteins XIII der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ klar hingewiesen, dass den Kindern deutlich wird und sie auch Raum für diese Überlegungen finden, dass das Zehnerfeld Platz für genau zehn Punkte bietet – entsprechend den zehn Fingern auf beiden Händen; jede Spalte Platz bietet für genau fünf Punkte – entspre-

chend den fünf Fingern auf je einer Hand (Abschnitt 3.2.2). Diese Einsichten und Versprachlichungen kommen am besten von den Kindern selbst. Stattdessen bemühte sich die Lehrkraft in dieser Unterrichtseinheit um eine Erklärung der Zahldarstellungen am Zehnerfeld, die sie den Kindern selbst vorgibt und somit deren möglichen Erkenntnisse vorwegnimmt:

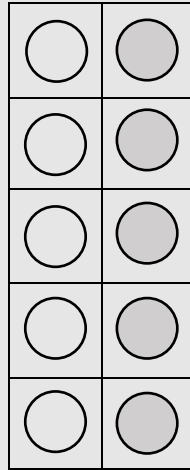
**Tabelle 90**

*Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellung am Zehnerfeld (eigene Darstellung)*

- 1    **Hauptlehrkraft:**    Ich zeige euch jetzt etwas. Passt gut auf. *(Die Lehrkraft zeigt ein Zehnerfeld „stehend“ am Activeboard. Alle Kinder sitzen am Platz und sind angeregt mit der Lehrkraft dieselbe Aufgabe mitzudenken. Die Kinder selbst haben kein Zehnerfeld am Platz zum Legen.)* Schaut mal Kinder, was fällt euch auf?

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

- 2    **Jonathan:**    Da sind zehn Felder! *(Jonathan zeigt mit dem Zeigefinger auf das Zehnerfeld am Activeboard.)* Fünf und fünf!
- 3    **Hauptlehrkraft:**    Genau, Jonathan. Super gemacht. Jede Spalte hat Platz für genau fünf Punkte. Fünf hier *(Sie bildet ein Plättchen nach dem anderen auf der linken Spalte mit weißen Kreisen ab.)* und fünf hier *(Sie bildet ein Plättchen nach dem anderen auf der rechten Spalte ab mit grauen Kreisen.)*



Das ist ganz gleich wie bei unseren Fingern. Wir haben hier fünf (*Sie zeigt fünf Finger der linken Hand.*) und hier fünf (*Sie zeigt fünf Finger der rechten Hand.*) Zusammen sind das wie bei unseren Fingern genau zehn Punkte.

Um diese Annahme zu unterstreichen, wonach es ratsam ist auf fachlich verständliche Arbeitsaufträge und auf fachliche korrekt Verbalisierungen zu achten, steht folgend die Begleitung der fachlichen Lernprozesse von der Lehrkraft beziehungsweise den Lehrkräften bezogen auf die Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* im Interesse.

Bezogen auf die Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* werden 3 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D aus Baustein V, 3 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B und der Hauptlehrkraft D aus Unterrichtsbaustein VI, und 1 Unterrichtsszene aus Baustein X mit der Hauptlehrkraft A beobachtet. 2 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft D sind aus Baustein XI und 13 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C und der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C sind aus dem Baustein XIII entnommen.

Nachfolgend wird eine dieser Beobachtungen mit den Lehrkräften aus Baustein XIII im Ganzen betrachtet.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.3.2 beantwortet:

**F 3.3.2: Werden und – falls ja – wie werden *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Bei den Aktivitäten des Unterrichtsbausteins V im „Handbuch zur Durchführung der Bausteine“ (siehe auch im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) wird die Notwendigkeit von fachlich richtigen und vor allem sinnvoll reduziert formulierten Arbeitsaufträgen durch Lehrkräfte beschrieben.

Auch im Rahmen der Aktivitäten des Unterrichtsbausteins VI wird im „Handbuch zur Durchführung der Bausteine“ (siehe auch im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.1) hingewiesen, dass die Sprechweise und Verstehen von „um \_\_\_ mehr/weniger“ anfänglich für einige Kinder irritierend sein können. Aus gutem Grund wird deswegen bei der Spielvariante Plättchenwerfen aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2017) darauf hingewiesen: „Konkretere, daher für den Einstieg geeignete Formulierungen, um den Unterschied zu benennen: ‚Ich habe zwei, die du nicht hast.‘ ‚Mir fehlen zwei auf die, die du hast.‘ Ziel bleibt die Sprechweise ‚um \_\_\_ mehr/weniger‘.“

Bei den Aktivitäten des Unterrichtsbausteins X „um eins mehr mit den Fingern aufbauen“ wird im „Handbuch zur Durchführung der Bausteine“ beschrieben, dass Kinder durch gezieltes Nachfragen zum Nachdenken über ihr Handeln angeregt werden sollen: „Wenn ich zähle: eins, und noch einen Finger dazu macht zwei; und noch einen Finger dazu macht drei...wie ändern sich die Zahlen?“ Durch diese fachlich verständlichen Arbeitsaufträge soll (so das Ziel) die Erkenntnis von den Kindern kommen, dass es immer um genau einen Finger mehr wird.

Auf eine ähnlich fachliche Sprechweise wird in Baustein XI „um eins weniger mit den Fingern“ verwiesen. Bei dieser absteigenden Zahlwortreihe werden Aktivitäten vorgeschlagen, bei denen auf eine fachlich reduzierte Sprechweise zu achten ist: „Begleitend



zum Zählen als ‚Countdown‘ wird die jeweilige Anzahl an Fingern gezeigt: ‚Das sind zehn Finger.‘ Pause, einen Finger weg. ‚Jetzt sind es neun.‘ Pause, einen Finger weg, usw.“

Nachfolgend folgt die Beschreibung des Unterrichtsbausteines XIII im Ganzen.

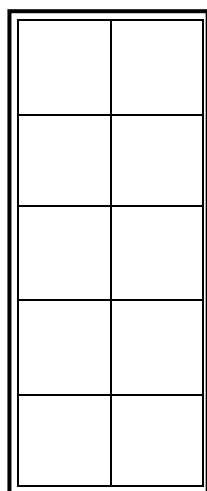
Bei den Aktivitäten von **Baustein XIII** soll die Bedeutung von fünf und zehn als „Stützpunkt-Zahlen“ auch mit Hilfe des Zehnerfeldes deutlich werden. Dazu zeigt die Lehrkraft den Kindern eine strukturierte Zahldarstellung am Zehnerfeld (Activeboard). Die Kinder sollen angeregt werden, genau zu beschreiben, was sie auf der Darstellung sehen; und auf welche Weise sie es sehen. Den Kindern soll, wenn nötig durch gezieltes Fragen, ermöglicht werden zu erkennen, dass der Rahmen Platz bietet für zehn Punkte in zwei Reihen zu je fünf Punkten; also genau gleich wie bei den 10 Fingern auf zwei Händen zu je 5 Fingern. Die Lehrkraft stellt weitere, gezielte Fragen zu Zusammenhängen im Zehnerfeld mit den ihnen vertrauten Fingerdarstellungen: „Wie siehst du schnell, dass das acht Punkte sind?“ Wenn möglich sollte die Erkenntnis von den Kindern kommen, dass z.B. acht Punkte als fünf und noch drei angeordnet sind; genau wie bei den Fingern. In der nachfolgenden Beschreibung wird ein Klassengespräch beobachtet:

**Tabelle 91**

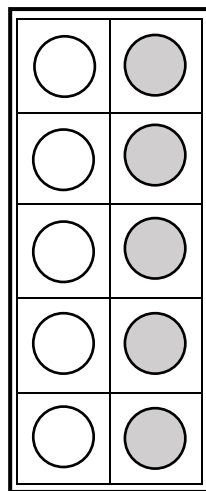
*Klassengespräch (Zahldarstellung am Zehnerfeld) (eigene Darstellung)*

---

|   |                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Hauptlehrkraft: | Ich zeige euch jetzt etwas. Passt gut auf. <i>(Die Lehrkraft zeigt ein Zehnerfeld „stehend“ am Activeboard. Alle Kinder sitzen am Platz und sind angeregt mit der Lehrkraft dieselbe Aufgabe mitzudenken. Die Kinder selbst haben kein Zehnerfeld am Platz zum Legen.)</i> Schaut mal Kinder, was fällt euch auf? |
|---|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

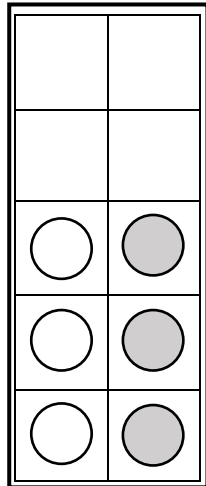


- 2 Jonathan: Da sind zehn Felder! *(Jonathan zeigt mit dem Zeigefinger auf das Zehnerfeld am Activeboard.)* Fünf und fünf!
- 3 Hauptlehrkraft: Genau, Jonathan. Super gemacht. Jede Spalte hat Platz für genau fünf Punkte. Fünf hier *(Sie bildet ein Plättchen nach dem anderen auf der linken Spalte mit weißen Kreisen ab.)* und fünf hier *(Sie bildet ein Plättchen nach dem anderen auf der rechten Spalte ab mit grauen Kreisen.)*



Das ist ganz gleich wie bei unseren Fingern. Wir haben hier fünf *(Sie zeigt fünf Finger der linken Hand.)* und hier fünf *(Sie zeigt fünf Finger der rechten Hand.)* Zusammen sind das wie bei unseren Fingern genau zehn Punkte.

Super. Und jetzt passt gut auf, weil ich zeige euch jetzt Punktedarstellungen. Aber nur ganz kurz. Also schau genau. *(Die Hauptlehrkraft zeigt am Activeboard eine Punktedarstellung am Zehnerfeld „im Blitzblick“ und eben nur so lange, dass die Kinder diese nicht zählen konnten.)* Wie viele siehst du?



- 4 Ilke: Das sind sechs Punkte. Drei (*Ilke streckt drei Finger der linken Hand mit Daumen-, Mittelfinger- und Zeigefinger aus*) und drei (*er steckt drei Finger der rechten Hand mit Daumen-, Mittelfinger- und Zeigefinger aus*) sind sechs (*er führt beide Hände mit den ausgestreckten Fingern vor der Körpermitte zusammen.*) Genau wie du kurz gezeigt hast mit den Punkten.
- 5 Hauptlehrkraft: (*Die Hauptlehrkraft stellt das Zehnerfeld mit den Punkten wieder am Activeboard dar.*) Ilke, das hast du sehr gut erkannt. Es sind sechs Punkte. Und weiter geht's. (*Die Hauptlehrkraft zeigt am Activeboard eine weitere Punktedarstellung am Zehnerfeld „im Blitzblick“.*)

### **Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld, die nicht-zählend erfasst werden**

Die Aufgabe, vom Zehnerfeld in „stehender“ Anordnung, welches in dieser Einheit zum ersten Mal im Klassenzimmer thematisiert wird, einen Bezug zu den beiden Händen herzustellen, wird in dieser Szene gemeinsam mit allen Kindern im Klassenverband gemacht. Dabei zeigt die Hauptlehrkraft ein Zehnerfeld am Activeboard und die Kinder sitzen am Sitzplatz, ohne ein Zehnerfeld vor sich am Platz zu haben. Auf die Frage der Hauptlehrkraft, was den Kindern bei dem Zehnerfeld auffalle, kann Jonathan antworten, dass es zehn Felder, somit fünf und fünf, seien.

Die Hauptlehrkraft nimmt diese Aussage auf und stellt von sich aus den Bezug zu den Händen her. Sie selbst erklärt den Kindern, dass jede Spalte des Zehnerfeldes Platz für genau fünf Punkte habe. Das Zehnerfeld sei als Entsprechung zu den beiden Händen zu verstehen. Gleich im Anschluss an diese Aktivität fordert die Hauptlehrkraft die Kinder auf, die Punktedarstellung sechs im „Blitzblick“ zu erkennen. Dazu zeigt sie die struktu-

rierte Zahldarstellung nur kurz und so lange, dass die Kinder diese nicht abzählen können. Ein weiteres Kind dieser Klasse, Ilke, kann diese strukturierte Zahldarstellung von sich aus mit Bezug zu den Händen in Worte fassen. Es seien sechs Punkte. Drei und drei (wie bei den Händen) ergeben zusammen sechs. Daraufhin zeigt die Hauptlehrkraft eine weitere Zahldarstellung im „Blitzblick“.

### **Einschätzung der Qualität der Lehr-Lernsituationen von Baustein XIII im mathematischen Anfangsunterricht nach Steinweg (2010, 2011)**

Die in Unterrichtsbeobachtung zu Baustein XIII beschriebene Lernbegleitung der *Hauptlehrkraft* wird anhand des von Susanne Steinweg (2010, 2011) erarbeiteten Instruments der ‚Qualität von Lehr-Lern-Situationen im mathematischen Anfangsunterricht‘ nach dem Kriterium „Denkfreiheiten, Kommunikation“ eingeschätzt:

**Tabelle 92**

*Einschätzung pädagogisch-fachlicher Qualität von Baustein XIII anhand der Dimensionen von Steinweg (2010, 2011)*

| Anschauung,<br>Mentale<br>Bilder | Aufgabenqualität,<br>Problem-<br>stellungen | Denkfreihei-<br>ten, Kommuni-<br>kation | Fehlerkultur,<br>Leistungs-<br>bewertung | Ziel,<br>Zieltranspa-<br>renz |
|----------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------------|
| X                                |                                             |                                         |                                          |                               |

#### **Denkfreiheiten und Kommunikation**

Der Hauptlehrkraft zeigt am Activeboard das „stehende“ Zehnerfeld als Entsprechung zu den beiden Händen. Bei dieser „stehenden“ Anordnung kann der Bezug zu den beiden Händen für manche Kinder leichter herstellbar sein als bei der „liegenden“ und wurde so auch ausdrücklich in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ beschrieben.

Dennoch kann man nicht davon ausgehen, dass dieser Bezug zu den Händen für alle Kinder sofort klar ist. In jedem Fall ist dieser Bezug eine gedankliche Leistung, die ein Kind erst erbringen muss. Fehlt diese zielgerichtete Aufmerksamkeit, dann können die Kinder an solchen Darstellungen nichts erkennen, außer eine Anordnung von Punkten. Ein tragfähiges Wissen über Zahlbeziehungen (Bezug zu fünf und zehn) erlangen sie dabei aber nicht (Abschnitt 2.2.3 und Abschnitt 2.2.3.1).

**An dieser Stelle wäre es wünschenswert gewesen und wesentliche Überlegungen in diese Richtung wurden ausdrücklich in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert, dass Kinder, wenn nötig durch gezieltes Fragen durch die Lehrkraft, selbst erkennen und verbalisieren, dass das Zehnerfeld Platz für genau zehn Punkte bietet. Auch den Bezug zu den beiden Händen mit fünf und fünf sollten die Kinder im besten Fall selbst erkennen.** Dazu sind gezielt einzusetzende Überlegungspausen (Breidenbach 1963; siehe dazu auch Abschnitt 3.3.1) im Unterricht lohnend.

Stattdessen nutzte die Hauptlehrkraft an dieser Stelle sehr klare und vorgegebene Rezepte im Sinne der Imitation und erklärte selbst – ohne die Kinder nach deren Vorstellungen zu fragen – den Bezug zu den Händen. Auch erarbeitet die Hauptlehrkraft keine weiteren Zusammenhänge im Zehnerfeld mit den ihnen vertrauten Fingerdarstellungen. In dieser Unterrichtsaktivität wäre es zudem lohnend gewesen, das Kommunizieren und Argumentieren der Kinder erst zu ermöglichen, anzuleiten und in weiterer Folge in besonderer Weise gezielt durch Fragen zu begleiten: „Wie siehst du schnell, dass das sechs Punkte sind? Kannst du das auch in Bezug zu deinen Fingern erklären?“ Eine wesentliche Aufgabe der Lehrkraft besteht gerade darin, die Kinder zum inhaltsbezogenen Kommunizieren und Argumentieren über ihr mathematisches Tun und Denken im Mathematikunterricht anzuregen und auch fachlich zu begleiten (Abschnitt 3.3.1).

Bei den weiterführenden Aktivitäten aus **Baustein XIII** spielen die Kinder die Spielvariante „Würfeln“ aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2017). Die Kinder bekommen zu zweit einen Spielplan mit Zehnerfeldern, einen 6er-Würfel und je ein Sammelfeld. Ein Spieler wählt rot, einer blau. Spieler eins würfelt und legt die gewürfelte Anzahl von Plättchen in sein Spielfeld. Spieler zwei ebenso. Die Spieler vergleichen: Wer hat mehr? Wenn einer mehr hat, sollte er sagen: „Ich habe ... mehr!“ Die Plättchen, die ein Spieler mehr hat, legt er in seinem Sammelfeld als Zehnerfelddarstellung ab. Die restlichen gehen jeweils zurück an den Spieler und die nächste Runde wird gespielt. Sieger ist, wer sein Sammelfeld als erster voll hat.

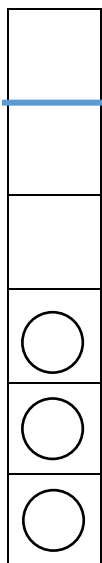
Im Folgenden wird das Kinderpaar Chiara und Maria beschrieben, die gemeinsam die Spielvariante „Würfeln“ spielen. Dieses Kinderpaar besucht dieselbe Klasse, welche im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.3.2 obenstehend beschrieben wurde.

Im Rahmen der Beschreibung des Bausteines IV (Zahlen mit Fingern darstellen; Forschungsfrage: 2.1.1) und der Beschreibung des Bausteins V (Zuordnungen; Forschungsfrage 3.1.1) werden vorangehende Aktivitäten mit Chiara betrachtet.

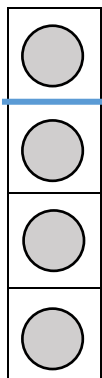
**Tabelle 93**

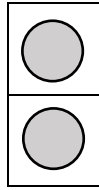
*Maria und Chiara (Spielvariante würfeln) (eigene Darstellung)*

- 1 Maria: Ich starte. *(Maria nimmt den 6er-Würfel und würfelt drei. Sie nimmt 3 Plättchen und legt drei rote Plättchen in ihr Spielfeld.)*  
Eins, zwei drei. Passt, du bist dran!



- 2 Chiara: Ich bin dran! *(Chiara würfelt eine Würfelsechs.)* Warte. Ich zähle nochmals. Wie viele sind das? *(Chiara tippt mit dem Zeigefinger jedes Feld des Spielfeldes an.)* Eins, zwei, drei, vier, fünf. *(Beim fünften Feld hält sie kurz inne und tippt aufs letzte Feld mit dem Zeigefinger).* Sechs. Es sind sechs Felder. Also muss ich alle Felder mit Plättchen legen. *(Chiara nimmt 6 Plättchen und legt eines nach dem anderen ab. Dabei zählt sich nochmals laut mit.)*  
Eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs.





- 3 Maria: Na super. Du hast gewonnen. Wie viele hast du jetzt mehr? Also wie viele darfst du in dein Sammelfeld legen?
- 4 Chiara: Wie? *(Chiara versteht die Frage nicht und bittet um Erklärung.)*  
Ich verstehe nicht, was du meinst. Kannst du es mir erklären?
- 5 Maria: Schau. Ich habe drei gewürfelt und hier *(sie zeigt auf ihr Spielfeld)* siehst du drei Plättchen. Du hast sechs Plättchen auf deinem Spielfeld *(Sie zeigt auf das Spielfeld von Chiara.)*. Du hast mehr. Also um wie viele hast du mehr?
- 6 Chiara: *(Chiara überlegt eine Weile und sagt dann ihre Antwort fragend.)*  
Sechs?
- 7 Maria: Nein. So stimmt das nicht. Du hast drei, die ich nicht habe. *(Sie zeigt auf das Spielfeld von Chiara und umkreist dieses mit dem Zeigefinger.)* Mir fehlen also drei, die du hast. *(Sie zeigt mit dem Zeigefinger auf ihr eigenes Spielfeld.)* Also hast du um 3 mehr und darfst deine 3 mehr in dein Sammelfeld legen. *(Sie nimmt drei blaue Plättchen und legt sie in das Sammelfeld von Chiara.)*  
Lass uns noch eine Runde spielen. Beginn dieses Mal du! *(Maria gibt den Würfel Chiara.)*
- 8 Chiara: Ok. Ich würfle. *(Chiara würfelt eine fünf. Wieder tippt sie jedes Feld einzeln mit dem Zeigefinger an, nimmt ein blaues Plättchen nach dem anderen und legt 5 Plättchen eines nach dem anderen ab. Sie zählt laut mit.)* Eins, zwei, drei, vier, fünf. *(Sie zählt nochmals die Felder und tippt dabei jedes Feld mit dem Zeigefinger an. Sie zählt laut mit.)* Eins, zwei, drei, vier, fünf. Du bist an der Reihe. *(Sie gibt Maria den Würfel.)*
- 9 Maria: *(Maria würfelt eine eins und legt ein blaues Plättchen in ihr Spielfeld.)* Na toll! Wieder hast du gewonnen. Wie viele hast du jetzt mehr, Chiara? Komm, gleich wie vorhin!
- 10 Chiara: *(Chiara überlegt eine Weile und sagt dann laut.)* Fünf *(sie schaut auf ihr Spielfeld)*, eins *(Sie schaut auf Marias Spielfeld. Nach einer Weile antwortet sie fragend.)* Fünf?
- 11 Maria: Nein warte, Chiara. Ich zeig es dir. Schau. Du hast vier, die ich nicht habe. *(Sie zeigt auf das Spielfeld von Chiara und umkreist dieses mit dem Zeigefinger.)* Mir fehlen also vier, die du mehr

hast. Also hast du wieder mehr, um vier mehr und darfst sie in dein Sammelfeld legen.

- 12 Chiara: *(Sie nimmt 4 Plättchen und legt sie in ihr Sammelfeld.)* Ok. Das ist lustig. Lass uns nochmals eine Runde spielen!
- 

### **Strukturierte Zahldarstellungen, die nur zählend erfasst werden**

In dieser beobachteten Spielvariante „Würfeln“ zählt Chiara die Spielfelder in beiden Spieldurchgängen einzeln ab. In der ersten Spielrunde würfelt sie eine Würfelsechs, tippt jedes Feld einzeln ab und hält beim fünften Feld inne. Einzeln abgezählt weiß sie, dass es sechs Felder sind und legt eins zu eins zugeordnet sechs Plättchen. Ähnlich geht sie in der zweiten Spielrunde mit fünf Plättchen vor.

Auf die Frage von Chiara „(um) wie viel ist \_\_\_\_ mehr als \_\_\_\_?“ nennt Chiara in beiden Spielrunden die Zahl, die mehr ist. In der ersten Spielrunde antwortet sie sechs, in der zweiten fünf. Sie zeigt in beiden Spielrunden kein Verständnis für solche Zahlvergleiche. Würfelbilder kann sie simultan erkennen.

Diese beobachtete Unterrichtseinheit wird nicht mit den Dimensionen von Steinweg (2010, 2011) eingeschätzt, da die Hauptlehrkraft in dieser Sequenz nicht mit den Kindern Chiara und Maria agiert und somit keine Handlungsmöglichkeiten der Hauptlehrkraft beschrieben werden können.

Die Autorin der vorliegenden Arbeit erlaubt sich diese Unterrichtsbeobachtung von Chiara und Maria noch einmal näher aufzugreifen, um einen Bogen zu der oben beschriebenen Unterrichtseinheit im Klassenverband herzustellen. Das Vorgehen von Chiara bei dieser Spielvariante zeigt, dass sie Würfelbilder ohne zählen erfassen kann. Hingegen, das einzelne Abzählen der Spielfelder ist an dieser Stelle ein Rückschluss, dass das Vorgehen der Hauptlehrkraft (Beschreibung Baustein XIII und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.3.2) zu schnell war für sie. Chiara hat beim Spiel „Würfeln“ das „Sechserfeld“ und dessen Struktur mit Bezug zu fünf (farblich gekennzeichnet) nicht erfasst und vermutlich in der vorangehenden Einheit im Klassenverband auch die Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (mit Bezug zu fünf und zehn und mit Bezug zu den Händen) nicht verstanden und nicht verinnerlicht.

Diese zielgerichtete Aufmerksamkeit, Zahlen in Bezug zu fünf zu erfassen, fehlt ihr in beiden beobachteten Spielrunden. Folglich kann Chiara die Anzahl der Spielfelder nur



zählend ermitteln. Auch kann sie in beiden Runden keine Anzahlvergleiche „um \_\_\_\_ mehr/weniger“ durchführen.

Wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ klar beschrieben, sollen Kinder angeleitet werden, Punktedarstellungen im Zehnerfeld in der beschriebenen Weise in Baustein XIII selbst zu untersuchen, um in weiterer Folge Analogien (Bezug zu fünf und zehn und zu den Fingerdarstellungen) zu erkennen. **Diese wenigen Aktivitäten zum „Schnellen Sehen“ mit dem Zehnerfeld und gemeinsam im Klassenverband scheinen für Chiara nicht ausreichend gewesen zu sein, um einen Transfer zum „Schnellen Sehen“ mit dem „Sechserfeld“ zu schaffen. Auch ein tragfähiges Wissen über „um \_\_\_\_ mehr/weniger“ (so das Ziel) erlangt sie durch dieses Spiel und die vorangehenden Aktivitäten nicht (dazu auch Beschreibung Baustein V und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1).**

#### **9.4.4 Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse**

Die Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* wird in keine Unterkategorie eingeteilt.

Beantwortet wird die Forschungsfrage 2.4:

**F 2.4: Wie häufig zeigen sich stoffliche Hürden bei der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* einerseits verbunden mit allen in die Auswertung einbezogenen Unterrichtsszenen, und andererseits bezogen auf die Auswertungskategorie *Schwierigkeit der Lehrkräfte*?**

Verbunden mit *allen in die Auswertung einbezogenen Szenen* ( $N = 395$ ) zeigen sich in 28,6 % der Szenen der Kategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* Probleme in der Umsetzung. Tabelle 93 zeigt, dass 0,8 % der Szenen Baustein IV, 0,5 % der Szenen Baustein V, 3,0 % der Szenen Baustein VI, 3,3 % der Szenen Baustein VII, 10,1 % der Szenen Baustein VIII, 2,0 % der Szenen Baustein XII und 8,9 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

Innerhalb der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* gibt es in 37,5 % der Szenen Probleme. Davon können 1,0 % der Szenen Baustein IV, 0,7 % der Szenen Baustein V, 4,0 % der Szenen Baustein VI, 4,0 % der Szenen Baustein

VII, 13,3 % der Szenen Baustein VIII, 2,7 % der Szenen Baustein XII und 11,6 % der Szenen Baustein XIII zugeordnet werden.

**Tabelle 94**

*Häufigkeit von Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse (eigene Darstellung)*

| Kategorie                                            | Kognitiv aktivierende Unterstützung<br>der individuellen Lernprozesse |
|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Häufigkeit der Unterrichtsszenen                     | 113                                                                   |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein IV   | 3                                                                     |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein V    | 2                                                                     |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VI   | 12                                                                    |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VII  | 13                                                                    |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein VIII | 40                                                                    |
| - Häufigkeit der Unterrichtsszenen aus Baustein XIII | 43                                                                    |
| Prozent bezogen auf alle Unterrichtsszenen (N = 395) | 28,6                                                                  |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                    | 0,8                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                     | 0,5                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                    | 3,0                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                   | 3,3                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                  | 10,1                                                                  |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                   | 2,0                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                  | 8,9                                                                   |
| Prozent bezogen auf die Auswertungskategorie         |                                                                       |
| Schwierigkeiten der Lehrkräfte (N = 301)             | 37,5                                                                  |
| - Prozent bezogen auf Baustein IV                    | 1,0                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein V                     | 0,7                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VI                    | 4,0                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VII                   | 4,0                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein VIII                  | 13,3                                                                  |
| - Prozent bezogen auf Baustein XII                   | 2,7                                                                   |
| - Prozent bezogen auf Baustein XIII                  | 11,6                                                                  |

Verbunden mit der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden 3 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B und der Hauptlehrkraft A aus dem Baustein IV, 2 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft C und der Stützlehrkraft C aus Baustein V entnommen.

12 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D und der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft D werden aus Baustein VI, 13 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C

und Hauptlehrkraft D werden aus Baustein VII herangezogen. 40 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D, Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D werden aus Baustein VIII, 8 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft D und E werden aus Baustein XII und 35 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, Hauptlehrkraft B, Hauptlehrkraft C, Hauptlehrkraft D, Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D werden aus Baustein XIII entnommen.

Dabei wird die Forschungsfrage 3.4 beantwortet:

**F 3.4: Wird und – falls ja – wie wird die *Kognitiv aktivierende Unterstützung* der individuellen Lernprozesse im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?**

Um die Forschungsfrage 3.4 zu beantworten, wird auf andere Stellen der Auswertung dieser Arbeit verwiesen. Nachfolgend werden Unterrichtsbeispiele zu den einzelnen Bausteinen exemplarisch beschrieben.

In **Unterrichtsbaustein IV** der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ wurden passende Aufgaben- und Problemstellungen zu Fingerzahlen (Abschnitt 6.2) beschrieben. In der dargestellten Unterrichtseinheit mit Felix aus Baustein IV (Kategorie: *Halten und Führen der Hände und Finger* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2) kann nicht klar gesagt werden, ob Felix überhaupt versteht, was die Lehrkraft bei diesen Aktivitäten von ihm möchte. Bei Kindern wie Felix, die Schwierigkeiten im Fach Mathematik haben, ist eine Lernbegleitung in besonderer Weise und mit mehr kognitiv aktivierender Begleitung erforderlich (Abschnitt 3.3.1). Wie im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2 beschrieben, geht es bei Felix inhaltlich vordergründig um die Sicherung von anderen (Teil-)Zielen als bei anderen Kindern der Klasse. Es bedarf somit seitens der Lehrkraft besondere Anstöße zur Reflexion, sodass Felix im (nicht-zählenden) Darstellen der Zahlen mit den Fingern nach und nach sicher wird.

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ des **Unterrichtsbausteins V** sind Aktivitäten zum Zuordnen (Abschnitt 6.2) beschrieben. In der Unterrichtseinheit mit Felix und Chiara aus Baustein V (Kategorie: *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) wurde in einer gemeinsamen Nach-

besprechung vereinbart mit beiden Kindern eine weiterführende und vereinfachte Aktivität des Zuordnens mit Spielsteinen zu machen. In der „Handreichung der Bausteine“ ist beschrieben, dass Kinder, die noch Schwierigkeiten bei der visuellen Darstellung der Punktekarten und/oder der Zuordnung mit Plättchen haben, alternativ eine einfachere Variante mit anderen Materialien in Partnerarbeit machen können. Dennoch benötigt die im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1 beschriebene Lehrkraft das gemeinsame Gespräch im Anschluss der ersten Einheit, um sicher zu gehen, welche weiteren kognitiv aktivierenden Schritte es im Lernprozess beider Kinder benötigt.

In **Unterrichtsbaustein VI** der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ werden passende Aufgaben- und Problemstellungen zu Anzahlvergleichen (Abschnitt 6.2) beschrieben. Die abschließende Spielvariante in Baustein VI „Plättchen werfen“ bietet Kindern Gelegenheit, das Verständnis für Zahlvergleiche spielerisch einzuüben. Ziel ist dabei die Sprechweise „um \_\_\_ mehr/weniger“. Der Hauptlehrkraft in Baustein VI (Kategorie: *Zuordnung* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.1) ist es an dieser Stelle nicht gelungen, auf Rosas Verständnisproblem adaptiv einzugehen und kognitiv aktivierend zu unterstützen, indem sie bspw. gezielte Fragen stellt und die „Eins-zu-Eins“-Zuordnung gemeinsam mit ihr erarbeitet beziehungsweise sichert. Überlegungen in diese Richtung wurden klar in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ in Unterrichtsbaustein VI verweisen: Die Zuordnung muss als Grundlage für „gleich viel“ gesichert sein. Aufbauende Übungen „um wie viel mehr/weniger“ können erst dann aufgegriffen und verstanden werden, wenn dieses Verständnis erarbeitet und richtig angewendet wird (Abschnitt 2.2.2).

In **Unterrichtsbaustein VII** der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ werden mehrere „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern (Abschnitt 6.2) beschrieben und es wird darauf verwiesen, dass die Kinder mehr und mehr lernen sollen, mit (Zahl-)Worten zu beschreiben, wie sie die einzelnen Zahlen *unterschiedlich* erst zeigen, später nur noch in der Vorstellung durchführen und schließlich ganz abstrakt über Zahlen sprechen können. Alle Zahlzerlegungen einer Zahl sollen versprachlicht werden. Die Hauptlehrkraft in Baustein VII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und im Rah-

men der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3) kann in der dargestellten Unterrichtseinheit Julias Lernprozess nicht kognitiv aktivierend unterstützen und sie nicht dazu anleiten, mehrere oder alle Zahlzerlegungen der sieben zu finden.

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ des **Unterrichtsbausteins VIII** wurden passende Aufgaben- und Problemstellungen zum Schnellen Sehen (Abschnitt 6.2) beschrieben. Dennoch gelingt es der beschriebenen Hauptlehrkraft in Baustein VIII (Kategorie: *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.3) nicht, das Lernen von Luis adaptiv zu begleiten. An dortiger Stelle beschrieben, kann Luis einzelne Plättchen wiederholt zählend legen. Das Ziel dieser Aktivität, eine beliebige Anzahl von Wendeplättchen *strukturiert* zu legen, kann er nicht durchführen. Der Hauptlehrkraft gelingt es an dieser Stelle nicht seinen individuellen Lernprozess kognitiv aktivierend zu unterstützen und auch nicht ihn dazu anzuregen Anzahlen strukturiert zu legen.

In **Unterrichtsbaustein XII** der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ in Abschnitt 6.2 wird darauf verwiesen, genau zu beobachten, ob Kinder die Gesamtzahl der von Spieler 1 und Spieler 2 ausgestreckten Finger zählend ermittelt wird. Wenn dies noch der Fall ist, ist das Spiel verfrüht, und andere Aktivitäten wären zielführend (Aufgabe 5). Die Hauptlehrkraft in Baustein XII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3) kann in der dargestellten Unterrichtseinheit Luis Lernprozess nicht kognitiv aktivierend unterstützen und ihn nicht dazu anleiten, die Gesamtanzahl nicht-zählend zu ermitteln.

**Unterrichtsbaustein XIII** der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ bildet gleichzeitig das Ende dieses (Dissertations-)Projektes, da mit den bisherigen Übungen die wesentlichen Grundlagen dafür gelegt wurden, um in Richtung Operieren im Zahlenraum 10 zu gehen (siehe Konzeption TIGER, Gaidoschik, 2019a, 2022; Abschnitt 6.1). Bei diesen Aktivitäten mit Zahldarstellungen in „stehender“ Anordnung im Zehnerfeld (Abschnitt 6.2) soll ein Bezug zu den beiden Händen hergestellt werden. Wie in der „Handreichung der Bausteine“ klar beschrieben, sollen Kinder angeleitet werden, Punktedarstellungen im Zehnerfeld *selbst zu untersuchen*, um in weiterer Folge Analogien (Bezug zu fünf und zehn und zu den Fingerdarstellungen) zu erkennen. In der beschriebenen Unterrichtseinheit in Baustein XIII (Kategorie: *Fachlich verständlich Arbeitsaufträge* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.3.2) wird dieser Bezug

erstmals mit allen Kindern im Klassenverband besprochen. Es ist der beschriebenen Hauptlehrkraft nicht gelungen, den Bezug zu den beiden Händen mit fünf und fünf bei allen Kindern zu sichern. Stattdessen nutzte die Hauptlehrkraft an dieser Stelle sehr klare und vorgegebene Rezepte im Sinne der Imitation und erklärte selbst – ohne die Kinder nach deren Vorstellungen zu fragen – den Bezug zu den Händen.

In der weiterführenden Spielvariante „Würfeln“ aus Baustein XIII kann Chiara dieses Wissen nicht auf das Spiel übertragen, sondern zählt die Spielfelder in beiden Spieldurchgängen einzeln ab. Der Hauptlehrkraft gelingt es an dieser Stelle nicht Chiaras Lernprozess kognitiv aktivierend zu unterstützen und ein tragfähiges Wissen über „um \_\_\_\_ mehr/weniger“ (so das Ziel dieser Spielvariante) zu erlangen.

## **9.5 Vorläufiger Abschluss des Entwicklungs- und Forschungsprojektes**

In diesem Abschnitt 9.5 werden zunächst wesentliche Ergebnisse der zweiten Durchführung zusammenfassend diskutiert. Daraus ableitend werden unter Berücksichtigung der theoretischen Erkenntnisse *Gestaltungsprinzipien* für die Weiterentwicklung der 13 Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht generiert. Diese Gestaltungsprinzipien werden in weiterer Folge in Abbildung 15 zusammenfassend visualisiert. Die nachfolgende Diskussion der Ergebnisse erfolgt thematisch entlang den einzelnen Bausteinen und nicht entlang der Forschungsfragen, wenngleich die einzelnen Kategorien und Subkategorien als Gestaltungsprinzipien den Bausteinen zugeordnet werden.

### ***Zusammenfassende Ergebnisse der zweiten Durchführung im Unterricht***

Wie in Tabelle 95 dargestellt, ist einzig die Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* mit den Subkategorien *Individueller Materiawechsel*, *Halten und Führen der Hände und Finger* und *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* verbunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebungen*. Bezieht man alle Unterrichtsszenen mit ein ( $N = 395$ ), zeigen sich in 23,8 % ( $N = 94$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel*.

Alle weiteren Hauptkategorien *Innermathematische Struktur* (Tabelle 38), *Fachsprache der Mathematik* (Tabelle 39) und *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* (Tabelle 40) mit den jeweils dazugehörenden Subkategorien sind ver-

bunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung*. Verbunden mit allen Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ), zeigen sich in 76,2 % ( $N = 301$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei dieser Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung*. Vor diesem Hintergrund zeigen sich verbunden mit allen Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ) in 31,6 % ( $N = 125$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur*, in 16,0 % ( $N = 63$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* und in 28,6 % ( $N = 113$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse*. Verbunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* ( $N = 301$ ) können 41,5 % ( $N = 125$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur*, 21,0 % ( $N = 63$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* und 37,5 % ( $N = 113$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* zugeordnet werden.

Tabelle 95

Häufigkeiten und Prozente von Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel (eigene Darstellung)

| Kategoriennamen und Häufigkeit                                     | Subkategorie und Häufigkeit                                  | Ankerbeispiel                                                      | Häufigkeit nach Bausteinen                            | Anzahl nach Bausteinen und nach Lehrkräften                                      |
|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel</b> | <i>Individueller Materialwechsel</i>                         | Der Zeitpunkt des Materialwechsels.                                | Baustein V: 5,3 % <sup>1</sup> 22,3 % <sup>2</sup>    | 21 Szenen aus Baustein V: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E Stützlehrkraft A, C       |
|                                                                    | 35 Unterrichtsszenen: 8,8 % <sup>1</sup> 37,2 % <sup>2</sup> |                                                                    | Baustein VI: 1,0 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>    | 4 Szenen aus Baustein VI: Hauptlehrkraft A, B, C, D                              |
|                                                                    | 94 Unterrichtsszenen: 23,8 % <sup>1</sup> 100 % <sup>2</sup> |                                                                    | Baustein VIII: 2,5 % <sup>1</sup> 10,6 % <sup>2</sup> | 10 Szenen aus Baustein VIII: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E                        |
|                                                                    | Baustein IV: 5,6 % <sup>1</sup> 23,4 % <sup>2</sup>          |                                                                    | Baustein IV: 5,6 % <sup>1</sup> 23,4 % <sup>2</sup>   | 22 Szenen aus Baustein IV: Hauptlehrkraft A, B, C, D                             |
| Baustein V: 6,3 % <sup>1</sup> 26,6 % <sup>2</sup>                 | <i>Halten und Führen der Hände und Finger</i>                | Halten und Führen der Hände und Finger bei Unterrichtsaktivitäten. |                                                       |                                                                                  |
| Baustein VI: 1,0 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>                 | 26 Unterrichtsszenen: 6,6 % <sup>1</sup> 27,7 % <sup>2</sup> |                                                                    | Baustein V: 1,0 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>     | 4 Szenen aus Baustein V: Stützlehrkraft C                                        |
| Baustein VIII: 10,9 % <sup>1</sup> 45,7 % <sup>2</sup>             | <i>Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel</i>               | Bei Materialwechsel Anzahlen in ihren Teilen und Ganzen denken.    | Baustein VIII: 8,4 % <sup>1</sup> 35,1 % <sup>2</sup> | 33 Szenen aus Baustein VIII: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E Stützlehrkraft A, C, D |
|                                                                    | 33 Unterrichtsszenen: 8,4 % <sup>1</sup> 35,1 % <sup>2</sup> |                                                                    |                                                       |                                                                                  |

Anmerkung. <sup>1</sup> Verbunden mit allen Unterrichtsszenen (N = 395). <sup>2</sup> Verbunden mit der Auswertungskategorie Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung (N = 94).



**Tabelle 96**

*Häufigkeiten und Prozente von Innermathematischer Struktur (eigene Darstellung)*

| Kategoriennamen und Häufigkeit     | Subkategorie und Häufigkeit                                    | Ankerbeispiel                                            | Häufigkeit nach Bausteinen                           | Anzahl nach Bausteinen und nach Lehrkräften                                     |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Innermathematische Struktur</b> | <i>Zuordnung</i>                                               | Zuordnung ist als Grundlage für Anzahlvergleiche.        | Baustein V: 1,0 % <sup>1</sup> 1,3 % <sup>2</sup>    | 4 Szenen aus Baustein V: Hauptlehrkraft A Stützlehrkraft A, C                   |
|                                    | 17 Unterrichtsszenen: 4,3 % <sup>1</sup> 5,6 % <sup>2</sup>    |                                                          | Baustein VI: 3,3 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>   | 13 Szenen aus Baustein VI: Hauptlehrkraft A, B, D, E                            |
|                                    | 125 Unterrichtsszenen: 31,6 % <sup>1</sup> 41,5 % <sup>2</sup> | Ein Verständnis für Kardinalität.                        | Baustein II: 2,8 % <sup>1</sup> 3,7 % <sup>2</sup>   | 11 Szenen aus Baustein II: Hauptlehrkraft B, C                                  |
|                                    | <i>Anzahlerfassendes Zählen</i>                                |                                                          | Baustein III: 1,0 % <sup>1</sup> 1,3 % <sup>2</sup>  | 4 Szenen aus Baustein III: Hauptlehrkraft D, Stützlehrkraft D                   |
|                                    | 15 Unterrichtsszenen: 3,8 % <sup>1</sup> 5,0 % <sup>2</sup>    |                                                          | Baustein IV: 2,8 % <sup>1</sup> 3,7 % <sup>2</sup>   | 11 Szenen aus Baustein IV: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E Stützlehrkraft A, C, D  |
|                                    | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i>          | Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen. | Baustein VII: 3,8 % <sup>1</sup> 5,0 % <sup>2</sup>  | 15 Szenen aus Baustein VII: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E Stützlehrkraft A, C, D |
|                                    | 93 Unterrichtsszenen: 23,5 % <sup>1</sup> 30,9 % <sup>2</sup>  |                                                          | Baustein VIII: 6,1 % <sup>1</sup> 8,0 % <sup>2</sup> | 24 Szenen aus Baustein VIII: Hauptlehrkraft A, B, C, E Stützlehrkraft A         |
|                                    | Baustein II: 2,8 % <sup>1</sup> 3,7 % <sup>2</sup>             |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein III: 1,0 % <sup>1</sup> 1,3 % <sup>2</sup>            |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein IV: 2,8 % <sup>1</sup> 3,7 % <sup>2</sup>             |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein V: 1,0 % <sup>1</sup> 1,3 % <sup>2</sup>              |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein VI: 3,3 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>             |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein VII: 3,8 % <sup>1</sup> 5,0 % <sup>2</sup>            |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein VIII: 6,1 % <sup>1</sup> 8,0 % <sup>2</sup>           |                                                          |                                                      |                                                                                 |
|                                    | Baustein IX: 2,0 % <sup>1</sup> 2,7 % <sup>2</sup>             |                                                          |                                                      |                                                                                 |

|                                                      |                                                      |                                                                                        |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Baustein XII: 2,0 % <sup>1</sup> 2,7 % <sup>2</sup>  | Baustein IX: 2,0 % <sup>1</sup> 2,7 % <sup>2</sup>   | 8 Szenen aus Baustein IX:<br>Hauptlehrkraft D, E                                       |
| Baustein XIII: 6,8 % <sup>1</sup> 9,0 % <sup>2</sup> | Baustein XII: 2,0 % <sup>1</sup> 2,7 % <sup>2</sup>  | 8 Szenen aus Baustein XII:<br>Hauptlehrkraft D, E                                      |
|                                                      | Baustein XIII: 6,8 % <sup>1</sup> 9,0 % <sup>2</sup> | 27 Szenen aus Baustein XIII:<br>Hauptlehrkraft A, B, C, D, E<br>Stützlehrkraft A, C, D |

*Anmerkung. <sup>1</sup> Verbunden mit allen Unterrichtsszenen (N = 395). <sup>2</sup> Verbunden mit der Auswertungskategorie Schwierigkeiten der Lehrkräfte (N = 301).*

Tabelle 97

Häufigkeiten und Prozente von Fachsprache Mathematik (eigene Darstellung)

| Kategoriennamen und Häufigkeit                                   | Subkategorie und Häufigkeit                                      | Ankerbeispiel                                                                             | Häufigkeit nach Bausteinen                           | Anzahl nach Bausteinen und nach Lehrkräften                                     |
|------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Fachsprache der Mathematik</b>                                | <i>Verbalisierung des Teile-Ganzen-Denkens</i>                   | Versprachlichung von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen.                                         | Baustein VII: 4,8 % <sup>1</sup> 6,3 % <sup>2</sup>  | 19 Szenen aus Baustein VII: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E Stützlehrkraft A, C, D |
| 63 Unterrichtsszenen:<br>16,0 % <sup>1</sup> 21,0 % <sup>2</sup> | 41 Unterrichtsszenen:<br>10,4 % <sup>1</sup> 13,6 % <sup>2</sup> |                                                                                           | Baustein VIII: 5,6 % <sup>1</sup> 7,3 % <sup>2</sup> | 22 Szenen aus Baustein VIII: Hauptlehrkraft A, B, C, D, E                       |
| Baustein V: 0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>                | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i>                    | Fachlich richtige, sinnvoll didaktisch reduzierte und klar verständliche Arbeitsaufträge. | Baustein V: 0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>    | 3 Szenen aus Baustein V: Hauptlehrkraft A, C, D                                 |
| Baustein VI: 0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>               | 22 Unterrichtsszenen:<br>5,6 % <sup>1</sup> 7,3 % <sup>2</sup>   |                                                                                           | Baustein VI: 0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>   | 3 Szenen aus Baustein VI: Hauptlehrkraft A, B, D                                |
| Baustein VII: 4,8 % <sup>1</sup> 6,3 % <sup>2</sup>              |                                                                  |                                                                                           |                                                      | 1 Szene aus Baustein X: Hauptlehrkraft A                                        |
| Baustein VIII: 5,6 % <sup>1</sup> 7,3 % <sup>2</sup>             |                                                                  |                                                                                           | Baustein X: 0,2 % <sup>1</sup> 0,3 % <sup>2</sup>    | 2 Szenen aus Baustein XI: Hauptlehrkraft D                                      |
| Baustein X: 0,2 % <sup>1</sup> 0,3 % <sup>2</sup>                |                                                                  |                                                                                           | Baustein XI: 0,5 % <sup>1</sup> 0,7 % <sup>2</sup>   | 13 Szenen aus Baustein XIII: Hauptlehrkraft A, B, C Stützlehrkraft A, C         |
| Baustein XI: 0,5 % <sup>1</sup> 0,7 % <sup>2</sup>               |                                                                  |                                                                                           | Baustein XIII: 3,3 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup> |                                                                                 |

Anmerkung. <sup>1</sup> Verbunden mit allen Unterrichtsszenen (N = 395). <sup>2</sup> Verbunden mit der Auswertungskategorie Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung (N = 301).

Tabelle 98

Häufigkeit und Prozente von Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse (eigene Darstellung)

| Kategoriennamen und Häufigkeit                                                                                                                     | Subkategorie und Häufigkeit | Ankerbeispiel                                                            | Häufigkeit nach Bausteinen                             | Anzahl nach Bausteinen und nach Lehrkräften                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</b><br><br>113 Unterrichtsszenen:<br>28,6 % <sup>1</sup> 37,5 % <sup>2</sup> | Keine Subkategorie          | Adaptive Lernunterstützung und passende Aufgaben- und Problemstellungen. | Baustein IV: 0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>     | 3 Szenen aus Baustein IV:<br>Hauptlehrkraft A, B<br>Stützlehrkraft A                |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein V: 0,5 % <sup>1</sup> 0,7 % <sup>2</sup>      | 2 Szenen aus Baustein V:<br>Hauptlehrkraft C<br>Stützlehrkraft C                    |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein VI: 3,0 % <sup>1</sup> 4,0 % <sup>2</sup>     | 12 Szenen aus Baustein VI:<br>Hauptlehrkraft A, B, C, D<br>Stützlehrkraft A, D      |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein VII: 3,3 % <sup>1</sup> 4,3 % <sup>2</sup>    | 13 Szenen aus Baustein VII:<br>Hauptlehrkraft A, B, C, D                            |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein VIII: 10,1 % <sup>1</sup> 13,3 % <sup>2</sup> | 40 Szenen aus Baustein VIII:<br>Hauptlehrkraft A, B, C, D, E<br>Stützlehrkraft C, D |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein XII: 2,0 % <sup>1</sup> 2,7 % <sup>2</sup>    | 8 Szenen aus Baustein XII:<br>Hauptlehrkraft D, E                                   |
|                                                                                                                                                    |                             |                                                                          | Baustein XIII: 8,9 % <sup>1</sup> 11,6 % <sup>2</sup>  | 35 Szenen aus Baustein XIII:<br>Hauptlehrkraft A, B, C, D, E                        |

---

*Anmerkung. <sup>1</sup> Verbunden mit allen Unterrichtsszenen (N = 395). <sup>2</sup> Verbunden mit der Auswertungskategorie Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung (N = 301).*

**Tabelle 99**

*Häufigkeiten und Prozente getrennt für die Unterrichtsbausteine (eigene Darstellung)*

| <b>Unterrichtsbaustein und Häufigkeit</b>                          | <b>Subkategorie und Häufigkeiten nach Bausteinen</b>                                                                    | <b>Unterrichtsbausteine nach Lehrkräften</b>           |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Unterrichtsbaustein II: 2,8 % <sup>1</sup><br>11 Unterrichtsszenen | <i>Anzahlerfassendes Zählen</i><br>11 Unterrichtsszenen:<br>2,8 % <sup>1</sup>                                          | Hauptlehrkraft B, C                                    |
| Unterrichtsbaustein III: 1,0 % <sup>1</sup><br>4 Unterrichtsszenen | <i>Anzahlerfassendes Zählen</i><br>4 Unterrichtsszenen:<br>1,0 % <sup>1</sup>                                           | Hauptlehrkraft D<br>Stützlehrkraft D                   |
| Unterrichtsbaustein IV: 9,1 % <sup>1</sup><br>36 Unterrichtsszenen | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i><br>11 Unterrichtsszenen:<br>2,8 % <sup>1</sup>                    | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E<br>Stützlehrkraft A, C, D |
|                                                                    | <i>Halten und Führen der Hände und Finger</i><br>22 Unterrichtsszenen:<br>5,6 % <sup>1</sup>                            | Hauptlehrkraft A, B, C, D                              |
|                                                                    | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i><br>3 Unterrichtsszenen:<br>0,8 % <sup>1</sup> | Hauptlehrkraft A, B<br>Stützlehrkraft A                |

|                                                                    |                                                                           |                              |
|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Unterrichtsbaustein V: 8,9 % <sup>1</sup><br>35 Unterrichtsszenen  | <i>Zuordnung</i>                                                          | Hauptlehrkraft A             |
|                                                                    | 4 Unterrichtsszenen:<br>1,0 % <sup>1</sup>                                | Stützlehrkraft A, C          |
|                                                                    | <i>Halten und Führen der Hände und Finger</i>                             |                              |
|                                                                    | 5 Unterrichtsszenen:<br>1,0 % <sup>1</sup>                                | Stützlehrkraft A, C          |
|                                                                    | <i>Individueller Materialwechsel</i>                                      | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E |
|                                                                    | 21 Unterrichtsszenen:<br>5,3 % <sup>1</sup> 7,0 % <sup>2</sup>            | Stützlehrkraft A, C          |
| Unterrichtsbaustein VI: 8,1 % <sup>1</sup><br>32 Unterrichtsszenen | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i>                             | Hauptlehrkraft A, C, D       |
|                                                                    | 3 Unterrichtsszenen:<br>0,8 % <sup>1</sup>                                |                              |
|                                                                    | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> | Hauptlehrkraft C             |
|                                                                    | 2 Unterrichtsszenen:<br>0,5 % <sup>1</sup>                                | Stützlehrkraft C             |
|                                                                    | <i>Zuordnung</i>                                                          | Hauptlehrkraft A, B, D, E    |
|                                                                    | 13 Unterrichtsszenen:<br>3,3 % <sup>1</sup>                               |                              |
|                                                                    | <i>Individueller Materialwechsel</i>                                      | Hauptlehrkraft A, B, C, D    |
|                                                                    | 4 Unterrichtsszenen:<br>1,0 % <sup>1</sup>                                |                              |

|                                                                      |                                                                           |                              |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Unterrichtsbaustein VII: 11,9 % <sup>1</sup><br>47 Unterrichtsszenen | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i>                             | Hauptlehrkraft A, B, D       |
|                                                                      | 3 Unterrichtsszenen:<br>0,8 % <sup>1</sup> 1,0 % <sup>2</sup>             |                              |
|                                                                      | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> | Hauptlehrkraft A, B, C, D    |
|                                                                      | 12 Unterrichtsszenen:<br>3,0 % <sup>1</sup> 4,0 % <sup>2</sup>            | Stützlehrkraft A, D          |
|                                                                      | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i>                     | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E |
|                                                                      | 15 Unterrichtsszenen:<br>3,8 % <sup>1</sup>                               | Stützlehrkraft A, C, D       |
|                                                                      | <i>Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denkens</i>                            | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E |
|                                                                      | 19 Unterrichtsszenen:<br>4,8 % <sup>1</sup>                               | Stützlehrkraft A, C, D       |
|                                                                      | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> | Hauptlehrkraft A, B, C, D    |
|                                                                      | 13 Unterrichtsszenen:<br>3,3 % <sup>1</sup>                               |                              |



|                                                                        |                                                                                                                           |                                                        |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Unterrichtsbaustein VIII: 32,7 % <sup>1</sup><br>129 Unterrichtsszenen | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i><br>24 Unterrichtsszenen:<br>6,1 % <sup>1</sup>                      | Hauptlehrkraft A, B, C, E<br>Stützlehrkraft A          |
|                                                                        | <i>Individueller Materialwechsel</i><br>10 Unterrichtsszenen:<br>2,5 % <sup>1</sup>                                       | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E                           |
|                                                                        | <i>Verbalisierung des Teile-Ganzes-Denken</i><br>22 Unterrichtsszenen:<br>5,6 % <sup>1</sup>                              | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E                           |
|                                                                        | <i>Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel</i><br>33 Unterrichtsszenen:<br>8,4 % <sup>1</sup>                             | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E<br>Stützlehrkraft A, C, D |
|                                                                        | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i><br>40 Unterrichtsszenen:<br>10,1 % <sup>1</sup> | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E<br>Stützlehrkraft C, D    |
| Unterrichtsbaustein IX: 2,0 % <sup>1</sup><br>8 Unterrichtsszenen      | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i><br>8 Unterrichtsszenen:<br>2,0 % <sup>1</sup>                       | Hauptlehrkraft D, E                                    |

|                                                                     |                                                                                                                         |                     |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| Unterrichtsbaustein X: 0,2 % <sup>1</sup><br>1 Unterrichtsszene     | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i><br>1 Unterrichtsszene:<br>0,2 % <sup>1</sup>                              | Hauptlehrkraft A    |
| Unterrichtsbaustein XI: 0,5 % <sup>1</sup><br>2 Unterrichtsszenen   | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i><br>2 Unterrichtsszenen:<br>0,5 % <sup>1</sup>                             | Hauptlehrkraft D    |
| Unterrichtsbaustein XII: 4,0 % <sup>1</sup><br>16 Unterrichtsszenen | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i><br>8 Unterrichtsszenen:<br>2,0 % <sup>1</sup>                     | Hauptlehrkraft D, E |
|                                                                     | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i><br>8 Unterrichtsszenen:<br>2,0 % <sup>1</sup> | Hauptlehrkraft D, E |

|                                               |                                                                           |                              |
|-----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Unterrichtsbaustein XIII: 19,0 % <sup>1</sup> | <i>Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen</i>                     | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E |
| 75 Unterrichtsszenen                          | 27 Unterrichtsszenen:                                                     | Stützlehrkraft A, C, D       |
|                                               | 6,8 % <sup>1</sup>                                                        |                              |
|                                               | <i>Fachlich verständliche Arbeitsaufträge</i>                             | Hauptlehrkraft A, B, C       |
|                                               | 13 Unterrichtsszenen:                                                     | Stützlehrkraft A, C          |
|                                               | 3,3 % <sup>1</sup>                                                        |                              |
|                                               | <i>Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse</i> |                              |
|                                               | 35 Unterrichtsszenen:                                                     | Hauptlehrkraft A, B, C, D, E |
|                                               | 8,9 % <sup>1</sup>                                                        | Stützlehrkraft C, D          |

---

Anmerkung. <sup>1</sup> Verbunden mit allen Unterrichtsszenen (N = 395).

Aufgrund der Verteilung der analysierten Unterrichtseinheiten der zweiten Durchführung hinsichtlich der Schwierigkeiten (*Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung, 301 Szenen vs. Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung, 94 Szenen*) werden folgend die Unterrichtsbausteine, bei denen aufgrund der dargestellten Ergebnisse eine Weiterentwicklung notwendig erscheint, ausführlich dargestellt.

Bei dieser Verteilung der Unterrichtseinheiten, wonach 301 Unterrichtsszenen als Schwierigkeiten der Lehrkräfte beziehungsweise bei den Lehrkräften bei der Umsetzung der Lernumgebungen und 94 Unterrichtsszenen als Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung festgemacht werden können, wird die hohe Bedeutung ersichtlich, einen differenzierten und ganzheitlichen Blick auf die Auswertungskategorie der Lehrkräfte zu werfen. Überlegungen in diese Richtung werden ausführlich bei den nun folgenden Bausteinen und Gestaltungsprinzipien vorgenommen.

Die beschriebenen Durchführungen der Lernumgebungen, die in Abschnitt 9.4 dargestellt sind, sind ganzheitliche multiple Fallbeobachtungen unter Berücksichtigung des Kontextes (Baxter & Jack, 2008 und Abschnitt 5.3.2). Einzelfallbeobachtungen werden in der *scientific community* in Bezug auf den wissenschaftlichen Wert der Aussage und der Erkenntnis der Untersuchung mitunter kritisch gesehen: „Wie man denn glaube, von den zwar interessanten und durchaus anregenden Einzelfallbeschreibungen zu verallgemeinernden Aussagen gelangen zu können?“, schrieb Oevermann bereits 1981 (S. 1) und hat dies als zu erwartende kritische Vorbehalte vorweggenommen. Aus gutem Grund entschied sich die Autorin der vorliegenden Arbeit für die Methode der qualitativen multiplen Fallstudie (Baxter & Jack, 2008 und Abschnitt 5.3.2), um eine ganzheitliche Darstellung der Lehr-Lern-Prozesse beschreiben zu können. Rückblickend ermöglichte diese Forschungsmethode, im Sinne der Autor\*innen, Forschungsfragen nach dem „Wie“ und „Warum“ facettenreich zu beantworten und dabei zu berücksichtigen, wie ein Phänomen durch den Kontext, in dem es sich befindet, beeinflusst wird. Es wäre für die Autorin unmöglich gewesen, ein wahrheitsgetreues Bild der Lehr-Lern-Prozesse der Lernenden zu zeichnen, ohne den Kontext, in diesem Fall den Mathematikunterricht, in dem sie stattfanden, zu berücksichtigen. Und mehr noch: gerade die Beschreibungen mithilfe der *multiplen case study* geht über die klassische Darstellung von Einzelfallbeobachtungen, -analysen und -beschreibungen hinaus.

Deswegen argumentiert die Autorin der vorliegenden Arbeit, ähnlich wie andere Autor\*innen, dass gerade umfassende und ganzheitliche Einzelfallbeobachtungen, -analysen und -beschreibungen unter Berücksichtigung des Kontextes eine zentrale Bedeutung wissenschaftlicher Erkenntnisse haben. Mehr noch: Sie machen „das Auffinden und

Herausarbeiten des Typischen von Lern- und Verstehensprozessen“ (Beck & Maier, 1993, S. 153) gerade erst möglich. Auch Binneberg (1997) argumentiert in eine ähnliche Richtung und spricht sich dafür aus, pädagogische Kasuistik als eine gut geeignete Möglichkeit wissenschaftlicher Einsicht: „Pädagogische Kasuistik bedeutet keineswegs die Rückkehr in ein vorwissenschaftliches Zeitalter, wie vielleicht zu befürchten wäre. Und zwar deshalb nicht, weil sie selbst zur wissenschaftlichen Erfahrungserkenntnis werden kann“ (Binneberg, 1997, S. 17).

Aus fachdidaktischer Sicht greift die Autorin dieser Arbeit an dieser Stelle nochmals die Ausführungen Gersters (2009), welche in Abschnitt 3.1.1 ausführlich beschrieben werden, auf. An dortiger Stelle wird erläutert, dass es ein gravierendes Versäumnis wäre sich nicht „mit Schwierigkeiten der mentalen Konstruktionen, die Kinder beim Erwerb elementarer arithmetischer Konzepte leisten müssen“ (S. 97) auseinanderzusetzen. Dies ist leitend für die Beschreibung der einzelnen Bausteine – auch und gerade weil diese Einzelfallbeobachtungen, wie obenstehend beschrieben, sind.

Vor diesem Hintergrund werden folgend die einzelnen Unterrichtsbausteine diskutiert und weiterentwickelt. Die vorgeschlagenen Anregungen bei den einzelnen Unterrichtsbausteinen beabsichtigen einerseits ein Bewusstwerden über das unterschiedliche Zahldenken der Kinder. Andererseits sollen die Gestaltungsprinzipien Anregungen dafür geben, wie Kinder beim frühen Mathematiklernen wesentlicher arithmetischer Inhaltsbereiche der ersten Schulwochen unterstützt werden könnten.

### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein I***

Wie in Abschnitt 9.4 beschrieben, ist zu Unterrichtsbaustein I keine relevante Unterrichtsszene herangezogen worden. Deswegen ist keine Weiterentwicklung dieses Bausteines notwendig.

### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein II und zu Unterrichtsbaustein III und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein II und Unterrichtsbaustein III***

Da Unterrichtsbaustein II und Unterrichtsbaustein III thematisch inhaltlich ähnliche Aktivitäten anbieten, werden Überlegungen zur Weiterentwicklung der Unterrichtsbausteine folgend gemeinsam angestellt.

Kinder wie Maria, welche in Unterrichtsbaustein II (Kategorie: *Anzahlerfassendes Zählen* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.2) ausführlich beschrieben werden, haben Schwierigkeiten, Zählstrategien bei größeren und übersichtlicheren Mengen anzuwenden.

In vorangehenden Aktivitäten aus Unterrichtsbaustein I wurden Zählübungen durch Anfertigen von Strichlisten im Klassenverband thematisiert. Das Ziel dieser Unterrichtseinheit ist es, dass alle Kinder lernen, Strichlisten mit Hilfe der Eins-zu-Eins-Zuordnung selbst zu erstellen. Manche Kinder werden nach und nach die Fünferbündelung beim Erstellen eigener Strichlisten übernehmen.

In den Aktivitäten zu Unterrichtsbaustein II werden die Zählstrategien gemeinsam im Klassenverband besprochen. Gemeinsam mit der Lehrkraft werden die Zählprinzipien formuliert. Bei dieser abschließenden Unterrichtsbeobachtung zu Unterrichtsbaustein II sollen Kinder *erstmalig* selbstständig resultatives Zählen zum Überprüfen einer Schätzung anwenden.

Dabei zeigt sich, dass Maria Schwierigkeiten hat, die in Abschnitt 2.2.1 beschriebenen Zählprinzipien anzuwenden. In dieser Unterrichtseinheit ist ihr nicht bewusst, dass im Sinne dieser Zählprinzipien die Richtung des Zählens nicht relevant ist. Hingegen zeigt sie sich verwundert und betont, dass man eine gewisse Abfolge beim Abzählen von Zählobjekten einhalten müsse. Ihrer Meinung nach müsse man immer von links (sie reiht die Nudeln in linearer Reihe an) beginnen. Nach einer Erklärung der Lehrkraft, wonach es egal sei, bei welcher Position man zu zählen beginnt, kann Maria von einer vorgegebenen Position aus, eine Anzahl auszählen. Zusätzliche Aktivitäten zum Zählen wären an dieser Stelle lohnend, um sicher zu wissen, dass sie diese Prinzipien des Zählens (auch bei größeren Mengen) *sicher und eigenständig* anwenden kann. Dabei kann bei ungeordneten Mengen für die Kinder eine mögliche, zielführende Strategie sein: Was gezählt wurde, wird zur Seite gegeben (siehe Unterrichtsbaustein II aus der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“).

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in insgesamt 11 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins II mit der Hauptlehrkraft B und der Hauptlehrkraft C erfasst.

Überlegungen in eine ähnliche Richtung ergeben sich aus dem Unterrichtsbaustein III. Die Aktivitäten dieses Unterrichtsbausteins schließen thematisch an den vorherigen Unterrichtsbaustein II an. Gemeinsam mit den Kindern werden wieder unterschiedliche Mengen von Objekten gezählt. Hierbei wird dieselbe Menge mehr als einmal gezählt,

dabei werden aber unterschiedliche Startobjekte gewählt: „Ist es egal, ob ich vorne anfangen zu zählen oder hinten? Ist es egal, ob ich bei diesem Wendeplättchen beginne oder bei diesem? Sind es trotzdem immer gleich viele?“ Anschließend werden die Kinder aufgefordert, eine bestimmte Anzahl an Gegenständen in die „Zählschachtel“ zu geben, diese zu verschließen und zu schütteln: „Wie viele sind nun in der Schachtel? Ändert sich das, wenn man schüttelt? Was müsste man tun, um die Anzahl in der Zählschachtel zu ändern?“

Es werden 4 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins III mit der Hauptlehrkraft D und der Stützlehrkraft D beobachtet.

Daraus ableitend folgen die Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein II und zu Unterrichtsbaustein III:

- *Gestaltungsprinzip „Anzahlerfassendes Zählen“ in Baustein II und in Baustein III (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Ein tragfähiges Verständnis für ein Anzahlerfassendes Zählen ist bei allen Lernenden (auch bei größeren und ungeordneten Mengen) zu sichern. In Baustein II bedeutet dies konkret, dass die Prinzipien des Zählens gesichert und hier im Besonderen soll die Irrelevanz der Anordnung der zu zählenden Objekte thematisiert und verinnerlicht werden.*

#### **Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein IV und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein IV**

Kinder wie Felix, welche in Unterrichtsbaustein IV (Kategorie: *Halten und Führen der Hände und Finger* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.2) beschrieben werden, werden im frühen Arithmetikunterricht nicht immer alles gleichzeitig erfassen können, wie andere Kinder der Klasse. Alle Lernenden gehen selbst ihre Lernwege, mitunter auch in kleinen Schritten.

Mit Blick auf die ganze Klasse spricht sich die aktuelle deutschsprachige Fachdidaktik eindeutig dafür aus, den Zahlenraum für alle Kinder freizugeben (Abschnitt 3.2.2). In diesem Zusammenhang gilt es als Lehrkraft bei allen Kindern, sich an den fundamentalen Ideen (Abschnitt 2.1.2) zu orientieren. Die inhaltliche Arbeit und die mathematischen Ziele der Förderung von Schulkindern wie Felix, wie in Baustein IV die Erarbeitung der Fingerdarstellungen und (im besten Fall) Zahlen so zu denken wie Jonathan, Sandro, Maria, Lara und Ilke es tun, unterscheiden sich dabei *nicht* von der Arbeit im Klassenverband.

Bei allen Bemühungen so oft als möglich gemeinsam mit der ganzen Klasse innerhalb desselben Rahmens unterschiedlich weit gesteckte Teilziele zu verfolgen, werden Kinder wie Felix (und gut möglich auch andere dieser Klasse) bei der Umsetzung von Baustein IV immer wieder Förderung außerhalb des Klassenverbandes benötigen; nach einer gemeinsamen Absprache tun es auch beide Lehrkräfte in den anschließenden Mathematikstunden: Während die Hauptlehrkraft mit dem Großteil der Klasse geeignete Aktivitäten, die einerseits auf die Sicherung der bereits beachtlichen Teilschritte der Kinder abzielen und andererseits schon auf nächste Ziele verweisen (Fingerhandlungen in der Vorstellung vorwegzunehmen, später nur noch in der Vorstellung) macht, erarbeitet und festigt die Stützlehrkraft mit Felix und zwei weiteren Kindern (Chiara und ein Mädchen) in kleinen Kindergruppen außerhalb des Klassenverbandes erst das *sichere Zählen* durch den Gebrauch der Zahlwortreihe und anschließend die Darstellung mit den Fingern. Während es bei Chiara und dem Mädchen um die Absicherung und weitgehende Automatisierung der „Hauptzeigeweise“ der Zahlen bis 10 geht, ist es bei Felix das sichere Abzählen der Finger und die Erkenntnis grundlegender Lernschritte, wie beispielsweise die Einsicht in die *Konstanz* einer Anzahl.

Vor diesem Hintergrund hat es sich in diesen Einheiten in der Klasse und außerhalb der Klasse in Fördereinheiten als hilfreich erwiesen, Kinder wie Felix durch ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger dahingehend zu unterstützen, Zahldarstellungen mit Fingern zu zeigen.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in insgesamt 22 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins IV und verbunden mit der Subkategorie *Halten und Führen der Hände und Finger* mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C und der Hauptlehrkraft D erfasst.

Verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und den Unterrichtsbaustein IV werden insgesamt 11 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D beobachtet.

3 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein IV und verbunden mit der Subkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B und der Stützlehrkraft A festgemacht.

Daraus ableitend folgen diese Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein IV:



- *Gestaltungsprinzip Halten und Führen der Finger in Baustein IV (nicht explizit hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Es ist ratsam Lernende (vor allem jene mit körperlicher Beeinträchtigung) beim Zeigen von Zahldarstellungen durch ruhiges Halten und Führen der Hände und Finger zu unterstützen.*
- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein IV (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen ist bei dem Material Finger explizit anzuleiten und zu sichern. In Baustein IV bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Zahlen lassen sich unterschiedlich mit Fingern darstellen, deshalb sei hier betont: Von entscheidender Bedeutung ist zunächst die Beziehung der anderen Zahlen zu fünf und zehn, diese beiden Zahlen sind wichtige geistige ‚Stützpunkte‘.“*
- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein IV (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Lernen muss durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden. Konkret bedeutet dies in Baustein IV, dass die Fingerdarstellung jedes Kindes zu beobachten und individuell abgestimmt weitere Schritte in ihrer nächsten Zone der Entwicklung zu fordern sind. In Baustein IV bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Beobachten Sie die Kinder, wie sie die Zahlen mit Fingern darstellen. Muss das Kind immer wieder von eins beginnend hochzählen, wenn es gebeten wird, fünf Finger an einer, zehn Finger an beiden Händen zu zeigen? Bei diesem Kind ist es ratsam, sich zunächst auf diese beiden Stützpunktzahlen zu konzentrieren (fünf Finger an einer Hand, zehn Finger an beiden zusammen). Dann wird es in der Regel zielführend sein, sich zuerst auf die Fingerdarstellungen bis fünf zu konzentrieren und sich erst dann auch den Zahlen sechs bis neun zu widmen. Für manche Kinder wird aber vielleicht neun (von zehn ausgehend eins weg) früher ‚auf einen Sitz‘ möglich sein als drei. Manche Kinder werden von sich aus z.B. sechs als drei und drei, acht als vier und vier zeigen, ohne dafür zählen zu müssen. Natürlich ist auch das eine willkommene Lösung. Die Lehrkraft sollte sich jedoch vergewissern, dass diese Kinder auch wissen, dass sechs auch als fünf und eins, acht auch als fünf und drei gezeigt werden kann und dass z.B. vier um eins weniger*

*als fünf ist. Andererseits sollten Kinder, die noch gar nicht in der Lage sind, die Zahlen bis zehn nicht-zählend mit den Fingern darzustellen, sich zunächst auf die ‚Hauptzeigeweise‘ mithilfe der ‚Kraft der Fünf‘ konzentrieren können. Letztlich ist es für alle Kinder wichtig, die Beziehungen aller Zahlen zu fünf und zu zehn zu verinnerlichen, auf dieser Basis dann auch alle anderen Zerlegungen/Zusammensetzungen der Zahlen bis zehn. Aber das ist für viele Kinder ein Thema für Monate!“*

### **Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein V und zu Unterrichtsbaustein VI und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein VI und zu Unterrichtsbaustein VI**

Unterrichtsbaustein V und Unterrichtsbaustein VI thematisieren dieselben inhaltlichen Aktivitäten. Deswegen werden Überlegungen zur Weiterentwicklung der Unterrichtsbausteine gemeinsam angestellt.

Schulanfänger vergleichen Anzahlen in der Regel a) nach dem Anschein und b) zählend. Daran ist nichts Falsches. Wichtig ist aber, dass die Kinder die Eins-zu-Eins-Zuordnung als Grundlage des Anzahlvergleiches verstehen und in weiterer Folge auch solche Zuordnungen nutzen, um herauszufinden, ob es gleich oder mehr oder weniger sind.

Da es sich bei den Aktivitäten des vorangehenden Bausteins IV (Beschreibung des ganzen Bausteins IV wird im Rahmen der Forschungsfrage 3.1.2 beantwortet) um einen anderen inhaltlichen Bereich, nämlich um das „Nicht-zählende Vergleichen strukturierter Mengen“ handelt und in diesem Baustein V um das „Anzahlvergleiche“, kann es bei einigen Kindern lohnend sein, weitere Aktivitäten zum nicht-zählenden Vergleichen mit bspw. Fingerbildern im Rahmen des Bausteins IV zu machen. Andere Kinder hingegen benötigen womöglich eine weitere, zusätzliche Zuordnungsaufgabe mit Alltagsgegenständen wie im Rahmen des Bausteins V, damit sie den Transfer zu Plättchen sicher schaffen. Auf alle Fälle scheint es lohnend, diesen Wechsel der unterschiedlichen inhaltlichen Bereiche und auch den Wechsel des Materials (von den Fingern hin zu ... bzw. von den Alltagsgegenständen hin zu ...) gut und individuell auf das einzelne Kind abgestimmt zu überlegen.

In der Aktivität zu Baustein V, also zu Aufgabenkärtchen mit strukturierten Anzahlen an Punkten gleiche viele Plättchen zu legen, konnten Chiara und Felix nicht sicher lösen. Kinder wie Felix und Chiara, welche in Unterrichtsbaustein V (Kategorie: *Zuordnung* und

im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 2.2.1) Schwierigkeiten beim Zuordnen ohne zählen zeigen, (dazu auch Kategorie: *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) können als weiterführende und vereinfachte Variante Zuordnungsaufgaben mit anderen Gegenständen machen. Aus den Ergebnissen der Forschungsfrage F 3.1.1 in Abschnitt 9.4 folgernd, werden in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ vereinfachte Aktivitäten aufgenommen:

„Gleichmachen“ ohne zu zählen – Anzahlvergleiche mit Steckwürfeln:

Kinder, die noch Schwierigkeiten beim Zählen und/oder der visuellen Darstellung der Punktekarten als Grundlage für die Eins-zu-Eins-Zuordnung haben, können alternativ eine einfachere Variante in Partnerarbeit machen: Die Kinder erhalten Steckwürfel in zwei Farben. Ein Kind legt z.B. einen roten Stein auf den Tisch, ein anderes Kind einen weißen daneben, dann wieder das erste Kind einen roten, das zweite einen weißen daneben, usw. Auf diese Weise entstehen – ohne dass gezählt wird! – zwei Reihen mit Steckwürfeln, eins-zu-eins nebeneinander angeordnet. „*Sind es gleich viele rote und weiße? Woher wisst ihr das?*“

Mögliche Fortsetzung: Ein Kind legt eine Anzahl von roten Würfeln auf den Tisch, ohne sie zu zählen. Das andere bekommt den Auftrag, genau so viel weiße Würfel hinzulegen. Das erste Kind kontrolliert, ob der Auftrag richtig erfüllt wurde.

In einer weiteren beobachteten Aktivität zu Baustein V konnten Felix und Luis Anzahlvergleiche, ohne zu zählen nicht sicher lösen. Kinder wie Felix und Luis, welche in Unterrichtsbaustein V (Kategorie: *Individueller Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.1) Schwierigkeiten beim Zuordnen ohne zählen zeigen, sollen durch eine adäquate Begleitung des Lernens angeregt werden, eine Lösung durch Zuordnung (ohne zu zählen) zu versuchen. Überlegungen in diese Richtung sind bereits in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ beschrieben.

In der anschließenden Spielvariante „Plättchen werfen“ aus Unterrichtsbaustein VI und den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2017) bekommen die Kinder als Spielerpaar Plättchen. Beide Spieler ordnen ihre Plättchen als Reihe und achten auf die Eins-zu-Eins-Zuordnung. Wenn jedem roten Plättchen genau ein blaues Plättchen zugeordnet werden kann, sind gleich viele rote wie blaue Plättchen.

Die in dieser Unterrichtseinheit beschriebenen Kinder, Anna und Rosa (Kategorie: *Zuordnung* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 2.2.1) zeigen unterschiedliche Herangehensweisen beim Zuordnen. Während Anna die Strategie der Eins-zu-Eins-Zuordnung bereits in Worten erklären kann, scheinen für Rosa Anzahlvergleiche durch Zuordnen auf ihrer Entwicklungsstufe (noch) zu fordernd zu sein. Sie nützt mehrmals die Strategie des Abzählens und zählt die Plättchen in Einerschritten ab. Bei der Frage „Um wie viele Plättchen hast du weniger?“, scheint sie irritiert zu sein und nennt die Anzahl an Plättchen, die sie und Anna haben.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in 4 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins V und verbunden mit der Subkategorie *Zuordnung* mit der Hauptlehrkraft A, der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C erfasst.

Verbunden mit der Subkategorie *Individueller Materialwechsel* und den Unterrichtsbaustein V werden insgesamt 21 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C beobachtet.

3 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein V und verbunden mit der Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft C und der Hauptlehrkraft D festgemacht.

2 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein V und verbunden mit der Subkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden mit der Hauptlehrkraft C und der Stützlehrkraft C erfasst.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in 13 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins VI und verbunden mit der Subkategorie *Zuordnung* mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E festgemacht.

Verbunden mit der Subkategorie *Individueller Materialwechsel* und den Unterrichtsbaustein VI werden insgesamt 4 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C und der Hauptlehrkraft D beobachtet.

3 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein VI und verbunden mit der Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B und der Hauptlehrkraft D festgemacht.

12 Unterrichtsszenen aus Baustein VI und verbunden mit der Subkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden mit der Hauptlehrkraft

A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft D erfasst.

Daraus ableitend folgen die Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein V und zu Unterrichtsbaustein VI:

- *Gestaltungsprinzip Zuordnung in Baustein V und in Baustein VI (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Es ist ratsam, Zuordnung als Grundlage für Anzahlvergleiche bei Lernenden zu sichern. In Baustein V bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ beschrieben: „Beobachten Sie die Kinder, ob sie die Aufgaben zählend oder durch Eins-zu-Eins-Zuordnung lösen! Fordern Sie Kinder, die nur durch Zählen zur Lösung kommen auf, einmal eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen.“ In Baustein VI bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ und hier explizit in den Materialien zu TIGER (2019) hingewiesen: „Auf dieser Basis kann geklärt werden, was mit ‚um eins/zwei ... mehr‘ gemeint ist: Man führt eine 1-1-Zuordnung durch, auf einer Seite bleibt aber eins oder zwei ... übrig, ‚ohne Partner‘ – um diese ein, zwei ... ist dann die eine Menge ‚mehr‘ (und zugleich die andere Menge weniger). ‚Plättchen werfen‘ bietet Kindern die Gelegenheit diese neue Art der Zahlverwendung spielerisch einzuüben.“*
- *Gestaltungsprinzip Individueller Materialwechsel in Baustein V und in Baustein VI (nicht explizit hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Der Individuelle Materialwechsel (von den Fingern hin zu ... Wendeplättchen) wie im Übergang von Baustein IV zu Baustein V und VI muss gut und individuell auf das einzelne Kind abgestimmt sein. Wenn ein Kind erst beginnt sich mit dem Material Finger zurechtzufinden, sollte es nicht durch Materialwechsel herausgerissen werden.*
- *Gestaltungsprinzip Fachlich verständliche Arbeitsaufträge in Baustein V und Baustein VI (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Eine Versprachlichung von fachlich richtigen, sinnvoll didaktisch reduzierten und klar verständlich formulierten Arbeitsaufträgen durch Lehrkräfte ist explizit anzuleiten. Die Versprachlichungen, welche in der „Handreichung zur*

*Durchführung der Bausteine“ bei Baustein V und Baustein VI angeführt werden, können so unverändert übernommen werden.*

- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein V und Baustein VI (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Lernen muss durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden. In Baustein V bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Fordern Sie Kinder, die nur durch Zählen zur Lösung kommen auf, einmal eine Lösung durch Zuordnen (also ohne zu zählen) zu versuchen. Überprüft werden die Lösungen wechselseitig vom Sitznachbarn. Kinder, die bereits Ziffernkenntnisse haben, schreiben die Anzahlen auch mit Ziffern auf Papier.“*

### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein VII Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein VII***

Kinder sollen, sofern sie es nicht schon können, früh lernen, Fingerdarstellungen auf einen Blick zu erkennen. Die Kinder sollen im Rahmen der Aktivitäten des Bausteins VII mehr und mehr lernen, mit (Zahl-)Worten zu beschreiben, wie sie die einzelnen Zahlen zeigen. Dazu werden die Kinder angeregt, Fingerhandlungen in der Vorstellung vorwegzunehmen, später nur noch in der Vorstellung durchzuführen, schließlich ganz abstrakt über Zahlen zu sprechen („acht besteht aus fünf und drei“). Viele Kinder werden auf diesem Weg noch Zwischenschritte brauchen, etwa: Die Finger werden noch verwendet, aber verdeckt. Der grundlegende Lernschritt, wirkliche Finger durch vorgestellte Finger zu ersetzen, sodass der Vorgang (so das Ziel!) nur mehr „im Kopf“ abläuft, ist aus fachdidaktischer Sicht ein wesentlicher in dieser frühen Phase des Mathematiklernens (Abschnitt 3.2.2.). Freilich lässt sich in einer Klasse mit bis zu 25 Kindern nicht ausnahmslos überprüfen, ob Kinder ihre Finger zählend oder nicht-zählend eingesetzt haben. Die Art und Weise, wie sie das Material oder hier die Finger eingesetzt haben, wird vor allem durch die *Versprachlichung* ihrer Denkwege deutlich.

Die beschriebenen Kinder bei der Arbeit am Baustein VII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3) zeigen unterschiedliche Herangehensweisen bei der Aktivität wirkliche Finger durch vorgestellte Finger zu ersetzen. Bei Julia und Anja scheint es so, als ob beide Mädchen bereits entscheidende Entdeckungen, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind, bereits gemacht haben. Für Anja scheint sechs ein Ganzes mit

den Teilen drei und drei. Julia weiß, dass acht als vier und vier dargestellt werden kann. Dabei sehen die Mädchen die Finger nicht, sondern verwenden die Finger verdeckt unter der Tischplatte. Beide Kinder zeigen die Zahlen sechs und acht nicht mit der „Hauptzeigeweise“ als „fünf und ...“. Bei einer weiteren Aktivität mit Fingern weiß Julia auf die Frage von Anja, ob sie denn noch weitere Zeigeweisen wüsste, keine weiteren. Anja hingegen denkt sieben als eine weitere Zusammensetzung mit vier und drei. Sie führt als Erklärung an ihren Händen eine Teile-Ganzes-Reflexion durch: Ein Ganzes (sieben) bestünde aus einem Teil (vier) und einem anderen Teil (drei), auch als fünf und zwei und als vier und drei. Ihr Zahldenken scheint nicht mehr an die Zahlreihe gebunden zu sein (Abschnitt 2.2.3.3).

Andere Kinder, welche bei der Arbeit am Baustein VII beschrieben wurden, können auch nach mehreren Aktivitäten die Finger nur einzeln hochzählen, um zu einem Ergebnis zu kommen. So ermittelt sie ihre Fingerdarstellung der Zahl neun alleszählend und nützt auch die Strategie des Alleszählens (Abschnitt 3.2.2.), um die ausgestreckten Finger von Rosa zu kontrollieren. Rosa scheint bei ihrer Aktivität, acht Finger zu zeigen, nicht zu wissen, was sie zu tun habe. Das Zahldenken, über welches Rosa und Anna verfügen, unterscheidet sich dabei wesentlich von dem, wie Julia und Anja denken: Beide Kinder können (so das Ziel!) nicht andere Zahlen mitdenken (Abschnitt 2.2.3.1).

Luis und Max hingegen, welche auch bei der Arbeit am Baustein VII dargestellt wurden, gehen bei dieser Aktivität unterschiedlich vor: Max kann sechs mit einer Ausstreckbewegung als fünf und eins zeigen. Luis hingegen zeigt acht, indem er jeden Finger einzeln hochzählt. Nach einer Nachfrage der Lehrkraft, wie er denn acht anders zeigen könnte, gelingt es Luis, sich an die „Hauptzeigeweise“ als „fünf und ...“ zu erinnern.

Zudem wurde in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ darauf hingewiesen, dass *alle* Zahlzusammensetzungen mit den Kindern besprochen werden sollten. Die beschriebenen Lehrkräfte bei der Arbeit am Baustein VII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.2.3) nahmen oftmals die Lösungen vorweg und/oder zeigten selbst den vermeintlichen Lösungsweg als gut gemeinte Alternative und/oder besprachen nicht alle möglichen Zahlzerlegungen.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in 15 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins VII und verbunden mit der Subkategorie „*Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Menge*“ mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A erfasst.

Verbunden mit der Subkategorie „*Verbalisieren des Teile-Ganzes-Denkens*“ und den Unterrichtsbaustein VII werden 19 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D beobachtet.

13 Unterrichtsszenen aus Baustein VII und verbunden mit der Subkategorie „*Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse*“ werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C und der Hauptlehrkraft D erfasst.

Daraus ableitend werden die Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein VII vorgeschlagen:

- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein VII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei den Materialien ist explizit anzuleiten. In Baustein VII wird in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Thematisieren Sie mit den Kindern alle Zahlzerlegungen.“*
- *Gestaltungsprinzip Verbalisieren des Teile-Ganzes-Denkens in Baustein VII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Eine Versprachlichung des Teile-Ganzes-Denkens durch Lernende ist explizit anzuleiten. Es genügt nicht eine Verbalisierung von „ich zeige so ... und so ... und ...“*
- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein VII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Kindliches Lernen muss durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden. Konkret bedeutet dies wie in Baustein VII in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Kinder, die bereits alle Fingerdarstellungen in Beziehung mit fünf und zehn schnell und sicher zeigen können, können eingeladen werden, auch andere Zeigeweisen zu verwenden (siehe Baustein 4). „Kannst du sechs/vier/sieben... auch noch anders zeigen?“ Thematisieren Sie mit den Kindern alle Zahlzerlegungen.“*



### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein VIII und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein VIII***

Zur Erinnerung an die Ziele der Aktivität von Baustein VIII: Eine beliebige Anzahl an Plättchen soll so gelegt werden, dass die Lehrkraft beim Herumgehen auf einen Blick sehen kann, wie viele es sind. Die Art, Plättchen (strukturiert) zu legen, ist für uns Erwachsene besonders aufschlussreich. Stützend auf diesen Beobachtungen kann die Lehrkraft den Kindern abgestimmt unterschiedliche Aktivitäten zum „Schnellen sehen“ anbieten. Bei dieser Aktivität gilt es mitzudenken, dass die Plättchen (im Gegensatz zu Fingern) nur einzeln oder in kleinen Portionen gelegt werden können (Abschnitt 2.2.3).

Auf Grundlage der Analyse der Szenen zu Unterrichtsbaustein VIII (Kategorie: *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.3) sollten die Lehrkräfte sensibilisiert werden, das Zahldenken der einzelnen Kinder zu ergründen und dann dem Lernstand jedes Kindes entsprechende Aktivitäten zu setzen.

In Bezug auf die jeweiligen Kinderpaare bei der Arbeit am Baustein VIII (Kategorie: *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.1.3) zeigt sich, dass Luis und Anna, Schwierigkeiten beim Erkennen und Deuten von Zahlstrukturen mit Plättchen haben. Vorausgehend an diese Aktivität wurden bereits im Klassenverband unterschiedliche Aktivitäten zum „schnellen Sehen“, wie beispielsweise mit zweifarbigen Punktedarstellungen gemacht. Die Strukturen der Darstellungen im Klassenverband mit bis zu 25 Kindern in einer Klasse zu betrachten, bei denen möglichst alle (viele?) Kinder drankommen, scheint zwar eine möglichst ökonomische Weise zu sein, aber wohl *nicht* ausreichend, um sicher zu stellen, dass *alle* Kinder Strukturen „hineinsehen“ können, das heißt Teile im Ganzen sehen und diese auch richtig interpretieren lernen.

Wenn Kinder wie Anna und Luis Zahlen nicht als Ganze verstehen, die aus Teilen zusammengesetzt sind, können sie aufbauende mathematische Einsichten wie das Subtrahieren *nicht* als Wegnehmen solcher Teile von einem Ganzen verstehen. Aktivitäten zur Spontan-Erfassung bis  $4/5$  mit Erkennen der Strukturen ist aus gutem Grund eine grundlegende „Baustelle“ in der TIGER-Konzeption (Gaidoschik, 2019a, 2022), die mit allen Kindern geübt werden soll; und das von Anfang an. Bei diesen Kindern scheint es wichtig, Aktivitäten anzubieten, um das einzelne Legen mit Plättchen beziehungsweise das zählende Weiterzählen von einer Zahl aus zu umgehen.

In diesem konkreten Beispiel aus Baustein VIII war das Erkennen der Strukturen im Klassenverband mit allen Kindern für Anna und Luis vermutlich nicht ausreichend. Kinder wie Anna und Luis werden zusätzliche Förderung, auch außerhalb des Klassenverbandes benötigen, um dieses flexible Interpretieren von Zahlen zu unterstützen. Für das Erarbeiten der Einsicht in diese Zusammenhänge ist es zielführend strukturierte Materialien zu verwenden. Dabei scheint es sachlogisch mit Gaidoschik (2007) zu argumentieren, wonach Finger eine entscheidende Hilfe gerade als „Einstieg“ in die Mathematik leisten (Abschnitt 3.3.2). Es scheint lohnend, ein tragfähiges Denken mit Teilen und Ganzen mit dem Material Finger abzusichern und erst dann auf dieser Grundlage einen Wechsel des Materials (in diesem Beispiel hin zu Plättchen) vorzunehmen.

Anhand dieser Beobachtungen aus Baustein VIII scheint es somit ratsam, bei einigen (vielen?) Kindern nicht zu schnell von Fingerhandlungen zu anderen Materialien wie Plättchen zu wechseln. Bei Kindern wie Luis und Anna lohnt es, sich zuerst auf die Fingerdarstellungen und das Erkunden der Strukturen der Zahlen mit *diesem* Material zu konzentrieren, und erst nach und nach auf andere Materialien wie Plättchen oder Darstellungen mit Plättchen überzugehen. Durch Bewusstmachung von Fingerdarstellungen können manche Kinder Punktedarstellungen leichter *quasi* auf einen Blick erkennen. Gaidoschik (2019a) rät in seinem TIGER-Konzept in diesem Zusammenhang: „Teile-Ganzes-Verständnis der Zahlen bis 10 mit Fingerdarstellungen als erstem Zugang, *darauf gestützt* Zehnerfeld-Darstellungen“ (Hervorhebung C.G.).

Ähnlich wie in Baustein V gilt hier in Baustein VIII auf den individuellen Materialwechsel und auf das Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel besonders zu achten. Wie in Baustein VII soll auch in Baustein VIII das Nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen (Blitzblickübungen mit Würfelbilddarstellung und anschließend in Aktivität 3 mit Plättchendarstellung) im Mittelpunkt des Lernens stehen. Ist dies nicht der Fall, können Kinder nachvollziehbar in weiterer Folge Teile im Ganzen nicht mitdenken und dieses Denken auch nicht verbalisieren. In Baustein VII (47 Unterrichtssequenzen) und den Fingern als Material werden weniger Unterrichtssequenzen beobachtet als in Baustein VIII (86 Unterrichtssequenzen) mit Würfelbild- und Plättchendarstellungen. Das Nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen mit den Fingern in Baustein VII scheint demnach den Kindern nicht so schwer zu fallen als das Nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen mit Würfelbild- und mit Plättchendarstellung in Baustein VIII.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend beschrieben, werden in 10 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins VIII und verbunden mit der

Subkategorie *Individueller Materialwechsel* mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E festgemacht.

Verbunden mit der Subkategorie *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* und den Unterrichtsbaustein VIII werden insgesamt 33 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D, der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D beobachtet.

24 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein VIII und verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft E festgemacht.

Verbunden mit der Subkategorie *Verbalisieren des Teile-Ganzes-Denkens* und den Unterrichtsbaustein VIII werden 22 Unterrichtsszenen mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E beobachtet.

40 Unterrichtsszenen aus Baustein VIII und verbunden mit der Subkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D, der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D erfasst.

Ableitend aus den Überlegungen werden folgende Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein VIII generiert:

- *Gestaltungsprinzip Individueller Materialwechsel in Baustein VIII (nicht explizit hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Wenn ein Kind erst beginnt sich mit dem Material Finger zurechtzufinden, sollte es aus nicht durch Materialwechsel herausgerissen werden.*
- *Gestaltungsprinzip Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel in Baustein VIII (nicht explizit hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Teile-Ganzes-Denken von Fingerhandlungen ist bei Lernenden zu sichern, bevor dieses Denken in Zahlganzen und Zahlteilen mit einem anderen Material wie hier in Baustein VIII mit Würfelbild- und dann in weiterer Folge Plättchendarstellung erfolgen kann.*

- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein VIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei den Materialien ist explizit anzuleiten und zu sichern. In Baustein VIII wird in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Die Fähigkeit zur Simultanerfassung von drei und mehr Objekten garantiert nicht, dass die Kinder die Zahlen drei, vier ... als Zusammensetzungen wahrnehmen und denken!“*
- *Gestaltungsprinzip Verbalisieren des Teile-Ganzes-Denkens in Baustein VIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Eine Versprachlichung des Teile-Ganzes-Denkens durch Lernende ist explizit anzuleiten. In Baustein VIII wird in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Die Kinder sollen von Beginn an immer wieder angeleitet werden, Anzahlen schon bis vier als Zusammensetzungen bzw. in Beziehung zur fünf zu beschreiben, z.B. ‚vier ist aus zwei und zwei zusammengesetzt‘; ‚vier ist um eins weniger als fünf‘. Solche Einsichten helfen auch jenen Kindern, die Defizite im Bereich der Simultanerfassung haben und anfangs auch Anzahlen von drei nur zählend ermitteln können. Diese werden zunächst drei bewusst als zwei und eins erfassen müssen und erst dann in der Lage sein, etwa auch ‚fünf als zwei und drei‘ zu erfassen.“*
- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein VIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Kindliches Lernen muss durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden. In Baustein VIII wird in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Es bedarf seitens der Lehrperson differenzierte Beobachtung der entsprechenden Ausgangslage und darauf abgestimmt differenzierte Aufgaben zum ‚schnellen Sehen‘. ... Solche Einsichten helfen auch jenen Kindern, die Defizite im Bereich der Simultanerfassung haben und anfangs auch Anzahlen von drei nur zählend ermitteln können. Diese werden zunächst drei bewusst als zwei und eins erfassen müssen und erst dann in der Lage sein, etwa auch ‚fünf als zwei und drei‘ zu erfassen.“*

### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein IX und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein IX***

Für ein tragfähiges Teile-Ganzes-Denken ist entscheidend, dass Kinder drei, vier und fünf nicht nur einfach als eine bestimmte Anordnung von Punkten wiedererkennen, sondern sich dessen bewusst sind, dass z.B. in der vier drei und eins, zwei und zwei ... als Teile mitenthalten sind. Dieses bewusste Erkennen von Teilen im Ganzen hilft auch jenen Kindern, die auch bei drei und vier anfangs noch zählend vorgehen: Zwei werden sie vermutlich auf einen Blick erfassen, vier können sie dann als zwei und zwei zusammensetzen (Abschnitt 2.2.3).

Überlegungen in eine ähnliche Richtung sollen im Rahmen einer sorgfältigen Spielbegleitung von „Blitzblick-Memory“ (Materialien von TIGER, Gaidoschik, 2019a) aus Unterrichtsbaustein IX mitgedacht werden.

Vorausgehend an diese Aktivität zu Unterrichtsbaustein IX geht Anna bei der Arbeit an Unterrichtsbaustein VII (Kategorie: *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 2.1.3) und der Anweisung sieben Plättchen strukturiert zu legen, dass sie die Anzahl simultan erkennen kann, so vor: Sie ordnet die Plättchen nach den Mustern einer Würfelfünf und einer Würfelzwei an. Sie nützt nicht die Teile, um daraus das Ganze zu beschreiben. Und sie findet keine weitere Darstellung mit sieben Plättchen. In der darauffolgenden Aktivität am nächsten Tag geht sie ähnlich vor: sie legt sechs Plättchen als Würfelfünf und Würfeins. Auf Aufforderung fünf Plättchen auf einmal wegzugeben, zählt sie jedes Plättchen einzeln ab.

In dieser Aktivität von „Blitzblick-Memory“ kann Anna Würfelanzahlen von zwei, drei, vier „auf einen Blick“ erfassen. Ähnlich wie viele Kinder in dieser frühen Phase des Mathematiklernens muss sie Würfelanzahlen bis drei oder vier nicht mehr einzeln abzählen. Bei der Darstellung bei Zahlen ab fünf zeigt sie Schwierigkeiten. Sie deckt die Karte kurz um und sagt: „Ui...da sind viele Punkte! Die Karte ist mir zu schwierig.“ Rasch deckt sie die Karte um. Ähnlich geht sie bei weiteren Spielzügen bei Zahldarstellungen (Würfel- und Fingerdarstellungen) ab fünf vor. Wie in Abschnitt 2.2.3.1 dargestellt, gilt hier Folgendes: Bei Zahlen ab fünf ist nicht-zählendes Erfassen „auf einen Blick“ nur möglich, wenn die Darstellung strukturiert ist. Dabei ist die Strukturierung mit der „Kraft der Fünf“ besonders wichtig (z.B. sieben als fünf und zwei). Ein Kind wird aber z.B. sieben Finger nur dann auf einen Blick erfassen, wenn es verstanden hat und sich gemerkt hat, dass fünf (eine ganze Hand) und zwei zusammen sieben sind. Ähnliche Überlegungen in diese Richtung gelten auch für Anna: Bei der Arbeit an Unterrichtsbaustein VIII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen*“ und im Rahmen der Beantwortung

der Forschungsfrage 2.2.3) kann sie die Fünfergliederung, die sie mit Fingern kennen- gelernt und gekonnt hat, auf ein anderes Material und einen anderen Kontext (hier: Plätt- chen) übertragen. Allerdings findet sie keine weitere Darstellung mit Plättchen.

Bei der Arbeit mit dem Memory aus Baustein IX scheint es, als habe sie nicht verstanden und sich nicht gemerkt, dass z.B. die Würfel- und Fingerdarstellung sechs, gleich wie bei den Fingern als eine Hand und ein Finger zusammen sechs sind. Dieses Verständnis kann mit Spielen wie dem hier vorgestellten Memory unterstützt werden, es bedarf aber der sorgfältigen Spielbegleitung. Kinder, die bestimmte Darstellungen noch zählend er- mitteln, profitieren z.B. davon, wenn andere Kinder oder Erwachsene nicht-zählend vor- gehen und das dann auch verbalisieren.

Aus Unterrichtsbaustein IX und verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* können 8 Unterrichtsszenen der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E beobachtet werden.

Ableitend aus den Überlegungen wird folgendes Gestaltungsprinzip zu Unterrichtsbaustein IX generiert:

- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein IX (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei den Materialien ist explizit anzuleiten. Konkret bedeutet dies wie in Baustein IX in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Kinder, die bestimmte Darstellungen noch zählend ermitteln, profitieren z.B. davon, wenn andere Kinder oder Erwachsene nicht-zählend vorgehen und das dann auch selbst verbalisieren: Ich sehe da zwei und da zwei, also sind das vier! Ich sehe da fünf und da eins, also zusammen sechs!“*

### **Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu den Unterrichtsbausteinen X, XI**

Verbunden mit der Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* wird 1 Unterrichtsszene aus Unterrichtsbaustein X mit der Hauptlehrkraft A und 2 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein XI mit der Hauptlehrkraft D erfasst. In diesem Zusammenhang wird auf die „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ verwiesen, wonach bei den Aktivitäten zu beiden Unterrichtsbausteinen klare und didaktisch sinnvoll reduzierte Arbeitsaufträge der Lehrkräfte vorformuliert sind. Dadurch soll sichergestellt werden, dass

die im Rahmen der Unterrichtsbausteine verwendeten Fachwörter des Unterrichtsbausteins X (Aufsteigende Zahlwortreihe und „um eins mehr“) und des Unterrichtsbausteins XI (Absteigende Zahlwortreihe und „um eins weniger“) *bedeutungsbezogen* erklärt und Kinder diese in weiterer Folge (und im besten Fall) in ihren aktiven Wortschatz übernehmen (Abschnitt 3.3.1). Diese Formulierungen können als Hilfe für die Lehrkräfte direkt übernommen werden. Die Anzahl der erfassten Unterrichtsszenen zu den beiden Unterrichtsbausteinen mit 1 Unterrichtsszene aus Unterrichtsbaustein X und 2 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein XI sind verbunden mit allen beobachteten Unterrichtsszenen begrenzt, weshalb eine Überarbeitung der beiden Unterrichtsbausteine X und XI als nicht notwendig erscheinen. Eine lohnende weiterführende Ergänzung, nämlich der Einsatz eines Wortspeicherplakates zu diesen Unterrichtsbausteinen, ist bei Ortner (2023) nachzulesen.

### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein XII und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein XII***

Das schnelle, nicht-zählende Erfassen von strukturierten Zahldarstellungen ist ein wichtiges Element in der Entwicklung des Teile-Ganzes-Denkens (TGD). Von besonderer Bedeutung sind dabei alle Zusammensetzungen der Zahl fünf und alle Zusammensetzung der Zahl zehn (Abschnitt 2.2.3).

Auf Grundlage der Analyse der Unterrichtsszenen zu Unterrichtsbaustein XII sollen Lehrkräfte abgestimmt auf den Lernstand des jeweiligen Kindes entscheiden, welche Aktivitäten zu Fingerdarstellungen entsprechend sind. Vorausgehend an diese Aktivität zu Unterrichtsbaustein XII zeigen die Kinderpaare Max und Luis bei der Arbeit an Unterrichtsbaustein VII (Kategorie: *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 2.2.3) unterschiedliche Herangehensweisen bei den Darstellungen mit Fingern: Max kann sechs nicht-zählend ermitteln, indem er fünf und eins mit einer Ausstreckbewegung zeigt. Bei acht zählt Luis die Finger einzeln hoch. Auf Nachfrage der Hauptlehrkraft kann Luis die „Hauptzeigeweise“ in der darauffolgenden Aktivität nutzen und zeigt sieben als fünf Finger an einer Hand gleichzeitig ausgestreckt und zwei Finger an der anderen Hand. Bei beiden Fingerdarstellungen macht Luis eine Nachdenkpause. Es scheint, als ob er die Zeigeweise der Zahl acht und der Zahl sieben noch nicht automatisiert hat, aber diese Fingerbilder nach und nach nicht-zählend ermittelt.

In dieser weiterführenden Aktivität „Finger-Schnipp-Schnapp“ aus Unterrichtsbaustein XII wurde der Zwischenschritt, die Aktivität „Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen“ bei der Partnerarbeit von Luis und Max nicht durchgeführt, sondern gleich zu Übung 4 übergegangen. Luis zeigt hier Schwierigkeiten und ermittelt die ausgestreckte Anzahl an Fingern nur zählend.

In der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ aus Baustein XII und bei dem Spiel „Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/Zehn gewinnt“ aus den Materialien zu TIGER (Gaidoschik, 2017) ist beschrieben, dass es „in der Spielbegleitung vor allem darauf ankommt zu beobachten, ob Kinder die Gesamtzahl der von Spieler 1 und Spieler 2 ausgestreckten Finger zählend ermittelt wird. Wenn dies noch der Fall ist, ist das Spiel vielleicht verführt, und andere Aktivitäten wären zielführender.“ Deswegen wird in der Handreichung Aktivität 5, „Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen“ aufgelistet.

Unterrichtsbeobachtungen in eine ähnliche Richtung wie obenstehend dargestellt, werden in 8 Unterrichtsszenen des Unterrichtsbausteins XII und verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* mit der Hauptlehrkraft D und der Hauptlehrkraft E beobachtet.

- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein XII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei den Materialien ist explizit anzuleiten.*
- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein XII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Kindliches Lernen muss durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden. In Baustein XII bedeutet dies, wie in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „In der Spielbegleitung kommt es vor allem darauf an, zu beobachten, ob Kinder die Gesamtzahl der von Spieler 1 und Spieler 2 ausgestreckten Finger zählend ermittelt wird. Wenn dies noch der Fall ist, ist das Spiel vielleicht verführt, und andere Aktivitäten wären zielführender (Aufgabe 5).“*



### ***Überlegungen aus fachdidaktischer Sicht zu Unterrichtsbaustein XIII und Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein XIII***

Sich intensiv mit Strukturen in Darstellungen auseinanderzusetzen (und nicht bloß als „Einmalaktion“, wie es im Alltag des Unterrichts ohnedies mitunter gelegentlich passiert) scheint von Beginn an lohnend. Zu wesentlich scheint dieser grundlegende Lernschritt, den alle Kinder (früher oder später) machen müssen, nämlich: Einsicht in das Erkennen und Nutzen von Zahl-Strukturen. Dies Art, Zahlen zu strukturieren und nicht zählend zu erfassen wird aus fachdidaktischer Sicht als wesentliche Leistung im führen Mathematiklernen bezeichnet (Abschnitt 2.2.3).

Wie jeder Lernstoff muss dieses Verständnis für Strukturen erlernt werden, eine lohnende Aktivität im frühen Arithmetikunterricht. Es reicht dabei nicht, dass die Kinder solche Darstellungen „anschauen“. Die Kinder müssen gezielt unterrichtet werden, wie sie ihre Aufmerksamkeit an solchen Darstellungen lenken und so Wissen über Zahlbeziehungen erlangen zu können (siehe Abschnitt 2.2.3). Hilfreich dabei können die in Abschnitt 2.2.3 von Steinweg (2014; dazu auch 2001) genannten Phasen sein.

Dieses Verständnis für Strukturen kommt dabei nicht „natürlich“ von *allen* Kindern in der Klasse, wie in der Beschreibung des Bausteins XIII (Kategorie: *Fachlich verständlich Arbeitsaufträge* und im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage 3.3.2) ausführlich dargestellt. In Abschnitt 9.4 konnte gezeigt werden, dass es nicht lohnt, diese Aktivitäten zum „schnellen Sehen“ ausschließlich im Klassenverband zu machen. Manche Kinder werden darüber hinaus immer wieder auch Förderung außerhalb des Klassenverbandes benötigen. Innerhalb von Einzel- oder Kleingruppen sollen diese Kinder vielfältige Möglichkeit erhalten, durch Zuwendung Strukturen in Darstellungen zu erkunden. Auf die Notwendigkeit einer differenzierten Beobachtung der entsprechenden Ausgangslage seitens der Lehrkraft und darauf abgestimmt differenzierte Aufgaben für Kinder zum „schnellen Sehen“, wurde bereits in Baustein VIII hingewiesen. Generell gilt bei Aktivitäten in diesem Bereich des nicht-zählenden Erfassens strukturierter Mengen: Gerade auch schwächere Kinder könnten von einem Erstunterricht profitieren, in dem *gezielt* auf das Erkennen und Nutzen von Strukturen hingearbeitet wird (Abschnitt 2.2.3). Dabei sollen Kinder die Zahldarstellungen am Zehnerfeld wie in diesem Unterrichtsbaustein XIII angeregt werden zu verbalisieren, *wie* sie die jeweilige Darstellung so schnell gesehen haben.

Verbunden mit der Subkategorie *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* und den Unterrichtsbaustein XIII werden insgesamt 27 Unterrichtsszenen mit der Haupt-

lehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D, der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft A, der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D beobachtet.

13 Unterrichtsszenen aus Unterrichtsbaustein XIII und verbunden mit der Subkategorie *Fachlich verständliche Arbeitsaufträge* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C und der Stützlehrkraft A und der Stützlehrkraft C festgemacht.

43 Unterrichtsszenen aus Baustein XIII und verbunden mit der Subkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden mit der Hauptlehrkraft A, der Hauptlehrkraft B, der Hauptlehrkraft C, der Hauptlehrkraft D, der Hauptlehrkraft E und der Stützlehrkraft C und der Stützlehrkraft D erfasst.

Daraus folgen die Überlegungen zu den Gestaltungsprinzipien zu Unterrichtsbaustein XIII:

- *Gestaltungsprinzip Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen in Baustein XIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Das Erkennen und Nutzen von Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen bei den Materialien ist explizit anzuleiten. Konkret bedeutet dies wie in Baustein XIII in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ formuliert: „Die Kinder sollen angeregt werden, genau zu beschreiben, was sie auf der Darstellung sehen; und auf welche Weise sie es sehen. Den Kindern soll, wenn nötig durch gezieltes Fragen, ermöglicht werden zu erkennen, dass der Rahmen Platz bietet für zehn Punkte in zwei Reihen zu je fünf Punkten; also genau gleich wie bei den 10 Fingern auf zwei Händen zu je 5 Fingern. Die Lehrperson stellt weitere, gezielte Fragen zu Zusammenhängen im Zehnerfeld mit den ihnen vertrauten Fingerdarstellungen: ‚Wie siehst du schnell, dass das acht Punkte sind?‘ Wenn möglich sollte die Erkenntnis von den Kindern kommen, dass z.B. acht Punkte als fünf und noch drei angeordnet sind; genau wie bei den Fingern.“*
- *Gestaltungsprinzip Fachlich verständliche Arbeitsaufträge in Baustein XIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Eine Versprachlichung von fachlich richtigen, sinnvoll didaktisch reduzierten und klar verständlich formulierten Arbeitsaufträgen durch Lehrkräfte ist explizit anzuleiten.*

- *Gestaltungsprinzip Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse in Baustein XIII (hingewiesen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“): Die Lehrkraft muss passende Aufgaben- und Problemstellungen bereitstellen, sodass die individuellen Denk- und Verstehensleistungen der Kinder angeregt werden.*

### **Finalisierte Unterrichtsbausteine für den frühen Arithmetikunterricht**

Als abschließende Orientierung, welche Unterrichtsbausteine im Anschluss an die Auswertung der zweiten Durchführung der Unterrichtsbausteine überarbeitet und weiter ausgearbeitet wurden, wird die gleiche Tabelle wie in Abschnitt 6.2 und Kapitel 8 angeführt. Wie in Tabelle 100 ersichtlich, wird lediglich die Aktivität „Anzahlvergleiche mit Steckwürfeln, ohne zu zählen“ als fokussierende Aktivität zu Baustein V neu in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ ergänzt. Alle weiteren Bausteine und dazugehörige Aktivitäten haben sich als durchgehend lohnend erwiesen, wenngleich die Berücksichtigung der Gestaltungsprinzipien (Abbildung 26) bei den einzelnen Bausteinen für den frühen Arithmetikunterricht für die Lehrkräfte lohnend sind.

**Tabelle 100**

*Übersicht über die finalisierten Bausteine (eigene Darstellung)*

---

|                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Baustein I – Resultatives Zählen: Wir und unsere Klasse (LK)</i>                 |
| <i>Baustein II – Resultatives Zählen: Worauf muss man beim Zählen achten?</i>       |
| Aktivität: Zählen in der Klasse als Ritual in der Klasse (LK)                       |
| Aktivität: Zählen mit bewussten Zählfehlern (LK)                                    |
| Aktivität: Zählprinzipien (LK)                                                      |
| Aktivität: Schätzen und Zählen (LK/LL)                                              |
| <i>Baustein III – Resultatives Zählen: Was ist beim Zählen nicht wichtig?</i>       |
| Aktivität: Wiederholung Zählprinzipien (LK)                                         |
| Aktivität: Zählschachtel (LK)                                                       |
| Aktivität: Zählen der Kinder als Ritual in der Klasse (LK)                          |
| <i>Baustein IV – Zahlen und Finger: Wir finden Zahlen am eigenen Körper</i>         |
| Aktivität: Zahlen am eigenen Körper (LK)                                            |
| Aktivität: Zahlen mit Fingern darstellen (LK/LL)                                    |
| Aktivität: Bald auch erste Anstöße in Richtung Automatisierung (LK)                 |
| <i>Baustein V – mehr, weniger, gleich: Sind es mehr, weniger oder gleich viele?</i> |
| Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Partnersuche (LK)                           |

Aktivität: Vergleichen ohne zu zählen – Anzahlvergleiche im Klassenzimmer (LK)

Aktivität: Vergleichen ohne und eventuell auch mit zählen (LL/IL)

Aktivität: Anzahlvergleiche mit Steckwürfeln ohne zu zählen (IL)

*Baustein VI – Resultatives Zählen: mehr, weniger, gleich*

Aktivität: Im Raum Dinge suchen (LK)

Aktivität: Plättchenwerfen (LL)

*Baustein VII – Zahlen und Finger: „Blitz-Blick“-Übungen mit Fingern & Co*

Aktivität: Häschen-Ohren (LL)

Aktivität: Finger unter dem Tisch (LL)

Aktivität: erst beschreiben, dann zeigen (LL)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Zahlen-Schnipp-Schnapp (LL)

Aktivität: mehr und mehr in Richtung Automatisierung (LK/LL)

*Baustein VIII – Schnelles Sehen: Blitzblickübungen*

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Würfel (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbilddarstellungen (LL)

Aktivität: Blitzblickübungen mit Würfelbild-, anderen Darstellungen (LK)

Aktivität: Beliebige Anzahlen strukturiert legen (IL)

*Baustein IX – Resultatives Zählen: Fingerbilder & Co*

Aktivität: Arbeit im Zahlenforscherheft (IL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Memory (LL)

*Baustein X – Um eins mehr: Um eins mehr mit den Fingern aufbauen*

Aktivität: Zahlenreihe mit den Fingern aufbauen (LK)

Aktivität: um eins mehr in Partnerarbeit (LL)

Aktivität: Fingerbilder & Co: Ordnen! (LL)

*Baustein XI – Um eins weniger: Absteigende Zahlwortreihe*

Aktivität: Um eins weniger – mit Steckwürfeln (LK)

Aktivität: Um eins weniger – mit Fingern abbauen (LK)

Aktivität: ein erster Versuch in Richtung Automatisierung (LK)

*Baustein XII – Stützpunkt-Zahlen: Wie viele fehlen auf Fünf und Zehn?*

Aktivität: Blitzblickübungen mit Fingern (LK)

Aktivität: Die Finger werden verdeckt (LL)

Aktivität: Wie viele Finger fehlen auf fünf und zehn? (LL)

Aktivität: Finger-Schnipp-Schnapp: Fünf gewinnt/zehn gewinnt (LL)

Aktivität: Zahlen mit der Hauptstrategie in Partnerarbeit darstellen (LL)

*Baustein XIII – Wer hat mehr? Zahldarstellungen im Zehnerfeld*

Aktivität: In Richtung Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Blitzblickübungen mit dem Zehnerfeld (LK)

Aktivität: Wer hat mehr – Spielvariante mit Würfeln (LL)

---

*Anmerkung. LK = Lernumgebung in der Klasse, LL = Lernumgebung mit einem Lernpartner, IL = Individuelle Lernphase.*

***Gestaltungsprinzipien für die einzelnen Unterrichtsbausteine für den frühen Arithmetikunterricht***

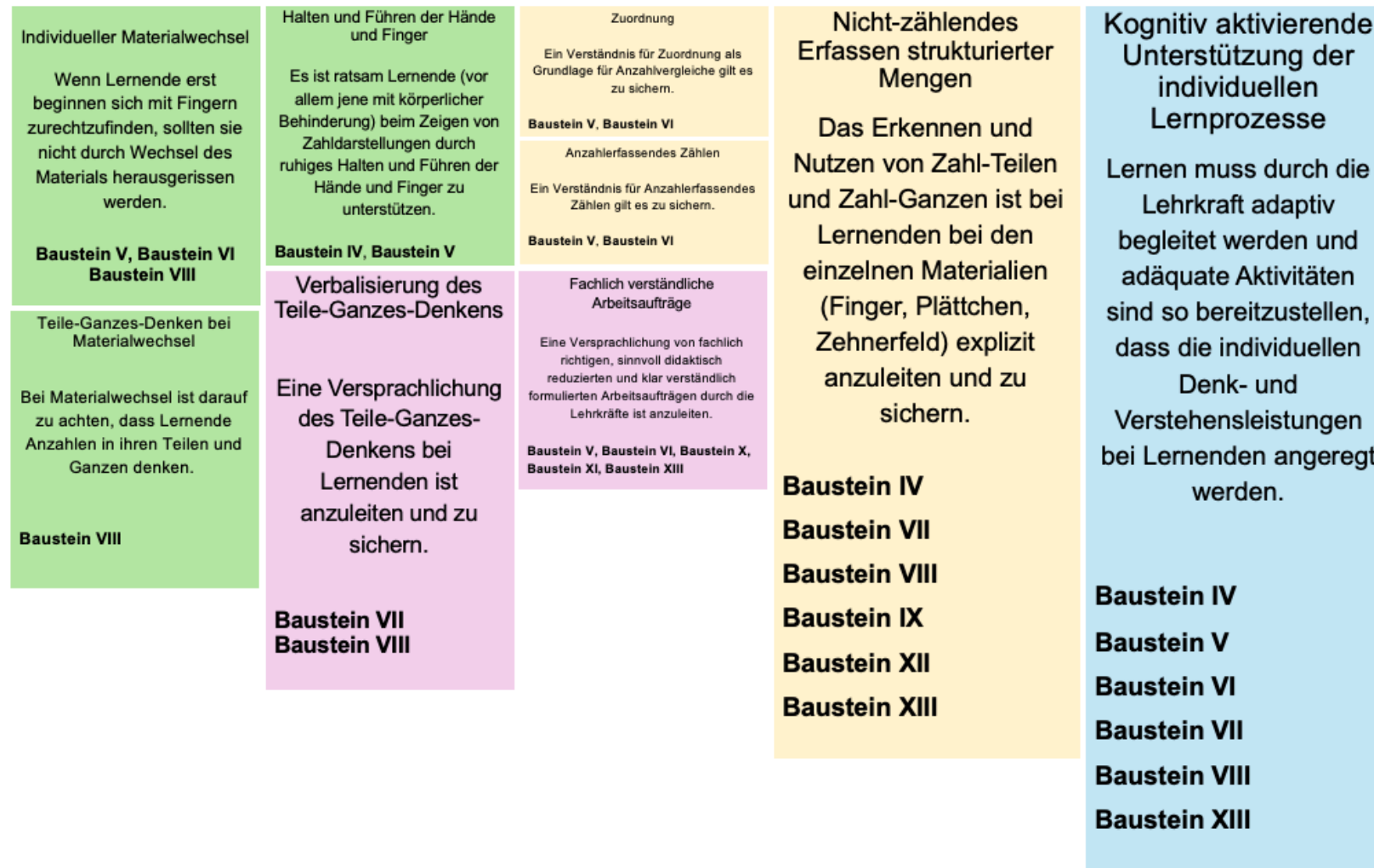
Die aus den Unterrichtsergebnissen gewonnenen Gestaltungsprinzipien der einzelnen Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens im frühen Arithmetikunterricht, die sowohl Schwierigkeiten innerhalb der Unterrichtsbausteine aufzeigen und andererseits den Lehrkräften bei der Umsetzung der Lernumgebungen eine Orientierung geben sollen, werden in Abbildung 26 zusammenfassend visualisiert.

Bei dieser Abbildung werden die Untersuchungsergebnisse der Auswertungskategorie verbunden mit *allen Unterrichtsszenen* ( $N = 395$ ) dargestellt. Die Größe der Rechtecke der Gestaltungsprinzipien und die Schriftgröße der Überschriften orientieren sich an der Häufigkeit der Untersuchungsergebnisse, die zur Generierung eines Gestaltungsprinzips führten. Gestaltungsprinzipien, die zur selben Auswertungskategorie gehören, werden in derselben Farbgebung dargestellt.

Resümierend: Die Gestaltungsprinzipien beziehen sich auf die entwickelten Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht. Diese Prinzipien sind künftig leitend bei der Umsetzung der einzelnen Unterrichtsbausteine im Klassenzimmer.

**Abbildung 26**

*Gestaltungsprinzipien für die einzelnen Unterrichtsbausteine auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens (eigene Darstellung)*



## 10 Rückschau auf den Forschungs- und Entwicklungsprozess

Dieses Entwicklungsforschungsprojekt hat als Zielsetzung, die Entwicklung und Weiterentwicklung von Unterrichtsaktivitäten, die am Beispiel von Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens zur Förderung von tragfähigen Zahlkonzepten im frühen Arithmetikunterricht der Primarstufe beizutragen versprechen.

Mit der zweiten Erprobung der Lernumgebungen im frühen Arithmetikunterricht ist das Forschungs- und Entwicklungsprojekt vorläufig abgeschlossen. Aufgrund der in Abschnitt 9.4 ausführlich dargestellten Ergebnisse scheint es nicht notwendig, die in Kapitel 8 beschriebenen und überarbeiteten Unterrichtsbausteine *inhaltlich* grundlegend abzuändern. Die finalisierten erweiterten und fokussierenden Aktivitäten zu den einzelnen Unterrichtsbausteinen für den frühen Arithmetikunterricht sind in Tabelle 100 dargestellt. Die Gestaltungsprinzipien sind in Abbildung 26 visualisiert.

Die sprachlichen Kompetenzen der Schüler\*innen im Rahmen der zweiten Erprobung der Unterrichtsbausteine wurden vor allem von den studentischen Hilfskräften in deren Abschlussarbeiten (Erber, 2021; Wibmer, 2021) ausgewertet und in aller Ausführlichkeit beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wurden die sprachlichen Kompetenzen vor allem durch die Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* (im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfrage F 2.3) beleuchtet. In diesem Zusammenhang konnte eine generelle Tendenz dafür herausgearbeitet werden, dass sich das Beschreiben von Einsichten in das Teile-Ganzes-Denken im Rahmen der Lernumgebungen bei Schüler\*innen nicht von selbst mit dem Alter entwickelt und weiterentwickelt. Es erfordert gezielter unterrichtlicher Förderung, um die fachsprachliche Ausdrucksfähigkeit aller Lernenden anzubahnen und zu fördern. Dementsprechend war es Aufgabe nachfolgender Entwicklungsforschungsprojekte, in weiteren Zyklen designbasierter Forschung eine umfassendere und nachhaltige Förderung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit in Bezug auf die entwickelten Lernumgebungen für den frühen Arithmetikunterricht in den Blick zu nehmen. Überlegungen in diese Richtung sind bei Ortner (2023) nachzulesen.

In Kapitel 5 wurden fünf Forschungsfragen angeführt, die an dieser Stelle der Arbeit als Rückblick auf den Forschungs- und Entwicklungsprozess und im Sinne des Reflexivitätsprinzips qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1) beantwortet werden:

- **Wie können Lernumgebungen mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt werden?**



- Welche stofflichen Hürden können bei Schüler\*innen bei der Erprobung der arithmetischen Lernumgebungen auf Basis des *Teile-Ganzes-Denkens* festgemacht werden, die im Klassenzimmer als Balance zwischen dem Gemeinsamen Lernen, dem Lernen in der Kleingruppe und dem Individuum eingesetzt werden?
- Wie werden die fachlichen Lernprozesse der Schüler\*innen im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des *Teile-Ganzes-Denkens* von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?
- Wie können unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse durch die Erprobung die entwickelten Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des *Teile-Ganzes-Denkens* und unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse der Interviews weiterentwickelt werden?
- Wie werden die Kriterien von Entwicklungsforschung in dieser Dissertation realisiert?

***Wie können Lernumgebungen mit klarem Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens im arithmetischen Anfangsunterricht entwickelt werden?***

Die Auswertung der teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften vor der Erprobung der Lernumgebungen (im Rahmen der Beantwortung der Forschungsfragen F 1.1 und F 1.2 in Abschnitt 7.3) zeigte klar, dass es grundsätzlich eine deutliche Übereinstimmung bei den von den Lehrkräften beschriebenen mathematikdidaktischen Kriterien zur Gestaltung von Lernumgebungen und den zentralen fachdidaktischen Leitideen für einen Mathematikunterricht (Abschnitt 3.3.2) gab. Auch die Berichte der vier Lehrkräfte, wonach es für sie herausfordernd zu sein scheint, gemeinsame Lernsituationen gerade in der Arithmetik zu ermöglichen, stimmten mit den Aussagen der von Korff (2018) befragten Lehrkräften überein (Abschnitt 3.2.1). Alle vier Lehrkräfte thematisierten den Umgang mit der Vielfalt der Lerngruppe, den es gerade auch im frühen Arithmetikunterricht zu berücksichtigen gilt. Alle nannten einhellig das Konzept „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ zwar als notwendig und sinnvoll im Unterricht, aber gleichzeitig wurden auch Ängste und Unsicherheiten wahrgenommen. Weiters gaben alle vier befragten Lehrkräfte an, dass es gerade in heterogenen Lerngruppen herausfordernd ist, geöffnete und auf entdeckendes Lernen gerichtete Lernumgebungen im Klassenzimmer zu organisieren. Alle beteiligten Lehrkräfte gaben auch an, bereits selbst Lernumgebungen im



Unterricht durchgeführt zu haben. Die Organisation dieser Lernumgebungen und damit zusammenhängend der Einsatz von unterschiedlichen Sozialformen wurde von allen als herausfordernd wahrgenommen.

Auf diesen Aussagen und Erfahrungen der Lehrkräfte stützend, wurde bei der Gestaltung der Lernumgebungen im Rahmen dieses Dissertationsvorhabens von den mathematikdidaktischen Kriterien vor allem das Konzept „Lernen am gemeinsamen Gegenstand“ auf differenten Ausgangs- und Zielniveaus der Schüler\*innen besonders berücksichtigt. Deshalb wurden die Lernumgebungen (Kapitel 6) so gestaltet, dass jeder Baustein zu einem übergeordneten Thema entwickelt wurde und die unterschiedlichen Aktivitäten zu diesen Bausteinen differente Ausgangs- und Zielniveaus der Kinder berücksichtigen.

Die Ergebnisse der teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften nach der Erprobung der Lernumgebungen im Unterricht zeigten, dass alle Lehrkräfte die Lernumgebungen für diese frühe Phase des Mathematiklernens als generell stimmig empfanden. Gerade die Aktivitäten der einzelnen Lernumgebungen auf unterschiedlichen Ausgangs- und Zielniveaus betonten alle einhellig als gelungen. Aus diesem Grund wurden nach der ersten Erprobung der Lernumgebungen die Unterrichtsaktivitäten in ihren inhaltlichen Grundzügen weitgehend so belassen. Weiters betonten alle Lehrkräfte, dass sich die Unsicherheit, wie man Lernumgebungen im Mathematikunterricht organisieren kann, verringerte. Alle Lehrkräfte gaben an, dass die Anzahl der wahrgenommenen Hürden bei den Lernenden überschaubar war. Vor diesem Hintergrund wurde dabei explizit genannt, dass es für einige Kinder schwierig war, unterschiedliche Zahldarstellungen mit Fingern zu zeigen und diese auch zu verbalisieren.

Hinsichtlich der Frage nach Verbesserungsvorschlägen der entwickelten Lernumgebungen wurde von allen Lehrkräften die Relevanz von konkreten und schriftlich ausformulierten Anweisungen, Fragen, Hilfestellungen, Formulierungen o.Ä. explizit hervorgehoben. Zwar wurden in der ursprünglichen Skizzierung der Bausteine (Kapitel 6) einzelne Formulierungshilfen für die Lehrkräfte ausformuliert, dennoch waren diese laut den Lehrkräften zu wenig klar und nicht durchgängig bei allen Bausteinen und Aktivitäten verschriftlicht. Alle vier befragten Lehrkräfte nannten als Verbesserungsvorschlag eine Schritt-für-Schritt-Anleitung der einzelnen Lernumgebungen. Diese Überlegungen wurden bei der Weiterentwicklung der Lernumgebungen besonders geachtet:

Zum einen wurden Ausformulierungen von Anweisungen, Fragen, Hilfestellungen, Formulierungen, o.Ä. für die Lehrkräfte bei den einzelnen Aktivitäten der Lernumgebungen verschriftlicht. Diese sollten den Lehrkräften im weiteren Verlauf der Durchführung

als sprachliche Orientierung dienen. Zum anderen wurden, im Gegensatz zur ersten Durchführung der Lernumgebungen, die beispielhafte Unterrichtsaktivitäten beinhaltet (Kapitel 6), die Lernumgebungen in dieser Phase so über- und weiter ausgearbeitet, dass alle Aktivitäten der einzelnen Lernumgebung ausführlich und Schritt für Schritt beschrieben wurden. Bei einzelnen Unterrichtsbausteinen wurden Erweiterungs- und Vertiefungsaufgaben als Ideen zur Differenzierung und zur Gestaltung gemeinsamer Lernsituationen aufgelistet und die Arbeits- und Demonstrationsmittel für die Unterrichtsbausteine konkret benannt. Die Lehrkräfte erhielten eine Handreichung zur Durchführung der Bausteine und ein Begleitmaterial, in welchem der aktuelle Wissensstand zu inklusiver Beschulung im frühen Arithmetikunterricht wie auch methodische und inhaltliche Überlegungen zum Projekt dargestellt werden. Die Handreichung zur Durchführung umfasst eine Übersicht über das Programm, eine Lernstandserhebung und eine ausführliche Beschreibung eben dieser 13 Lernumgebungen.

Resümierend: Aufbauend auf den Ergebnissen der teilstrukturierten Interviews mit den Lehrkräften und deren Erfahrungen mit der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer wurden diese über- und weiter ausgearbeitet. Die über- und weiter ausgearbeiteten Lernumgebungen sind in Kapitel 8 beschrieben. Mit der Weiterentwicklung der Lernumgebungen schließt der erste Zyklus dieses designbasierten Forschungsansatzes und leitet in den zweiten Zyklus, beschrieben in Kapitel 9, über.

***Welche stofflichen Hürden können bei Schüler\*innen bei der Erprobung der arithmetischen Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens festgemacht werden, die im Klassenzimmer als Balance zwischen dem Gemeinsamen Lernen, dem Lernen in der Kleingruppe und dem Individuum eingesetzt werden?***

Für die Beantwortung der Forschungsfrage werden die Daten der zweiten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer herangezogen (Kapitel 9). An dieser Stelle werden rückblickend zentrale Ergebnisse von den in Abschnitt 9.4 und Abschnitt 9.5 ausführlich beschriebenen Ergebnissen exemplarisch herausgegriffen. Wiederholend festgehalten wird, dass an dortiger Stelle ein Schwerpunkt darauf lag, die Ergebnisse thematisch entlang den einzelnen Unterrichtsbausteine und nicht entlang der Forschungsfrage auszuwerten: Bezieht man alle Unterrichtsszenen mit ein ( $N = 395$ ), zeigen sich in 31,6 % ( $N = 125$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur*, in 28,6 % ( $N = 113$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* und in 23,8 % ( $N = 95$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Verwendung*

*strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel*. Alle weiteren Häufigkeitsverteilungen sind in Abschnitt 9.5 zu finden.

Die 125 Unterrichtsszenen mit der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur* und den dazugehörigen Subkategorien *Zuordnung* ( $N = 17$ ), *Anzahlerfassendes Zählen* ( $N = 15$ ) und *Nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* ( $N = 93$ ) werden in Baustein II, Baustein III, Baustein IV, Baustein V, Baustein VI, Baustein VII, Baustein VIII, Baustein IX und Baustein XII festgemacht.

Vor diesem Hintergrund mit 93 analysierten Unterrichtsszenen wird die in Abschnitt 2.4 beschriebene Bedeutung nicht-zählender Anzahlerfassung als wesentliche Fähigkeit im frühen Mathematiklernen nochmals klar unterstrichen. Innerhalb der Fachdidaktik gibt es eine grundsätzliche Übereinstimmung, dass im Zentrum dieser frühen Phase des Mathematiklernens wesentlich das Erarbeiten von „Strukturen“ und „Beziehungen“ steht. Um die in Abbildung 26 visualisierten Gestaltungsprinzipien umsetzen zu können, kann es dementsprechend ratsam sein, die, wie in Abschnitt 2.4 beschriebenen 4 Phasen von Steinweg (2014) in Unterricht und Förderung bewusst zu berücksichtigen, um so „das Erkennen und Nutzen von Zahl-Ganzen bei den Materialien (Finger, Plättchen, Zehnerfeld) explizit anzuleiten und zu sichern“ (Gestaltungsprinzip *Nicht-Zählendes Erfassen strukturierter Mengen*). Ganz generell sollte aufgrund dieser Ergebnisse bei der Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer darauf geachtet werden, dass Kinder nicht-zählend Anzahlen erfassen. Ist dies nicht der Fall, können Kinder nachvollziehbar in weiterer Folge Teile im Ganzen nicht mitdenken und dieses Denken auch nicht verbalisieren. In Baustein VII mit 47 Unterrichtssequenzen und mit den Fingern als Material werden weniger Unterrichtssequenzen herangezogen als in dem darauffolgenden Baustein VIII mit 86 Sequenzen und mit Würfelbild- und Plättchendarstellungen. Das nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen mit Fingern in Baustein VII scheint demnach den Kindern nicht so schwer zu fallen als das Nicht-zählende Erfassen strukturierter Mengen mit Würfelbild- und mit Plättchendarstellung in Baustein VIII.

Die 113 Unterrichtsszenen mit der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* werden in Baustein IV, Baustein V, Baustein VI, Baustein VII, Baustein VIII, Baustein XIII festgemacht. In diesem Zusammenhang müssen „Lernprozesse durch die Lehrkraft adaptiv begleitet werden und passende Aufgabenstellungen sind bereitzustellen, sodass die individuellen Denk- und Verstehensleistungen angeregt werden“ (Gestaltungsprinzip *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse*). Die Ausformulierungen und klaren Anweisungen dieser Hauptkategorie für die jeweiligen Aktivitäten sind in der „Handreichung zur Durchführung

der Bausteine“ bei den einzelnen Lernumgebungen angeführt und dienen als Hilfestellung bei der Umsetzung für die Lehrkräfte.

Die 95 Unterrichtsszenen mit der Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* und den dazugehörigen Subkategorien *Individueller Materialwechsel* ( $N = 35$ ), *Halten und Führen der Hände und Finger* ( $N = 26$ ) und *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* ( $N = 33$ ) werden in Baustein IV, Baustein V, Baustein VI, Baustein VIII beobachtet. Vor diesem Hintergrund mit 35 analysierten Unterrichtsszenen wird die Bedeutung des individuellen Zeitpunktes des Materialwechsels ersichtlich. Der Individuelle Materialwechsel (von den Fingern hin zu ... Wendeplättchen) wie im Übergang von Baustein IV zu Baustein V und VI muss gut und individuell auf das einzelne Kind abgestimmt sein. Ergänzungen zu weiterführenden und vereinfachten Aktivitäten bei Zuordnungsaufgaben in Baustein V wurden in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ aufgenommen, um so das Gestaltungsprinzip der Hauptkategorie *Individueller Materialwechsel* bestmöglich und individuell berücksichtigen zu können: „Wenn Lernende erst beginnen sich mit Fingern zurechtzufinden, sollten sie nicht durch Wechsel des Materials herausgerissen werden.“

Auch wird in diesem Zusammenhang mit 33 analysierten Unterrichtsszenen die Bedeutung des *Teile-Ganzes-Denkens bei Materialwechsel* klar hervorgehoben. In weiterer Folge scheint es sachlogisch mit Gaidoschik (2007) zu argumentieren, wonach Finger eine entscheidende Hilfe gerade als „Einstieg“ in die Mathematik leisten (Abschnitt 3.3.2 und Abschnitt 9.5). Es scheint lohnend, ein tragfähiges Denken mit Teilen und Ganzen mit dem Material Finger abzusichern und erst dann auf dieser Grundlage einen Wechsel des Materials (in diesem Beispiel hin zu Plättchen) vorzunehmen. Dabei kann es für einige (viele?) Kinder lohnend sein, nicht zu schnell von Fingerhandlungen zu anderen Materialien wie Plättchen zu wechseln (siehe *Individueller Materialwechsel*). Durch Bewusstmachung von Fingerdarstellungen können manche Kinder Punktedarstellungen leichter *quasi* auf einen Blick erkennen. Gaidoschik (2019a) rät in seinem TIGER-Konzept in diesem Zusammenhang: „Teile-Ganzes-Verständnis der Zahlen bis 10 mit Fingerdarstellungen als erstem Zugang, *darauf gestützt* Zehnerfeld-Darstellungen“ (Hervorhebung C.G.).

Resümierend lässt sich festhalten, dass Baustein V ( $N = 35$  Unterrichtsszenen, 8,9 % <sup>1</sup>), Baustein VI ( $N = 32$  Unterrichtsszenen, 8,1 % <sup>1</sup>), Baustein VII ( $N = 47$  Unterrichtsszenen, 11,9 % <sup>1</sup>) und Baustein VIII ( $N = 129$  Unterrichtsszenen, 32,7 % <sup>1</sup>) aufgrund der Häufigkeiten der beobachteten Szenen wesentlich sind, sodass Baustein XIII ( $N = 75$  Unterrichtsszenen, 19,0 % <sup>1</sup>) als Abschluss dieses Projektes gut umsetzbar ist. Diese

Bausteine sind somit leitend für alles Weitere beim Mathematiklernen und -treiben in dieser frühen Phase des Mathematiklernens.

***Wie werden die fachlichen Lernprozesse der Schüler\*innen im Rahmen der entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens von der Lehrkraft, beziehungsweise den Lehrkräften unterstützend begleitet?***

Die Daten der zweiten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer sind zentral für die Beantwortung dieser Forschungsfrage (Kapitel 9). Von den in Abschnitt 9.4 und in Abschnitt 9.5 ausführlich beschriebenen Ergebnisse der zweiten Durchführung der Lernumgebungen werden an dieser Stelle der Arbeit wesentliche Ergebnisse rückblickend und zusammenfassend beschrieben: Einzig die Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel* mit den Subkategorien *Individueller Materialwechsel*, *Halten und Führen der Hände und Finger* und *Teile-Ganzes-Denken bei Materialwechsel* waren verbunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebungen*. Bezieht man alle Unterrichtsszenen mit ein ( $N = 395$ ), zeigten sich in 23,8 % ( $N = 94$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Verwendung strukturierter Arbeits- und Demonstrationsmittel*.

Alle weiteren Hauptkategorien *Innermathematische Struktur* (Tabelle 38), *Fachsprache der Mathematik* (Tabelle 39) und *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* (Tabelle 40) mit den jeweils dazugehörigen Subkategorien waren verbunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung*. Verbunden mit allen Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ) zeigten sich in 76,2 % ( $N = 301$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei dieser Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung*. Vor diesem Hintergrund zeigten sich verbunden mit allen Unterrichtsszenen ( $N = 395$ ) in 31,6 % ( $N = 125$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur*, in 16,0 % ( $N = 63$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* und in 28,6 % ( $N = 113$ ) der Szenen Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse*. Verbunden mit der Auswertungskategorie *Schwierigkeiten der Lehrkräfte bei der Umsetzung* ( $N = 301$ ) konnten 41,5 % ( $N = 125$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur*, 21,0 % ( $N = 63$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Fachsprache der Mathematik* und 37,5 % ( $N = 113$ ) der Szenen der Hauptkategorie *Kognitiv aktivierende Unterstützung der individuellen Lernprozesse* zugeordnet werden.

Resümierend: Bei dieser Verteilung, wonach 301 Unterrichtsszenen als Schwierigkeiten der Lehrkräfte beziehungsweise bei den Lehrkräften bei der Umsetzung der Lernumgebungen und 94 Unterrichtsszenen als Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebung festgemacht werden konnten, wurde die hohe Bedeutung ersichtlich, einen differenzierten und ganzheitlichen Blick auf die Auswertungskategorie der Lehrkräfte zu werfen. Überlegungen in diese Richtung wurden ausführlich bei den einzelnen Aktivitäten der Lernumgebungen und den daraus resultierenden Gestaltungsprinzipien in Abschnitt 9.5 vorgenommen. Daraus resultierend wurden zu den einzelnen Aktivitäten der 13 Lernumgebungen Gestaltungsprinzipien formuliert. Die Berücksichtigung dieser sind bei der Durchführung der Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens im frühen Arithmetikunterricht für Lehrkräfte (siehe Beantwortung der Forschungsfrage F1) zentral.

Zusammenfassend kann mit Gaidoschik (2022), Gerster (2009), Benz et al. (2015) und anderen festgemacht werden, dass das individuelle Verstehen, Eingehen, Fordern und Fördern der Kinder im Klassenzimmer und ihr mathematisches Denken, Können und Tun keinesfalls trivial ist (Kapitel 2). Die Lehrkräfte sollten, als Ideal im Rahmen einer Fortbildungsmaßnahme mit einer konstanten Intensivbegleitung, dahingehend sensibilisiert werden, nicht nur die methodische Umsetzung von Unterrichtsaktivitäten situationsadäquat zu planen, sondern vor allem auch den fachlichen und fachdidaktischen Blick zu schärfen und durch wohlüberlegte Fragen, Denkanstöße und Rückmeldungen in den Unterrichtssituationen das Zahldenken und folglich den arithmetischen Lernstand der einzelnen Kinder zu ergründen und entwicklungsangemessen und adäquat zu begleiten (Abschnitt 3.3.1).

Wie im Verlauf dieser Arbeit herausgearbeitet werden konnte, spielt bei einer dementsprechenden Umsetzung im Mathematikunterricht Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag eine wesentliche Rolle (Abschnitt 5.1). Die von Sjuts (2003) aufgelisteten Gelingensbedingungen, wonach „vor allem fachliche Kompetenz, stoffdidaktische Sicherheit sowie die Fähigkeit zur inhaltsbezogenen und inhaltsübergreifenden Lern-, Denk- und Verstehensprozessanalyse, ebenso ein pädagogisches Menschenbild und die Akzeptanz der Individualität lernender Personen“ (S. 22) wesentlich sind, wird an dieser Stelle der Arbeit als Rückschau auf dieses Entwicklungsforschungsprojekt umso tragender. Die Autorin dieser Arbeit kann rückblickend auf den Entwicklungs- und Forschungsprozess mit Sjuts (2003) argumentieren, wonach „Metakognition, insbesondere das Nachdenken über das Zustandekommen mathematischer Ideen und das Erörtern

von Begriffsbildungen und Problemlösungen, ein wertvoller und deshalb für Verstehensintensität auf die Dauer unverzichtbarer Bestandteil mathematischer Aktivität ist. [...] Eine solche Tätigkeit ist frühzeitig im Unterricht zu praktizieren“ (S. 33 f.).

Als Rückschau auf dieses Entwicklungsforschungsprojekt ist zudem aus fachlicher Sicht für die Bildungslandschaft und für die Verantwortungsträger dieses Landes die Tatsache fatal, dass Gaidoschik bereits 2010 im Rahmen seiner Dissertation herausfand, dass österreichische Lehrkräfte Veranschaulichungs- und Erarbeitungsmaterial *nicht* für nicht-zählendes Erfassen strukturierter Anzahlwahrnehmung und -bestimmung nutzten: „Auf die offen formulierte Frage [...] lässt *keine einzige* Lehrkraft erkennen, dass sie auf quasi-simultanes Erfassen von Zahlstrukturen geachtet und das Material als Mittel zur Erarbeitung nicht-zählender Rechenstrategien genutzt hätte“ (S. 331, Kursivsetzung im Original). Auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass weit mehr als ein Drittel aller Lehrkräfte (41,5 %,  $N = 125$ , verbunden mit  $N = 301$  Unterrichtsszenen) Schwierigkeiten bei der Hauptkategorie *Innermathematische Struktur* zeigten. Diese Tatsache kann eine unglückliche Wiederholung von zufällig ausgewählten Lehrkräften und Umständen sein, die in diesem Bereich über zu wenig Fachwissen und fachdidaktisches Wissen verfügten, oder eben ein ernstzunehmender Anlass dafür, hinzuschauen, wie sich der Erstrechenunterricht in Österreich in den letzten 15 Jahren weiterentwickelt hat, und/oder in welchen spezifischen Bereichen es noch dringend Aufholbedarf bedürfe.

Goethes Zitat „Man sieht nur, was man weiß!“ beschreibt in diesem Zusammenhang treffend den Umstand, dass uns Menschen nur Dinge auffallen können, zu denen wir Hintergrundwissen haben. Die damit einhergehende zentrale Rolle einer qualitativen Aus-, Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften wird an dieser Stelle angeteasert und ist in Abschnitt 3.3 ausführlich dargelegt. Darüber hinaus sind die genannten Parameter eine wertvolle Voraussetzung für eine adäquate individuelle Förderung im Sinne einer förderorientierten Diagnostik und einer entwicklungsangemessenen und adaptiven Lernunterstützung (Abschnitt 3.3.1).

***Wie können unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse durch die Erprobung die entwickelten Lernumgebungen mit Fokus auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens und unter Einbeziehung der gewonnenen Erkenntnisse der Interviews weiterentwickelt werden?***

Wie in Tabelle 100 dargestellt, wurde lediglich die Aktivität „Anzahlvergleiche mit Steckwürfeln, ohne zu zählen“ als fokussierende Aktivität zu Baustein V neu und im Anschluss

an die Auswertung der zweiten Durchführung der Lernumgebungen in der „Handreichung zur Durchführung der Bausteine“ ergänzt. Alle weiteren Lernumgebungen und dazugehörige Aktivitäten haben sich am Ende des zweiten Zyklus der Durchführung (Kapitel 9) als durchgehend lohnend erwiesen, wenngleich die Berücksichtigung der Gestaltungsprinzipien, wie in Abschnitt 9.5 beschrieben, bei den einzelnen Aktivitäten der 13 Lernumgebungen für den frühen Arithmetikunterricht für die Lehrkräfte zentral sind.

Diese aus den Unterrichtsergebnissen gewonnenen Gestaltungsprinzipien der einzelnen Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens im frühen Arithmetikunterricht, die sowohl Schwierigkeiten innerhalb der Lernumgebungen aufzeigten und andererseits den Lehrkräften bei der Umsetzung der Lernumgebungen eine Orientierung geben sollten, wurden in Abbildung 26 zusammenfassend visualisiert.

Resümierend: Die Gestaltungsprinzipien beziehen sich auf die entwickelten Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht. Diese Prinzipien sind leitend bei der Umsetzung der einzelnen Aktivitäten der Lernumgebungen im Klassenzimmer.

### ***Wie werden die Kriterien von Entwicklungsforschung in dieser Dissertation realisiert?***

#### *Iteratives Vorgehen*

*„Iterative: the research incorporates a cyclic approach of design, evaluation, and revision“ (van den Akker et al., 2006, S. 5)*

Im Sinne designbasierter Forschungsansätze im nationalen und internationalen Kontext waren für dieses Dissertationsvorhaben von Beginn an unterschiedliche Zyklen angedacht (Abschnitt 5.3.3). Konkret wurden die Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht im Verlauf von zwei Forschungs- und Entwicklungszyklen entwickelt, erprobt, ausgewertet und weiterentwickelt:

Die erste Erprobung der Lernumgebungen im Unterricht (Kapitel 7) hatte das übergeordnete Ziel, die praktische Umsetzbarkeit und die innere Stimmigkeit der Lernumgebungen einzuschätzen. Dazu wurden die entwickelten Aktivitäten der Lernumgebungen in zwei Tiroler Volksschulklassen mit 45 Kindern erprobt, vor und nach der Erprobung fand ein qualitatives Interview mit den im Projekt beteiligten Lehrkräften statt (Abschnitt 7.2). Die in dieser Phase durchgeführten videogestützten Unterrichtssequenzen wurden



nicht ausgewertet. Essenziell bei der Auswertung der ersten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer waren die im Rahmen von teilstrukturierten Interviews gewonnenen Erfahrungen und Einschätzungen der Lehrkräfte hinsichtlich der entwickelten und erprobten Lernumgebungen, die praktische Realisierbarkeit der Unterrichtsaktivitäten der Lernumgebungen und die gemeinsame Reflexion darüber.

Die zweite Erprobung der Lernumgebungen im Klassenzimmer (Kapitel 9) galt als die zentrale Phase und war für die *Weiterentwicklung* der Lernumgebungen wesentlich. Die Erprobung der überarbeiteten Lernumgebungen im frühen Arithmetikunterricht wurde in fünf Tiroler Volksschulklassen mit 94 Kindern durchgeführt und fokussierte sowohl die fachlichen Hürden der Lernenden und auch die Handlungsmöglichkeiten der Lehrkräfte (Abschnitt 9.4 und im Rahmen der Beantwortung der Fragestellung F 2 und Fragestellung F 3). Dem vorausgehend wurden vor Beginn der Datenerhebung der beiden Erprobungen der Unterrichtsbausteine im Klassenzimmer die „Weißblatt-Erhebung“ als eine offene und geeignete Form von Standortbestimmungen durchgeführt (Abschnitt 6.2).

Die Forscherin versuchte, im Sinne des zentralen Grundsatzes der Flexibilität qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1), sich an veränderte Bedingungen und staatliche Vorgaben anzupassen. So musste in einer Kooperationsklasse aufgrund der COVID-19-Situation und den damit einhergehenden nationalen Vorgaben die Datenerhebung im September 2020 nach einer Woche abgebrochen werden. Die Forscherin und die eingebundenen studentischen Hilfskräfte ließen sich flexibel, offen und zeitnah auf eine neue Kooperationsklasse und deren Rahmenbedingungen ein und begannen erneut den Prozess der Datenerhebung (Abschnitt 9.3).

Als Grundlage der Auswertung in dieser zweiten Phase dienten transkribierte Unterrichtseinheiten aus den 5 Kooperationsklassen (Abschnitt 9.2), welche im Rahmen der zweiten Durchführung der Lernumgebungen im Klassenzimmer gewonnen wurden. Von den 769 transkribierten Sequenzen wurden 395 in die Auswertung einbezogen (Abschnitt 9.4). Bei dieser Auswertung wurden die individuellen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen der Lernenden *und* die fachliche Lernbegleitung der Lehrkraft, beziehungsweise der Lehrkräfte anhand der Aktivitäten der im Rahmen des (Dissertations-)Projektes entwickelten 13 Lernumgebungen (Abschnitt 6.2) untersucht. Im Zusammenspiel des aktuellen Forschungsstandes, des Datenmaterials und der Forschungsfragen wurde ein Kategoriensystem ausgearbeitet (Abschnitt 9.3). Mit Hilfe der Analysesoftware f4 wurde das Datenmaterial kodiert, die Untersuchungsergebnisse hinsichtlich der Fragestellungen analysiert und interpretiert. Dabei wurde vorwiegend deduktiv und in wei-

terer Folge induktiv ausgewertet. Zusätzlich und als Ergänzung zu diesem Kategoriensystem wurden bei der Analyse der Unterrichtsaktivitäten die Dimensionen zur Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität von Steinweg (2010, 2011) eingesetzt. Steinweg (2010, 2011) erarbeitete mit diesen Dimensionen einen Vorschlag, um Lehr-Lernsituationen im Anfangsunterricht durch mathematikdidaktische Kriterien *vom Fach aus* zu analysieren (Abschnitt 9.3). Die Autorin der vorliegenden Arbeit hat sich bewusst für die Einschätzung der Unterrichtsaktivitäten anhand dieser Dimensionen entschieden, wenngleich sie mit Steinweg übereinstimmt, „dass es *die* Kriterien auch für den kleinen Ausschnitt des mathematischen Anfangsunterrichts nicht geben kann“ (Steinweg, 2011, S. 6, Hervorhebungen im Original). Um einen „guten“ Arithmetikunterricht aus fachdidaktischer Sicht zu analysieren, sind sie aus Sicht der Autorin dieser Arbeit dennoch lohnend.

#### *Prozessorientierung*

*„Process oriented: a black box model of input-output measurement is avoided, the focus is on understanding and improving interventions“ (van den Akker et al., 2006, S. 5)*

Unter Berücksichtigung der zentralen Kriterien designbasierter Forschungsansätze (Abschnitt 5.3.3) und der Prinzipien qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1), war es der Autorin der vorliegenden Arbeit wichtig, dass die entwickelten und weiterentwickelten Lernumgebungen im Verlauf der zwei Forschungs- und Entwicklungszyklen (Kapitel 7 und Kapitel 9) insofern evaluiert werden, *wie* Kinder die Unterrichtsaktivitäten der einzelnen Lernumgebungen bearbeiteten, *wie* Lehrkräfte die einzelnen Aktivitäten entwicklungsangemessen adäquat begleiteten und *wie* diese die einzelnen Unterrichtsaktivitäten und damit einhergehende Zielsetzungen der Lernumgebungen einschätzten. Diese a priori Überlegungen seitens Autorin erforderten dementsprechend eine qualitative Herangehensweise der Forschungsmethoden unter Berücksichtigung der qualitativen Prinzipien (Abschnitt 5.3). Die von Steinweg (2010, 2011) definierten Dimensionen zur Einschätzung pädagogisch-fachdidaktischer Qualität erwiesen sich zusätzlich als sehr hilfreich.

Rückblickend auf den Forschungs- und Entwicklungsprozess kann an dieser Stelle festgehalten werden, dass durch den Einsatz dieses Instrumentes von Steinweg die in Abschnitt 9.4 beschriebenen und beobachteten Handlungen der Lehr-Lern-Situationen qualitativ und orientiert am Prozess facettenreich analysiert und beschrieben werden

konnten. Dadurch wurde eine solide Basis gelegt, um so mit Gaidoschik (2010) und anderen, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, zu argumentieren, wonach ein qualitatives Wissen über die Denkstrategien, die Kinder beim Lösen von Aufgaben verwenden, wichtig ist, um darauf gestützte didaktische Folgerungen für den pädagogischen Bereich treffen zu können und Kinder in diesem Prozess zu unterstützen. Diesen Prozess eben mit einem qualitativen Blick unter Berücksichtigung des zentralen Grundsatzes der Prozessualität qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1) zu beleuchten, war für diese Arbeit rückblickend und als Zusammenschau gewinnbringend.

Die gewonnenen Einsichten der beiden Forschungs- und Entwicklungszyklen bildeten, orientiert am Prozess, die solide Grundlage für die Über- und Weiterentwicklung der 13 binnendifferenzierenden Lernumgebungen.

### *Praxisorientierung*

*„Utility oriented: the merit of a design is measured, in part, by its practicability for users in real contexts” (van den Akker et al., 2006, S. 5)*

Die Durchführungen der Lernumgebungen wurden in einem für die Kinder gewohnten Setting umgesetzt: Die Lernumgebungen wurden von den Lehrkräften und (Stütz-)Lehrkräften im Verlauf beider Forschungs- und Entwicklungszyklen selbst durchgeführt.

Vor der ersten Erprobung der Lernumgebungen im Klassenzimmer wurden die Lehrkräfte hinsichtlich der Durchführung der Lernumgebungen geschult. Während des ersten Forschungs- und Entwicklungszyklus wurden die (Stütz-)Lehrkräfte von der Autorin dieser Arbeit begleitet, sie war in den Unterrichtseinheiten im Klassenzimmer anwesend und fungierte als zusätzliche Lernbegleitung bei Fragen der Kinder und der (Stütz-)Lehrkräfte. Auch waren die (Stütz-)Lehrkräfte an der Konkretisierung der Lernumgebungen aktiv beteiligt: Ihnen wurden Unterrichtsentwürfe und einzusetzende Materialien vorgeschlagen. Sie hatten dennoch die Freiheit diese Vorschläge der Unterrichtsentwürfe an die Gegebenheiten ihrer Klassen anzupassen (Kapitel 7).

Auch vor der zweiten Erprobung der Lernumgebungen wurden die involvierten Personen (fünf Lehrkräfte, drei Stützlehrkräfte und vier studentische Mitarbeiter\*innen) an einem (Fortbildungs-)Tag in die inhaltliche Thematik eingeführt und in der Durchführung der einzelnen Lernumgebungen für den arithmetischen Anfangsunterricht geschult. In dieser zehn-wöchigen Phase der zweiten Durchführung waren vier studentische Hilfskräfte beteiligt und begleiteten je eine Kooperationsklasse. Alle Lehrkräfte waren an der

konkreten Umsetzung der einzusetzenden Lernumgebungen und den Ablauf der Aktivitäten selbst beteiligt: Vor und nach der Erprobung wurde die Vorgehensweise für die nächste Einheit besprochen. Die Lehrkräfte hatten die Freiheit, die entwickelten Lernumgebungen nach ihren Einschätzungen an die Gegebenheiten der jeweiligen Klassensituation anzupassen (Kapitel 9). Diese Offenheit der Forscherin gegenüber den zu untersuchenden Personen und Situationen untermauert den Grundsatz der Offenheit qualitativer Forschung (Abschnitt 5.3.1).

### *Theorieorientierung*

*„Theory oriented: the design is (at least partly) based upon theoretical propositions, and field testing of the design contributes to theory building” (van den Akker et al., 2006, S. 5)*

Die inhaltliche Thematik dieser Arbeit wurde in den in den Kapiteln 2 bis 4 ausführlich dargestellten Stand der Forschung eingebettet. Daraus folgernd werden nun theoretische Bezüge wiederholend und exemplarisch herausgegriffen.

Die in der ersten und zweiten Durchführung entwickelten, erprobten und weiterentwickelten binnendifferenzierenden Lernumgebungen stützen sich inhaltlich auf die Konzeption TIGER (Gaidoschik, 2019a, 2022) und erweitern diese durch die im Verlauf dieser Arbeit entwickelten 13 Lernumgebungen samt vertiefenden und fokussierenden Unterrichtsaktivitäten für den arithmetischen Anfangsunterricht. Somit ist diese Arbeit die erste im deutschsprachigen Raum, in der eine Konzeption für den arithmetischen Anfangsunterricht der ersten Schulwochen der ersten Schulstufe auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens entwickelt, erprobt und evaluiert wurde. Deren Ergebnisse leisten einen Beitrag zur aktuellen fachdidaktischen Forschungslandschaft und stellen eine Erweiterung des mathematikdidaktischen Wissens dar. So baut diese Konzeption auf der in der aktuellen Forschung erworbenen Erkenntnis auf, dass alle Kinder im Erstrechenunterricht davon profitieren, wenn von Anfang an ein Schwerpunkt auf die Erarbeitung, Ausdifferenzierung und Festigung des Teile-Ganzes-Denkens gelegt wird und im Verlauf des ersten Schuljahres darauf stützend Additionen und Subtraktionen erarbeitet werden (Bobis, 1993; Fischer, 1990; Gaidoschik, 2007, 2010, 2019a, 2022; Gaidoschik & Bayer, 2017; Gerster, 2007, 2009; Gerster & Schultz, 2004; Ennemoser & Krajewski, 2007; Fritz & Ricken, 2009; Häsel-Weide, 2016; Häsel-Weide & Nührenbörger, 2017; Hunting, 2003; Krajewski et al., 2013; Nührenbörger, 2022; Radatz et al., 1996; Resnik, 1983;

Schultz et al., 2017; Steffe & Cobb mit von Glasersfeld, 1988; Weißhaupt & Peucker, 2009 und Kapitel 2).

Wittmann (1992, 1995) betont in seinem Entwicklungsforschungskonzept der Mathematik als einer *Design Science* die Bedeutung fachlicher Prinzipien als Orientierung für die Entwicklung von Unterrichtsaktivitäten (Abschnitt 3.2.1). Diesem Anspruch ist die vorliegende Arbeit nachgekommen, indem *echte* mathematische Lernangebote in Form von Lernumgebungen für den frühen Arithmetikunterricht entwickelt wurden, die insbesondere die von Wittmann (2016) formulierten Kriterien für Lernumgebungen für die mathematische Frühförderung berücksichtigen (Abschnitt 3.2.1). In weiterer Folge fordert Wittmann (2014) in diesem Zusammenhang, „dass ein Lernen ohne Brüche nur möglich ist, wenn der Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zum Abitur als zusammenhängendes Ganzes gesehen wird und wenn er stufenübergreifend auf einem authentischen Bild von der Mathematik als ‚Wissenschaft der Muster‘ fußt“ (S. 213). Im Sinne des Lernens ohne Brüche kann auf das laufende Forschungsprojekt mit dem Titel „Förderung des Teile-Ganzes-Denkens in der frühen mathematischen Bildung und im anschlussfähigen arithmetischen Anfangsunterricht“, Forschungsprojekt ID: 7407, Projektleitung: Carina Gander, an der Pädagogischen Hochschule Tirol verwiesen werden. Ziel dieser Forschung ist es, herauszuarbeiten welche Erfahrungen und Kompetenzen Kinder im Bereich Zahlen mitbringen und wie elementare Bildungseinrichtungen frühe mathematische Bildungsangebote ermöglichen. Darauf aufbauend soll die wesentliche Leistung des Teile-Ganzes-Denkens als Vorläuferfertigkeit aufgegriffen und in Form von Lernumgebungen erprobt werden. Diese haben sich bereits für den frühen arithmetischen Anfangsunterricht als bedeutsam erwiesen. Ausgangspunkt sind eben die 13 binnendifferenzierenden Lernumgebungen, die von Gander (2022) für den frühen Arithmetikunterricht entwickelt und erprobt wurden und die die drei von Gaidoschik (2019, 2022) genannten zentralen Bereiche in dieser frühen Phase des Mathematiklernens *Anzahlerfassendes Zählen, Anzahlvergleiche und nicht-zählendes Erfassen strukturierter Mengen* berücksichtigen. Inwieweit diese anschlussfähig im Übergang vom letzten Kindergartenjahr in die Schule sind, welche Formen der Lernbegleitung lohnend sind und/oder welche Alternativen oder ergänzende Angebote im Bereich früher mathematischer Bildung es braucht, soll in der partizipativen Forschung mit den Elementarpädagog\*innen, als Expert\*innen für das frühkindliche Lernen, herausgearbeitet werden.

Ziel: Weiterentwicklung der Praxis

*„Interventionist: the research aims at designing an intervention in the real world“ (van den Akker et al., 2006, S. 5)*

In den einleitenden Worten wurde die Zielsetzung formuliert, auf Grundlage eines vertieften Wissens, über welches Zahlwissen Kinder in dieser frühen Phase des Mathematiklernens und -treibens verfügen, welche (fachrichtungs-)didaktischen Grundideen in dieser Phase genutzt werden sollten und welche Rolle der arithmetische Anfangsunterricht dabei spielt, arithmetische Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denkens für den frühen Arithmetikunterricht für *alle Lernenden* entwickelt, erprobt und weiterentwickelt werden sollen. Diese Zielsetzung wurde insofern realisiert: Als Ergebnis wurden im Verlauf dieser Arbeit 13 binnendifferenzierende Lernumgebungen mit fokussierenden und vertiefenden Unterrichtsaktivitäten samt Handreichung zur Durchführung der Unterrichtsbausteine und ein Begleitmaterial, in welchem der aktuelle Wissensstand zu inklusiver Beschulung im frühen Arithmetikunterricht wie auch methodische und inhaltliche Überlegungen zum Projekt dargestellt werden, entwickelt. Die Handreichung zur Durchführung umfasst eine Übersicht über das Programm, eine Lernstandserhebung und eine ausführliche Beschreibung der 13 einzelnen Lernumgebungen. Jede dieser Lernumgebungen wird fachdidaktisch eingebettet, die Durchführung wird ausführlich und Schritt-für-Schritt dargestellt, bei einzelnen Lernumgebungen werden Erweiterungs- und Vertiefungsaufgaben als Ideen zur Differenzierung und zur Gestaltung gemeinsamer Lernsituationen aufgelistet und die Arbeits- und Demonstrationsmittel werden konkret benannt. Bei diesen überarbeiteten Lernumgebungen werden zudem gezielte und überarbeitete sprachliche Formulierungen bei den einzelnen Unterrichtsbausteinen für die Lehrkräfte angeführt. Diese sollen den Lehrkräften im weiteren Verlauf der Durchführung als sprachliche Orientierung dienen (Kapitel 8). Zudem sind die Gestaltungsprinzipien für die einzelnen Lernumgebungen auf Basis des Teile-Ganzes-Denken für den frühen Arithmetikunterricht im Klassenzimmer lohnend (Abschnitt 9.5).

Alle Materialien haben als Rückschau einen praktischen Nutzen für den Arithmetikunterricht (Abschnitt 5.1) und wurden in zwei Phasen in der von van den Akker im Eingangszitat formulierten *real world*, folglich, im Anfangsunterricht in insgesamt sieben ersten Klassen durchgeführt. Dass eine Durchführung der Lernumgebungen mit *allen* Kindern in der Klasse möglich ist, wurde im Verlauf dieser Arbeit klar herausgearbeitet, wenngleich einige Kinder der Klasse mehr Wiederholungsschleifen, mehr Zeit, und mehr fachkundige Lernbegleitung brauchten.

Abschließend kann nicht beantwortet werden, ob und inwiefern diese Lernumgebungen das Potenzial haben zu einer flächendeckenden Verbesserung des frühen Arithmetikunterrichts beizutragen. Denn in den bildungspolitischen Dokumenten, den bundesweit einheitlichen Rahmenplänen für die Primarstufe in Österreich, wird, im Gegensatz zu anderen Ländern, das Teile-Ganzes-Denken nicht explizit angeführt (Kapitel 2) und diese Dokumente stellen dementsprechend meines Erachtens kaum eine konkrete Hilfe dar, da sie in Hinblick auf diese fundamental notwendige Voraussetzung für alles Weitere im Mathematiklernen und -treiben keine konkreten Ansätze bieten. Aufgrund dessen entscheidet es sich meines Erachtens, ob sich ein Teile-Ganzes-Denken in dieser frühen Phase des Mathematiklernens aus fachlicher, zutiefst mathematischer Sicht durchsetzen können wird:

Der generelle Konsens der Fachautor\*innen, wonach Kinder, wenn sie ein tragfähiges Verständnis für diese Vielfalt möglicher Zahlzusammensetzungen und deren Zusammenhänge schon früh erlangen, flexibel im Umgang mit Zahlen werden, wurde im Verlauf dieser Arbeit nachvollziehbar herausgearbeitet und ist unumstritten. *Gelingt es diesen Konsens auf den frühen Arithmetikunterricht für alle Kinder auszuweiten?*

## Literaturverzeichnis

- Ainscow, M. (2007). Taking an inclusive turn. *Journal of Research in Special Educational Needs* 7(1), 3–7. <https://doi.org/10.1111/j.1471-3802.2007.00075.x>
- Ainscow, M., Booth, T., Dyson, A. & Farrell, P. (2006). *Improving schools, developing inclusion*. Routledge.
- Alexander, R. (2008). *Towards dialogic teaching. Rethinking classroom talk* (4<sup>th</sup> ed.). Dialogos.
- Allan, J. (2008). *Rethinking Inclusive Education: The Philosophers of Difference in Practice*. Springer.
- Altrichter, H. & Feyerer, E. (2011). Auf dem Weg zu einem inklusiven Schulsystem? Die Umsetzung der UN-Konvention in Österreich aus Sicht der Governance-Perspektive. *Zeitschrift für Inklusion*, 4. <https://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/73>
- Altrichter, H. & Feyerer, E. (2017). Schulentwicklung und Inklusion in Österreich. In B. Lütje-Klose, S. Miller, S. Schwab, & B. Streese (Hrsg.), *Inklusion: Profile für die Schul- und Unterrichtsentwicklung in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Theoretische Grundlagen-Empirische Befunde-Praxisbeispiele* (S. 31–42). Waxmann.
- Artiles, A. J., Kozleski, E. B., Dorn, S. & Christensen, C. (2006). Learning in Inclusive Education Research: Remediating Theory and Methods With a Transformative Agenda. *Review of Research in Education*, 30(1), 65–108. <https://doi.org/10.3102/0091732X030001065>
- Auer, P., & Gander, C. (under review).
- Aufschnaiter, S. V. & Welzel, M. (Hrsg.) (2001). *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen*. Waxmann.
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers*. Routledge.
- Baroody, A. J. (1986). Counting ability of moderately and mildly handicapped children. *Education and Training of the Mentally Retarded*, 21(4), 289–300.



- Baroody, A. J. (1987). The Development of Counting Strategies for Single-Digit Addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 141–157.
- Baroody, A. J. (1999). The development of basic counting, number, and arithmetic knowledge among children classified as mentally handicapped. *International review in mental retardation*, 22(22), 51–103.
- Bashash, L., Bochner, S. & Outhred, L. (2003). Counting skills and number concepts of students with moderate intellectual disabilities. *International Journal of Disability, Development and Education*, 50(3), 325–345. <https://doi.org/10.1080/1034912032000120480>
- Bauer, L. (1992). Fingerrechnen – Untersuchungen zu einem Phänomen. *Mathematische Unterrichtspraxis*, 4, 1–14.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4), 469–520.
- Baxter, P. & Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544–559. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2008.1573>
- Beck, Ch., & Maier, H. (1993). Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 14(2), 147–180.
- Beck, E., Baer, M., Guldemann, T., Bischoff, S., Brühwiler, C. & Müller, P. (2007). *Adaptive Lehrkompetenz: Analyse und Struktur, Veränderung und Wirkung handlungssteuernden Lehrerwissens*. Waxmann.
- Benölken, R. (2016). Offene substanzielle Aufgaben. Ein möglicher Schlüssel auch und gerade für die Gestaltung inklusiven Mathematikunterrichts. In R. Benölken & F. Käpnick (Hrsg.), *Individuelles Fördern im Kontext von Inklusion* (S. 203–213). Münster.
- Benölken, R., Berlinger, N. & Veber, M. (2018). Das Projekt „Inklusiver Mathematikunterricht“. Konzeptuelle Ansätze für Unterricht und Lehrerbildung. *MNU Journal*, 5, S. 340–345.
- Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik*. Westermann.

- Benz, C. (2023). *Spielend die Mathematik im Blick. Beobachtung und Unterstützung mathematischer Kompetenzen in Regelspielen*. Vortrag im Rahmen der Tagung Brixner Mathematiktag für den Primarbereich, Brixen. <https://brimaprimary.events.unibz.it/de/home/>
- Benz, C., Grüßing, M., Lorenz, J.-H., Reiss, K., Selter, C. & Wollring, B. (2017). *Frühe mathematische Bildung – Ziele und Gelingensbedingungen für den Elementar- und Primarbereich*. Haus der kleinen Forscher (Eds.), Wissenschaftliche Untersuchungen zur Arbeit der Stiftung „Haus der kleinen Forscher“, Band 8. Barbara Burdrich.
- Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Springer.
- Benz, C. & Walz, T. (2013). *Auf den ersten und auf den zweiten Blick. Eine Erkundungstour zur strukturierten Anzahlwahrnehmung*, *Fördermagazin*, (4), 17–20.
- Berg, E. & Fuchs, M. (1993). *Kultur, soziale Praxis, Text. Die Krise der ethnographischen Repräsentation*. Suhrkamp.
- Bergold, J. & Flick, U. (Hrsg.). (1987). *Ein-Sichten: Zugänge zur Sicht des Subjekts mittels qualitativer Forschung*. DGVT.
- Berlinger, N. & Dixel, T. (2017). *Natürliche Differenzierung*. [http://www.inklusion-lexikon.de/Natuerliche-Differenzierung\\_Berlinger\\_Dixel.php](http://www.inklusion-lexikon.de/Natuerliche-Differenzierung_Berlinger_Dixel.php)
- Bermejo, V., Morales, S. & Garcia DeOsuna, J. (2004). Supporting children's development of cardinality understanding. *Learning and Instruction*, 14(4), 381–398.
- Bideaud, J. (1995). From Wynn's infant "calculations" to cardinality: What develops? *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 14(6), 685–694.
- Biehler, R. & Scherer, P. (2015). Lehrerfortbildung Mathematik – Konzepte und Wirkungsforschung – Editorial. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36, 191–194. <https://doi.org/10.1007/s13138-015-0080-2>

- Bierbrauer, C. (2022). *Sachrechnen mit digitalen Medien im Förderschwerpunkt Lernen: Konzeption und Erprobung einer Tablett App zum Verstehen von Textaufgaben*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH.
- Biewer, G. (2009). *Grundlagen der Heilpädagogik und Inklusiven Pädagogik*. (2., neu bearb. Aufl.). Klinkhardt.
- Biewer, G. (2021). Inklusive Bildung in Österreich – Von den Anfängen der Entwicklung eines rechtlich-normativen Auftrags bis zu den Perspektiven für die Zukunft. In A. Köpfer, J. Powell, & R. Zahnd (Hrsg.), *Handbuch Inklusion International* (S. 239–246). Barbara Budrich.
- Bikner-Ahsbals, A. & Prediger, S. (Hrsg.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer.
- Binneberg, K. (Hrsg.). (1997). *Pädagogische Fallstudien*. Peter Lang.
- Blömeke, S., Jenßen, L., Dunekacke, S., Suhl, U., Grassmann, M. & Wedekind, H. (2015). Leistungstests zur Messung der professionellen Kompetenz frühpädagogischer Fachkräfte. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, 29 (3–4), 177–191. <https://doi.org/10.1024/1010-0652/a000159>.
- Boaler, J. & Chen, L. (2017). Why Kids Should Use Their Fingers in Math Class. In M. Pitici (Hrsg.), *The Best Writing on Mathematics 2017* (S. 76–81). Princeton University Press.
- Boaler, J., Chen, L., Williams, C. & Cordero, M. (2016). Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learning. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 5(5), 1–6.
- Bobis, J. (1993). Visualization and the development of mental computation. In B. Atweh, C. Knes, M. Carss, & G. Booker (Hrsg.), *Proceedings of the 16<sup>th</sup> Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 117–122). Brisbane.
- Booth, T. (1996). A Perspective on Inclusion from England. *Cambridge Review of Education*, 26(1), 87–99. <https://doi.org/10.1080/0305764960260107>

- Booth, T. & Ainscow, M. (Hrsg.). (1998). *From Them to Us: An International Study of Inclusion in Education*. Routledge.
- Booth, T. & Ainscow, M. (2002). *Index for inclusion: Developing learning and participation in schools*. Centre for Studies on Inclusive Education (CSIE).
- Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M. & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe! Mathematiklernen im Kindergartenalltag und am Schulanfang*. Kallmeyer.
- Brankaer, C., Ghesquiere, P. & De Smedt, B. (2013). The development of numerical magnitude processing and its association with working memory in children with mild intellectual disabilities. *Research in developmental disabilities*, 34(10), 3361–3371.
- Brissiaud, R. (1992). A Tool for Number Construction: Finger Symbol Sets. In J. Bideaud, C. Melijac, & J. P. Fischer (Hrsg.), *Pathways to Number. Children's Developing Numerical Abilities* (S. 41–65). Lawrence Erlbaum Associates.
- Browder, D. M., Spooner, F., Ahlgrim-DeLzell, L., Harris, A. A. & Wakeman, S. (2008). A meta-analysis on teaching mathematics to students with significant cognitive disabilities. *Council for Exceptional Children*, 74(4), 407–432. <https://doi.org/10.1177/001440290807400401>
- Bruder, R., Reibold, J. (2019). Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung. *mathematik lehren*, 162, 10–13.
- Bruner, J. S. (1973). *The process of education*. Harvard University Press.
- Brügelmann, H. (2003). Leistungsheterogenität und Begabungsheterogenität in der Primarstufe und in der Sekundarstufe. In P. Heyer, U. Preuss-Lausitz, & L. Sack (Hrsg.), *Länger gemeinsam lernen. Positionen – Forschungsergebnisse – Beispiele* (S. 60–66). Grundschulverband.
- Brüsemeister, T. & Eubel, K. D. (2003). *Zur Modernisierung der Schule: Leitideen-Konzepte- Akteure. Ein Überblick*. transcript.
- Buchner, T. & Gebhardt, M. (2011). Zur schulischen Integration in Österreich - historische Entwicklung, Forschung und Status Quo. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 62(8), 298–304.

- Buchner, T. & Proyer, M. (2020). From special to inclusive education policies in Austria – developments and implications for schools and teacher education. *European Journal of Teacher Education*, 43(1), 83–94. <https://doi.org/10.1080/02619768.2019.1691992>
- Bundeskanzleramt Österreich (Hrsg.). (2019). *Die Rechte von Kindern und Jugendlichen. Die Kinderrechtskonvention im Wortlaut & verständlich formuliert*. [https://www.kinderrechte.gv.at/wp-content/uploads/2019/11/191107\\_Rechte-Kinder-Jugendliche\\_DINlang\\_BF.pdf](https://www.kinderrechte.gv.at/wp-content/uploads/2019/11/191107_Rechte-Kinder-Jugendliche_DINlang_BF.pdf)
- Bundesministerium für Arbeit, Soziales und Konsumentenschutz (BMASK). (2012). *Nationaler Aktionsplan Behinderung 2012-2020: Strategie der österreichischen Regierung zur Umsetzung der UN-Behindertenrechtskonvention. Inklusion als Menschenrecht und Auftrag*. BMASK.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2019). *Sonderschule und inklusiver Unterricht*. BMBWF.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2020). *Bundesländerübergreifender BildungsRahmenPlan für elementare Bildungseinrichtungen in Österreich. Endfassung*. BMBWF. (Original work published in 2009)
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2022). *PädagogInnenbildung Neu*. BMBWF.
- Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung (BMBWF). (2023). *Volksschul-Lehrplan*. BMBWF.
- Bundesministerium für Wirtschaft, Familie und Jugend (BMWFJ). (2010). *Modul für das letzte Jahr in elementaren Bildungseinrichtungen. Vertiefende Ausführungen zum “Bundesländerübergreifenden BildungsRahmenPlan”*. BMWFJ.
- Bundesministerium für Soziales, Gesundheit, Pflege und Konsumentenschutz (BMSGPK). (2020). *Evaluationsbericht Nationalen Aktionsplans Behinderung 2012–2020*. BMSGPK. <https://www.sozialministerium.at/Themen/Soziales/Menschen-mit-Behinderungen/Nationaler-Aktionsplan-Behinderung.html>

- Bundesministerium für Soziales, Gesundheit, Pflege und Konsumentenschutz (BMSGPK). (2022). *Nationaler Aktionsplan Behinderung 2022-2030*. BMSGPK. <https://www.sozialministerium.at/Themen/Soziales/Menschen-mit-Behinderungen/Nationaler-Aktionsplan-Behinderung.html>
- Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving educational research: Toward a more useful, more influential, and better-funded enterprise. *Educational researcher*, 32(9), 3–14.
- Brahm, T. & Jenert, T. (2014). Wissenschafts-Praxis-Kooperation in desginbasierter Forschung: Im Spannungsfeld zwischen wissenschaftlicher Gültigkeit und praktischer Relevanz. *Zeitschrift für Berufs- und Wirtschaftspädagogik*, 27, 45–62.
- Brandt, B. & Nührenbörger, M. (2009). Kinder im Gespräch über Mathematik. *Die Grundschulzeitschrift*, 23(222/223), 28–33. Breidenbach, (1963). Rechnen in der Volksschule.
- Breidenbach, (1963). *Rechnen in der Volksschule*. Hermann Schroedel Verlag.
- Bruner, J. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Cornelsen.
- Bruner, J. (1973). *The process of education*. Harvard University Press.
- Brügelmann, H. (2002). Heterogenität, Integration und Differenzierung: Empirische Befunde – theoretische Perspektiven. In F. Heinzel & A. Prengel (Hrsg.), *Jahrbuch Grundschulforschung: Bd. 6. Heterogenität, Integration und Differenzierung in der Primarstufe* (S. 31–43). Leske + Budrich.
- Cheng, Z. J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 29–47.
- Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it? *Teaching children mathematics*, 5(7), 400–405.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math. The Learning Trajectories Approach*. Routledge.
- Confrey, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of Research in Education*, 16, 3–56. <https://doi.org/10.3102/0091732X016001003>

- Corno, L. & Snow, R. E. (1986). Adapting teaching to individual differences among learners. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (S. 605–629). Macmillan.
- Crollen, V., Seron, X. & Noël, M. P. (2011). Is finger-counting necessary for the development of arithmetic abilities? *Frontiers in Psychology*, 2, Article 242. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00242>
- Cross, C. T., Woods, T. A. & Schweingruber, H. (2009). *Mathematics learning in early childhood: paths towards excellence and equity*. National Academies Press.
- Dalehefte, I. M. & Kobarg, M. (2013). *Aus Unterrichtsbeobachtungen lernen*. Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN). [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_SGS/Handreichung\\_DalehefteKobarg\\_fuer\\_Web.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_DalehefteKobarg_fuer_Web.pdf)
- Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder warum wir rechnen können*. Springer.
- Dell'Anna, S., Pellegrini, M., Ianes, D. & Vivanet, G. (2020). Learning, Social, and Psychological Outcomes of Students with Moderate, Severe, and Complex Disabilities in Inclusive Education: A Systematic Review. *International Journal of Disability, Development and Education*. <https://doi.org/10.1080/1034912X.2020.1843143>
- Denzin, N. K. (1978). *The Research Act. A Theoretical Introduction to Sociological Methods*. McGraw-Hill.
- de Vries, C. (2014). *Mathematik im Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung. Grundlagen und Übungsvorschläge für Diagnostik und Förderung im Rahmen eines erweiterten Mathematikverständnisses*. Modernes Lernen.
- Design-Based Research Collective (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5–8.
- Deutsches Komitee für UNIFEC e.V. (1989). *Konvention über die Rechte der Kinder*. <https://www.unicef.de/blob/194402/3828b8c72fa8129171290d21f3de9c37/d0006-kinderkonvention-neu-data.pdf>

- Deutsche UNESCO-Kommission e.V. (2014) *Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik*. (3., erweit. Aufl.). [https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-05/2014\\_Leitlinien\\_inklusive\\_Bildung.pdf](https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-05/2014_Leitlinien_inklusive_Bildung.pdf)
- Deutsche UNESCO-Kommission. (2017). *Bildungsagenda 2030: Aktionsrahmen für die Umsetzung von Sustainable Development Goal 4*. [https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-01/Bildungsagenda%202030\\_Aktionsrahmen\\_Kurzfassung\\_DeutscheVersion\\_FINAL.pdf](https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-01/Bildungsagenda%202030_Aktionsrahmen_Kurzfassung_DeutscheVersion_FINAL.pdf)
- Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik. (2024, Oktober 24). *Beziehungen herstellen*. PIKAS. <https://pikas-mi.dzlm.de/inhalte/zahlvorstellungen-tragfähige-vorstellungen-aufbauen-zr-bis-100/hintergrund/beziehungen>
- Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen*. Vieweg.
- Devlin, K. (1997). *Mathematics – The Science of Patterns: The Search for Order in Life, Mind, and the Universe*. Scientific American Library.
- Devlin, K. (2002). *Muster der Mathematik – Ordnungsgesetzte des Geistes und der Natur*. Spektrum Akademischer Verlag.
- Dey, I. (1993). *Qualitative data analysis*. Routledge.
- Domahs, F., Moeller, K., Huber, S., Willmes, K. & Nuerk, H. C. (2010). Embodied numerosity: Implicit hand-based representations influence symbolic number processing across cultures. *Cognition*, 116(2), 251–266. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.05.007>
- Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Logos.
- Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. (5., neu bearb. Aufl.), Springer.
- Dresing, T. & Pehl, T. (2017). Transkriptionen qualitativer Daten. Implikationen, Auswahlkriterien und Systeme für psychologische Studien. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 723–733). Verlag für Sozialwissenschaften.



- Duit, R. (1995). Zur Rolle der konstruktivistischen Sichtweise in der naturwissenschaftsdidaktischen Lehr- und Lernforschung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 41(6), 905–923.
- Dyson, A. & Milward, A. (2000). *Schools and Special Needs: Issues of Innovation and Inclusion*. Paul Chapman.
- Einsiedler, W. (Hrsg.). (2011). *Unterrichtsentwicklung und Didaktische Entwicklungsforschung*. Julius Klinkhardt.
- Ekdahl, A. L., Björklund, C. & Runesson Kempe, U. (2019). Teaching to change ways of experiencing numbers – An intervention program for arithmetic learning in preschool. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien, & P. Vale (Hrsg.), *Proceedings of the 43<sup>rd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 209–216). PME.
- Engelbrecht, H. (1988). *Geschichte des österreichischen Bildungswesens. Erziehung und Unterricht auf dem Boden Österreichs: Bd. 5. Von 1918 bis zur Gegenwart*. Österreichischer Bundesverlag.
- Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2007). Effekte der Förderung des Teil-Ganzes-Verständnisses bei Erstklässlern mit schwachen Mathematikleistungen. *Vierteljahrszeitschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete*, 3, 228–240.
- Erber, M. (2021). *Sprachbildend unterrichten im Fach Mathematik: Entwicklung von substanziellen Lernumgebungen für den Anfangsunterricht*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Pädagogische Hochschule Tirol.
- Euler, D. (1989). *Kommunikationsfähigkeit und computerunterstütztes Lernen*. Müller-Botermann.
- Euler, D. (2012). Unterschiedliche Forschungszugänge in der Berufsbildung: eine feindliche Koexistenz? In E. Severing & R. Weiß (Hrsg.), *Qualitätsentwicklung in der Berufsbildungsforschung*. (S. 29–46). wbv.
- Euler, D. (2014). Design Research – a paradigm under development. In D. Euler & P. F. E. Sloane (Hrsg.), *Design-Based Research* (S. 15–41). Franz Steiner Verlag.
- European Agency for Development of Special needs Education (EADSNE). (2003). *Special Education in Europe*. EADSNE.

- Fetzer, M. (2016). *Inklusiver Mathematikunterricht: Ideen für die Grundschule*. Schneider-Hohengehren.
- Feuser, G. (1997). *Inclusive education. Education all children and young people together in pre-school establishments and schools*[Unveröffentlichte Dissertation] . University of Bremen. <http://bidok.uibk.ac.at/library/feuser-thesis-e.html>
- Feyerer, E. (1998). *Behindern Behinderte? Integrativer Unterricht auf der Sekundarstufe 1*. Studien-Verlag.
- Feyerer, E. (2009). Qualität in der Sonderpädagogik: Rahmenbedingungen für eine verbesserte Erziehung, Bildung und Unterricht von Schüler/inne/n mit sonderpädagogischem Förderbedarf. In W. Specht (Hrsg.), *Nationaler Bildungsbericht Österreich 2009: Bd. 2. Fokussierte Analysen bildungspolitischer Schwerpunktthemen* (S. 73–97). Leykam. <https://doi.org/10.17888/nbb2009-2-A4>
- Feyerer, E. & Specht, W. (2009). Evaluationsstudien zur Entwicklung der schulischen Integration. In Bm:ukk (Hrsg.), *Sonderpädagogik aus inklusiver Sicht* (S. 34–44). Jugend & Volk.
- Fischer, F. E. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number in the kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 207–215.
- Flexer, R. J. (1986). The Power of Five: The Step Before the Power of Ten. *Arithmetic Teacher*, 34(3), 5–9.
- Flick, U. (1992). Fallanalysen: Geltungsbegründung durch systematische Perspektiven-Triangulation. In G. Jüttemann (Hrsg.), *Komparative Kasuistik* (S. 184–203). Asanger.
- Flick, U., von Kardoff, E. & Steinke, I. (2015). *Qualitative Forschung: Ein Handbuch* (11., neu bearb. Aufl.). Rowohlt-Taschenbuch.
- Florian, L. (2008). Special or inclusive education: future trends. *British Journal of Special Education*, 35(4), 202–208. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8578.2008.00402.x>
- Florian, L. (2014). What counts as evidence of inclusive education? *European Journal of Special Needs Education*, 29(3), 286–294.

- Florian, L. & Spratt, J. (2013). Enacting Inclusion: A Framework for Interrogating Inclusive Practice. *European Journal of Special Needs Education*, 28(2), 119–135.  
<https://doi.org/10.1080/08856257.2013.778111>
- Freudenthal, H. (1974). *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band I*. Studienbücher Mathematik.
- Freudenthal, H. (1987). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. Oldenbourg.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Kluwer.
- Fritz, A. & Ricken, G. (2008). *Rechenschwäche*. Ernst Reinhardt.
- Fritz, A. & Ricken, G. (2009). Grundlagen des Förderkonzepts „Kalkulie“. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 374–395). Beltz.
- Fthenaik, W. E., Schmitt, A., Daut, M., Eitel, A. & Wendess, A. (2014) *Frühe mathematische Bildung. Natur-Wissen schaffen: Bd. 2*. LOGO Lern-Spiel-Verlag.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Compton, D. L. (2012). The early prevention of mathematics difficulty: Its power and limitations. *Journal of Learning Disabilities*, 45(3), 257–269.  
<https://doi.org/10.1177/0022219412442167>
- Fuson, K. (1988). Children’s Counting and Concepts of Number. *British Journal of Developmental Psychology*, 6, 395–397. <https://doi.org/10.1111/j.2044-835X.1988.tb01118.x>
- Fuson, K. (1992). Research on Learning and Teaching Addition and Subtraction of Whole Numbers. In G. Leinhardt, R. Puntam, & R. Hattrup (Hrsg.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (S. 53–187). Lawrence Erlbaum Associates.
- Gander, C. (2022). “Counting with all children from the very beginning”: One attempt to promote early arithmetical skills based on part-whole thinking. Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Bozen-Bolzano, Italy. hal-03745045.
- Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwächen vorbeugen – Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern*. öbv-hpt.
- Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht; Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Peter Lang.

- Gaidoschik, M. (2016). Ein Plädoyer für das – fachlich geleitete – Fingerrechnen: Vom Nutzen der Finger für die Ablösung vom zählenden Rechnen. *Lernen konkret*, 35(4), 22–25.
- Gaidoschik, M. (2019a). Considerations on developmental stage models, learning trajectories and maybe better ways to guide early arithmetic instruction. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 419–426). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands and ERME.
- Gaidoschik, M. (2019b). Didactics as a source and remedy of mathematics learning difficulties. In A. Fritz, V. Haase, & P. Räsänen (Hrsg.), *The International Handbook of Math Learning Difficulties: From the Lab to the Classroom* (S. 73–89). Springer.
- Gaidoschik, M. (2022). Frühe Lernstände zu Zahlen handlungsleitend erfassen. In M. Gutzmann, & U. Carle (Hrsg.), *Anfangsunterricht – Willkommen in der Schule! Beiträge zur Reform der Grundschule – Band 154* (S. 216–226). Grundschulverband e.V.
- Gaidoschik, M. & Bayer, D. (2017). Rechnen als Handeln mit Zahl-Teilen und Zahl-Ganzen. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen* (S. 154–163). Grundschulverband.
- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E. M., Nührenbörger, M. & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 47(111S). [doi.10.13140/RG.2.2.15952.64004](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15952.64004)
- Garrote, A., Moser Opitz, E. & Ratz, C. (2015). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung: Eine Querschnittstudie. *Empirische Sonderpädagogik*, 7(1), 24–40.
- Gasteiger, H. (2007). *Stand der mathematischen Kompetenzdiagnosen am Übergang von der Kindertagesstätte zur Grundschule und zukünftige Perspektiven*. Senatsverwaltung für Bildung, Wis-

senschaft und Forschung Berlin (TransKiGs). [https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/schule/schulentwicklung/Modellversuche\\_Schulversuche/transkigs/ExpertiseKompetenzdiagnosen\\_Gasteiger\\_10-2007.pdf](https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/schule/schulentwicklung/Modellversuche_Schulversuche/transkigs/ExpertiseKompetenzdiagnosen_Gasteiger_10-2007.pdf)

Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Waxmann.

Gasteiger, H. (2011). *Mathematisches Lernen von Anfang an. Kompetenzorientierte Förderung im Übergang Kindertagesstätte-Grundschule*. Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) [http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material\\_aus\\_SGS/Handreichung\\_Gasteiger\\_Internet.pdf](http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Gasteiger_Internet.pdf)

Gasteiger, H. (2012). Fostering Early Mathematical Competencies in Natural Learning Situations – Foundation and Challenges of a Competence-Oriented of Mathematics Education in Kindergarten. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2), 181–201. <http://dx.doi.org/10.1007/S13138-012-0042-x>

Gasteiger, H. (2014). Professionalization of Early Childhood Educators with a Focus on Natural Learning Situations and Individual Development of Mathematical Competencies: Results from an Evaluation Study. In C. Benz, B. Brandt, U. Kortenkamp, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Hrsg.), *A Mathematics Education Perspective on Early Mathematics Learning Between the Poles of Instruction and Construction* (S. 275–290). Springer.

Gasteiger, H. (2015). Early Mathematics in Play Situations: Continuity of Learning. In B. Perry, A. MacDonald, & A. Gervasoni (Hrsg.), *Mathematics and Transition to School: Early Mathematics Learning and Development* (S. 255–271). Springer.

Gasteiger, H. (2017). Frühe mathematische Bildung – sachgerecht, kindgemäß, anschlussfähig. In S. Schuler, C. Streit, & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 9–26). Springer.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1986). *The Child's Understanding of Number*. Harvard University Press.

- Gerlach, M., Fritz, A., & Ricken, G. & Schmidt, S. (2007). *Trainingsprogramm Kalkulie: Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder: Baustein 1: Fertigkeitsspezifische Voraussetzungen*. Cornelsen.
- Gerster, H. D. (1994). Arithmetik im Anfangsunterricht. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik: 1. und 2. Schuljahr* (S. 35–102). Klett.
- Gerster, H. D. (2005). Anschaulich rechnen – im Kopf, halbschriftlich, schriftlich. In M. Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern*. (S. 202–236). Vadenhoeck & Ruprecht.
- Gerster, H. D. (2007). Wissenswertes zum Thema Rechenschwäche/Dyskalkulie. <http://www.zahlbegriff.de/PDF/Gerster.pdf>
- Gerster, H. D. (2009). Schwierigkeiten bei der Entwicklung arithmetischer Konzepte im Zahlenraum bis 100. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 248–268). Beltz.
- Gerster, H. D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Berichte zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche-Erkennen, Beheben, Vorbeugen“*. <https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf>
- Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research* (11., neu bearb. Aufl.). Chicago.
- Göransson, K. & Nilholm, C. (2014). Conceptual diversities and empirical shortcomings – a critical analysis of research on inclusive education. *European Journal of Special Needs Education*, 29, 265–280.
- Götze, D., Selter, Ch. & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch. Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Kallmeyer.
- Grassmann, M., Mirwald, E., Klunter, M. & Veith, U. (1995). Was können Schulanfänger vor ihrer ersten Mathematikstunde? *Grundschulunterricht*, 42(5), 23–25.

- Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen, *Educational Design Research* (S. 29–63). Routledge.
- Greenspan, S. & Shanker, S. (2007). The developmental pathways leading to pattern recognition, joint attention, language and cognition. *New Ideas in Psychology*, 25(2), 128–142.
- Gross, P., Hitzler, R. & Honer, A. (1989). Diagnostische und therapeutische Kompetenz im Wandel. In F. Wagner (Hrsg.), *Medizin: Momente der Veränderung* (S. 155–172). Springer.
- Gummels, I. (2020). *Wie kooperatives Lernen im inklusiven Unterricht gelingt: Entwicklung und Evaluation einer Lernumgebung für den Mathematikunterricht*. Springer.
- Haider, M. (1998). Integrationsbewegung in der Sackgasse? *Behinderte in Familie, Schule und Gesellschaft* 4/5, 39–44. <http://bidok.uibk.ac.at/library/beh4-98-sack.html>
- Hardy, I. & Woodcock, S. (2015). Inclusive education policies: Discourses of difference, diversity and deficit. *International Journal of Inclusive Education*, 19(2), 141–164.
- Hasemann, K. (2007). *Anfangsunterricht Mathematik (2. Auflage)*. Spektrum.
- Hasemann, K. & Gasteiger, H. (2014). *Anfangsunterricht Mathematik (4. Auflage)*. Springer.
- Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Springer.
- Häsel-Weide, U. (2019). Lernumgebungen für den inklusiven Mathematikunterricht zwischen reichhaltiger Offenheit und fokussierter Förderung. In B. Baumert, & M. Willen (Hrsg.), *Zwischen Persönlichkeitsbildung und Leistungsentwicklung. Fachspezifische Zugänge zu inklusivem Unterricht im interdisziplinären Diskurs* (S. 175–181). Julius Klinkhardt.
- Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2013). Replacing Counting Strategies: Children's Constructs on Number Sequences. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education in CERME 8* (S. 303–312). Middle East Technical University.

- Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2014). *Ablösung vom zählenden Rechnen: Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen* (2., neu bearb. Aufl.). Klett Kallmeyer.
- Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2015). Aufgabenformate für einen inklusiven Arithmetikunterricht. In A. Peter-Koop, T. Rottmann, & M. Lüken (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 58–74). Mildenerberger.
- Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2017). *Das Zahlenbuch: Förderkommentar Lernen zum 1. Schuljahr*. Klett.
- Häsel-Weide, U. & Wittich, C. (2014). Ablösung vom zählenden Rechnen durch kooperatives Lernen?!, *Sonderpädagogische Förderung heute*, 59(1), S. 32–43.
- Haug, P. (2003). Qualifying Teachers for the School for All. In K. Nes, M. Strømstad, & T. Booth (Hrsg.), *The Challenge of Inclusion: Reforming Teacher Education* (S. 97–115). Routledge.
- Haug, P. (2020). Inclusion in Norwegian schools: pupils' experiences of their learning environment. *Education 3-13*, 48(3), 303–315.
- Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R. & Vogt, F. (Hrsg.). (2015). *Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen*. Kallmeyer.
- Hardy, I. & Woodcock, S. (2015). Inclusive education policies: Discourses of difference, diversity and deficit. *International Journal of Inclusive Education*, 19(2), 141–164.  
<https://doi.org/10.1080/13603116.2014.908965>
- Haruehansawasin, S. & Kiattikomol, P. (2018). Scaffolding in problem-based learning for low-achieving learners. *The Journal of Educational Research*, 111(3), 363–370.
- Heckmann, F. (1992). Interpretationsregeln zur Auswertung qualitativer Interviews und sozialwissenschaftlich relevanter „Texte“: Anwendung der Hermeneutik für die empirische Sozialforschung. In J. H. P. Hoffmeyer-Zlotnik (Hrsg.), *Analyse verbaler Daten: über den Umgang mit qualitativen Daten* (S. 142-167). Opladen.



- Hellmich, F. (2007). Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *bildungsforschung*, 4(1). <https://doi.org/10.25539/bildungsforschun.v1i0.59>
- Helmke, A. (2001, February 12). *Unterrichtsqualität – Unterrichtseffekte* [Folien zu Präsentation]. Tagung der Netzwerkkoordinator/inn/en im BLK-Programm SINUS, Dillingen, Bayern, Deutschland.
- Helmke, A. & Schrader, F. W. (1998). Entwicklung im Grundschulalter. Die Münchner Studie „SCHOLASTIK“. *Pädagogik*, 6, 25–30.
- Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1995). Rechenfähigkeiten von Schulanfängern. In H. Brügelmann & H. Balhorn (Hrsg.), *Am Rande der Schrift* (S. 66–86). Libelle.
- Hershkowitz, R., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, T., Tabach, M. & Schwarz, B. (2002). Mathematics curriculum development for computerised environments: A designer-researcher-teacher-learner activity. In L. D. English (Hrsg.), *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21<sup>st</sup> century* (S. 657–694). Lawrence Erlbaum.
- Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien*. Klett Kallmayer.
- Hevner, A., March, S. Park, J. & Ram, S. (2004). Design Science in Information Systems Research. *MIS Quarterly*, 28(1), 75–105. <https://doi.org/10.2307/25148625>
- Hiller, J. (2017). *Die Unternehmensfallstudie als Unterrichtsmethode für den Geographieunterricht*. Hochschulverband für Geographiedidaktik.
- Hinz, A. (2002). Chancengleichheit und Heterogenität – eine bildungstheoretische Antinomie. In F. Heinzel & A. Prengel (Hrsg.), *Heterogenität, Integration und Differenzierung in der Primarstufe* (S. 128–135). VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Hinz, A. (2009). Inklusive Pädagogik in der Schule – veränderter Orientierungsrahmen für die Sonderpädagogik!? Oder doch deren Ende. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 60(5), 171–179.

- Hinz, A., Katzenbach, D., Rauer, W., Schuck, K. D., Wocken, H. & Wudtke, H. (1998a). *Die Integrative Grundschule im sozialen Brennpunkt. Ergebnisse eines Hamburger Schulversuchs*. Hamburg.
- Hinz, A., Katzenbach, D., Rauer, W., Schuck, K. D., Wocken, H. & Wudtke, H. (1998b). *Die Entwicklung der Kinder in der Integrativen Grundschule*. Hamburg.
- Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen für den Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Kallmeyer.
- Hitzler, R. (1991). Dummheit als Methode: eine dramatologische Textinterpretation. In D. Garz & K. Kraimer (Hrsg.), *Qualitativ-empirische Sozialforschung: Konzepte, Methoden, Analysen* (S. 295–318). Westdeutscher.
- Hoffmann-Riem, C. (1980). Die Sozialforschung einer interpretativen Soziologie. *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, 32, 339–372.
- Hopf, C. (1982). Norm und Interpretation. Einige methodische und theoretische Probleme der Erhebung und Analyse subjektiver Interpretationen in qualitativen Untersuchungen. *Zeitschrift für Soziologie*, 11(3), 307–329.
- Hopf, C. & Weingarten, E. (1984). *Qualitative Sozialforschung*. Klett.
- Hunting, R. P. (2003). Part-whole number knowledge in preschool children. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 22(3), 217–235.
- Hußmann, S. (2001). *Konstruktivistisches Lernen an Intentionalen Problemen. Theoretische und empirische Studie zu den Auswirkungen konstruktivistischer, computerorientierter Lernarrangements im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auf die Begriffsbildung und das Problemlösen* [Dissertation, Universität Essen]. Duisburg-Essen Publications online. [https://due-publico2.uni-due.de/receive/duepublico\\_mods\\_00010267](https://due-publico2.uni-due.de/receive/duepublico_mods_00010267)
- Hußmann, S. & Prediger, S. (2007). Mit Unterschieden rechnen. Differenzieren und Individualisieren. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 49(17), S. 1 – 8.

- Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 49(15), S. 1 – 8.
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek, & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Waxmann.
- Irwin, K. C. (1996). Children's Understanding of the Principles of Covariation and Compensation in Part-Whole Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 25–40.
- Jensen, R. J. (Hrsg.). (1993). *Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics*. Macmillan Publishing Company.
- Jordan, N. C. & Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Development Disabilities Research Reviews* 15(1), 60–68. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ddrr.46/pdf>
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental psychology*, 45(3), 850–867. <https://doi.org/10.1037/a0014939>
- Jörns, C., Schuchardt, K., Grube, D. & Mähler, C. (2014). Spielorientierte Förderung numerischer Kompetenzen im Vorschulalter und deren Eignung zur Prävention von Rechenschwierigkeiten. *Empirische Sonderpädagogik*, 6(3), 243–259.
- Jung, M., Hartmann, P., Smith, T. & Wallace, S. (2013). The Effectiveness of Teaching Number Relationships in Preschool. *International Journal of Instruction*, 6(1), 165–178.
- Jütte, H. & Lüken, M. M. (2021). Mathematik inklusiv unterrichten – Ein Forschungsüberblick zum aktuellen Stand der Entwicklung einer inklusiven Didaktik für den Mathematikunterricht in der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 14(1), 31–48.
- Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2011). *Rechenstörungen* (3., neu bearb. Aufl.). Klett.

- Käpnick, F. (2016). *Verschieden verschiedene Kinder: Inklusives Fördern im Mathematikunterricht der Grundschule*. Klett.
- Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule* (2., neu bearb. Aufl.). Springer.
- Kelly, A. E. (2006). Quality criteria for design research: Evidence and commitments. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research* (S. 107–118). Routledge.
- Kiuppis, F. (2014). *Heterogene Inklusivität, inklusive Heterogenität: Fallstudie über den Bedeutungswandel imaginierter pädagogischer Konzepte im Kontext internationaler Organisationen*. Waxmann.
- Klafki, W. (2007). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik* (6., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Klafki, W. & Stöcker, H. (2007). Innere Differenzierung des Unterrichts. In W. Klafki (Hrsg.), *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik* (S. 173–208). Beltz.
- Kleining, G. (1995). *Lehrbuch entdeckende Sozialforschung: Bd. 1. Von der Hermeneutik zur qualitativen Heuristik*. Beltz.
- Klein, E., Moeller, K., Willmes, K., Nuerk, H. C. & Domahs, F. (2011). The influence of implicit hand-based representations on mental arithmetic. *Frontiers in Psychology*, 2, Article 197. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00197>
- Klemm, K. (2010). Gemeinsam lernen – *Inklusion leben: Status Quo und Herausforderungen inklusiver Bildung in Deutschland*. Bertelsmann Stiftung. <https://www.bertelsmann-stiftung.de/de/publikationen/publikation/did/gemeinsam-lernen-inklusion-leben>
- Klieme, E. & Rakoczy, K. (2008). Empirische Unterrichtsforschung und Fachdidaktik. Outcome-orientierte Messung und Prozessqualität des Unterrichts. *Zeitschrift für Pädagogik*, 54(2), 222–237.
- Klieme, E., & Reusser, K. (2003). Unterrichtsqualität und mathematisches Verständnis im internationalen Vergleich – Ein Forschungsprojekt und erste Schritte zur Realisierung. *Unterrichtswissenschaft*, 31(3), 194–205.

- Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006). Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts „Phytagoras“. In M. Prenzel, L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 127–146). Beltz.
- Konrad, C. & Lindtner, M. (2017). Fingerrechnen  $\neq$  Fingerrechnen: Erläuterungen zu zielführender Fingerverwendung beim Aufbau numerischer Kompetenzen im mathematischen Erstunterricht. *Pädagogische Horizonte*, 1(1), 317–327.
- Koidl, M. (2021). *Gemeinsam lernen im Fach Mathematik: Entwicklung von substanziellen Lernumgebungen für den Anfangsunterricht*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Pädagogische Hochschule Tirol.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Korff, N. (2015). *Inklusiver Mathematikunterricht in der Primarstufe: Erfahrungen, Perspektiven und Herausforderungen* (3., neu bearb. Aufl.). Schneider Verlag Hohengehren.
- Korten, L. (2020). *Gemeinsame Lernsituationen im inklusiven Mathematikunterricht: Zieldifferentes Lernen am gemeinsamen Lerngegenstand des flexiblen Rechnens in der Grundschule*. Springer.
- Kortenkamp, U., Brandt, B., Benz, C., Krummheuer, G., Ladel, S. & Vogel, R. (Hrsg.). (2014). *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 Conference*. Springer.
- Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Kovac.
- Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider, & U. Trautmann (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (S. 41–65). Hogrefe.
- Krammer, K. (2009). *Individuelle Lernunterstützung in Schülerarbeitsphasen. Eine videobasierte Analyse des Unterstützungsverhaltens von Lehrpersonen im Mathematikunterricht*. Waxmann.
- Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87–108). Arbeitskreis Grundschule.

- Krauthausen, G. (2009). Entwicklung arithmetischer Fertigkeiten und Strategien – Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 100–117). Beltz.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Spektrum.
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Kallmeyer.
- Kroesbergen, E. H. & van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs: A meta-analysis. *Remedial and Special Education*, 24(2), 97–114.  
<https://doi.org/10.1177/07419325030240020501>
- Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit "Format": Elemente einer interaktionistischen Lerntheorie; diskutiert an Beispielen mathematischen Unterrichts*. Deutscher Studien Verlag.
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Computerunterstützung* (4., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Kuckartz, U., Dresing, T., Rädiker, S., & Stefer, C. (2008). *Qualitative Evaluation: Einstieg in die Praxis* (2., neu bearb. Aufl.). Verlag für Sozialwissenschaften.
- Küchler, M. (1983). "Qualitative" Sozialforschung – ein neuer Königsweg? In G. Garz & L. Kraimer (Hrsg.), *Brauchen wir andere Forschungsmethoden? Beiträge zur Diskussion interpretativer Verfahren* (S. 9–30). Scriptor.
- Kühnel, J. (1916). *Neubau des Rechenunterrichts: Für alle, die sich mit Rechenunterricht zu befassen haben* (Bd. 1). Klinkhardt.
- Kuratli Geeler, S. & Moser Opitz, E. (2021). Mathematische Förderung im Kindergarten. Wie entwickeln sich Kindergartenkinder mit wenig numerischen Vorkenntnissen und was ist für die Förderung wichtig? *Schweizerische Zeitschrift für Heilpädagogik*, 27(3), 31-38.
- Lamnek, S. (1995). *Qualitative Sozialforschung: Bd. 2. Methoden und Techniken* (3., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Lamnek, S. (2005). *Gruppendiskussion: Theorie und Praxis*. Beltz.

- Lamnek, S. & Krell, C. (2016). *Qualitative Sozialforschung* (6., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Langhorst, P., Ehlert, A. & Fritz, A. (2012). Non-numerical and Numerical Understanding of the Part-Whole Concept of Children Aged 4 to 8 in Word Problems. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2), 233–262.
- Le Corre, M. & Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition*, 105(2), 395–438.
- Lehrplan der Volksschule. BGBl. II Nr. 1/2023 in der Fassung BGBl. II 1/2023 vom 02. Jänner 2024.
- Leisen, J. (2015). Fachlernen und Sprachlernen! Bringt zusammen, was zusammen gehört! *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 68(3), 132–137.
- Leisen, J. (2022). *Handbuch Sprachförderung im Fach: Sprachsensibler Fachunterricht in der Praxis. Grundlagenwissen, Anregungen und Beispiele für die Unterstützung von sprachschwachen Lernern und Lernern mit Zuwanderungsgeschichte beim Sprechen, Lesen, Schreiben und Üben im Fach. Praxismaterialien*. Klett Sprachen.
- Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. Hogrefe.
- Lüders, C., & Reichertz, J. (1986). Wissenschaftliche Praxis ist, wenn alles funktioniert und keiner weiß warum – Bemerkungen zur Entwicklung qualitativer Sozialforschung. *Sozialwissenschaftliche Literatur-Rundschau*, 12, 90–102.
- Lüdders, L. (2017). *Qualitative Methoden und Methodenmix: Ein Handbuch für Studium und Berufspraxis*. Apollon University Press.
- Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Waxmann.
- Mackowiak, K., Wadepohl, H. & Beckerle, C. (Hrsg.). (2021). *Interaktionen im Kita-Alltag gestalten. Grundlagen und Anregungen für die Praxis*. Kohlhammer.
- Mackowiak, K., Mai, M., Keller, L., Johannsen, T., Linck, S. & Bethke, C. (2021). Unterstützung kindlicher Lernprozesse durch kognitiv anregende Interaktionen im Kita-Alltag. In K. Mackowiak,

- H. Wadepohl & C. Beckerle (Hrsg.), *Interaktionen im Kita-Alltag gestalten. Grundlagen und Anregungen für die Praxis* (S. 43–62). Kohlhammer.
- Malinowski, B. (1922). Ethnology and the Study of Society. *Economica*, 6, 208–219.
- Mandl, H. (2006). Wissensaufbau aktiv gestalten. Lernen aus konstruktivistischer Sicht. In G. Becker (Hrsg.), *Lernen. Wie sich Kinder und Jugendliche Wissen und Fähigkeiten aneignen* (S. 28–30). Friedrichs Verlag GmbH.
- Mathes, R. (1992). Hermeneutisch-klassifikatorische Inhaltsanalyse von Leitfadengesprächen. Über das Verhältnis von quantitativen und qualitativen Verfahren der Textanalyse und die Möglichkeit ihrer Kombination. In J. H. P. Hoffmeyer-Zlotnik (Hrsg.), *Analyse verbaler Daten: über den Umgang mit qualitativen Daten* (S. 402–424). Opladen.
- Mattersberger, M. (2021). *Die Balance zwischen individuellem und gemeinsamem Lernen im Fach Mathematik: Entwicklung von substanziellen Lernumgebungen für den Anfangsunterricht im Fach Mathematik*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Pädagogische Hochschule Tirol.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Mayring, P. (2016). *Einführung in die qualitative Sozialforschung* (6., neu bearb. Aufl.). Beltz.
- Mayring, P., Gläser-Zikuda, M. & Ziegelbauer, S. (2005). Auswertung von Videoaufnahmen mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse-ein Beispiel aus der Unterrichtsforschung. *MedienPädagogik*, 9. <https://doi.org/10.21240/mpaed/09/2005.04.01.X>
- Merz-Atalik, K. & Franzkowiak, T. (2011). Das Projekt „Teacher Education for Inclusion (TE4I)“ – Lehrerbildung für Inklusion, der European Agency for Development in Special Needs Education. *Zeitschrift für Inklusion*. <https://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/85>
- Meyerhöfer, W. (2018). Verständnis. Ein Ansatz zur begrifflichen Erschließung mathematischer Inhalte. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1243–1246). WTM-Verlag.



- Meyer, M. & Prediger, S. (2012). Sprachenvielfalt im Mathematikunterricht – Herausforderungen, Chancen und Förderansätze. *PM: Praxis der Mathematik in der Schule*, 54(45), 1–13.
- Mitchell, D. (2014). *What Really Works in Special and Inclusive Education: Using Evidence-based Teaching Strategies*. Routledge.
- Moeller, K., Martignon, L., Wessolowski, S., Engel, J. & Nuerk, H. C. (2011). Effects of finger counting on numerical development – the opposing views of neurocognition and mathematics education. *Frontiers in Psychology*, 2, Article 328. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2011.00328>
- Montague, M. (2011). Effective instruction in mathematics for students with learning difficulties. In C. Wyatt-Smith, J. Elkins, & S. Gunn (Hrsg.), *Multiple perspectives on difficulties in learning, literacy and numeracy* (S. 295–313). Springer Science and Business.
- Montessori, M. (1988). *Kosmische Erziehung. Die Stellung des Menschen im Kosmos. Menschliche Potentialität und Erziehung. Von der Kindheit zur Jugend*. Herder.
- Moser, U., Berweger, S. & Stamm, M. (2005). Mathematische Kompetenzen bei Schuleintritt. In U. Moser, M. Stamm & J. Hollenweger (Hrsg.), *Für die Schule bereit? Lesen, Wortschatz, Mathematik und soziale Kompetenzen beim Schuleintritt* (S. 77–98). Sauerländer.
- Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen*. Haupt.
- Moser Opitz, E. (2014). Inklusive Didaktik im Spannungsfeld von gemeinsamen Lernen und effektiver Förderung: Ein Forschungsüberblick und eine didaktische Analyse von didaktischen Konzeptionen für inklusiven Unterricht. In K. Zierer (Hrsg.), *Jahrbuch Allgemeine Didaktik 2014: Allgemeine Didaktik für eine inklusive Schule* (S. 52–68). Hohengehren.
- Moser Opitz, E. (2016). Inklusiver Mathematikunterricht – auch für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung (FGE). In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inklusiver Mathematikunterricht – Mathematiklernen in ausgewählten Förderschwerpunkten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2016* (S. 57–60). University of Bamberg Press UBP.

- Moser Opitz, E., Grob, U., Wittich, C., Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2018). Fostering the Computation Competence of Low Achievers through Cooperative Learning in Inclusive Classrooms: A Longitudinal Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 16(1), 19–35.
- Moser Opitz, E., Garrote, A. & Ratz, C. (2014). Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung. Erste Ergebnisse einer Pilotstudie. *Sonderpädagogische Förderung heute*, 59(1), 19–31.
- Moser Opitz, E. & Nührenbörger, M. (2015). Diagnostik und Leistungsbeurteilung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H. G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 491–512). Mildenberger.
- Moser Opitz, E., Maag Merki, K., Pfaffhauser, R., Stöckli, M. & Garrote, A. (2021). Die Wirkung von unterschiedlichen Formen von co-teaching auf die von den Schülerinnen und Schülern wahrgenommene Unterrichtsqualität in inklusiven Klassen. *Unterrichtswissenschaft*, 49(3), 443–446.  
<https://doi.org/10.1007/s42010-021-00103-0>
- Moser Opitz, E. & Schindler, V. (2021). Disentangling the relationship between mathematical learning disability and second-language acquisition. In A. Fritz-Stratmann, E. Gürsoy & M. Herzog (Hrsg.), *Diversity dimensions in mathematics and language learning. Perspectives on culture, and multilingualism* (S. 245–264). De Gruyter.
- Müller, A. (Hrsg.). (1995). *Montessori-Handbuch*. Verlag für Montessori-Materialien.
- Müller, G. N., Steinbring, H. & Wittmann, E. C. (1997). *10 Jahre „mathe 2000“: Bilanz und Perspektiven: Festschrift zum 10jährigen Bestehen des Projekts „mathe 2000“ an der Universität Dortmund*. Klett.
- National Association for the Education of Young Children (NAEYC). (2002). *Early Childhood Mathematics: Promoting Good Beginnings*. NAEYC.
- New Zealand Ministry of Education (2008). *Getting Started*. Crown.

- Nieveen, N. (1999). Prototyping to reach product quality. In J. van den Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Hrsg.), *Design approaches and tools in education and training* (S. 125–136). Kluwer Academic.
- Nilholm, C. & Göransson, K. (2017). What is meant by inclusion? An analysis of European and North American journal articles with high impact. *European Journal of Special Needs Education*, 32(3), 437–451, <https://doi.org/10.1080/08856257.2017.1295638>
- Norwich, B. (2008). Special schools: What future for special schools and inclusion? Conceptual and professional perspectives. *British Journal of Special Education*, 35(3), 136–143.
- Nührenbörger, M. (2007). „Wir machen das zu zweit“ – Gemeinsames Lernen im Fach Mathematik. In K. Burk, H. de Boer, & F. Heinzl (Hrsg.), *Lehren und Lernen in jahrgangsgemischten und entwicklungsheterogenen Klassen. Arbeitskreis Grundschule* (S. 144–159). Beltz.
- Nührenbörger, M. (2022). Anfangsunterricht im Fach Mathematik. In M. Gutzmann, & U. Carle (Hrsg.), *Anfangsunterricht – Willkommen in der Schule! Beiträge zur Reform der Grundschule – Band 154* (S. 168–181). Grundschulverband e.V.
- Nührenbörger, M. & Pust, S. (2006). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien im differenzierten Anfangsunterricht Mathematik*. Kallmeyer.
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Breucker, T. & Häsel-Weide, U. (2017). *Das Zahlenbuch 1: Förderheft Klasse 1*. Klett.
- Nührenbörger, M. & Tubach, D. (2014). Verständnis mathematischer Zusammenhänge bei Kindern am Ende der Kita und zu Beginn der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 7, 48–61.
- Oevermann, U. (1981). *Fallrekonstruktionen und Strukturgeneralisierung als Beitrag der objektiven Hermeneutik zur soziologisch-strukturtheoretischen Analyse*. Unveröffentlichtes Skript.
- Ortner, L. (2023). *Sprachfördernd unterrichten von Anfang an: Erprobung und Überarbeitung von Lernumgebungen als ein Beispiel für Entwicklungsforschung im arithmetischen Anfangsunterricht*. Unveröffentlichte Masterarbeit, Pädagogische Hochschule Tirol.

- Padberg, F. & Benz, C. (2020). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. (5., neu bearb. Aufl.). Spektrum.
- Pauli, C. & Reusser, K. (2006). Von international vergleichenden Video Surveys zur videobasierten Unterrichtsforschung und -entwicklung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52(6), 774–798.
- Peter-Koop, A. & Rottmann, T. (2013). Einsicht in Teil-Ganzes-Beziehungen: Übungen mit den „Zahlenfreunden“. *Fördermagazin Grundschule*, 35(4), 21–25.
- Petko, D., Reusser, K., Noetzli, C., Krammer, K. & Hugener, I. (2003, 26.–30. August). *Collaborative video based teacher training in a virtual learning environment*. Paper presented at the 10<sup>th</sup> European Conference for Research on Learning and Instruction (EARLI). Padova, Italy.
- Pfister, M., Moser Opitz, E. & Pauli, C. (2015). Scaffolding for mathematics teaching in inclusive primary classrooms: a video study. *ZDM Mathematics Education*, 47(7), 1079–1092.
- Pianta, R. C., La Paro, K. M. & Hamre, B. K. (2008). *Classroom Assessment Scoring System*. Paul H. Brookes Publishing Co. [https://nanopdf.com/download/classroom-assessment-scoring-system\\_pdf](https://nanopdf.com/download/classroom-assessment-scoring-system_pdf)
- Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational design research: Part A: An introduction* (S. 10-51). SLO.
- Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche: Formate Fachdidaktischer Forschung: Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlagen. *Fachdidaktische Forschungen*, 2, 29–46.
- Prengel, A. (2001). Egalitäre Differenz in der Bildung. In H. Lutz & N. Wenning (Hrsg.), *Unterschiedlich verschieden: Differenz in der Erziehungswissenschaft* (S. 93–107). Leske und Budrich.
- Prengel, A. (2006). *Pädagogik der Vielfalt: Verschiedenheit und Gleichberechtigung in Interkultureller, Feministischer und Integrativer Pädagogik*. Springer Fachmedien GmbH.

- Prenzel, M., Heidemeier, H., Ramm, G., Hohensee, F. & Ehmke, T. (2004). Soziale Herkunft und mathematische Kompetenz. In PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 273–282). Waxmann.
- Radatz, H. (1982). Zählen – eine oft vernachlässigte Tätigkeit. In *Grundschule*, 4, 159–162.
- Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht: 1. Schuljahr*. Schroedel.
- Raeggel, M., & Sackmann, C. (1997). *Freiarbeit mit Geistigbehinderten: Geht das denn überhaupt? Ein Erfahrungsbericht mit Materialsammlung, Übungsbeispielen, Tipps und Anregungen*. Modernes Lernen.
- Rasch, R. (2007). *Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1+2: Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen*. Erhard Friedrich Verlag.
- Rathmann, K. & Hurrelmann, K. (2018). *Leistung und Wohlbefinden in der Schule: Herausforderung Inklusion*. Beltz.
- Ratz, C. (2009). *Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht bei Schülern mit geistiger Behinderung: Eine qualitative Studie am Beispiel von mathematischen Denkspielen*. Athena.
- Ratz, C. (2016). Schulleistungen von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung in der Inklusion: Ein Vergleich von Äpfeln mit Birnen? In E. Fischer & R. Markowetz (Hrsg.), *Inklusion im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung* (S. 155–171). Kohlhammer.
- Ratz, C. (2017). Inklusive Didaktik für den Förderschwerpunkt Geistige Entwicklung. In E. Fischer & R. Markowetz (Hrsg.), *Inklusion – Chancen und Herausforderungen für Menschen mit geistiger Behinderung* (S. 172–191). Beltz.
- Ratz, C. & Schneider, K. H. (Hrsg.). (1998). *Materialgeleitetes Lernen an der Schule zur individuellen Lebensbewältigung*. Freisleben.
- Ratz, C. & Moser Opitz, E. (2015). Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Auch im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung?! *Lernen konkret*, 3, 14–15.

- Ratz, C. & Moser Opitz, E. (2016). Mathematische Förderung von Schülerinnen und Schülern mit Down-Syndrom. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 67(9), 400–411.
- Ratz, C. & Wittmann, E. C. (2011). Mathematisches Lernen im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung. In C. Ratz (Hrsg.), *Integrationspädagogik* (S. 129 – 152). Athena.
- Rechtsteiner-Merz, C. (2011). Den Zahlenblick schulen. Flexibel Rechnen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift*, 248/249 (Materialheft).
- Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Waxmann.
- Reich, K. (2002). *Konstruktivistische Didaktik: Lehren und Lernen aus interaktionistischer Sicht*. Luchterhand.
- Reichert, J. (2009). Die Konjunktur der qualitativen Sozialforschung und Konjunkturen innerhalb der qualitativen Sozialforschung. *Forum Qualitative Sozialforschung*, 10(3). <https://doi.org/10.17169/fqs-10.3.1382> 87–102.
- Reiser, H. (1997). Lern- und Verhaltensstörungen als gemeinsame Aufgabe von Grundschul- und Sonderpädagogien unter dem Aspekt der pädagogischen Selektion. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 48(7), S. 266-275.
- Resnick, L. B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 109-151). Academic Press.
- Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44, 162–169.
- Resnick, L. B. (1992). From Protoquantities to Operators: Building Mathematical Competence on a Foundation of Everyday Knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. Hattup (Hrsg.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (S. 373–429). Lawrence Erlbaum Associates.
- Resnick, L. B., Lesgold, S. & Bill, V. (1990). From protoquantities to number sense. In G. Booker, J. Cobb, & T. N. de Mendicuti (Hrsg.), *Proceedings of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (S. 305–311). Mexico City.

- Resnick, L. B., Bill, V. L., Lesgold, S. B. & Leer, M. N. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer, & M. Knapp (Hrsg.), *Teaching advanced skills to at-risk students* (S. 27–53). Jossey-Bass Publishers.
- Riegert, J., Sansour, T. & Musenberg, O. (2015). „Gemeinsame Sache machen“ – Didaktische Theoriebildung und die Modellierung der Gegenstände im inklusiven Unterricht. *Sonderpädagogische Förderung heute*, 60(1), 9–23.
- Rouse, M. & Florian, L. (1997). Inclusive education in the market-place. *International Journal of Inclusive Education*, 1(4), 323–336. <https://doi.org/10.1080/1360311970010403>
- Royar, T. & Streit, C. (2010). *MATHElino: Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen*. Klett.
- Röder, F. J. (1941). *Der Rechenunterricht in der Unterstufe nach der Fingerzahlbildmethode*. Ferdinand Kamp.
- Röhr, M. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Deutscher Universitätsverlag.
- Ruwisch, S. (2015). *Keine Zahl steht für sich allein. Von direkten zu relationalen Zahlvorstellungen*. *Grundschule Mathematik*, 44, 40–43.
- Sander, A. (2002). Von der integrativen zur inklusiven Bildung: Internationaler Stand und Konsequenzen für die sonderpädagogische Förderung in Deutschland. *Perspektiven Sonderpädagogischer Förderung in Deutschland*, 14, 143–164.
- Schäfer, J. (2014). „...dass es nützlich für die Zukunft ist.“ Mathematische Früherziehung bei sozial benachteiligten Kindern mit Entwicklungs- und Lernproblemen. *Sonderpädagogische Förderung heute*, 59(1), 8–18.
- Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte – Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Schindele.

- Scherer, P. (1996). Evaluation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Quantitative oder qualitative Forschungsmethoden? *Heilpädagogische Forschung*, 22(2), 76–88.
- Scherer, P. (1997). Lernen in kleinen Schritten oder in komplexen Umgebungen – Was ist geeignet für Kinder mit Lernschwäche? *Grundschule*, 29(3), 28–31.
- Scherer, P. (1999a). Aktiv entdeckendes Lernen – auch für lernschwache Kinder. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen: Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 152–160). Klett.
- Scherer, P. (1999b, 2003, 2005). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen– Fördern durch Fordern: Bd. 1–3*. Klett.
- Scherer, P. (2017a). Gemeinsames Lernen oder Einzelförderung? – Grenzen und Möglichkeiten eines inklusiven Mathematikunterrichts. In F. Hellmich (Hrsg.), *Inklusiver Unterricht in der Grundschule* (S. 194–212). Kohlhammer.
- Scherer, P. (2017b). Produktives Üben für alle. Anforderungen und Möglichkeiten im inklusiven Mathematikunterricht. *Grundschule Mathematik*, 53, 4–6.
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Springer.
- Schipper, W. (2005). Schulische Intervention und Prävention bei Rechenstörungen. *Die Grundschulzeitschrift*, 182, 6–10.
- Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen: 1. Schuljahr*. Schroedel.
- Schmidt, R. (1982). *Zahlenkenntnisse von Schulanfängern: Ergebnisse einer zu Beginn des Schuljahres 1981/82 durchgeführten Untersuchung*. Hessisches Institut für Bildungsplanung und Schulentwicklung.
- Schmidt, R. (1983). Zu Bedeutung und Entwicklung der Zählkompetenz für die Zahlbegriffsentwicklung bei Vor- und Grundschulkindern. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 15, 101–111.



- Schmidt, S. & Weiser, W. (1982). Zählen und Zahlverständnis von Schulanfängern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 3(3-4), 227–263.
- Schnepel, S. (2018). *Mathematische Förderung von Kindern mit einer intellektuellen Beeinträchtigung: Eine Längsschnittstudie in inklusiven Klassen*. Waxmann.
- Schnepel, S., Krähenmann, H., Moser Opitz, E., Hepberger, B. & Ratz, C. (2015). *Integrativer Mathematikunterricht – auch für Schülerinnen und Schüler mit intellektueller Beeinträchtigung*, 21(4), 6–12. <https://doi.org/10.5167/uzh-110674>
- Schommer, S. S. (2022). *Förderung des Teil-Ganzes-Konzept als zentraler Aspekt der Zahlbegriffsentwicklung unter Nutzung der App „Rechentablett“* (unv. wissenschaftliche Arbeit, Universität des Saarlandes). Saarländische Universitäts- und Landesbibliothek.
- Schrader, F. W. & Helmke, A. (2001) Alltägliche Leistungsbeurteilung durch Lehrer. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 45–58). Beltz.
- Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen: Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Waxmann.
- Schuler, S., Streit, C. & Wittmann, G. (Hrsg.). (2017). *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Springer.
- Schulorganisationsgesetz (SCHOG). (1962). <https://www.Ris.bka.gv.at/geltendefassung.wxe?abfrage=bundesnormen&gesetzesnummer=10009265>
15. Schulorganisationsgesetz-Novelle im Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. [http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/erk/schog\\_novelle\\_09.xml](http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/erk/schog_novelle_09.xml)
17. Schulorganisationsgesetz-Novelle im Bundesgesetzblatt für die Republik Österreich. [http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/erk/schog\\_novelle\\_09.xml](http://www.bmukk.gv.at/schulen/recht/erk/schog_novelle_09.xml)
- Schultz, R., Jakob, E. & Gerster, H. D. (2017). Teile-Ganzes-Denken über Zahlen und Operationen: Herausforderung und Leitidee des Anfangsunterrichts. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 206–224). Beltz.

- Schümer, G. (2004). Zur doppelten Benachteiligung von Schülern aus unterprivilegierten Gesellschaftsschichten im deutschen Schulwesen. In G. Schümer, K.–J. Tillmann, & M. Weiß (Hrsg.), *Die Institution Schule und die Lebenswelt der Schüler: Vertiefende Analysen der PISA-2000-Daten zum Kontext von Schülerleistungen* (S. 73–114). Verlag für Sozialwissenschaften.
- Schürer, S., van Ophuysen, S. & Michalke, S. (2021). Der Zusammenhang von Schuleinstellung und Qualität kind- und klassenbezogener pädagogischer Beziehungen von Lehrkräften. *Zeitschrift für Bildungsforschung*, 11(1), 117–135. <https://doi.org/10.1007/s35834-021-00297-4>
- Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern: Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabenkultur*. Oldenbourg.
- Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null‘ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis*, 16(2), 11–19. [http://www3.math.uni-paderborn.de/~hartmut/AndereTexte/Stunde\\_0.pdf](http://www3.math.uni-paderborn.de/~hartmut/AndereTexte/Stunde_0.pdf)
- Selter, Ch. (1997). Genetischer Mathematikunterricht: Offenheit mit Konzept. *mathematik lehren*, 83, 4–8.
- Selter, Ch. (2017). Förderorientierte Diagnose und diagnosegeleitete Förderung. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 375–393). Beltz.
- Skrtic, T. (1991). The Special Education Paradox: Equity as the Way to Excellence. *Harvard Educational Review*, 61(2), 148–207.
- Siegemund, S. (2016). *Kognitive Lernvoraussetzungen und mathematische Grundbildung von Schülerinnen und Schülern mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung*. Athena.
- Siegemund, S. (2017). Mathematikunterricht für Schülerinnen und Schüler mit dem Förderschwerpunkt geistige Entwicklung: Orientierungspunkte für die Auswahl von Unterrichtsmethoden. *Behinderte Menschen*, 40(6), 67–70.
- Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24(1), S.18–40.

- Slee, R., Weiner, G. & Tomlinson, S. (Hrsg.) (1998). *School Effectiveness for Whom? Challenges to the School Effectiveness and School Improvement Movements*. Routledge.
- Slee, R. (2008). Beyond special and regular schooling? An inclusive education reform agenda. *International studies in sociology of education*, 18(2), 99–116.
- Sloane, P. F. (1985). Und die Wissenschaft steht (nicht) weit darüber? Kommentar und Rechtfertigung einer Kommunikation von Theorie und Praxis. In M. Twardy (Hrsg.), *Problemorientierte pädagogische Beratung* (S. 15–33). Köln.
- Sophian, C. (1988). Limitations on preschool children's knowledge about counting: Use counting to compare two sets. *Development Psychology*, 24(5), 634–640.
- Sophian, C. (1992). Learning About Numbers: Lessons for Mathematics Education From Preschool Number Development. In J. Bideaud, C. Meljac & J. P. Fischer (Hrsg.), *Pathway to number. Children's developing numerical abilities* (S. 19–40). Hillsdale.
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkinder – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Franzbecker.
- Specht, W. (1991). *Perspektiven wissenschaftlicher Begleitforschung im Bereich der Schulversuche zur Integration behinderter Kinder: Erste Ergebnisse der Lehrerbefragung vom Juni 1991*. Bundesministerium für Unterricht und Kunst, Zentrum für Schulversuche und Schulentwicklung.
- Specht, W. (1993). *Evaluation der Schulversuche zum gemeinsamen Unterricht behinderter und nichtbehinderter Kinder. Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Lehrerinnen und Lehrern im Schulversuch*. <http://bidok.uibk.ac.at/library/specht-evaluation-index.html>
- Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets—results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM*, 52(4), 753–765. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01137-x>

- Statistik Austria (2021). *Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf 2020/21*. Abgerufen am 25.01.2022 unter [https://www.statistik.at/web\\_de/statistiken/menschen\\_und\\_gesellschaft/bildung/schulen/schulbesuch/index.html](https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bildung/schulen/schulbesuch/index.html)
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (S. 3–39). State University of New York Press.
- Steffe, L. P., Cobb, P. & mit Glasersfeld, E. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. Springer.
- Steffe, L. P. & Kieren, T. (1994). Radical Constructivism and Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 711–733. <https://doi.org/10.2307/749582>
- Steinbring, H. (1995). Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! – Wie Kinder im Arithmetikunterricht strategisch-strukturelle Vorgehensweisen entwickeln. In G. Müller & E. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 225–239). Grundschulverband.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*. Springer.
- Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern: Epistemologisch-pädagogische Grundlegung*. LIT Verlag. <https://fis.uni-bamberg.de/handle/uniba/1984>
- Steinweg, A. S. (2008). Zwischen Kindergarten und Schule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In F. Hellmich & H. Köster (Hrsg.), *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 143–159). Klinkhardt.
- Steinweg, A. S. (2009). Rechnest du noch mit den Fingern? Aber sicher! *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht Primar*, 4(1), 124–128.
- Steinweg, A. S. (2010). Einschätzung der Qualität von Lehr-Lernsituationen im mathematischen Anfangsunterricht – ein Vorschlag. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 32(1), 1–26. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0022-y>

- Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2014* (S. 51 – 66). Bamberg. <https://doi.org/10.20378/irbo-51596>
- Stern, E. (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter*. Pabst Science Publisher.
- Stigler, J. W., Gonzales, P., Kwanaka, T., Knoll, S. & Serrano, A. (1999). *The TIMSS Videotape Classroom Study: Methods and Findings from an Exploratory Research Project on Eighth-Grade Mathematics Instruction in Germany, Japan, and the United States*. National Center for Education Statistics. U.S. Government Printing Office. <https://nces.ed.gov/pubs99/1999074.pdf>
- Stöckli, M. (2019). *Unterrichtintegrierte Förderung im Mathematikunterricht: Eine empirische Studie in der Primarschule* (Dissertation, Universität Zürich). Zora. [https://www.zora.uzh.ch/id/e-print/177335/1/STOECKLI\\_MERET\\_Dissertation.pdf](https://www.zora.uzh.ch/id/e-print/177335/1/STOECKLI_MERET_Dissertation.pdf)
- Stranghöner, D., Hollmann, J., Otterpohl, N., Wild, E., Lütje-Klose, B. & Schwinger, M. (2017). Inklusion versus Exklusion: Schulsetting und Lese-Rechtschreibentwicklung von Kindern mit Förderschwerpunkt Lernen. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, 31(2), 125–136. <https://doi.org/10.1024/1010-0652/a000202>
- Strauss, A. L., & Corbin, J. (1996). *Grounded theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung*. Beltz.
- Südkamp, A., Möller, J. & Pohlmann, B. (2008). Der Simulierte Klassenraum: Eine experimentelle Untersuchung zur diagnostischen Kompetenz. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 22(34), 261–276. <https://doi.org/10.1024/1010-0652.22.34.261>
- Südkamp, A., & Praetorius, A. K. (Hrsg.). (2017). *Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Theoretische und methodische Weiterentwicklungen*. Waxmann.
- Tao te king (2010). *Das Buch des alten Meisters vom Sinn und Leben. Band 3*. Anaconda Verlag.
- Textor, A. (2015). Gemeinsam lernen: Theoretische Grundlagen und didaktische Leitlinien für einen Inklusion unterstützenden Unterricht. In C. Fischer (Hrsg.), *(Keine) Angst vor Inklusion: Herausforderungen und Chancen gemeinsamen Lernens in der Schule* (S. 37–59). Waxmann.

- Textor, A., Grüter, S., Schiermeyer-Reichl, I. & Streese, B. (Hrsg.). (2017). *Leistung inklusive? Inklusion in der Leistungsgesellschaft: Bd. 2. Unterricht, Leistungsbewertung und Schulentwicklung*. Klinkhardt.
- Thomas, G., D. Walker & Webb, J. (1998). *The Making of the Inclusive School*. Routledge.
- Towse, J. N. & Hitch, G. J. (1996). Performance demands in the selection of objects for counting. *Journal of Experimental Child Psychology*, 61(1), 67–79.
- Treffers, A. (1983). Fortschreitende Schematisierung. Ein natuerlicher Weg zur schriftlichen Multiplikation und Division im 3. und 4. Schuljahr. *Mathematik lehren*, (1), 16-20.
- Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule. Entwicklung und Erforschung komplementärer Spiel- und Lernumgebungen*. Springer Spektrum.
- Unabhängiger Monitoringsausschuss der Republik Österreich (UMA). (2023). *Sonderbericht Art. 24 – Bildung. Anlässlich der 2. Staatenprüfung der Republik Österreich durch den UN-Fachausschuss*. <https://www.monitoringausschuss.at/wp-content/uploads/2023/06/UMA-Sonderbericht-Artikel-24-UN-BRK-korrigiert-19.06.pdf>
- UN Committee on the Rights of Persons with Disabilities (CRPD). (2016). *General comment No. 4. Article 24: Right to inclusive education (CRPD/C/GC/4)*. [https://www.right-to-education.org/sites/right-to-education.org/files/resource-attachments/CRPD\\_General\\_Comment\\_4\\_Inclusive\\_Education\\_2016\\_En.pdf](https://www.right-to-education.org/sites/right-to-education.org/files/resource-attachments/CRPD_General_Comment_4_Inclusive_Education_2016_En.pdf)
- United Nations (CRC). (1989). *Convention on the Rights of the Child*. <https://www.ohchr.org/Documents/ProfessionalInterest/crc.pdf>
- United Nations Children's Fund (UNICEF). (2010). *Progress for children: achieving the MDGs with equity*. unicef. [https://www.unicef.org/media/86431/file/Progress\\_for\\_Children-No.9\\_EN\\_081710.pdf](https://www.unicef.org/media/86431/file/Progress_for_Children-No.9_EN_081710.pdf)
- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO). (1994). *The Salamanca statement and framework for action on special needs education*. United Nations.

[https://www.right-to-education.org/sites/right-to-education.org/files/resource-attachments/Salamanca\\_Statement\\_1994.pdf](https://www.right-to-education.org/sites/right-to-education.org/files/resource-attachments/Salamanca_Statement_1994.pdf)

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO). (2020). *Global Education Monitoring Report 2020: Inclusion and Education: All Means All*. UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000373718>

UK Department of Education (2013). *Mathematics programme of study: key stages 1 and 2*. <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>

van de Walle, J. A. (1993). Concepts of number. In J. N. Payne (Hrsg.), *Mathematics for the young child. Second Edition* (S. 63–87). National Council of Teacher of Mathematics.

van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Pearson.

van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. In J. J. H. Akker, R. M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen, & T. Plomp (Hrsg.), *Design Approaches and Tools in Education and Training* (S. 1–14). Springer Science & Business Media.

van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (Hrsg.). (2006). *Educational Design Research*. Routledge.

van Oers, B. (2010). *Emergent mathematical thinking in the context of play: Educational Studies in Mathematics*, 74(1), 23–37. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9225-x>

van Oers, B. (2013). *Challenges in the innovation of mathematics education for young children: Educational Studies in Mathematics*, 84(2), 267–272. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9509-z>

Verein Hand in Hand. (2011). *Yes we can! EU-Projekt*. [http://www.downsyndrom-yeswe-can.eu/html/project\\_D.html](http://www.downsyndrom-yeswe-can.eu/html/project_D.html)

Vislie, L. (2003). From integration to inclusion: focusing global trends and changes in the western European societies. *European journal of special needs education*, 18(1), 17–35. <https://doi.org/10.1080/0885625082000042294>



- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum.
- von der Bank, M. Chr. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik – Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung* (Dissertation, Universität des Saarlandes). Saarländische Universitäts- und Landesbibliothek. <https://publikationen.sulb.uni-saarland.de/handle/20.500.11880/26729;jsessionid=61ED795BB36194460BB194C98D2628C5>
- von Aufschnaiter, S. & Welzel, M. (2001). Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen: Eine Einführung. In S. von Aufschnaiter & M. Welzel (Hrsg.), *Nutzung von Videodaten zur Untersuchung von Lehr-Lern-Prozessen. Aktuelle Methoden empirischer pädagogischer Forschung* (S. 7–15). Waxmann.
- von Glasersfeld, E. (1997). *Wege des Wissens: Konstruktivistische Erkundungen durch unser Denken*. Carl-Auer-Systeme.
- Vogt, F., Hauser, B., Stebler, R., Rechsteiner, K. & Urech, C. (2018). Learning through play – pedagogy and learning outcomes in early childhood mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 589–603.
- Voßmeier, J. (2012). *Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht: Eine Untersuchung am Beispiel inhaltsbezogener Kompetenzen*. Springer.
- Vygotskij, L. S. (1987). *Mind in society – The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.
- Walter, D. (2015). Sind Finger erlaubt? Über den (sinnvollen) Gebrauch der Finger im mathematischen Anfangsunterricht. *Grundschulunterricht Mathematik*, 62, 28–32.
- Weichbrodt, K. (1994). Rechenschwäche – oder nicht. *Grundschule*, 26(5), 25–27.
- Weidner, M. (2003). *Kooperatives Lernen im Unterricht. Das Arbeitsbuch*. Kallmeyer.
- Weinert, F. E. & Helmke, A. (1997). Theoretischer Ertrag und praktischer Nutzen der SCHOLASTIK-Studie zur Entwicklung im Grundschulalter. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 457–474). Beltz.



- Weisshaupt, S. & Peucker, S. (2009). Entwicklung mathematischen Vorwissens. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 52–76). Beltz.
- Wember, F. B. (1998). Zweimal Dialektik: Diagnose und Intervention, Wissen und Intuition. *Sonderpädagogik*, 28(2), S. 106 – 120.
- Wember, F. B. (2003). Die Entwicklung des Zahlbegriffs aus psychologischer Sicht. In A. Fritz, G. Ricken, & S. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (S. 48–64). Beltz.
- Wember, F. B. (2013). Herausforderung Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 10, S. 380–388.
- Wendelborg, C. & Tøssebro, J. (2011). Educational arrangements and social participation with peers amongst children with disabilities in regular schools. *International Journal of Inclusive Education*, 15(5), 497–512. <https://doi.org/10.1080/13603110903131739>
- Werning, R. & Avci-Werning, M. (2015). *Herausforderung Inklusion in Schule und Unterricht*. Kallmeyer/Klett.
- Werning, R. & Lütje-Klose, B. (2016). *Einführung in die Pädagogik bei Lernbeeinträchtigungen* (4., neu bearb. Aufl.). Ernst Reinhardt Verlag.
- Wibmer, H. (2021). *Förderliches Sprachverhalten von Lehrpersonen im fachlichen Austausch mit den Lernenden: Entwicklung von substanziellen Lernumgebungen für den Anfangsunterricht im Fach Mathematik*. Univeröffentlichte Masterarbeit, Pädagogische Hochschule Tirol.
- Wild, K. P. (2003). Videoanalysen als neue Impulsgeber für eine praxisnahe, prozessorientierte empirische Untersuchung. *Unterrichtswissenschaft*, 31(2), 98–101.
- Wilhelm, T. & Hopf, M. (2014). Design-Forschung. In D. Krüger, I. Parchmann, & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 31–42). Springer.
- Willand, H. (1983). *Pädagogik der Lernbehinderten*. München.

- Williams, S. R. & Baxter, J. A. (1996). Dilemmas of discourse-oriented teaching in one middle school mathematics classroom. *The Elementary School Journal*, 97(1), 21-38.
- Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7(10), 106–116.
- Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 8, S. 14–18.
- Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 2, 4–11.
- Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Springer.
- Wittmann, E. Ch. (1992). Mathematikdidaktik als „design science“. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, 55-70. <https://doi.org/10.1007/BF03339377>
- Wittmann, E. Ch. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10–41). Arbeitskreis Grundschule. [https://www.pedocs.de/volltexte/2019/17495/pdf/GSV\\_1995\\_Wittmann\\_Aktiv\\_entdecken-des\\_und\\_soziales\\_Lernen\\_im\\_Arithmetikunterricht.pdf](https://www.pedocs.de/volltexte/2019/17495/pdf/GSV_1995_Wittmann_Aktiv_entdecken-des_und_soziales_Lernen_im_Arithmetikunterricht.pdf)
- Wittmann, E. Ch. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht*, 43(6), S. 3–7.
- Wittmann, E. Ch. (2001). Konzentration des Stoffes auf die tragenden Grundideen. In E. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Das Zahlenbuch: Mathematik im 1. Schuljahr: Lehrerband* (S. 4–6). Klett.
- Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18–48). Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Bd. 1. Vom Einpluseins zum Einmaleins*. Klett.

- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Bd. 2. Vom halb-schriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Klett.
- Wittmann, E. Ch. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarpädagogik. *mathematica didactica*, 37(2), 213–232.
- Wittmann, E. Ch. (2015). Structure-genetic didactical analyses – empirical research of the first kind. In P. Blaszczyk, B. Pieronkiewicz, & M. Samborska (Hrsg.), *Mathematical Transgressions 2015* (S. 5-19). PWN.
- Wittmann, E. Ch. (Hrsg.). (2016). *Kinder spielerisch fördern – mit echter Mathematik: Anregungen zur Kooperation von Kindergarten und Grundschule mit dem Mathe 2000 Frühförderprogramm*. Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2004). *Das Zahlenbuch: Lehrerband: 1. Schuljahr*. Klett.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2009). *Das Zahlenbuch: Handbuch zum Frühförderprogramm*. Klett.
- Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen: Bd. 1. Vom Eins-pluseins zum Einmaleins* (1., neu bearb. Aufl.). Klett.
- Wocken, H. (1998). Gemeinsame Lernsituationen: Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildes Schmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik: Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 37–52). Juventa.
- Wocken, H. (2014). *Zum Haus der inklusiven Schule: Ansichten – Zugänge – Wege* (2., neu bearb. Aufl.). Feldhaus.
- Wollring, B. (2008). Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In Kasseler Forschergruppe (Hrsg.), *Lernumgebungen auf dem Prüfstand. Bericht 2 der Kasseler Forschergruppe Empirische Bildungsforschung Lehren – Lernen – Literacy* (S. 9–26). Kassel university press GmbH.
- Wullschleger, A. (2017). *Individuell-adaptive Lernunterstützung im Kindergarten: Eine Videoanalyse zur spielintegrierten Förderung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen*. Waxmann.

- Wygotski, L. S. (1975). Zur Psychologie und Pädagogik der kindlichen Defektivität. *Die Sonderschule*, 20(2), 65–72.
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155–193.
- Wynn, K. (1992). Children's acquisition of the number words and the counting system. *Cognitive Psychology*, 24(2), 220–251.
- Yamauchia, L. A., Ima, S., Lina, C.-J. & Schonleberb, N. S. (2013). The influence of professional development on changes in educators' facilitation of complex thinking in preschool classrooms. *Early Child Development and Care*, 183(5), 689–706.
- Ziegler, G., Weigand, H. G. & a Campo, A. (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*. [http://madipedia.de/images/2/21/Standards\\_Lehrerbildung\\_Mathematik.pdf](http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf)