enaktiv – ikonisch – symbolisch

Eine semiotisch basierte Präzisierung und deren unterrichtspraktische Konkretisierungen

Jonas Lotz

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität des Saarlandes

Saarbrücken 2022

Tag des Kolloquiums:	22.04.2022
Dekan:	Prof. Dr. Jürgen Steimle
Prüfungsausschuss:	Vorsitzender
	Prof. Dr. Moritz Weber
	Berichterstattende
	Prof. Dr. Anselm Lambert
	Prof. Dr. Wilfried Herget
	Prof. Dr. Melanie Platz
	Akademischer Mitarbeiter
	Dr. Christian Steinhart

Kurzfassung

Eine semiotisch basierte Auseinandersetzung mit den Repräsentationsmodi *enaktiv*, *ikonisch*, *symbolisch* bzw. mit dem *EIS-Prinzip* schöpft ihre Bewandtnis aus dem zwiespältigen Gebrauch dieses Prinzips: Einerseits ist es sowohl in der Theorie als auch in der Praxis des Mathematikunterrichts äußerst populär, andererseits widersprechen sich anzutreffende Auffassungen des Prinzips teilweise drastisch und beeinflussen das Lernen in unterschiedlichem Maße – zuweilen sogar negativ. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit zwei typische Deutungen sowie mehrere Modifikationen des EIS-Prinzips herausgestellt, reflektiert, zusammengeführt und weiterentwickelt. Diese Schritte münden in der *EIS-Palette* als Kondensat des Vertiefens bestehender Theorieelemente, wobei dieses Kondensat selbst wieder als Ausgangspunkt dient und aufgefächert wird: Der EIS-Palette werden drei Leitsätze entnommen, die insbesondere die Unterrichtsreflexion, -planung und -gestaltung unterstützen und die auf zehn Unterrichtsgegenstände eigens angewendet und gleichzeitig weiter konkretisiert werden. Diese Anwendungen bilden einen Teil der Legitimation des vertieften EIS-Prinzips, welche außerdem durch die Analyse zweier Vorläufertheorien und einiger Vorläuferideen aus der Mathematikdidaktik historisch gestützt ergänzt wird. Auf diese Weise unterbreitet die vorliegende Arbeit eine Diskussionsgrundlage und einen begründeten Vorschlag eines lernförderlichen EIS-Prinzips.

Abstract

The relevance of a semiotic based discussion of the modes of representation *enactive*, *iconic*, *symbolic* and, accordingly, of the *EIS-Principle* is established by the ambivalent use of this principle: On the one hand, it is widely used in both the theory and practice of teaching mathematics. On the other hand, some established conceptions of the principle contradict each other drastically and affect learning to varying degrees – sometimes even unfavourably. For this reason, the present thesis depicts two typical interpretations as well as several modifications of the EIS-Principle, then reflects, combines and develops these further. The elaboration of existing theory elements results in the *EIS-Palette*, which itself serves as a starting point for further applications: Within the framework of the EIS-Palette, three superior guidelines can be identified, which especially assist in the reflection, planning and design of teaching situations. These guidelines are then applied to ten topics of mathematics instruction and further concretized this way. The applications contribute to the justification of the elaborated EIS-Principle, as does the analysis of two prior theories and several prior ideas taken from the didactics of mathematics. In this manner, this thesis provides a basis for discussion and submits an EIS-Principle conductive to teaching and learning mathematics.

Danksagung

Wer in den letzten Monaten etwas Zeit am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität des Saarlandes verbracht hat, konnte die gelegentliche Konfrontation mit den Adjektiven *lehrreich*, *diskursiv*, *nützlich* und *unterhaltsam* kaum vermeiden.[1]

Diese Worte beschreiben meine bisherige Zeit an besagtem Lehrstuhl äußerst zutreffend – und das verdanke ich den Personen, mit denen ich sie dort teilen durfte: Meinem Doktorvater Professor Dr. Anselm Lambert, der ein steter Quell von Inspiration, Denkanstößen und Lehren war und der sich auch unabhängig von allem Mathematischen und Mathematikdidaktischen immer verständnisvoll, einfühlsam und aufopfernd für jede und jeden von uns einsetzte. Karl Charon, durch den mir der Luxus eines brillanten und herzensguten Lehrers als ständiger Ansprechpartner und Berater für aufkeimende Ideen, für geplante, geglückte und gescheiterte Unterrichtsstunden und für vieles weitere zuteilwurde. Katharina Gaab, ohne die ich gar nicht erst meinen Weg zum Lehrstuhl gefunden hätte und die mir vom ersten Tag an eine unschätzbare Hilfe, enge Vertraute und liebenswerte Schreibtischnachbarin war. Dr. Marie-Christine von der Bank, von der ich zahlreiche Impulse für das eigene Unterrichten aus Vorträgen und Gesprächen aufnehmen durfte, wobei Letztere neben inhaltlicher Tiefe auch immer mehr von herzhaftem Lachen erfüllt waren. Katharina Wilhelm, mit der ich stets auch über die Sorgen und Bedenken in unserem Tagewerk sprechen konnte und die besonders in den letzten Wochen der Fertigstellung meiner Arbeit große Teile ihrer kaum zu entbehrenden Zeit für mich aufgebracht hat. Pascal Schmidt, mit dem ich wegen abweichender inhaltlicher Schwerpunkte zwar seltener in mathematikdidaktische Diskussionen verwickelt war, aber zum Glück in allerlei andere Gespräche und der ganz wesentlich zur fröhlichen und gelösten Stimmung unter uns allen beitrug. Und nicht zuletzt Karin Mißler, die mit ihrer fürsorglichen, hingebungs- und liebevollen Art den alles verbindenden Grundstein legte für unsere Gemeinschaft am Lehrstuhl. Vor allem aber bin ich dankbar dafür, dass im Laufe der Jahre aus Kolleginnen und Kollegen Freundinnen und Freunde wurden und bin voller Vorfreude auf die zukünftige Zeit – in der Hoffnung und Zuversicht, sie mit den genannten Personen weiterhin teilen zu dürfen.

Zuletzt danke ich von Herzen meinem langjährigen Trainer Robert Meurer, meiner Freundin Lara sowie meiner Familie, deren stete Liebe, Rückhalt, Unterstützung und Förderung all dies erst ermöglichte.

[1] Glücklicherweise kann die Konfrontation mit diesen Worten im Kontext achtsamen Mathematikunterrichts problemlos auch außerhalb des Saarlandes stattfinden – siehe dazu Katharina Wilhelm & Bernhard Andelfinger (2021).

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Das zur vorliegenden Arbeit hinführende und sie vorstrukturierende Kapitel 0 ist in vier Abschnitte gegliedert: Unterkapitel 0.1 steigt recht unvermittelt und exemplarisch in die Tradition (mathematik)didaktischer Prinzipien ein, um daraus abstrahierend die Herangehensweise und das Anliegen der nachfolgenden Kapitel zu formulieren. Zu selbigen gibt Unterkapitel 0.2 anschließend einen methodischen und inhaltlichen Überblick, woraufhin Unterkapitel 0.3 den übergeordneten Rahmen (mathematik)didaktischer Prinzipien kurz beleuchtet. Die Einleitung wird in Unterkapitel 0.4 mit der Erläuterung wiederkehrender Termini zur Begriffsbildung ergänzt und in Unterkapitel 0.5 mit der Empfehlung eines Lesepfades für praktizierende Lehrpersonen abgeschlossen.

0.1 Eine gute alte Tradition

Wie lässt sich Mathematikunterricht am *Prinzip der Naturgemäßheit* ausrichten? Mit diesem Prinzip fordert JOHANN AMOS COMENIUS[2] (1592-1670) in seiner *Didactica Magna* dazu auf, „daß jene Ordnung, die nach unserem Wunsch das Prinzip der allgemeinen Lehr- und Lernkunst sein soll, nur von der Lehrmeisterin Natur abgeleitet werden kann und soll" (Comenius 1906, S. 71; Original 1657). Die Natur achte beispielsweise „auf die passende Zeit" – der Vogel brütet stets im Frühling – und dieses zeitliche Achtnehmen überträgt COMENIUS (ebd., S. 78) auf die Bildung der Jugend: Sie müsse in der Kindheit beginnen und in den Morgenstunden stattfinden, denn beiderlei entspreche dem Frühling (ebd., S. 79). Auf analoge Weise leitet COMENIUS von der Lehrmeisterin Natur u. a. ab,

- dass Beispiele den Regeln vorangehen sollen (ebd., S. 80),
- dass die Erkenntnis einer Sache vor dem Gedächtnis auszubilden sei und dieses wiederum vor der Sprach- und Handfertigkeit (ebd., S. 83),
- dass durch eine Anordnung des Unterrichtsstoffes die Studien „nur eine Art mehr gesonderter Entfaltung des Früheren" darstellen sollen (ebd., S. 84),
- dass die Lehrperson den Lernenden „alles den Sinnen vorführt" (ebd., S. 87),
- dass „Lehrer und Schüler […] dieselbe Sprache" sprechen (ebd., S. 92),
- dass Lehrende „nichts auswendig lernen lassen, was noch nicht richtig verstanden ist" (ebd., S. 94), und
- dass nichts „nur auf Grund von Autorität gelehrt" werde (ebd., S. 102).

Viele dieser Thesen sind in der Mathematikdidaktik bis heute präsent, wenn auch verteilt auf andere Gewänder – ob Verstehensorientierung, Spiralprinzip, Handlungsorientierung oder sprachsensibles Lernen. Derart weittragende Ideen

[2] Im Folgenden wird nach Möglichkeit bei der ersten Nennung eines Nachnamens auch der zugehörige Vorname ergänzt.

werden kaum einem naiven Übertragen von Naturgesetzen[3] entsprungen sein. Vielmehr scheint COMENIUS Vorbilder in der Natur im Bewusstsein dessen, worauf er sie übertragen will, gezielt aufzusuchen und den logischen Aufbau „möglicherweise [nur] aus verbreitungstaktischen Gründen“[4] gewählt zu haben, wie HEINRICH WINAND WINTER (1984, S. 116) vermutet:

> Wenn jemand die folgenden Begründungen etwas einfach, bekannt und trivial vorkommen sollten, so mag er daran denken, daß es uns darauf ankommt, aus den alltäglichen und allgemein bekannten, in Natur und Kunst (außerhalb der Schule) wohl bewährten Vorgängen jene weniger bekannten abzuleiten, die unser Ziel sind. Und wir dürfen umso mehr auf die Überzeugungskraft unserer Schlußfolgerungen hoffen, je bekannter die Voraussetzungen sind, denen wir den Leitgedanken unserer Vorschrift entnehmen.
>
> Comenius (1906, S. 77)

Auch in ADOLPH DIESTERWEGs (1790-1866) *Wegweiser für deutsche Lehrer* fungiert das *Prinzip der Naturgemäßheit* als übergeordneter Ausgangspunkt zur Entwicklung einzelner Richtlinien. Er führt es jedoch auf JEAN-JACQUES ROUSSEAU (1712-1778) zurück[5], der „[a]uf anderem Standpunkte stehend, geleitet von andern Motiven, etwa 120 Jahre später […] unabhängig von Comenius“ Gesetzmäßigkeiten des Unterrichtens als „der Menschennatur selbst immanent“ erachtet und sie „nicht der äußeren Natur“ entnimmt (Schlenker 1904, S. 36, 43):

> [D]er Unterricht muß sich an die menschliche Natur und deren Entwicklungsgesetze anschließen. […] Kann man eine bestimmte Art des Unterrichts, eine Methode etc., als naturgemäß nachweisen, so ist damit der Beweis ihrer Richtigkeit geliefert. Was dagegen als der Natur des Kindes zuwiderlaufend, als naturwidrig vorgezeigt werden kann, ist unbedingt verwerflich.
>
> Diesterweg (1838, S. 130)

Viele der abgeleiteten Richtlinien finden dennoch eine Entsprechung bei COMENIUS: Während DIESTERWEG (1838, S. 136 ff.) beispielsweise den Fortschritt „vom Einfachen zum Zusammengesetzten“ verlangt – in späteren Jahren „häufig verkürzt […] zu oberflächlicher methodischer Rezeptologie“, die „geradezu Effekte der Lernbehinderung“ verursacht (Winter 1984, S. 120) –, will COMENIUS (1906, S. 84) „[j]ede Sprache, Wissenschaft und Kunst […] zuerst in den einfachen

---

[3] Naturgesetze waren damals natürlich nicht im heutigen Sinne und Umfang bekannt. Ihr *eigenes* Beobachten und Beschreiben setzte sich erst nach und nach gegen das Festhalten an Traditionen, Dogmen und die Autorität der katholischen Kirche durch – vgl. dazu Fußnote 5.

[4] Eckige Klammern in Zitaten kennzeichnen Einfügungen oder Auslassungen des Autors der vorliegenden Arbeit – mit einer Ausnahme, auf die eigens hingewiesen wird.

[5] „[D]u würdest irren, wenn du glauben solltest, daß ich das Prinzip der Naturgemäßheit zuerst als obersten Grundsatz alles Lebens und Erziehens erkannt hätte. Das hat Rousseau gewollt, das hat Rousseau gethan, der heut zu Tage so geschmähte (!) Jean Jacq. Rousseau“ (Diesterweg, zitiert nach Ludwig Bölter 1843, S. 157, der – nebenbei bemerkt – DIESTERWEGs Wirken als den „christlichen Glauben und christliche Sittlichkeit untergrabendes Treiben“ bezeichnet (ebd., S. 156)).

Grundzügen übermitteln […], dann vollständiger mit Vorschriften und Beispielen, weiter mit ausgeführten Systemen nebst Ausnahmen".

Hinführend zur Herangehensweise und anschließend zum Anliegen der vorliegenden Arbeit sei aus alldem hervorgehoben, dass mit demselben *Prinzip der Naturgemäßheit* zuweilen unterschiedliche Botschaften – eine (scheinbare) Sachorientierung gegenüber einer Kindorientierung – gefasst werden: Didaktische Prinzipien können mehrdeutig sein (vgl. z. B. Eberhard Dahlke 1981, S. 127 oder Friedhelm Käpnick 2014, S. 60). In der Sichtweise, die im Folgenden eingenommen wird, existiert daher nicht *das* didaktische Prinzip der Naturgemäßheit oder irgendein anderes; vielmehr entwickelt jede Person – ob in der Theorie oder der Praxis des Mathematikunterrichts tätig – ihr eigenes Modell eines Prinzips.[6] Das Abwägen zwischen Interpretationen entspricht daher keinem Abgleich mit der ursprünglichen Intention, sondern einer bewussten Reflektion persönlicher Konstruktionen. Dabei ist genau wie bei WINTER (1984, s. o.) das Bewähren in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts entscheidend: Die Interpretation eines didaktischen Prinzips muss viabel[7] sein.

Vor diesem Hintergrund sollten mathematikdidaktische Prinzipien immer wieder geprüft und gegebenenfalls modifiziert werden – ein nicht selbstverständlicher Akt im Kontext didaktischer Prinzipien, wie DAHLKE (1981, S. 127)[8] betont –, denn sie „sind keine feststehenden Säulen. Sowohl Akzentverschiebungen in der Mathematikdidaktik als auch neuere und aktuelle Entwicklungen wie Kompetenz- und Inklusionsorientierung oder Digitalisierung können zu einer Neuorientierung und Neubewertung von Prinzipien führen" (Johanna Heitzer & Hans-Georg Weigand 2020, S. 6):

> Zwar haben einige überkommene „Regeln des Lehrens" dem Test der Zeit standgehalten, und sie sind wahrscheinlich valide, aber trotzdem verändert ihre Anwendung sich ebenso, wie sich die pädagogischen Umstände und Ziele verändern. Darum kann man selbst die ehrwürdigsten Regeln nicht blind befolgen. Regeln müssen immer wieder aufs neue im Licht gewandelter Umstände geprüft werden.
>
> David Paul Ausubel, Joseph Novak & Helen Hanesian (1980, S. 27)[9]

---

[6] Siehe auch die Erstellung eigener *Perspektivenbäume* nach ANSELM LAMBERT (2005b, S. 281 ff.).

[7] „Actions, concepts, and conceptual operations are viable if they fit the purposive or descriptive contexts in which we use them" (Ernst von Glaserfeld 1995, S. 14). Das Übertragen dieser Wortwahl soll jedoch kein Einreihen in den radikalen Konstruktivismus implizieren, dem das Konzept der Viabilität entstammt – die obige Forderung ist davon unabhängig.

[8] „Diese notwendige Skepsis wird durch Aussagen vom Status eines Prinzips, der ja den Eindruck des Bewiesen- bzw. Überprüftseins suggeriert, sicherlich nicht gefördert. In der Praxis kann das zu einem sorglosen und oberflächlichen Umgang mit den propagierten Lehrmaßnahmen führen"; es könne sogar „die sachliche Diskussion über geeignete Lehrmaßnahmen" behindert werden (Dahlke 1981, S. 127).

[9] Als sinnvolles Credo erscheint hierbei WERNER WALSCHs (1992, S. 6) – in anderem Kontext formuliertes – Bestreben, sich „vor unreflektiertem Traditionalismus ebenso [zu] hüten wie vor unbedachtem Radikalismus".

Die vorliegende Arbeit widmet sich diesem Vorhaben für EIS-Prinzipien, die auf JEROME BRUNER zurückgehen. In diesem Prozess wird im obigen Sinne nicht danach gestrebt, das eine, wahre EIS-Prinzip zu identifizieren, das BRUNERs Intention widerspiegelt, denn auch sein EIS-Prinzip ist nur eines unter vielen, die sich als viabel erweisen müssen.[10] Stattdessen werden Antworten auf die folgenden beiden Forschungsfragen gesucht:

- Was soll als EIS-Prinzip gelten, um damit die (Weiter-)Entwicklung von Unterricht – insbesondere die Unterrichtsreflexion, -planung und -gestaltung (vgl. Lambert 2014) – bestmöglich zu unterstützen?
- Inwiefern ist das im Zuge der Beantwortung der ersten Frage ausgearbeitete EIS-Prinzip dazu in der Lage?

0.2 Kurzbeschreibung und Einordnung der vorliegenden Arbeit

0.2.1 Kurzbeschreibung

Der Grundstein ist die Bestandsaufnahme von EIS-Prinzipien in Kapitel 1 und 2. In ihr werden voneinander abweichende Deutungen aufgezeigt, miteinander verglichen und Kernpunkte des nachgezeichneten Entwicklungsprozesses zusammengetragen. Dieser nimmt seinen Anfang bei BRUNER selbst, aus dessen englisch- und deutschsprachigen Werken in Unterkapitel 1.1 bzw. 1.2 zwei nicht miteinander vereinbare EIS-Prinzipien extrahiert werden: eine eindimensionale Rezeption – sie legt das Missverständnis nahe, Lernen als sequenziellen Prozess aufzufassen – und eine differenziertere Interpretation. Gemäß Unterkapitel 2.1 treten beide in mathematikdidaktischen Wiedergaben und Adaptionen der BRUNERschen Trias zutage, wobei der mathematikdidaktische Alltag von einer sehr einseitigen Verbreitung zugunsten der eindimensionalen Rezeption geprägt ist – davon überzeugen in Unterkapitel 2.2 konkretisierende Anwendungen in der mathematikdidaktischen Literatur sowie ein kurzer Blick in die Praxis des Mathematikunterrichts.
Der aufgezeigte Dissens indiziert die Sinnhaftigkeit einer kritischen Prüfung der Viabilität des geläufigen EIS-Prinzips, schließlich entstanden die differenzierenden Interpretationen auch aus einer Unzufriedenheit mit der eindimensionalen Rezeption. Mit dieser Prüfung wird die eigentliche Vertiefung der Theorie (als nächster Schritt im nachgezeichneten Entwicklungsprozess) unter Einbeziehen der Vorarbeiten begonnen. Die dabei wesentlichen Zwischenschritte sind in Abb. 1 vereinfacht dargestellt und werden im Folgenden kurz inhaltlich beschrieben.

[10] Wenn sich die Viabilität eines didaktischen Prinzips in der Passung zu den Zwecken ausdrückt, zu denen es benutzt wird, müssen diese Zwecke expliziert werden, bevor sich Viabilität beurteilen lässt. Dies geschieht in Unterkapitel 0.3.

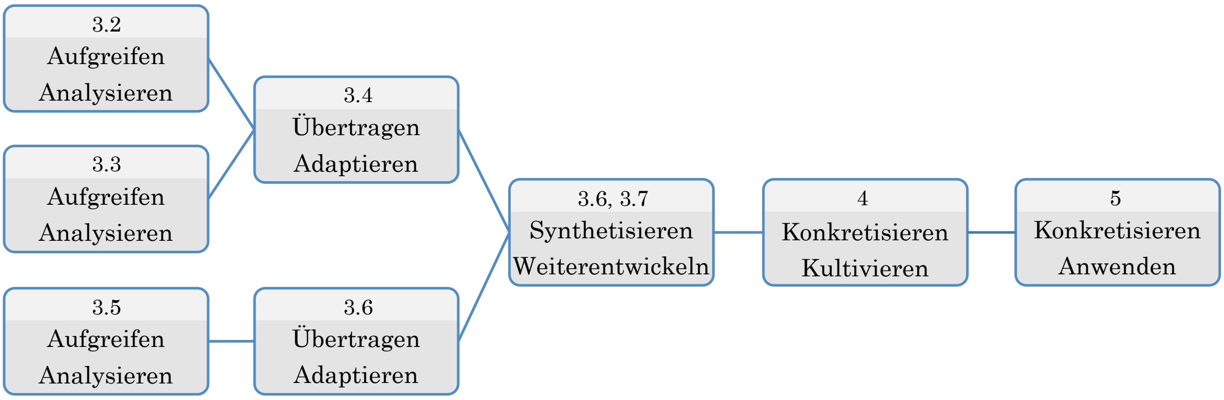


Abb. 1: Erkenntnis-Prozesse der vorliegenden Arbeit[11]

Das *Aufgreifen*[12] und *Analysieren*[13] dreier Hauptstränge bildet den Ausgangspunkt: Unterkapitel 3.2 verwertet wie oben beschrieben große Teile der Bestandsaufnahme, indem es das geläufige EIS-Prinzip unter Zuhilfenahme bestehender Modifikationen hinterfragt. Dabei zeigen sich Unstimmigkeiten und unerwünschte Nebenwirkungen für das Mathematiklernen, deren begründetes Auflösen im Einklang mit tradierten Auffassungen zusätzlicher theoretischer Grundlagen bedarf, die in Unterkapitel 3.3 und 3.5 geschaffen werden. Beide Unterkapitel bedienen sich der Semiotik als einer der Hilfswissenschaften der Mathematikdidaktik:

Unterkapitel 3.3 widmet sich Umberto Ecos (1932-2016) Zusammenstellung von Zeichenklassifikationen, wählt eine dieser aus und *überträgt* sie unter zweckgerichteten *Adaptionen* in Unterkapitel 3.4 auf das geläufige EIS-Prinzip, wodurch Unterkapitel 3.2 und Unterkapitel 3.3 zusammengeführt werden.

---

[11] Nicht explizit aufgeführt sind unter anderem das *Begründen* und das *Reduzieren*, weil sich beide Schritte nicht gebündelt in einem einzelnen Feld von Abb. 1 verorten lassen, sondern mehrfach wiederkehren: Beispielsweise wird die Auswahl der Hauptstränge, deren Adaptieren und das Weiterentwickeln vor dem Hintergrund von Mathematikunterricht begründet, während sich die Produkte der Konkretisierungsschritte auf Grundlage des zuvor geschaffenen theoretischen Rahmens begründen. Auch das Reduzieren setzt bereits beim Aufgreifen ein und begleitet das Übertragen, Adaptieren und Synthetisieren, denn eine vollumfängliche Wiedergabe und Übernahme der Grundlagen wäre dem Ziel der einzelnen Prozessschritte unangemessen.

[12] Auch wenn nur drei Hauptstränge genannt sind, wird der von Abb. 1 beschriebene Prozess in allen Stufen von weiteren Beiträgen wesentlich beeinflusst. Hervorzuheben sind hierunter die Werke von Wilhelm Oehl bzw. von Walter Breidenbach zur Volksschule, Grundschule und Hauptschule. Sie traten gemeinsam mit anderen mathematikdidaktischen Errungenschaften im Zuge der *Neuen Mathematik* in den Hintergrund (vgl. Erich Christian Wittmann 2018 bzw. Karl Charon & Jonas Lotz 2022 sowie Abschnitt 5.1.3) und sollen mit der vorliegenden Arbeit bewusst wieder stärker in den mathematikdidaktischen Diskurs einbezogen werden.

[13] Das Vorgehen wird hier und in den folgenden Kapiteln meist *historiographisch* bleiben, also von der Absicht geprägt sein, „das Alte neu zu sehen" und „ein Lernen von früher für heute und morgen *durch Historiographie als anregende Verfremdung*" zu initiieren (Lutz Führer 1997, S. 4; Lambert 2010, S. 140). Aufgegriffene Theorien, Ideen und Aussagen werden also (auch unter Zuhilfenahme mathematikdidaktischer Aufbereitungen) aus heutiger Sicht interpretiert und nutzbar gemacht, während die *historisch* akkurate Erfassung und Einordnung untergeordnete Rollen spielen (vgl. Führer 1997, S. 4 sowie Marie-Christine von der Bank 2022).

Unterkapitel 3.5 breitet einige Aspekte von CHARLES SANDERS PEIRCE' (1839-1914) semiotischer Erkenntnistheorie[14] aus – oftmals, aber nicht ausschließlich in der Aufbereitung durch MICHAEL HOFFMANN sowie WILLIBALD DÖRFLER. Durch das *Übertragen* dieser Aspekte auf das Mathematiklernen aus Handlungen und ihr daraus motiviertes *Adaptieren* gewinnt Unterkapitel 3.6 Bedeutungen zu den Bezeichnern »enaktiv« bzw. »ikonisch«; eine Bedeutung zu »enaktiv« fügt sich passend ein.[15] Gleichzeitig findet hierbei ein *Synthetisieren* statt, weil die in Unterkapitel 3.4 dargelegten Begrifflichkeiten unverzichtbare Bestandteile der genannten Bedeutungen sind. Aus diesem Grund führt Abb. 1 das Unterkapitel 3.6 ein zweites Mal bei der *Synthese* im Sinne des Verflechtens aller drei Stränge sowie der *Weiterentwicklung* des Synthetisierten auf, zu dem Unterkapitel 3.7 einen weiteren Beitrag liefert.

In Kapitel 3 konzipiert die vorliegende Arbeit somit ihr *vertieftes EIS-Prinzip*. Es deckt sich inhaltlich zu großen Teilen mit Beiträgen aus der Bestandsaufnahme, die das geläufige EIS-Prinzip kritisieren und modifizieren. Insofern ist das vertiefte EIS-Prinzip kein völliges Novum, sondern eine Weiterentwicklung von Bestehendem. Dies unterstreicht Kapitel 6, das an den in Abb. 1 dargestellten Erkenntnis-Prozess der Arbeit anschließt, mit der Behandlung zweier Vorläufertheorien und einiger älterer Vorläuferideen noch sehr viel deutlicher.

Der durch das Synthetisieren und Weiterentwickeln gewonnene theoretische Rahmen soll anschließend in zwei Schritten *konkretisiert* werden. In einem ersten Schritt *konkretisiert* Kapitel 4 einerseits *deskriptive Theorieelemente* (nach Susanne Prediger 2015, S. 652), indem unterschiedliche Facetten des Lernens aus Handlungen mithilfe des vertieften EIS-Prinzips strukturiert wahrgenommen und beschrieben werden, und andererseits *präskriptive Theorieelemente*[16] zu drei übergeordneten Leitsätzen. Diese entspringen dem theoretischen Fundament und sollen es *didaktisch kultivieren*, womit metaphorisch der Prozess bezeichnet sei,

---

[14] PEIRCE hat nie *die eine* zusammenhängende Theorie formuliert, insofern ist der obige Ausdruck etwas irreführend (Hoffmann 2005, S. 27).

[15] Siehe Unterkapitel 0.4 zur Erläuterung der hier verwendeten, von VERENA REMBOWSKI (2015) übernommenen Terminologie zur Begriffsbildung.

[16] Diese präskriptiven Theorieelemente werden „durch Vernetzung und Argumentation statt Empirie" abgesichert (Prediger 2015, S. 657) – obwohl Letztere bei der Absicherung besagter Theorieelemente „inzwischen zum wissenschaftlichen Standard" gehöre (ebd., S. 656). Es sei daher nie behauptet, dass gewisse Lernprozesse *nachweislich* unter Berücksichtigung der angebrachten Vorschläge besser gelingen; vielmehr werden insbesondere durch den zweiten Konkretisierungsschritt falsifizierbare Hypothesen generiert, die einer eigenen, nicht zwingenderweise statistisch abgesicherten Prüfung in der Praxis unterzogen werden können – „[a]uch ein statistisch nicht abgesichertes Beobachten des Schülerverhaltens ist wichtig und kann bedeutsame Ergebnisse liefern" (Heinz Griesel 1971, S. 73; siehe unten). Eine gewisse Zuversicht ist dabei durchaus gerechtfertigt, weil sich über viele Jahre bewährte, nach und nach ausgeschärfte Ideen der Reformpädagogik – etwa BREIDENBACHs Isomorphie (vgl. Abschnitt 6.1.1) – im vertieften EIS-Prinzip abzeichnen.

eine didaktische Theorie für die unterrichtliche Praxis nutz- bzw. fruchtbar zu machen.[17]

Kapitel 5 unternimmt den zweiten Schritt des *Konkretisierens* – in der Metapher bleibend handelt es sich dabei um Anbau und Ernte auf dem zuvor kultivierten Boden: Die übergeordneten Leitsätze aus Kapitel 4 werden auf zehn mathematische Unterrichtsgegenstände *angewendet*, um theoretisch begründete Praxisempfehlungen zu generieren. Hierbei wird ausgenutzt, dass die Theorie eine didaktische Brille liefert, mit der sich beim Blick auf bestehende Unterrichtsentwürfe und deren didaktisch-methodische Reflexionen Unstimmigkeiten oder Mängel aufzeigen lassen, welche durch Anwendung der Theorie behoben werden können. Bei diesem zweiten Konkretisierungsschritt soll sich das vertiefte EIS-Prinzip schließlich als viabel in der (Weiter-)Entwicklung von Mathematikunterricht erweisen.

Diese inhaltliche Kurzbeschreibung des Vertiefungsprozesses der Theorie lässt sich weiter komprimieren zu den in Abb. 2 wiedergegebenen Schlagworten, die wesentliche Zwischenetappen kennzeichnen – ihre vorgesehene Bedeutung wird sich allerdings erst in der Progression der Arbeit erschließen.

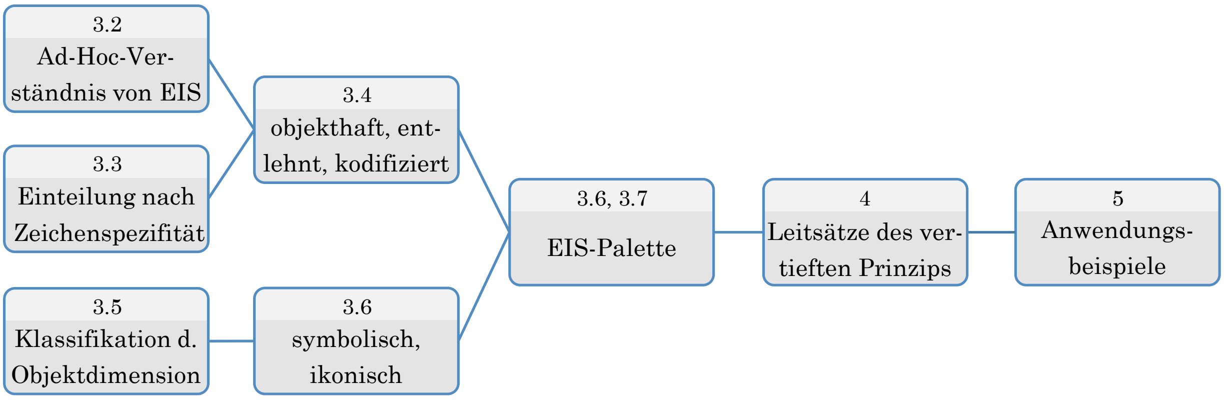


Abb. 2: Ausgewählte Inhalte sowie deren Zusammenführung und Weiterentwicklung

Nach der bereits oben erwähnten Auseinandersetzung mit Vorläufertheorien und -ideen in Kapitel 6 schließt die Arbeit mit einigen rück- und vorausblickenden Schlussbetrachtungen in Kapitel 7. Abb. 1 und Abb. 2 blenden damit die beiden einrahmenden Kapitel – die voranstehende Bestandsaufnahme sowie die nachträgliche Auseinandersetzung mit Vorläufertheorien und -ideen – aus.

[17] Das didaktische Kultivieren lässt sich beispielsweise auch bei PETER BENDER & ALFRED SCHREIBER (1985) beobachten, auch wenn es dort nicht als solches bezeichnet wird: Ihr *Prinzip der operativen Begriffsbildung* erläutern BENDER & SCHREIBER (1985) an einer Vielzahl von Anwendungsbeispielen, denn es genügt ihnen nicht, eine überzeugende Theorie zu formulieren: „Unsere Philosophie scheint einleuchtend, ja geradezu selbstverständlich zu sein, jedenfalls auf dem Papier. Es kommt aber darauf an, sie anzuwenden, und das heißt: geometrische Begriffe auch tatsächlich operativ zu bilden“ (ebd., S. 22).

0.2.2 Einordnung

Der obige Überblick lässt erkennen, dass die vorliegende Arbeit primär hermeneutisch und epistemologisch vorgeht, also bestehende Arbeiten gemäß Abb. 1 aufgreift, analysiert, überträgt, adaptiert und synthetisiert. Diese in Kapitel 2 und 3 offenkundig zentralen Teilschritte spielen sich auch bei der Weiterentwicklung des Synthetisierten und in den Konkretisierungsschritten immer wieder ab, wenn auch teilweise überlappend, komprimiert und weniger explizit. Die Ausgangstheorieelemente werden also durch „Vernetzung bestehender Theorien durch Integrieren, Synthetisieren oder Kombinieren von Theorieelementen" und somit auf der höchsten Ausdifferenzierungsstufe dieser Tätigkeit gewonnen (Prediger 2015, S. 657). Damit verschreibt sich die vorliegende Arbeit klar der Theoriebildung:

> Theoriebildung umfasst also nicht nur empirische Arbeiten, sondern bedient sich auch der geisteswissenschaftlichen Methoden der Hermeneutik, Geschichte, Mathematik und der Epistemologie. Dabei wird (trotz der gängigen Bezeichnung didaktische *Analyse*) nicht nur analysiert, denn es werden insbesondere auch neue Gegenstände geschaffen, also restrukturierend *konstruiert* […].
>
> Prediger (2015, S. 655 f.; Hervorhebung im Original)[18]

Mithilfe der inhaltlichen Kurzbeschreibung in Abschnitt 0.2.1 sowie der obigen methodologischen Einordnung lässt sich die weitere Verortung der vorliegenden Arbeit in den Rahmen wissenschaftlicher Tätigkeit in der Mathematikdidaktik nachvollziehen; GRIESELs (1971, S. 73 f.)[19] unten aufgeführte Unterscheidung von zehn Forschungsgebieten der Didaktik der Mathematik[20] erweist sich dabei als äußerst hilfreich. Anschließend folgt in Unterkapitel 0.3 eine Rahmung durch den engeren Kontext mathematikdidaktischer Prinzipien.

1. Analyse des mathematischen Gegenstandes, der mathematischen Tätigkeit und Anwendungssituationen der Mathematik
2. Entwicklung und Ausgestaltung didaktischer Ideen und Erfindungen, die ein mathematisches Gebiet besser oder für eine Altersstufe oder einen Adressatenkreis überhaupt erst zu behandeln gestatten

---

[18] PREDIGER (2015) verwendet hier ein breiteres Verständnis von *Analysieren* als Abb. 1, indem sie ebenfalls das restrukturierende Konstruieren darunter fasst. In Abb. 1 wird dieses losgelöst vom Analysieren durch das Adaptieren, Synthetisieren und Weiterentwickeln angesprochen.

[19] GRIESEL (1971, S. 72) selbst – wie einordnend angemerkt sei – ist „die eigentliche wissenschaftliche Untersuchung" für den Fortschritt in der Mathematikdidaktik wichtiger als die „wissenschaftstheoretische Reflexion über das Tun oder das, was man eigentlich tun sollte" und will Letzterer keine überhöhte Bedeutung beimessen. Dies ist auch durch das Einwirken der Neuen Mathematik auf die Mathematikdidaktik erklärbar, dem zahlreiche konkrete Fragestellungen entsprangen, deren Bearbeiten dringlicher erschien, war damit doch die Hoffnung verbunden, viele Probleme des Mathematiklernens zeitnah lösen zu können.

[20] Die bei PREDIGER (2015) explizierte Theoriebildung, der sich die vorliegende Arbeit verschreibt, ist bei GRIESEL (1971) nicht als eigener Punkt aufgeführt, sondern kann auf jedem dieser betrieben werden.

3. Formulierung, Herauspräparieren und Analyse von Zielen und Wertvorstellungen für die Stoffauswahl
4. Untersuchung von Fragen der Lernorganisation im Bereich der Mathematik
5. Die allgemeine, statistisch nicht abgesicherte Unterrichtserfahrung und Lernkontrolle
6. Die statistisch abgesicherte Lern- und Unterrichtskontrolle
7. Einsicht in den mathematischen Lernprozess und den Erwerb von Qualifikationen, die der Umgang mit der Mathematik und die Anwendung der Mathematik vom einzelnen Menschen verlangen
8. Untersuchung der Abhängigkeit des Mathematiklernens und der Vermittlung der Mathematik von personalen, entwicklungspsychologischen und soziologischen Bedingungen
9. Untersuchung des prägenden Einflusses, den die Beschäftigung mit Mathematik auf den Menschen ausübt
10. Historische, philosophische, pädagogische, psychologische und mathematische Einordnung von Entwicklungen, Wertvorstellungen, Grundkonzeptionen und Ideen im Bereich der Didaktik der Mathematik

Wie es laut GRIESEL (1971, S. 74) „in den wissenschaftlichen Arbeiten zur Didaktik der Mathematik“ üblich sei, berührt die vorliegende Arbeit mehrere der genannten Forschungsgebiete (2, 5, 7, 10): Die eigentliche Vertiefung der Theorie auch unter Einbeziehung von Einflüssen aus der Semiotik fällt unter den letztgenannten *Punkt 10*, ebenso wie die vorhergehende Diskussion diverser EIS-Prinzipien der letzten Jahrzehnte sowie das nachträgliche Analysieren von Vorläufertheorien und -ideen mithilfe der zuvor geschaffenen theoretischen Grundlage.

Diese theoretische Grundlage erlaubt zugleich die Zuordnung zu *Punkt 7*, denn dank der vertieften Theorie lassen sich sowohl übergeordnete, günstige semiotische Bedingungen beim Mathematiklernen aus Handlungen als auch konkrete Lernhürden in einzelnen Unterrichtsgängen mit der bereitgestellten Sprache identifizieren, beschreiben und konstruktiv angehen. Da dies in Kapitel 5 eigens praktiziert wird, ist die vorliegende Arbeit auch unter *Punkt 2* zu verorten. Dieses Praktizieren geht aus einem Prozess hervor, der die vorliegende Arbeit außerdem *Punkt 5* zugehören lässt: Einerseits fließen zahlreiche dokumentierte, nicht statistisch abgesicherte Lehrerfahrungen in die Vertiefung der Theorie ein, die die Basis für die Anwendungen bildet; OEHL und BREIDENBACH als zwei Vertreter wurden oben bereits hervorgehoben. Andererseits wurde die Anwendung der Leitsätze in vielen Punkten unmittelbar begleitet von einer (nicht ausschließlich) eigenen Pilotierung prinzipieller Wirksamkeitspotentiale in der Praxis sowie dem anschließenden gemeinsamen Austausch darüber, also von einem „statistisch nicht abgesicherte[n] Beobachten von Schülerverhalten“ sowie der nachträglichen Reflexion und Diskussion (Griesel 1971, S. 73)[21].

Auf die obige Zuordnung zu vier der wissenschaftlichen Tätigkeiten in der Mathematikdidaktik nach GRIESEL (1971) folgt nun die angekündigte Rahmung in den engeren Kontext mathematikdidaktischer Prinzipien.

0.3 (Mathematik-)Didaktische Prinzipien

Der wissenschaftliche Diskurs um mathematikdidaktische Prinzipien ist (wieder) aktuell und keineswegs abgeschlossen, wie HEITZER & WEIGAND (2020) bestätigen. Dabei stellen sich trotz der langen Tradition didaktischer Prinzipien stets auch grundlegende Fragen, die sich wie folgt fassen lassen:

- Was sind mathematikdidaktische Prinzipien?
- Welche sind es?
- Was bezwecken sie?

Hier soll nur ein kurzer Einblick in diese Diskussion gegeben werden mit Fokus auf die letztgenannte Frage, die die vorliegende Arbeit wesentlich beeinflusst – denn von den Zwecken didaktischer Prinzipien hängt ab, ob ein solches als viabel eingestuft wird.

Die erste Frage – Was sind (mathematik-)didaktische Prinzipien? – lässt zwei Lesarten zu: In einer ersten, allgemeinen Interpretation wird nach der Eigenart der Prinzipien gefragt, um diese logisch begriffsbildend zu charakterisieren. In dieser Hinsicht herrscht weitestgehend Einigkeit in der Mathematikdidaktik. Ein Überblick zu Antworten aus den letzten Jahrzehnten erzeugt sogar den Eindruck einer größtenteils abgeschlossenen Diskussion: Didaktische Prinzipien seien …[22]

- … gewisse allgemeine Regeln, „deren Berücksichtigung erfahrungsgemäß zu optimalen Lehrgängen führt“ (Griesel 1974, S. 117).
- … „*konstruktive* Regeln. Es folgt unmittelbar, daß didaktische Prinzipien *normativer*, *empirischer* oder gemischter Natur sein können, da in die

[21] GRIESEL (1971, S. 73) wertet diese Art der Beobachtung keineswegs ab. HANS FREUDENTHAL (1978), der sich übrigens auch gegen simplifizierende Beobachtungen von Lernprozessen mittels Prä- und Posttests ausspricht (ebd., S. 61), bekräftigt dies: „Man hat Gruppen von Kindern verschiedenen Alters miteinander verglichen, aber das ist keine Gelegenheit, Lernprozesse zu konstatieren. Man hat eine *feste* Gruppe zu zwei oder mehr Zeitpunkten untersucht und so den Lernprozeß des durchschnittlichen Kindes oder, wenn man so will, einer hundertköpfigen Bestie beobachtet. Man versuche es nun einmal mit den Lernprozessen individueller Menschen, um das Wesentliche in den Lernprozessen aufzuspüren: die Unstetigkeiten. Im durchschnittlichen Lernprozeß sind die Unstetigkeiten ausgewischt, in diesem verstetigten Geschehen ist alles Wesentliche verschwunden, aber erst mit dem Griff auf seine Unstetigkeiten werden wir Einsicht in den Lernprozeß erwerben“ (ebd., S. 161; Hervorhebungen im Original).

[22] Ebenfalls aufschlussreich ist die Beschreibung von Handlungsanweisungen, die *keine* Prinzipien sind, beispielsweise „praktische Tips für den Unterricht‘“ wie „Vermeide das Lehrer-Echo!‘“, aus denen keine weiteren Handlungsvorschriften gefolgert werden können (Winter 1984, S. 123).

Konstruktion von Unterrichtsvorlagen sowohl *Normen* als auch *Erfahrungen* eingebracht werden“ (Wittmann 1975, S. 227; Hervorhebung im Original[23]).[24]

- … „allgemeine, regelhafte Handlungsanweisungen für die Ausübung des Lehrerberufs“ im Sinne eines vorverdichteten didaktischen Wissens (Winter 1984, S. 116 bzw. S. 122). Bezugsquellen seien praktische Erfahrungen, „Mathematik, Psychologie, Erkenntnistheorie, Soziologie, allgemeine Pädagogik und Didaktik, Sprachwissenschaft usw.“ (ebd., S. 124).
- … verdichtetes, handlungsrelevantes Wissen für die Unterrichtspraxis, das möglichst praktikabel, allgemeingültig, unmissverständlich und gut begründet sein soll (Zech 2002, S. 114 f.) – „[d]ies sind allerdings teilweise widersprüchliche Anforderungen“ (ebd., S. 115).
- … orientierungsgebende Entscheidungshilfen beim Abwägen möglicher Konsequenzen, deren Beachtung das Lehren als zielgerichtetes Handeln und die Komplexität des Unterrichts unweigerlich erfordern. Sie „gründen in Normen, Zielen, Erfahrungen oder empirischen Befunden. Insofern sind sie auch begründbar“ (Hans-Joachim Vollrath & Jürgen Roth 2012, S. 115).
- … zunächst einmal ganz grundsätzliche Ideen darüber, wie Mathematik vermittelt werden kann“ bzw. ein Gerüst, das Entscheidungen erleichtern kann. „Sie sind von konkreten Inhalten mehr oder minder unabhängig, vom Fach selbst aber nicht. […] Sie beruhen auf theoretischen Überlegungen, die zum Teil mit dem Fach, zum Teil mit der kindlichen Entwicklung zu tun haben. Leider sind sie nur selten empirisch abgesichert und daher eher als [nur] erfahrungsbasiertes Wissen um guten Unterricht zu betrachten“ (Kristina Reiss & Christoph Hammer 2013, S. 64).
- … „theoretisch begründete Orientierungshilfe[n] für die didaktisch-methodische Gestaltung des Mathematikunterrichts“ bzw. „theoretische Grundsätze bzw. Grundpositionen einer Unterrichtstheorie. Sie sind entweder aus umfassenderen Lehr-Lern-Theorien abgeleitet worden (im Sinne der Anwendung derartiger Erkenntnisse auf den konkreten Unterricht) oder durch Verallgemeinern aus langer schulischer Unterrichtserfahrung oder methodischer Tradition entstanden“ (Käpnick 2014, S. 60, 46).
- … „Regeln für die Gestaltung und Beurteilung von Unterricht, die auf normativen Überlegungen einerseits sowie auf praktischen Unterrichtserfahrungen und empirischen Erkenntnissen andererseits

---

[23] Kursiv hervorgehobene Passagen des obigen Zitats sind im Original unterstrichen. Diese und weitere Hervorhebungen wurden in der vorliegenden Arbeit stets kursiv gesetzt, um das Schriftbild einheitlich zu halten.

[24] Das bei WITTMANN (1975) etwas undeutlich bleibende Zusammenspiel von präskriptivem und normativem Charakter expliziert WINTER (1984, S. 122 f.): Er unterscheidet in Anlehnung an KARL JOSEF KLAUER (1973) zwischen deskriptiven, normativen und präskriptiven Äußerungen und ordnet didaktische Prinzipien Letzteren zu. Allerdings können sie nur im Rahmen gewisser Zielvorstellungen verständlich sein; normative Entscheidungen prägen daher die Erfassung der Voraussetzungen didaktischer Prinzipien.

aufbauen. Sie beziehen Ergebnisse der psychologischen Lerntheorien ein und stellen Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis verdichtet und verkürzt dar“ (Heitzer & Weigand 2020, S. 2).

Um didaktische Prinzipien vor zu großer und dadurch schädlicher Autorität zu bewahren, sei noch ein kritischer Blickwinkel ergänzt: „Didaktische Prinzipien im Rahmen einer praktischen Unterrichtslehre haben den Status vorläufiger ungesicherter Hypothesen, stellen also recht grobe und breit streuende Geschütze dar“ (Dahlke 1981, S. 129).[25] Diese Auffassung motiviert zur Diskussion in Bezug auf die zweite Lesart der obigen Frage: Wird für einzelne Prinzipien ausgelotet, was diese denn seien, herrscht weit weniger Einigkeit als in den vorhergehenden allgemeinen Charakterisierungen. Dies wurde beispielsweise für das Prinzip der Naturgemäßheit eingangs angedeutet, wird für das Prinzip des entdeckenden Lernens von PAULINE LINKE (2020) untersucht, für das operative Prinzip in Abschnitt 6.1.2 und für das EIS-Prinzip in der Bestandsaufnahme in Kapitel 1 bzw. 2. Dennoch wäre ein stärkeres Ringen um lernförderliche Auffassungen[26] einzelner didaktischer Prinzipien gewiss begrüßenswert, darf es doch nie als abgeschlossen erachtet werden.

Die zweite Frage (Welche sind es?) wird ebenfalls uneinheitlich beantwortet. WINTER (1984, S. 120 f.) gibt mit der umfangreichen Auflistung WITTMANNs (1975)[27] – die auch dessen EIS-Prinzip enthält – „nur eine Teilmenge der in der Literatur aufgeführten“ Prinzipien wieder und ergänzt weitere, zu denen sich mittlerweile auch neue didaktische Prinzipien wie das „‚Prinzip der Orientierung an Grundvorstellungen‘“ oder das „‚Reflexionsprinzip‘“ hinzufügen ließen (Heitzer & Weigand 2020, S. 7). Bei WINTER (1984, S. 121) erzeugt diese Auflistung didaktischer Prinzipien den Eindruck „einer Vielgestaltigkeit, die Züge des Chaotischen trägt“. Die Vielgestaltigkeit ist einerseits mathematikdidaktischen Entwicklungen zuzuschreiben, liegt andererseits aber auch darin begründet, dass

---

[25] Aus diesem Grund seien u. a. die Quellen und Begründungszusammenhänge didaktischer Prinzipien herauszustellen, subjektive Interpretationsspielräume und Verfälschungen durch präzisierende Formulierung einzuengen und empirische Überprüfungen zu ermöglichen – all dies nimmt die vorliegende Arbeit in Angriff. Verzichtet wird allerdings auf die von DAHLKE (1981) darüber hinaus geforderte, statistisch abgesicherte empirische Überprüfung selbst. Trotzdem ist das vertiefte EIS-Prinzip nicht ungesichert, denn sein Bewähren in der Praxis lässt sich über mehr als 100 Jahre zurückverfolgen, wie im Folgenden immer wieder herausgestellt wird.

[26] Die Ziele beim Ringen um lernförderliche Auffassungen didaktischer Prinzipien sind dabei auf (mindestens) zwei Ebenen zu verorten: Einerseits soll eine Auffassung gefunden werden, die das schulische Lernen bestmöglich unterstützt, andererseits soll die Erlernbarkeit eines Prinzips durch Lehrpersonen verbessert werden. Die vorliegende Arbeit orientiert sich bei der Vertiefung der Theorie an beiden Anforderungen.

[27] „Ich selbst habe […] folgendes System didaktischer Prinzipien zusammengestellt […]: Genetisches Prinzip, Prinzip der Strukturorientierung, Spiralprinzip, Prinzip des vorwegnehmenden Lernens, Prinzip der Fortsetzbarkeit, Präfigurationsprinzip, Prinzip der Förderung des inter- (und intra-) modalen Transfer, Variationsprinzip (Kontrastprinzip - Mehrmodellmethode), Prinzip der Variation der Veranschaulichung, Prinzip der Schülerorientierung, Prinzip des aktiven Lernens (dynamisches Prinzip), Redundanzprinzip, Integrationsprinzip, Prinzip der Stabilisierung, Operatives Prinzip, Prinzip der Stufengemäßheit, Prinzip der Bedeutsamkeit, Prinzip der Beziehungshaltigkeit, Heuristisches Prinzip“ (Wittmann 1975, S. 226).

Auflistungen von Prinzipien selten einen Vollständigkeitsanspruch hegen, sondern eine relevanzbasierte, persönliche Auswahl darstellen. Dieser Auswahlprozess fußt auf dem Anlegen *eigener* Maßstäbe an *eigene* didaktische Prinzipien, die sich trotz Namensgleichheit inhaltlich unterscheiden können. Insofern sind abweichende Antworten auf die zweite Frage allzu naheliegend, was die analysierende und vergleichende Auseinandersetzung mit Systemen von didaktischen Prinzipien jedoch nicht obsolet werden lässt:

> Es ist kein Mangel, wenn sich die Systeme nicht annähern, wenn sie personen- oder schulengebunden sind, eine Konvergenz ist im Hinblick auf unterschiedliche normative Vorentscheidungen noch nicht einmal zu erwarten. Ein gravierender Vorwurf muß aber erhoben werden, wenn bereits entwickelte Gedanken schlicht ignoriert werden und wenn ein Modeprinzip das andere ablöst.
>
> Winter (1984, S. 128)

Die dritte Frage – nach den Zwecken didaktischer Prinzipien – ist von ausgezeichneter Relevanz für die Einschätzung von Viabilität. Diese Zwecke sind teilweise, aber nicht vollumfänglich bereits an den obigen Charakterisierungen ablesbar, werden aber auch expliziter ausgeführt: „Der Zweck didaktischer Prinzipien ist es […] – grob und vorläufig gesagt – das Unterrichten wissenschaftlich zu durchdringen und – damit im Zusammenhang – die Unterrichtspraxis zu verbessern“ (Winter 1984, S. 123).

> Indem solche Prinzipien ausgesprochen werden, wird einmal die äußerst hohe Komplexität des unterrichtlichen Geschehens reduziert (und damit überhaupt erst bewußt und kommunizierbar gemacht), und zum anderen werden hierdurch dem Lehrer Mittel in die Hand gegeben, Unterricht zu planen, zu kritisieren, zu verbessern.
>
> Winter (1984, S. 116)

Siehe zu den Zwecken beispielsweise auch GÜNTER KRAUTHAUSEN & PETRA SCHERER (2001)[28], ZECH (2002)[29], REISS & HAMMER (2013)[30], KÄPNICK (2014)[31],

[28] Prinzipien „spielen eine zentrale Rolle bei der Auswahl der zu thematisierenden Inhalte sowie für die Organisation und Durchführung des Unterrichts in allen Phasen […]. Sie versuchen, die in lernpsychologischen und erkenntnistheoretischen Theorien gewonnenen Erkenntnisse für das (Mathematik-)Lernen im Unterricht fruchtbar zu machen“ (Krauthausen & Scherer 2001, S. 122).
[29] Didaktische Prinzipien sollen „das sehr komplexe Unterrichtsgeschehen für den Praktiker einigermaßen überschaubar […] machen. Sie haben, wie Wittmann (1975) betont, eine wichtige Funktion als ‚konstruktive Regeln im Rahmen einer praktischen Unterrichtslehre‘“ (Zech 2002, S. 114).
[30] „Es geht um nicht mehr und nicht weniger als darum, Unterricht theoretisch zu reflektieren, begründete Entscheidungen zu treffen und ihn der Klassensituation entsprechend optimal zu gestalten“ (Reiss & Hammer 2013, S. 64).
[31] KÄPNICK (2014, S. 46) attestiert Prinzipien eine „allgemeine Orientierungsfunktion“ bezüglich der „Stoffauswahl und -gliederung“, der „Planung und Durchführung von Mathematikunterricht“ und der „Auswahl und Gestaltung von Übungs-, Aufgaben- und Beispielmaterialien“.

SCHERER & WEIGAND (2017)[32] oder HEITZER & WEIGAND (2020)[33]. Eine umfangreiche[34] Zusammenschau vieler dieser Einzelheiten stellt WITTMANNs (1975) nachstehende Auflistung dar, obwohl sie zeitlich vor den genannten Werken anzusiedeln ist – sicherlich hat sie einige dieser maßgeblich beeinflusst und passt daher als Übersicht. WITTMANN (1975, S. 231) will mit dieser Auflistung aufzeigen, dass didaktische Prinzipien „in verschiedener Hinsicht von großem praktischen Nutzen sind".[35] In der vorliegenden Arbeit hingegen dient sie als Grundlage bei der Beurteilung von Viabilität – wann immer diese zu begründen sein wird, wird auf Teile der folgenden Übersicht zurückgegriffen:

> [1.] Eine praktische Unterrichtslehre („didaktische Konzeption") läßt sich durch ein geeignetes System von didaktischen Prinzipien kurz und einprägsam charakterisieren. […]
> [2.] Didaktische Prinzipien erlauben eine ökonomische Erklärung und Beschreibung spezieller didaktischer Maßnahmen. […]
> [3.] Ein System didaktischer Prinzipien stellt einen handlichen Leitfaden für die Konstruktion von Unterrichtsvorlagen dar. […]
> [4.] Didaktische Prinzipien können eine didaktische Anreicherung von Unterrichtsvorlagen anregen. […]
> [5.] Didaktische Prinzipien erleichtern es der empirischen Forschung, Hypothesen zu finden, deren Untersuchung für die Praxis interessant ist.

Wittmann (1975, S. 231 ff.)

Ein einzelnes Prinzip kann zwar zu allen Punkten beitragen, sie aber nicht allein vollumfänglich bedienen, weil einigen (allen?) erst durch das Zusammenwirken mehrerer Prinzipien Genüge getan wird. Dementsprechend spricht WITTMANN (1975) beispielsweise im ersten Punkt von einem *System von didaktischen Prinzipien*. Darüber hinaus ist anzumerken, dass der vierte Punkt nicht missverstanden werden darf, als sollten didaktische Prinzipien „erfolgs-garantierende Richtlinien" sein, „deren womöglich blinde Anwendung durch

---

[32] „Didaktische Prinzipien müssen aber offen und jeweils situationsadäquat gesehen werden, sie können eine Orientierung für Lehrende darstellen, Unterricht bzw. Unterrichtsschritte zu planen, zu bewerten, zu diagnostizieren und zu analysieren" (Scherer & Weigand 2017, S. 40).

[33] „Mathematikdidaktische Prinzipien […] geben Orientierung bei der lokalen und globalen Unterrichtsentwicklung, sie strukturieren das Sprechen über Unterricht und sie charakterisieren dessen grundsätzliche Ausrichtungen" (Heitzer & Weigand 2020, S. 5).

[34] Die Zusammenstellung ist zwar umfangreich, aber keine vollumfassende Wiedergabe von in der mathematikdidaktischen Literatur anzutreffenden Zwecken didaktischer Prinzipien. Zusätzliche Zwecke sind allerdings eher durch speziellere Perspektiven motiviert: GERT SCHUBRING (1981, S. 4) nutzt didaktische Prinzipien – nicht historiographisch, sondern historisch orientiert –, um „an ihrer Geschichte […] die Entwicklung der Theorie wie ihre Wechselbeziehungen mit sozialen Momenten und Veränderungen in der Praxis" aufzudecken, während sie für VOLLRATH & ROTH (2012, S. 116; Hervorhebung im Original) u. a. „für den *Bestand* von Unterrichtstraditionen" sorgen.

[35] WITTMANN (1975, S. 231) beschränkt sich hierbei auf den Nutzen didaktischer Prinzipien „bei der Arbeit in der Didaktik und der Lehrerausbildung". Daher expliziert er weniger deutlich als beispielsweise WINTER (1984, S. 116) den Bezug zur Unterrichtspraxis. Mit Ausnahme des letztgenannten Punktes lässt WITTMANNs (1975) Auflistung jedoch stets unmittelbare Bewandtnis auch für die Praxis des Mathematikunterrichts erkennen.

beliebig kompetente Lehrer automatisch zu einem hochwertigen Unterricht führt“ – dagegen verwehrte sich bereits DIESTERWEG (Winter 1984, S. 120).[36]

Ehe vor dem Hintergrund der obigen Zwecke didaktischer Prinzipien zu einzelnen EIS-Prinzipien vorgedrungen wird, ist eine Erläuterung der im Folgenden benutzten Terminologie zur Begriffsbildung angebracht, indem kurz das semiotische Dreiecksprisma nach REMBOWSKI (2015) referiert wird. Diese Terminologie fand oben bereits Einsatz und hätte weitere sprachliche Präzisierungen herbeiführen können, beispielsweise bezüglich der als Aufhänger dienenden Mehrdeutigkeit des *Prinzips der Naturgemäßheit* oder PREDIGERs (2015) abweichender Auffassung des *Analysierens* – zwei Beispiele von Triangulationsbrüchen, bei denen *einem* Bezeichner *unterschiedliche* Begriffe zugewiesen werden.

0.4 Das semiotische Dreiecksprisma

REMBOWSKI (2015) verwendet im Kontext der Geometriedidaktik das in Abb. 3 links dargestellte semiotische Dreieck, dessen Grundstruktur sich in der Mathematikdidaktik bewährt hat (vgl. etwa Rainer Bromme & Heinz Steinbring 1990, S. 160 sowie Lambert 2003) und in zahlreichen älteren, semiotischen Arbeiten wurzelt (siehe Eco 1977, S. 30 für eine Übersicht dieser).

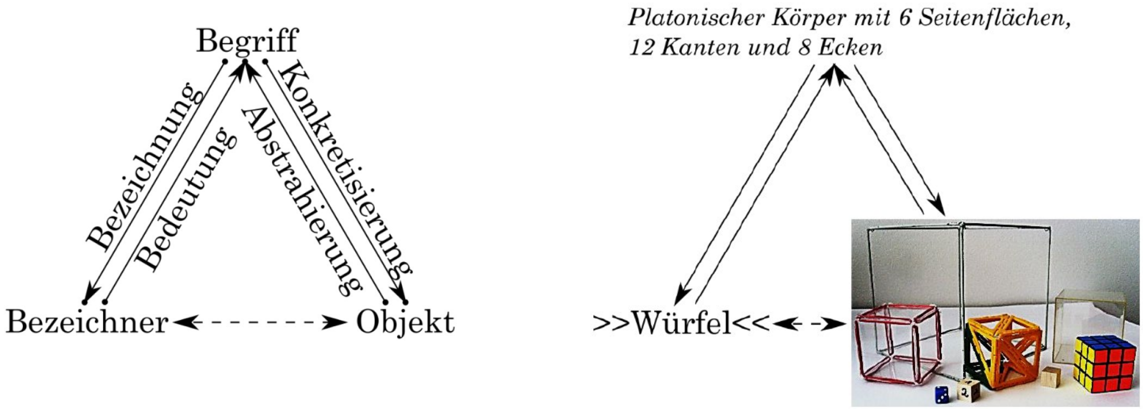


Abb. 3: Semiotische Dreiecke bei REMBOWSKI (2015, S. 16 bzw. 25)

Ein *Begriff* ist „gegeben durch seinen Begriffsinhalt oder -umfang“. Der *Bezeichner* hingegen bildet den Begriffsnamen oder das Begriffswort, beispielsweise »Würfel«[37] (Rembowski 2015, S. 13): »Würfel« steht für einen Begriff, z. B. einen

[36] Ergänzend seien analoge Klarstellungen aus jüngeren Jahren angeführt: Didaktische Prinzipien „auf ganz bestimmte Situationen anzuwenden, ist mehr eine Kunst als eine Wissenschaft” und verlangt von einer Lehrperson „beträchtliches berufliches Urteilsvermögen“ (Ausubel, Novak & Hanesian 1980, S. 29 bzw. S. 28) sowie „mathematisches, pädagogisches, psychologisches, – gelegentlich auch – historisches Wissen, es erfordert eine umfassende didaktische Bildung, um die Prinzipien zieladäquat einsetzen zu können“ (Scherer & Weigand 2017, S. 41). Didaktische Prinzipien sind „nicht ausschließlich mechanisch-algorithmisch, sondern immer auch inhaltlich einfühlend“ zu verstehen (Winter 2016, S. 90; Original von 1989).

[37] Bezeichner werden im Folgenden und wurden oben oftmals in die hier verwendeten, umgekehrten französischen Anführungszeichen gesetzt, um Missverständnisse zu vermeiden.

platonischen Körper mit sechs Seitenflächen, zwölf Kanten und acht Ecken. Hier war der Bezeichner gegeben und ein Begriff wurde ihm zugeordnet – dieser Prozess heißt *Bedeutung*. Ist umgekehrt ein Begriff gegeben, dem ein Bezeichner zugeordnet wird, spricht REMBOWSKI (2015) von *Bezeichnung*. Soeben haben also zwei Bezeichnungen stattgefunden: Unterschiedlichen Begriffen wurden die Bezeichner »Bedeutung« bzw. »Bezeichnung« zugeordnet.

Ein Begriff kann in *Objekten konkretisiert* bzw. aus Objekten *abstrahiert* werden, von denen Abb. 3 eine Auswahl zeigt. Dabei seien Objekte „als Entitäten möglicherweise auch abstrakter Natur"; sie repräsentieren „den Begriff in (s)einem Anwendungskontext" (ebd., S. 13).

Ein Bezeichner steht somit in vermittelter Verbindung zu einem Objekt: Durch einen vom Subjekt zu leistenden Interpretationsakt wird dem Bezeichner ein Begriff zugewiesen und der Begriff in einem Objekt konkretisiert. Dieses Zusammenspiel ist jedoch weitaus weniger eindeutig, als diese Beschreibung es nahelegt: Ein Bezeichner könne unterschiedliche Begriffe bedeuten[38]; und umgekehrt könne ein Begriff mit unterschiedlichen Bezeichnern bezeichnet werden[39]. Aus einem Objekt können unterschiedliche Begriffe abstrahiert werden[40]; und umgekehrt könne ein Begriff in unterschiedlichen Objekten konkretisiert werden[41]. All diese sogenannten *Triangulationsbrüche* können sich überlagern und in einem *semiotischen Dreiecksprisma* zusammengefasst werden, das REMBOWSKI (2015, S. 22) als »Begriffsfeld« bezeichnet (Abb. 4).

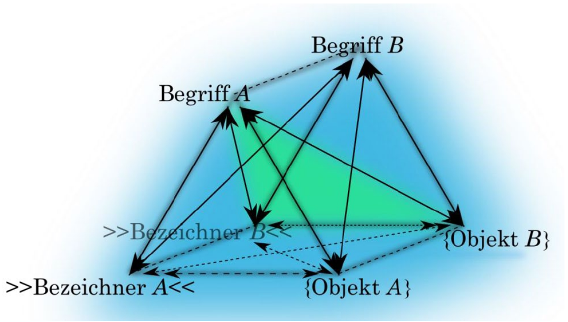


Abb. 4: Semiotisches Dreiecksprima mit Begriffsbild und Begriffskonvention bei REMBOWSKI (2015, S. 120)

Abb. 4 deutet durch die Einfärbungen die letzten beiden Bezeichner an, die einer Bedeutung bedürfen: »Begriffsbild« und »Begriffskonvention«.

---

[38] »Würfel« kann z. B. einen platonischen Körper, ein Spielinstrument, einen Zufallsgenerator oder ein Sitzmöbelstück bedeuten (Rembowski 2015, S. 31).

[39] Der Begriff *platonischer Körper mit sechs Seitenflächen, zwölf Kanten und acht Ecken* kann z. B. als »Würfel«, »Kubus« oder »regelmäßiger Hexaeder« bezeichnet werden (Rembowski 2015, S. 28).

[40] Spielwürfel können z. B. zum alltäglichen Begriff *Spielinstrument mit sechs Seiten*, zum stochastischen Begriff *Zufallsgenerator mit sechs möglichen, gleichwahrscheinlichen, stochastisch unabhängigen Ereignissen* oder zum elementargeometrischen Begriff *platonischer Körper mit sechs Seitenflächen, zwölf Kanten und acht Ecken* abstrahiert werden (Rembowski 2015, S. 28 f.).

[41] Der Begriff *platonischer Körper mit sechs Seitenflächen, zwölf Kanten und acht Ecken* kann z. B. in einem Kantenmodell aus Draht, in einem Holzblock oder in einem mit Stoff überzogenen Sitzmöbelstück konkretisiert werden (Rembowski 2015, S. 28).

> Das (blau dargestellte) Begriffsbild enthält neben Bezeichner, Objekt und dem dadurch bezeichneten beziehungsweise dazu abstrahierten Begriff auch ein durch Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck entstehendes persönliches Begriffsfeld, das Bestandteil eines allgemeinen, auf theoretischen Überlegungen beruhenden, Begriffsfeldes ist. Da im Begriffsbild allerdings nicht deutlich zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt unterschieden wird und auch die durch verschiedene Kontexte bestimmten semiotischen Dreiecke verschwimmen können, ist das Begriffsbild unscharf, wobei diese Unschärfe durch Rauschen visualisiert ist. Die (grün dargestellte) Begriffskonvention ist intersubjektiv und enthält eine ausformulierte Zuordnung des Begriffs zu Bezeichner und Objekt, sie lässt sich daher als mathematisch gewünschter Schnitt durch das Dreiecksprisma (und damit als ein spezielles semiotisches Dreieck) visualisieren.

Rembowski (2015, S. 119 f.)

0.5 Lesepfad für praktizierende Lehrpersonen

Die sequenzielle Anordnung der einzelnen Kapitel folgt einem inhaltlich-logischen Aufbau. Sie müssen jedoch nicht unbedingt der Reihe nach gelesen werden. Insbesondere praktizierende Lehrpersonen sehen sich im schulischen Alltag zahlreichen didaktischen Herausforderungen und begrenzten zeitlichen Kapazitäten ausgesetzt, sodass die Lektüre von 300 Seiten kein adäquates Mittel darstellt, um den Einsatz des eigenen EIS-Prinzips zu reflektieren. Stattdessen sei in dieser Situation empfohlen, bei ausgewählten Passagen zu beginnen und überspringend fort- und rückzuschreiten – beispielsweise wie folgt:

Sowohl das Hinterfragen der weit verbreiteten (und womöglich eigenen) Auffassung des EIS-Prinzips in Unterkapitel 3.2 als auch einzelne Anwendungen des vertieften EIS-Prinzips auf Unterrichtsgegenstände in Unterkapitel 5.1 und 5.2 stellen direkte Zugänge zur vorliegenden Arbeit dar. Im Anschluss an einen dieser bzw. an beide Zugänge bietet es sich an, mithilfe der *EIS-Palette* auf Seite 120 eine erste Zielvorstellung zu gewinnen in Form eines vagen Eindrucks der hier vorgesehenen Bedeutungen zu den Bezeichnern »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch«. Dieser noch vage Eindruck kann anschließend rückwärts blätternd mit weiteren Informationen ergänzt werden: In Unterkapitel 3.4 werden *objekthafte*, *entlehnte* und *kodifizierte* Zeichen eingeführt, während in Unterkapitel 3.6 die Darstellungsebenen *symbolisch*, *ikonisch* und *enaktiv* durch die zusätzliche Beachtung des subjektiven *Umgangs* mit den Zeichen erläutert werden. Schließlich können noch die aus der EIS-Palette abgeleiteten Leitsätze in Unterkapitel 4.2 bereichernd wirken, indem sie Einsicht in die Genese der anfangs erwähnten Anwendungen auf Unterrichtsgegenstände ermöglichen. In Kapitel 1, 2 und 6 kann je nach Interesse oder Neugierde zusätzlich hineingelesen werden – sie verzeihen es aber auch, übergangen zu werden.

1 enaktiv – ikonisch – symbolisch nach JEROME BRUNER: Zwei Gesichter einer Theorie

Kapitel 1 soll die Notwendigkeit einer inhaltlichen Klärung des EIS-Prinzips für den Mathematikunterricht begründen. Zu diesem Zweck wird zunächst herausgearbeitet, dass die Vorarbeit BRUNERs mehrdeutig ist: Aus denselben Werken lassen sich zwei unterschiedliche Interpretationen der Repräsentationsmodi[42] entnehmen, die dennoch für sich genommen eindeutig und vertretbar sind.

Unstimmigkeiten beim Umgang mit BRUNERs Vorlage sind keine Neuheit: Bereits ROLF BIEHLER (1985, S. 59 f.) skizziert eine „herkömmliche Auffassung“ und merkt an, dass es durchaus fraglich sei, „ob hiermit Bruners Position vollständig wiedergegeben wird“. THOMAS ROYAR (2013) bezeichnet einige Deutungen der Theorie als Fehlinterpretationen und postuliert somit gleichzeitig eine richtige Weise, von BRUNERs Gesagtem auf das von ihm Gemeinte zu schließen (vgl. Lambert 2012). Die Fehlerursachen lägen ROYAR (2013, S. 35 f.) zufolge zum einen in einer mangelnden Beachtung neuerer Werke BRUNERS, in denen dieser selbst einige Aussagen relativiert[43], vor allem aber in den methodischen Deutungsversuchen der Übersetzungen[44], die sich besonders beim Wort *representation* niederschlagen:

Die naheliegende Verwendung des deutschen Wortes *Repräsentation* lässt offen, ob es sich um eine interne Vorstellung oder um eine externe Darstellung handelt (vgl. VON GLASERFELD 1987 oder KOENO GRAVEMEIJER 1991)[45] – diese terminologische Unterscheidung verwendet bereits GOTTLOB FREGE (1962; Original von 1882), siehe dazu LAMBERT (2005a). Eine methodische Deutung findet

---

[42] Die Bezeichnerwahl bzgl. der Repräsentationsmodi ist in der vorliegenden Arbeit bewusst uneinheitlich: Kapitel 1 beschränkt sich auf den neutralen Bezeichner »Repräsentation« bzw. »Repräsentationsmodus«, während Kapitel 2 Alternativen nutzt, je nach aktuell beleuchtetem Begriffsbild. Der nach der Vertiefung der Theorie passende Bezeichner wird im restlichen Teil der Arbeit Verwendung finden; siehe Unterkapitel 3.7 für eine Reflexion dieser Wahl.

[43] Die mangelnde Beachtung bestätigt FALK SEEGER (1993, S. 5): „Daß auch Bruner selbst wohl mittlerweile die ursprüngliche Fassung seines Konzepts der Repräsentationsstufen nicht mehr aufrechterhält, ändert wohl nichts an ihrer Popularität und damit an ihrer Wirkung in Lehrbüchern und Lernmaterialien“.

[44] Das Übersetzen von BRUNERs englischsprachigen Werken wurde bereits im Kontext Fundamentaler Ideen als fehleranfällig und stellenweise irreführend identifiziert: Beispielsweise wird „der englische Begriff ‚idea‘ häufig mit dem deutschen Bezeichner ‚Begriff‘ übersetzt“, während an vorherigen Textstellen „noch die Übersetzung von ‚basic ideas‘ […] mit ‚basalen Ideen‘“ bewerkstelligt wurde (von der Bank 2016, S. 41). Durchgesetzt hat sich fast ausnahmslos der Bezeichner »Idee«, obwohl er durch die von FÜHRER (1997) herausgestellten Unterschiede im Begriffsumfang für „eine in fast allen Arbeiten nachweisbare, aber nur implizit bewusste Einengung des Begriffs der Fundamentalen Ideen“ verantwortlich ist (von der Bank 2016, S. 148).

[45] Diese Mehrdeutigkeit ist nicht erst im Übersetzungsprozess problematisch, sondern bereits in der englischen Sprache: Der Bezeichner »representation« „always has been used in the double sense of the ‚external‘ and ‚internal‘ means“, weshalb er zur Vermeidung von Missverständnissen in einigen Arbeiten durch den Bezeichner »inscription« ersetzt wurde (Anna Sfard & Kay McClain 2002, S. 155).

in dem Moment statt, in dem einer der beiden Bezeichner »Darstellung« oder »Vorstellung« als Übersetzung gewählt wird[46], und dies kann die ursprüngliche Intention verfälschen: Entspricht es tatsächlich BRUNERs (1971a, S. 27) Absicht, „Darstellungen als innerlich zu verstehen" und damit mit der tradierten Bedeutung von FREGE zu brechen? Im Original heißt es lediglich: „our eventual object is to view representations as internal" (Bruner 1967a, S. 6).

In Anbetracht dessen wird BRUNER bei der folgenden Darstellung zweier Deutungen in deutscher *und* in englischer Sprache zitiert – Letzteres in grauer Schriftfarbe, um ein überspringendes Lesen zu erleichtern, denn es sollen lediglich Original und Übersetzung im Kontext *angeboten* werden (zur Vermeidung eines einseitigen Eindrucks von den Übersetzungen auch dann, wenn sie für den Autor der vorliegenden Arbeit keine Auffälligkeiten aufweisen). In erster Linie werden ältere Werke BRUNERs herangezogen, weil diese – wie oben unter Verweis auf ROYAR (2013, S. 35 f.) und SEEGER (1993, S. 5) erwähnt – den größeren Einfluss ausüben konnten.[47] Natürlich wird es durch diese Einschränkung unmöglich, die Ursachen bestehender Missverständnisse zweifelsfrei offenzulegen – aber dies ist ohnehin nicht angedacht: Ob nun BRUNER selbst im englischsprachigen Originaltext zwei unterschiedliche Versionen derselben Sache präsentiert, ob diese erst aus Übersetzungen resultieren, ob zu den frühen Werken unbedingt die späteren gelesen werden müssten oder ob ein Vielerlei aus alldem ursächlich ist, soll nicht thematisiert werden. Überhaupt ist es fraglich, inwiefern eine solche Ursachenzuschreibung dem übergeordneten Ziel – der Klärung geeigneter Begrifflichkeiten zur Verbesserung von Unterrichtsqualität – dienlich wäre.

Bei alldem darf nicht vergessen werden, dass das Verstehen eines Textes stets ein eigenes Entwerfen ist.[48] Die folgenden Ausführungen verstehen sich daher an keiner Stelle als Herausarbeitung der eigentlichen, wahren Intention BRUNERs, weil sie bewusst zwei unterschiedlichen Sinnerwartungen entspringen. Es soll also lediglich davon überzeugt werden, dass BRUNERs Werke auf zwei gerechtfertigte, voneinander abweichende Arten interpretiert werden können – und dabei sollen möglichst überzeugend zu lesende Bilder gezeichnet werden.

---

[46] Im Sprachgebrauch vom REMBOWSKI (2015) resultiert ein Triangulationsbruch: Der Bezeichner »representation« wird in dem Sinne mehrdeutig, „dass ein Bezeichner […] verschiedene Begriffe bedeutet, die in verschiedenen Objekten konkretisiert gesehen werden, deren Repräsentanten also verschiedenen Anwendungskontexten zugehören" (Rembowski 2015, S. 22).

[47] Darüber hinaus weicht BRUNERs Haltung zu den drei auf Seite 20 formulierten Kernfragen in späteren Werken nicht grundsätzlich von den beiden Versionen in Unterkapitel 1.1 und 1.2 ab. Er zweifelt in erster Linie an der Stufenfolge der Repräsentationsmodi, aber erachtet es nach wie vor als sinnvoll, „to make a threefold distinction in modes of representation, although not on developmental grounds" (Bruner 1996, S. 155). Außerdem schätzt er die Bedeutsamkeit ikonischer Repräsentationen höher ein als zuvor – siehe dazu Unterabschnitt 2.1.2.2.

[48] „Wer einen Text verstehen will, vollzieht immer ein Entwerfen. Er wirft sich einen Sinn des Ganzen voraus, sobald sich ein erster Sinn im Text zeigt. Ein solcher zeigt sich wiederum nur, weil man den Text schon mit gewissen Erwartungen auf einen bestimmten Sinn hin liest" (Hans-Georg Gadamer 1960, S. 251).

Unten aufgelistet sind drei strukturgebende Kernfragen, die in Unterkapitel 1.1 und 1.2 widersprüchlich beantwortet werden:

- Wodurch zeichnet sich eine symbolische Repräsentation aus?
- Was grenzt die anderen beiden Repräsentationsmodi enaktiv und ikonisch davon ab?
- Welche Rückschlüsse ergeben sich für das Mathematiklernen?

1.1 Eine eindimensionale BRUNER-Rezeption

Zunächst seien die ersten beiden Fragen fokussiert: Welche Eigenschaften sind charakteristisch für eine symbolische Repräsentation und was grenzt die anderen beiden Repräsentationsmodi enaktiv und ikonisch davon ab?

BRUNER (1974) erachtet die Repräsentationsmodi als unterschiedliche Möglichkeiten, die einer Person bei der Übertragung ihrer Erfahrungen in ein Modell von der Welt zur Verfügung stehen. Dies geschehe

> [e]rstens durch *Handlung*. Wir kennen viele Dinge, für welche wir keine Bilder und keine Worte zur Verfügung haben, und sie lassen sich mittels Worten oder graphischen Darstellungen oder Bildern nur schwer jemand anderem beibringen. […] Wir haben uns daran gewöhnt, die erstgenannte Repräsentationsform als ‚enaktiv' zu bezeichnen […]. Enaktive Repräsentation beruht anscheinend auf einem Erlernen von Reaktionen (responses) oder von Angewohnheiten.

Bruner (1974, S. 16 f.; Hervorhebung im Original)[49]

> The first is through action. We know many things for which we have no imagery and no words, and they are very hard to teach to anybody by the use of either words or diagrams and pictures. […] We have come to talk about the first form of representation as *enactive* […]. Enactive representation is based, it seems, upon learning of responses and forms of habituation.

Bruner (1967c, S. 10 f.; Hervorhebung im Original)

Als Beispiel für diese erste Möglichkeit nennt BRUNER Tennisspielen, Skifahren, Fahrradfahren und Segeln.

Das zweite Repräsentationssystem hänge von der „*Organisation* unserer visuellen und anderer sinnlichen Wahrnehmung" ab und habe „mit der Verarbeitung von zusammenfassenden Bildern zu tun" (BRUNER 1974, S. 17; Hervorhebung im Original). „There is a second system of representation that depends upon visual or other sensory organization and upon the use of summarizing images" (Bruner 1967c, S. 10 f.) – erläutert am Beispiel eines Knotens:

---

[49] Auch hier zeigt sich der Einfluss der Übersetzungen: Der Bezeichner »Dinge« verweist vorwiegend auf materielle Gegenstände – anders als »Vielerlei« als alternative Übersetzung von *many things*.

> Unter bildhafter Darstellung verstehen wir das Bild des Knotens, seiner Endphase oder einer Zwischenphase oder sogar das Bewegungsbild des Knüpfens. […] Es ist ein selektives Analogon dessen, was es darstellt […]. Doch es ist nicht willkürlich.

Bruner (1971a, S. 27)[50]

> Representation in imagery is just that: the picture of the knot in question, its final phase or some intermediate phase, or, indeed, even a motion picture of the knot being formed. […] A picture is a selective analogue of what it stands for […]. Yet it is not arbitrary.

Bruner (1967a, S. 6f.)

Hiervon grenzt BRUNER schließlich eine Repräsentation in arbiträren[51], willkürlich gewählten Zeichen – also in Symbolen – ab: „Die Darstellung eines Knotens durch Symbole ist nicht so leicht denkbar, denn sie verlangt von vorneherein die Wahl eines symbolischen Kodes, in dem er geschrieben werden soll“ (Bruner 1971a, S. 27)[52] – „The representation of a knot in symbolic terms is not so readily stated, for it involves at the outset a choice of the code in which the knot is to be described“ (Bruner 1967a, S. 6 f.). Als bestehende symbolische Techniken, die für diesen dritten Repräsentationsmodus in Frage kommen, nennt BRUNER (1974, S. 24) die „Sprache in ihrer natürlichen Form und dann [die] künstlichen Sprachen von Zahlen und Logik“ – „language in its natural form, and then the artifical languages of number and logic“ (Bruner 1967c, S. 18f.). Das Stellvertreten ist dabei die Hauptaufgabe von Symbolischem: „Der Gedanke, daß Dinge Namen haben und daß der Name willkürlich ist, wird allgemein als Kern der Symbolfunktion betrachtet“ (Bruner 1971b, S. 56) – „The idea that there is a name that goes with things and that the name is arbitrary is generally taken as the essence of symbolism“ (Bruner 1967b, S. 31).

Verallgemeinert vom Beispiel des Knotens sind Symbole also

> willkürlich (wie *Hockett* es ausdrückt, gibt es keine Ähnlichkeit zwischen dem Symbol und der Sache […]) – sie sind in ihrer Bedeutung variabel und fast immer ergiebig oder fruchtbar in dem Sinne, daß eine Sprache oder irgendein Symbolsystem Regeln für die Bildung und Umformung von Sätzen hat, welche Sachverhalte umfrisieren können, mehr als dies durch Handlungen oder Bilder möglich wäre. Zum Beispiel erlaubt es uns eine Sprache, regelhafte

---

[50] Hier zeigt sich erneut der Einfluss der Übersetzung, die *representation* als *Darstellung* übersetzt.
[51] Synonym zu »arbiträr« wird gelegentlich (leichter missverständlich) »beliebig« verwendet. Zur Mehrdeutigkeit von »beliebig« und damit auch zur Bedeutung von »arbiträr« sei auf BENTELE & BYSTŘINA (1978, S. 33; Hervorhebung im Original) verwiesen: „»Beliebig« ist nicht in dem Sinn aufzufassen, daß jedes einzelne Subjekt die Verbindung von signifié [Bezeichnendem] und signifiant [Bezeichnetem] frei wählen kann, sondern in dem Sinn, daß das Verhältnis zwischen beiden beliebig oder »unmotiviert« ist; die Vorstellung von einem Stuhl hat mit der Lautfolge keine »natürliche« Verbindung. Die Verbindung beruht auf einer Konvention, einer »Kollektivgewohnheit«, wie *Saussure* sagt.“
[52] Das Beispiel des Knotens ist etwas irreführend, denn eine im obigen Sinne symbolische Darstellung ist in der Knotentheorie gang und gäbe (siehe z. B. Louis Hirsch Kauffman 1983).

> Transformationen von Sätzen vorzunehmen, die auf höchst überraschende Weise (neue) brauchbare Aussagen ergeben. Wir beobachten ein Ereignis und verschlüsseln es – *der Hund biss den Mann*.
>
> Bruner (1974, S. 17; Hervorhebung im Original)

> Symbols (words) are arbitrary (as Hockett puts it, there is no analogy between the symbol and the thing […]), they are remote in reference, and they are almost always highly productive or generative in the sense that a language or any symbol system has rules for the formation and transformation of sentences that can turn reality over on its beam end beyond what is possible through actions or images. A language, for example, permits us to introduce lawful syntactic transformations that make it easy and useful to approach declarative propositions about reality in a most striking way. We observe an event and encode it – the dog bit the man.
>
> Bruner (1967c, S. 11)

Der Übergang in diesen Repräsentationsmodus entspreche somit einer „Übersetzung von Handlung und Erfahrung in ihre symbolische, stellvertretende Form […] durch diese Anwendung der symbolischen Verschlüsselung dessen, ‚was man weiß'" (Bruner 1971b, S. 91): „It is precisely in this application of symbolic recording of ‚what one knows' that the process of translating action and experience into its symbolic, vicarious forms occurs" (Bruner 1967b, S. 63). Daraus entspringen „Darbietungsformen […], die frei waren von spezifischen Operationen und Bildern. Diese Form der Darstellung eines Begriffs ist nur mit symbolischen Zeichen möglich" (Bruner 1974, S. 68) – „means of representation that were free of particular manipulations and specific images. Only symbolic operations provide the means of representing an idea in this way" (Bruner 1967c, S. 65). Die symbolische Repräsentation erlaube dadurch „einen weiten Bereich von Gedankenexperimenten mit der Umwelt, ohne daß man sozusagen einen Finger zu Versuch und Irrtum zu heben oder vor dem geistigen Auge irgendein Vorstellungsbild erstehen zu lassen braucht" (Bruner 1971b, S. 62) – „experimental alternation of the environment without having, so to speak, to raise a finger by way of trial and error or to picture anything in the mind's eye by imagery" (Bruner 1967b, S. 37). Offensichtlich kommen Handlungen und Bilder damit nicht als Symbole in Frage. BRUNER zieht vielerorts ähnlich objektiv feststellbare, faktische Grenzen zwischen dem symbolischen Repräsentationsmodus und Handlungen bzw. Bildern:

- Oben wurde gefordert, dass Regeln für die Bildung und Umformung von Sätzen im Symbolsystem *existieren*, also von einer Gemeinschaft, die dasselbe Symbolsystem verwendet, als richtig erachtet werden. Ob eine ausgewählte Person diese Regeln erkennt und anwenden kann, spielt keine Rolle.
- Im Eingangszitat aus BRUNER (1967c, S. 11) wird die faktische Trennung an den unterschiedlichen Eigenschaften deutlich, die den Repräsentationsmodi zufallen: Symbole werden als ergiebiger und fruchtbarer als Bilder und

Handlungen beschrieben und besitzen „die Möglichkeit der Verdichtung“, die den anderen beiden Repräsentationsmodi fehle (Bruner 1974, S. 18).

- Weiterhin entspringt die besagte Trennung den Aufzählungen, die das Symbolische klar abgrenzend neben Handlungen und Bilder stellen: BRUNER (1971a, S. 27) zufolge kann „man etwas auf drei verschiedene Weisen kennen […]: dadurch, daß man es tut, dadurch, daß man es sich bildlich vorstellt, und dadurch, daß man ein symbolisches Mittel wie z. B. die Sprache verwendet“ – „we can talk of three ways in which somebody ‚knows‘ something: through doing it, through a picture or image of it, and through some such symbolic means of language“ (Bruner 1967a, S. 6). Ganz ähnlich formuliert er es an anderer Stelle (Bruner 1974, S. 49 bzw. Bruner 1967c, S. 44 f.).
- Zu guter Letzt bestätigen BRUNERs konkrete Beispiele zu den Repräsentationsmodi die Trennlinie, etwa beim Vergleich soziokultureller Faktoren beim Erlernen einer Kodierung:

  > Es muß aber deutlich gesagt werden, daß das Kind, wenn es in einem Eingeborenendorf von Senegal (Kap. XI und XIII), unter Eskimos (Kap. XIII) oder in einem ländlichen Mestizendorf in Mexiko (Kap. XII) aufwächst, diese Fähigkeit [des symbolischen Denkens] nie erreicht. Es verharrt vielmehr auf einem Niveau der Behandlung der Umwelt, das konkret-bildhaft ist und dem die symbolischen Strukturen fehlen […].
  >
  > Bruner (1971b, S. 72 f.)[53]

  > Let it be explicit, however, that if he is growing up in a native village of Senegal (Chapters 11 and 13), among native Eskimos (Chapter 13), or in a rural *mestizo* village in Mexico (Chapter 12) he may not achieve this „capacity“ [of thinking symbolically]. Instead, he may remain at a level of manipulation of the environment that is concretely ikonic and strikingly lacking in symbolic structures […].
  >
  > Bruner (1967b, S. 46; Hervorhebung im Original)

Zusammenfassend entscheiden die bei der Repräsentation eingesetzten Mittel über die Zuweisung zu einem der drei Repräsentationsmodi. Bezogen auf äußerliche Darstellungen statt innerliche Vorstellungen fiele die Zuweisung zu einem Repräsentationsmodus dementsprechend leicht, denn die eingesetzten

[53] Zwei Anmerkungen seien hier ergänzt: Erstens vertritt der (ethnologische) Strukturalismus, der sich zur damaligen Zeit in seiner Hochphase befand, ein weitaus breiteres Verständnis von Sprache, als BRUNER es hier impliziert – sonst wäre es kaum möglich, Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Sprachen zu untersuchen und als Indikatoren für Gemeinsamkeiten und Unterschiede in Kulturen zu verwenden. Auch in einem Eingeborenendorf von Senegal, unter Eskimos oder in einem ländlichen Mestizendorf in Mexiko verwendet eine Gemeinschaft ein geteiltes Symbolsystem – und jede dieser (ggf. auch vorwiegend nonverbalen) Sprachen besitzt symbolische Strukturen: „Strukturalisten gehen davon aus, daß jede Sprache a priori strukturiert ist. Die Struktur liegt bereits vor, sie muß nur erkannt werden“ (Hermann Amborn 1992, S. 340).
Zweitens soll nicht unerwähnt bleiben, dass sich BRUNER hinsichtlich der Erlangung der Fähigkeit des symbolischen Denkens im englischen Original sehr viel vorsichtiger ausdrückt als die deutsche Übersetzung.

Mittel sind eindeutig und objektiv feststellbar. Auch wenn Repräsentationen eher als innerlich zu begreifen seien, werde die Unterscheidung damit weitestgehend treffend charakterisiert: „Ein erster Zugang zum Verständnis der Unterscheidung dieser drei Medien kann dadurch erreicht werden, daß man ein jedes so betrachtet, als ob es äußerlich wäre“ (Bruner 1971a, S. 27) – „A first approach to understanding the distinction between the three [modes of representation] can be achieved by viewing each as if it were external“ (Bruner 1967a, S. 6):

- Enaktive Repräsentationen umfassen (vorgestellte) Handlungen.
- Ikonische Repräsentationen umfassen (innere) Bilder bzw. nicht willkürliche Analoga des Dargestellten.
- Symbolische Repräsentationen bedienen sich einer Kodierung bzw. Verschlüsselung; sie arbeiten mit arbiträren Zeichen – diesem Punkt wird die Interpretation in Unterkapitel 1.2 besonders deutlich widersprechen.

Der nun folgende zweite Abschnitt von Unterkapitel 1.1 widmet sich der dritten Frage: Welche Rückschlüsse ergeben sich aus dieser Auffassung für das Mathematiklernen?

Bisher waren die Repräsentationsmodi lediglich als Wege bezeichnet worden, auf denen ein Mensch Erfahrungen in ein Modell überträgt bzw. als „Mittel[…] der Informationsaufbereitung“ (Bruner 1974, S. 24) – deutlich abweichend vom Originaltext: „ways of processing information“ (Bruner 1967c, S. 19). Eine lineare Abfolge der drei Modi im Entwicklungsprozess oder die Übertragung auf einzelne (mathematische) Lernprozesse (erst konkretes Handeln, dann bildliches Darstellen, schließlich Verwendung formal-algebraischer Zeichen als präsenteste Vertreter symbolischer Repräsentationen in der Mathematik), geht damit nicht selbstverständlich einher. BRUNER (1974, S. 18) selbst schlägt jedoch genau diese Brücke von

- (erstens) *Wegen, Erfahrungen in ein Modell zu übertragen* über
- (zweitens) *die intellektuelle Entwicklung* bis hin zu
- (drittens) *Lernprozessen in der Mathematik*

und impliziert dabei eine stufenförmige Abfolge, die nachfolgende Zitate[54] noch weiter untermauern werden.

Zunächst von erstens zu zweitens: „Was die Entwicklung des Intellekts immer wieder so interessant macht, ist, daß sie dem Aufbau dieser drei Repräsentationssysteme zu folgen scheint, bis der Mensch imstande ist, alle drei zu beherrschen“– „What is abidingly interesting about the nature of intellectual development is that it seems to run the course of these three systems of representation until the human being is able to command all three“ (Bruner 1967c, S. 12). Anschließend von zweitens zu drittens:

---

[54] Siehe unter anderem BRUNER (1967b, S. 46) bzw. BRUNER (1967c, S. 49). An erstgenannter Stelle ist von einem „level of manipulation“ die Rede, an letztgenannter von „stages“.

> Beim Erlernen von Mathematik zeigt sich nach unserer Meinung ein Gutteil der allgemeinen intellektuellen Entwicklung. Sie beginnt mit ‚instrumentaler Aktivität', d.h. Dinge werden dadurch definiert, daß und wie man sie macht oder ausübt. Solche Operationen finden ihren Niederschlag und werden zusammengefaßt in der Form besonderer Bildvorstellungen. Schließlich kommt der Schüler, besonders mit Hilfe einer symbolischen Notation, die durch Transformationen im Bildlichen hindurch invariant bleibt, dazu, die formalen oder abstrakten Eigenschaften der Dinge, mit denen er umgeht, zu erfassen.

Bruner (1974, S. 70)[55]

> We would suggest that learning mathematics reflects a good deal about intellectual development. It begins with instrumental activity, a kind of definition of things by doing them. Such operations become represented and summarized in the form of particular images. Finally, and with the help of a symbolic notation that remains invariant across transformations in imagery, the learner comes to grasp the formal or abstract properties of the things he is dealing with.

Bruner (1967c, S. 68)

BRUNER drückt im letzten Satz dieses Zitates explizit aus, dass die arbiträre, symbolische Notation als erkenntnisträchtigste Repräsentation und letztes Glied einer Stufenfolge für mathematische Lernprozesse besonders geeignet sei, schließlich lassen sich ihm zufolge erst mit ihr abstrakte Eigenschaften der Dinge erfassen, begreifen und verstehen – je nach Übersetzung von *to grasp*. Dementsprechend erscheint es nur folgerichtig, wenn Mathematikunterricht möglichst frühzeitig zu arbiträren Zeichen vorzudringen versucht.[56]

Die ersten beiden Stufen seien dennoch relevant für den Mathematikunterricht, aber sie nehmen eine dienende Rolle ein: Ihnen obliegt das Bilden einer Grundlage, auf der echtes Mathematiktreiben in symbolischer Notation möglich wird:

> Wir kamen zu der Hypothese, daß es für das Kind, das Mathematik lernt, wahrscheinlich nötig ist, nicht nur die Abstraktion des Bereichs, den es gerade bearbeitet, sicher zu verstehen, sondern daß es auch ein Reservoir von Anschauungsbildern haben muß, um jene Abstraktionen mit Leben zu

[55] Die bereits mehrfach erwähnte Schwierigkeit, das Verb *to represent* zu übersetzen, zeigt sich hier auf ein Neues.

[56] Diese Vorstellung von einem sequenziellen Mathematiklernen wird durch die folgende Untersuchung bestätigt, von der BRUNER (1967c, S. 57) berichtet. Sie sei zwar kein typisches Abbild von Mathematikunterricht („[f]our children rarely have six teachers"), aber mache dennoch „the processes involved in mathematical learning" zugänglich: „Each child had available a series of graded problem cards which he could go through at his own pace. […] The problem sequences were designed to provide, first, an appreciation of mathematical ideas through concrete constructions involving materials of various kinds. From such constructions, the child was encouraged to form perceptual images of the mathematical idea in terms of the forms that had been constructed. The child was then further encouraged to develop or adopt a notation for describing his construction. After such cycle, a child moved on to the construction of a further embodiment" (ebd, S. 56 f.).

> erfüllen, denn ohne solche ist es schwierig, Beziehungen aufzuspüren, und zu überprüfen, was man eigentlich tut, wenn man mit Symbolen umgeht.
>
> Bruner (1974, S. 69)

> We reached the tentative conclusion that it was probably necessary for a child, learning mathematics, to have not only a firm sense of the abstraction underlying what he was working on, but also a good stock of visual images for embodying them. For without the latter it is difficult to track correspondences and to check what one is doing symbolically.
>
> Bruner (1967c, S. 66)

Eine sequenzielle Abfolge von enaktiv über ikonisch zu symbolisch sei daher empfehlenswert, obwohl ein Überspringen der ersten beiden Repräsentationsmodi für einige Lernende durchaus in Frage kommt:

> Wenn es richtig ist, daß normalerweise die geistige Entwicklung [beginnend beim Kleinkind!] von der enaktiven zur ikonischen und weiter zur symbolischen Darstellung der Welt verläuft, dann ist es wahrscheinlich, daß eine optimale Reihenfolge sich an diese psychologische Abfolge anschließt. Dies ist offensichtlich eine konservative Lehrmeinung; denn ein Schüler, der ein hochentwickeltes Symbolverständnis besitzt, mag wohl die ersten beiden Stufen ohne Schwierigkeiten überspringen. Dabei geht man allerdings das Risiko ein, daß der Schüler nicht die Vorstellungsgabe besitzt, auf die er zurückgreifen muß, wenn seine symbolischen Transformationen in einer Problemlöse-Situation nicht zum Ziel führen.
>
> Bruner (1974, S. 53)

> If it is true that the usual course of intellectual development moves from enactive through iconic to symbolic representation of the world, it is likely that an optimum sequence will progress in the same direction. Obviously, this is a conservative doctrine. For when the learner has a well-developed symbolic system, it may be possible to by-pass the first two stages. But one does so with the risk that the learner may not possess the imagery to fall back on when his symbolic transformations fail to achieve a goal in problem solving.
>
> Bruner (1967c, S. 49)

Insgesamt skizziert BRUNER somit die Idee von drei Repräsentationsmodi, welche an der Art der verwendeten Mittel faktisch zu unterscheiden sind und zwischen denen – nicht nur dadurch – eine objektiv feststellbare Grenze besteht. Neben den Modi selbst werden Übersetzungsprozessen in die (und von der) symbolische(n), stellvertretende(n) Repräsentation Beachtung geschenkt, die einem Ver- bzw. Entschlüsseln entsprechen. Die Repräsentation in willkürlich gewählten Zeichen – also in Symbolen – berge die größten Potentiale für einen Erkenntnisgewinn, zu deren Ausschöpfen die anderen beiden Repräsentationsmodi verhelfen sollen. All diese Kernpunkte sind hier abschließend auch deshalb hervorgehoben, weil ihnen im nachfolgenden Unterkapitel widersprochen wird.

1.2 Eine differenziertere BRUNER-Interpretation

Analog zum Aufbau von Unterkapitel 1.1 sei zunächst herausgestellt, welche Eigenschaften eine symbolische Repräsentation auszeichnen und von den übrigen beiden Repräsentationsmodi abgrenzen.

Für die Zuweisung zum symbolischen Repräsentationsmodus erachtet BRUNER *nicht* die objektiv unterscheidbare Art der verwendeten Mittel als ausschlaggebend – schließlich sei es möglich, sowohl Handlungen als auch Bilder dem symbolischen Modus zuzuordnen: „Das spezialisierteste ‚natürliche' System der symbolischen Aktivität ist natürlich die Sprache. Aber auch Bilder können […] Züge des symbolischen Funktionierens in sich aufnehmen. Dies kann sogar beim handelnden Verwenden von Werkzeugen geschehen" (Bruner 1971b, S. 55) – „The most specialized ‚natural' system of symbolic activity is, of course, language. But images […] can be infused with the properties of symbolic functioning, as can tool-using involving action" (Bruner 1967b, S. 30). Im Fall von symbolischen Handlungen liege eine „Darstellung in der Handlung" (Bruner 1971a, S. 31) vor bzw. eine „representation by action" (Bruner 1967a, S. 10). Ebenso können Bilder „Zustände, Handlungen oder – in symbolischer Weise – Beziehungen" darstellen (Bruner 1971a, S. 29) – „Pictures can also be used for representing states, actions, or in a ‚symbolized' way, relations" (Bruner 1967a, S. 8).

Arbiträre Zeichen – zum Beispiel formal-algebraische – sind dementsprechend nicht automatisch symbolisch in dem Sinne, dass sie Beziehungen repräsentieren, sondern zunächst bloß eine „Methode der Niederschrift" (Bruner 1974, S. 64). BRUNER (1974) erläutert dies am Beispiel quadratischer Gleichungen[57], welche ein Kind durch das Zusammenbauen von Holzklötzen (große Quadrate, Leisten und kleine Quadrate, vgl. Abb. 5) untersucht:

> Wir helfen ihm bei der sprachlichen Formulierung und zeigen ihm eine Methode der Niederschrift (notation): Das große Quadrat ist ein $x\square$, die langen Leisten sind 1x oder einfach x, und die kleinen Quadrate sind Einer-Quadrate, oder 1 mal 1, oder noch besser einfach 1. Und das Wort „und" kann abgekürzt werden als +. Auf diese Weise kann man die Anleitung für die Konstruktion eines Quadrats folgendermaßen schreiben: $x\square + 4x + 4$. In diesem Stadium sind das lediglich Namen, die in kleinen Sätzen zusammengefügt werden.
>
> Bruner (1974, S. 64)[58]

[57] Auf die Wiedergabe des Originaltextes (Bruner 1967c, S. 63 ff.) wird hierbei verzichtet, um den Lesefluss zu verbessern.

[58] Die Notation $x\square$ gegenüber x^2 wird in diesem Stadium bewusst von BRUNER bevorzugt.

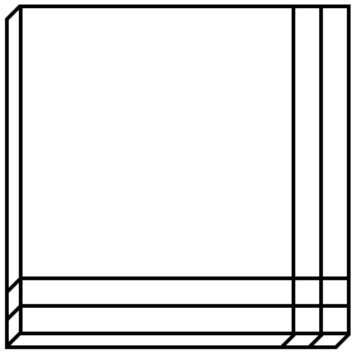


Abb. 5: Zusammengebaute Holzklötze nach BRUNER *(1974, S. 64)*[59]

Besonders dem Abschluss des Zitates ist Beachtung zu schenken, denn er untermauert das Vorherige: Formal-algebraische Zeichen (oder Worte, BRUNERs Paradebeispiel[60]) können genau wie Handlungen und Bilder nur in Abhängigkeit von einem Subjekt als Symbole identifiziert werden – müssen es aber nicht: Zunächst ist $x\square + 4x + 4$ *für das Kind* nur ein Name, der eine vorliegende Situation bezeichnet, aber keinerlei Sinn hat ohne diese: Das Kind kennt keine Regeln zur Transformation von $x\square + 4x + 4$. Hier wird in Abhängigkeit von einer Person das Symbol vom Zeichen unterschieden, wie BRUNER an anderer Stelle expliziert: „Einmal faßt das Kind Worte zuerst als Zeichen (signs) eher denn als Symbole auf, die an die Stelle eines vorliegenden Gegenstandes treten können […] und versteht das Wort eher als einen Aspekt der Sache“ (Bruner 1971b, S. 56).

> Es kommt nur ganz allmählich dazu, daß Wörter verwendet werden, die sich auf nichtgegenwärtige Sachen beziehen sollen, und es dauert noch viel länger, bis Wörter mit solchem entfernten Bezugsgegenstand durch den umgestaltenden Apparat der Grammatik so zurechtgemacht werden, daß sie mithelfen können, geistige Probleme […] zu lösen.
>
> Bruner (1974, S. 20)

Entsprechend im Originaltext: „For one thing, the child first learns words as signs rather than as symbols, standing for a thing present before him […] and conceives of the word rather as an aspect of one thing“ (Bruner 1967b, S. 31).

> It is only gradually that words are used to stand for objects not present, and it is a still longer time before such remote referring words are manipulated by the transformational apparatus of grammar in a manner designed to aid the solution of mental problems […].
>
> Bruner (1967c, S. 14)

---

[59] Flachere Elemente (etwa aus Papier oder Pappe) würden die Assoziation von Produkten mit Flächeninhalten erleichtern und weniger an die Untersuchung von Volumina erinnern.

[60] Die Sprache dient in vielen Ausführungen als *ein* Prototyp des symbolischen Modus, sodass getroffene Aussagen übergreifend zu verstehen sind – somit stehen *Worte* stellvertretend für die Elemente eines möglichen Zeichensystems: „In den folgenden Abschnitten mag es von Zeit zu Zeit scheinen, wir interessierten uns vor allem für die Sprachentwicklung. Wir möchten daher schon hier sagen, daß es uns um das Wesen jener protosymbolischen Tätigkeit geht, auf die sich die Sprache und alle anderen Formen der Symbolisierung stützen“ (Bruner 1971b, S. 55 f.)

Dieser umgestaltende Apparat der Grammatik war aber gerade eines der charakteristischen Merkmale symbolischer Repräsentationen (Bruner 1974, S. 17). In 1.1 genügte allein dessen subjektunabhängige Existenz, hier hingegen fordert BRUNER das Vorliegen dieses Apparats beim Individuum: „Wir […] stellen aber noch einmal fest, daß nicht die Sprache als solche die Erfahrung neu ordnet. Es handelt sich vielmehr um eine eigentliche Umstrukturierung unserer Art, wahrzunehmen“ (Bruner 1971b, S. 78 f.) – „it is *not* language *per se* that provides the reordering of experience. Rather, it is a genuine restructuring of how we perceive“ (Bruner 1967b, S. 52; Hervorhebung im Original). Dieser Überzeugung folgend pflichtet BRUNER (1971b) ausdrücklich EDWARD SAPIR (1921) bei: „So ist nur die äußere Form der Sprache unveränderlich; ihre innere Bedeutung, ihr psychischer Wert oder ihre Intensität variiert frei mit der Ausrichtung oder mit dem selektiven Interesse des Geistes, und natürlich auch mit dem allgemeinen Entwicklungszustand desselben“ (Sapir 1921, S. 14, zitiert nach Bruner 1971b, S. 77) – „*Thus the outward form only of language is constant; its inner meaning, its psychic value or intensity varies* freely with attention or the selevtive interest of the mind, also, needless to say, *with the mind's general development*.“ (Sapir 1921, S. 14, zitiert nach Bruner 1967b, S. 50; Hervorhebung im Original).

Hieraus lässt sich rückschließen, durch welche intersubjektiv variablen Eigenschaften eine Handlung, ein Bild oder ein arbiträres Zeichen zum Symbol wird: Die Person muss gewisse Regeln kognitiv konstruieren, die den beobachteten Transformationen der Zeichen zugrunde liegen und weitere Transformationen erlauben, sodass geistige Probleme gelöst werden können. Solche Regeln bilden den Symbolgehalt, den es zu erfassen gilt. Symbolgehalte dürfen dabei nicht nur auf das zuvor angeführte stellvertretende Dasein als Name für ein Ding beschränkt werden – dieses bezeichnet BRUNER (1970, S. 45) als zeitlich begrenzt: „Auf dieser sogenannten präoperationalen Stufe besteht die Symbolisierungsleistung des Kindes hauptsächlich darin, daß es lernt, die Außenwelt durch Symbole darzustellen“ – „In this so-called preoperational stage, the principal symbolic achievement is that the child learns how to represent the external world through symbols“ (Bruner 1969, S. 34). Wie bereits ausgeführt wurde, können auch komplexere Beziehungen durch Handlungen, Bilder und arbiträre Zeichen verkörpert werden, die dadurch für ein Subjekt symbolisch werden – exemplarisch deutlich an den quadratischen Gleichungen:

> Stellen Sie sich nun eine Liste wie die folgende vor, die wiederum das Ergebnis der eigenen Konstruktionstätigkeit des Kindes ist:
>
> x□ + 2x + 1 ist x + 1 mal x + 1
> x□ + 4x + 4 ist x + 2 mal x + 2
> x□ + 6x + 9 ist x + 3 mal x + 3
> x□ + 8x + 16 ist x + 4 mal x + 4
>
> Es ist beinahe unmöglich, daß das Kind an diesen Zahlen nicht bestimmte Entdeckungen macht: daß die x-Werte in der Reihe 2, 4, 6, 8, ansteigen, daß

> die Einer-Werte in der Reihe 1, 4, 9, 16 zunehmen, und daß die Dimensionen wachsen, wenn man zu x 1, 2, 3, 4 addiert. Neben Einsichten zur Syntax – der Regelmäßigkeit der Notation – stehen durch Wahrnehmung und Handhabung gewonnene Einsichten der materialen Unterlagen.
>
> Bruner (1974, S. 65)

Das genannte Kriterium für die Zuschreibung zum symbolischen Modus erläutert BRUNER leider[61] am häufigsten an seinem Paradebeispiel der Sprache, also an verschlüsselten Zeichen – so auch hier: „Kurzum, wenn wir einmal die Erfahrung in der Sprache verschlüsselt haben, dann können wir (tun es aber nicht notwendigerweise) eine zusätzliche Bedeutung in die Erfahrung hineinlesen, indem wir den in den Regeln der Sprache enthaltenen Implikationen folgen" (Bruner 1971b, S. 78) – „In essence, once we have coded experience in language, we can (but not necessarily *do*) read surplus meaning into the experience by pursuing the built-in implications of the rules of language" (Bruner 1967b, S. 51; Hervorhebung im Original). Dass aber dieser Prozess sowohl mit konkreten Handlungen, mit zusammenfassenden Bildern als auch mit Elementen jedes anderen Zeichensystems gelingen kann, wird immer wieder impliziert: Beispielsweise schreibt Bruner *jedem* Repräsentationsmodus einen Grad an Ökonomie zu, bei dem gerade das subjektive Erfassen eines Symbolgehalts im Fokus steht: „Ökonomie in der Darbietung eines Wissensbereichs bezieht sich auf die Informationsmenge, die gespeichert und verwertet werden muß, bis sich eine bestimmte Erkenntnis einstellt" (Bruner 1974, S. 49) – „Economy in representing a domain of knowledge relates to the amount of information that must be held in mind and processed to achieve comprehension" (Bruner 1967c, S. 45). An den quadratischen Gleichungen deutet BRUNER weiterhin an, dass auch in Handlungen mit haptischem Material eine Syntax erkannt werden kann:

> Nach einiger Zeit lernt das Kind neue Möglichkeiten des Umgangs mit dem Material kennen, die ihm die Grundlage für ein weiteres Eindringen in die Notation liefern. Es nimmt das Quadrat $(x + 2)^2$ und baut es in einer neuen Weise wieder zusammen. Es ist vielleicht fraglich, ob dies nur konstruktiver Umgang mit dem Material ist und ob es richtiges Faktorenrechnen ist. Aber das Kind lernt, daß man aus derselben Menge Klötze auffallend verschiedene Figuren bilden kann, und daß es doch dieselbe Menge bleibt, selbst wenn man auch eine verschiedene formelmäßige Schreibweise dafür hat. Wo beginnt hier die Sprache, wo endet der Umgang mit dem Material? Das Ineinanderspielen beider hört nicht auf.
>
> Bruner (1974, S. 65)

Welche Rückschlüsse ergeben sich nun für das Mathematiklernen? Zunächst sind zwei in ihrem Wesen unterschiedliche Übergänge relevant beim Erlernen von Mathematik aus Handlungen: Der Wechsel der verwendeten Mittel (von

---

[61] Bedauerlich ist dies insofern, als dass dadurch das Missverständnis provoziert wird, ausschließlich verschlüsselte Zeichen dem symbolischen Repräsentationsmodus zuzuordnen.

Handlungen über Abbilder dieser bis hin zu einem Kode, wobei Mischformen existieren wie etwa x□) sowie das subjektive Erfassen eines Symbolgehalts in allen diesen Repräsentationen, wodurch die Zeichen zu Symbolen werden.

Dies wertet enaktive und ikonische Repräsentationen auf, indem die Möglichkeit des Mathematiklernens im Sinne eines Erfassens von Mustern, Regeln, Beziehungen und deren Ursachen auch diesen Repräsentationsmodi attestiert wird. Sie sind daher nicht ausschließlich als Hinführung zu arbiträren Zeichen einzusetzen, sondern besitzen bereits für sich Bildungspotentiale für den Mathematikunterricht, die sogar ausgeschöpft werden *müssen*, wenn ein Kind grundlegende Begriffe lernen soll: „Es hat […] keinen Zweck, dies etwa mittels formaler Erklärungen zu versuchen, die in ihrer Logik der Denkweise des Kindes ganz fremd und in ihren Bedeutungen für das Kind steril sind“ (Bruner 1970, S. 49)[62] – „But it is futile to attempt this by presenting formal explanations based on a logic that is distant from the child’s manner of thinking and sterile in its implications for him“ (Bruner 1969, S. 38). Erst auf der Grundlage einer „familiarity that gives intuition something to work with“ sei es möglich, die Effizienz einer entarteten Notationsweise auszunutzen (Bruner 1969, S. 57):

> Nur wenn solche Grundbegriffe in einer formalisierten Ausdrucksweise, wie bei mathematischen Gleichungen oder sprachlich komplizierten Gedankengängen, vorgetragen werden, liegen sie außerhalb der Reichweite des jüngeren Kindes, wenn es nicht zuvor Gelegenheit hatte, sie intuitiv zu verstehen und selbst auszuprobieren.
>
> Bruner (1970, S. 26)

> It is only when such basic ideas are put in formalized terms as equations or elaborated verbal concepts that they are out of reach oft the young child, if he has not first understood them intuitively and had a chance to try them out on his own.
>
> Bruner (1969, S. 13)

Die Konsequenz aus alldem ist, dass allein eine abstrakte, verschlüsselte Notation nicht das zentrale Ziel von Mathematikunterricht sein darf – selbst sie kann bloß nutzloser Ballast sein. Stattdessen mündet ein Bewältigen beider Übergänge letztendlich in einer „symbolischen Notation“ bzw. „symbolic notation“ (Bruner 1974, S. 66 bzw. Bruner 1967c, S. 63). Dazu gehört

- einerseits eine gewisse Art des Aufschreibens – *notation* – und
- andererseits das subjektive Hineinsehen eines gewissen Symbolgehalts – *symbolic*.

Es lässt sich Bruner durchaus vorwerfen, dass er die Existenz der beiden andersartigen Ansprüche nicht ausreichend expliziert, sodass sich die

[62] Ganz in diesem Sinne schreibt schon Felix Klein (1908, S. 589; Hervorhebung im Original): „*Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, daß er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht springen.*“

Schlagwörter *symbolic notation* auch in das Verständnis von Unterkapitel 1.1 einfügen können. Dass er die beiden Ansprüche jedoch stellt, wird durch die unterstützenden Methoden beim Übergang zur symbolischen Notation unstrittig: Variation und Kontrast.

Bei Ersterem, der Variation, sollen Kinder durch Konfrontation mit äußerlich völlig verschiedenen konkreten Situationen, in denen jedoch ein und dieselbe neue Notation als hilfreich empfunden wird, einen Nutzen und Sinn in dieser sehen. „Man setzt der Verwendung dieser angenehmeren Sprache [dann] auch wenig Widerstand entgegen“ (Bruner 1974, S. 67) – „There is little resistance to using this more convient language“ (Bruner 1967c, S. 64). Variation soll also den Wechsel der eingesetzten Mittel unterstützen.

Bei Letzterem, dem Kontrast[63], wird Lernenden eine zweite Situation zu Bewusstsein gebracht, in der das zu entdeckende Muster gerade *nicht* vorliegt, um so auf dessen Existenz in der ursprünglich betrachteten Lernsituation aufmerksam zu machen. Kontrastierung zielt somit auf die Muster- und Regelerkennung ab:

> Die Entdeckung eines 8jährigen Mädchens zeigt dies schön. Ja, in Zahlen ist 4 × 6 ebensoviel wie 6 × 4 […]. Aber ein Hausarzt ist nicht dasselbe wie ein Arzthaus. Dadurch, daß man erkennt, daß in unserer gewöhnlichen Sprache die Vertauschbarkeit der Glieder meist nicht besteht, läßt sich die Austauschbarkeit der Glieder in der Formelsprache der Mathematik teilweise begreifen.

Bruner (1974, S. 67)

> A discovery by an eight-year-old girl illustrates the matter. „Yes, 4 × 6 equals 6 × 4 in numbers […]. But a venetian blind isn’t the same as a blind Venetian.“ By recognizing the noncommutative property of much of our ordinary language, the commutative property of a mathematical language can be partly grasped.

Bruner (1967c, S. 64)

Sowohl Variation als auch Kontrast sind für BRUNER (1974, S. 66 f.) unterstützende Maßnahmen zum Beherrschen einer symbolischen Notation – zwei unterschiedliche Übergänge sind demnach zu bewältigen, um dieses Ziel zu erreichen.

Neben dieser grundsätzlichen Auswirkung auf die Ziele von Mathematikunterricht deutet BRUNER potentielle Rückschlüsse aus der Theorie für konkrete Lernprozesse an: Es müssen – das entnimmt BRUNER (1971b, S. 81) LEV SEMËNOVIČ VYGOTSKIJ (1962) – „die Gehalte der Erfahrung so präpariert und organisiert werden […], daß sie den Erfordernissen einer Behandlung durch die

[63] Die Methode des Kontrasts erinnert deutlich an die Prototypentheorie, derzufolge Begriffe abgrenzend mithilfe von Beispielen und Gegenbeispielen gebildet werden – siehe etwa ELEANOR ROSCH (1983).

Sprache besser genügen und daß, wenn dies geschehen ist, die zusätzlichen Eigenschaften der Sprache auch ‚abgelesen werden können'" – „the contents of experience must be prepared and organized better to fit the requirements of being handled by language and that once this occurs there can also be a ‚reading off' of the surplus properties of the language" (Bruner 1967b, S. 54). Dazu müsse sich die Welt der Erfahrung auf ähnliche Weise strukturieren lassen wie die Sprache:

> Man kommt daher zur Überzeugung, daß das Kind, das die Sprache als ein Instrument des Denkens verwenden lernen wird, zuerst die Welt der Erfahrung unter die Kontrolle von Prinzipien der Organisation bringen muß, die in einem bestimmten Maße isomorph mit den strukturellen Prinzipien der Syntax ist.
>
> Bruner (1971b, S. 74)

> One is thus led to believe that, in order for the child to use language as an instrument of thought, he must first bring the world of experience under the control of principles of organization that are in some degree isomorphic with the structural principles of syntax.
>
> Bruner (1967b, S. 47)

Bedauerlicherweise leitet BRUNER hierzu keine ausführliche prototypische Begriffsbildung an, die das Gemeinte weiter präzisiert. Die angerissene Idee jedoch – für Lernzwecke ist die Erfahrungswelt bewusst zu gestalten – wird ein zentrales Element in der vorliegenden Arbeit bilden.

Eine Zusammenfassung über die Kernpunkte aus Unterkapitel 1.2 schält eine Vorstellung des Lernens heraus, in der zwei voneinander unabhängige Übergänge Beachtung finden müssen: Einerseits der Wechsel der Repräsentations*art*, andererseits das subjektive Erkennen und erfolgreiche Anwenden von Regeln in einer Repräsentation – egal ob Handlung, Bild oder arbiträres Zeichen. Insbesondere strebt der Mathematikunterricht somit nicht blindlings die Verwendung formal-algebraischer Zeichen an, sondern das Bewältigen *beider* Übergänge. Das Lernen in diesem Modell ist dementsprechend weder eindimensional und sequenziell noch ein Dreischritt aus konkretem Handeln, Bildern und Formeln: Das Erkennen der Regeln sollte Lernenden zunächst auch in enaktiven und ikonischen Repräsentationen ermöglicht werden – auch dadurch, dass diese bewusst gestaltet wurden – und kann gegebenenfalls anschließend auf arbiträre Zeichen übertragen werden.

1.3 Zwischenfazit zu BRUNERs Darstellungen der Theorie

Ein Resümee zu den ersten beiden Fragen (Was macht eine symbolische Repräsentation aus und was grenzt die anderen beiden Modi enaktiv und ikonisch davon ab?) kann nur widersprüchlich ausfallen, wenn es ausschließlich auf BRUNERs Vorarbeiten aufbaut und sich vorerst abschottet von Einflüssen späterer Mathematikdidaktik sowie dem eigenen Begriffsbild: Auf der einen Seite steht das objektiv feststellbare Kriterium der Verwendung verschlüsselter Zeichen, durch die eine Repräsentation symbolisch wird; auf der anderen Seite ein subjektives Sprachesein im Sinne des Erkennens und Anwendens von Regeln – unabhängig von der Gestalt der dabei verwendeten Zeichen.

Die Unsicherheit, die aus einer gründlichen Auseinandersetzung mit der BRUNERschen Theorie entsteht, zeichnet sich beispielsweise bei BIEHLER (1985) ab. Unter Verweis auf BRUNER (1971b, S. 62) vermag er über die Möglichkeit des Operierens als unterscheidendes Merkmal zwischen symbolischen und ikonischen Repräsentationen nur vorsichtige Vermutungen anzustellen: „Auch hierin *scheint* ein wesentlicher Unterschied zu ikonischen Darstellungen zu liegen, die man nur betrachtet, mit denen man nicht operiert, die man nicht verändert“ (Biehler 1985, S. 59 f.; Hervorhebung J. L.). Dieser durchaus berechtigte Rückschluss aus BRUNERs Vorlage führt schnell zu Widersprüchen, wenn angrenzende mathematikdidaktische Theorien hinzutreten: Operationen in der Tradition von JEAN PIAGET und HANS AEBLI sind nach WITTMANN (1985, S. 9) unverzichtbarer Teil des Erfassens *jeglicher* Objekte beim Mathematiklernen, „[d]aher erstreckt sich das operative Prinzip von materiellen oder konkret dargestellten Objekten über abstrakte Objekte, strukturierte Mengen bis herauf zu ‚Kategorien‘ von Strukturen.“ Sind all diese demnach Symbole, weil mit ihnen operiert wird? Was ist dann kein Symbol?

Auch Einordnungsversuche konkreter Beispiele in die Repräsentationsmodi, die BIEHLER (1985) zitiert und anschließend vorsichtig revidiert, zeugen von den Unklarheiten im Umgang mit BRUNERs Theorie:

> *In erster Näherung* ist man *u.U. geneigt*, Tabellen als symbolische Darstellungen aufzufassen, da es sich dabei um ein Arrangement von Zahlsymbolen handelt. Graphen, die Kurven oder ‚Punktwolken‘ darstellen, *scheinen* eher ikonisch zu sein, spielt doch bei ihrem Lesen die Wahrnehmung eine entscheidende Rolle.
>
> Biehler (1985, S. 60; Hervorhebung J. L.)

Weil aber bestimmte geometrische Beziehungen im zweidimensionalen Arrangement einer Tabelle einer inhaltlichen Beziehung entsprechen, liege strukturelle Ähnlichkeit zwischen der Repräsentation und dem Repräsentierten vor – „[m]an *könnte* in diesem Zusammenhang *vielleicht* auch vom ‚ikonischen Charakter‘ einer Tabelle sprechen“ (ebd., S. 61; Hervorhebung J. L.).

Es ist unvermeidbar, dass sich derartige Auffassungsunterschiede auch auf die dritte Frage nach den Rückschlüssen für das Mathematiklernen übertragen. Die Konsequenzen aus den unterschiedlichen Begriffsbildern zu Enaktivem, Ikonischem und Symbolischem zeigen sich jedoch nicht erst in der Anwendung auf Mathematikunterricht, sondern bereits in der direkten Wiedergabe des Niedergeschriebenen: „Für Bruner läuft die kognitive Entwicklung des Kindes in drei Stufen ab, die er als enaktive, ikonische und symbolische Ebene bezeichnet“

(Silke Hofmann 2002, S. 24). ROYAR (2013, S. 38) bezeichnet die Auffassung als Ebenen und die daraus resultierende Emporhebung des Symbolischen über die anderen Modi als Fehlinterpretation: „Selbiges hat Bruner nie behauptet.“ Derart abschließend und eindeutig lässt sich dies kaum entscheiden, wie bereits BIEHLER (1985, S. 59) andeutet: Auch er entnimmt BRUNERs Ausführungen zunächst die von HOFMANN (2002) implizierte „Auszeichnung der symbolischen Ebene als höchster Darstellungsform […], die entsprechend für das Lernen die größten Schwierigkeiten aufwirft“ – aber „[a]n anderen Stellen geht Bruner durchaus von unterschiedlichen eigenständigen Funktionen von ikonischer und symbolischer Repräsentation aus […]. Möglicherweise gibt es hier Widersprüche zwischen Bruner als Kognitionspsychologen und als Curriculumtheoretiker. (Diese Unterscheidung verdanke ich H.N. [Hans Niels] Jahnke.)“ (Biehler 1985, S. 78).

Ist die in der Unterrichtspraxis anzutreffende Faustregel, nach der einzelne (mathematische) Lernprozesse entlang der zuvor skizzierten Stufen (konkretes Handeln, bildliches Darstellen, Verwenden formal-algebraischer Zeichen) ablaufen, BRUNERs Vorstellung adäquat? Oder liegt hierin eine methodische Verkürzung, wie ROYAR (2013) behauptet (siehe Unterabschnitt 2.1.2.3)? Die Sicht aus Unterkapitel 1.1 legt Ersteres nahe – das in 1.2 wiedergegebene Beispiel zu quadratischen Gleichungen deutet jedoch auf Letzteres hin.

Eine redliche und anschlussfähige Folgerung aus alldem lautet, dass die Anwendung der BRUNERschen Trias auf mathematische Lernprozesse intensiver Reflexion der Ziele, Rahmenbedingungen und Begleittheorien von bzw. zu Mathematikunterricht bedarf. Bei einer kritischen Auseinandersetzung mit BRUNERs Arbeiten ergibt sich die Notwendigkeit einer solchen Reflexion auch schon unabhängig von allen Mehrdeutigkeiten, denn BRUNER gründet seine Theorie vor allem auf Forschungen mit Kleinkindern[64], hat sie nicht speziell für den Mathematikunterricht, sondern für *jedes* Lernen erdacht und scheint darüber hinaus ein einseitig geprägtes Bild von Mathematikunterricht zu vertreten, indem er *Mathematik* und *Mathe* auf bedenkliche Weise vermischt.[65] BRUNERs nachfolgende Erläuterungen zum bereits zitierten Beispiel quadratischer Gleichungen illustrieren dies:

> Nun erhebt sich das Problem, wie die Aufzeichnungsart, die das Kind gelernt hat, wieder abgelöst werden kann von den konkreten sichtbaren und faßbaren Körpern, auf die sie sich bezieht – von den Holzklötzen. Denn wenn sich das

[64] Aus diesem Grund warnt FREUDENTHAL (1983, S. 30) vor einer wie folgt beschriebenen, direkten Anwendung der BRUNERschen Trias auf jegliches Mathematiklernen in der Schule: „Bruner's schema can be useful. It has been taken over by others, and its domain of application has been extended, in particular towards the attainment of concepts in learning processes, where similar phases are distinguished“. Jedoch überschreite dies die Grenzen des Anwendungsgebietes der Theorie, unter anderem aus den hier genannten Gründen: „I intend to say that in learning-teaching situations, which are our main interest, Bruner's triad does not yield much. Bruner's domain of application is the psychology of the very young child, and in this period the phases can meaningfully be filled out“ (ebd., S. 31).

[65] Siehe LAMBERT (2020) zur Unterscheidung dieser beiden getrennten (Sub-)Systeme.

> Kind mit mathematischen Eigenschaften beschäftigen soll, so hat es doch mit Symbolen per se zu tun, sonst bleibt es auf den schmalen und ziemlich trivialen Bereich der Symbolik beschränkt, für den es eine direkte (wiewohl nur teilweise) anschauliche Grundlage gibt.
>
> Bruner (1974, S. 66)

Was BRUNER (1974) für Kinder anstrebt – die Verwendung eines Zeichensystems, dessen Elemente *keine* direkte anschauliche Grundlage besitzen – gilt in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht als folgenschwerer Mangel, da sich „das Begründen und Argumentieren […] auf Gegenstände oder Gedankendinge beziehen sollte, deren Bedeutung man kennt. Abstraktion soll man nicht aufdrängen. Die mathematisch geschulte Sprache des Lehrers verführt dazu, Bezeichnung mit Begriffen zu verwechseln" (Führer 1997, S. 98). Insbesondere missachtet das obige Zitat, dass die Beschäftigung mit mathematischen Eigenschaften nicht erst nach einer Abstraktion beginnt: „Eine deduktive Entwicklung läßt sich an dieser Stelle [auf haptischem Material basierend] sehr wohl durchführen, wenn man nur insofern auf eine strenge Grundlegung verzichtet, als die Sätze über Anordnung, Lage usw. der Raumgebilde rein der Anschauung entnommen werden" (Walther Lietzmann 1916, S. 184). BRUNERs Bild vom Mathematiktreiben und -lehren hingegen scheint vielmehr universitär geprägt. Die dortigen Veranstaltungen „richten sich [jedoch] vor allem an zukünftige Mathematikerinnen und Mathematiker; Mathematikunterricht dagegen ist in gesellschaftlich gewünscht institutionalisierter Absicht für alle da, also auch für die Menschen, die sich nicht freiwillig der Mathematik verschreiben" (Lambert 2020, S. 4). Damit gehen unterschiedliche Ansprüche an die Inhalte einher: „Den Mathematiker möge ein freischwebendes System der Mathematik interessieren – für den Nichtmathematiker sind die Beziehungen zur erlebten Wirklichkeit unvergleichlich wichtiger" (Freudenthal 1973, S. 77). Die logische Konsequenz daraus lautet: „In der Schule werden daher […] die verwendeten Argumente (inzwischen wieder) weitgehend von der Anschauung getragen, wohl wissend und bewusst in Kauf nehmend, dass diese Methode ihre Grenzen hat, die von der Mathematik im 19. Jahrhundert allmählich herausgearbeitet wurden" (Lambert 2020, S. 4).

Es wäre anmaßend, all dies als Schuldzuweisung oder Vorwurf an BRUNER auszurufen, schließlich war er kein Mathematikdidaktiker, sondern Psychologe – damit gehen unterschiedliche Erwartungen einher. Vielmehr muss die Quintessenz lauten, dass die Reflexion *nicht* nur innerhalb der Werke BRUNERs stattfinden darf, sondern Anforderungen und Rahmenbedingungen des Unterrichts und des Unterrichtsfaches einbeziehen muss, auf das die Theorie angewendet werden soll: „[D]er Lehrer ist *verpflichtet*, die Lehren der Psychologie kräftig zu nutzen. Nur sollte er sie niemals kritiklos hinnehmen", sondern „ihre Lehren kennen lernen, sie kritisch betrachten und verwerten, soweit sie ernster

Überlegung und eigener Erfahrung standhalten“ (Breidenbach 1956, S. 19; Hervorhebung im Original).

Dieses von BREIDENBACH geforderte *ernste Überlegen* erhält dadurch zusätzliche Bewandtnis, dass die „‚Repräsentationsmodi‘ *enaktiv*, *ikonisch*, *symbolisch* […], als Darstellungsweisen mathematischer Begriffe, eine wichtige Rolle in der heutigen Mathematikdidaktik“ spielen – doch „[d]er Didaktiker verwendet sie meist unreflektiert“ (Arnold Kirsch 1977b, S. 169; Hervorhebung im Original). Folgerichtig und wegweisend für das Nachfolgende postuliert KIRSCH (1977b, S. 169; Hervorhebung im Original) daher „demgegenüber als eine Aufgabe für die Didaktik, die Repräsentationsweisen mathematischer Begriffe *gezielt und systematisch* zu analysieren.“

> Diese Aufgabe – die der Psychologe nicht leisten kann und die den Mathematiker kaum interessiert, für die also der Fachdidaktiker zuständig ist – erfordert eine mathematik-spezifische Modifikation oder Differenzierung des Brunerschen Schemas E–I–S, nicht etwa nur die Einordnung der gängigen Repräsentationsweisen in dieses Schema.
>
> Kirsch (1977a, S. 97)

Wie weit ist dieser Prozess bereits fortgeschritten, seit KIRSCH ihn vor etwa 45 Jahren der Mathematikdidaktik zugeschrieben hat? Besteht überhaupt noch die Notwendigkeit weiterer Reflexion und Ausarbeitung? Das nachfolgende Kapitel soll hierüber aufklären:

Unterkapitel 2.1 trägt zunächst einige Wiedergaben und theoriebildende Adaptionen der BRUNERschen Trias für das Mathematiklernen zusammen und ordnet sie hinsichtlich ihrer neu gewonnenen Einsichten und Passung zu den Auffassungen aus Unterkapitel 1.1 und 1.2 ein. Anschließend untersucht Unterkapitel 2.2 den Einfluss der Reflexionen der Theorie auf die aktuelle mathematikdidaktische Diskussion: Welche Begriffsbilder zu enaktiv, ikonisch und symbolisch bzw. zum Lernen in diesem Modell herrschen heute weitestgehend vor – sowohl in der mathematikdidaktischen Literatur als auch in der Praxis des Unterrichtens? Dazu seien Ausschnitte praktischer Umsetzungen der BRUNERschen Trias analysiert und miteinander verglichen.

In zweierlei Hinsicht werden dabei Grundlagen für die weiteren Elemente der vorliegenden Arbeit geschaffen: Erstens unterstreicht und begründet Kapitel 2 den Bedarf einer Weiterentwicklung der Theorie vor dem Hintergrund von Zielen und Anforderungen von Mathematikunterricht – auch heute noch. Zweitens breitet es die bereits geleistete Vorarbeit aus, die den Ausgangspunkt für die Vertiefung der Theorie darstellt.

2 EIS-Prinzipien im Spiegel der Mathematikdidaktik

Kapitel 2 ermöglicht einen vergleichenden Überblick zum Umgang mit der Mehrdeutigkeit von BRUNERs Vorlage in den Jahrzehnten nach deren Publikation – vor allem in der Theorie des Mathematikunterrichts, aber ausschnittsweise auch in dessen Praxis. Die Leitfragen ähneln somit jenen aus Kapitel 1:

- Welche Begriffsbilder zu den Bezeichnern »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« konnten sich etablieren? Welche nicht?
- Welche Rückschlüsse wurden für das Mathematiklernen gezogen?

Dazu seien zunächst in Unterkapitel 2.1 allgemeine Wiedergaben, Interpretationen und theoriebildende Adaptionen der Trias für das Mathematiklernen herangezogen; anschließend folgen in Unterkapitel 2.2 konkrete Anwendungen der Theorie. Aus einem Vergleich beider Unterkapitel werden schließlich die zentralen Ziele der vorliegenden Arbeit abgeleitet.

2.1 Wiedergaben und Adaptionen der BRUNERschen Trias

Die zu Unterkapitel 2.1 gehörigen Abschnitte ziehen insgesamt 14 Beiträge als zentrale Anlaufstellen heran und verstehen sich daher nicht als Versuch, ein allumfassendes, präzises Bild vom Umgang mit der BRUNERschen Trias in der mathematikdidaktischen Literatur zu zeichnen – insbesondere Abschnitt 2.1.1 ließe sich mit zahlreichen weiteren Beiträgen anreichern, ohne aber die inhaltliche Bandbreite zu erweitern. Stattdessen sollen im Folgenden das gängigste EIS-Prinzip, dessen Herkunft und Modifikationen dieser Auffassung herausgearbeitet werden – Letzteres wiederum möglichst vollumfänglich, weil jede Modifikation potentiell hilfreiche Beiträge zur Vertiefung der Theorie beisteuert.

Eine erste Übersicht liefert Tabelle 1, wobei die Einordnung lediglich Tendenzen aufzeigt: So unterscheidet sich beispielsweise KIRSCH (1977a, 1977b) in der Auffassung der Repräsentationsmodi nicht wesentlich von den Beiträgen in Abschnitt 2.1.1, geht aber in anderer Hinsicht über eine Wiedergabe der BRUNER-Rezeption deutlich hinaus und findet sich daher in Abschnitt 2.1.2 wieder.

<table>
<tr><th colspan="2">Abschnitte</th><th>Beiträge</th><th>Einordnung</th></tr>
<tr><td rowspan="5">2.1.1</td><td>2.1.1.1</td><td>WITTMANN (1974)</td><td rowspan="5">geben die eindimensionale BRUNER-Rezeption weitestgehend getreu wieder</td></tr>
<tr><td>2.1.1.2</td><td>FRIEDRICH ZECH (2002)</td></tr>
<tr><td>2.1.1.3</td><td>JOSEF LAUTER (2005)</td></tr>
<tr><td>2.1.1.4</td><td>BARBARA SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015), HEITZER & WEIGAND (2020)</td></tr>
<tr><td>2.1.1.5</td><td>PETER BERGER (2017)</td></tr>
</table>

2.1.2	2.1.2.1	Kirsch (1977a, 1977b)	grenzen sich von der eindimensionalen Bruner-Rezeption ab oder passen sie deutlich an, unterscheiden sich aber dennoch von der differenzierteren Bruner-Interpretation
	2.1.2.2	Biehler (1985), Jahnke (1984)	
	2.1.2.3	Royar (2013)	
	2.1.2.4	Lambert (2012, 2020), Freudenthal (1983)	entwickeln Ideen, die der differenzierteren Bruner-Interpretation entsprechen

Tabelle 1: Übersicht und Einordnung zu Unterkapitel 2.1

2.1.1 Wiedergaben der eindimensionalen Bruner-Rezeption

2.1.1.1 Wittmanns (1974) EIS-Prinzip

Eine erste[66] und – in Anbetracht des frühen Zeitpunkts und der Popularität des Autors – sicherlich sehr einflussreiche Interpretation von Bruners Vorlage geht auf Wittmann (1974) zurück. Er spricht von „drei Arten, Wissen darzustellen bzw. zu erschließen: *enaktiv* (durch Handlungen), *ikonisch* (durch Bilder), *symbolisch* (durch Zeichen und Sprache)“ (ebd., S. 69; Hervorhebung im Original).

Eine enaktive Darstellung nutze konkrete (oder vorgestellte) Objekte sowie Handlungen mit diesen, wobei gerade Letztere „den fundamentalen mathematischen Begriffen der Mathematik“ zugrunde liegen (ebd., S. 62).

Ikonisches zeichne sich durch eine „strukturelle oder bildliche Ähnlichkeit mit dem Dargestellten“ aus, beispielsweise ☽ als ikonische Darstellung des Mondes (ebd., S. 69). Stilisierte oder schematisierte bildliche Darstellungen, „welche auf die Struktur des Mitzuteilenden zugeschnitten“ sind, hätten sich als besonders wertvoll erwiesen (ebd., S. 69).

Die symbolische Form sei die abstrakteste und leistungsfähigste; ihr „[w]esentliches Kennzeichen ist die Verwendung von Zeichen“ (ebd., S. 69). In Anbetracht der Weite des Zeichenbegriffs – vgl. Unterkapitel 3.3 – bedürfen diese Bedeutungen weiterer Ergänzungen bzw. einer prototypischen Begriffsbildung, die Wittmann zur Verdeutlichung des von ihm Gemeinten anfügt:

- Eine enaktive Darstellung der Bahn eines Geschosses sei die Demonstration im Experiment, ikonisch sei das Zeichnen der Bahn an der Tafel, symbolisch die Beschreibung der Bahn durch Funktionsgleichungen (ebd., S. 14).

[66] Es hätte auch mit Volker Hole (1973) begonnen werden können, dessen Ideen sich jedoch vollumfänglich in Unterabschnitt 2.1.1.2 widerspiegeln: So will Hole (1973, S. 73) „auf der symbolischen Ebene zwischen Sprache und Zeichen“ unterscheiden, führt beide sogenannten *Darstellungsebenen* in einer ganz ähnlichen Übersicht wie Abb. 8 neben *Handlung* und *Bild* auf (ebd., S. 74) und betont die Interaktionen zwischen allen Ebenen: Im mathematischen Lernprozess gehe es „nicht um ein lineares Aufsteigen von einer Darstellungsebene zur nächsten, sondern um ständig neu zu vollziehende Interaktionen zwischen allen Ebenen“ (ebd., S. 78).

- Für einen Gruppenhomomorphismus klafft laut WITTMANN (1974) an der Stelle der enaktiven Repräsentation eine Lücke, die in späteren Auflagen durch das Zahnradmodell von KIRSCH (1965) geschlossen wird (Wittmann 1981b, S. 19). Ein kommutatives Diagramm (Abb. 6) wird als ikonische Darstellung bezeichnet, während „$\varphi(x \circ y) = \varphi(x)\square\varphi(y)$ für alle $x, y \in G$“ als symbolische Darstellung eingeordnet wird (Wittmann 1974, S. 15).

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GxG} \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{G} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathrm{HxH} \arrow[r, "\square"] & \mathrm{H} \end{tikzcd}$$

Abb. 6: Gruppenhomomorphismus ikonisch dargestellt nach WITTMANN (1974, S. 15)

- Die Addition von Zahlen werde enaktiv durch „[k]onkretes Handeln an Material“ dargestellt, ikonisch beispielsweise durch Abb. 7 und symbolisch durch „2 + 3“ (ebd., S. 71).

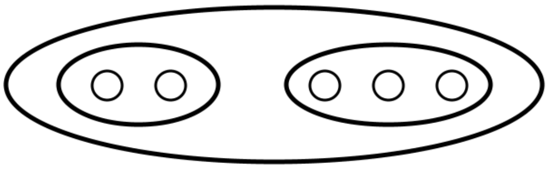


Abb. 7: Addition zweier Zahlen ikonisch dargestellt nach WITTMANN (1974, S. 71)

Allein diese drei Beispielen verdeutlichen, dass WITTMANN (1974) unter der symbolischen Form nur ausgewählte, objektiv abgrenzbare Zeichen fasst – allen voran die formal-algebraischen – und keine Handlungen oder Bilder integriert. Dementsprechend beschreibt er einen klaren „Gegensatz zu Bildern“ (ebd., S. 69): „Symbole [stellen] nichts dar, sondern können etwas *bedeuten*“ (ebd., S. 69; Hervorhebung im Original) – eine subjektunabhängige Eigenschaft. Es handelt sich also um arbiträre Zeichen, die anders als ikonische Formen gerade *keine* strukturelle oder bildliche Ähnlichkeit mit dem Dargestellten aufweisen.

Zweifelsohne interpretiert WITTMANN (1974) die Darlegungen von BRUNER damit analog zu Unterkapitel 1.1: Bei der Zuweisung zu einem Repräsentationsmodus sind ausschließlich die verwendeten Mittel entscheidend, während die intersubjektiv variable Erfassung des Symbolgehalts keine Rolle spielt. WITTMANN (1974, S. 69; Hervorhebung im Original) deutet diesen letztgenannten Faktor im Anschluss an das obige Zitat nur vage und in Klammern an, obwohl ein eklatanter Unterschied zwischen beiden Deutungen besteht: „Symbole […] können etwas *bedeuten* (bzw. bedeuten etwas).“ Die erste Teilaussage – *Symbole können etwas bedeuten* – entspricht einer subjekt*unabhängigen* Zuschreibung zum symbolischen Modus; die zweite Teilaussage – *Symbole bedeuten etwas* – deutet eine subjekt*abhängige* Zuschreibung an.

Von der Darstellung der BRUNERschen Trias in Unterkapitel 1.1 abweichende Modifikationen für den Mathematikunterricht sind nur vereinzelt zu finden, ergänzen das bisher Gesagte jedoch entscheidend:

> Für den Mathematikunterricht ist es von *allergrößter* Bedeutung, daß sich die symbolischen Begriffe und Beziehungen der Mathematik oftmals ikonisch und in einfachen Fällen auch enaktiv darstellen lassen, da die enaktive und ikonische Form gewöhnlich leichter verständlich sind und eine Anwendung des Spiralprinzips erlauben.
>
> Wittmann (1974, S. 14; Hervorhebung im Original)

In Unterkapitel 1.1 hieß es demgegenüber, dass der enaktive Modus vorrangig dann Einsatz finde, wenn „keine Bilder und keine Worte zur Verfügung“ stehen; als Beispiele waren dort Tennisspielen, Skifahren, Fahrradfahren und Segeln angegeben (Bruner 1974, S. 16 f.). Dennoch spricht WITTMANN hier nur von *einfachen* Fällen, in denen sich Begriffe und Beziehungen auch enaktiv darstellen lassen. BIEHLER (1985) wird genau diese Passage WITTMANNS in Unterabschnitt 2.1.2.2 daher kritisch hinterfragen, impliziere sie doch eine Abwertung ikonischer und enaktiver Darstellungen als pädagogische Hilfestellungen: „Man denke etwa an die Auffassung, daß ein Funktionsgraph lediglich eine ikonische Repräsentation des ‚eigentlichen‘ Graphen einer Funktion sei, nämlich der entsprechenden Teilmenge des kartesischen Produkts aus Definitions- und Wertemenge einer Funktion“ (Biehler 1985, S. 58).

Spätere Äußerungen und Unterrichtsvorschläge WITTMANNs (vorrangig als Anwendungen des operativen Prinzips deklariert) räumen dieses Missverständnis zweifellos aus und spiegeln eine breitere Auffassung zum Mathematiklernen wider: Begriffe und Beziehungen der Schulmathematik können oftmals sowohl handelnd, bildhaft als auch mithilfe von formal-algebraischen Darstellungen erschlossen oder aufgedeckt werden – vgl. hierzu etwa den Beweis des EULERschen Polyedersatzes in WITTMANN (1987, S. 270 ff.) oder die operativen Beweise in WITTMANN (1985) und WITTMANN (2014).

Aus dem oben skizzierten, theoretischen Rahmen leitet WITTMANN (1974) zwei Rückschlüsse für die Unterrichtspraxis ab: Das *Präfigurationsprinzip* und das *Prinzip der Förderung des intermodalen Transfers*.

Ersteres besagt, dass die enaktiven und ikonischen Wurzeln von Begriffen bzw. symbolischen Operationen für diese grundlegend und daher (vorrangig in der Grundschule) breit zu entwickeln seien. Ob auch später das Lernen „enaktiv eingeleitet und via ikonischem Modus in die symbolische Ebene zu übertragen ist“, hänge von den „symbolische[n] Vorkenntnissen“ ab (ebd., S. 73).

Letzteres verlangt die Förderung der „*Fähigkeit, einen Inhalt von einem Repräsentationsmodus in einen anderen zu übertragen*“ (Heinrich Bauersfeld 1972, S. 244, zitiert nach Wittmann 1974, S. 73; Hervorhebung im Original) bzw. späteren Ausgaben zufolge die Förderung der „*Fähigkeit, einen Inhalt von einer*

Darstellung in eine andere (des gleichen Modus oder eines verschiedenen Modus) zu übertragen“[67] (Wittmann 1981b, S. 91; Hervorhebung im Original). Beachtenswert ist hier der nicht explizit begründete Wechsel von »Repräsentation« zu »Darstellung«, der anfängliche Unsicherheiten im Umgang mit BRUNERs Vorlage zu bestätigen scheint.

Beide obigen Forderungen sind wenig revolutionär und ihr Zustandekommen ist keineswegs ausschließlich an BRUNERs Theorie gebunden[68], wodurch sich bereits jetzt die Legitimität von LAMBERTs (2019) Kritik erahnen lässt: Durch die vorwiegend äußerliche Unterscheidung der drei Repräsentationsmodi wird ein Großteil des Potentials der Theorie verspielt – siehe dazu Abschnitt 0.

Allem Anschein nach war WITTMANN selbst nicht vollends überzeugt vom Nutzen der auf diese Weise interpretierten Theorie für die Unterrichtspraxis, denn in den Folgejahren hat er bei der Ausarbeitung konkreter Vorschläge für den Mathematikunterricht das EIS-Prinzip weitestgehend ignoriert und sich dem operativen Prinzip zugewandt, welches vergleichbare Ideen beinhaltet (vgl. Abschnitt 6.1.2). Dennoch scheint WITTMANNs Wiedergabe die Mathematikdidaktik beim Umgang mit der BRUNERschen Trias entscheidend geprägt zu haben: Die soeben skizzierte Auffassung findet sich an zahlreichen Stellen der Literatur weitestgehend unverändert wieder, von denen in den nachfolgenden Unterabschnitten mit ZECH (2002), LAUTER (2005), SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015) sowie BERGER (2017) nur eine Auswahl herausgegriffen wird.

2.1.1.2 ZECHs (2002) EIS-Prinzip

ZECH (2002) ordnet BRUNERs Theorie der Darstellungsebenen als Modifikation von PIAGETs Stadientheorie ein. Hierdurch sei sie eng verwandt mit AEBLIs operativer Methode und PJOTR JAKOWLEWITSCH GALPERINs Theorie der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen – auf Letztere wird kurz in Kapitel 7 verwiesen, Erstere wird ausführlicher in Abschnitt 6.1.2 hinsichtlich Gemeinsamkeiten und Unterschieden zum EIS-Prinzip untersucht. In Abgrenzung zu den genannten Theorien vollziehe sich die Denkentwicklung bei BRUNER „nicht auf zeitlich abgestuften Denkniveaus, sondern gleichzeitig auf verschiedenen »Darstellungs-

[67] LAMBERT (2020, S. 7 ff.) nennt diese Wechsel *kodale Transformationen*, wobei *Kodalität* die Form einer Darstellung durch Zeichen beschreibt und anders als bei WITTMANN explizit unterschieden wird von *Modalität* – der Frage nach der Zuordnung zu einem Repräsentationsmodus. In Unterabschnitt 2.1.2.4 wird Modalität im Sinne von LAMBERT (2020) genauer erläutert.
[68] Dies wird besonders deutlich an Unterrichtsentwürfen *vor* BRUNERs Veröffentlichungen, die eben jene Rückschlüsse bereits beherzigen. Die vorliegende Arbeit wird immer wieder auf solche zurückkommen, beispielsweise in Unterabschnitt 4.1.2.6 mit KONRAD FALK, GUSTAV ROHRAUER & KARL WAIS (1926).

ebenen«, die in starker Wechselbeziehung zueinander stehen“ (Zech 2002, S. 104)[69]. Bei diesen Darstellungsebenen handle es sich

- um „die Erfassung von Sachverhalten durch eigene Handlungen (mit konkretem Material)“ – *enaktive Darstellungsebene* –,
- um „die Erfassung von Sachverhalten durch Bilder oder Graphiken“ – *ikonische Darstellungsebene* – und
- um „die Erfassung von Sachverhalten durch verbale Mitteilung oder im Zeichensystem (z.B. im mathematischen)“ – *symbolische Darstellungsebene* (ebd., S. 104). Dabei erscheine es zweckmäßig, „auf der symbolischen Ebene zwischen sprachlicher Formulierung und der Darstellung in mathematischen Zeichen zu unterscheiden“ (ebd., S. 106, vgl. Abb. 8).

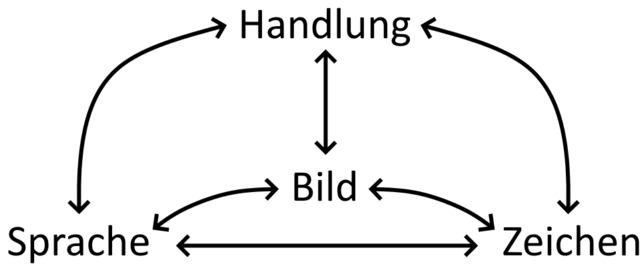


Abb. 8: Darstellungsübergänge nach ZECH (2002, S. 106)[70]

Nachdem Bilder und Graphiken bereits der ikonischen Ebene zugeordnet wurden, verwendet ZECH den Bezeichner »mathematisch« synonym zu »formal-algebraisch«, wodurch einem sehr einseitigen Bild von Mathematik Vorschub geleistet wird: LAMBERT (2019, o. S.; Hervorhebung im Original) nennt innerhalb der mathematischen Sprache „*drei Sprachformen*, neben der formal-algebraischen noch die konstruktiv-geometrische und die verbal-begriffliche“. Diese Einteilung geht zurück auf FELIX KLEIN und wurde von LEONE BURTON (1999) durch Interviews mit 70 forschenden Mathematikerinnen und Mathematikern bestätigt (Lambert 2003). Auch mit konstruktiv-geometrischen und verbal-begrifflichen Zeichen lässt sich also Mathematik treiben, lassen sich mathematische Erkenntnisse erlangen und kommunizieren, damals wie heute – siehe etwa MICHAEL STIFEL (1553) oder ROGER B. NELSEN (1993).

[69] Kurz darauf verwendet ZECH (2002, S. 106) zusätzlich den Bezeichner »Darstellungsweisen«, der eine andere implizite Begriffsbildung anregt als der Bezeichner »Darstellungsebenen« – vgl. dazu Unterkapitel 3.7.

[70] Auch hier findet sich mit der Unterscheidung zwischen Sprache, Bild und Zeichen LAMBERTs (2020) Kodalität wieder (vgl. Fußnote 67).

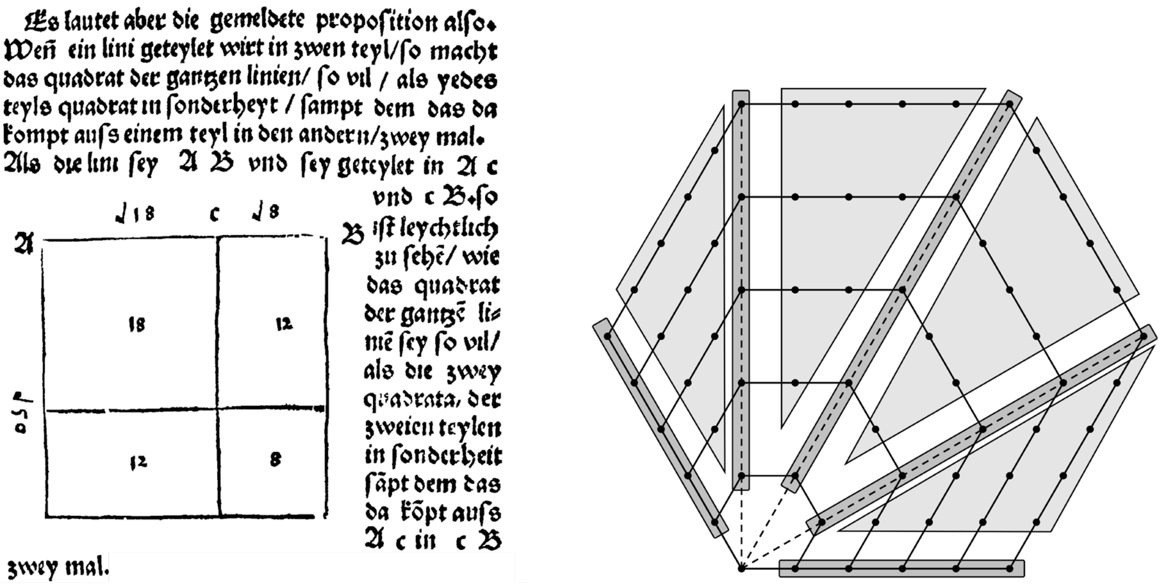


Abb. 9: Verbal-Begriffliches und Konstruktiv-Geometrisches (Stifel 1553, Blatt 92 bzw. Nelsen 1993, S. 23)[71]

ZECHs (2002, S. 107; Hervorhebung im Original) Rückschlüsse für die Unterrichtspraxis beziehen sich vorrangig auf die wechselseitigen Beziehungen und das wechselseitige Stützen der Darstellungsebenen: „*Im Sinne von Bruner kommt es darauf an, alle durch die Pfeile angedeuteten Übergänge zwischen den Darstellungsebenen zu pflegen*“, also sowohl von oben nach unten verlaufende Abstraktionen als auch die umgekehrt gerichteten Konkretisierungen in Abb. 8. Er ergänzt, dass nicht in jeder Situation alle Übergänge zu absolvieren seien, vielmehr soll das Schema „vielfältige Anregungen für intellektuell fördernde Aufgabenstellungen des Enaktivierens, Ikonisierens, Verbalisierens und Formalisierens geben“ (ebd., S. 107).

Rückblickend bewertet ZECH (2002) die operativen Prinzipien insgesamt als sehr vage formuliert, sodass sich daraus keine zwingenden, konkreten Folgerungen für den Unterricht ableiten lassen. Zumindest stiften sie ihm zufolge Anregungen, z. B. für Übungsaufgaben, und „können die didaktische Phantasie des Lehrers und gelegentlich auch die Kreativität der Schüler beflügeln“ (ebd., S. 123).

2.1.1.3 LAUTERs (2005) EIS-Prinzip

LAUTER (2005, S. 75) erachtet BRUNERs Theorie als das für die Praxis wohl wichtigste Prinzip und erläutert es im Rahmen der Arithmetik im Anfangsunterricht. Er wendet die Einteilung genau wie WITTMANN auf äußere Darstellungen an und wechselt dementsprechend vom Bezeichner »Repräsentationsform« in der Überschrift (ebd., S. 22) unmittelbar zu »Darstellungsform« im restlichen Text, ohne dies explizit zu begründen.

Enaktive Darstellungen werden durch reales Tun erzeugt, wobei „auch das didaktische Material (z. B. Cuisenaire-Stäbe, Steckwürfel usw.)“ dazugehöre (ebd.,

[71] Rechts abgebildet ist NELSENs (1993) Bestimmung der k-ten n-Eckszahl.

S. 76). Ikonisch sei eine Darstellung, die konkrete Handlungsabläufe abbildhaft „in mehr oder weniger schematisierter Form graphisch“ erfasst. Sie sei bereits abstrakter, wobei mögliche Ausprägungen „von einfachen kindgemäßen Situationsskizzen bis hin zu hochabstrakten Darstellungen wie Pfeilbilder oder Baumdiagramme“ reichen (ebd., S. 76). Die symbolische Form gehe auf das urmenschliche Verhalten zurück, Dinge mit Namen zu belegen, wobei die „prinzipiell willkürliche Wahl der (Sprach-)Symbole“ ein charakteristisches Merkmal sei (ebd., S. 23). So entstünden „vom Menschen geschaffene abstrakte Zeichensysteme […], etwa die formale Sprache der Arithmetik (Ziffern, Operationszeichen) und der Algebra (Variable, Operationszeichen), aber auch die Versprachlichung eines mathematischen Sachverhalts mit Hilfe der natürlichen Sprache“, die Kennzeichen symbolischer Darstellung sei (ebd., S. 78).

All diese Darstellungsformen „hängen natürlich zusammen, jedoch sind Kinder für die verschiedenen Darstellungen sehr unterschiedlich disponiert“ (ebd., S. 23). Auf Übergänge sei daher besonderer Wert zu legen, unter anderem solle „bei Wechsel der Darstellungsform auch die Sozialform gewechselt“ werden (ebd., S. 79). So erhalte die Unterrichtsstunde mit den drei Darstellungsformen enaktiv, ikonisch, symbolisch fast selbstverständlich „eine willkommene Gliederung“, die einem linearen Dreischritt entspricht. Diese Einteilung und deren Umsetzen im Unterricht erläutert LAUTER (2005) an mehreren Beispielen, aus denen lediglich die Erweiterung des Zahlenraums von 10 auf 20 hier zitiert sei:

> Die Lehrerin legt etwa den Kindern 17 Eier (dargestellt mit Steckwürfeln) vor, die die Kinder aber nicht zählen sollen. 10 werden in einer Eierschachtel verpackt, 7 bleiben übrig. Dieses Vorgehen wird mehrmals wiederholt. Als nächstes bündeln die Kinder zeichnerisch im Heft oder auf dem Arbeitsblatt, wobei eine Anzahl von Kringeln vorgegeben ist, und die Kinder sollen 10 davon umranden. Schließlich erfolgt dann an der Tafel die Erklärung der Notation im Stellenwertordner:

Z	E
1	7

Lauter (2005, S. 80)[72]

Das wesentliche Ziel bei alldem – das subjektive Aufdecken eines Zusammenhangs – wird im angeführten Beispiel genau wie in WITTMANNs Wiedergabe des EIS-Prinzips kaum beachtet. Gewiss ist sich LAUTER (2005) bewusst, dass „Manipulationen mit Klötzen allein […] noch keinen Lernprozeß in Gang“ bringen, wie es BENDER & SCHREIBER (1985, S. 261) formulieren, immerhin fordert er die Anpassung enaktiver Darstellungen an gewisse, zu verstehende mathematische Sachverhalte: „Das Problem, das sich dem Mathematiklehrer stellt, ist, an den mathematischen Sachverhalten orientierte und mit ihnen übereinstimmende

[72] BENCHARA BRANFORD (1913, S. 2) tritt dafür ein, „daß das Kind beim Betreten der Schule nicht die Empfindung habe dürfe, in eine unangenehme fremde Welt zu kommen, wo alles geheimnisvoll und gekünstelt ist“. Ob die Darstellung von Eiern mithilfe von Steckwürfeln dem zuträglich ist, sei dahingestellt.

enaktive Repräsentationsformen zu finden“ (Lauter 2005, S. 76). Sein EIS-Prinzip ignoriert diese Verstehensprozesse jedoch und bewirkt dadurch nicht viel mehr als eine Erinnerung daran, dass Einstiege über effektive Handlungen gelingen können, die vor dem Einführen formal-algebraischer Zeichen abbildhaft festgehalten werden. Ob damit allein die Notwendigkeit einer Theorie der Repräsentationsmodi begründet werden sollte, ist fraglich – schließlich war ein derartiges Vorgehen bereits vor über 200 Jahren gängige Praxis, beispielsweise bei BERNHARD HEINRICH OVERBERG (1793):

> [S]orget dafür, daß ihr immer eine Menge Dinge, die man zählen kann, bei der Hand habet, und nehmet damit eben dasselbe vor (oder lasset es von den Kindern thun), was sie im Kopfe oder an der Tafel thun sollen. Hierzu scheinen mir in einer Schule, wo mehrere Kinder zugleich unterrichtet werden müssen, die Stöckchen, Bündchen und Bunde etc. am brauchbarsten zu sein. […] Durch diese Stöckchen, Bündchen, Bunde etc. kann den Kindern beim Rechnen alles klar und deutlich vor Augen gelegt werden, was ihnen anfangs schwer zu fassen ist, z. B. a) was man unter Einser, Zehner, Hunderte, Tausende versteht, wovon den Kindern richtige und deutliche Begriffe so ungemein nöthig und nützlich sind, indem diese Begriffe nach ihrer verschiedenen Beschaffenheit entweder Licht oder Dunkelheit über die ganze Rechenkunst verbreiten. b) Wie das Addieren, Subtrahieren etc. müsse angegriffen werden.
>
> Overberg (1793, S. 560 f.)[73]

2.1.1.4 SCHMIDT-THIEMEs & WEIGANDs (2015) bzw. HEITZERs & WEIGANDs (2020) EIS-Prinzip

Der Umgang von SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015) mit BRUNERs Vorlage bzw. WITTMANNs Wiedergabe deckt sich zunächst weitgehend mit der soeben dargelegten Auffassung von LAUTER (2005) – in erster Linie bei der Charakterisierung der sogenannten Repräsentationsformen bzw. Repräsentationsarten. Lediglich das Verorten von Wendeplättchen als Teil der ikonischen Form ist eher untypisch:

> Medien lassen sich weiterhin nach ihrem *Zeichencharakter*, also der Form der Repräsentation des mathematischen Inhalts unterscheiden, wobei das „E-I-S-Prinzip“ nach J. Bruner immer noch als grundlegend angesehen werden kann […]. Die Art der Repräsentation, etwa einer Rechenoperation, als reale Situation auf der enaktiven Ebene, ikonisch in Form von Wendeplättchen oder symbolisch mit Zahlen und Rechenzeichen, bestimmt die möglichen Einsatzformen in Lehr-Lern-Situationen.
>
> Schmidt-Thieme & Weigand (2015, S. 463; Hervorhebung im Original)

Analog zu WITTMANNs Beispielen zum operativen Prinzip betonen SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015) stärker als LAUTER (2005) die Fokussierung auf das

[73] Zehn Stöckchen bilden, lose zusammengebunden, ein Bündchen, zehn Bündchen ein Bund usw. (Overberg 1793, S. 560).

Erlernen der Regeln für den Umgang mit den Zeichen als zentrales Ziel von Mathematikunterricht. Dies schlägt sich jedoch erneut nicht terminologisch in der BRUNERschen Trias nieder, sondern fristet ein Dasein als Zusatz: „Dabei müssen die Regeln für den Umgang mit bestimmten Repräsentationen, also die adäquate Benutzung dieser Medien oder Arbeitsmittel – sie sind im Allgemeinen nicht selbsterklärend – sowie der Transfer zwischen verschiedenen Repräsentationsformen gelernt werden“ (Schmidt-Thieme & Weigand 2015, S. 463). Dementsprechend heißt es auch bei HEITZER & WEIGAND (2020): „Die drei zentralen Darstellungsweisen oder Repräsentationsmodi des Wissens und Könnens – enaktiv (durch Handlungen), ikonisch (bildlich) und symbolisch (durch Sprache und Zeichen) – sollten bei der Verständnisentwicklung wo immer möglich und sinnvoll verwendet sowie wechselseitig aufeinander bezogen werden.“

2.1.1.5 BERGERs (2017) EIS-Prinzip

BERGER (2017) nimmt auf den ersten Blick größere Modifikationen am EIS-Prinzip vor als die zuvor Genannten, indem er einige zusätzliche Bezeichner einführt und schließlich zum sogenannten EIS-Dreieck gelangt, das die drei Abstraktionsstufen miteinander verbindet. Die dahinterstehenden Begriffe bleiben jedoch bestehen:

Die symbolische Stufe – die abstrakteste, aber nicht die wichtigste – zeichne sich durch ihre Ausdrucksart aus. Als Beispiele nennt BERGER (2017, S. 17) Worte und Formeln, wobei nicht alles Symbolische in Formeln ausgedrückt werde, wie es in der Mathematik der Fall sei: „Die Mathematik wird zumeist als eine formale Wissenschaft angesehen, die ihre Erkenntnisse symbolisch ausdrückt. Doch auch jede andere Disziplin bewegt sich auf der symbolischen Ebene, denn alle drücken ihre Ergebnisse irgendwie sprachlich aus.“ Entscheidend scheint also abermals das Verschlüsseln in einem festgelegten, geteilten Kode zu sein. Enaktives und Ikonisches gehe demgegenüber mit dem Einsatz von Handlungen bzw. Bildern einher:

> Beim Umgang mit Bildern, Diagrammen, Modellen (ikonische Ebene) wie auch im Umgang mit formalen, formelhaften Ausdrucksformen (symbolische Ebene: Sprache, mathematische Formeln etc.) werde ich immer wieder – manchmal als ‚Rettungsanker‘, manchmal einfach nur aus ‚Lust am konkreten Tun‘ – mit Erfolg auf die Ebene des wirklichen Handelns (enaktive Ebene) zurückkehren.
>
> Berger (2017, S. 19)

Dass BERGER (2017) die Repräsentationsmodi analog zu Unterkapitel 1.1 begreift, wird auch durch die Möglichkeit des Wechselns – hin und zurück – zwischen all diesen Formen deutlich: „Aufgabe: Finden Sie den Weg von der symbolischen Ebene auf die enaktive Ebene“ (Berger 2017, S. 19). Die obigen Überlegungen resultieren schließlich in folgender Abbildung:

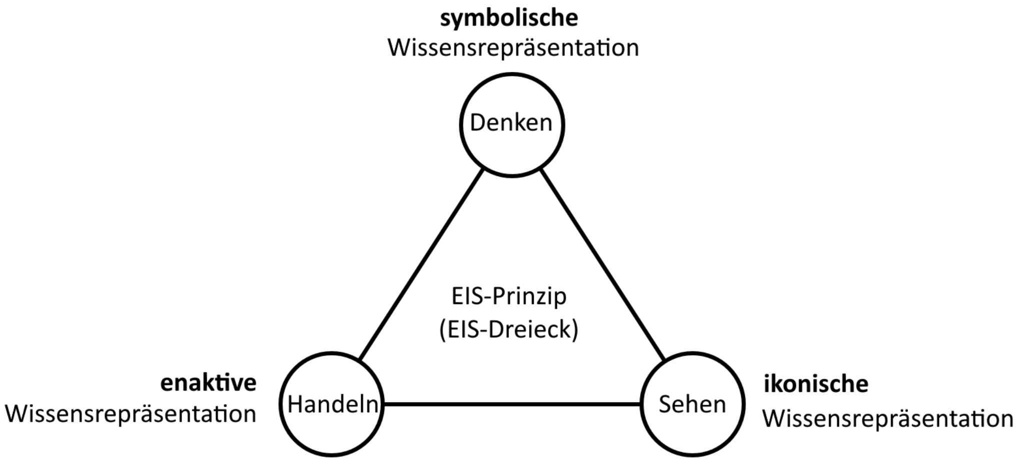


Abb. 10: EIS-Dreieck nach BERGER (2017, S. 18)

Dabei soll das EIS-Dreieck nicht andeuten, dass die symbolische Ebene über den anderen beiden stehe – stattdessen ist Abb. 10 eher wie eine Landkarte zu lesen: Die Abstraktionsstufen „bilden keine ‚Treppe', die ich nur hinaufsteige, sondern es sind drei benachbarte ‚Räume' meiner Wohnung, in jedem halte ich mich immer wieder einmal gern auf" (ebd., S. 19). Die von WITTMANN (1974) womöglich unabsichtlich bewirkte Abwertung des enaktiven und ikonischen Modus wird dadurch vermieden – allerdings sind die Implikationen des Dreiecks durch die Verortung des *Denkens* bei der *symbolischen Wissensrepräsentation* durchaus diffus: Zwar deuten die Kanten an, dass Sehen, Handeln und Denken miteinander verwoben sind, ganz im Sinne von AEBLI (1980, S. 173). Doch die Ecken des Dreiecks – in Kombination mit den ergänzten Abstraktionsstufen – legen nahe, dass Denken (und damit das eigentliche Mathematiktreiben) erst mit Formeln oder Worten als typische Vertreter symbolischer Wissensrepräsentationen im Mathematikunterricht stattfinden könne und dass jeder Umgang mit Formeln von Denkprozessen begleitet sei. Der Umgang mit haptischem Material wäre für Lernende demzufolge nie mehr als bloßes Handeln. Diese Ansichten scheint BERGER (2017, S. 19) zwar nicht zu teilen, immerhin seien Probleme oftmals sowohl enaktiv, ikonisch als auch symbolisch lösbar – doch das EIS-Dreieck legt sie durchaus nahe.

Die Rückschlüsse aus der BRUNERschen Theorie entsprechen bei BERGER (2017) den oben genannten: Primär macht BERGERs EIS-Prinzip auf die Existenz und Relevanz der drei Abstraktionsstufen und deren Verbindungen untereinander aufmerksam – ähnlich wie WITTMANN (1974) mit dem *Präfigurationsprinzip* und dem *Prinzip der Förderung des intermodalen Transfers*.

Zusammenfassend spiegeln die Auffassungen der BRUNERschen Repräsentationsmodi und die gezogenen Rückschlüsse sowohl bei ZECH (2002), LAUTER (2005), SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015) bzw. HEITZER & WEIGAND (2020) als auch bei BERGER (2017) die in Unterkapitel 1.1 dargestellte Interpretation von WITTMANN (1974) wider – zuweilen mit geringfügigen Änderungen. Auch wenn damit der typische Umgang mit BRUNERs Theorie skizziert ist, finden sich in der (älteren!)

mathematikdidaktischen Literatur vereinzelt Beiträge, die ein kritisches Hinterfragen des bisher Gesagten anstoßen und stellenweise Modifikationen unter Berücksichtigung der Spezifika des Mathematiklernens nahelegen. Diesen Beiträgen widmet sich Abschnitt 2.1.2.

2.1.2 Ausführungen zur Brunerschen Trias, die über die Bruner-Rezeption hinausgehen

Eine erste inhaltliche Einordnung der folgenden Unterabschnitte liefert Abb. 11. Sie zeigt dabei nur grobe Gemeinsamkeiten auf – wenn also zwei Werken dieselbe Beschreibung zugeordnet wird, soll dies keine inhaltliche Entsprechung implizieren: So modifiziert beispielsweise Jahnke (1984) die Auffassung der Repräsentationsmodi auf ganz andere Art und Weise als Freudenthal (1983) oder Lambert (2012).

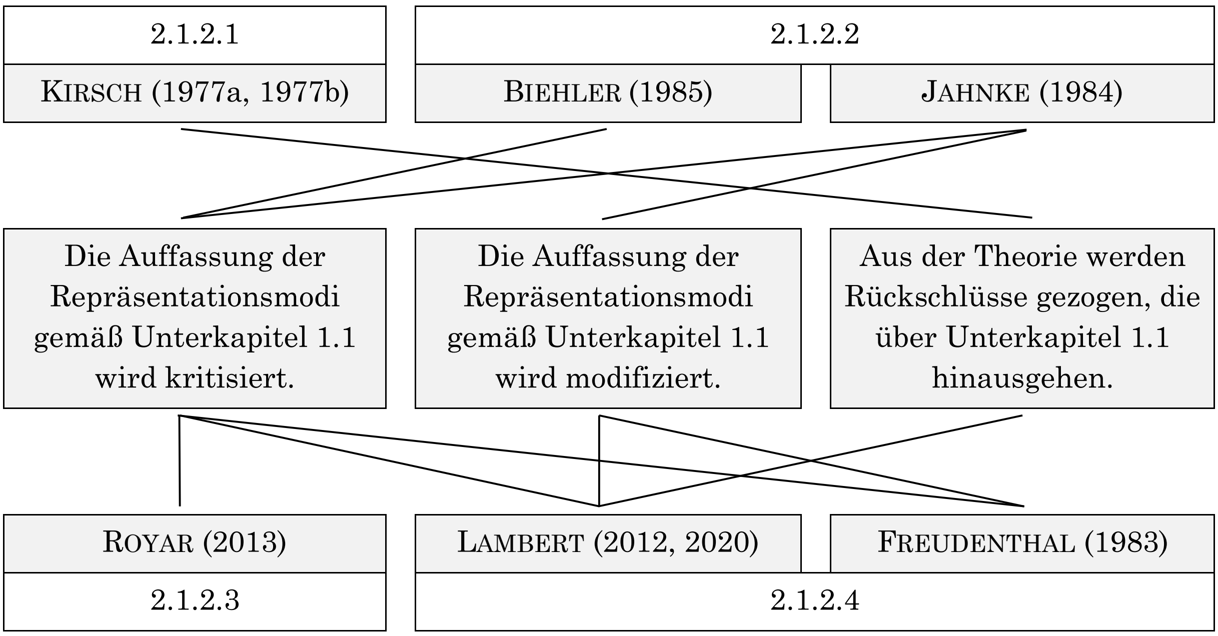


Abb. 11: Übersicht und inhaltliche Einordnung zu Abschnitt 2.1.2

2.1.2.1 Kirschs (1977a, 1977b) EIS-Prinzip

Während sich die Liste derer, die Bruners Vorarbeit auf ganz ähnliche Weise wie Wittmann (1974) interpretieren, problemlos erweitern ließe, stellt Kirsch eine Ausnahme dar: Er fordert *explizit* wie bereits zuvor zitiert „mathematik-spezifische Modifikation oder Differenzierung des Brunerschen Schemas E–I–S, nicht etwa nur die Einordnung der gängigen Repräsentationsweisen in dieses Schema“, schreibt diese Aufgabe der Mathematikdidaktik zu und stellt sich ihr selbst (Kirsch 1977a, S. 97).

Als *enaktiv* bezeichnet Kirsch eine „Darstellung durch *Handlungen*“ (ebd., S. 97; Hervorhebung im Original) bzw. „jede Repräsentation mittels realer Objekte […], ohne immer zwischen dem *Umgehen* mit den Objekten und seinem *Ergebnis* zu unterscheiden“ (Kirsch 1977b, S. 170; Hervorhebung im Original). Er präzisiert zwar nicht, ob hierbei an externe Darstellungen, interne Vorstellungen oder an beiderlei zu denken sei, doch angeführte Beispiele zeugen davon, dass externe Darstellungen die Archetypen sind:

> Schwieriger und didaktisch besonders wichtig wird die Frage nach der enaktiven Repräsentation bei den *Abbildungen einer Menge in sich*, insbesondere im bijektiven Fall, d. h. bei den *Permutationen*. Es läßt sich leicht *sagen*: „jedem Ding wird ein ganz bestimmtes Ding aus derselben Menge zugeordnet", aber damit ist noch lange nicht klargestellt, was man zu *tun* hat, um die Zuordnung auszuführen: […]. Nun ist aber von realen Objekten die Rede: also muß auch erklärt werden, welche reale Handlung das „Zuordnen" sein soll.
>
> Kirsch (1977b, S. 177; Hervorhebung im Original)

Währenddessen scheinen vorgestellte Handlungen eher einen Sonderfall zu bilden. Beispielsweise sei die Maschinendarstellung von Bruchoperatoren im Sinne von PETER BRAUNFELD (1968) „gewiß eine Art enaktive Repräsentation, da ja zumindest in der Vorstellung reale Objekte (etwa Stäbe), als Repräsentanten der gemeinten Größen, verarbeitet werden" (Kirsch 1977b, S. 178).

Gänzlich trennscharf bleibt KIRSCH (1977b, S. 181) bei der Charakterisierung enaktiver Repräsentationen nicht, indem er auch ein gezeichnetes Dreieck als *real* bezeichnet. Dennoch ordnet er gezeichnete Dreiecke bzw. allgemein Darstellungen „durch *Bilder*" nicht den enaktiven, sondern den ikonischen Repräsentationen zu – was wiederum damit konsistent ist, dass keine realen Handlungen möglich sind (Kirsch 1977a, S. 97; Hervorhebung im Original). Zur weiteren prototypischen Begriffsbildung nennt KIRSCH (1977a, S. 98) als ikonische Darstellungen u. a. Pfeilbilder, Venn-Diagramme[74] und Verknüpfungstafeln, „deren Zweidimensionalität durchaus ein Element ikonischer Repräsentation bildet." Üblicherweise gehen diese ikonischen Darstellungen abbildhaft und ggf. schematisiert aus enaktiven hervor, so etwa Abb. 16 als ikonisches Abbild einer Legung, bei der jedem Ding ein ganz bestimmter Platz zugewiesen werden sollte. Als konkretes Beispiel für eine solche enaktive Legung nennt KIRSCH (1977b, S. 171) das „Verteilen aller Merkmalsklötze eines Satzes an die Kinder seiner Klasse".

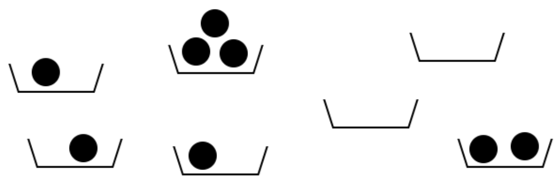


Abb. 12: Ikonische Repräsentation einer Legung nach KIRSCH (1977b, S. 171)

[74] Es ist durchaus befremdlich, dass ein Venn-Diagramm in dieselbe Kategorie wie eine abbildhafte Zeichnung fällt bzw. in eine andere Kategorie als die Darstellung $A \cap B$: Ein Venn-Diagramm ist Teil einer formalen Sprache und kaum selbsterklärend. Unterabschnitt 2.1.2.2 wird auf solche Unstimmigkeiten zurückkommen.

Symbolisch sei eine Darstellung dann, wenn „*symbolische Mittel*" (Kirsch 1977a, S. 97; Hervorhebung im Original) bzw. „eigene *Symbole*" (Kirsch 1977b, S. 169; Hervorhebung im Original) Verwendung finden – wobei die tautologische Formulierung eine logische Begriffsbildung erschwert. Prototypisch begriffsbildend erzeugt KIRSCH (1977b, S. 169) mehr Klarheit: Eine eigens eingeführte sprachliche Bezeichnung für mathematische Begriffe wie „‚Je mehr - desto mehr - Zuordnung' für eine streng isotone Abbildung" gehöre beispielsweise zu den symbolischen Darstellungen, wohingegen die Alltagssprache dieser Kategorie nicht gänzlich zuzuordnen sei: „So kann man am Beispiel der Proportionalität beobachten, wie eine geeignete verbale Fassung der Funktionalgleichung Schüler aller Stufen zu selbständigem Umgang befähigt, während symbolische Formulierungen weithin unzugänglich bleiben" (Kirsch 1977a, S. 98). Dies sei keine Ausnahme: „Zweifellos bleiben gegenwärtig unseren Schülern zahlreiche einfache mathematische Dinge nur deshalb unzugänglich, weil sie in einer Formulierung oder Symbolisierung dargeboten werden, deren Schwierigkeit nichts mit der Sache selbst zu tun hat" (ebd., S. 99). KIRSCH bleibt zwar etwas undeutlich in seiner Charakterisierung symbolischer Darstellungen, impliziert jedoch Formal-Algebraisches als Prototyp.

Bis zu diesem Punkt unterscheidet sich KIRSCHs Auffassung der Trias nicht wesentlich von den vorherigen aus Abschnitt 2.1.1. Es ist die folgende Reflexion der Repräsentationsweisen, die einen deutlichen Mehrwert stiftet:

KIRSCH (1977a, S. 100; Hervorhebung im Original) fordert mit großem Nachdruck und für *jede* Form der Darstellung „den entscheidenden *Akt der Aneignung*" als anzustrebendes Hauptziel – und unterscheidet davon die zweitrangige Verwendung einer speziellen Notationsweise explizit. Infolgedessen greift KIRSCH immer wieder die beiden verschiedenartigen Übergänge auf, die auch BRUNER gemäß Unterkapitel 1.2 identifizierte – beispielsweise beim nachfolgenden Kommentar zur enaktiven Darstellung einer Quersummenregel am Abakus bzw. an einer Stellenwerttafel mit Plättchen[75]: „Ohne Zweifel ist hier das entscheidende Argument adäquat dargestellt – und zugleich solchen Schülern zugänglich gemacht, denen man bisher die Regel nur als Rezept vermitteln zu können glaubte. Die Übersetzung in höhere Darstellungsformen ist demgegenüber eine untergeordnete Aufgabe" (Kirsch 1977a, S. 97). In dieselbe Kerbe schlägt die Analyse einer Sequenz seines eigenen Unterrichts:

[75] „Zunächst ein Beispiel für *enaktive Darstellung*: die Begründung der Quersummenregel zur Teilbarkeit durch 9 am Abakus in seiner primitivsten Form. Die gegebene Zahl n sei durch n Plättchen im Einerfeld dargestellt. Wir führen die folgende *Handlung* aus, solange dies geht: ‚Zehn Plättchen aufnehmen, eines davon in das linke Nachbarfeld, die anderen neun weglegen'. Die verbleibenden Plättchen bilden dann die Dezimaldarstellung der Zahl n auf dem Abakus; ihre Anzahl ist die Quersumme von n. Nun haben wir immer nur Neunerbündel weggelegt. Also ist die Zahl n ‚ebenso gut' durch 9 teilbar wie ihre Quersumme (Kirsch 1977a, S. 97; Hervorhebung im Original).

> In meinem Unterricht hat das Umgehen mit Tafeln Schüler einmal zu der selbstständigen Vermutung geführt: „Jede echte Untergruppe einer endlichen Gruppe G hat höchstens halb so viele Elemente wie G" […]. Die Schüler gaben durchaus stichhaltige Begründungen hierfür: Sie arbeiteten kreativ auf einem niederen Repräsentationsniveau; dies ist zweifellos besser, als auf einem höheren vorwiegend rezeptiv zu sein.

Kirsch (1977a, S. 98)

Die Begriffserfassung sei auf einem Repräsentationsniveau dann adäquat, „wenn auf diesem Niveau stichhaltig argumentiert wird" – unabhängig davon, ob nun formal-algebraische Zeichen, Bilder oder reale Handlungen die Grundlage dieses Argumentierens bilden (ebd., S. 98). Somit habe ein Wechsel der Repräsentationsform „keine Preisgabe mathematischer Substanz zu bedeuten", sondern kann sogar ein erstmaliges Zugänglichmachen bewirken (ebd., S. 96): Lernende können „auf der untersten Stufe vollwertige Mathematik treiben" (ebd., S. 99), indem sie „sich selbst einen verständigen Umgang" (ebd., S. 98) mit egal welcher Darstellungsform erschließen. Hierdurch distanziert sich KIRSCH klar von einer möglichen Abwertung des enaktiven und ikonischen Repräsentationsmodus. Die potentielle „Vollwertigkeit auch der ‚unteren' Darstellungsmedien" werte dabei die Relevanz des intermodalen Transfers nicht ab, weil es um den „*Beginn* auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation" gehe (ebd., S. 99; Hervorhebung im Original).

Terminologisch schlägt sich die eingenommene Perspektive – der verständige Umgang mit den Darstellungen als zentrales Ziel – in der Trias allerdings nicht nieder: Reale Handlungen bleiben hier enaktiv, abbildhafte, nicht manipulierbare Zeichnungen ikonisch und jede formal-algebraische Darstellung symbolisch. Der Akt der Aneignung wird somit nicht zu einem zentralen, immanenten Element von KIRSCHs EIS-Prinzips, sondern muss eigens hinzugefügt werden.

Zu guter Letzt zieht KIRSCH (1977b, S. 169; Hervorhebung im Original) einen ganz ähnlichen Rückschluss wie Unterkapitel 1.2[76]: Die „*Adäquatheit einer Repräsentation*" sei Voraussetzung für das Erschließen eines verständigen Umgangs mit ihr und daher ein wichtiges Kriterium, das eine Lehrkraft beurteilen können soll. Enaktive Einstiege analysiert KIRSCH dementsprechend vor dem Hintergrund dessen, was durch sie repräsentiert werden soll:

> Das Legen eines Fadens „in" eine Tischplatte bildet übrigens eine adäquate Darstellung des Begriffs *Kurve*, der ja als stetige Abbildung eines Parameterintervalls in einen Raum definiert ist und nicht etwa als Punktmenge – der sich also nicht durch eine gezeichnete Linie repräsentieren läßt, sondern allenfalls durch die Handlung des Zeichnens.

Kirsch (1977b, S. 171; Hervorhebung im Original)

[76] Die „Welt der Erfahrung" solle „in einem bestimmten Maße isomorph mit den strukturellen Prinzipien der Syntax" sein (Bruner 1971b, S. 74).

Hierbei deutet sich wie schon in Unterkapitel 1.2 ein Potential der Theorie an, das WITTMANNs Deutung nicht auszuschöpfen vermochte: die Beurteilung der Eignung von Handlungen für das Mathematiklernen. KIRSCH schärft diesen Aspekt nicht aus, sieht aber Potentiale – immerhin bewertet er das Geleistete selbst nur als „[e]inen ersten Ansatz" zur Entwicklung einer Theorie (Kirsch 1977a, S. 97).

Zu einem Garanten für Lernerfolg dürfe dieses Konzept selbstverständlich dennoch nicht auserkoren werden: „Alle hier beschriebenen Bemühungen verstehen sich nur als Hilfestellung, die dem Lernenden den Zugang erleichtern, aber ihm den entscheidenden *Akt der Aneignung prinzipiell nicht abnehmen* können. Nicht jeder Schüler vermag für jeden Gegenstand diesen Akt zu leisten" (Kirsch 1977a, S. 100; Hervorhebung im Original).

2.1.2.2 BIEHLERs (1985) bzw. JAHNKEs (1984) EIS-Prinzip

Auch BIEHLER (1985, S. 60) will (im Rahmen stochastischer Fragestellungen) „ein neues Durchdenken der Rolle verschiedener Darstellungsmodi im Mathematikunterricht" vorantreiben. Er integriert dabei Aspekte von JAHNKE (1984), die in den Folgejahren gelegentlich Niederschlag in der mathematikdidaktischen Literatur fanden[77] und im Folgenden auszugsweise aufgegriffen werden.

BIEHLER reflektiert weniger die BRUNERsche Trias als Ganzes, sondern vorrangig ikonische Repräsentationen und deren Rolle im Mathematikunterricht. Er bezieht sich dabei sowohl auf BRUNER selbst als auch auf die Wiedergabe von WITTMANN, der zufolge Ikonisches strukturelle oder bildliche Ähnlichkeit mit dem Dargestellten aufweist: Ikonische Repräsentationen stellen etwas dar, während Symbole etwas bedeuten können (Wittmann 1974).

BIEHLER (1985, S. 58) bewertet die „Wirkung dieser Unterscheidung" rückblickend als „widersprüchlich": Einerseits hat sie zwar „durchaus zu einer Aufwertung ikonischer Repräsentationen geführt", weil ihnen gesteigerte Aufmerksamkeit zuteilwurde. Andererseits – und das impliziert auch das spätere Eingeständnis

---

[77] JAHNKEs (1984) unten erläuterte Modifikationen zum Verständnis der BRUNERschen Repräsentationsmodi – insbesondere hinsichtlich der Abgrenzung ikonischer und symbolischer Repräsentationen – spiegeln sich beispielsweise bei SCHERER & STEINBRING (2001) wieder: Ein Diagramm sei trotz seiner Bildhaftigkeit eine symbolische Struktur, weil sich der „Blick auf die strukturellen Beziehungen im Diagramm richten" lässt, sodass allgemeingültige Regeln begründet werden können (Scherer & Steinbring 2001, S. 195). In diesem Sinne seien auch nach KRAUTHAUSEN & SCHERER (2001) viele Veranschaulichungen wie der Rechenstrich „nicht nur Bilder, sondern *symbolische* Repräsentationen", weil in ihnen „*Beziehungen* enthalten sind" (ebd., S. 119; Hervorhebung im Original).
Über JAHNKEs (1984) Modifikationen hinausgehend deutet STEINBRING (1993) an, dass formal-algebraische Darstellungen nicht aus sich heraus als symbolisch bezeichnet werden sollten: Die „zunächst als Namen für gegebene ‚Objekte' gebrauchten sprachlichen Bezeichnungen" seien „mit mathematisch-begrifflicher Bedeutung [zu] füllen", um „damit einen Übergang von sprachlichen Zeichen zu mathematischen Symbolen (Symbole als Repräsentanten für *begriffliche Beziehungen*) in Gang setzen zu können" (ebd., S. 115; Hervorhebung im Original). Hier zeichnen sich Aspekte der differenzierteren BRUNER-Interpretation aus Unterkapitel 1.2 ab – vgl. BRUNERs (1974, S. 64) oben zitierter Kommentar zur Darstellung x□ + 4x + 4.

von BRUNER (1996) bezüglich ikonischer Repräsentationen[78] – könnte „[d]ie Einführung des Konzepts der ikonischen Darstellung in die mathematikdidaktische Terminologie […] sogar zu einer Abwertung klassischer Darstellungen der Schulmathematik beigetragen haben“ (Biehler 1985, S. 58): Sie werden dank ihrer Einordnung als ikonische Darstellungen zuweilen als „der eigentlichen Mathematik äußerlich“ (ebd., S. 58) angesehen, schließlich sei es „schwer verständlich, wie man mit ikonischen Darstellungen etwas Unbekanntes erforschen kann, wenn [s]ie einen Sachverhalt unmittelbar darstellen“ (ebd., S. 60). Ihnen falle nur noch „Übergangscharakter [zu], bei entsprechend entwickeltem kognitiven Niveau wären (sind) sie verzichtbar“ (ebd., S. 59).

Die von BIEHLER propagierte Gegenposition lautet, dass graphische (bzw. ikonische) Darstellungen „nicht ausschließlich unter methodischen Gesichtspunkten, sondern auch als gesellschaftliche Kommunikationsmittel und als Erkenntnismittel der Mathematik“ (ebd., S. 57) verstanden werden müssen. Sie seien zuweilen sogar „die entscheidenden Mittel […], um Neues, Nicht-Antizipiertes“ zu entdecken (ebd., S. 67) und erfüllen „eigenständige, i.a. nicht durch andere Mittel substituierbare Funktionen im Erkenntnisprozeß“ (ebd., S. 70). BIEHLER tritt hier also genau wie KIRSCH (1977a, S. 99) – allerdings beschränkt auf ikonische Darstellungen – für die Vollwertigkeit der „‚unteren‘ Darstellungsmedien“ ein.

Erläutert und begründet wird dieser Standpunkt am „Stengel-und-Baum-Schaubild“, dessen „wesentliche Funktion nicht darin [besteht], die Grunddaten als solche zu repräsentieren […]. Es soll vielmehr Beziehungen in den Daten sichtbar machen, z.B. die Form der Verteilung und das Ausmaß der Streuung“ (Biehler 1985, S. 74 f.). Mit dem Ziel des Sichtbarmachens von Beziehungen gelte es darüber hinaus, die Gestaltung solcher Darstellungen zu hinterfragen – ganz ähnlich zu Ansätzen aus Unterkapitel 1.2: „Die (bewußte) Einsicht in die Bedeutung der visuellen Aspekte von Tabellen hat in jüngster Zeit zu einer Reihe von Vorschlägen geführt, Tabellen zu ‚verbessern‘, damit sie ihre Funktion besser erfüllen“ (ebd., S. 61).

Am Stängel-und-Baum-Schaubild wird neben der Abwertung bildhafter Darstellungen noch ein zweites zentrales Problem deutlich – ein Bedeutungsproblem bzw. ein Triangulationsbruch: Wenn WITTMANNs bzw. BRUNERs Kriterien aus 1.1 konsequent angewendet werden, müssen

- viele sonst als ikonisch bezeichnete Darstellungen als symbolisch und
- viele sonst als symbolisch bezeichnete Darstellungen als ikonisch

[78] „I confess I missed some of its significance the first time around. […] For images not only capture the particularity of events and objects, they give birth to and serve as prototypes for classes of events, and then provide benchmarks against which to compare candidate instances for membership in those classes. And so, very early on, […] our power to render the world in terms of typical images and similarities provides us a kind of preconceptual structure by which we can operate in the world“ (Bruner 1996, S. 155 f.).

eingeordnet werden. Letzteres treffe etwa auf Tabellen zu, die, wie auch KIRSCH (1977a, S. 98) feststellt, ikonischen Charakter aufweisen:

> Bestimmte geometrische Beziehungen im zweidimensionalen Arrangement einer Kontingenztafel, z. B. Nachbarschaften, zu derselben Spalte oder Zeile zu gehören etc., entsprechen inhaltlichen Beziehungen in den Daten. Insofern gibt es eine strukturelle Ähnlichkeit zwischen der Repräsentation und dem Repräsentierten (abstrakten Beziehungen zwischen den Daten), was als Merkmal ikonischer Repräsentationen angesehen wird.
>
> Biehler (1985, S. 61)

Die Uneinigkeit bei der Einordnung einer Tabelle resultiert aus dem Kriterium der Ähnlichkeit – ein Begriff, dessen Weite nicht klar abgesteckt ist. Diese Problematik lässt sich bereits bei PEIRCE erkennen (vgl. Unterabschnitt 3.5.1.2), der sich „in Hinsicht auf die Ikonizität viele solcher Freiheiten“ nimmt (Eco 1987, S. 264).

Allerdings ist nicht nur Ähnlichkeit ein unklarer Begriff, sondern auch das charakteristische Kriterium von Symbolischem – nämlich die Eigenschaft, eine Sache nicht unmittelbar darzustellen, sondern für etwas stehen zu können. Darstellungen, die zwar vorrangig bildhaft sind, deren Bedeutung sich aber dennoch nicht unmittelbar erschließt, verstärken das Bedeutungsproblem, denn sie müssten eigentlich zu den Symbolen gezählt werden (vgl. Biehler 1985, S. 65). Dies treffe beispielsweise auf Mischformen wie das eben in seiner Rolle als exploratives Mittel beschriebene Stängel-und-Blätter-Schaubild zu, welches „die Problematik einer strikten Unterscheidung von ikonischer und symbolischer Repräsentation überaus deutlich“ werden lasse – ebenso wie auf ein Weg-Geschwindigkeitsdiagramm eines Autos im Koordinatensystem:

> Zunächst macht dieses Beispiel überaus deutlich, wie ‚symbolisch‘ der Funktionsgraph […] ist, d.h., es existiert eben keine unmittelbar verständliche bildhafte Ähnlichkeit der ‚ikonischen Darstellung‘ […] zur repräsentierten Situation. Der Wirklichkeitsbezug ist sehr vermittelt. Fig. 5a wirft ein echtes ‚Bedeutungsproblem‘ auf und illustriert die von Jahnke (1984) entwickelte These, daß Veranschaulichungsmittel in der Schulmathematik als symbolische Darstellungen aufgefaßt werden sollten, deren Bedeutung nicht vollständig in unmittelbarer Weise klar ist, sondern durch vielfältige *Anwendungen* entwickelt werden muß.
>
> Biehler (1985, S. 67; Hervorhebung im Original)[79]

Durch diese „Relativierung der Brunerschen Unterscheidung von symbolischer und ikonischer Repräsentation“ findet eine Annäherung an Unterkapitel 1.2 statt (Jahnke 1984, S. 35):

> Graphische Darstellungen sind explorative Mittel. Ähnlich wie bei (anderen) Symbolsystemen kann mit ihnen formal, in relativer Unabhängigkeit von

[79] Bei Fig. 5a handelt es sich um ein Weg-Geschwindigkeitsdiagramm eines Autos, mithilfe dessen Lernende auf die gefahrene Rennstrecke schließen sollen.

> ihrem referentiellen Bezug operiert werden (durch materielle Veränderung einer Darstellung, durch visuelle Exploration einer einzelnen Darstellung), um so zur Erforschung eines teilweise unbekannten Sachverhalts beizutragen.
>
> Biehler (1985, S. 70)

Der von JAHNKE (1984) vorgeschlagene Ausweg, auch Veranschaulichungsmittel als symbolisch zu bezeichnen, unterstützt erneut KIRSCHs (1977a, S. 99) Vollwertigkeit der „unteren‘ Darstellungsmedien“. Zugleich liegt hier ein bedeutsames Novum vor: Die Auffassung der Repräsentationsmodi als solche wird reflektiert und modifiziert. In Folge dieser Modifikation bleibt KIRSCHs Vollwertigkeit kein eigens zu erwähnender Zusatz, sondern erhebt sich zu einem der BRUNERschen Theorie immanenten Kerngedanken.

Diese Modifikationen provozieren jedoch auch neue Unstimmigkeiten: BIEHLERs bzw. JAHNKEs Argumente greifen gleichermaßen bei enaktiven Darstellungen im Mathematikunterricht, welche bereits von KIRSCH (1977a) als echte Erkenntnismittel der Mathematik identifiziert wurden. Welche Repräsentationen im Mathematikunterricht gelten dann überhaupt noch als ikonisch oder enaktiv, wenn bereits die Möglichkeit des Erschließens irgendeiner nicht unmittelbar dargestellten Bedeutung sie symbolisch werden lässt? Was ist *kein* Symbol im Mathematikunterricht?

Einen möglichen Ausweg hierzu hat Unterkapitel 1.2 aufgezeigt, in dem BRUNER den subjektiv erfassten Symbolgehalt als intersubjektiv variables Kriterium heranzog. Auch BIEHLER (1985, S. 75) thematisiert diesen: Es sei „im allgemeinen nicht so, daß man die Beziehungen bereits kennt und darum in Diagrammen darstellt, vielmehr sind die Beziehungen gleichsam als Variable, als Unbekannte aufzufassen“. In diesen Beziehungen liege „das wesentliche Problem“ (ebd., S. 75) – oberstes Ziel solle im Mathematikunterricht daher für jedes Darstellungsmittel das Erschließen der Beziehungen sein, die i. A. nicht vollständig und in unmittelbarer Weise dargestellt sind: „Man könnte auch sagen, es müßte darum gehen, Karten [und andere Graphiken] als exploratives Mittel einsetzen zu können“ (ebd., S. 73). Dies zeichne einen „kompetenten Umgang mit diesem Mittel“ aus (ebd., S. 67). Diese Aspekte schlagen sich jedoch weder bei BIEHLER (1985) noch bei JAHNKE (1984) terminologisch in der BRUNERschen Trias nieder.

Auch wenn hier nicht alle Unstimmigkeiten ausgeräumt werden konnten, sind BIEHLERs sowie JAHNKEs Kernideen und Kritikpunkte mathematikdidaktisch begründet und überzeugend. Bei einer Modifikation der BRUNERschen Trias sollte ihnen dementsprechend Beachtung geschenkt werden – beispielsweise dem Gedanken hinter JAHNKEs (1984) Vorschlag, *alle* Veranschaulichungsmittel in der Schulmathematik als symbolische Darstellungen zu bezeichnen. Kapitel 3 wird genau darauf zurückgreifen.

2.1.2.3 ROYARs (2013) EIS-Prinzip

Bis zur Kritik von ROYAR (2013) vergehen fast dreißig Jahre. In dieser Zeit hat sich ein gewisser Umgang mit der BRUNERschen Trias etabliert, den INGE SCHWANK (2003) wie folgt schildert und den KATHARINA KUHNKE (2013) bestätigt:

> Tatsächlich haben wir uns auch daran gewöhnt, dass wir in Anlehnung an die Ergebnisse aus der Entwicklungspsychologie hinsichtlich der Ausformung des Denkens annehmen, dass die Repräsentationsformen »sensomotorisch«, »visuell«, »sprachlich-formal« in der Reihenfolge der gegebenen Nennung eine Hierarchie bilden. Zwar weist Bruner (1973, S. 56) in *einem* Satz darauf hin (er spricht von enaktiv/ikonisch/symbolisch), dass zwar die beiden letztgenannten Arten die Entwicklung der jeweils früheren voraussetzen, dass aber ‚dann im Leben alle drei Repräsentationsformen mehr oder weniger selbstständig für sich' bestehen. Die Konsequenzen, die sich aus dieser ergänzenden Bemerkung für die Untersuchung des Denkens ergeben, sind überhaupt noch nicht hinreichend reflektiert.

Schwank (2003, S. 73; Hervorhebung im Original)

> Das Nutzen verschiedener Darstellungen, die in Interaktion miteinander stehen, wurde in einigen didaktischen Vorschlägen allerdings als ausschließlich chronologisches „E-I-S Prinzip" missverstanden […], die in eben dieser Abfolge durchlaufen werden sollen. Oft werden verschiedene Darstellungen in Richtung einer „Einbahnstraße" von enaktiv über ikonisch zu symbolisch eingesetzt, wobei letztgenannte als vorrangiges Ziel gesehen werden […].

Kuhnke (2013, S. 24)

Statt von mathematik-spezifischen Modifikationen, wie KIRSCH (1977a, 1977b) sie fordert, beschreibt SCHWANK (2003) eine unreflektierte Gewöhnung an eine Deutung, die weitestgehend mit der BRUNER-Rezeption aus Unterkapitel 1.2 bzw. mit der Wiedergabe von WITTMANN (1974) übereinstimmt. Insofern ist es nicht verwunderlich, dass die bekannten Kritikpunkte von KIRSCH, JAHNKE und BIEHLER immer wieder aufkommen: Mathematikunterricht leide oftmals an „Brunerismus", womit KURT MEIERS (1994, S. 558) eben jene strenge Stufung bezeichnet, an deren Ende keine Rückbesinnung auf oder Vernetzung mit ikonischen oder enaktiven Darstellungen stattfinde. Dieselben Kritikpunkte führen noch zwanzig Jahre später STEFAN JÖRISSEN & SCHMIDT-THIEME (2015) ins Feld, wobei sie besonders bemängeln, dass durch die Interpretation als Hierarchie die ersten beiden Modi die wie folgt beschriebene Abwertung erführen: Die enaktive Ebene werde als bloße reale Erfahrung und als intuitiv zugänglich aufgefasst, die ikonische Ebene als Veranschaulichung und Zwischenstufe im Übergang zum Abstrakten, „aber nicht als konstitutiver Teil der eigentlichen Mathematik. Die Symbole sind Bedeutungsträger und als solche die adäquate Darstellungsform der eigentlichen Mathematik. Aufgrund ihrer Abstraktheit sind sie jedoch als schwierig einzustufen" (ebd., S. 386).

In den letzten Jahren scheint das Ablehnen einer hierarchisierten Auffassung zunehmend Wurzeln geschlagen zu haben, wie bereits die zuvor behandelten Wiedergaben der BRUNERschen Trias von SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015) sowie von BERGER (2017) andeuten. Dieser Prozess schlägt sich auch bei LISA HEFENDEHL-HEBEKER & SCHWANK (2015) in einer angepassten Beschreibung der BRUNERschen Trias nieder – man vergleiche das obige Eingangszitat von SCHWANK (2003) mit dem folgenden:

„Bruner (1964) führt […] drei, *nicht hierarchisch zu verstehende* Repräsentationsformen [RF] ein, die als EIS-Prinzip bekannt werden […]:

- enaktive RF: ermöglichen im Motorischen verankertes Zurechtfinden;
- ikonische RF: ermöglichen im Visuellen verankertes Zurechtfinden;
- symbolische RF: ermöglichen im Formal-Symbolischen verankertes Zurechtfinden“ (Hefendehl-Hebeker & Schwank 2015, S. 92; Hervorhebung J. L.).

Obwohl dieser kurze Abriss keinen offenkundigen Zusammenhang zu ROYAR (2013) aufweist, bildet er doch eine zentrale Voraussetzung für die Beurteilung seiner Aussagen: Er erleichtert es, ROYARs (2013) Unterscheidung zwischen

- der seiner Einschätzung nach richtigen Lesart der BRUNERschen Trias und
- dem soeben angerissenen hierarchischen Dreischritt, der in methodischer Verkürzung einer falschen Lesart entsprungen sei und von ROYAR (2013) als *EIS-Prinzip* bezeichnet wird,

zu erkennen. ROYARs (2013) Kritik richtet sich an Letzteres, wie an späterer Stelle nochmals hervorgehoben wird.

ROYAR (2013, S. 36) stellt zunächst klar, dass BRUNER „in seiner Beschreibung den Begriff [Repräsentation] eindeutig als ‚mental representation‘“ und nicht als äußerlich sichtbare Darstellung verwende – ein erster Grund, weshalb ROYAR (2013) Bezeichner wie »Darstellungsebene« ablehnt. BRUNERs Modi seien viel mehr darauf bezogen, „mit welchen ‚Werkzeugen‘ sich Menschen ihre Umwelt erschließen, d. h. eigenes Wissen über die Welt aufbauen“ (Royar 2013, S. 36):

> Es geschieht dies durch (zunehmend ideengeleitetes) Handeln (enaktiv), durch den Aufbau innerer Bilder oder Vorstellungen (ikonisch) und durch den Gebrauch von Symbolen (symbolisch). Ikonisch meint hier als nicht einfach „bildhaft“ im wörtlichen Sinne, sondern vielmehr ein „inneres Bild“ als Vorstellung oder Idee. Entsprechend ist mit „symbolisch“ auch nicht in erster Linie „formelhaft“ gemeint, sondern viel weiter gehend die Übertragung in ein „Symbolsystem“.
>
> Royar (2013, S. 36)

Der eben erwähnte Bezeichner »Darstellungsebene« wäre also auch deshalb missverständlich, weil er unterschiedliche Niveaus der Modi impliziere, die BRUNERs Vorstellung unangemessen seien: Er habe sich in späteren Arbeiten

„sogar selbst von der Sichtweise distanziert, dass die Erkenntnis vom Enaktiven über das Ikonische zum Symbolischen ‚voranschreite'“ (Royar 2013, S. 35).

Logisch begriffsbildend bleibt ROYAR insbesondere beim symbolischen Modus im obigen Zitat undeutlich und verwendet dort wie an anderer Stelle dieselben Tautologien, die sich bereits KIRSCH (1977a, 1977b) vorwerfen ließen: „Symbolisch bedeutet in diesem Sinne ‚mit symbolischen Zeichen agierend'“ (Royar 2013, S. 37). Was genau ein Symbol von einem Zeichen abhebe, beginnt sich erneut erst an Prototypen abzuzeichnen: Ein Symbolsystem könne

> beispielsweise die Sprache sein, aber auch durchaus ein bildliches System, wie man es etwa bei schematischen technischen Zeichnungen verwendet. Selbst symbolische Handlungen, sei es in Form von „als-ob-Rollenspielen“ oder in Form von Riten und Ritualen, die weit über den konkreten Handlungsbezug hinausweisen, sind in Bezug auf die Welterschließung nicht als enaktiv, sondern als symbolisch einzuordnen.
>
> Royar (2013, S. 36 f.)

Hiervon lässt sich das entscheidende Kriterium ableiten, das ROYAR (2013) BRUNER entnimmt: das Hinausweisen über den konkreten (Handlungs-)Bezug. Es bleibt dort jedoch unklar,

- ob allein die Möglichkeit dazu genügt (analog zu WITTMANN (1974): ein Symbol *kann* etwas bedeuten),
- ob die Existenz *einer* Person genügt, für die die Repräsentation über den konkreten Handlungsbezug hinausweist,
- oder ob die Feststellung des Hinausweisens in Abhängigkeit eines Subjekts zu treffen ist und nur für dieses Subjekt Gültigkeit besitzt.

Unabhängig von einer Entscheidung zwischen diesen drei Deutungen steht fest, dass ROYAR (2013) ganz ähnliche Freiheiten nutzt wie BRUNER in Unterkapitel 1.2: Eine Handlung kann symbolisch sein, muss es aber nicht. Diese „Unschärfe und Mehrdeutigkeit der Begriffe“ könne dazu verleiten, „die drei Modi als ‚machen, zeichnen, notieren', also als reine ‚Aktionen' zu interpretieren“ (Royar 2013, S. 37). Hier trifft ROYAR (2013, S. 34 bzw. 41) die eingangs erwähnte Unterscheidung:

BRUNERs Darlegungen würden auf diese Weise „verfälschend zu einem weit verbreiteten, mit dem Kürzel E-I-S etikettierten ‚Unterrichtsprinzip' uminterpretiert, das in einem ‚methodischen Dreischritt' gipfelt“ und universelle Gültigkeit beanspruche. Dies verleite dazu, „mathematische Aneignungsprozesse [als] einfacher zu erachten, als sie in Wirklichkeit sind“, sodass sich die damit einhergehende Methodik „rasch im oberflächlichen ‚Anbieten' von Eindrücken [erschöpft,] in der Hoffnung, es sei dann schon das ‚Richtige' für alle Schüler dabei“ (ebd., S. 41). Der Erfolg der Anwendung des Prinzips bleibe so dem Zufall überlassen, denn „auch vermeintlich einfache Darstellungen [können] bei Kindern in großem Umfang ganz andere Vorstellungen auslösen als von Erwachsenen erwartet […]. Handlungen und Bilder werden nicht ‚automatisch' so verstanden, wie sie die Lehrende selbst versteht oder verstanden wissen will“ (ebd., S. 42). Im schlimmsten Fall werde sogar „eine Stufung nach E-I-S […] Anlass für Lernschwierigkeiten und Fehler der Schüler“ (Ludwig Bauer 1993, S. 79, zitiert nach Royar 2013, S. 42). Erläuternd dazu wird ein Zitat von SYBILLE SCHÜTTE (1996) herangezogen:

> Wenn Kinder zunächst mit Materialien eine Handlung vollziehen, dann ein entsprechendes Bild betrachten und schließlich eine entsprechende Rechenaufgabe lösen, können sich Schwierigkeiten in folgender Hinsicht ergeben: Erstens ist nicht immer gewährleistet, dass Kinder die Handlung in der Zeichnung wieder erkennen. Dies wird noch dadurch erschwert, dass der Prozesscharakter der Handlung schwer abzubilden ist, da das sukzessive Element in ein simultanes übergeht. Zweitens ist im Bild nicht ohne weiteres der gemeinte abstrakte Gehalt erkennbar. Er muss in das Bild hineingesehen werden, und dieses Hineinsehen muss gelernt werden.
>
> Schütte (1996, S. 56)

Adäquate Vorstellungsbilder mögen sich zwar zuweilen durch Anschauungsmittel erzeugen lassen, „dass diese deswegen aber Voraussetzungen hierfür sind, darf angezweifelt werden. Insbesondere könne nicht davon gesprochen werden, dass Handlungen oder Bilder bereits an sich ‚Stufen mathematischer Erkenntnis‘ darstellen“ (Royar 2013, S. 38). Letzteres wird unter Verweis auf JENS-HOLGER LORENZ (1995, S. 11) damit begründet, dass „viele Kinder auch nach monatelangem Gebrauch von Veranschaulichungsmitteln die mathematische Struktur nicht sehen“.

> Damit aber wird eine vordergründige Orientierung am E-I-S-Prinzip ins Gegenteil verkehrt: Handlungen und Bilder sind als Aneignungsmodus denkbar ungeeignet, wenn es darum geht, komplexere Absichten einer zweiten Person zu erfassen. Hier ist die Interaktion auf einer sprachlich-symbolischen Ebene für einen gewinnbringenden Austausch nötig. Dies gilt generell, wenn Wissen konstruiert werden soll, das nicht als bloße Anreicherung bereits verfügbarer Inhalte anzusehen ist, sondern das „fundamentaler“ Art ist.
>
> Royar (2013, S. 44)

Für die konkrete Praxis des Mathematikunterrichts wertet ROYAR (2013, S. 27) das EIS-Prinzip als wenig gewinnbringend, attestiert ihm eine „eingeschränkte Tauglichkeit als methodischer Leitfaden“ – und schließt auf die dahinterstehende Theorie, aus der das Prinzip entsprungen ist: „Insgesamt ist die BRUNERsche Theorie für erkenntnistheoretische Betrachtungen zwar ausgesprochen hilfreich, sie ist aber keine tragfähige Basis, auf die sich die gängige Unterrichtspraxis bei der ‚Behandlung‘ der Grundrechenarten vom Handeln über die Anschauung zur formalen Symbolik wissenschaftlich gründen ließe“ (ebd., S. 37).

Obwohl ROYARs (2013) Kritikpunkte überzeugen, ist der zuletzt gezogene Schluss auf die BRUNERsche Theorie in Frage zu stellen: Er unterschlägt, dass aus einer sinnvollen theoretischen Grundlage (hier: BRUNERs Theorie) auch sinnlose

Folgerungen abgeleitet werden können (hier: die als »EIS-Prinzip« bezeichnete Interpretation). Aus der Untauglichkeit eines EIS-Prinzips darf daher nicht auf die Untauglichkeit der BRUNERschen Theorie geschlossen werden. Die nachfolgenden Unterpunkte explizieren dies an den einzelnen Kritikpunkten ROYARs (2013):

- Unterkapitel 1.1 und 1.2 haben gezeigt, dass das kritisierte Vereinfachen der Repräsentationsmodi zu den Aktionen Machen, Zeichnen, Notieren und deren sequenzielles Durchlaufen keiner alternativlosen Deduktion aus der zugrundeliegenden Theorie entspringt. Bemängelt wird hier also nur *eine* Interpretationsweise, nicht die zugrundeliegende Theorie als solche.
- Dass die Aktionen Machen, Zeichnen und Notieren oberflächlich angeboten werden, ist ein konkreter Auswuchs des übergeordneten Simplifizierens von (mathematischen) Aneignungsprozessen. Die Wurzeln dieses Irrtums liegen jedoch zweifellos außerhalb der BRUNERschen Theorie, denn er wurde schon deutlich früher begangen und kritisiert.[80] Zwar begünstigt die in Unterkapitel 1.1 dargelegte Lesart BRUNERs eine entsprechende Auffassung zum Mathematiklernen – vielleicht führt sie aber auch erst dazu, die zweideutige Vorlage auf diese Weise auszulegen.
- Dass Handlungen und Bilder nicht automatisch auf die intendierte Weise verstanden werden, stellt nur dann ein Problem dar, wenn…
    i. … Mathematiklernen als Übermitteln richtiger Informationen bzw. als Aneignen komplexer Absichten einer zweiten Person verstanden wird: „Wenn es darauf ankäme, was die richtige Information sei, so hätten sie sogar recht; man kann ihnen gegenüber nur betonen, daß Lernen etwas anderes ist als Informationen zu empfangen“ (Freudenthal 1973, S. 61).[81] Eine Lehrperson müsse demzufolge eben *nicht* „durch *klare und saubere Erklärungen* Verständnisschwierigkeiten weitgehend ausräumen und Fehler vermeiden“ – „[d]ieser Ansatz muß heute wohl als gescheitert betrachtet werden“ (Günther Malle 1993, S. 26 f.; Hervorhebung im

[80] GANSBERG (1904, S. 155) fragt im Kontext des Anschauungsunterrichts: „Aber wie hat man nur überhaupt Anschauen mit Vor-die-Sinne-stellen verwechseln können? Wahrhaftig, wir müssen ein Ende machen mit den Bilderbesprechungen, die unsere Lektionsbücher empfehlen, mit ihrem teilnahmlosen Darüberhingleiten und ideenlosen Herumvagieren auf der Oberfläche; eindringliches Beobachten und das Sehen, das ins Innere dringt, müssen an ihre Stelle treten.“

[81] Dazu bezieht auch BIEHLER (1985, S. 73) Stellung: „Die Medienpädagogik hat sich eine Zeitlang an der sog. ‚informationstheoretischen Kommunikationsmetapher‘ orientiert, d.h. Kommunikation wurde verstanden als die Übermittlung von Informationen, die von einem Senden in einem Medium kodiert und vom Empfänger dann deko[d]iert werden. Dieser Ansatz hat zur Voraussetzung eine Auffassung von Wissen als einem fest gegebenen Inhalt und eine passive Rolle des Rezipienten. Medien s[i]nd dabei lediglich Träger von Informationen im Übermittlungsprozeß.“ Bereits am Beispiel des Lesens einer Karte erscheine es jedoch „inadäquat, Karten lediglich als Medium der Wissensübermittlung zu verstehen, wobei der Leser schlicht die Information dekodiert, die der Kartograph in der Karte kodiert hat. Das Lesen einer Karte ist ein aktiver Prozeß, das resultierende Wissen beim Leser ist nicht fest vorgegeben, sondern von jeweiligen Leseinteressen und Anwendungssituationen abhängig und beinhaltet u. U. Informationen über geographische Beziehungen, an die der Kartograph bei der Konstruktion der Karte gar nicht explizit gedacht hat. Jedenfalls wäre ein solches aktives Verhältnis zu Karten ein wünschenswertes Ziel“ (ebd., S. 73).

Original): Eine möglichst präzise und eindeutige „Interaktion auf einer sprachlich-symbolischen Ebene", wie ROYAR (2013, S. 44) sie implizit fordert, basiert entscheidend auf interindividuell geteilten Verständigungsmitteln, aber derartige „Produkte einer *vollzogenen* Mathematisierung [tun] einer zu *vollziehenden* Abbruch" (Freudenthal 1978, S. 207; Hervorhebung im Original). So könne etwa die lineare Schrift als am besten kontrollierbare und kontrollierende Kommunikationsform eine Einengung des Denkens bewirken (André Leroi-Gourhan 1980); umgekehrt sei die Mehrdeutigkeit bildlicher Darstellungen oftmals sogar ein Vorteil, weil sie gerade dadurch dem abgebildeten Sachverhalt gerecht werde (Jörg Voigt 1993). „Oder anders gesagt: der pädagogisch-didaktische Nutzen einer Veranschaulichung liegt gerade in der *Differenz* zu dem mathematischen intendierten und nicht in der *Identität*" (Seeger 1993, S. 5; Hervorhebung im Original).

ii. … ein objektiver Gültigkeitsanspruch über einen subjektiven gestellt wird – auch dann wären mehrdeutige Darstellungen zu meiden. Hier gilt es, die Wissenschaft *Mathematik* vom Unterrichtsfach *Mathe* zu trennen: In Ersterer wird „rigoros formal-algebraisch logisch deduziert, um ein möglichst umfangreiches, globales, in sich geschlossenes Gebäude *syntaktisch korrekter* Aussagen zu errichten und zu erweitern" (Lambert 2020, S. 5; Hervorhebung im Original). Mathe in der Schule setzt jedoch gänzlich andere Ziele und daher auch auf andere Kommunikationsmittel, die weniger dem Anspruch der Eindeutigkeit und vielmehr dem der Zugänglichkeit gerecht werden müssen – „denn da handelt es sich in erster Linie um den Menschen, der die Wahrheit begreifen soll, und nicht um die Wahrheit, die begriffen werden soll" (Branford 1913, S. 44).

Insgesamt liefert ROYAR (2013) also valide Kritikpunkte, die sich aber ausschließlich auf die von ihm als »EIS-Prinzip« bezeichnete Auffassung bzw. auf das dahinterstehende (nachweislich gescheiterte) Bild von Mathematikunterricht beziehen. Daraus ist jedoch nicht zu schließen, dass die Suche nach sinnvollen Konkretisierungen und Modifikationen der BRUNERschen Theorie für die mathematische Unterrichtspraxis zwecklos wäre. Wertvoll sind ROYARs (2013) Hinweise dennoch, weil sie einige Mängel herausstellen, die ein EIS-Prinzip vermeiden soll. ROYAR (2013) selbst entwickelt BRUNERs Ideen zwar nicht weiter, interpretiert die Vorlage aber in einigen Punkten näher an Unterkapitel 1.2, woraus Erweiterungen zu BIEHLERs (1985) EIS-Prinzip hervorgehen können – beispielsweise die Existenz symbolischer Handlungen.

In einer Zusammenfassung von Kritikpunkten und mathematikdidaktischen Modifikationen der BRUNERschen Trias von KIRSCH (1977a, 1977b), JAHNKE (1984), BIEHLER (1985) und ROYAR (2013) sind folgende Aspekte herauszustellen:

- Die Auffassung der Repräsentationsmodi als Machen, Zeichnen, Notieren hat eingeschränkte Nützlichkeit für die Unterrichtspraxis und kann sogar

Probleme verursachen. Zentrales Anliegen beim Erlernen von Mathematik sollte der verständige bzw. kompetente Umgang mit einer Repräsentation sein, weniger der Einsatz bestimmter Darstellungsmittel.

- Die Abgrenzung von Handlungen und Bildern vom symbolischen Repräsentationsmodus ist widersprüchlich und schädlich, denn auch sie können über den konkreten Zusammenhang hinausweisen und etwas bedeuten, das nicht unmittelbar dargestellt ist.
- Für den Mathematikunterricht sind auch die „unteren‘ Darstellungsmedien“ als vollwertig anzusehen, weil Lernende auch mit ihnen kreativ Mathematik treiben und sie als echte Erkenntnismittel einsetzen können (Kirsch 1977a, S. 99). Mitunter gelinge dies besser als mit arbiträren Zeichen – und in der Geometrie ist es oft sogar natürlich. Es gelte, auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation zu beginnen.
- Wenn enaktive und ikonische Repräsentationen echte Erkenntnismittel sind, muss deren Adäquatheit sichergestellt werden: Sie sind adäquat zu dem zu gestalten, was durch sie dargestellt werden soll.

Einen zusätzlichen Beitrag zur Weiterentwicklung der Theorie, der diese Punkte aufgreift und erweitert, stiftet LAMBERT (2012, 2020). Er verpflichtet sich nicht der Vorlage von WITTMANN (1974), sondern stellt explizit und wie von KIRSCH (1977b) gefordert die Frage, „was die Trias ‚enaktiv – ikonisch – symbolisch‘ mathematik-didaktisch sinnvoll bedeuten könnte/soll“ (Lambert 2012, S. 5).

Es seien hier nur einige wesentliche Auszüge wiedergegeben, die das Neue deutlich hervortreten lassen – die vorliegende Arbeit wird ohnehin immer wieder auf diese geleistete Vorarbeit zurückgreifen. Darüber hinaus wird ebenfalls FREUDENTHAL (1983) miteinbezogen, der sich zwar nur kurz zur BRUNERschen Trias äußert, aber wegen der inhaltlichen Passung nicht unerwähnt bleiben soll.

2.1.2.4 LAMBERTs (2012) bzw. FREUDENTHALs (1983) EIS-Prinzip

Bereits MAX SIMON (1985, S. 90; Original von 1908) pocht darauf, dass die Formel zwar „[d]ie Sprache der Algebra“ sei – aber mit deren bloßen Gebrauch sei es nicht getan: „[D]er Lehrer muß erreichen, daß die Formel für den Schüler Sprache hat.“ LAMBERT (2012, 2020) breitet derartige Vorstellungen aus und verbindet sie mit der BRUNERschen Trias:

„Sprache besteht aus Zeichen *und* Regeln“, wobei auch Regeln des inhaltlichen Deutens und des Anwendens auf reale und vorgestellte Situationen einbegriffen werden (Lambert 2020, S. 8; Hervorhebung im Original). Es handelt sich also um *„Zeichen mit Kontexten, die ihnen (Spiel-)Regeln auferlegen*; zur Semantik gesellt sich die Syntax“ (Lambert 2012, S. 17 f.; Hervorhebung im Original). Ein derartiges Zeichen weise „über den konkreten Fall [hinaus] und es erlaubt, neue Aussagen zu generieren“ (Lambert 2015a, S.16) – dies zeichnet nach WITTMANN (1974, S. 70) den generativen Charakter einer Sprache aus.

Zwei Kernpunkte sind nun zentral:

- „[E]s ist interessant und angezeigt, das Vorhandensein dieser Regeln von ihrem (Noch-)Nichtvorhandensein begrifflich zu trennen“ (Lambert 2020, S. 8) – mithilfe der BRUNERschen Trias[82]: „Die Unterscheidung zwischen ikonisch und symbolisch ist […] in einem solchen *Sprachesein von Mathematik* zu suchen“ (Lambert 2012, S. 17; Hervorhebung im Original).
- Ob ein Zeichen *für den Schüler Sprache hat*, ist abhängig von der Person. Eine entsprechende Feststellung gilt daher nur für diese Person, darf nicht allein am Zeichen festgemacht werden und muss auf intersubjektiven variablen Faktoren beruhen: *„Zeichen haben symbolische Kapazitäten, die bei Lernenden unterschiedlich weit aufgeladen sind. Ob eine Darstellung ein Zeichen oder ein Symbol ist, hängt immer vom Vorwissen des Lernenden ab“* (Lambert 2020, S. 8; Hervorhebung im Original).

Beide Kernpunkte fließen in die folgende Beschreibung des Mathematiklernens ein: „Mathematiklernen bedeutet in dieser Perspektive, aus Zeichen ohne Regeln für sich *Symbole als Zeichen mit Regeln* zu machen“ (Lambert 2020, S. 8; Hervorhebung im Original). In diesen Rahmen fügen sich die Charakterisierungen der Darstellungsebenen enaktiv, ikonisch und symbolisch ein:

Zur symbolischen Darstellungsebene werden jegliche regelbeladenen Zeichen gezählt. Dieser Kategorie *können* also auch reale Handlungen mit konkreten Objekten und abbildende Zeichen angehören (Lambert 2012, S. 17). Natürlich *können* ebenfalls formal-algebraische Zeichen symbolisch sein – sie müssen es aber nicht: „Es macht mathematikdidaktisch auch Sinn in Formeln zwischen Formelzeichen und Formelsymbolen zu unterscheiden. […] Zu Beginn, wenn man noch gar keine Regeln hat, sind auch Variablen nicht-symbolische Zeichen“ (Lambert 2012, S. 17). Diesen Aspekt expliziert keine der vorherigen Adaptionen, obwohl BRUNER (1974, S. 64) selbst ihn gemäß Unterkapitel 1.2 andeutet: „Auf diese Weise kann man die Anleitung für die Konstruktion eines Quadrats folgendermaßen schreiben: x□ + 4x + 4. In diesem Stadium sind das lediglich Namen, die in kleinen Sätzen zusammengefügt werden.“ Losgelöst von der Zuschreibung zu einer Darstellungsebene ist eine solche Unterscheidung für formal-algebraische Zeichen inhaltlich dennoch Gang und Gäbe. Sie trat bereits in Ansätzen bei KIRSCH (1977a) auf[83] und findet sich beispielsweise bei ERWIN PAPPERITZ (1901) oder JOHN DEWEY wieder, der tote, nutzlose Symbole (hier: Zeichen) von solchen unterscheidet, die mit Sinn gefüllt sind (hier: Symbole):

> *Abstrakte Symbole, die nicht durch eigene Aktivität des Kindes mit Sinn gefüllt, sondern ihm von außen aufgeprägt werden, sind tote und nutzlose Symbole. Sie*

[82] Dass die BRUNERsche Trias als Rahmen gewählt wurde, ist keine Willkür: „[D]ie BRUNERschen Begriffe ‚ikonisch‘ und ‚symbolisch‘“ seien auf diese Weise „in ihre ursprünglich intendierte Bedeutung und die damit mögliche Reichweite zurückzuführen“ (Lambert 2020, S. 7).

[83] KIRSCH (1977a) zieht kreatives Arbeiten auf einem niederen Repräsentationsniveau rezeptivem Arbeiten auf einem höheren Repräsentationsniveau vor – siehe oben.

> *verwandeln den Lernstoff in Hieroglyphen, die etwas bedeuten könnten, wenn man nur den Schlüssel dazu hätte. Da aber der Schlüssel fehlt, ist der Stoff eine tote Last.*

Dewey (zitiert nach Wittmann 2003, S. 18; Hervorhebung im Original)

> So mysteriös dem Laien eine Formel, so erschrecklich ihm eine der silbenreichen Wortbildungen der Chemiker vorkommen mag, dem Gelehrten giebt sie mit einem Schlage ein klares Bild von der Zusammensetzung, ja sogar von der verwickelten Struktur und Entstehung eines Stoffes. – So unheimlich vielleicht dem, der sich seiner selten oder nie bedient hat, das Zeichen eines Integrals erscheinen mag, dem Mathematiker verkörpert es eine Fülle von Begriffsverknüpfungen.

Papperitz (1901, S. 4 f.)

Damit formal-algebraische Zeichen Symbole werden, wird beim Lernen aus Handlungen ein *Umweg* über enaktive und ikonische Darstellungen eingeschlagen – KIRSCH (1977a) drückte dies zuvor mit dem *Beginn* auf der geeigneten Stufe aus, wobei die Idee selbst natürlich sehr viel älter ist (Lambert 2012). Als enaktiv oder ikonisch bezeichnet LAMBERT (2012) all die zuvor genannten Darstellungen, solange deren symbolische Kapazitäten von der Person noch nicht im beabsichtigten Maße aufgeladen sind. Handlungen mit realen Objekten werden dabei naheliegenderweise als enaktiv eingeordnet, während alle übrigen derartigen Darstellungen – auch am Computer und sowohl unverfremdete als auch verfremdete – als ikonisch gelten.

Das Lernen aus Handlungen macht sich somit zunutze, dass auf der enaktiven sowie auf der ikonischen Ebene zentrale Erkenntnisse über dieselbe Sache errungen werden können, die in den formal-algebraischen Zeichen dargestellt werden soll – die Darstellungsebenen bilden „Aspekte desselben ‚Eigentlichen'" (Lambert 2012, S. 15):

> Zwei Rechtecke mit den Seitenlängen a und b bzw. a und c haben den Flächeninhalt ab bzw. ac und den gemeinsamen $ab+ac$. Über verstandene Regeln gegeben ist dies symbolisch. Die gleichen Regeln ergänzt um die zur Addition von Streckenlängen liefern nach passendem Aneinanderlegen der Rechtecke (enaktiv und/oder ikonisch) den Gesamtflächeninhalt auch in der Darstellung $a(b+c)$ und damit eine neue Regel $ac+ac=a(b+c)$. Damit wird der potentielle Symbolgehalt der Zeichen erweitert, die Zeichen [werden] durch Verinnerlichung weiter individuell mit Symbolgehalt aufgeladen.

Lambert (2012, S. 17)

Inhaltlich unterscheidet sich LAMBERT (2012) damit deutlich von der von ROYAR als »EIS-Prinzip« betitelten Auffassung – dementsprechend kritisiert er diese auch selbst: „Der *Fundamentalirrtum* in zahlreichen Rezeptionen ist es, die Unterscheidung von Kodalität und Modalität zu ignorieren und daher ‚ikonisch' schlicht mit ‚bildlich' zu identifizieren und ‚symbolisch' mit der ‚Verwendung von Formelzeichen' (Lambert 2020, S. 11). „Diese Verkürzung ist wenig hilfreich, denn sie verspielt das große Potential, das in der Unterscheidung von ikonischen und symbolischen Zeichen liegt“ (Lambert 2019, o. S.) – und das sich jetzt ausschöpfen lässt:

Mit Hilfe der neuen Deutung der Darstellungsebenen werden Rückschlüsse möglich, die die Adäquatheit einer Darstellung nach KIRSCH (1977b) bzw. die Isomorphie zu den strukturellen Prinzipien der Syntax nach BRUNER (1971b) fokussieren. LAMBERT (2020, S. 9; Hervorhebung im Original) fordert „*kohärente* enaktive Operationen“, die sich dadurch auszeichnen, „dass die Handlung stimmig zum Inhalt passt“ (Lambert 2019, o. S.). Der Prototyp für eine praktische Umsetzung dieses theoretischen Anspruches betrifft das Herleiten der Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck: Es lässt sich begründet dafür plädieren, von einem Papierdreieck nicht drei, sondern nur zwei Ecken abzureißen und diese an die dritte zu legen (Abb. 13).

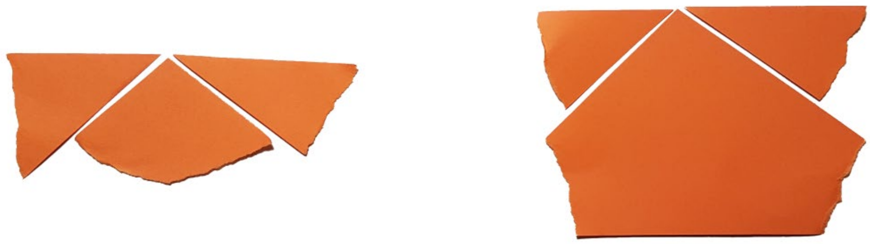


Abb. 13: Innenwinkelsumme im Dreieck: unstimmige und stimmige Handlung

> Es ist [beim Abreißen dreier Ecken] einfach zu sehen, dass sich stets ein gestreckter Winkel ergibt, also die Innenwinkelsumme im (ebenen) Dreieck 180° beträgt. Aber diese Handlung führt leider nicht zur üblicherweise gewünschten konstruktiv-geometrischen symbolischen Begründung. Doch die Idee des Abreißens lässt sich hier retten. […] *Reiße zwei Ecken eines Papierdreiecks ab und lege sie an die Dritte. Was stellst du fest? Begründe!* In dieser Situation bleibt die *zur Begründung notwendige* Parallele erhalten und ermöglicht einen Weg zum Beweis.

Lambert (2019, o. S.; Hervorhebung im Original)

Die vorliegende Arbeit wird mehrfach zu diesem klassischen Beispiel zurückkehren, um Aspekte der vertieften Theorie zu erläutern.

Bei einem abschließenden Vergleich mit den vorherigen Wiedergaben und Modifikationen der BRUNERschen Trias von KIRSCH (1977a, 1977b), BIEHLER (1985) bzw. JAHNKE (1984) sowie ROYAR (2013) muss zunächst festgehalten werden, dass wiederkehrende Probleme identifiziert und ähnliche Ziele verfolgt wurden. Bei LAMBERT (2012, 2020) jedoch schlägt sich der Modifikationsprozess terminologisch nieder – und zwar im Zentrum der Theorie –, sodass die Zuschreibung zu einem Repräsentationsmodus nicht mehr faktisch ist, sondern intersubjektiv in Abhängigkeit von den Vorstellungen einer Person variiert, wie bereits in Unterkapitel 1.2. Erst dadurch nimmt die Theorie das subjektive Sprachesein als unverzichtbares Kriterium für die Beurteilung von Lernprozessen in sich auf, sodass eine eigenständige und adäquate Beschreibung, Analyse, Strukturierung und Unterstützung von mathematischen Lernprozessen durch die Theorie potentiell möglich wird.

Wer Interpretationen der BRUNERschen Trias analysiert, wird dabei nur selten Vordenkerinnen oder Vordenker der beiden oben genannten Kernideen antreffen. Auf wenigen Seiten von FREUDENTHALs *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (1983) klingen sie zumindest an:

> Consider the number concept "three" and the geometrical concept "straight". Before the child masters these words, he can be familiar with what they mean: clapping his hands thrice and running straight to a goal if it is suggested to him (the enactive phase); sorting out cards with three objects or straight lines pictured on them (the ikonic phase). Mastering the word *three* (or *straight*) means he is in the symbolic phase, since "three" as a word is a symbol for the concept three (or "straight" is for *straight).* But likewise the three dots on the dice can be a symbol; for instance, in playing a game of goose. A child that counts intelligently is in the symbolic phase even if this counting is accompanied by moving counters on the abacus. Adding on the abacus is enactive only for a moment. After the first experience it has become symbolic, though the symbolism differs from that of the written digits.

Freudenthal (1983, S. 31; Hervorhebung im Original)

FREUDENTHAL (1983) reißt in dieser kurzen, anscheinend wenig beachteten Passage die zuvor genannten Ideen an:

- Zeichen sind nie aus sich heraus Symbole, sondern werden zu solchen durch ein intersubjektiv variierendes Attribut der Person, die mit den Zeichen umgeht: *being familiar with what they mean*. Ausschlaggebend bei der Zuschreibung zu einem Repräsentationsmodus ist also die subjektiv erfasste Bedeutung – und nicht eine gewisse, geteilte Notationsweise:

> For the experimenter, a drawing of a circle with an inscribed equilateral triangle has a structure determinded by his geometrical experiences; for a child who has not had much experience with geometrical figures, the figure can be meaningless, or ornamental, or a picture – ikonic or symbolic – of something, and the particular view that it has of the figure determines how it would react to the assignment to copy it. The child may have seen symbols of Fiat, PTT, VW, and recognises them by some structural resemblance, even though the various instances are not at all congruent or similar.

Freudenthal (1983, S. 240)

> Researchers – piagetian and others – often show that they did not grasp the fact that lack of names for mental objects and actions – or lack of knowledge of the conventional names – does not prejudice anything with respect to the possession of the mental objects or actions themselves.

Freudenthal (1983, S. 238)

- Infolgedessen sind formal-algebraische Darstellungen nicht per se Symbole, sondern *können* es sein – genau wie reale Handlungen (*adding on the abacus is enactive only for a moment*) und bildhafte Darstellungen (*likewise the three dots on the dice can be a symbol*). Ein formal-algebraisches Symbol ist damit nur ein spezielles Symbol neben anderen, nämlich ein „arbitrary symbol“ (ebd., S. 240). In diese Kategorie fallen noch zahlreiche weitere, nicht formal-algebraische Darstellungen, falls sie Symbole sind – beispielsweise das Logo der *Niederländische Eisenbahnen AG* (Abb. 14):

  > Adults who have not the slightest difficulty to recognise the symbol of the Netherlands Railways […] do have the greatest difficulty to draw it from memory, end even when copying it, they repeatedly look back at the model. Why? Because it is an arbitrary symbol with no clear context.
  >
  > Freudenthal (1983, S. 240 f.)

Abb. 14: Logo der Niederländische Eisenbahnen AG

FREUDENTHAL (1983) setzt die obige Bedeutung zum Bezeichner »symbolisch« bzw. »Symbol« jedoch nicht immer konsequent um. Ähnlich wie es sich bereits im letztgenannten Zitat andeutet, verwendet er an späterer Stelle »ikonisch« und »symbolisch« als feststehende Zuschreibungen in Abhängigkeit von den verwendeten Mitteln:

> The child gets acquainted early with two fundamentally different ways to reproduce objects and events – that is, fundamentally different in our view: the picture of a fire-engine in action on the one hand, and besides that the printed text, which according to the reader contains the word ‚fire-engine‘ and a story about extinguishing a big fire. The child himself can interpret the pictures and he can check the authenticity of the story by having it read once more, by the same or another reader. How does the child experience this patent contrast – patent to us – between ikonic and symbolic means of reproduction? I cannot answer this question.
>
> Freudenthal (1983, S. 293)

2.1.3 Zwischenfazit zu den Modifikationen der BRUNERschen Trias

„Wir postulieren […] als eine Aufgabe für die Didaktik, die Repräsentationsweisen mathematischer Begriffe *gezielt und systematisch* zu analysieren“, hieß es zu Beginn von Kapitel 2 (Kirsch 1977b, S. 169; Hervorhebung im Original). Die Mathematikdidaktik ist diesem Auftrag gefolgt, hat den Prozess im Laufe der Jahre wesentlich vorangetrieben und unter anderem eine überarbeitete Auffassung der Repräsentationsmodi selbst hervorgebracht.

Aber wie intensiv und nachhaltig haben all diese Modifikationen den mathematikdidaktischen Alltag geprägt, in dem Lernprozesse mit Hilfe der BRUNERschen Trias immer wieder geplant, ausgewertet und strukturiert werden – beispielsweise, wenn Darstellungen häufig auch nur beiläufig einem Repräsentationsmodus zugeordnet werden? Wie viel davon konnte wiederum bis in die Praxis des Unterrichtens ausstrahlen?

Antworten auf diese Fragen soll das nachfolgende Unterkapitel liefern, in dem der heutige, alltägliche Umgang mit der BRUNERschen Trias bei Anwendung auf ausgewählte Unterrichtsgegenstände dargestellt wird.

2.2 Konkrete Anwendungen von EIS-Prinzipien

Es ist nicht nötig, eine – im wahrsten Sinne des Wortes – erschöpfende Übersicht zu Umsetzungen von EIS-Prinzipien aus dem vergangenen Jahrzehnt ins Feld zu führen, denn typische Deutungsunterschiede und vorherrschende Tendenzen treten sehr früh zutage. Ersteres, die typischen Deutungsunterschiede, zeigen sich an zwei exemplarischen Anwendungen der BRUNERschen Schlagwörter auf denselben mathematischen Inhalt besonders deutlich: der Dijkstra-Algorithmus zum Finden kürzester Wege in gewichteten Graphen (Tabelle 3).[84]

enaktiv	
„Ein *enaktives* Modell wäre im Extremfall eine künstliche ‚Autobahnwelt', die durch ein Programm generiert wird, mit ‚fahrenden' Objekten, die durch Datenstrukturen beschrieben sind" (Sigrid Schubert & Andreas Schwill 2011, S. 139). Entscheidend ist, dass dabei die Wirklichkeit „durch Objekte modelliert [wird], an denen man Handlungen vornehmen kann, und die selber aktiv werden und auf andere Objekte einwirken können, die folglich vom Menschen kognitiv erfasst werden wie ihre Originale" (ebd., S. 139).	„Aus Unterlegscheiben für die Städte und Nähgarn für die Wege bauen die Schülerinnen und Schüler ein Modell des Graphen. Die Fadenlänge als Entfernung übersetzt diesen relevanten symbolischen Gehalt in eine enaktiv durchspielbare Situation" (Lambert 2015b, S. 48). Entscheidend für die Zuschreibung als *enaktiv* ist neben der Möglichkeit effektiver Manipulation, dass Lernende sich der zugrundeliegenden Muster und Ursachen noch nicht bewusst sein müssen (Lambert 2015a).[85]

[84] In der rechten Spalte von Tabelle 3 werden auch Erläuterungen am Beispiel des Baumdiagramms aus LAMBERT (2015a) mit einbezogen und auf Darstellungen im Rahmen des Dijkstra-Algorithmus übertragen. Dies ist einerseits hilfreich, weil die charakteristischen Eigenschaften der Darstellungsebenen in LAMBERT (2015a) detaillierter erläutert werden als in LAMBERT (2015b), und andererseits problemlos möglich, da das Baumdiagramm ein spezieller Graph ist.

[85] Ob eine Darstellung für eine Person noch als enaktiv zu bezeichnen ist, wenn sie die Muster und deren Ursachen wahrnimmt, bleibt hier unklar. Das Zusammenspiel zwischen enaktiver und symbolischer Darstellungsebene wird allerdings im Zuge der Vertiefung der Theorie in Kapitel 3 weiter geklärt.

ikonisch

Abb. 15 sei (zweifellos) ein ikonisches Modell:

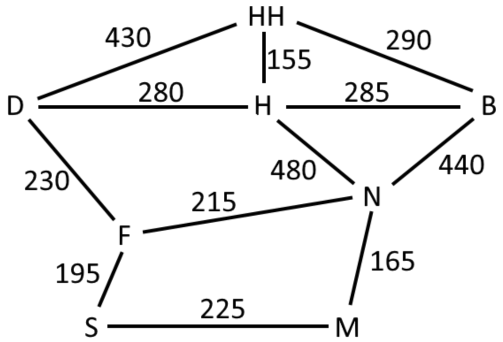


Abb. 15: Ikonisches Modell (Schubert & Schwill 2015, S. 139)

Eine womöglich noch ikonische Darstellung sei Tabelle 2.

	besucht	Entfernung	Von wo aus bin ich dort hingekommen?
SB	✓	0	SB
F		?	?
FD		?	?
HN		211	SB
KL	✓	70	SB
MH		129	KL
MZ		151	KL
TR		90	SB

Tabelle 2: Möglicherweise noch ikonische Darstellung (Lambert 2015b, S. 49)

symbolisch

In einem symbolischen Modell entspricht dem „Autobahnnetz ein Tripel $A = (X, Y, d)$. X ist die Menge der Städte, Y eine Teilmenge der Menge aller 1- und 2-elementigen Teilmengen von X, die Direktverbindungen, und $d: Y \rightarrow \mathbb{N}_0$ die Entfernungsfunktion.

$A = (X, Y, d)$, wobei

$X = \{HH, D, H, B, F, N, S, M\}$, $Y \subseteq 2^X$ mit

$Y = \{\{HH\}, \{D\}, \{H\}, \{B\}, \{F\}, \{N\}, \{S\}, \{M\},$
$\{HH, D\}, \{HH, H, \}, \{HH, B\}, \{H, D\}, \{H, N\},$
$\{H, B\}, \{D, F\}, \{B, N\}, \{F, N\}, \{F, S\}, \{N, M\},$
$\{S, M\}\}$

und $d: Y \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$d(\{HH, D\}) = 430, d(\{HH, H\}) = 155,$
$d(\{HH, B\}) = 290, d(\{H, D\}) = 280,$
$d(\{H, N\}) = 480, d(\{H, B\}) = 285,$
$d(\{D, F\}) = 230, d(\{B, N\}) = 440,$
$d(\{F, N\}) = 215, d(\{F, S\}) = 195,$
$d(\{N, M\}) = 165, d(\{S, M\}) = 225,$
$d(z) = 0$ für alle übrigen $z \in Y$“
(Schubert & Schwill 2015, S. 140).

Jede der vorherigen Darstellungen kann symbolisch werden: „So wird ein Baumdiagramm, das ein Zufallsexperiment erfasst, individuell zu einem Symbol, wenn verstanden wird, dass man Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren und Pfadwahrscheinlichkeiten addieren kann. In welchem Maße ein Zeichen für eine Person ein Symbol ist, ist damit davon abhängig, wie viele Spielregeln jenes Zeichens diese bereits verinnerlicht hat“ (Lambert 2015a, S. 16). Jede der zuvor genannten Darstellungen wird also für eine Person symbolisch, sobald sie erkennt, dass der exemplarisch erarbeitete Algorithmus auch für beliebige andere Städte trägt (Lambert 2015b).

Tabelle 3: Unterschiedliche Verwendung der BRUNERschen Bezeichner

SCHUBERT & SCHWILL (2011) in der linken Spalte von Tabelle 3 beziehen sich – anders als LAMBERT (2015a 2015b) in der rechten – zwar nicht explizit auf BRUNER, sondern auf GERHARD FREY (1961)[86]. Dennoch sind sie hier aufgeführt; einerseits, weil das Gegenüberstellen am selben Inhalt Abweichungen besonders deutlich herausstellt; andererseits, weil ihre Begriffsbilder zu den Bezeichnern »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« symptomatisch sind für die Anwendung der Theorie: Die Modi enaktiv, ikonisch, symbolisch werden mit den Tätigkeiten Machen, Zeichnen und Notieren gleichgesetzt und mehr oder weniger streng einer hierarchischen Abfolge unterworfen (vgl. Lambert 2019 bzw. Royar 2013). Die nachfolgenden Beispiele bestätigen die weite Verbreitung dieser Auffassung:

- WINTER (2016, S. 83; Original von 1989) empfiehlt für das Entdecken von Teilbarkeitsregeln „[g]enaue Einzeluntersuchungen an verschiedenen Zahlen […], auf dem wirklichen Abakus, auf dem gezeichneten und an der Zifferndarstellung (also enaktiv, ikonisch, symbolisch)."
- TIMO LEUDERS (2016, S. 3) lässt gefundene Muster in den Endziffern einiger Produkte auf „verschiedene Weisen" begründen: „ikonisch oder rechnerisch auf dem Niveau der Grundschule oder auch in symbolischer Darstellung […]:
  $(10a\ +\ b)(10c\ +\ d) = 100ac +\ 10ad + 10bc + bd$
  $=\ 10\,(10ac + ad + bc + y) + x$ mit $bd = 10y + x$".
  Das implizierte charakteristische Kriterium einer symbolischen Darstellung bestätigt sich in weiteren Beispielen: „*Wenn* eine Isomorphie bestehen würde, würde der übersetzende Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}_6 \to S_3$ auch die Kommutativität erhalten, oder symbolisch notiert:
  $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(x + y) = \varphi(y + x) = \varphi(y) \circ \varphi(x)$" (ebd., S. 95; Hervorhebung im Original). LEUDERS' (2016) Begriffsbild von ikonischen Darstellungen manifestiert sich an anderer Stelle, etwa bei der Begründung des Assoziativgesetzes mit Abb. 16: „Auch die anderen Gesetze lassen sich ikonisch begründen" (ebd., S. 5).

[86] FREY (1961) wiederum zieht Vorarbeiten aus der Semiotik heran, insbesondere Aspekte aus MORRIS' Zeichentheorie. Ihm zufolge ist ein Zeichen ikonisch, „wenn es dem, was es bezeichnet, in einem anschaulich-bildlichen Sinne ähnlich sieht, wenn es dem Betrachter sofort kundgibt, was es bezeichnet" (Frey 1961, S. 218). Die Parallelen zu BRUNER werden u. a. daran deutlich, dass FREY (1961) dieselben Unstimmigkeiten sieht, auf die BIEHLER (1985) oben aufmerksam macht: „Stilisierte Zeichen können durchaus einen erkennbaren ikonischen Bezug auf das Bezeichnete haben, trotzdem aber nicht für jedermann erkennbar sein. So sind die Zeichen einer Schaltskizze sehr wohl ikonisch, d.h. sie geben bildhaft etwas wieder, sind aber doch nicht ohne weiteres für jeden verständlich. Es gehört eine Vorkenntnis dazu" (Frey 1961, S. 218). Der Ausweg lautet hier: „Wir wollen ein Zeichen als ikonisch bezeichnen, wenn eine solche Ähnlichkeit überhaupt vorhanden ist" (ebd., S. 218).
Auch die Auffassung von Symbolischem entspricht jener aus Unterkapitel 1.1: Alternativ zur Schaltskizze als Darstellung eines Schwingkreises könne der Physiker Gleichungen aufstellen, die demselben Zweck dienen: „Die Gleichungen stellen wieder ein Modell der gleichen speziellen Wirklichkeitsstruktur dar. Es besteht keine unmittelbare bildhafte Ähnlichkeit mit dem Abgebildeten, das Gleichungssystem stellt ein symbolisches Modell [ein zusammengesetztes, strukturiertes Zeichen] dar" (ebd., S. 218 f.).
Enaktive Modelle führt FREY (1961) nicht auf. Sie entstehen bei SCHUBERT & SCHWILL (2011, S. 139) „in Fortsetzung der Überlegungen von Frey".

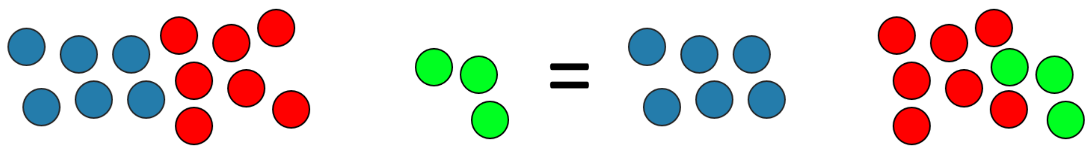


Abb. 16: Ikonische Begründung des Assoziativgesetzes nach LEUDERS *(2016, S. 5)*

Selbiges drückt die folgende Aufgabenstellung aus: „Im ersten Schritt sollten Sie sich vergewissern, dass $(u+v)^3 = (3uv)(u+v)+(u^3+v^3)$. Beweisen Sie dies sowohl symbolisch als auch ikonisch. Das Bild rechts [ein passend zerlegter Würfel mit Kantenlänge $u+v$] kann dabei helfen“ (ebd., S. 176). Einen enaktiven Modus erwähnt LEUDERS (2016) nicht.

- PREDIGER & HEFENDEHL-HEBEKER (2016) reflektieren eine Ausarbeitung von KIRSCH (1976) zum Lernen nach dem Spiralprinzip. Diese beginne bei „ausbaufähige[n] Vorerfahrungen durch die Betrachtung von Zweierpotenzen (Wachstum einer Wasserrose, Schachbrettaufgabe)“, erarbeite sich im weiteren Verlauf „eine adäquate Beschreibung von exponentiellen Wachstumsprozessen mittels prozentualer Wachstumsraten“ und führe schließlich dank der „Verfügbarkeit des Funktionsbegriffs und der Quadratwurzel“ zu einer Herleitung der Funktionsgleichung, wobei in allen Phasen gewisse Grundeigenschaften oder Einsichten zu erringen seien (Prediger & Hefendehl-Hebeker 2016, S. 256 f.). Dieses Erreichen von Einsichten spielt bei der Einordnung zu den BRUNERschen Darstellungsebenen jedoch keine Rolle:

  > In diesem Prozess verändern sich auch die Darstellungsebenen und die Stufen der Wissensbildung. Der Schachbrettaufgabe können sich die Lernenden enaktiv nähern, das Verfolgen von Wachstumsprozessen in diskreten Schritten kann durch Wertetabellen, Operatordiagramme und Funktionenplots, also überwiegend ikonisch, dargestellt werden. Schließlich wird durch die sprachliche und formale Fassung von beobachteten Eigenschaften das symbolische Niveau erreicht. Mit dem Wechsel der Darstellungsebenen verschränken sich Stufen der Wissensbildung, die von induktiven Formen der Wissenserschließung durch Experimentieren und Beobachten bis zum formalen Deduzieren reichen […].

  Prediger & Hefendehl-Hebeker (2016, S. 257)

- ANDREAS BÜCHTER & REINHOLD HAUG (2013) berichten von einem Schüler, der die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ miteinander vergleichen soll. Zunächst spannt er sie mit Gummis auf einem Geobrett und überträgt dies anschließend als Zeichnung in ein Punktraster – „er geht also von der enaktiven auf die ikonische Ebene über. In einem weiteren Abstraktionsschritt würde die Erweiterung von Brüchen auf der rein symbolischen Ebene folgen“ (ebd., S. 2). BÜCHTER & HAUG (2013, S. 2) werten den Materialeinsatz hier als produktiv, aber für die „Mitschülerinnen und Mitschüler, die die Aufgabe direkt auf der symbolischen Ebene lösen konnten, wäre das Geobrett […] möglicherweise hinderlich gewesen.“

- Dieser Einschätzung folgen – ebenfalls am Beispiel der Bruchrechnung – Reiss & Hammer (2013). Unterrichtsinhalte erschließen sich entsprechend der enaktiven, ikonischen und symbolischen Form „aus (eigenen) Handlungen, bildlichen Darstellungen oder in Form von abstrakten Symbolen“ (ebd., S. 31). In der Bruchrechnung beginnen Kurse daher „mit konkreten Manipulationen an geeigneten Größenmodellen (‚Pizza-‘ oder ‚Rechteckmodell‘ […]), nehmen Bezug auf bildliche Darstellungen und führen dann in die Ebene der symbolischen Darstellung durch Bruchzahlen ein“ (ebd., S. 31). In einem zweiten Beispiel zum Lösen linearer Gleichungen bezeichnen sie das „*Handeln mit Schachteln und Hölzchen*“ als enaktiv, Abb. 17 als ikonisch und das Lösen mit Äquivalenzumformungen als symbolisch (ebd., S. 32 f.; Hervorhebung im Original). Pointiert findet sich dieses Verständnis auch bei Martin Kramer (2013, S. 77): „Die konkrete Aufgabe wird mit Hölzern gelegt und gelöst (enaktive = handelnde Präsentationsebene), an die Tafel gezeichnet (ikonische = bildhafte Ebene) und übersetzt (symbolische = formale Ebene)“.

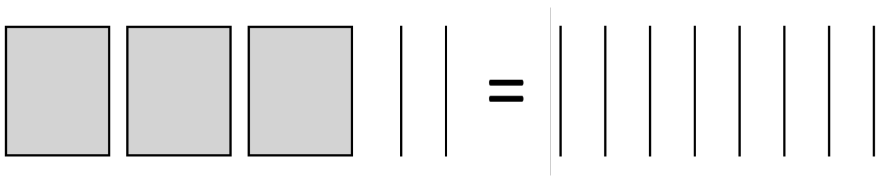


Abb. 17: Ikonische Darstellung nach Reiss & Hammer (2013, S. 32)

Analog verhalte es sich laut Reiss & Hammer (2013, S. 32) beim Symmetriebegriff: Auf das enaktive Falten folge das ikonische Zeichnen unter Verwendung der charakteristischen Eigenschaften und „[s]chließlich kann man die Achsenspiegelung im $\mathbb{R}^2$ durch eine geeignete Matrix darstellen und kommt so zur symbolischen Ebene“.

- In Übereinstimmung damit stehen die Beispiele zur Addition von Brüchen in Klasse 5/6 und zu Zuordnungen und Funktionen in Klasse 7/8 bei Andreas Filler (2019, S. 2), der zwar in seiner allgemeinen Beschreibung der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene den Erkenntnisgewinn auf jeder dieser Ebenen betont, aber dessen Vorliegen oder Ausbleiben nicht terminologisch unterscheidet: Es werden „konkrete Handlungen mit unterschiedlich großen Pizzastücken“ sowie das „Legen von Dingen auf Plätzen“ als enaktiv bezeichnet, das Addieren „durch Anfertigen von Zeichnungen“ bzw. „Zuordnungsdiagramme (Pfeilbilder)“ als ikonisch und Darstellungen wie „$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=$“ oder „$f\colon M \to N$“ als symbolisch.
- Friedhelm Padberg & Sebastian Wartha (2017, S. 25 bzw. S. 167) betiteln Arbeitsmittel und ikonische (zeichnerische) Darstellungen als nichtsymbolisch. Symbolisch seien hingegen beispielsweise der geschriebene oder

gesprochene Rechenausdruck 17 − 4 oder die nachfolgende Begründung der Aussage $m : n = \frac{m}{n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ (Padberg & Wartha 2017, S. 2; S. 138):

$$m : n = \frac{m}{1} : \frac{n}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

- Prototypische Darstellungen auf der symbolischen Ebene in GILBERT GREEFRATH, REINHARD OLDENBURG, HANS-STEFAN SILLER, VOLKER ULM & WEIGAND (2016, S. 130) reihen sich hier ein: Die Linearität einer dort definierten Funktion D_f „lässt sich auch auf der symbolischen Ebene begründen: Mit $f(z) = a \cdot z^2 + b \cdot z + c$ erhält man die Differenzen-$\mathbb{Z}$-Funktion $D_f(z) = f(z+1) - f(z) = a(z+1)^2 + b(z+a) + c - (az^2 + bz + c)$ $= 2az + a + b$. Damit lassen sich die Veränderungen des Graphen bei der Variation von a und b sowie die Unabhängigkeit von D_f vom Parameter c erklären".
- Darlegungen aus der Primarstufe zeichnen dasselbe Bild zu den Auffassungen der Repräsentationsmodi, wie die Zuordnung an einer digitalen Stellenwerttafel in SILKE LADEL (2014) andeutet (Abb. 18).

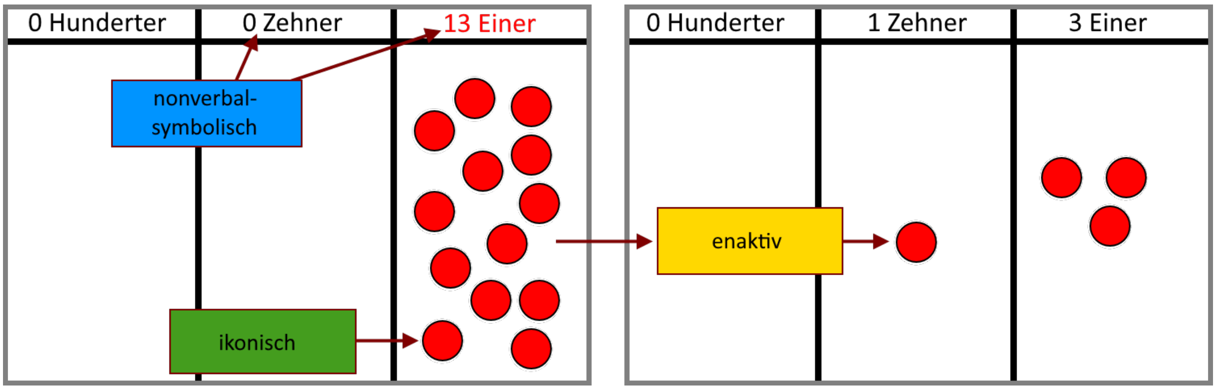


Abb. 18: Enaktiv, ikonisch, symbolisch am Beispiel einer digitalen Stellenwerttafel in LADEL (2014, S. 9)

- Im Kontext der Primarstufe bleibend umfasst die enaktive Ebene für DAGMAR BÖNIG (1993, S. 27) „Handlungserfahrungen" bzw. „alle im Unterricht praktisch durchgeführten Aktivitäten mit konkretem/strukturiertem Material", die ikonische Ebene „Abbildungen von Zahlen, Operationen und didaktischen Modellen, die sich nicht ausschließlich mathematischer Zeichen bedienen" und die symbolische Ebene „Darstellungen mathematischer Zeichen (Zahlensymbole, Operationszeichen, Gleichungen)".

Nach diesem skizzenhaften Überblick zum typischen Umgang mit der BRUNERschen Trias in der Mathematikdidaktik ist eine in Abschnitt 2.1.3 aufgeworfene Frage noch unbeantwortet: Welche Modifikationen konnten bis in die Praxis des Unterrichtens ausstrahlen? Einen naheliegenden Zugang hierzu eröffnen Unterrichtsbeobachtungen und Schulbuchanalysen. Allerdings würde es überraschen, wenn die Praxis des Mathematikunterrichts ein völlig anderes Bild zeichnete als dessen Theorie – immerhin ist die gegenseitige Einflussnahme (in der Regel) erwünscht und ein erklärtes Ziel, anders als bei den Systemen Mathe und Mathematik (vgl. Lambert 2020). Auf eine umfangreiche Analyse der Schulpraxis wird daher verzichtet und lediglich eine stellvertretende Darstellung und Anwendung der BRUNERschen Trias aus dem (einem Schulbuch zugehörigen) Begleitband für Lehrerinnen und Lehrer angefügt, die die eindimensionale BRUNER-Rezeption aus Unterkapitel 1.1 als geläufige Deutung bestätigt:

> MiniMax baut auf dem aktuellen Forschungsstand der Mathematikdidaktik und den entsprechenden Erkenntnissen auf. Im Folgenden sei exemplarisch die Berücksichtigung des E-I-S-Prinzip (enaktiv – ikonisch – symbolisch) erläutert. […] Der Lernprozess des Kindes sollte drei verschiedene Darstellungsebenen durchlaufen, die sich durch ihren Abstraktionsgrad unterscheiden. Auf der enaktiven Ebene wird der Lerngegenstand durch eigenständige Handlungen des Kindes erfasst. […] Bei der schriftlichen Division bedeutet das beispielsweise, dass die Aufgaben mit Systemblöcken handelnd gelöst werden. Auf der ikonischen Ebene wird der Lerngegenstand durch Abbildungen oder Zeichnungen visualisiert. Im Beispiel der schriftlichen Division bedeutet das bei MiniMax, dass der schriftliche Algorithmus schematisch anschaulich dargestellt wird. Zuletzt folgt die symbolische Ebene, auf der Sachverhalte nur noch durch Zeichen (Ziffern und Rechenzeichen) dargestellt werden.

Sabine Dietrich et al. (2021, S. 7)

2.3 Fazit zu Anwendungen der BRUNERschen Trias

Zusammenfassend ist der alltägliche Gebrauch der BRUNERschen Schlagwörter sichtlich von der Auffassung geprägt, die ROYAR (2013) als »EIS-Prinzip« betitelt und kritisiert (vgl. Unterabschnitt 2.1.2.3). Er entspricht somit trotz aller Modifikationsbemühungen der eindimensionalen BRUNER-Rezeption (vgl. Unterkapitel 1.1), ohne die Vorschläge und Kritikpunkte von KIRSCH (1977a 1977b), FREUDENTHAL (1983), JAHNKE (1984), BIEHLER (1985), ROYAR (2013) und LAMBERT (2012, 2020) aufzugreifen. Es scheint fast so, als vertrauten weite Teile der Mathematikdidaktik vollends auf WITTMANNs (1974) frühe Darstellung seines EIS-Prinzips, ist dieser doch eine Koryphäe der Mathematikdidaktik. Dass Irrtümer dadurch nicht ausgeschlossen werden, zeigt die Geschichte:

> Aristoteles hatte behauptet, daß ein Körper desto schneller fiele, je schwerer er sei. Zwei Jahrtausende haben die Gelehrten es ihm nachgeschwätzt. Wer hätte auch so naseweis sein wollen, einem Aristoteles zu widersprechen. Galilei wagte es. Er dachte über Aristoteles' Lehre nach und kam zum Ergebnis, daß sie falsch sein mußte.

Freudenthal (1973, S. 57)

Als entmutigendes Fazit muss damit KIRSCHs (1977b, S. 169; Hervorhebung im Original) betagte Einschätzung wiederholt werden: Die „Repräsentationsmodi' *enaktiv*, *ikonisch*, *symbolisch* spielen […] eine wichtige Rolle in der heutigen Mathematikdidaktik. Der Didaktiker verwendet sie meist unreflektiert."

ROYARS (2013, S. 37) rückschließende Beurteilung der BRUNERschen Theorie scheint nun doch bestätigt: Ist sie tatsächlich „keine tragfähige Basis, auf die sich die gängige Unterrichtspraxis […] vom Handeln über die Anschauung zur formalen Symbolik wissenschaftlich gründen ließe"?

Die vorliegende Arbeit ist in der Absicht entstanden, dies zu widerlegen. Die Ursache für den noch üblichen Gebrauch wird vielmehr darin gesehen, dass der Nutzen einer reflektierteren Deutung der Theorie noch nicht ausreichend nachvollziehbar, eindringlich und überzeugend ausgearbeitet wurde, obwohl die eigentliche Reflexion in weiten Teilen bereits geleistet wurde: In Anbetracht von Modifikationen wie jener in LAMBERT (2012, 2020) muss das Rad nicht neu erfunden, sondern nutzbar gemacht werden. Insofern ist bei der nun folgenden Vertiefung der Theorie nicht angedacht, die BRUNERsche Trias umzudeuten in bislang ungeahnter Art und Weise. Vielmehr soll Bestehendes gemäß Abb. 1 *aufgegriffen*, *analysiert*, *übertragen*, *adaptiert*, *synthetisiert*, *weiterentwickelt* und *konkretisiert* werden – wobei auch das *Begründen* und *Explizieren* notwendig sind, um eine Anpassung des eigenen Begriffsbildes zu motivieren und zu unterstützen. Anlässe für die genannten Tätigkeiten bieten sich reichlich, wie die folgenden Fragen blicklichtartig andeuten sollen:

- *Analysieren*, *begründen* und *explizieren*: Inwiefern ist es mathematikdidaktisch bedenklich, die Repräsentationsmodi mit den Aktivitäten Machen, Zeichnen, Notieren gleichzusetzen?
- *Adaptieren, synthetisieren* und *weiterentwickeln*: Zu welcher Kategorie gehören Formeln, wenn sie nicht per se als symbolisch gelten? Wie lassen sie sich terminologisch innerhalb der Theorie von Bildern trennen?
- *Weiterentwickeln* und *explizieren*: Welche Regeln sind es, die ein Zeichen zum Symbol machen? Wer darf darüber entscheiden?
- *Aufgreifen*, *übertragen*, *begründen* und *explizieren*: Inwiefern werden die Begriffe *ikonisch* und *symbolisch* in ihre ursprünglich intendierte Bedeutung zurückgeführt? Worin besteht diese?
- *Konkretisieren* und *explizieren*: Was ist die mögliche Reichweite der Theorie? Welche konkreten Rückschlüsse für die Praxis des Unterrichtens lassen sich generieren? Welche weiteren Potentiale lassen sich ausschöpfen, die eine verkürzte Auffassung verspielt?
- *Aufgreifen*, *analysieren* und *explizieren*: Wo liegen Anknüpfungspunkte an umliegende Theorien der Mathematikdidaktik bzw. größere Überschneidungen mit solchen?

Die nachfolgenden Kapitel widmen sich unter anderem diesen Fragen.

3 Vertiefung der Theorie

Auf die Bestandsaufnahme in Kapitel 1 und 2 folgt mit Kapitel 3 die eigentliche Vertiefung der Theorie gemäß der Übersicht zum methodischen Vorgehen (Abb. *1*).[87] Der erste Schritt besteht demzufolge in einem *Aufgreifen* und *Analysieren*.

Diese Absichten verfolgt Unterkapitel 3.2 für die eindimensionalen BRUNER-Rezeptionen, wobei Unstimmigkeiten zutage treten, die einem unmittelbaren *Übertragen* und *Adaptieren* – der zweite Schritt in Abb. 1 – im Wege stehen. Aus diesem Grund setzen die nachfolgenden Unterkapitel das *Aufgreifen* und *Analysieren* zunächst fort und bedienen sich einiger Begrifflichkeiten aus der Semiotik: Herangezogen werden vor allem ECO in Unterkapitel 3.3, wegen seiner Übersicht zu gängigen Zeichenklassifikationen, sowie PEIRCE in Unterkapitel 3.5 (u. a. in der Wiedergabe von HOFFMANN und DÖRFLER), weil dieser die Grundlage einer tradierten und viablen Bedeutung zu den Bezeichnern »symbolisch« und »ikonisch« stiftet. Darüber hinaus haben dessen Werke bereits Niederschlag in der mathematikdidaktischen Literatur gefunden (vgl. etwa das semiotische Dreieck bei BROMME & STEINBRING (1990, S. 160)).

Das so ermöglichte *Übertragen* und *Adaptieren* setzt stets unmittelbar nach dem Analysieren des Aufgegriffenen ein, also in Unterkapitel 3.4 bzw. 3.6. Dabei führt Unterkapitel 3.4 sowohl Aspekte der eindimensionalen BRUNER-Rezeptionen als auch solche von ECO zusammen, sodass hier bereits ein erstes *Synthetisieren* stattfindet, das aus Übersichtsgründen in Abb. 1 ausgespart wurde. Das eigentliche *Synthetisieren* der gesamten Vorarbeit sowie deren *Weiterentwicklung* – Schritt drei in Abb. 1 – ist verwoben mit dem Übertragen von PEIRCE' Begrifflichkeiten, obliegt daher ebenfalls Unterkapitel 3.6 und wird in Unterkapitel 3.7 fortgesetzt. Hierbei kann schließlich eine Bedeutung zum Bezeichner »enaktiv« stimmig ergänzt werden.

Mit der Vertiefung der Theorie gehen somit diverse Bedeutungsverschiebungen einher, die Abb. 19[88] gebündelt aufführt. Sie finden nicht immer Ausdruck in der Verwendung eines neuen Bezeichners, weshalb Abb. 19 gleiche Bezeichner mit (teilweise) abweichender Bedeutung mit Indizes unterscheidet. Auf die Verwendung dieser Indizes wird im Fließtext wiederum wegen der klaren Zugehörigkeit zum jeweiligen Unterkapitel verzichtet.

---

[87] Ergänzend zum einleitenden Advance Organizer kann auch das vorausgreifende Lesen des abschließenden Zwischenfazits in Unterkapitel 3.8 eine strukturierende Hilfe darstellen.

[88] Unter Verwendung der später entwickelten Terminologie sei darauf verwiesen, dass Abb. 19 zum jetzigen Zeitpunkt nicht bereits vollumfänglich durchdrungen werden soll, sondern erst im Laufe des weiteren Lesens von einem *Zeichen* zu einem *Symbol* wird.

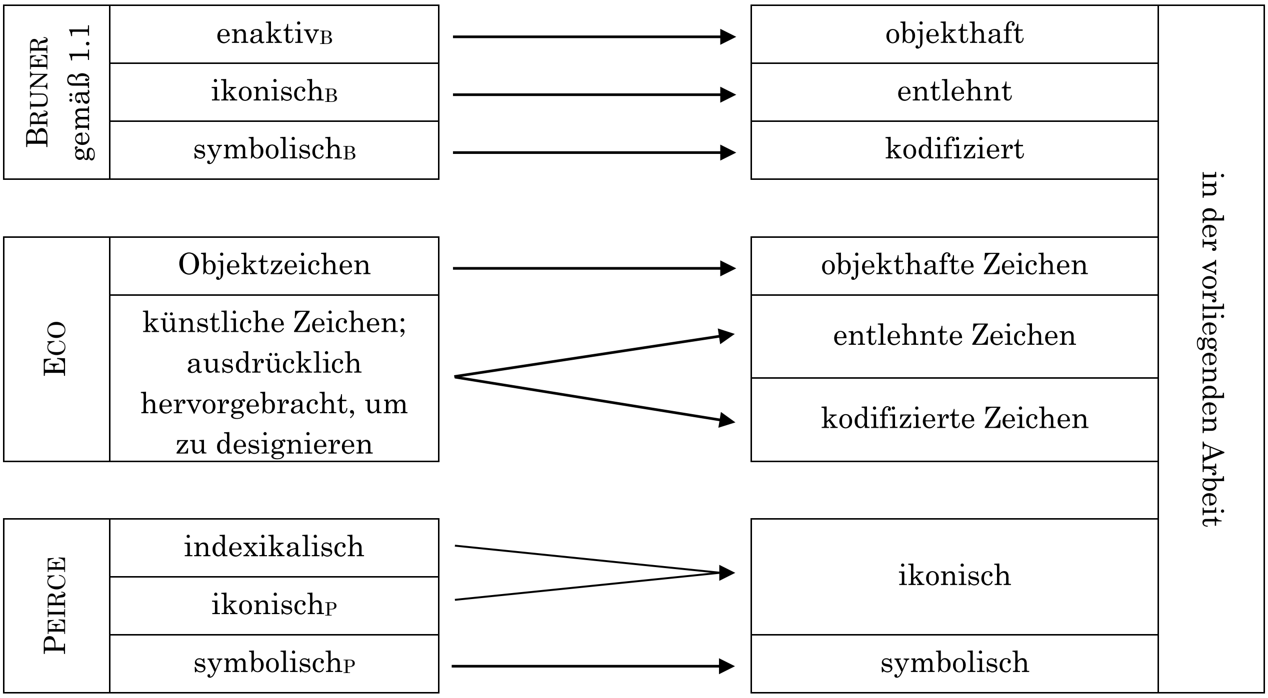


Abb. 19: Bedeutungsverschiebungen[89]

Unerwähnt im obigen Advance Organzier blieb das nun folgende Unterkapitel 3.1. Es beleuchtet grundlegende Auffassungen zum Mathematiklernen (aus Handlungen) und wird der Vertiefung der Theorie vorangestellt, um eine Argumentationsgrundlage für spätere Begründungen zu liefern.

3.1 Auffassungen zum Mathematiklernen (aus Handlungen)

Als Aufhänger dient eines der obigen Zitate: „So wird ein Baumdiagramm, das ein Zufallsexperiment erfasst, individuell zu einem Symbol, wenn verstanden wird, dass man Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren und Pfadwahrscheinlichkeiten addieren kann“ (Lambert 2015a, S. 16).

Aus seinem Kontext gegriffen ermöglicht diese Beschreibung unterschiedliche Interpretationen: Soll ein Baumdiagramm bereits dann als Symbol gelten, wenn Äußerungen zum Gebrauch dieses Werkzeugs *inhaltlich* verstanden wurden, oder muss die Person dazu „[e]inen *Sachverhalt* verstehen“ (Bender 1991a, S. 54; Hervorhebung im Original)? Die Ursache der Mehrdeutigkeit liegt darin, dass „‚Verstehen‘ unterschiedliche Bedeutung“ hat, „[j]e nachdem, auf welchen Gegenstandsbereich es sich bezieht“ (Bender 1991a, S. 53, vgl. Hans Hörmann (1983)) – siehe auch BREIDENBACH (1956)[90] und WOLFRAM MEYERHÖFER (2018):

---

[89] Bezeichner, deren Bedeutung bei PEIRCE bzw. ECO von jener in der vorliegenden Arbeit (teilweise) abweicht, werden hier durch Indizes unterschieden.

[90] „Unterrichtsgegenstände können *Gehalte* sein, die erfaßt werden sollen, oder *Techniken*, die angeeignet werden sollen. Von der Sicht des Kindes her unterscheiden wir demnach […] Unterrichtsgegenstände des *Erfassens*, in denen Einsicht in die Gegenstandsstruktur gewonnen werden soll, und […] Unterrichtsgegenstände des *Tuns*, in denen Können angestrebt wird“ (Breidenbach 1956, S. 23; Hervorhebung im Original).

> Was wird im derzeitigen deutschen mathematikdidaktischen und schulischen Diskurs unter „Verständnis“ verstanden?
>
> 1. Lehrer/innen und auch Student/innen meinen mit Verstehen technisches Können. Einen mathematischen Gegenstand verstanden haben heißt für sie, dass man die zugehörigen Aufgaben lösen kann.
> 2. Zumindest implizit weit verbreitet ist der Ansatz, Verstehen bestünde in der Fähigkeit, verschiedene Repräsentationen eines Gegenstandes ineinander zu übersetzen.
> 3. Ich werbe hier für einen Ansatz, der Verstehen als die begriffliche Durchdringung eines Gegenstandes konzipiert.
>
> Meyerhöfer (2018, S. 1243)

Der im Eingangszitat zum Baumdiagramm ausgelassene Kontext ist die *Verstehensorientierung* – ein für sich genommen ebenso mehrdeutiger Bezeichner. Das dahinterstehende Anliegen wird jedoch immer wieder ausführlich expliziert, wie ARNOLD FRICKE (1970a, S. 7) deutlich bestätigt: „Es ist eigentlich erstaunlich zu sehen, mit welcher Beständigkeit diese eigentlich selbstverständliche Forderung nach einsichtsvollem, denkendem Rechnen in der Literatur wiederholt wird.“ Allein BREIDENBACH (1956) zitiert u. a. JOHANN BERNHARD BASEDOW[91] (1763), OVERBERG[92] (1793) sowie WILHELM HARNISCH[93] (Daniel Krüger & Harnisch 1816) und positioniert sich selbst[94]. Es ließen sich beispielsweise HERMANN LORBERG[95] (1878), SIMON[96] (1985; Original von 1908), MAX WERTHEIMER[97] (1957;

[91] „Die Arithmetik ist wegen ihrer Beschaffenheit das beste Mittel, den Verstand zu schärfen; aber sie hört fast auf es zu sein, wenn der Schüler, wie es fast gemeiniglich geschieht, die Lehrsätze durch die bloße Autorität für wahr annimmt“ (Basedow 1763, zitiert nach Breidenbach 1956, S. 300).

[92] „Seid nicht damit zufrieden, daß sie die Manier wissen, wie dieses oder jenes zu machen ist; sondern suchet sie auch, soviel möglich, dahin zu bringen, daß die den Grund davon einsehen“ (Overberg 1793, S. 558).

[93] „Der Schüler soll mit Einsicht und Bewußtsein rechnen, soweit es seine Kraft gestattet, und zugleich Fertigkeit, Schnelligkeit und Sicherheit im Rechnen besitzen“ (Harnisch 1816, zitiert nach Breidenbach 1956, S. 303).

[94] „Es gibt eine und nur eine einzige unabdingbare Forderung, die wir im Rechnen an jede Einführung stellen müssen […]: *es muß unter allen Umständen auf die einfachste und auf die sicherste Weise auch beim schwachen Kind Einsicht erzeugt werden*“ (Breidenbach 1956, S. 47; Hervorhebung im Original).

[95] „Den Schülern Namen ohne Begriffe einprägen zu wollen, ihnen Regeln zu geben ohne Beweise, ohne wenigstens das Verlangen nach einem Beweis zu wecken und dem künftigen Beweis den Platz offen zu halten, ist in der Sexta gerade so verkehrt wie in der Tertia […]; die Beweise können und sollen dort wie hier subjectiv dieselbe Strenge, d. h. diese Überzeugungskraft besitzen, mag ihre Form auch noch je verschieden sein“ (Lorberg 1878, S. 60).

[96] „[I]n der Math. nützen ihm [dem Schüler] Kenntnisse nichts ohne Erkenntnis, welche in angestrengter psychischer Arbeit errungen werden muß. […] Die Stählung des Willens, die Gewöhnung auf geistigem Gebiete sich selbst zu vertrauen, die Strenge gegen eigene und fremde Behauptungen sind wesentliche Früchte des math. Unterrichts, dem in der Erziehung der Jugend zur geistigen Mündigkeit eine führende Rolle zufällt“ (Simon 1985, S. 36; Original von 1908).

[97] „Der Rechenunterricht sollte nicht das Hauptgewicht auf den Drill legen, sondern das Kind die strukturellen Eigentümlichkeiten und Erfordernisse gegebener Situationen entdecken lassen, und es lernen lassen, mit ihnen sinnvoll umzugehen“ (Wertheimer 1957, S. 133; Original von 1945).

Original von 1945), OEHL[98] (1962), MARTIN WAGENSCHEIN[99] (1970, S. 212 f.) und nicht zuletzt das DZLM[100] (o. J.) ergänzen.

In diesem Kontext wird bezogen auf das Eingangszitat von LAMBERT (2015a) deutlich, dass es nicht genügen kann, den Hinweis einer Lehrperson zum Multiplizieren und Addieren von Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm inhaltlich zu verstehen, damit selbiges zum Symbol wird. Vielmehr ist an MEYERHÖFERs (2018) *begriffliche Durchdringung eines Gegenstandes* zu denken:

> Allgemein kann man das, was eine begriffliche Erschließung von mathematischen Gegenständen sein soll, entlang der folgenden Fragen abstecken: Was ist eigentlich das, was hier zu verstehen ist? (Und: Was ist hier automatisiert zu können, welche Fertigkeiten sollen also ausgebildet werden?) Warum funktioniert dieses Verfahren? Warum führt es immer zu einem korrekten Resultat? Wie anders könnte die Sache konstruiert sein? Warum ist die Sache so benannt? Wie anders könnte die Sache benannt sein? Wie ist die Sache historisch entstanden? Was wird mit diesen Veranschaulichungsmitteln eigentlich erzählt? Was wird hier repräsentiert? Was bedeuten diese Bilder und Repräsentationen?
>
> Meyerhöfer (2018, S. 1246)

Eine derartige Klarstellung bezüglich einiger Ziele von Mathematikunterricht dient nicht nur der Vermeidung von Missverständnissen. Sie zieht auch Rückschlüsse über Vorstellungen zum Lernen aus Handlungen nach sich und stiftet darüber vermittelt sogar die Motivationsgrundlage für die gründliche Auseinandersetzung mit dem EIS-Prinzip:

Disparate Vorstellungen zum Lernen aus Handlungen drücken sich u. a. darin aus, ob nur eine oder aber mehrere Situierungen vorgesehen werden, um ein und denselben Begriff zu bilden. Letzteres befürworten beispielsweise ZOLTÁN PÁL DIENES[101] (1965) oder GRIESEL[102] (1976). Der Zeitpunkt der Veröffentlichungen

---

[98] „Auch bei den kleinsten Maßnahmen muß das Kind erkennen, warum diese Maßnahmen zweckmäßig oder notwendig sind. […] Man achte solche Dinge nicht für ‚Kleinigkeiten'. Nur wenn wir alle Gelegenheiten ausnützen, das Kind immer wieder vor das ‚Warum' zu stellen, haben wir Aussicht, es vor gedankenlosem, mechanischem Tun und vor den nachteiligen Wirkungen des Autoritätsglaubens […] zu bewahren" (Oehl 1962, S. 29).

[99] „Die wunderbare Wirkung, die das mathematische Denken auf den Geist hat, besonders auf den werdenden Geist des jungen Menschen, kommt nur dann zustande, wenn der Funke der aktiven und vollkommenen Einsicht zündet; wenn auf dem Gesicht des in ein Problem Hineingesogenen […] jenes gelöste Lächeln aufgeht […]. Jeder von uns kann das, wenn ihm nur eines gegönnt ist: die Möglichkeit zum ruhigen, selbsttätigen, eindringlichen und inständigen Nachdenken" (Wagenschein 1970, S. 212 f.).

[100] „Verstehensorientierung von Anfang an muss der Grundsatz für den Unterricht sein" (DZLM o. J., Abs. 4, 5).

[101] „Um […] das Erfassen des mathematischen Kerns einer Abstraktion zu fördern, muß dieselbe begriffliche Struktur an möglichst vielen äquivalenten Veranschaulichungen geboten werden" (Dienes 1965, S. 44).

[102] „Freilich reicht *eine* zu mathematisierende Situation nicht aus, um einen Begriff zu entwickeln. Man braucht dazu mehrere Situationen, die […] nur in dem übereinstimmen, das für die Begriffsbildung wesentlich ist" (Griesel 1976, S. 68; Hervorhebung im Original).

deutet an, dass diese Auffassung vor allem, aber nicht ausschließlich[103], zu Zeiten der Strukturmathematik (vgl. Abschnitt 5.1.3) populär war. Dies ist durchaus plausibel, weil ihre Grundannahmen begünstigend wirkten:

> Da die Mathematik zunehmend gesehen wird als die Lehre von den möglichen Strukturen, gilt es, Strukturbegriffe zu verdeutlichen, das heißt solche, die das Wesen mehrerer Erscheinungsformen in ihrem Ordnungsgefüge erfassen und damit auch nur durch Abstraktion aus den verschiedenen Realsituationen gewonnen werden können. Dieser Prozeß der Abstraktion ist nicht möglich, wenn man den in Frage stehenden Begriff an nur einer typischen Darstellung einführen würde […], um ihn hinterher schrittweise zu verallgemeinern […].
>
> Heinrich Besuden (1970b, S. 127)[104]

Die von MEYERHÖFER (2018) genannten Aspekte sind jedoch schwer vorstellbar als Resultat eines Abstreifens irrelevanter Eigenschaften. Gegen diese Vorstellung vom Lernen aus Handlungen treten dementsprechend beispielsweise JOHANNES WITTMANN[105] (1933), AEBLI[106] (1963), BESUDEN[107] (1970a) und DÖRFLER (1988) ein:

> Was muß man von den konkreten Handlungen weglassen, um zur Operation 5×4 zu kommen? Wenn nicht diese Multiplikation schon gewußt wird, schon bei der Handlung als mathematische Operation mitgedacht wird, scheint eine solche Abstraktion nicht möglich zu sein. Ich vermute, daß überhaupt die Vorstellung einer Abstraktion als Weglassen des Akzidentiellen und Hervorheben des Wesentlichen nur dadurch entstehen kann, weil das schon entwickelte Denken als Ausgangspunkt genommen wird, in dem das sogenannte Wesentliche schon konstruiert ist. […] Das Mathematische ist also

---

[103] „Treutlein hat immer hervorgehoben, daß durch Mannigfaltigkeit der Modelle zunächst dafür gesorgt werden muß, daß der Schüler von Nebensächlichkeiten, wie Material, Farbe usw. abstrahieren lernt“ (Lietzmann 1919, S. 57).

[104] BESUDEN (1970b, S. 127) rezitiert hier lediglich die „Herleitung der Forderung nach mehreren Modellen“, die einen „überzeugenden Ansatz“ nutze, schließt sich ihr aber selbst nicht uneingeschränkt an: „Es wäre sogar hinderlich […], wollte man Kindern eine Tatsache wie $8 = 5 + 3$ an mehreren verschiedenen Dingmengen wirklich vorführen. […] Viel leichter erkennen die Kinder die Allgemeingültigkeit von $8 = 5 + 3$, wenn an *einem* Stellvertreter, der all das andere bedeuten kann, die vielerlei anderen Dinge *gedanklich* miteinbezogen und nun die zugehörigen Beziehungen aufgedeckt werden“ (ebd., S. 131; Hervorhebung im Original).

[105] „So meint man, anschaulich zu verfahren, wenn man dem Kinde im Anfangsunterricht *einen* Apfel, *einen* Griffel, *einen* Finger vorzeigt und ihm unter starker Betonung des Wortes ‚ein‘ vorspricht: Das ist *ein* Apfel, das ist *ein* Griffel, das ist *ein* Finger. […] Ein trügerisches Beginnen! […] Dabei macht man die Voraussetzung, daß die Zahlen als Anzahlen gleichsam Eigenschaften der vorgezeigten Mengen sind, die von den Mengen wechselnder Dinge nur loszulösen, zu abstrahieren sind, etwa wie die Eigenschaften rot, hart, weich usw.“ (Wittmann 1933, S. 150 f.).

[106] „Diese geistigen Operationen haben nichts zu tun mit jenem Abstraktionsvorgang, den die empiristischen Didaktiker und Psychologen beschrieben haben. Es handelt sich keinesfalls darum, durch einen Ausscheidungsprozeß die gemeinsamen Bestandteile der verschiedenen Größen zu suchen, sondern darum, ein System von Operationen aufzubauen und durch diese den ins Auge gefaßten Begriff zu definieren“ (Aebli 1963, S. 21 f.).

[107] Da Zahl und Operationen nichts Gegenständliches sind […], können sie auch nicht wie Gegenstandsbegriffe aus den vielfältigen Erscheinungsformen der Dinge abstrahiert werden. […] Somit kommt es also im Rechenunterricht nicht auf die Vielzahl der Dinge und den Wechsel der Arbeitsmittel, sondern auf die Art der Handlungen an, die den Begriff konstituieren“ (Besuden 1970a, S. 120).

> „eingebettet“ in die, ja vielleicht verdeckt von komplexer Realität. Aber wenn man all dies beiseite läßt, davon absieht – so bleibt letztlich gar nichts übrig: Die naive Abstraktion führt ins Leere!
>
> Dörfler (1988, S. 104 f.)

Denselben Fehler – das entwickelte Denken als Ausgangspunkt – identifizieren BENDER & SCHREIBER (1985) für die geometrischen Grundbegriffe:

> Wenn wir Lineal und Häuserkante (als gerade) oder Blatt Papier und Schultafel (als eben) identifizieren, so müssen wir doch wissen, von welchen Eigenschaften wir absehen sollen. Ein Lineal und eine Schultafel ließen sich vielleicht identifizieren, weil beide aus Holz gemacht sind. Aber ein Lineal und eine Häuserkante? Wie findet man die ihnen gemeinsame Eigenschaft des Geradeseins, ohne den Begriff der Geraden nicht schon zu gebrauchen? Hier nützt auch die Feststellung nichts, daß beide (annähernd) die gleiche Form haben, denn es kommt ja darauf an, daß dies die Geradenform und nicht eine beliebige andere ist.
>
> Bender & Schreiber (1985, S. 19)

Dieser Fehler sei eine Ursache dafür, dass mathematische Operationen, Objekte oder Eigenschaften überhaupt von vorneherein als einer Handlung immanent angenommen werden. „Daß dies keineswegs so ist, zeigen Erfahrungen mit Personen, die die entsprechenden Lernprozesse […] nicht oder nicht ausreichend durchlaufen haben“ (Dörfler 1988, S. 106).

Demgegenüber sind DÖRFLERs (1988, S. 72) These folgend „Eigenschaften der Dinge und Gegenstände […] nicht als deren apriori und inhärent gegebene Wesenszüge [zu] denken, sondern bedürfen der zielgerichteten Handlungen des Menschen zu ihrer Konstruktion als kognitive Schemata“ – dies ist wiederum verträglich mit MEYERHÖFERs (2018) gedanklicher Durchdringung eines Gegenstandes. Beim Lernen aus Handlungen laufen dementsprechend „komplexe kognitive Konstruktionen“ ab, „die die mathematischen Operationen zu den Handlungen hinzutreten lassen“ (Dörfler 1988, S. 98). BENDER & SCHREIBER (1985) formulieren für den spezifischen Fall geometrischer (Grund-)Begriffe die verwandte Vorstellung einer ideativen bzw. operativen Begriffsbildung und heben Zweckmotive hervor:

> Ideation ist ein Hineinsehen von Eigenschaften, die ein Ding nicht – oder doch nur unvollkommen – besitzt. Das Hineinsehen läßt sich steigern zum Hineinformen, und dann nennen wir die Begriffsbildung *operativ*: Das Formen geschieht nach bestimmten *Handlungsvorschriften*, die wir auch Normen nennen. Wird ein Begriff operativ gebildet, so liegt sein Sinn, seine inhaltliche Grundlage in den Handlungen, die ihn verwirklichen, und den Zwecken, die damit erfüllt werden.
>
> Bender & Schreiber (1985, S. 21; Hervorhebung im Original)

In Übereinstimmung damit, aber deutlich allgemeiner gefasst, äußert sich FREUDENTHAL (1978) zu den Auffassungen des Erwerbs von Verhalten, Vorstellungen oder Begriffen: Er unterscheidet Apprehension (Allgemeinheit „vom *An*fassen der zu begreifenden Struktur selber, sei es dann in *einem* Beispiele“) von Komprehension („Allgemeinheit vom *Zusammen*fassen vieler Einzelheiten her“) (ebd., S. 192.; Hervorhebung im Original). Angetrieben durch „das Beobachten, erst meiner selbst, dann anderer, im Gedankenexperiment und im realisierten“, plädiert FREUDENTHAL (1978, S. 191 f.) bei der Einführung neuer Sachverhalte entschieden für ein apprehensives Vorgehen, während Komprehension eher beim Lehren von Routinen einzusetzen sei. Dennoch liege

> der Erwerb längs zahlreicher Beispiele […] nicht nur der herkömmlichen Praxis, sondern auch vielen Theorien des Lernens und Lehrens zugrunde, und so wird es im Großen und Ganzen auch bleiben, denn das ist der Weg des kleinsten Widerstandes. Es kostet viel weniger Mühe, den Lernenden mit einem Schauer vieler Beispiele zu berieseln als nach dem einen zu forschen, das zieht.
>
> Freudenthal (1978, S. 191)

Aus der Auffassung des Lernens aus Handlungen, die DÖRFLER (1988), BENDER & SCHREIBER (1985) und FREUDENTHAL (1978) nahelegen, resultiert nun die eingangs angekündigte Motivationsgrundlage für eine gründliche Auseinandersetzung mit dem EIS-Prinzip: Gerade weil Lernende komplexe kognitive Konstruktionen leisten müssen und das Auffinden des einen, überzeugenden Beispiels anspruchsvoll ist, profitiert die Unterrichtsplanung von einer wohldurchdachten Theorie, die einen einheitlichen sprachlichen Rahmen liefert, Erfolgsbedingungen expliziert, Fehlerquellen identifiziert und deren Ausbesserung unterstützt. Eine solche Theorie kann zwangsläufig nicht in wenigen Sätzen erläutert werden, wenn sie der Komplexität des Lernens gerecht werden soll – und selbst dann wird sie diese nicht vollends kontrollieren können.[108]

Der Entwicklung einer im obigen Sinne nützlichen Theorie für das Lernen aus Handlungen widmen sich Unterkapitel 3.3 und 3.5. Zunächst sei allerdings in Unterkapitel 3.2 die gemäß Unterkapitel 2.2 verbreitetste Auffassung des EIS-Prinzips als Ausgangspunkt dieser Entwicklung analysiert.

---

[108] Obwohl ich den Nutzen einer guten Theorie für die Praxis sehr hoch einschätze, bin ich mir der *prinzipiellen* Grenzen theoretischer Überlegungen voll bewußt. Die Praxis ist ja viel zu kompliziert, als daß man sie theoretisch im einzelnen vorwegnehmen könnte. Daher steht *den Praktikern selbst* das letzte Wort über ihre didaktischen Entscheidungen zu, die letztendlich *sie* gegenüber den ihnen anvertrauten Kindern und gegenüber der Gesellschaft verantworten müssen (Wittmann 1994, S. 157; Hervorhebung im Original).

3.2 enaktiv – ikonisch – symbolisch im Ad-Hoc-Verständnis

3.2.1 Charakterisierung und Ursachen

Die gegensätzlichen Darstellungen in Kapitel 1 überzeugen davon, dass BRUNERs Vorlage mehrdeutig ist. Im Laufe der Jahrzehnte hat sich dennoch dank (und auch trotz) diverser Wiedergaben der Theorie ein gewisses Begriffsbild etablieren können, sowohl unter „Studierenden und Lehrpersonen" als auch „in der unterrichtsrelevanten Literatur" (Lambert 2012, S. 14; Lambert 2019, o. S.):

> Weit verbreitet findet man bei Studierenden und Lehrpersonen eine hierarchisch und chronologisch strukturierte Auffassung von drei Lernebenen. In dieser Auffassung verweist „enaktiv" auf primitive Handlungen, auf die man für schwächere Lernende zurückgreifen kann, „ikonisch" auf Bilder als Hinweise zum folgenden „Eigentlichen" der Mathematik und endlich „symbolisch" auf Symbole – wie der Name ja sagt – und das sind in der Mathematik doch die Formeln und die diese erläuternden richtigen Definitionen.

Lambert (2012, S. 14 f.)

> Leider werden diese für unseren Unterricht wichtigen Kommunikationsebenen aber häufig in der unterrichtsrelevanten Literatur nur recht oberflächlich betrachtet. Überspitzt formuliert: „Enaktiv" ist, wenn die Kinder spielen oder basteln, „ikonisch" ist, wenn gezeichnet wird, und „symbolisch" ist, wenn dann (endlich) mit Zahlen oder gar mit Variablen gerechnet wird.

Lambert (2019, o. S.)

Um Missverständnissen vorzubeugen, wird dieses weit verbreitete Begriffsbild als *Ad-Hoc-Verständnis* bezeichnet, weil es in seiner Definition des Symbolischen – der zentrale Unterschied zu LAMBERTs (2012) EIS-Prinzip – deutlich stärker dem Alltagsgebrauch dieses Wortes entspricht:

> Was bezeichnen wir in Übereinstimmung mit dem normalen Sprachgefühl als »Symbol«? Wir befinden uns zweifellos mit dieser Intuition in Übereinstimmung, wenn wir sagen, daß das Kreuz das Symbol des Christentums ist, der Halbmond das der mohammedanischen Religion, der sechszackige Stern aber das des jüdischen Glaubens […]. Zweifelhaft ist im Lichte der bestehenden Praxis aber, ob z. B. mathematische und logische Zeichen als Symbol anerkannt werden können (wenn man sie auch häufig so bezeichnet).

Adam Schaff (1973, S. 173)

Dieser Alltagsgebrauch spiegelt sich ebenfalls im Duden wider: Als erste Bedeutung zum Bezeichner »Symbol« weist er „Sinnbild" aus – „die Taube als ein Symbol des Friedens" – und lässt an zweiter Stelle „Formelzeichen" folgen (Dudenredaktion o. J.). Beide Bedeutungen ließen sich durch dieselbe, grundlegende Auffassung motivieren: Symbole stellen im Alltagsverständnis das Gemeinte nicht unmittelbar dar und sind ihm nicht ähnlich, sondern bedeuten etwas für jemanden gemäß einer konventionalen Zuschreibung – ganz ähnlich, wie es WITTMANN (1974) in Unterabschnitt 2.1.1.1 entnommen wurde. Ob also die Taube von einer bestimmten Person als Symbol des Friedens wahrgenommen wird, spielt in der Alltagssprache für die Einordnung als Symbol keine Rolle: Es wäre unüblich, sie nicht immer als Symbol zu bezeichnen.

Die Alltagssprache trägt somit zweifellos zur Verbreitung des Ad-Hoc-Verständnisses bei – womöglich ist sie sogar deren Hauptursache, wobei zusätzliche unterstützende Faktoren naheliegen:

- Es ist der Verbreitung zuträglich, dass das Ad-Hoc-Verständnis gut zugänglich und einfach anwendbar ist. Handlungen, Bilder und niedergeschriebene Formeln bzw. Texte werden auf den ersten Blick eindeutig unterschieden[109]: „[D]ie Untersuchung äußerer Zeichen ist eine der einfachsten Forschungen, die wir unternehmen können, während die Untersuchung des Geistes eine der schwierigsten und anzweifelbarsten ist" (Peirce, Sem. 1.189, zitiert nach Gerhard Schönrich 1990, S. 69).
- Trotz seiner Einfachheit ist das Ad-Hoc-Verständnis nützlich: Lernprozesse gelingen im Mathematikunterricht oft besser, wenn Lernende zunächst mit konkretem Material und anschaulichen Bildern statt ausschließlich mit Formeln arbeiten. Dieses Vorgehen ist in seiner rudimentären Form altbewährt, wie etwa OVERBERG (1793, S. 560) und SIMON (1985; Original von 1908)[110] belegen. In Anbetracht dessen sollte es eigentlich verwundern, dieser rudimentären Form unverändert im Zentrum einer Theorie aus der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zu begegnen. Doch „[n]eue, gute und tiefe Ideen entstehen auch in der Pädagogik nicht sehr oft", und so umfasst „[d]as Neue am Neusten" meist „lediglich andere Bezeichnungen und veränderte Kontexte" (Führer 1997, S. 4) – folglich werden auch noch im 21. Jahrhundert längst bekannte Allgemeinposten zuweilen aufwendig empirisch bestätigt.[111]

[109] Dass diese Unterscheidung allerdings gelernt werden muss, wurde bereits in Unterabschnitt 2.1.2.4 angedeutet: „Is the contrast really felt as such or is the one picture for the child just as much pictorial as the other? Is the adult more able to look at pictures, in the same way that he can take longer steps, climb higher, speak louder? 'Writing' and 'drawing' are often synonymously used by children, as are 'reading' and 'looking at pictures'" (Freudenthal 1983, S. 293).

[110] „Für die erste Durchnahme der negativen Zahlen […] empfahl ich früher den rein formalen Standpunkt […], aber früher oder später muß man doch auf den Inhalt dieser Zahlformen eingehen. Ich muß jetzt hinzufügen, daß ich für die Schüler den rein formalen Standpunkt sehr eingeschränkt habe […]. In der Bruchrechnung habe ich ihn bis auf die letzte Übersicht in Prima ganz aufgegeben. Es ist für einen Mathematiker von Fach schwer begreiflich, wie geringes Interesse selbst die älteren Schüler dem rein formalen Standpunkt entgegenbringen" (Simon 1985, S. 71 f.; Original von 1908).

[111] „Findings indicate that using manipulatives in mathematics instruction produces a small- to medium-sized effect on student learning when compared with instruction that uses abstract symbols alone. Additionally, results revealed that the strength of this effect is dependent upon other instructional variables. Instructional variables such as the perceptual richness of an object, level of guidance offered to students during the learning process, and the development status of the learner moderate the efficacy of manipulatives. The finding that specific instructional variables either suppress or increase the efficacy of manipulatives suggests that simply incorporating manipulatives into mathematics instruction may not be enough to increase student achievement in mathematics" (Kira Carbonneau, Scott Marley & James Selig 2013, S. 396).

- Eine vierte mögliche Ursache für die Verbreitung des Ad-Hoc-Verständnisses kann in der mangelnden Abgrenzung der Repräsentationsmodi von den in der Mathematik gebräuchlichen Sprachformen verbal-begrifflich, konstruktiv-geometrisch und formal-algebraisch (nach FELIX KLEIN, vgl. Lambert (2003), dort mit abweichenden Bezeichnern) ausgemacht werden: Wem diese bereits vertraut sind, der ist geneigt, sie in den Repräsentationsmodi wiederzuerkennen.[112] Expliziert wird die fehlende Unterscheidung in LAMBERT (2020) mithilfe der Bezeichner »Modalität« und »Kodalität«.

In Anbetracht dieser Ursachen erscheint es durchaus nachvollziehbar, *enaktiv*, *ikonisch* und *symbolisch* im Ad-Hoc-Verständnis zu deuten. Um die Überarbeitung dieses Begriffsbildes anzustoßen, bedarf es daher mehr als der Behauptung, BRUNER habe all dies „nie behauptet“ (Royar 2013, S. 38), und auch mehr als des Hinweises, dass das Ad-Hoc-Verständnis ursprünglich intendierte Bedeutungen negiere (Lambert 2020). Vielmehr muss einerseits überzeugend herausgestellt werden, welche Risiken das Ad-Hoc-Verständnis für die Praxis des Mathematiklernens birgt, und andererseits, welche Vorteile eine alternative Sichtweise mit sich bringt. Zunächst sei sich Ersterem gewidmet.

3.2.2 Risiken des Ad-Hoc-Verständnisses

- *Das Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips neigt durch die Gleichsetzung von Symbolischem mit Formal-Algebraischem dazu, Letzteres zur einzigen vollwertigen Sprache der Mathematik zu erklären.*

Das Ad-Hoc-Verständnis kann sich trotz einiger Bestrebungen (vgl. Unterkapitel 2.1) nicht gänzlich von seinem hierarchischen, sequenziellen Abfolgecharakter lösen, den auch BRUNER (1996, S. 155) erst in späteren Arbeiten mit Nachdruck ablehnt. Allein der Name trägt dazu bei, indem die Schlagwörter enaktiv, ikonisch, symbolisch immer in genau dieser Reihenfolge auftreten – das SIE-Prinzip sucht man vergeblich.[113]

---

[112] Bei der Beschäftigung mit den Sprachformen werden formal-algebraische Darstellungen häufig als »formal-symbolisch« (Maike Schindler 2014) oder schlichtweg »symbolisch« bezeichnet. Ikonisches fällt anschließend mit Konstruktiv-Geometrischem zusammen, und da sich die verbal-begriffliche Sprache leider nicht so recht mit Enaktivem decken will, wird notgedrungen auf eine Erwähnung dieses dritten Modus verzichtet (so z. B. bei Leuders 2016). Außerhalb des EIS-Prinzips resultieren daraus in erster Linie lediglich terminologische Unstimmigkeiten: BÄRBEL BARZEL & STEPHAN HUßMANN (2007, S. 9) beispielsweise plädieren dafür, den Übergang zu „symbolischen Darstellungen“ nicht zu schnell anzustoßen, „sondern den Lernenden genügend Zeit auf der präformalen Stufe zu lassen.“ Inhaltlich handelt es sich dabei um eine wichtige und berechtigte Forderung, aber warum bilden »symbolisch« und »präformal« ein Gegensatzpaar? Müsste es nicht »symbolisch« und »präsymbolisch« heißen oder »formal« und »präformal«?

[113] Als didaktisches Prinzip für Lehrpersonen wäre der Bezeichner »SIE-Prinzip« sogar stimmiger, denn bei der Anwendung des Prinzips werden zunächst intendierte Symbolgehalte festgelegt und anschließend geeignete ikonische und enaktive Darstellungen ersonnen – LAMBERT (2020, S. 14) bezeichnet diesen Prozess als „[S]ituieren“; ausführlich nachvollzogen werden kann er bereits bei BREIDENBACHs (1956, S. 16 ff.) Kaufmannsspiel.

Wenn nun aber gleichzeitig Symbolisches mit Formal-Algebraischem identifiziert wird, liegt die Annahme nahe, dass Mathematiktreiben erst auf dieser letzten Stufe beginne – siehe etwa ZECH (2002, S. 106), der mit „mathematischen Zeichen" formal-algebraische Darstellungen betitelt. Dadurch wird ein inadäquates Bild von Mathematik impliziert, denn diese verwendet „neben der formal-algebraischen noch die konstruktiv-geometrische und die verbal-begriffliche" Sprachform (Lambert 2019, o. S.). Letztere fehlt im Ad-Hoc-Verständnis gänzlich, während Konstruktiv-Geometrisches mit Ikonischem gleichgesetzt wird. Nicht nur das Fehlen ist problematisch, sondern auch das Gleichsetzen:

> Ikonische Repräsentationen stellen also einerseits ein wichtiges Übergangsstadium dar, das dem Schüler den Zugang zu abstrakten Sachverhalten erleichtern kann, andererseits sind sie eben nur ein, wenn auch wichtiger Zwischenschritt auf dem Wege zu der der eigentlichen Mathematik adäquaten Darstellungsform, der symbolischen. Die Favorisierung ikonischer Darstellungen ist dann durchaus konsistent mit einer formalistischen Mathematikauffassung, wenn derartige Darstellungen ausschließlich der methodischen Sphäre zugeordnet und ‚lediglich' pädagogisch – manchmal mit einem schlechten Gewissen gegenüber der wissenschaftlichen Mathematik – gerechtfertigt werden.

Biehler (1985, S. 58)

Das Ad-Hoc-Verständnis distanziert sich also zu wenig *aus sich heraus* von einem inadäquaten, einseitigen, von mathematischen Formalismus geprägten Bild von Mathematik, gegen das Rezeptionen der BRUNERschen Trias dann eigens ankämpfen müssen (siehe z. B. Berger 2017 in Unterabschnitt 2.1.1.5), um altbekannten Hinweisen wie dem folgenden zu genügen: Mit der objektiv feststellbaren Verwendung von formal-algebraischen Darstellungen geht nicht automatisch ein Fortschritt einher.

> Nun gibt es zwar Mathematiker, sogar ausgezeichnete Mathematiker, die sehr stark formelmäßig denken. Ich bewundere manchmal ihre unglaubliche Gewandtheit im eleganten Umformen von komplizierten Formeln. Aber diese Art formales Denken ist nicht typisch für das mathematische Denken im allgemeinen. Die größten Fortschritte macht die Mathematik nicht dann, wenn eine neue schöne Formel gefunden wird, sondern wenn ein neuer Gedanke auftaucht.

Bartel Leendert Van der Waerden (1954, S. 170)

VAN DER WAERDEN bezieht sich im obigen Zitat zwar auf *fertige Mathematik*. Seine Aussage lässt sich jedoch gleichermaßen auf *werdende Mathematik* (nach Freudenthal 1973) bzw. auf *Mathe in der Schule* (nach Lambert 2020) übertragen, ähnlich wie SCHWANK (2003) die ursprünglich nur auf Mathematiker bezogenen kognitiven Präferenzen auch bei Lernenden identifiziert. Damit leitet der letzte Satz von VAN DER WAERDEN (1954) zur zweiten unerwünschten Konsequenz über, die aus dem sequenziellen Abfolgecharakter des Ad-Hoc-Verständnisses resultiert: die Vermittlung eines inadäquaten Bildes vom Mathematik*lernen*.

- *Das Ad-Hoc-Verständnis neigt durch die Gleichsetzung von Symbolischem mit Formal-Algebraischem dazu, Letzteres zum verpflichtenden und obersten Ziel mathematischer Lernprozesse in der Schule zu erklären.*

Wenn Symbolisches mit Formal-Algebraischem identifiziert wird, impliziert die Abfolge E-I-S das Emporheben formal-algebraischer Darstellungen als letzte Etappe und anzustrebendes Ziel im Mathematikunterricht. Sie werden zum unverzichtbaren Element jedes Lernprozesses erklärt, dem dann auch ein Großteil der Aufmerksamkeit zufällt, schließlich bereitet der fehlerfreie Gebrauch formal-algebraischer Darstellungen den Lernenden größere Mühe als das gewünschte Ausführen von Handlungen oder Anfertigen von Zeichnungen.

Die kognitiven und emotionalen Folgen in der Unterrichtspraxis wurden häufig beschrieben und seien hier nur angerissen: Ein Unterricht, der in erster Linie und dadurch oftmals verfrüht die formal-algebraische Sprache anvisiert, läuft Gefahr, „das Kind beim Betreten der Schule […] in eine unangenehme fremde Welt“ zu führen, „wo alles geheimnisvoll und gekünstelt ist, und die es nach ein paar Stunden mit einem Wirrwarr von Gedanken im Kopfe wieder verläßt“ (Branford 1913, S. 2). SIMON (1985, S. 60; Original von 1908) befürchtet den Verlust der Anschauung, sodass Zahlen nur als leere Zifferbilder und Regeln nicht lebendig aufgefasst werden; OEHL (1962, S. 23) warnt vor einer Abdrosselung des Denkens durch „zu frühes Hineinpressen in die sprachliche Kurzform“, die dem noch konkret-anschaulich ablaufenden Denkvorgang nicht adäquat sei; „[d]ie noch innige Verbindung Denken – Sprache wird zerrissen“, und eine Hinwendung zum mechanischen Tun ohne Einsicht in die Gründe sei die Folge. Argumentationen, die Verständnis erzeugen sollen, können zwar Teil des Unterrichts sein, beziehen sich jedoch entgegen der Forderung von FÜHRER (1997, S. 98) auf solche „Gegenstände oder Gedankendinge“, deren Bedeutung viele Lernende nicht kennen. Dadurch wirken sie vorwiegend demonstrativ und nicht explorativ (Roland Fischer & Malle 1985).[114] Dies ist für *Mathe in der Schule* nach LAMBERT (2020) in zweierlei Hinsicht problematisch: Ohne Aufdecken des Erkenntnisgrundes stelle sich „doch kein restloses kognitives Gleichgewicht“ ein, sodass außerdem auch „der affektive Bereich gestört wird“ (Wittmann 1981b, S. 82). Dementsprechend fordert SIMON (1985, S. 185; Original von 1908): „Für die Schule ist jeder Beweis zu verwerfen, der nicht den zureichenden Erkenntnisgrund aufdeckt.“ Die *Wissenschaft* Mathematik hingegen sieht hierin zurecht kein Problem, verfolgt sie doch einen objektiven Gültigkeitsanspruch (Lambert 2020).

[114] „Formeln wie: $(a \pm b) - (c \pm b) = (a - c)$, die unmittelbar aus dem Begriff der Operation erfaßt werden müßten, werden rein formell in der Weise bewiesen, daß der Schüler zwar zugeben muß, daß die Gleichung richtig ist, aber ohne in den Grund des Seins irgend einen Einblick zu erhalten“ (Simon 1985, S. 67; Original von 1908).

Prägnant formuliert FREUDENTHAL (1978, S. 207; Hervorhebung im Original) ganz in diesem Sinne: „Produkte einer *vollzogenen* Mathematisierung [tun] einer zu *vollziehenden* Abbruch“. KIRSCHs (1977a, S. 99) Äußerung aus Unterabschnitt 2.1.2.1 fügt sich hierin nahtlos ein: „Zweifellos bleiben gegenwärtig unseren Schülern zahlreiche einfache mathematische Dinge nur deshalb unzugänglich, weil sie in einer Formulierung oder Symbolisierung dargeboten werden, deren Schwierigkeit nichts mit der Sache selbst zu tun hat“.

Die hierarchische Auffassung der Repräsentationsmodi, gepaart mit der Identifikation von symbolischen Darstellungen mit Formeln, vermittelt aber nicht nur inadäquate Vorstellungen vom anzustrebenden Produkt eines Lernprozesses, sondern auch von dessen Ablauf:

- *Das Ad-Hoc-Verständnis legt ein streng sequenzielles Schema für mathematische Lernprozesse nahe.*

Das Ad-Hoc-Verständnis sieht Lernen als einen Dreischritt, der individuellen Lernprozessen oftmals nicht gerecht wird – begonnen bei den eigenen einer Lehrperson, die nach reichlich mathematischer Schulung auch dann formalen Darstellungen Erkenntnisse abringen kann, wenn sie zuvor nicht mit haptischem Material oder anschaulichen Bilder gearbeitet hat. Selbiges lässt sich zuweilen auch bei Lernenden beobachten:

> Die […] inzwischen klassisch zu nennende Stufenfolge enaktiv-ikonisch-symbolisch (Bruners E-I-S-Prinzip) ist kein Muster bzw. Modell für alle Fälle des Mathematiklernens. Es gibt Lernsituationen, wo eine dieser Stufen (noch) fehlt bzw. wenig Lernfortschritt bringt. Die Geometrie der Grundschule z. B. ist noch kaum symbolisch durchdrungen. Die Aktivitäten finden auf der enaktiven und der ikonischen Stufe statt (E-I), und natürlich in der Vorstellung. Das Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation wiederum ist stark symbolisch geprägt. Sicher sind für das Thema auch enaktive und ikonische Elemente relevant. Die entscheidenden Schritte werden aber beim Arbeiten mit Ziffern in der Stellenwerttafel absolviert.

Bauer (1993, S. 79)

Passend dazu bemerken BREIDENBACH (1956) und OSKAR MADER (1977) unabhängig vom EIS-Prinzip bzw. FÜHRER (1999) mit direktem Bezug auf selbiges:

> Seit einigen Jahrzehnten wird als unabdingbare methodische Forderung aufgestellt, jede Einführung müsse mit einer lebensnahen Aufgabe anfangen und dürfe sich erst nachträglich nackten Zahlenaufgaben zuwenden. Diese dogmatische Forderung ist falsch. […] Gibt es eine lebensnahe Aufgabe, die das besser oder gleich gut erreicht wie eine konstruierte Aufgabe, so werden wir die lebensnahe Aufgabe nehmen. Erreichen wir dagegen das Ziel, Einsicht zu erzeugen, durch eine konstruierte Aufgabe besser als durch eine lebensnahe, so müssen wir die konstruierte Aufgabe nehmen.

Breidenbach (1956, S. 48)

> Die *lebendige Anschauung* ist auch im Mathematikunterricht das Fundament der Erkenntnis. […] Die Anerkennung der Anschauung als Grundlage der Abstraktion zwingt jedoch nicht dazu, im Unterricht stets – mehr oder weniger vollständig – die „Abstraktionsreihe“ Realobjekt → gegenständliches Modell → anschauliche Zeichnung → Beschreibung → Definition bzw. Formel zu durchlaufen. Dies wäre auch unter lernpsychologischer Sicht wenig sinnvoll.

Mader (1977, S. 145 f.; Hervorhebung im Original)

> Nicht nur die erstaunliche Vielseitigkeit, auch die praktische Leistungsfähigkeit vieler mathematischer Konzepte beruht gerade darauf, daß man Repräsentationen auf Handlungs- und Bild(vorstellungs-)ebenen nur bei Bedarf und im vollen Bewußtsein der Aspektreduktion wählt. Es ist – jedenfalls im Mathematikunterricht – nicht sinnvoll, Bruners Repräsentationsmodi „enaktiv, ikonisch und symbolisch“, die ein reifes Begriffsverständnis charakterisieren sollen, als unterrichtsmethodische Bedienungsanleitung „enaktiv → ikonisch → symbolisch“ zu lesen.

Führer (1999, S. 44)

Die mathematikdidaktische Literatur mahnt beim Umgang mit der BRUNERschen Trias zwar immer wieder dazu, ihr *nicht* diese strenge Abfolge für Lernprozesse zu entnehmen – vgl. dazu Unterkapitel 2.1. Dass dieser Zusatz aber überhaupt notwendig ist, verdeutlicht das eigentliche Problem: Erneut distanziert sich das Ad-Hoc-Verständnis zu wenig *aus sich heraus* von problematischen Deutungen.

Selbst wenn die Repräsentationsmodi als weitestgehend gleichberechtigt aufgefasst werden, drohen die eigentlichen Verstehensprozesse aus dem Blick zu geraten, schließlich spielt das subjektive Verstehen im Ad-Hoc-Verständnis keine Rolle: Eine Handlung ist enaktiv, ein Bild ikonisch, eine Formel symbolisch – ohne Wenn und Aber. Daraus resultiert das vierte Risiko des Ad-Hoc-Verständnisses:

- *Das Ad-Hoc-Verständnis stellt implizit jede konkrete Handlung mit haptischem Material als lernförderlich dar.*

Hiermit gehen gleich zwei Probleme einher. Erstens wird der Lernprozess anfällig für Bruchstellen, wenn eine Lehrperson blind darauf vertraut, dass konkretes Material und anschauliche Bilder die benötigten Verstehensprozesse initiieren, denn „Manipulationen mit Klötzen allein bringen noch keinen Lernprozeß in Gang“ (Bender & Schreiber 1985, S. 261; siehe dazu auch Lietzmann 1919, S. 58; Ernst Heywang 1923, S. 165; Fritz Neigenfind 1977, S. 297 oder Carbonneau, Marley & Selig 2013, S. 396). Eine typische Bruchstelle sei der ohnehin anspruchsvolle Übergang zu Fertigkeitsübungen (Oehl 1965, S. 39). Bleibt die Einsicht wegen der ungünstigen Beschaffenheit des Materials oder des unpassenden Umgangs damit aus, liegt die „Flucht in das rein mechanische Regelrechnen“ umso näher (Oehl 1965, S. 19).

Zweitens verschenkt die Theorie ein großes Potential, indem sie keinen Beitrag dazu leistet, „passende Situationen zur Verfügung zu stellen, damit die Lernenden über Handlungen zu mathematischen Einsichten gelangen“ (Lambert 2019, o. S.). Ihr wird lediglich die Erinnerung an die altbekannte Idee entnommen, beim Mathematiklernen auch konkrete Handlungen und anschauliche Bilder einzubeziehen und die Übergänge zu pflegen – exemplarisch und pointiert demonstriert dies BERND HAFENBRAKs (2004, S. 22) Beschreibung: „EIS-Prinzip: Ein mathematischer Sachverhalt sollte möglichst in allen drei Darstellungsebenen – enaktiv, ikonisch, symbolisch – erfasst werden. Auf den Transfer zwischen den drei Repräsentationsmodi sollte besonderes Gewicht gelegt werden.“

Wie detailliert Analysen von Handlungen vor dem Hintergrund mathematischer Lernprozesse ausfallen können, demonstriert BREIDENBACH (1956): Er empfiehlt zunächst Veranschaulichungsmittel für Zahlen, in denen die gebündelten Einzelbestandteile sichtbar bleiben – OVERBERGs (1793) geschnürte Bündchen, Bunde, Päckchen usw. wären ein Beispiel dafür, während „ein einzelner Gegenstand (also 1 Groschen)“ als „Veranschaulichung der Zahl Eins“ zunächst abgelehnt wird (Breidenbach 1956, S. 163). Begründet wird dies mit der

> Erkenntnis, die das Kind gewinnen soll […]: „10 Einzelne bilden *eine* Einheit“. Die zweckmäßige Veranschaulichung dieses Satzes muß *alle* Begriffe des Satzes in gleichem Grade zur Anschauung bringen. Auch die 10 Einzelnen müssen ebenso sichtbar bleiben, wie die Einheit sichtbar gemacht werden muß.
>
> Breidenbach (1956, S. 119; Hervorhebung im Original)

Für spätere Lernprozesse wie das schriftliche Addieren hingegen wird das zuvor abgelehnte Zusammenwachsen zu einer Einheit geradezu gefordert, erneut unter Berücksichtigung des zu Erlernenden:

> Daß im schriftlichen Verfahren kaum noch aufgefaßt wird, daß 1 Zehner 10 Einzelne, 1 Hunderter 100 Einzelne umfaßt, gerade dieses Moment wird durch die Geldstücke ausgezeichnet illustriert: dem Markstück sieht man auch nicht an, daß es 100 Pfennigen gleichwertig ist. Die Wertentsprechungen […] gelten verabredungsgemäß, also in einer abstrakteren Form. Gerade dieser Umstand macht das Geld zu *dem* angemessenen Veranschaulichungsmittel für die schriftlichen Verfahren, bei denen es sich gegenüber dem mündlichen Rechnen ebenfalls um eine abstraktere Form des Rechnens handelt.
>
> Breidenbach (1956, S. 163; Hervorhebung im Original)

Natürlich muss dabei die Münzauswahl eingeschränkt werden: „Der Erfahrungsbereich ‚Geld‘ wurzelt in der ‚Zähl-Welt‘, ist aber komplizierter und variantenreicher, weil das Münzsystem Einer, Fünfer, Zehner, Fünfundzwanziger, Fünfziger und Hunderter enthält, entsprechend den Pennies (1 Cent), nickels, dimes, quarters, halves und Dollar-Münzen“ (Bauersfeld 1983, S. 18). Aus diesem Grund erschafft BREIDENBACH (1956, S. 16) keine realitätsgetreue Situation in einem Kaufmannsladen, sondern eine künstliche, in der nur die im Dezimalsystem verwendete Art des Bündelns möglich ist: „Das abgezählte Geld darf nur 1-M-Stücke, 1-Groschen-Stücke und 1-Pfennig-Stücke enthalten.“ Ähnliche

Anpassungen der erschaffenen Situation reichen bis zu den verwendeten Bezeichnern für die einzelnen Münzen:

> Ich empfehle, das Wort Groschen zu verwenden. […] Das Leben gebraucht auch das Wort Zehner für das Zehnpfennigstück. Im Unterricht ist das Wort Groschen unbedingt vorzuziehen, damit in den Reihen Einer, Zehner, Hunderter bzw. Pfennig, Groschen, Mark verschiedene Begriffe (Inhalte) auch durch verschiedene Symbole (Wörter) bezeichnet werden.
>
> Breidenbach (1956, S. 162; Hervorhebung im Original)

All diese didaktischen Überlegungen sind sicherlich nicht revolutionär, wurden schon vor BREIDENBACH (1956) diskutiert[115] und leuchten auch ohne eine theoretische Rahmung[116] ein, wie VOLLRATH (1969, S. 176) bestätigt: „Natürlich sind diese Kriterien schon immer intuitiv von guten Lehrern verwendet worden."[117] Ein intuitives Analysieren birgt allerdings stets ein größeres Risiko der Unvollständigkeit und eine größere Fehleranfälligkeit; gezogene Schlüsse sind oftmals nur mit großem Aufwand überzeugend begründbar, und das Vorgehen beim Analysieren bleibt schwer mitteilbar. Genau hier kann eine Theorie, die den Blick auf Problemstellen schärft, vielversprechende Wege zu deren Ausbesserung aufzeigt und einen einheitlichen sprachlichen Rahmen zur Verfügung stellt, Abhilfe schaffen.

In dieser Hinsicht soll sich das EIS-Prinzip in der vorliegenden Arbeit vielfach bewähren. Dass dies möglich ist, zeigt LAMBERT (2019) am Beispiel der Innenwinkelsumme im Dreieck (vgl. Unterabschnitt 2.1.2.4).

3.2.3 Fazit zum Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips

Die Interpretation der drei Repräsentationsmodi enaktiv, ikonisch, symbolisch als Verweis auf Handlungen, Bilder und Formeln wird in der vorliegenden Arbeit aus den oben ausgebreiteten Gründen als (zu) wenig förderlich und teilweise sogar als schädlich für die (Weiter-)Entwicklung von Unterricht bewertet. Trotzdem soll das Ad-Hoc-Verständnis nicht gänzlich verworfen werden, denn einige seiner zentralen Elemente greifen mathematikdidaktisch bewährte Aspekte auf. Daher gilt es, die Vertiefung der Theorie genau hier beginnen zu lassen. Dieses Einbeziehen des Ad-Hoc-Verständnisses ist nicht nur inhaltlich sinnvoll, sondern

---

[115] „Beim Aufbau des Hunderters aus reinen Zehnern fordert Dr. W. die Darstellung der neuen Einheit (des Zehners) durch einen einzigen Körper. So vorzüglich dadurch die Positionszahlschrift verbreitet wird, so steht uns doch die Anschaulichkeit, welche den ersten Systemzahlen durch die sinnliche Darstellung der Grundeinheiten noch gegeben werden kann, noch höher als dieses doch mehr äußerliche Ziel. Eine Zahlversinnlichung, die die 10 Grundeinheiten der höheren Einheit nicht wirklich sehen, sondern nur zählen läßt, verlangt eine so bedeutende Abstraktion, daß wir sie unseren Schülern nimmermehr zumuten dürfen" (Anton Ritthaler 1908, S. 239).

[116] Die theoretische Rahmung ist bei BREIDENBACH (1956) nicht das EIS-Prinzip, sondern die Forderung nach Isomorphie (vgl. Abschnitt 6.1.1).

[117] Man denke etwa an JOHANNES KÜHNEL (1954, S. 246; Original von 1916), der „innere[…] Unterschiede der gebräuchlichen Lehrmittel" identifiziert, weshalb „jeder Lehrer recht klar darüber werden [solle], was sich mit dem von ihm zur Verfügung stehenden Lehrmittel erreichen läßt."

trägt auch zur Akzeptanz der später vorgeschlagenen Begriffskonvention bei, wie BAUER (1993) für das Gegensatzpaar aktiv-entdeckend versus kleinschrittig-darbietend als Lehrmethoden für den Mathematikunterricht erläutert.[118]

Wenn nun beginnend bei Elementen des Ad-Hoc-Verständnisses eine Vertiefung der Theorie stattfinden soll (oder teilweise auch nur nachvollzogen werden soll, weil Teile der Weiterentwicklung bereits geleistet wurden, vgl. Abschnitt 2.1.2), dann muss diese Position zunächst in bestehende Konzepte der Mathematikdidaktik oder anderer Wissenschaften, derer sie sich bedient, eingeordnet werden: Worum handelt es sich also bei den Kategorien des Ad-Hoc-Verständnisses – Handlungen, Bilder, Formeln –, wenn es *nicht* gewollt ist, damit die Repräsentationsmodi enaktiv, ikonisch, symbolisch zu assoziieren? Die Semiotik liefert mit ihren Klassifikationen von Zeichen eine Antwort hierauf.

3.3 Klassifikationen von Zeichen

Im Folgenden wird zunächst nur ein unscharfes und weitreichendes Begriffsbild von *Zeichen* vorausgesetzt, wie es in der Mathematikdidaktik nicht unüblich ist und sich bereits bei PAPPERITZ (1901) andeutet:

> Im Laufe der Jahrtausende langen, kulturellen Entwickelung des menschlichen Geschlechts sind zahlreiche Mittel und Wege gefunden worden, um Vorstellungen, Begriffe und Gedanken mitzuteilen, d. h. aus dem Bewusstsein eines Menschengeistes in das eines anderen zu übertragen. So verschieden aber eine solche Verständigung geartet sein kann, sie geschieht ausnahmslos durch Zeichen.
>
> Papperitz (1901, S. 3)[119]

Das dabei beobachtbare Begriffsbild von *Zeichen* könnte auf PEIRCE zurückzuführen sein (vgl. Unterkapitel 3.5): „A sign […] is something which stands to somebody for something in some respect or capacity“ (CP 2.228) – jedoch wird in dieser Arbeit auf eine intensive Auseinandersetzung mit alternativen Begriffsbildern, die zwangsläufig den Rahmen sprengen würde, verzichtet.

Denkbare und sinnvolle Klassifikationen von Zeichen existieren ebenfalls zahlreich und entspringen nicht nur der Semiotik, sondern unter anderem auch der Sprachphilosophie, Linguistik oder der spekulativen Grammatik (Eco 1987, S. 234). Es gilt also, aus einer Vielzahl existenter Klassifikationen, wie sie ECO

[118] „Dennoch sei die folgende Bemerkung erlaubt: wenn man der aktiv-entdeckenden Position in der Lehrerschaft breite Zustimmung und Anerkennung verschaffen will – und dies ist sehr zu wünschen –, dann gelingt dies meiner Ansicht nach nur, wenn man auch dem kleinschrittig-darbietenden Lernen Existenzberechtigung, Sinn und Bedeutung zuschreibt. Ein apodiktisch vertretener Anspruch der aktiv-entdeckende Position kann nämlich zu einem Hindernis für seine Verbreitung werden“ (Bauer 1993, S. 80).

[119] Da Verständigung ausnahmslos durch Zeichen geschehe, nennt PAPPERITZ (1901, S. 4 f.) entsprechend vielfältige Beispiele für Zeichen, von Kunstwerken über Glockenschläge bis hin zu Gleichungen und „Wortbildungen der Chemiker“.

(1977) zusammenstellt – er skizziert den damals aktuellen Stand der Forschung als Ausgangspunkt für eigene Weiterentwicklungen –, diejenige auszuwählen, die dem Ad-Hoc-Verständnis entspricht und die beim Lernen aus Handlungen eingesetzte Zeichen sinnvoll ordnet. Was dabei unter *sinnvoll* zu verstehen ist, erläutert ECO (1987): Zum Beispiel ließen sich Zeichen

> nach dem von ihnen benutzten *Kanal* bzw. ihrem Ausdruckskontinuum unterscheiden. […] Diese Klassifizierung scheint für unsere Zwecke nicht sehr nützlich zu sein, weil sie uns zwingt, Beethovens *Neunte Symphonie* und Dantes *Divina Commedia* in derselben Kategorie, nämlich bei den über akustische Kanäle übertragenen Zeichen, einzuordnen, und weil sie sowohl ein Verkehrsschild als auch Manets *Le déjeuner sur l'herbe* unterschiedslos als bei Tageslicht reflektierte optische Signale klassifiziert.
>
> Eco (1987, S. 234; Hervorhebung im Original)

Die beim Lernen aus Handlungen auftretenden Zeichen werden also dann sinnvoll geordnet, wenn als unterscheidungspflichtig wahrgenommene Zeichen auch den expliziten Kriterien folgend unterschiedlichen Kategorien zugeordnet werden, während als gleichartig angesehene Zeichen auch den expliziten Kriterien folgend in dieselbe Kategorie fallen. Unter diesem Leitgedanken lassen sich die von ECO (1977) zusammengetragenen Klassifikationen (siehe Kapitel 8) analysieren. Dabei stellt sich die Klassifikation nach dem Grad der Zeichenspezifität als vielversprechend und anschlussfähig heraus; sie sei daher zunächst kurz referiert:

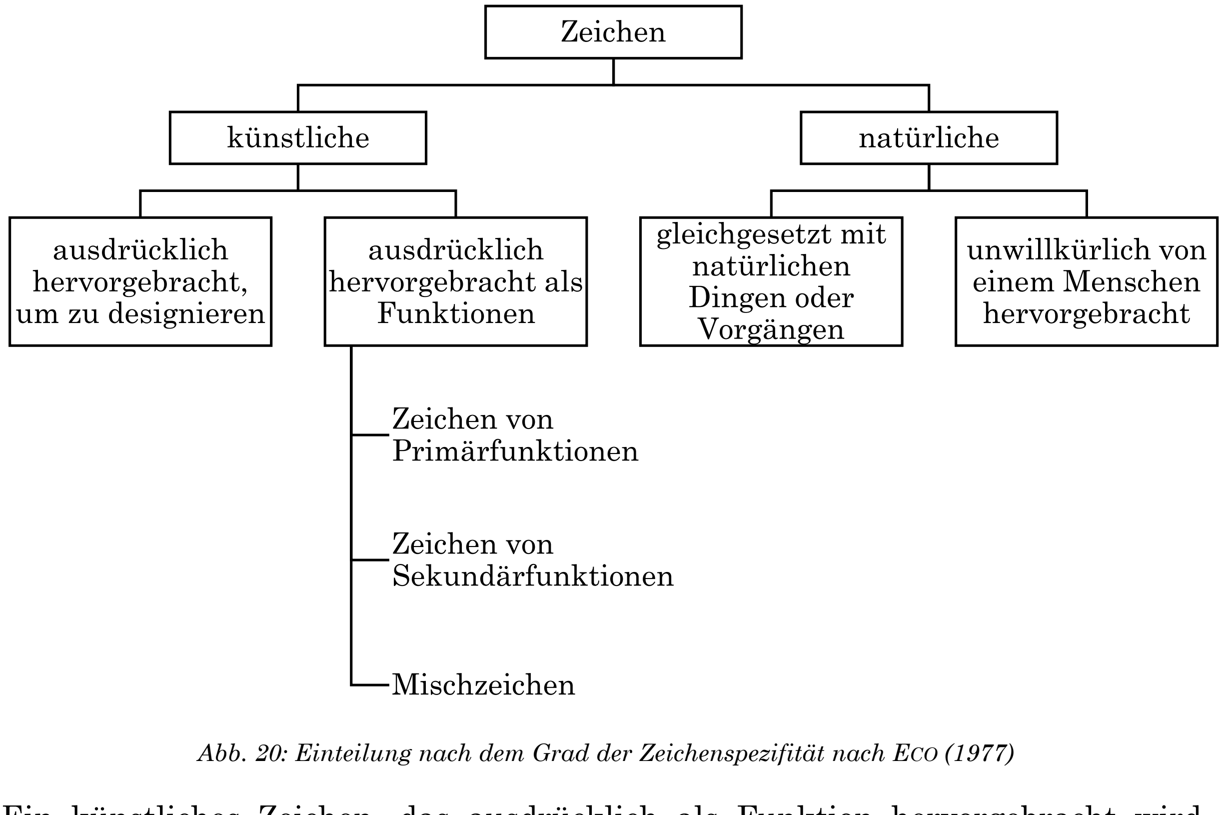


Abb. 20: Einteilung nach dem Grad der Zeichenspezifität nach ECO (1977)

Ein künstliches Zeichen, das ausdrücklich als Funktion hervorgebracht wird, nennt ECO (1977, S. 41; Hervorhebung im Original) auch „das *Funktions-Zeichen* oder das *Objektzeichen*". Diese Kategorie werde damals „gegenwärtigen Tendenzen der Semiologie“ gerecht, denen zufolge „alle Aspekte der Kultur und des sozialen Lebens als Zeichen zu begreifen und gerade *die Gegenstände* mit einzuschließen“ sind (ebd., S. 42 f.; Hervorhebung im Original) – siehe dazu auch ROLAND BARTHES (1988, S. 187 ff.), dessen Verdienst es HANS PETER HAHN (2003, S. 35) zufolge sei, „materielle Objekte mit den gleichen zeichentheoretischen Kriterien wie Texte und Bilder behandelt zu haben“.

Diese Gegenstände können als Objektzeichen zweierlei designieren: erstens ihre Primärfunktion, also „die Funktion, zu der sie [dienen], und zwar auch dann, wenn die Funktion nicht genutzt wird“ (Eco 1977, S. 43). Ein Gegenstand kann aber zweitens auch eine Sekundärfunktion designieren, „die sich durch bestimmte Merkmale deutlich zu erkennen gibt“ (Eco 1977, S. 44). Ein Beispiel überträgt ECO (1977) aus der Proxemik: Der Bau eines Schreibtisches zwingt durch seine Ausmaße zu einem gewissen Abstand zwischen zwei Menschen, der EDWARD TWITCHEL HALL (1966) zufolge gewisse soziale Einstellungen signalisiert. Ein Schreibtisch kann also durch seine Bauweise nicht nur seine Primärfunktion designieren, sondern auch die Information, „ob ich mit dem Generaldirektor oder mit einem niederen Angestellten rede“ – dies wäre eine Sekundärfunktion (Eco 1977, S. 43). Als weitere Beispiele nennt BARTHES (1988, S. 190 f.) unter anderem den Füllfederhalter, der „zwangsläufig einen bestimmten Sinn des Reichtums, der Einfachheit, der Seriosität, der Phantasie usw. zur Schau“ stelle und „ein Telefon auf meinem Tisch […] als Zeichen dafür, daß ich ein Mensch bin, der in seinem Beruf auf Kontakte angewiesen ist“.

Beispiele dieser Art finden sich auch im Mathematikunterricht: Das Lösen von linearen Gleichungen situieren WALTER AFFOLTER et al. (2003, S. 32) mit Schachteln und Hölzern, die sich von Streichholzschachteln bzw. Streichhölzern in erster Linie durch die Aussparung der seitlichen Reibeflächen an den Schachteln und der entzündbaren Köpfe der Streichhölzer unterscheiden.

Abb. 21: Schachteln und Hölzer zur Situierung von linearen Gleichungen

Beim Einsatz derartigen Materials im eigenen Unterricht lässt sich in den ersten Minuten zuweilen beobachten, dass Lernende versuchen, die Hölzer an den Schachteln zu entzünden. Dafür ist kein Hinweis notwendig, weil die Gegenstände durch ihre Bauweise und Beschaffenheit den Lernenden ihre Primärfunktion designieren, nämlich das Entfachen einer Flamme. Natürlich wird dieser Prozess nicht bei jedem Menschen gleichermaßen ausgelöst, denn entsprechende Vorerfahrungen sind dazu notwendig: „Signifikate der Objekte hängen stark vom

Empfänger der Mitteilung ab, nicht vom Sender, das heißt vom Leser des Objekts. Das Objekt ist polysemisch, das heißt, es ist mehreren Sinnlektüren zugänglich" (Barthes 1988, S. 195). Im Unterricht spielt die Primärfunktion jedoch keine Rolle, stattdessen tritt eine Sekundärfunktion hervor: Eine gewisse Konfiguration von Schachteln und Hölzern soll für einen Term oder eine Gleichung stehen.

3.4 Vergleich mit dem Ad-Hoc-Verständnis: Einführung objekthafter, entlehnter und kodifizierter Zeichen

Die Kategorien des Ad-Hoc-Veständnisses spiegeln sich zumindest vage in der Einteilung von Zeichen nach dem Grad der Spezifität wider, die in ihren Grundzügen auf SCHAFF (1973) zurückgeht: Formelzeichen und anschauliche Bilder entsprechen künstlichen Zeichen, die ausdrücklich hervorgebracht werden, um zu designieren, während sich Stöckchen, Streichholzschachteln, Münzen, Papierdreiecke oder Legeplättchen als *Gegenstände* im Sinne von ECOs (1977) Objektzeichen identifizieren lassen: Sie sind nicht entstanden, um zu designieren, aber besitzen dennoch unterschiedlich betonte Primär- und Sekundärfunktionen. Wenige Modifikationen, die dem Kontext des Mathematiklernens entspringen, optimieren die Passung:

(1) Beschränkung auf künstliche Zeichen

Das Ad-Hoc-Verständnis betrachtet ausschließlich künstliche Zeichen; aus diesem Grund wurden in Abb. 20 weitere Unterscheidungen der unwillkürlich von einem Menschen hervorgebrachten Zeichen ausgespart. Nichtsdestotrotz treten natürliche Zeichen im Unterricht auf und spielen eine durchaus gewichtige Rolle für Kommunikationsprozesse, doch bei der Planung und Strukturierung von Lernprozessen mithilfe des EIS-Prinzips sind sie vernachlässigbar.

(2) Verfeinerung der Unterteilung innerhalb der künstlichen Zeichen, die ausdrücklich hervorgebracht werden, um zu designieren

Sowohl Formeln als auch abbildhafte Zeichnungen fallen den expliziten Kriterien folgend in dieselbe Kategorie: In beiden Fällen handelt es sich um künstliche Zeichen, die ausdrücklich „zum Zweck der Kommunikation geschaffen" werden (Schaff 1973, S. 167). Damit die Kategorien des Ad-Hoc-Verständnisses adäquat wiedergegeben werden, muss innerhalb dieser Klasse eine weitere Unterscheidung getroffen werden. SCHAFF (1973) selbst bewerkstelligt dies:

Dem Zweck der Kommunikation mithilfe von substitutiven, stellvertretenden Zeichen „dient entweder die natürliche Ähnlichkeit […] mit dem, was sie bezeichnen sollen, oder die auf der Konvention beruhende Verleihung bestimmter Bedeutungen" (ebd., S. 167). „Typisches Beispiel für solche auf Grund der Ähnlichkeit wirkenden substitutiven Zeichen […] sind alle Bildnisse und Abbildungen (Zeichnungen, Gemälde, Photographien, Skulpturen usw.), Beispiel für die sich auf Konvention stützenden substitutiven Zeichen sind wiederum alle

Zeichen der verschiedensten Schriftarten“ (ebd., S. 172). In ECOs (1977) Übersicht fehlen diese Aspekte zwar, doch auch er deutet sie an anderer Stelle an: Einerseits gebe es Zeichen, die „durch die Natur des Inhalts *motiviert*“ sind – wobei er diese Formulierung teilweise selbst kritisiert – und andererseits solche, bei denen „der Inhalt arbiträr mit dem Signifikanten verknüpft ist“ (Eco 1987, S. 245 ff.; Hervorhebung im Original).[120] Ähnliches lässt sich erahnen an der Unterscheidung zwischen solchen Zeichen, „für die der Interpret einen Kode festzulegen sucht, ohne ihn indessen strikt obligatorisch und fest machen zu wollen“ (Eco 1977, S. 55) gegenüber anderen, für die „es eine präzise Konvention gibt, aufgrund derer diese […] Signifikanten ein Signifikat“ haben bzw. die „aufgrund einer konventionellen Regel“ erkannt werden (Eco 1987, S. 248; 254). Diese von SCHAFF (1973) und ECO (1977, 1987) gezogene Linie innerhalb der künstlichen Zeichen scheidet gerade die abbildhaften Zeichnungen von den formal-algebraischen Darstellungen, die auch im Ad-Hoc-Verständnis getrennten Kategorien zugeordnet werden:

- Abbildhafte Zeichnungen sind „getreue Abbildungen dessen, was das Kind früher tat, wenn es [beispielsweise] Häufchen von Steinchen zusammenfügte“, oder auch getreue Abbildungen einer vorgestellten Tätigkeit (Freudenthal 1973, S. 222). Sie sind „weit weniger vereinbarungsbedürftig“, denn sie orientieren sich in ihrem Äußeren nach der jeweiligen Vorlage (Hermann Kautschitsch 1989, S. 185). Dementsprechend seien sie von nun an als »entlehnt« bezeichnet.
  Anders als es in FREUDENTHALs (1973) obigem Zitat den Eindruck erwecken könnte, spielen bei der Gestaltung dieser Zeichen subjektive Aspekte eine weitere, womöglich sogar ausschlaggebende Rolle: „Kindliche Zeichnungen sind von dem bestimmt, was ein Kind über einen Gegenstand weiß, und nicht davon, wie dieser Gegenstand aussieht“ (Jahnke 1984, S. 36). Die Vorlage der entlehnten Zeichen, die Lernende entwerfen, ist also in der Regel nicht die effektive Handlung mit den Gegenständen selbst bzw. deren Wahrnehmung, sondern die subjektive Vorstellung davon: „Visualisierung [ist] nicht das Abbild einer Wahrnehmung, sondern die *bildliche Form des Wissens* um das Objekt […]. Wahrnehmung und Vorstellung sind also keineswegs identisch oder nur zeitlich getrennt“ (Lorenz 1993, S. 127; Hervorhebung im Original).
- Formal-algebraische Ausdrücke hingegen unterliegen intersubjektiv geteilten, expliziten Normen und Gepflogenheiten; ihre Gestalt folgt in der

[120] Dabei müsse ein Zeichen nicht strikt nur einer der beiden Seiten zugeordnet werden: „Die Bewegung des zeigenden Fingers in Richtung eines Gegenstandes ist motiviert durch die räumlichen Koordinaten dieses Gegenstandes, aber die Verwendung des zeigenden Fingers als Index ist höchst arbiträr; die Cuba-Indianer etwa benutzen zu diesem Zweck etwas völlig anderes, nämlich eine zeigende Lippenbewegung“ (Eco 1987, S. 254).

Regel keiner empfundenen Notwendigkeit, ist also vereinbarungsbedürftig. Daher werden diese Zeichen als »kodifiziert«[121] bezeichnet.[122]

Offenkundig sind formal-algebraische Ausdrücke nur *ein* Vertreter kodifizierter Zeichen. Auch die verbal-begriffliche und die konstruktiv-geometrische Sprache sind oftmals geprägt von Normen und Gepflogenheiten – und selbstverständlich existieren solche Zeichen auch außerhalb der Mathematik: Musiknoten sind ein Beispiel dafür, genau wie das Wort *Musiknoten* selbst und die Buchstaben darin.[123] Dennoch gleichen sich nach FREUDENTHAL (1973) formal-algebraische Darstellungen, Worte und Musiknoten nicht in jeder Hinsicht:

> Die Muttersprache ist ein ununterbrochenes Anliegen, die Formelsprache wird ganz selten geübt. Die Notenschrift wäre, was das betrifft, schon ein besserer Vergleichsmaßstab, der aber in anderer Hinsicht ganz versagt. Das Lernen der Notenschrift erfordert nur das Schaffen fester und sehr regelmäßiger Assoziationen zwischen optischen Bildern und motorischen Ereignissen; Verständnis spielt hier kaum eine Rolle. Wenn Leute Schwierigkeiten mit der Notenschrift haben, so ist der Grund wohl der, daß sie das Lernen nicht ernst nehmen und keine Zeit und Mühe darauf verwenden. Die algebraische Formelsprache ist von ganz anderem Charakter als unsere natürlichen Sprachen oder die Notenschrift oder die chemische Symbolik.
>
> Freudenthal (1973, S. 271)[124]

[121] Um einer Verwechslung von kodifizierten und kodierten Zeichen vorzubeugen, seien Letztere kurz thematisiert: „Ein Kommunikationsprozess, bei dem es keinen Kode und mithin keine Designation gibt, wird zu einem bloßen *Reiz-Reaktions*-Prozess. Bei bloßen Reizen fehlt eines der elementarsten Merkmale des Zeichens: es *steht für etwas anderes*. Der Reiz steht nicht für etwas anderes, sondern *ruft dieses andere unmittelbar hervor*. Ein blendendes Licht, das mich zwingt, plötzlich die Augen zu schließen, ist deutlich verschieden von einer verbalen Aufforderung, die Augen zu schließen. Im ersten Falle mache ich die Augen zu, ohne zu reflektieren, im zweiten Fall muß ich zuallererst die Aufforderung verstehen, also die Botschaft dekodieren (Zeichenprozeß) und dann entscheiden, ob ich ihr Folge leisten will […]“ (Eco 1977, S. 26; Hervorhebung im Original). Alle Zeichen sind also kodiert, schließlich werde „das Zeichen […] zu einem solchen durch die Existenz eines Kodes“ (Eco 1977, S. 40).

[122] Auch ECO (1977, S. 9; 45; 55) verwendet den Bezeichner gelegentlich, aber nicht zur Bezeichnung einer eigenen Kategorie.

[123] SFARD & MCCLAIN (2002, S. 154) betonen, wie weitreichend kodifizierte Zeichen den Alltag und insbesondere das Lernen beeinflussen. Lernen könne sogar als „initiation to a well-defined practice or discourse, such as, say, the discourse of the mathematical community“ gesehen werden (ebd., S. 155). In der unten eingeführten Terminologie entspricht dies dem Streben nach einem verständigen Umgang mit den Zeichen der mathematischen Sprachformen. Kodifizierten Zeichen attestieren SFARD & MCCLAIN (2002, S. 156) dabei nicht nur einführenden Charakter, sie seien zugleich „discursive constructs“ bzw. „products of the very same communication that they are supposed to make possible“, wodurch soziale, kulturelle und historische Faktoren hervortreten.

[124] FREUDENTHALs (1973) Gegenüberstellung zwischen Musiknoten und der algebraischen Formelsprache wirkt dahingehend unstimmig, dass er sich innerhalb der Musik ausschließlich auf das mechanische Reproduzieren von Fertigem in einer Handlung bezieht, nicht auf das Schaffen von (subjektiv) Neuem – anders als in der Mathematik.

(3) Angepasstes Verständnis von Objektzeichen

Für ECO (1977) handelt es sich bei Objektzeichen um Gegenstände, die nicht ausdrücklich zum Designieren hervorgebracht wurden. Für Anschauungsmittel ist jedoch oftmals diskutabel, ob das Designieren (Teil-)Ziel ihrer Entstehung war. Die Lehrperson bringt Legeplättchen oder Streichholzschachteln zwar zweifellos hervor, damit sie für etwas stehen (Lernende hingegen tun dies nicht unbedingt) – aber sind sie deshalb „zum Zweck der Kommunikation geschaffen worden", wie es SCHAFF (1973, S. 167) für Objektzeichen fordert? Um die Passung mit der ersten Kategorie des Ad-Hoc-Verständnisses zu gewährleisten, muss dieser Aspekt eher großzügig behandelt werden – etwa wie bei EVA REBLIN (2012):

> Ich definiere ein *Objekt-Zeichen* als materielles Objekt […], das nicht ausschließlich oder nicht vornehmlich zum Zweck der Kommunikation produziert wurde und das in einer bestimmten Hinsicht als Zeichenausdruck für einen Interpreten fungiert oder fungieren kann. Potentielle Objekt-Zeichen wären somit Gebrauchsgegenstände wie Kleidung, Möbel und Häuser aber auch ‚natürliche' Dinge wie Bäume.
>
> Reblin (2012, S. 98; Hervorhebung im Original)

Ähnlich handhabt es WINFRIED NÖTH (2000, S. 350), der unter Objektzeichen auch Gegenstände fasst, deren Zweck eindeutig das Designieren ist: beispielsweise mesopotamische Tonzeichen, die „als Zählsteine zur buchhalterischen Registrierung von Gegenständen des Privatbesitzes" dienten. Genauso unterscheidet HAHN (2003) Text- von Objektzeichen, wobei Letztere alle materiellen Dinge als offene, nur kontextabhängig zu definierende Träger von Bedeutungen seien. Es soll demgemäß nebensächlich sein, ob Legeplättchen oder Streichholzschachteln zum Zweck der Kommunikation *geschaffen* wurden – entscheidend ist, dass die Wahl des Anschauungsmittels als Zeichen ein zweckgerichteter Akt ist.

Für das Mathematiklernen ist eine weitere Anpassung notwendig: Nicht nur Gegenstände, sondern auch die ausgeführten Handlungen sind als Objektzeichen zu begreifen, um beiderlei nicht voneinander zu separieren – auch Handlungen sind Zeichen. Ohne diese Erweiterung wären erstens bereits einige elementare, formal-algebraische Zeichen nicht adäquat in Objektzeichen darstellbar.[125] Zweitens müssen zum Zweck des Mathematiklernens die mathematischen Objekte mit den Gegenständen assoziiert werden. Diese Assoziation erfolgt aber nicht bereits durch den Gegenstand selbst, sondern erst im Kontext einer Handlung (Dörfler 1988) – beides voneinander zu trennen, wäre somit unnatürlich:

[125] „Die Schreibung $3 \cdot 2$, in der (falschen) Form drei [Pause] mal [Pause] zwei aufgefaßt, hätte uns veranlassen können, sowohl die 3 wie auch die 2 *dinglich* darzustellen. Wir sehen jetzt deutlich: nur die Zahl 2 (weil Grundzahl) kann (und muß) dinglich dargestellt werden. Die Malnehmerzahl dreimal aber kann nur dadurch konkret dargestellt werden, daß ein und dieselbe *Handlung* dreimal ausgeführt wird" (Breidenbach 1956, S. 134; Hervorhebung und eckige Klammern im Original).

> Sie [die Handlung] ist Begründung, Motivation, Legitimation, Anlaß u. dgl. dafür, daß gewisse mathematische Objekte als mathematische Charakteristika mit den Handlungselementen durch kognitive Konstruktion assoziiert werden. […] Aber außerhalb des Handlungskontextes erscheint die jeweilige Assoziation eher willkürlich, es fehlt gleichsam die Vermittlungsinstanz.
>
> Dörfler (1988, S. 102)

Erst dank Übung und Routine rücke das „mathematische Objekt näher an die Gegenstände heran, die Assoziation wird sozusagen vom Gegenstand selbst ausgelöst, ohne daß notwendigerweise ein einschlägiger Handlungskontext vorliegt“ (ebd., S. 103). LORENZ (1993) erläutert dies folgendermaßen:

> So ist der Zahlenstrahl vorab lediglich ein Strich (von begrenzter Länge). Er gewinnt seine Funktion erst dadurch, daß durch *Handlungen des Schülers* eine neue Perspektive auf ihn gelenkt wird […]. Die Cuisenaire-Stäbe sind erst einmal nur bunte Holzblöcke, sie werden von den Schülern dazu benutzt, Figuren zu bauen, Felder zu umgrenzen u.a.m. Die ihnen innewohnende Zahlstruktur wird erst in einer gemeinsamen Handlung mit dem Lehrer, der die Schüler „sehend“ macht, konstituiert.
>
> Lorenz (1993, S. 130; Hervorhebung im Original)

Das Einbeziehen der Handlungen macht auf einen weiteren Punkt aufmerksam: „Nicht die Objekte, sondern die auf sie, und zwar in rechter Weise, ausgeübten Handlungen sind es, die zu Einsicht und Begriffsbildung führen“ (Fricke 1970c, S. 107). Die Mathematikdidaktik greift diesen Aspekt wiederholt auf, u. a. durch LIETZMANN (1916)[126], KÜHNEL (1954; Original von 1916)[127], OEHL (1962)[128] oder

[126] „Erfahrungsgemäß machen diese Zerlegungen [eines Dreiecksprismas in drei Pyramiden] den Schülern rein anschauungsgemäß große Schwierigkeiten. Es genügt nicht, ein vorher präpariertes Modell vorzuführen. Die Schüler müssen die Schnitte möglichst selbst ausführen – sehr zu empfehlen ist Seife, wenn Plastilin nicht zur Hand ist – und die entstehenden Körper in schräger Parallelperspektive darstellen“ (Lietzmann 1916, S. 188 f.).

[127] „Diese *Ausführung*, und zwar seitens *aller* Kinder zu *gleicher* Zeit, ist ja eine bedeutsame Hauptsache. Nicht das Sehen, auch nicht sehr oftmaliges Sehen hat diesen Erfolg wie das Greifen, das ja das Sehen zur Voraussetzung hat. Aber es ist für das Kind eine völlig andere innere Lage, ob es nur sehen, nachsehen soll, ob ein anderes es richtig bringt, oder ob es die geforderte Leistung selbst liefern darf. […] Für den gewöhnlichen Typus des höher gebildeten Erwachsenen ist die ‚Inspektion‘ das weitaus mehr Gefühlsbetonte und darum höher Bewertete […]. Dem Typus des normalen Kindes kann aber die inspizierende Tätigkeit nicht zusagen, es will *selbst* schaffen. Im Selbstschaffen entwickelt es seine Kräfte, im Selbstschaffen ergibt sich auch der höchstmögliche Lernerfolg“ (Kühnel 1954, S. 205 f.; Hervorhebung im Original; Original von 1916). „Endlich kommen wir zu der wichtigsten Forderung, die an ein Rechenlehrmittel zu stellen ist. […] Es ist die, daß die Kinder damit arbeiten können. […] Das ist nur möglich bei solchen Lehrmitteln, welche jedes Kind in seinem Besitze hat oder zu eigner Betätigung überlassen bekommt. Selbstverständlich sollen damit die Demonstrationsapparate nicht als wertlos bezeichnet werden, keinesfalls, aber sie bedürfen unbedingt der Ergänzung durch ein Lehrmittel für die Hand der Kinder“ (Kühnel 1954, S. 247 f.; Original von 1916).

[128] „Das Anschauungsmittel soll […] die Möglichkeit zum eigenen Tätigsein mit Hand und Auge und Verstand geben. Der Operationsvorgang soll […] selbst durchgeführt werden, damit über Hand und Auge das Denken angeregt wird. […] Darum sind die einfachen Dinge (Spielmarken, gemalte Kringel usw.) allen komplizierten Apparaten vorzuziehen“ (Oehl 1962, S. 72).

ELISABETH MOSER OPITZ (2001) und SANDRA GANTER (2013)[129]. Er motiviert zu einer dritten Modifikation der Kategorie der Objektzeichen für den Mathematikunterricht:

Nicht das Haptischsein eines Gegenstandes darf ausschlaggebend für dessen Unterscheidung von anderen Zeichen sein, sondern die Möglichkeit, ihn „real" (Wittmann 1981b, S. 79) bzw. „effektiv", d. h. „äußerlich sichtbar als wirkliche Handlung" (Oehl 1965, S. 34; siehe auch Aebli 1983, S. 181) manipulieren und die Auswirkungen dieser Manipulationen direkt beobachten zu können. AEBLI (1985, S. 5; Hervorhebung im Original) bringt dies auf den Punkt: „Abgesehen von bestimmten Sonderfällen, ist die Frage also nicht, ob die Sache [hier: eine Handlung] anschaulich vorliege oder ob sie zeichenmäßig dargestellt sei, sondern, ob sie *wahrgenommen* werden könne oder *vorgestellt* werden müsse." Ähnlich pointiert formuliert es WITTMANN (1981b, S. 79; Hervorhebung im Original): „Die Medien haben an sich nur eine *untergeordnete* Bedeutung. *Primär wichtig* sind die an ihnen ausgeführten Aktivitäten" – bzw. die ausführ*baren* Aktivitäten. Dieser Unterschied sei an einem Beispiel expliziert:

> Die Formel für die Kreisberechnung war erläutert an der Hand der bekannten Anschauungsmittel, die ich mir selbst herstellte. Ein Kreis aus Holz war in zwei Halbkreise mit Lederumfang geteilt. Und diese wieder hatte ich in gleiche Dreiecke mit möglichst kleiner Grundlinie zersägt, so daß jeder Halbkreis beim Ausziehen der Leder aussah wie eine Säge mit langen Zähnen. Durch Ineinanderschieben entstand ein Rechteck mit dem halben Umfang als Grundlinie und dem Halbmesser als Höhe. Der Inhalt dieses Rechtecks war also […] gekürzt und geordnet r · r · 3,14.
>
> Heywang (1923, S. 165)[130]

HEYWANGs (1923) Anschauungsmittel ließe sich in zwei Richtungen abändern, die gegensätzliche Einflüsse auf die effektive Manipulierbarkeit ausüben, ohne das Haptischsein zu beeinflussen:

---

[129] MOSER OPITZ (2001 S. 109) betont, „dass für den mathematischen Lernprozess nicht die Anschauungsmittel an sich entscheidend sind, sondern die strukturierenden Operationen der Lernenden", während in GANTERs (2013, S. 273) empirischer Studie „der Lerneffekt beim selbstständigen Experimentieren […] signifikant höher als beim Demonstrationsmodell" war. Weil sie die Untersuchung als „nicht unbedingt repräsentativ" einschätzt, sei „aus Sicht der Unterrichtsforschung eine weitere Untersuchung zur Beurteilung der Wirkung von Experimenten, insbesondere Schüler- versus Demonstrationsexperimente, im größeren Rahmen über andere Schulformen hinweg sowie über einen längeren Zeitraum wünschenswert" (Ganter 2013, S. 282 f.). Die zahlreichen Belege in der Literatur, von denen oben nur ein kleiner Ausschnitt wiedergegeben ist, sprechen jedoch bereits eine deutliche Sprache.

[130] HEYWANG hat den Kreis vermutlich nicht in Dreiecke, sondern in Kreissektoren zersägt. In dem Fall *wird* der Kreis nie zu einem Rechteck, egal wie fein die Zerlegung gedacht wird (vgl. Bender 1991a bzw. Bender 1991b zum Einfluss unbedachter Formulierungen auf die Entwicklung des Grenzwertbegriffs). Es wäre allerdings auch möglich, mit (gleichschenkligen und zwei recht-winkligen) Dreiecken zu arbeiten – entsprechend wird dann das Rechteck nie zu einem Kreis.

- Wären zwei zersägte Holzkreise – einer in der Ausgangskonstellation, einer in der Endkonstellation – fest auf einer Unterlage montiert, ließe sich die Handlung des Umsortierens nicht mehr effektiv ausführen.
- Hätte HEYWANG (1923) statt Holzkreisen solche aus Pappe verwendet, wäre nicht nur das Umsortieren, sondern auch das mehrmalige Verfeinern der Unterteilung von Lernenden mithilfe einer Schere effektiv durchführbar.

Zusammengefasst eignen sich also Objektzeichen nicht bereits durch ihr Haptischsein für das Mathematiklernen. Im Umkehrschluss erfüllen aber auch nicht ausschließlich haptische Materialien die aus mathematikdidaktischer Perspektive geforderten Eigenschaften – effektive Manipulierbarkeit durch Lernende, Zugänglichkeit zur Beobachtung der Auswirkungen –, sondern unter Umständen auch digitale.[131] Daraus folgt, dass Darstellungen am Computer ebenso wie haptisches Material enaktiv sein *können*.[132] Weil die geforderten Eigenschaften *üblicherweise* von Haptischem und *möglicherweise* von Digitalem erfüllt werden, sollen jene Zeichen in Anlehnung an ECO (1977) als *objekthafte Zeichen* bezeichnet werden: Objekthafte Zeichen sind solche, die effektiv manipuliert werden können und an denen die Auswirkung dieser Manipulationen beobachtbar sind – beides bestenfalls durch die Lernenden selbst.

Abschließend sei auf eine scheinbare Unstimmigkeit eingegangen: Auf den ersten Blick könnten alle Inskriptionen in die Kategorie der objekthaften Zeichen fallen, weil sie als effektiv manipulierbar erachtet werden und eine Beobachtung der Konsequenzen dieser Manipulation zuzulassen scheinen. Dies deutet sich am Beispiel der Ergänzung eines Dreiecks zu einem Parallelogramm an:

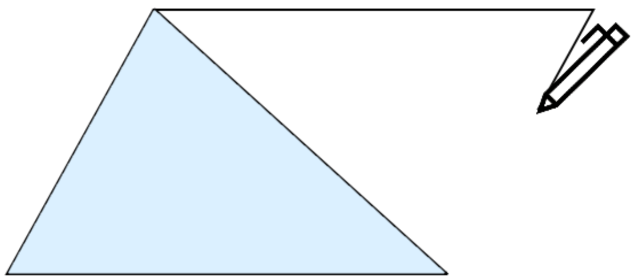


Abb. 22: Zeichnung eines Dreiecks – effektiv manipulierbar?

> Ergänzt man ein Dreieck durch Inskriptionsmanipulation […] zu einem Parallelogramm (1), so können a und h in neuen Rollen (Seite und Höhe) als

[131] „In dieser Hinsicht sind auch solche Objekte ‚konkret', mit denen man ‚hantiert', wenn man mit computergestützten Geometrieumgebungen arbeitet. Gerade dynamische Geometriesoftware eröffnet neue Wege des experimentierenden Umgangs mit geometrischen Formen" (Matthias Ludwig 2007, S. 52).

[132] Das bedeutet jedoch nicht, dass Haptisches und Digitales gleichzusetzen wäre. ANDREAS EICHLER & MARKUS VOGEL (2013, S. 163; Hervorhebung im Original) empfehlen bei der ersten Simulation eines Zufallsexperimentes ein händisches Vorgehen – und ihr Argument greift auch außerhalb der Stochastik: „Schülerinnen und Schüler müssen zunächst *begreifen*, wie eine Simulation funktioniert oder auf welchen Modellannahmen eine Simulation basiert. Ist dieses Verständnis nicht vorhanden, so läuft eine Simulation ins Leere."

> Inskriptionen des Parallelogramms verwendet werden (2). Es kann beobachtet werden, dass die Dreiecksfläche genau die Hälfte der Fläche des neuen Zeichenspiels „Parallelogramm“ beträgt (3).
>
> Martin Brunner (2020, S. 36)

BRUNNERs (2020, S. 37) Wortwahl „kreative Manipulation mit Inskriptionen“ legt zwar nicht fest, ob diese effektiv oder vorgestellt ist, allerdings läge zunächst Ersteres nahe, weil das Ergänzen des Dreiecks mit Stift auf Papier äußerlich sichtbar ist: „[S]o kann die Anfertigung von Zeichnungen als erste Abstraktion der ikonischen Ebene zugeordnet werden, aber als konkrete Handlung durchaus auch auf der enaktiven Ebene angesiedelt sein“ (Filler 2019, S. 2 f.). Selbiges formuliert DÖRFLER (1988)[133] hinsichtlich kodifizierter Zeichen, wobei hier der Bezeichner »Symbol« im Alltagsverständnis verwendet wird (vgl. Abschnitt 3.2.1). Wären diese Manipulationen als effektiv einzuordnen, verlöre die ausgehend von ECO (1977) modifizierte Klassifikation in objekthafte, entlehnte und kodifizierte Zeichen ihre Tauglichkeit zur Erfassung der Kategorien des Ad-Hoc-Verständnisses: Alles, was eigentlich zu unterscheiden ist, fiele in dieselbe Kategorie der objekthaften Zeichen.

Zeichnerische Tätigkeiten wie das Ergänzen eines Dreiecks (oder eines formal-algebraischen Ausdrucks) unterscheiden sich jedoch von effektiven Handlungen wie etwa dem Umsortieren ausgeschnittener Papierstücke: Ansetzen und Führen des Stiftes auf die von BRUNNER (2020, S. 36) beschriebene Weise sind keine Prozesse, die ungeplant oder unkontrolliert ablaufen. Sie folgen einer womöglich nur flüchtigen mentalen Vorstellung, die zunächst bewusst oder unbewusst erschaffen wird und dann als Vorlage dient. Natürlich ließe sich auch etwas zeichnen, das zuvor nicht vorgestellt wurde – dies verlangt jedoch eine willentliche Abschaltung bzw. ein Überrumpeln kognitiver Prozesse, z. B. durch hastige Ausführung. Damit entpuppt sich das zeichnerische Ergänzen eines Dreiecks zum Parallelogramm doch als Erstellung eines Abbildes einer vorgestellten Handlung bzw. des Handlungsresultats – und damit als entlehntes Zeichen.

Ausgeschnittene Papierstücke hingegen erlauben ohne bewusste Anstrengung ein intuitives, effektives Manipulieren auch ohne mentale Vorlage und stiften dem vorgestellten Handeln somit eine Grundlage – das qualifiziert sie als objekthafte Zeichen und unterscheidet sie von anderen. Natürlich *können* solche Zeichen dennoch zur Erstellung von Abbildern einer vorgestellten Handlung eingesetzt werden.

[133] „Man kann nun aber […] versuchen, den Gültigkeitsanspruch des theoretischen Ansatzes dadurch zu erweitern, daß man Symbolhandlungen wie das Manipulieren von Symbolen für mathematische Objekte als Handlungen auffaßt, durch die wiederum Beziehungen zwischen und damit Operationen mit den jeweiligen mathematischen Objekten induziert werden können. Die Symbole (algebraischer oder geometrischer Natur) stellen dann die Handlungselemente dar, mit denen ganz im Sinne meiner Theorie mathematische Objekte assoziiert sind“ (Dörfler 1988, S. 122).

Aus alldem resultiert eine Einteilung künstlicher Zeichen, die beim Lernen aus Handlungen eingesetzt werden und die in einer semiotisch geprägten Sichtweise den Kategorien des Ad-Hoc-Verständnisses entspricht (Abb. 23). Besonders eindrücklich wird diese Entsprechung, wenn abschließend erneut eine Deutung von BRUNERs Theorie gemäß dem Ad-Hoc-Verständnis betrachtet wird:

> Nach Bruner lassen sich drei unterschiedliche Repräsentationsebenen unterscheiden: 1) enactive (handlungsorientiert), 2) iconic (auf Basis von Ähnlichkeit zwischen realem Referent und Repräsentation) und 3) symbolic (Beziehung zwischen Referent und Repräsentation basiert nicht auf Ähnlichkeit, sondern auf Arbitrarität, sozialen Normen und Konventionen […].
>
> Sabine Völkel (2012, S. 30)

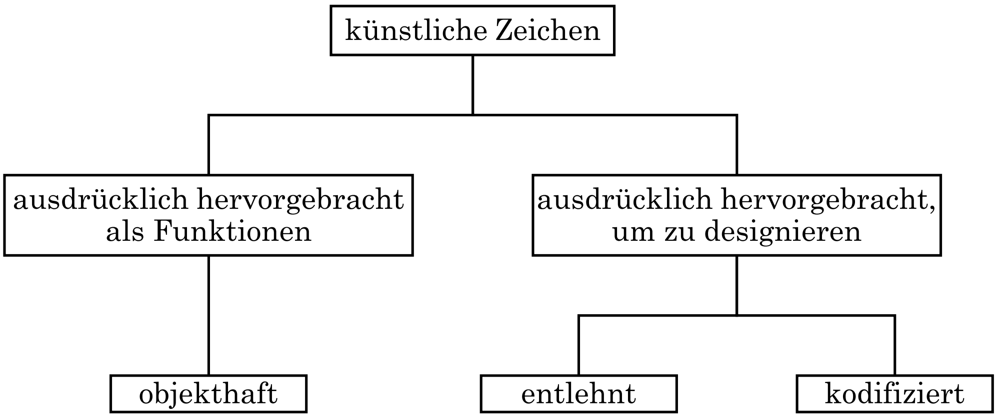


Abb. 23: Einteilung künstlicher Zeichen angelehnt an ECO (1977)

Die Zeichenarten stellen von links nach rechts eine fortschreitende Abstraktion dar in dem Sinne, dass die Ähnlichkeit mit dem Gegenstand reduziert wird. Dabei ist insbesondere die Unterscheidung zwischen entlehnten und kodifizierten Zeichen keine solche, die ausschließlich an den äußeren Merkmalen eines Zeichens festzumachen wäre: Lernende können z. B. den Prozentstreifen als kodifizierte Darstellung wahrnehmen, die festgelegten Regeln – 10 cm Länge, Positionierung der Informationen gemäß Abb. 24 – gehorcht, oder aber als Abbild einer vorhergehenden Handlung (vgl. dazu Abschnitt 5.1.5). Analog verhält es sich beim Kreisbogen zwischen einem Strahlenpaar, um ein zweites Beispiel zu nennen: Dieser kann zur Darstellung eines Winkels begleitet von intersubjektiv geteilten Regeln eingeführt werden, oder aber als Abbild einer Drehbewegung. Zeichen *sind* also nicht per se entlehnt oder kodifiziert, sondern werden von Lernenden entsprechend wahrgenommen. Terminologisch wird diese Feinheit im Folgenden allerdings nicht immer streng unterschieden.

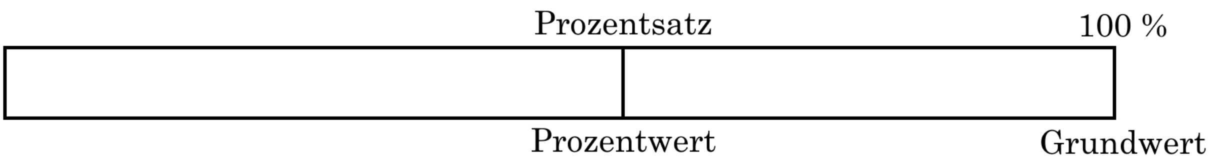


Abb. 24: Darstellung des Prozentstreifen bei BENJAMIN PETERS (2019, S. 23)

Obwohl sie nicht als eigenständige Kategorie aufgeführt werden, existieren natürlich auch Mischzeichen. Sie spielen eine wesentliche Rolle im Lernprozess, insbesondere solche zwischen entlehnten und kodifizierten Zeichen, die u. a. die Übergange zwischen diesen Zeichenarten unterstützen (vgl. Abschnitt 4.2.2).[134] Anders als die vorliegende Arbeit hebt KLAUS BOECKMANN (1982) sie bei seiner Unterscheidung dreier Visualisierungsarten sogar als eigene Gattung hervor: Zwischen *ikonisch-analogischen Visualisierungen*, also direkten Abbildern der Realität und Fotografien (hier: entlehnte Zeichen) und *symbolischen, zeichenhaften Visualisierungen*, deren ausschlaggebendes Kriterium Arbitrarität ist (hier: kodifizierte Zeichen) vermitteln sogenannte *schematische Visualisierungen* (hier: Mischzeichen): „Letztere abstrahieren von der Realität, betonen Gesichtspunkte, die dem Konstrukteur wichtig sind, verwenden auch bestimmte Konventionen (z. B. Pfeile für Beziehungen)“ (Fischer 1984a, S. 121).

Die in Abb. 23 dargestellte Unterscheidung der Zeichenarten findet sich in ihren Grundzügen nicht nur in der Semiotik wieder, sondern auch in der Mathematikdidaktik selbst: DÖRFLER (1986) wählt mit »materiell«, »artifiziell« und »formal« zwar andere Bezeichner[135], betont aber inhaltlich ganz ähnliche Aspekte wie die vorliegende Arbeit in ihrer Kritik am Ad-Hoc-Verständnis: Zur Beschreibung, Planung und Strukturierung von mathematischen Lernprozessen sind die drei Zeichenarten allein unzureichend, weil sie das subjektive Verständnis ausblenden.

> Es handelt sich bei dieser Entwicklung [von Frames zu mathematischen Operationen aus konkreten Handlungen] eben nicht (zumindest in vielen Fällen) um eine einfache und direkte Schematisierung von Handlungsabläufen, d.h. um strukturell identischen Nachvollzug materieller (oder vorgestellter) Handlungen als Handlungen an artifiziellen und formalen Objekten, die die materiellen Gegenstände ersetzen. Für die Entwicklung der mathematischen Operation ist es erforderlich, zuerst gewisse Gegebenheiten im gesamten Handlungssystem hervorzuheben (Aufmerksamkeitsverlagerung), und die Operation stellt dann Beziehungen zwischen gewissen quantitativen (oder geometrischen) Charakteristika dieser Gegebenheiten her […].
>
> Dörfler (1986, S. 13)

LAMBERT (2012) hat wie in Unterabschnitt 2.1.2.4 beschrieben genau diesen Aspekt zum Anlass genommen, um Zeichen von Symbolen zu unterscheiden. Bevor

---

[134] Natürlich existieren auch andere Mischzeichen, etwa zwischen objekthaften und kodifizierten Zeichen. Ein Beispiel dafür liefert KRAMER (2017, S. 65): „Eine alternative nonverbale Abfragetechnik kann im Falle linearer Funktionen über das Geodreieck erfolgen. Hierzu zeichnet jeder Schüler ein Koordinatensystem in sein Heft. Eine lineare Funktionsvorschrift […] wird vorgegeben. Statt das Schaubild einzuzeichnen, wird es ‚nur‘ mit der Kante des Geodreiecks gelegt.“

[135] Für die Begriffe in der vorliegenden Arbeit wären diese Bezeichnungen etwas irreführend: *Materiell* scheint jegliche Zeichen auf dem Bildschirm auszugrenzen, aber auch nicht manipulierbare Gegenstände einzuschließen, während *formal* in erster Linie formal-algebraische Zeichen anspricht, solange keine andersartige Bedeutung zu diesem Bezeichner expliziert wird – siehe als solche beispielsweise FREUDENTHALs (1983, S. 463 ff.) Ausführungen zu *formal languages*.

diese Vorarbeit mit den bisherigen Ausführungen in Einklang gebracht werden kann, soll sie auf ähnliche Weise wie das Ad-Hoc-Verständnis in das bestehende Gebilde der Mathematikdidaktik bzw. umliegender Wissenschaftsbereiche eingepasst werden. Dass dies gelingen kann, deutet LAMBERT (2020, S. 7) an, indem er behauptet, die „Begriffe ‚ikonisch' und ‚symbolisch' in ihre ursprünglich intendierte Bedeutung […] zurückzuführen". Wo aber liegen diese Ursprünge?

3.5 Zeichen und Symbole – eine tradierte Unterscheidung

Zur Identifikation einer passenden Bedeutung zu Bezeichnern wie »Zeichen«, »Symbol« oder »ikonisch« bieten sich FERDINAND DE SAUSSURE und PEIRCE an, die als Begründer der modernen Semiotik gelten. Eine solche Einschränkung ist notwendig, weil Begriffsbilder zum Bezeichner »Zeichen« äußerst zahlreich sind, sich teilweise unterschiedlicher Termini bedienen und von monadischen bis tetradischen Modellen reichen. ECO (1977, S. 31) urteilt gar: „Rein theoretisch sollte man den Ausdruck /Zeichen/ besser nicht gebrauchen, denn er ist überaus mehrdeutig und mißverständlich." Ähnlich ergeht es dem Symbolbegriff:

> In seiner weitesten Definition ist der Begriff des Symbols ein Synonym dessen, was in der Semiotik ›Zeichen‹ heißt, wobei ›Zeichen‹ manchmal sogar als eine Unterklasse der Symbole in diesem weiten Sinne definiert sind. Im engeren Sinn ist ein Symbol jedoch eine Unterklasse der Zeichen.
>
> Nöth (2000, S. 178)

Die Beschränkung auf zwei Autoren soll also die überbordende Vielfalt auf ein ausreichendes Maß begrenzen: Es soll aufgezeigt werden können, dass die unten vorgeschlagenen Begriffskonventionen von enaktiv, ikonisch und symbolisch nicht neuartig oder beliebig sind, sondern auf tradierten Ansichten fußen.

SAUSSURE arbeitet vorrangig linguistisch orientiert, und obwohl seine Ideen laut NÖTH (2000) auch auf andere kulturelle Zeichensysteme angewendet wurden, weichen die Bedeutungen von denen bei LAMBERT (2012) ab: Für SAUSSURE entscheidet (wie im Ad-Hoc-Verständnis) die äußere Erscheinung eines Zeichens über dessen Dasein als Symbol – allerdings ist Arbitrarität gerade *nicht* gefordert.[136]

> Beim Symbol ist es nämlich wesentlich, daß es niemals ganz beliebig ist; es ist nicht inhaltslos, sondern bei ihm besteht bis zu einem gewissen Grade eine natürliche Beziehung zwischen Bezeichnung und Bezeichnetem. Das Symbol der Gerechtigkeit, die Waage, könnte nicht etwa durch irgend etwas anderes, z. B. einen Wagen, ersetzt werden.
>
> Saussure (2001, S. 80; Original von 1916)

[136] Auch diese Auffassung spiegelt sich vereinzelt in der Mathematikdidaktik wider: Für OEHL (1965, S. 46) ist *symbolisch* eine faktische Eigenschaft, die er aber nicht der mathematischen Zeichensprache zuschreibt: Stattdessen seien Zeichnungen Symbole für einen zunächst konkret ausgeführten, dann vorgestellten Operationsvorgang, während die mathematische Zeichensprache „im Gegensatz zum Symbol" kein Bild von der Operation gebe.

Ein Hinwenden zu PEIRCE hingegen wirkt aus mehreren Gründen vielversprechend, wie teilweise auch SCHREIBER (2004) herausstellt:

- PEIRCE verwendet einen ganzheitlichen Zeichenbegriff, der zur Auffassung des Mathematiklernens von LAMBERT (2020)[137] passt: „[A]lles Denken ist Denken in Zeichen“ und das „Zeichen ist dem Denken nicht nachträglich aufgep[f]ropft; Denken ist ab ovo zeichenvermittelt – daran hält auch der späte Peirce noch mit aller Entschiedenheit fest“ (Schönrich 1990, S. 69).
- PEIRCE’ triadisches Zeichenmodell ist in der Mathematikdidaktik wie bereits erwähnt bewährt – dessen grundlegende Struktur spiegelt sich beispielsweise im epistemologischen Dreieck aus Arbeiten der Klagenfurter Schule, bei BROMME & STEINBRING (1990) und bei REMBOWSKI (2015) wider.
- Zeichen besitzen bei PEIRCE neben der Repräsentationsfunktion auch eine Erkenntnisfunktion, die den Blick auf mathematische Lernprozesse bereichert: Sie sind „Mittel der Erkenntnis und für jede kognitive Tätigkeit vorauszusetzen“ (Hoffmann 2001a, S. 1) – einerseits konkret und verwirklicht vor uns liegend, andererseits als „Werkzeuge des Geistes, die es uns beispielsweise erlauben, die Welt um uns zu konzeptualisieren oder zu organisieren“ (Hoffmann 2005, S. 35).[138] Dabei steht nicht jedes Zeichen jedem Subjekt jederzeit als Mittel der Erkenntnis zur Verfügung, sondern nur *transparente* Zeichen: Das sind „diejenigen […], mit denen wir so vertraut sind, dass wir gleichsam durch diese Zeichen hindurch direkt das von ihnen Repräsentierte wahrnehmen“ (Hoffmann 2005, S. 35). Mangelnde Transparenz von Zeichen ist nicht selten Grund für scheiternde Kommunikations- und Lernprozesse:

  > Wenn wir ein uns bekanntes mathematisches Symbol an einer Tafel sehen, betrachten wir dieses Zeichen nicht als *Gegenstand*, sondern als *Mittel* zur Betrachtung dessen, was durch dieses Zeichen repräsentiert werden soll, also der mathematische Sachverhalt. Anders ein Schüler, der dieses Zeichen nicht kennt, und der somit nur das Zeichen als Gegenstand, nicht aber den durch das Zeichen *repräsentierten* Gegenstand oder Sachverhalt sieht.
  >
  > Hoffmann (2005, S. 35 f.; Hervorhebung im Original)

Aus diesen Gründen wird sich die Suche nach einer passenden, ursprünglich intendierten Bedeutung des Bezeichners »symbolisch« auf PEIRCE’ Werke beschränken. Leitfragen sind dabei die folgenden, die jenen aus Unterkapitel 1.1 und 1.2 deutlich ähneln: Was ist ein Zeichen? Was ist ein Symbol? Wodurch wird ein Zeichen zum Symbol?

---

[137] „Mathematiklernen bedeutet in dieser Perspektive, aus Zeichen ohne Regeln für sich *Symbole als Zeichen mit Regeln* zu machen“ (Lambert 2020, S. 8; Hervorhebung im Original).

[138] HOFFMANN (2005) nimmt hier Bezug auf die Unterscheidung zwischen äußeren und inneren Mitteln von CHRISTOPH HUBIG (2002).

3.5.1 Zeichen und Symbole bei PEIRCE

In erster Linie widmet sich PEIRCE Prozessen der Semiose, bei denen „das Zeichen auf seinen Interpreten […] einen kognitiven Effekt ausübt" (Nöth 2000, S. 62). Insofern spiegelt dieser Abschnitt nur einen Teil seiner Beiträge zur Semiotik wider: Es soll kurz zusammengetragen werden, welche Begriffe PEIRCE aus heutiger Sicht mit den Bezeichnern »Zeichen« und »Symbol« assoziiert. Im Zuge dessen werden auch andere für die vorliegende Arbeit relevante Bezeichner – insbesondere »ikonisch« – eine Bedeutungszuschreibung erfahren.

3.5.1.1 PEIRCE' Zeichenbegriff

PEIRCE gebraucht den Bezeichner »Zeichen« nicht konsequent für ein und denselben Begriff. Häufig verwendet er ihn – so auch im nachfolgenden Zitat – in einem vergleichsweise[139] engen Sinne:

> Ein Zeichen, oder *Repräsentamen*, ist etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht oder Fähigkeit für etwas steht. Es richtet sich an jemanden, d.h., erzeugt im Bewußtsein jener Person ein äquivalentes Zeichen oder ein vielleicht weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein *Objekt*. Es steht für das Objekt nicht in jeder Hinsicht, sondern in bezug auf eine Art von Idee, welche ich manchmal das *Fundament* (*ground*) des Repräsentamens genannt habe.
>
> Peirce (CP 2.228, zitiert nach Hoffmann 2001a, S. 3; Hervorhebung im Original)[140]

„In dieser Triade ‚Objekt-Zeichen-Interpretant' ist das ‚Zeichen' (auch Repräsentamen genannt) in irgendeiner Form materialiter verfügbar"; Beispiele können „Schriftzeichen oder allgemeine Inskriptionen (‚Aufgeschriebenes') sein oder auch Gesprochenes" (Dörfler 2005, S. 171).[141] Ein Repräsentamen könne aber auch mentaler oder abstrakter Natur sein, solange es ein Potential von Interpretationsmöglichkeiten aufweist (Nöth 2000, S. 132). Passend dazu verwendet JENS ROSCH (2015, S. 112) den Bezeichner »Erscheinung«.

---

139 Neben der obigen Auffassung eines Zeichens als „das erste Korrelat der triadischen Zeichenrelation" (Peirce CP 2.242, zitiert nach Nöth 2000, S. 63) ist auch ein Verständnis von Zeichen als alle drei Korrelate beinhaltend nicht unüblich: „In ihrer allgemeinsten Fassung lautet Peirce' Zeichendefinition: ein Zeichen ist eine triadische Relation von Zeichenmittel, Objekt und Interpretant" (Schönrich 1990, S. 96).
140 HOFFMANN (2001a, S. 3) attestiert dieser Charakterisierung Einseitigkeit, denn sie spricht „nur die Repräsentationsfunktion von Zeichen ausdrücklich an[…], die Erkenntnis vermittelnde Funktion bleibt eher implizit". Anders verhalte es sich, wenn Zeichen aufgefasst werden als „alles, unabhängig von seiner Seinsweise, […] was zwischen einem Objekt und einem Interpretanten vermittelt" (Peirce 1907, zitiert nach Hoffmann 2001a, S. 3).
141 Das „in irgendeiner Form materialiter verfügbar[e]" Repräsentamen (Dörfler 2005, S. 171) erinnert an äußerliche *Darstellungen*, der Interpretant an innerliche *Vorstellungen*. Dies wird auch daran ersichtlich, dass ECO (1977, S. 30) in seiner Übersicht über unterschiedliche semiotische Dreiecke die Bezeichner »Interpretant« und »Mentales Bild« jeweils unter Verweis auf PEIRCE an derselben Ecke notiert. Ein vollumfängliches Gleichsetzen erscheint jedoch unpassend.

Der Interpretant sei selbst wiederum ein Zeichen, und zwar ein solches, das das Repräsentamen beim Prozess des Interpretierens „in uns“[142] determiniert, wie HOFFMANN (2001a, S. 7) es formuliert: „Der Interpretant stellt in diesem Sinne eine Interpretation des Zeichens dar, eine Interpretation dazu, was das Zeichen bezeichnen soll“ (ebd., S. 5). Exemplarisch nennt HOFFMANN (2001b, S. 235) das Zeichen *Stuhl*: Die gedruckten Buchstaben rufen beim Lesen eine gewisse Vorstellung von dem hervor, worauf sich dieses Zeichen beziehen kann – den Interpretanten. PEIRCE selbst spricht von der „Wirkung des Zeichens“ als „etwas, das im Geist des Interpreten erzeugt wird“ (CP 5.475; CP 8.179, zitiert nach Nöth 2000, S. 64). Aus der Auffassung des Interpretanten als abermaliges Zeichen folgt, „dass Zeichenrelationen immer in sich ‚fortzeugenden‘ Zeichenketten eingebunden sein sollen“, schließlich ist der Interpretant „immer gleichzeitig ein Zeichen für einen weiteren Interpretanten, usw.“ (Hoffmann 2001a, S. 3) – SCHREIBER (2005) macht hiervon bei der Erstellung von *semiotischen Lernkarten* Gebrauch.

Das Objekt hingegen sei das, was das Zeichen „repräsentiert“ bzw. was gerade erwähnt oder worüber gerade gedacht werde (CP 2.230, zitiert nach Nöth 2000, S. 63). Dabei könne es sich um ein einzelnes materielles Ding, um eine Klasse von Dingen oder auch um „ein bloß mentales oder imaginäres Konstrukt“ handeln (Nöth 2000, S. 63). Objekte sind also nicht nur „wahrnehmbare Einzeldinge“, sondern alles, „was Gegenstand des Denkens, Meinens, Fühlens, Wünschens und Wollens sein kann, was demzufolge wahrnehmbar oder vorstellbar, was von allgemeiner Natur oder auch individuell ist, was bloß gedacht wird oder was wirklich existiert, existiert hat oder noch existieren wird“ (Schönrich 1990, S. 128) – auch ein mathematischer Zusammenhang oder dessen Begründung. Damit unterscheidet sich PEIRCE’ Bedeutung zum Bezeichner »Objekt« von jener aus Unterkapitel 3.3 und 3.4, die ECO zum Bezeichner »Objektzeichen« motivierte.
Aus dieser sehr allgemeinen Auffassung ergäbe sich zunächst eine Unstimmigkeit, die HOFFMANN (2001a, S. 5) als Repräsentationsproblem bezeichnet; siehe auch SCHÖNRICH (1990, S. 129): Wenn wir IMMANUEL KANT folgend

> nur über Darstellungen Zugang zu den Objekten unserer Erkenntnis haben können, "sind" dann die Darstellungen die einzig uns zugänglichen Gegenstände? Ist das "Objekt" der oben dargestellten Zeichenrelation dann nicht mehr als eine "nützliche Fiktion"? Gibt es dann überhaupt Gegenstände unabhängig von Repräsentationen?
>
> Hoffmann (2001a, S. 5)

Dem widerspricht, dass Lernprozesse eine Entwicklung von Repräsentationsmöglichkeiten voraussetzen und damit auch die Existenz von Gegenständen außerhalb der aktuellen, individuellen Repräsentationsmöglichkeiten: „Es macht Schwierigkeiten, das ‚Objekt‘ unabhängig von seinen möglichen Repräsentationen

[142] „Derjenige, in dem ein Interpretant ausgelöst wird, ist ein *Interpret*“ (Günter Bentele & Ivan Bystřina 1978, S. 22; Hervorhebung im Original).

zu denken, aber auch, ihm keinerlei Eigenständigkeit zuzusprechen“ (Hoffmann 2001a, S. 5). Um diesen Widerspruch aufzulösen, unterscheidet PEIRCE zwischen dem *unmittelbaren* und dem *dynamischen* Objekt – also zwischen dem „Objekt, so wie es repräsentiert wird“ und dem „Objekt an sich“ (Schönrich 1990, S. 129):

Das unmittelbare Objekt sei das, was ein Interpret als das Gemeinte identifiziert (Hoffmann 2001a, S. 7). Es sei „die unmittelbare mentale Repräsentation dessen, was das Zeichen anzeigt“ bzw. das Objekt, „wie es das Zeichen selbst repräsentiert und dessen Seinsweise folglich von der Repräsentation im Zeichen abhängt“ – es könne also intersubjektiv variieren (Lucia Santaella 1995, S. 55 bzw. CP 4.536, jeweils zitiert nach Nöth 2000, S. 63).

Das dynamische Objekt sei das in Kommunikationsprozessen tatsächlich Gemeinte (Hoffmann 2001a, S. 7). Ein Interpret könne es nie unmittelbar erkennen, und ein Zeichen könne es nie eindeutig ausdrücken, sondern „nur *indizieren* und es dem Interpreten überlassen, durch *kollaterale Erfahrung* (*collateral experience*) herausfinden“, was mit dem Zeichen gemeint ist (CP 8.314, zitiert nach Hoffmann 2005, S. 51; Hervorhebung im Original).[143] Ohne dieses dynamische Objekt „könnten wir die Welt interpretieren, wie wir wollten, und hätten keine Möglichkeit zwischen Fiktion und Wirklichkeit zu unterscheiden“ (Hoffmann 2005, S. 51), was Kommunikationsprozesse ad absurdum führen würde:

> Bei jeder Interpretation eines Zeichens, das unser Gesprächspartner verwendet, interpretieren wir das mit diesem Zeichen Gemeinte jeweils als das "unmittelbare Objekt". Gleichzeitig wissen wir aber auch, dass Missverständnisse und falsche Interpretationen möglich sind. Das heißt, wir setzen von vornherein die *Möglichkeit* voraus, dass das in einem Interpretanten in unserem Geist repräsentierte unmittelbare Objekt *nicht* das von unserem Gesprächspartner Gemeinte sein könnte, und das bedeutet, wir setzen die Existenz eines "dynamischen Objektes" als unabhängig von dem in uns repräsentierten "unmittelbaren Objekt" voraus. Auch wenn wir dieses "Objekt an sich" niemals unmittelbar erkennen können, setzen wir doch voraus, dass unser Gesprächspartner wirklich *etwas* gemeint hat. Wenn wir diese Differenzierung nicht immer schon implizit vollziehen würden, dann könnten wir nie auf die Idee kommen, dass es hin und wieder notwendig ist, im Laufe eines Gespräches unsere Interpretationen des vom Anderen Gemeinten zu korrigieren.
>
> Hoffmann (2001a, S. 7; Hervorhebung im Original)

Im Rahmen von Lernprozessen und des EIS-Prinzips wird das Zusammenspiel von unmittelbarem und dynamischem Objekt von großer Relevanz sein: Was sieht eine Person in einem Zeichen? Handelt es sich dabei um das Gemeinte? Wie können Zeichen gestaltet werden, um in Verstehens-, Denk- und Interpretationsprozessen

[143] „For instance, I point my finger to what I mean, but I can’t make my campanion know what I mean, if he can’t see it, or if seeing it, it does not, to his mind, separate itself from the surrounding objects in the field of vision“ (CP 8.314).

das Gemeinte bestmöglich identifizieren zu können? Damit einher geht ein Perspektivenwechsel verglichen mit den vorherigen Ausführungen: Während es charakteristisch für ein Zeichen ist, dass es für *jemanden* für *irgendetwas* steht bzw. stehen kann, ist nun von Interesse, ob oder wie umfassend ein Zeichen für *ein bestimmtes* Individuum für *etwas Bestimmtes* steht. PEIRCE legt die Basis für eine derartige Unterscheidung, indem er die Art und Weise differenziert, in der das (unmittelbare) Objekt in die Zeichenrelation eingebunden ist. Aus dieser Klassifikation für eine intersubjektiv variierende Eigenschaft entspringen die Bezeichner »indexikalisch«, »ikonisch« und »symbolisch«.

3.5.1.2 PEIRCE' Symbolbegriff

PEIRCE gewinnt die Unterscheidung zwischen Indizes, Ikonen und Symbolen aus der Analyse möglicher Einbindungsarten des Objekts in die triadische Zeichenrelation (Hoffmann 2001a). Die Bedeutung zu diesen Bezeichnern wird in den nachfolgenden Abschnitten kurz wiedergegeben und anschließend mit dem EIS-Prinzip in Verbindung gebracht.

- Indizes

Der klassische Prototyp eines Indizes ist der Rauch, der ein Feuer anzeigt. PEIRCE selbst nennt auch den „Fußabdruck, auf den Robinson im Sand stieß und der in den Granit des Ruhms eingegraben worden ist“: Er „war für ihn ein Index, dass ein Geschöpf auf seiner Insel lebt“ (CP 4.531, zitiert nach Helmut Pape 2007, S. 50) – auf dieses Beispiel wird auch im Unterpunkt *Symbole* zurückgegriffen.

Ein Index – andere Autoren verwenden den Bezeichner »Anzeichen« oder »hinweisendes Zeichen« – kennzeichne also eine zweistellige Relation zwischen einem Objekt und einem Repräsentamen (Hoffmann 2001a). Sein Interpretant sei nur die Aufmerksamkeit selbst (Hoffmann 2001b), die er „auf das intendierte partikulare Objekt [zwingt,] ohne es zu beschreiben“, wodurch ihm keine eigene, intelligible Bedeutung zufalle (CP 1.369, zitiert nach Hoffmann 2005, S. 55). Ein Index verweise lediglich auf das Objekt, und zwar dadurch, „dass letzteres wirklich von ihm betroffen ist“ (CP 2.248, zitiert nach Dörfler 2005, S. 41) bzw. allein „durch sein eigenes Auftreten“ (Schönrich 1990, S. 146) – und „nicht wegen einer Ähnlichkeit oder Analogie mit ihm, auch nicht deswegen, weil es mit den allgemeinen Merkmalen verknüpft wird, die das Objekt aufweist“ (CP 2.305, zitiert nach Pape 2007, S. 43). Es bestehe somit eine direkte Abhängigkeit vom Objekt durch eine raum-zeitliche Kontiguitäts- oder Kausalitätsbeziehung, wie die obigen Beispiele von Indizes verdeutlichen (Nöth 2000).

- Ikone

Bei Ikonen unterscheidet PEIRCE streng genommen zwischen dem reinen, genuinen Ikon als potentiellem[144] Zeichen und dem Hypoikon, dem eigentlichen ikonischen Zeichen, das materiell realisiert ist (Nöth 2000). Ein reines Ikon sei

> ein Repräsentamen für das, was es repräsentiert, […] auf Grund von Eigenschaften, die nur ihm selbst als wahrnehmbarem Gegenstand zukommen und die es auch dann hätte, wenn es keinen Gegenstand in der Welt gäbe, dem es ähnlich wäre und auch, wenn es niemals als Zeichen interpretiert würde. Es ist von der Art einer Erscheinung, und als solche besteht es, genau gesagt, nur im Bewußtsein.
>
> Peirce (CP 4.447, zitiert nach Nöth 2000, S. 193 f.)

Als Beispiel führt PEIRCE (CP 3.362 nach Nöth 2000, S. 194) die Betrachtung eines Gemäldes an, bei der für einen Moment die Unterscheidung zwischen Realem und Kopie verschwinden kann. In diesem Augenblick sei das Gemälde ein reines Ikon.

Für den Mathematikunterricht sind die materiell realisierten Ikonen (Hypoikons) von größerer Relevanz. „Alles, was für die genuinen Ikons gilt, gilt auch bis zu einem bestimmten Grade für die Hypoikons“ (Nöth 2000, S. 195); auch hier existiert z. B. kein dyadischer Gegensatz zwischen Zeichen und Bezeichnetem (Hoffmann 2001a). Eigenschaften, die zu denen des genuinen Ikons hinzutreten, zählt NÖTH (2000, S. 195) wie folgt auf:

- die konkrete Realisierung in einem Zeichen
- eine dadurch unweigerlich erzeugte Mischung mit indexikalischen bzw. symbolischen Elementen
- das Kriterium der Ähnlichkeit
- ein Kriterium der Relevanz hinsichtlich der Ähnlichkeit
- ein gewisser Grad interpretativer Offenheit

So bezeichnet PEIRCE ein ikonisches Zeichen als ein solches, „das für etwas steht, bloß weil es ihm ähnelt“ (CP 3.362, zitiert nach Nöth 2000, S. 195) – wobei Ähnlichkeit ein durchaus problematischer Begriff ist: „In irgendeiner Hinsicht ist alles allem ähnlich. Ohne zusätzliche Angabe über die Art der Ähnlichkeit ist der Begriff unbrauchbar“ (Schönrich 1990, S. 139). PEIRCE begreife Ähnlichkeit als eine „Gemeinsamkeit an Merkmalen, Formen oder Eigenschaften, als Analogie oder Isomorphie oder als Gleichheit des Eindrucks, den Zeichen und Objekt beim Interpreten hervorrufen“ (Nöth 2000, S. 195): Es handle sich um „eine Identität von Eigenschaften, und das ist gleichbedeutend damit, daß der Geist die sich ähnelnden Ideen in einer Konzeption zusammenfasst“ (Peirce, CP 1.365, zitiert nach Nöth 2000, S. 195). Daher hänge Ähnlichkeit von der Einschätzung eines Interpreten ab, der das Zeichen liest, unterliege kulturellen Einflüssen oder

[144] Ein aktuelles Zeichen steht für jemanden für etwas; ein potentielles Zeichen *kann* für jemanden für etwas stehen: „Die potentiellen Zeichen werden zu aktuellen Zeichen immer dann, wenn sie von bestimmten Rezipienten als zeichenhaft interpretiert werden“ (Nöth 2000, S. 133).

Konventionen und müsse gelernt werden (Eco 1987)[145] – dies gilt für alle zweidimensionalen Darstellungen von dreidimensionalen Objekten und hat damit im Mathematikunterricht besondere Bedeutsamkeit.

An anderer Stelle wird das Ikon darüber charakterisiert, dass es sich „nur kraft der ihm eigenen Merkmale auf das Objekt bezieht“ (CP 2.247, zitiert nach Ludwig Nagl 1992, S. 44), und als „an den Charakteristika des Objekts teilhabend“ beschrieben (CP 4.521, zitiert nach Nöth 2000, S. 195): „[D]er Charakter des Ikons (*Peirce* meint hier etwa »Gestalt«) wird unmittelbar durch den Charakter (Gestalt) des Objekts bestimmt“ (Bentele & Bystřina 1978, S. 24; Hervorhebung im Original), daher behaupte sich ein Ikon „nicht im Vollsinn dieses Wortes als eigenständiges Etwas neben dem, was es bezeichnet“ – aber es verschmelze auch nicht mit der Sache, die es darstellt (Schönrich 1990, S. 140). „Ein Ikon ist ein Zeichen, das für sein Objekt steht, weil es als ein wahrgenommenes Ding eine Idee wachruft, die naturgemäß mit der Idee verbunden ist, die das Objekt hervorrufen würde“ (Sem. 1.206, zitiert nach Schönrich 1990, S. 138).

Dieser Offenheit entsprechend reichen Prototypen ikonischer Zeichen von Gemälden, Fotografien und Metaphern bis hin zu logischen Graphen und zur Struktur mathematischer Formeln – „so ist für Peirce eine algebraische Formel wie $a + b = c$ insofern ein Ikon, als es die Idee einer bestimmten Relation zwischen a, b und c wachruft“ (Hoffmann 2001a, S. 13). „Peirce nimmt sich [also] in Hinsicht auf die Ikonizität viele […] Freiheiten“ (Eco 1987, S. 264).

- Symbole

Symbole schließlich seien die einzigen Zeichen mit einer intelligiblen Bedeutung: Genau dann, wenn ein Zeichen seine Funktion der Bezeichnung eines Objekts erst dank eines nur durch den Verstand zu bewältigenden Interpretationsakts erfüllen kann, der auf einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit basiert, handle es sich um ein Symbol (Hoffmann 2001a). Dieser Interpretationsakt sei in der Regel nicht bereits unmittelbar nach der Wahrnehmung des Repräsentamens abgeschlossen: „Symbole wachsen. Sie entstehen, indem sie sich aus anderen Zeichen entwickeln, insbesondere aus Ikons. […] Wenn ein Mensch ein neues Symbol schafft, so nur durch Gedanken, die Konzepte beinhalten“ (CP 2.302, zitiert nach Nöth 2000, S. 180; Hervorhebung im Original).[146] Somit handelt sich hier erneut um keine faktische Eigenschaft eines Zeichens, sondern um eine intersubjektiv variable: „Für das symbolische Zeichen ist konstitutiv, dass eine Beziehung zwischen ihm

[145] Ein gezeichneter Umriss eines Pferdes beispielsweise sei seinem Vorbild nicht faktisch ähnlich: „Die Abbildung ist zwar motiviert durch die abstrakte Vorstellung eines Pferdes, aber sie ist gleichzeitig bedingt durch eine kulturelle Entscheidung und bedarf deshalb eines geübten Auges, wenn sie als Umriß eines Pferdes erkannt werden soll. Ähnlichkeit wird *erzeugt* und muss *gelernt* werden“ (Eco 1987, S. 265; Hervorhebung im Original)

[146] Diese Beschreibung erinnert an den Übergang von Zeichen zu Symbolen im Mathematikunterricht bei LAMBERT (2012, 2020): „Mathematiklernen bedeutet in dieser Perspektive, aus Zeichen ohne Regeln für sich *Symbole als Zeichen mit Regeln* zu machen (Lambert 2020, S. 8).

und dem durch es bezeichneten Objekt nicht bestehen würde, wenn es nicht einen ‚Interpretanten' gäbe" – und damit auch eine Person, in der der Interpretant beim Prozess des Interpretierens determiniert wird –, „der diese Beziehung erst herstellt" (Hoffmann 2001a, S. 12). *Symbolischsein* ist also subjektiv konstruiert und nur dann möglich, „wenn *wir selbst* die damit den Zeichen oder Dingen unterstellte Gesetzmäßigkeit *wissen*. Wir ‚sehen' […] Gesetzmäßigkeit nur dann, wenn wir sie aus uns selbst in die Zeichen und Dinge ‚hineinprojizieren'" (Hoffmann 2005, S. 44; Hervorhebung im Original).

Aus diesem Aspekt der Subjektivität folgt unmittelbar, dass das Objekt, zu dem ein Zeichen symbolisch in Relation stehen kann bzw. soll, nicht durch das Zeichen selbst eindeutig bestimmt ist. Dementsprechend muss eine Lehrperson bei der Unterrichtsplanung – bewusst oder unbewusst – den primären „Gegenstandsbereich der Zeichentätigkeit" festlegen, indem sie entscheidet, „welche Klasse von materiellen oder ideellen Dingen als Objekte in der Triade zu qualifizieren sind" (Dörfler 2005, S. 172). HOFFMANN & ROTH (2005) unterscheiden diesbezüglich zwischen *kollateralem* und *fokalem* Wissen: Kollaterales Wissen – ein von PEIRCE (vgl. CP 8.183, 6.338, 8.314) geprägter Begriff – bezeichnet wörtlich übersetzt „nebenher laufendes Wissen" und soll „deutlich […] machen, dass wir es in jedem Erkenntnisakt immer auch mit Wissen zu tun haben, das als solches nicht im Zentrum der Aufmerksamkeit steht, das vielmehr *vorausgesetzt* werden muss, um zum Beispiel das Erlernen neuen Wissens zu ermöglichen" (Hoffmann 2005, S. 38; Hervorhebung im Original). Fokales Wissen hingegen steht im Fokus der Aufmerksamkeit, zum Beispiel, weil es gelernt werden soll.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das, „was für den einen Menschen ein Symbol ist, […] für den anderen allein ein Index sein" kann (Hoffmann 2005, S. 53) – die Zuschreibung ist abhängig vom Interpreten, der unterschiedliche unmittelbare Objekte als das Gemeinte identifizieren kann.[147] Gleichzeitig kann ein und dasselbe Zeichen für ein und denselben Menschen sowohl Index als auch Symbol sein – je nach unmittelbarem Objekt:

> Dasselbe wahrnehmbare kann jedoch in doppelter Hinsicht als ein Zeichen dienen. Jener Fußabdruck, auf den Robinson im Sand stieß und der in den Granit des Ruhms eingegraben worden ist, war für ihn ein Index, dass ein Geschöpf auf seiner Insel lebt, und gleichzeitig rief er als Symbol die Idee des Menschen in ihm wach.
>
> Peirce (CP 4.531, zitiert nach Pape 2007, S. 50)

Hierbei zeigt sich erstens, „dass wir es jeweils in den einzelnen Erkenntnisakten mit *unterschiedlichen* unmittelbaren Objekten zu tun haben", und zweitens, „dass wir Zeichen, mit denen wir es im täglichen Leben zu tun haben, nicht einfach den […] Zeichenbegriffen zuordnen" – also als Index, Ikon oder Symbol einordnen –

[147] Entsprechend bei LAMBERT (2020, S. 8; Hervorhebung im Original): „*Ob eine Darstellung ein Zeichen oder ein Symbol ist, hängt immer vom Vorwissen des Lernenden ab.*"

können, denn diese seien eben keine Schubladen, „in die man eine fertig gegebene Welt von Zeichen einsortieren könnte“ (Hoffmann 2001a, S. 7 f.; Hervorhebung im Original). Stimmig damit ist ECOs (1977) scheinbar abwertendes Urteil[148] über die Unterscheidung zwischen Indizes, Ikonen und Symbolen: Zum Zwecke der objektiven Einteilung von Zeichen sei sie „mit schwerwiegenden Mängeln behaftet“ und verliere in dieser Anwendung „den ursprünglichen Sinn, den sie bei PEIRCE hatte“ (Eco 1977, S. 61). „Der Grund dafür ist einfach: Eine derartige Trichotomie postuliert das Vorhandensein eines Referenten als unterschiedenen Parameters“ (Eco 1987, S. 238). Insofern nimmt die Einteilung in Indizes, Ikone und Symbole in ECOs (1977) Zusammenstellung eine Sonderrolle ein, denn über sie lässt sich nur mutmaßen; sie ist intersubjektiv variabel: „[J]edes Zeichen, je nach den Umständen, unter denen es auftritt, und nach dem Designationszweck, zu dem man es verwendet, [kann] sowohl als Index wie als Ikon wie als Symbol“ aufgefasst werden (Eco 1977, S. 62). Infolgedessen sind Symbole bei PEIRCE „nicht das, was man umgangssprachlich darunter versteht (Taube als Symbol des Friedens, Frau mit Waage als Symbol für Gerechtigkeit, Hakenkreuz als Symbol für den deutschen Faschismus usw.) […]. Symbole im umgangssprachlichen Sinn können, müssen aber nicht darunterfallen“ (Bentele & Bystřina 1978, S. 24).[149]

Eine formal-algebraische Darstellung muss also nicht symbolisch sein, denn es lässt sich nicht per se darüber urteilen, ob sie „als Präsentation einer Qualität, als Hinweis auf ein Faktum oder als Ausdruck eines gesetzmäßigen Zusammenhangs in den Interpretationsprozeß eingeht“ (Schönrich 1990, S. 136). Exemplarisch führt HOFFMANN (2001a, S. 12; Hervorhebung im Original) das Zeichen π an: Es ist „insofern ein *Symbol*, als es seine Funktion nur dann erfüllen kann, wenn es einen Interpretanten gibt, der die Beziehung zwischen diesem Zeichen und dem von ihm bezeichneten Objekt vermittelt.“ „Hat es keine Bedeutung oder wird es nicht verstanden, dann ist es kein Symbol“ (Hoffmann 2005, S. 57).

Hierin könne eine „absolut zentrale Voraussetzung für ein Verständnis der Peirceschen Semiotik“ gesehen werden (Hoffmann 2005, S. 53) – und dennoch wird ihr nicht immer Genüge getan.[150] Es sei daher nochmals hervorgehoben: Wann immer ein Zeichen (im Verständnis von PEIRCE) als indexikalisch, ikonisch oder symbolisch bezeichnet wird, muss dies für ein bestimmtes Subjekt und für ein

---

[148] Es ist insofern nur *scheinbar abwertend*, weil es dem Zweck der objektiven Kategorisierung von Zeichen entspringt. Das vertiefte EIS-Prinzip benötigt jedoch auch subjektiv variable Unterscheidungen, und dabei erweisen sich die *schwerwiegenden Mängel* als unverzichtbare Vorzüge.

[149] Erneut erinnert diese Klarstellung an Vorheriges: Die Symbole im Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips sind auch umgangssprachlich ebensolche, während sie es bei PEIRCE oder LAMBERT (2012, 2020) sein *können*, aber nicht müssen (vgl. Unterabschnitt 2.1.2.4).

[150] JÖRISSEN & SCHMIDT-THIEME (2015, S. 388), die BRUNER im Ad-Hoc-Verständnis deuten, merken zu PEIRCE’ Unterscheidung zwischen Indizes, Ikonen und Symbolen an: „Anders als in der Unterteilung nach Bruner wird hier ausschließlich nach der Beziehung zwischen Zeichen und Bezeichnetem unterschieden. Alle Repräsentationen, die sich der symbolischen Ebene nach Bruner zuordnen lassen, sind jedoch auch im semiotischen Sinn symbolisch, d. h. es gibt keinerlei erkennbaren Bezug zum mathematischen Objekt oder Sachverhalt.“

bestimmtes unmittelbares Objekt geschehen – und nicht auf Grundlage der äußeren Gestaltung des Zeichens. Mit etwas Nachsicht sollte allerdings auch eingestanden werden, dass Formulierungen allzu schnell missverständlich wirken.[151] Gerade, weil der Teufel im Detail steckt und selbst kleine Unstimmigkeiten zu wesentlichen Missverständnissen und Fehlvorstellungen führen können, ist die nun folgende explizite Übertragung der Ideen auf das EIS-Prinzip unverzichtbar.

3.6 Übertragung auf die Repräsentationsmodi: Was soll symbolisch, ikonisch bzw. enaktiv bedeuten?

Eine Übertragung von PEIRCE' Kategorisierung muss den Kontext des Mathematikunterrichts, dessen Ziele und Akteure im Blick haben und offen sein für daraus motivierte Anpassungen – genau wie es bereits bei der Unterscheidung von Zeichen nach dem Grad der Spezifität der Fall war. Was also *sollen* nun, nach der Vorarbeit von ECO und PEIRCE, die Bezeichner »symbolisch«, »ikonisch« und auch »enaktiv« im EIS-Prinzip der vorliegenden Arbeit bedeuten?

3.6.1 Symbolisch

PEIRCE' Verständnis übertragend ist die Einordnung eines Zeichens als symbolisch für objekthafte, entlehnte *und* kodifizierte Zeichen möglich. Dadurch werden Aspekte der Modifikationen von KIRSCH (1977a), JAHNKE (1984) und BIEHLER (1985) umgesetzt – man denke etwa an KIRSCHs (1977a, S. 99) „Vollwertigkeit auch der ‚unteren' Darstellungsmedien" (vgl. Abschnitt 2.1.2). Diese Haltung zu den drei Zeichenarten vertritt die Mathematikdidaktik vielerorts auch außerhalb des EIS-Prinzips – wenn auch mit anderen Bezeichnern.[152]

---

[151] „Das Symbol bezeichnet nur dann etwas, wenn es eine allgemeine Konvention, einen spezifischen Gebrauch, und das heißt eben: wenn es einen ‚Interpretanten' gibt, der eine Beziehung zwischen Symbol und Objekt herstellt. […] Ein Mensch muss aufgrund seiner Gewohnheiten in der Lage sein, ein π *als* Symbol sehen zu können" (Hoffmann 2001a, S. 12). Die *Existenz* eines spezifischen Gebrauchs und insbesondere der letzte Satz des obigen Zitats könnten hier ungewollter Weise aufgefasst werden als eine objektiv zutreffende Eigenschaft: π wird bereits dadurch zum Symbol im PEIRCEschen Sinne, dass *ein* Mensch existiert, der aufgrund seiner Gewohnheiten π als Symbol sehen kann – dem ist natürlich nicht so. Einen zusätzlichen Beitrag zu derartigen Fehlinterpretationen liefern etwas unbedachte Formulierungen, denen nur ein einzelnes Wort wie *höchstwahrscheinlich* fehlt, um nicht unterschwellig das Ad-Hoc-Verständnis nahezulegen: „[W]enn z.B. ein Schüler sagt ‚*2 + 2 = 4*', dann verwendet er mit den Zahlzeichen, „+" und „=" Symbole, deren Bedeutung auf Konvention beruhen" (Hoffmann 2001b, S. 235; Hervorhebung im Original).

[152] „[A]uch in konkretem Material [sind] abstrakte Strukturen zu sehen", bemerkt FREUDENTHAL (1978, S. 201), während JAHNKE (1984, S. 37) von *implizit gehaltenen Beziehungen und Bedeutungsebenen von Veranschaulichungen* spricht und DÖRFLER (1988, S. 75) von der *Beziehung, die weder wahrnehmbar noch bildlich vorstellbar sei, sondern erschlossen werden müsse*, um „subjektiv zu einer figurativen Eigenschaft der Handlungselemente" zu werden. VAN DER WAERDEN (1954, S. 172) führt aus, dass „[f]ür das Denken […] die Art der Vorstellungen, mit denen es arbeitet, nur eine sehr untergeordnete Rolle" spielt; entsprechend heißt es bei WITTMANN (2014, S. 226): „Zwischen operativen und formalen Beweisen besteht bei genauerer Betrachtung kein grundsätzlicher Unterschied, sondern nur ein Unterschied in den eingesetzten Mitteln."

Nicht die Zeichenarten entscheiden also über das Symbolischsein, sondern eben jene Faktoren, die PEIRCE nennt: der Interpret bzw. das unmittelbare Objekt, das in der Wahrnehmung des Interpreten in die Zeichenrelation eingebunden ist. Dies beschreibt auch LAMBERT (2012) explizit und erläutert es – wie oben bereits ausschnittsweise zitiert wurde – an anderer Stelle wie folgt:

> Symbole sind Zeichen mit Spielregeln – und auf Letztere kommt es an (Lambert 2012). So wird ein Baumdiagramm, das ein Zufallsexperiment erfasst, individuell zu einem Symbol, wenn verstanden wird, dass man Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren und Pfadwahrscheinlichkeiten addieren kann. In welchem Maße ein Zeichen für eine Person ein Symbol ist, ist damit davon abhängig, wie viele Spielregeln jenes Zeichens diese bereits verinnerlicht hat. Für manche Schülerinnen und Schüler in der Klasse kann ein Baumdiagramm noch die Darstellung einer Fallunterscheidung sein – schon ein erster Symbolgehalt –, für andere ist es aber schon ein mächtiges Werkzeug, das über den konkreten Fall hinausweist und es erlaubt, neue Aussagen zu generieren.

Lambert (2015a, S. 16)

Zugleich wird am Beispiel des Baumdiagramms deutlich, dass schulische Lernprozesse einen weiteren Faktor bei der Unterscheidung zwischen Zeichen und Symbol im Sinne von LAMBERT (2012) benötigen – dies sei an Abb. 25 erläutert.

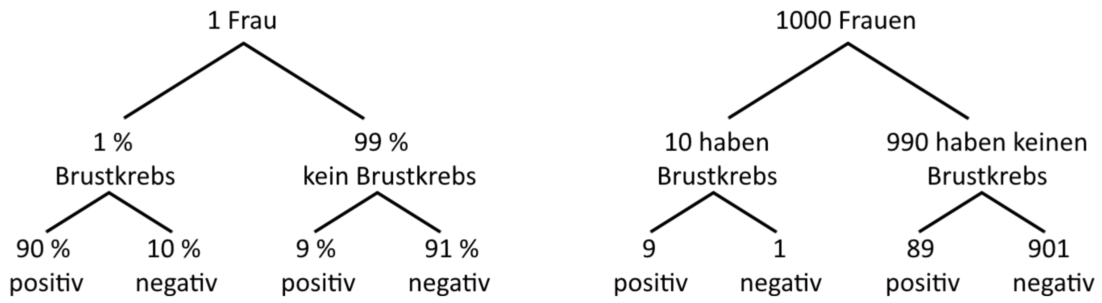


Abb. 25: Baumdiagramme bei GERD GIGERENZER, WOLFGANG GAISSMAIER, ELKE KURZ-MILCKE, LISA SCHWARTZ & STEVEN WOLOSHIN *(2009, S. 37)*

GIGERENZER et al. (2009) zielen nicht darauf ab, „dass man Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades multiplizieren und Pfadwahrscheinlichkeiten addieren kann" (Lambert 2015a, S. 16) – dieses kollaterale Wissen *läuft nebenher*. Der von ihnen angedachte Lernprozess strebt die Erkenntnis an, dass und warum bei seltenen Krankheiten die Wahrscheinlichkeit der Erkrankung bei positivem Testergebnis überraschend gering ist – das fokale Wissen. Dieses in Kommunikationsprozessen Gemeinte war für PEIRCE das dynamische Objekt (Hoffmann 2001a, S. 7). Die Bezeichnung lässt sich auf Lernprozesse übertragen und weist dann auf das i. d. R. von der Lehrperson Gemeinte hin – also jene Zusammenhänge, Begründungen, Fertigkeiten usw., die von Lernenden in eigentätiger Auseinandersetzung mit den von der Lehrperson zur Verfügung gestellten Zeichen errungen werden sollen. Es ist beim Lernen aus Handlungen somit stets die Frage zu stellen, „was eigentlich der mathematische Inhalt bzw. Hintergrund der Handlung, was also das zu Verstehende ist“ (Meyerhöfer 2020, S. 102).

Die vorliegende Arbeit orientiert sich terminologisch an LAMBERT (2012, 2020) und spricht hier von den *intendierten Symbolgehalten*. Neben diesen intendierten Symbolgehalten existieren auch solche, auf die geplante Lernprozesse nicht bzw. noch nicht oder nicht mehr abzielen. Angelehnt an die Unterscheidung zwischen aktuellen und potentiellen Zeichen werden sie als *potentielle Symbolgehalte* bezeichnet – ebenfalls ein Bezeichner aus LAMBERT (2012, S. 17), der andernorts von den „symbolische[n] Kapazitäten“ eines Zeichens spricht (Lambert 2020, S. 8).

Mit diesen Bezeichnern lässt sich nun im Rahmen des EIS-Prinzips zum Ausdruck bringen, dass mathematische Lernprozesse eine ganz bestimmte Erkenntnis anstreben: *Wenn eine Person den intendierten Symbolgehalt in ein Zeichen hineinsieht, soll das Zeichen für diese Person als symbolisch gelten.*[153] Das Erschließen eines anderen potentiellen Symbolgehalts geht somit bei Anwendung auf konkrete Lernprozesse nicht automatisch mit dem Erreichen der dritten Darstellungsebene im EIS-Prinzip einher, auch wenn damit PEIRCE’ Bedeutung zu »symbolisch« nicht mehr völlig getreu wiedergegeben ist. Gemeinsam bleibt beiden Bedeutungen u. a., dass das *Zeichen* einen Oberbegriff bildet und *Symbole* besondere Zeichen sind. Wenn also im Folgenden der Bezeichner »Zeichen« verwendet wird, trifft dies keine Aussage über den subjektiven Umgang (s. u.).

Dank dieser Anpassung wird der hierarchische Charakter, der dem EIS-Prinzip unweigerlich anhaftet – die symbolische Ebene als Ziel von mathematischen Lernprozessen (vgl. Abschnitt 0) –, unproblematisch und sogar passend.

Das Unterschlagen je einer Abhängigkeit – der vom Interpreten oder der vom intendierten Symbolgehalt – führt zu den Begriffsbildern des Ad-Hoc-Verständnisses, dessen negative Auswirkungen in Unterkapitel 3.2 thematisiert wurden:

- Ohne die Abhängigkeit vom *intendierten Symbolgehalt*

genügt bereits das Sehen irgendeines potentiellen Symbolgehalts – etwa die zuvor ausgeführte Handlung –, um ein Zeichen für eine Person zum Symbol zu machen. Die Handlung selbst ist zwar ein potentieller Symbolgehalt, dessen Erschließung auch in entlehnten Zeichen nicht selbstverständlich und zuweilen sogar Ursache für Lernschwierigkeiten ist:

[153] Dabei ist es natürlich unmöglich, zweifelsfrei festzustellen, ob eine Person die intendierten Symbolgehalte tatsächlich erschlossen hat – nicht umsonst bezeichnet ECO (1977; Hervorhebung J. L.) die Unterscheidung zwischen Indizes, Ikonen und Symbolen als eine „Einteilung der Zeichen nach ihrem *angeblichen* Zusammenhang mit dem Referenten“, während PEIRCE selbst die Untersuchung des Geistes für schwierig und anzweifelbar hält (Schönrich 1990). Auch fehlerfreie Lösungen stiften keine Sicherheit bezüglich der erschlossenen Symbolgehalte, wie WERTHEIMER (1957, S. 40; Original von 1945) am Beispiel eines Kindes erläutert, das zwar Flächeninhalte von Rechtecken richtig berechnet, aber dennoch „nicht erfaßt, wie die Fläche aufgebaut ist aus der Reihe mal ihren parallelen Wiederholungen“, wie sich beim Abzählen der Einheitsquadrate offenbart.

> Im Gegensatz zur enaktiven Form, wo ich zu 5 Äpfeln 3 dazulege und den Endzustand 8 erhalte, muss ich in dieser ikonischen Darstellung 2 Zustände, nämlich zunächst die Teilmengen mit 5 und 3 Elementen und dann die Gesamtmenge mit insgesamt 8 Elementen sehen. Auch andere ikonische Darstellungsformen der Addition enthalten die gleiche Problematik.
>
> Lauter (2005, S. 77)[154]

Das Projizieren der Handlung in ein entlehntes oder kodifiziertes Zeichen ist jedoch nie Selbstzweck, sondern stiftet erst eine notwendige Semantik für Argumentationen in Mathe (in der Schule) (Lambert 2020). Als Voraussetzung für anschließendes Lernen darf dies nicht ausreichen, um die symbolische Darstellungsebene bereits als erklommen anzusehen.

- Ohne die Abhängigkeit von einem *speziellen Interpreten*

genügt bereits das Erschließen des intendierten Symbolgehalts in der Wahrnehmung *einer* Person: *Ein formal-algebraischer Ausdruck ist symbolisch, weil ich das Gemeinte identifizieren kann.* Daraus resultieren kurzschlüssige, faktische Zuschreibungen zur symbolischen Darstellungsebene.[155]

Zusammenfassend soll also beim Mathematiklernen die Zuordnung einer Darstellung zur symbolischen Ebene daran festgemacht werden, ob eine bestimmte Person in einem Zeichen das sieht, was sie darin sehen soll. Trifft dies zu, spricht die vorliegende Arbeit in Anlehnung an KIRSCH (1977a, S. 98) bzw. BARZEL & HUßMANN (2007, S. 5)[156] von einem *verständigen Umgang* mit dem Zeichen. Ein eingängiges Beispiel im Kontext von Kommunikations- und Erkenntnisprozessen, das die prototypische Begriffsbildung unterstützen kann, sind Kinderzeichnungen.[157] Die Einführung des Bezeichners »verständiger Umgang« dient dabei lediglich als Paraphrasierung von PEIRCE' Vorarbeit, um eine erste Idee des Gemeinten (und des Nichtgemeinten) auch ohne semiotisches

[154] Die von LAUTER (2005) angesprochene Problematik ist auch in den kognitiven Präferenzen *funktional* bzw. *prädikativ* nach SCHWANK (2003) zu suchen.

[155] „Alle mathematischen Formeln (zumindest in der Schule) *sind* symbolische Darstellungen von ursprünglich ganz konkreten Handlungsabläufen" (BERGER 2017, S. 19; Hervorhebung J. L.).

[156] Lernende können auch „auf der untersten Stufe vollwertige Mathematik treiben" (Kirsch 1977a, S. 99), also „sich selbst einen *verständigen Umgang*" (ebd., S. 98; Hervorhebung J. L.) mit solchen Darstellungsformen erschließen. „Variable, Term und Formel so zu unterrichten, dass sie nicht nur auf ein bloßes Regelwerk verengt bleiben, sondern in ihrer inner- wie außermathematischen Bedeutung erfasst werden und der *Umgang* mit ihnen *verständig* geschieht, stellt für Lehrpersonen eine große Herausforderung dar" (Barzel & Hußmann 2007, S. 5; Hervorhebung J. L.).

[157] Wenn ein Kindergartenkind eine Zeichnung anfertigt, so existiert meist ein unmittelbares Objekt bzw. ein intendierter Symbolgehalt, den das Kind bei der Erstellung der Zeichnung festgelegt hat – in diesem erdachten Fall sei es eine abstruse Geschichte, in der sich Erfundenes mit Erlebtem vermischt. Das Kind sieht diesen Symbolgehalt wie selbstverständlich in die Zeichnung hinein, die daher in seiner Wahrnehmung zum Symbol wird. Betrachten die Eltern dieselbe Zeichnung, kann sie für sie zunächst ikonisch bleiben, z. B., weil sie nur das unmittelbar Dargestellte wahrnehmen. Selbst wenn sie eine ebenso kreative Geschichte in die Zeichnung projizieren, bleibt sie womöglich dennoch ikonisch im Sinne der vorliegenden Arbeit, solange ihre Geschichte von jener des Kindes abweicht. Womöglich wird in diesem Beispiel das Zeichen erst dann für die Eltern zum Symbol, wenn das Kind von seiner Geschichte erzählt: Jetzt sehen auch die Eltern den intendierten Symbolgehalt in die Zeichnung hinein.

Vorwissen vermitteln zu können. Enger an der Vorarbeit von PEIRCE bzw. HOFFMANN (2001a, S. 7) haftend müsste es lauten, dass das unmittelbare Objekt in der vom Interpreten konstruierten Zeichenrelation weitestgehend mit dem dynamischen Objekt übereinstimmt.

3.6.2 Enaktiv und Ikonisch

Im Gegensatz dazu kann eine Person mit einem Zeichen (noch) nicht verständig umgehen, sondern *naiv*: Damit sei bezeichnet, dass sich das unmittelbare Objekt in der durch die Person konstruierten Zeichenrelation nicht ausreichend mit dem dynamischen Objekt deckt – auf das Mathematiklernen bezogen werden dann also von der Lehrperson angedachte Muster und deren Ursachen noch nicht in die Zeichen hineingesehen.[158] Erneut können sowohl objekthafte, entlehnte und kodifizierte Zeichen diese Eigenschaft aufweisen: Entscheidend ist der Interpret bzw. das unmittelbare Objekt, das in dessen Wahrnehmung mit dem Zeichen in Relation steht sowie der intendierte Symbolgehalt.

Enaktive und ikonische Darstellungen gleichen sich also hinsichtlich des subjektiven Umgangs mit ihnen, unterscheiden sich aber in der Art der verwendeten Zeichen: Als enaktiv gelten von nun an objekthafte Zeichen für eine Person, die mit ihnen naiv umgeht; als ikonisch entlehnte und kodifizierte Zeichen, bei denen dies der Fall ist. Daraus resultiert die folgende *EIS-Palette*:

verständig	symbolisch		
	(verständig-objekthaft)	(verständig-entlehnt)	(verständig-kodifiziert)
naiv	enaktiv	ikonisch	
	(naiv-objekthaft)	(naiv-entlehnt)	(naiv-kodifiziert)
Umgang mit den Zeichen / Art der verwendeten Zeichen	objekthaft	entlehnt	kodifiziert

Abb. 26: EIS-Palette

Verglichen mit vorherigen EIS-Prinzipien (vgl. Kapitel 2) arbeitet Abb. 26 zwar mit einer größeren Anzahl an Bezeichnern, erkauft sich dadurch jedoch klärende Ordnung: Die Bezeichner erleichtern das unmissverständliche Kommunizieren, Verinnerlichen und Anwenden der Theorie, explizieren Unterschwelliges und trennen inhaltlich Unterschiedenes auch terminologisch. Der Bedarf dafür wird

[158] Im Rahmen dieser Terminologie könnten die eindimensionalen BRUNER-Rezeptionen aus Unterkapitel 1.1 bzw. Abschnitt 2.1.1 auch als *naiv* bezeichnet werden. Ohne die obige Bedeutung zum Bezeichner »naiv« hätte dies jedoch auch eine Abwertung hinsichtlich der Sachkenntnis oder des Urteilsvermögens implizieren können.

beispielsweise in KRAMERs (2017, S. 53) Hadern mit der Einordnung eines Graphen als „ikonisch (bildlich)" deutlich:

> Allerdings kann man sich beim Schaubild darüber streiten, ob es sich hier wirklich um eine bildliche Darstellung handelt. Irgendwie wird schon ein Bild […] gezeichnet, auf der anderen Seite hat der Graph wenig mit der realen Bewegung zu tun und ist weniger ein Foto als eine formale Beschreibung.
>
> Kramer (2017 S. 53)

Die neuen Bezeichner lösen die Unstimmigkeit auf: Ein Graph ist kein entlehntes, sondern ein kodifiziertes, konstruktiv-geometrisches Zeichen. Ausschlaggebend ist nicht, *dass* ein Bild gezeichnet wird, sondern *wie*.

Das soeben angedeutete Zusammenspiel der Zeichenarten (objekthaft, entlehnt, kodifiziert) mit den Sprachformen (verbal-begrifflich, konstruktiv-geometrisch, formal-algebraisch) wird hier nur kurz angerissen und würde noch weiterer Ausarbeitung bedürfen, von der die vorliegende Arbeit absieht: Beide didaktische Brillen lassen unterschiedliche Aspekte sichtbar werden, sodass sich innerhalb einer Sprachform verschiedenartige Zeichen bzw. umgekehrt innerhalb einer Zeichenart Darstellungen unterschiedlicher Sprachformen antreffen lassen: So können etwa unter den kodifizierten Zeichen sowohl verbal-begriffliche[159], konstruktiv-geometrische[160] als auch formal-algebraische[161] Zeichen identifiziert werden; ähnlich wie unter den entlehnten Zeichen[162].

Es sind jedoch nicht nur die Felder von Relevanz, sondern ebenso die verschiedenartigen Übergänge zwischen ihnen (horizontale wie vertikale): Sie

---

[159] KIRSCH (1977b, S. 169), der statt »kodifiziert« den Bezeichner »symbolisch« verwendet, nennt hierzu ein Beispiel, das sich durch zahllose weitere ergänzen ließe: Eine eigens eingeführte sprachliche Bezeichnung wie „‚Je mehr – desto mehr – Zuordnung' für eine streng isotone Abbildung" sei auch eine „symbolische" Darstellung (vgl. Unterabschnitt 2.1.2.1).

[160] Neben dem bereits erwähnten Graph sind Venn-Diagramme, bei denen Kreise Mengen darstellen, als kodifizierte Zeichen zu identifizieren, genau wie Kreuze als Darstellung eines Punktes.

[161] Hierzu zählen naheliegender Weise Ziffern und zusammengesetzte Zifferndarstellungen wie 3506, Rechenzeichen, Potenzdarstellungen wie 2^3, Gleichungen, π usw.

[162] Entlehnte, konstruktiv-geometrische Zeichen können, wie in Unterkapitel 3.4 erwähnt, der Kreisbogen zwischen einem Strahlenpaar oder der Prozentstreifen sein. Ein entlehntes, formal-algebraisches Zeichen ist etwa ∥ bei der Kennzeichnung einer *Parallelitätsrelation*; ebenso können die Zeichen < und > als entlehnte Zeichen wahrgenommen werden, wenn sie als Abbild des geöffneten Mauls eines Tieres, das die größere Zahl verspeisen will, bzw. der entsprechend geöffneten Hand eingeführt werden. Vertreter entlehnter, verbal-begrifflicher Zeichen sind weniger naheliegend. Womöglich könnten die Untersuchungsobjekte der Onomatopoesie bzw. Lautmalerei als solche eingeordnet werden: „Entgegen der vielfach vertretenen Meinung, daß das Wort ein willkürliches und zufälliges reines Zeichen für eine Sache sei, also ohne innere Beziehung zu Sache sei, kommt man durch eine induktive empirische Untersuchung dieser Frage zu der Auffassung, daß das Wort kein äußeres willkürliches Zeichen für eine Sache ist, daß vielmehr zwischen dem Wort und der bedeutenden Sache noch ein sinnvoller Zusammenhang besteht. […] Jedes der Versuchswörter besitzt als Lautkörper eine Lautgestalt, und als solche eine Lautstruktur, und ebenso besitzt jede Sache eine Sachstruktur, und beide, Lautstruktur und Sachstruktur, können sich so sehr entsprechen, daß sie in wesentlichen Zügen als gleich aufgefaßt werden; *es kann daher eine Sache durch ein Wort, dessen Lautstruktur der Struktur der Sache entspricht, dargestellt werden*" (Wittmann 1933, S. 33; Hervorhebung im Original).

führen zu den zentralen Rückschlüssen, die Kapitel 4 aus dem geschaffenen theoretischen Rahmen ableitet. Ihre Bedeutsamkeit lässt sich aber auch zu diesem Zeitpunkt bereits begründen, denn die Beschreibung eines Lernprozesses gelingt in diesem Modell nur unter Zuhilfenahme der Übergänge – zur Erläuterung sei hier ein in WITTMANN (2014) angedachter Lernprozess[163] herangezogen:

> Die Kinder können jetzt in der Lage sein, ggf. mit Hilfe der Lehrerin, zu beschreiben, welche Wirkung das Zusammensetzen von Doppelreihen ohne bzw. mit einem einzelnen Plättchen auf die Parität des Ergebnisses hat, und sich klar zu machen, dass dabei die Länge der Doppelreihen keine Rolle spielt. Der formale Beweis dieses zahlentheoretischen Satzes, der in der Mittelstufe gegeben wird, beruht auf den gleichen Operationen. Er wird nur in einer anderen Sprache, der Sprache der Algebra, formuliert.

Wittmann (2014, S. 216)

Nicht nur der vorgesehene Lernprozess drückt sich in Abb. 27 aus, sondern indirekt auch WITTMANNs (2014) Kommentar im obigen zweiten Absatz: Sowohl mit objekthaften als auch mit kodifizierten Zeichen lässt sich hier die symbolische Ebene erreichen. Weitere Beschreibungen von Lernprozessen mithilfe der EIS-Palette folgen in Unterkapitel 4.1.

verständig	symbolisch (verständig-objekthaft)	(verständig-entlehnt)	(verständig-kodifiziert)
naiv	enaktiv (naiv-objekthaft)	ikonisch (naiv-entlehnt)	(naiv-kodifiziert)
Umgang mit den Zeichen / Art der verwendeten Zeichen	objekthaft	entlehnt	kodifiziert

Abb. 27: Zeichenübergänge bei WITTMANN (2014, S. 216)

Als begründungsbedürftig könnte die Zusammenfassung von naiv-entlehnten und naiv-kodifizierten Zeichen zu den ikonischen Zeichen empfunden werden. Dass naiv-entlehnte Zeichen als ikonisch gelten, ist für ein solches Empfinden weniger ursächlich, denn dies ergibt sich unmittelbar aus der Übertragung der Bedeutung, die der Bezeichner PEIRCE verdankt: Ein Zeichen ist für ihn ikonisch, wenn es „einen Gegenstand hauptsächlich durch seine Ähnlichkeit repräsentieren kann" (CP 2.276, zitiert nach Eco 1987, S. 260). Im Fall von naiv-entlehnten Zeichen ist dieser Gegenstand oftmals die zuvor ausgeführte oder vorgestellte Handlung

[163] Mithilfe der Plättchendarstellung einer geraden Zahl als Doppelreihe bzw. einer ungeraden Zahl als Doppelreihe mit einem einzelnen Plättchen soll u. a. begründet werden, „dass die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl immer ungerade ist" (Wittmann 2014, S. 216).

selbst bzw. deren Handlungsobjekte, denn aus diesen ist das entlehnte Zeichen abbildhaft hervorgegangen. Es steht dann beispielsweise für ein Handlungsobjekt, „bloß weil es ihm ähnelt“ (CP 3.362, zitiert nach Nöth 2000, S. 195).

Bei naiv-kodifizierten Zeichen fallen analoge Aussagen schwerer: Hier ist das unmittelbare Objekt bei einem naiven Umgang kaum plausibel vermutbar:

> In einer philosophischen Dissertation über Symbolik, die ein Chemiker verfaßt hatte, fiel mein Blick auf das Kapitel, wo er die mathematische Symbolik behandelte; entgeistert las ich, wie er mathematische Formeln interpretierte: $2 + 7 = 9$ etwa, also ob die 2 mit der 7 reagiert, um 9 zu erzeugen. (Wie er $9 = 2 + 7$ las, weiß ich nicht mehr.) Es war das wahrscheinlich jemand, der mit mathematischen Formeln noch etwas anfangen konnte. Was in Schülern umgeht, wenn sie in diese Sprache eingeweiht werden, kann man sich kaum vorstellen.
>
> Freudenthal (1973, S. 271)

Warum also werden naiv-kodifizierte Zeichen in der vorliegenden Arbeit als ikonisch bezeichnet? Können sie nicht auch Indizes sein? Zunächst gilt: „Je komplexer ein Zeichen ist, desto mehr unterschiedliche Zeichenrelationen lassen sich in einer semiotischen Analyse herauspräparieren“ (Hoffmann 2001a, S. 21). Bei $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ kann es sich dementsprechend durchaus um einen Index handeln: Formal-algebraische Ausdrücke auf einer Schultafel können indexikalisch das unterrichtete Schulfach designieren; „[s]peziell kann jedermann an den Formeln in einem mathematischen Text sehen, daß es sich hierbei nicht etwa um einen Roman handelt“ (Michael Otte 1983, S. 186). Genauso gut könnte die Formel „– wie dies für indexikalische Zeichen kennzeichnend ist – die Aufmerksamkeit auf etwas [lenken]; hier z. B. darauf, dass die Lehrerin, die dieses Zeichen an die Tafel geschrieben hat, damit auf irgendetwas hinweisen will“ (Hoffmann 2001a, S. 21). Ob Index oder Ikon spielt für die Bewertung des Lernprozesses jedoch gar keine Rolle, denn das Ziel, den intendierten Symbolgehalt zu erschließen, ist in beiden Fällen noch nicht erreicht: Das Mathematiklernen aus Handlungen erfordert gemäß Unterkapitel 3.1 „komplexe kognitive Konstruktionen“ (Dörfler 1988, S. 98), also einen durch den Verstand zu bewältigenden Interpretationsakt – doch dieser kennzeichnet nur Symbole (Hoffmann 2001a). Dass also nicht präzise zwischen Ikonen und Indizes unterschieden wird und infolgedessen sowohl naiv-entlehnte als auch naiv-kodifizierte Zeichen stets in dieselbe Kategorie der ikonischen Zeichen eingeordnet werden, ist lediglich eine Komplexitätsreduktion ohne unerwünschte Nebenwirkungen, die die Anwendung der Theorie erleichtert und darüber hinaus gängigen Auffassungen in der Mathematikdidaktik entspricht.[164]

Ein auf der EIS-Palette nicht explizierter Aspekt ist die Alltagssprache des Kindes. Dennoch beeinflusst sie Lernprozesse: „[E]ine Verbalisierung symbolisch oder bildlich gegebener Zusammenhänge liefert einen entscheidenden Schlüssel zum individuellen Verständnis, insbesondere bei Benutzung der Alltagssprache“ (Prediger & Lena Wessel 2011, S. 166)[165]. Selbiges gilt für objekthafte Zeichen (Büchter & Haug 2013, S. 4); ein Beispiel dafür liefert AEBLI (1983).[166] Bei all diesen Empfehlungen zur Nutzung der Alltagssprache wird uneingeschränkt eine Empfehlung ausgesprochen. Die zuvor bereits erwähnten kognitiven Präferenzen *funktional* und *prädikativ* nach SCHWANK (2003) wirken hierbei erhellend, denn sie spielen bei der Verwendung von Sprache eine durchaus gewichtige Rolle:

> Während sich beim prädikativen Denken eine besondere Leichtigkeit im Umgang mit Wörtern als nützlich heraus stellt, ist beim funktionalen Denken bemerkenswert, dass die Wörter durchaus in den Hintergrund treten können, die Sprache also nicht das zentrale kognitive Werkzeug ist, mittels dessen sich Ideen herausbilden.
>
> Schwank (2003, S. 73)

Es sei also eher das prädikative Denken, bei dem „Dinge abstrakt in ihren Kerneigenschaften zu packen“ sind und „für ein geordnetes Nebeneinander zu sorgen“ ist, das auf einem kundigen Gebrauch der natürlichen Sprache fußt (Schwank 1998, o. S.):

> Typisch und hilfreich bei prädikativen Analysen ist die Verwendung von Wörtern. […] [E]s kommt darauf an, dass man sich der Wörter bedienen kann, um Ordnung und damit Systematik zwischen den Figuren herzustellen. Bildlich gesprochen lässt sich das gewählte Wort als Faden (speziellen Querschnitts) benutzen, mit dem Figuren gleicher Art aufgefädelt werden

---

164 FISCHER (1984a, S. 120; Hervorhebungen im Original) beispielsweise zählt „Diagramme, Graphiken, … Formeln“ allesamt zu Bildern – und zwar zu solchen, „die uns die Mathematik liefert“: „Auch jene Teile der Mathematik, die im allgemeinen als unanschaulich gelten, wie der *algebraische Formalismus*, haben ihre *eigene Anschaulichkeit*. Wenn man eine komplizierte Gleichung oder ein Integral lösen will, muß man es ansehen – bis einem eine geeignete Substitution o.ä. einfällt“. Vergleichbar dazu versteht AEBLI (1981, S. 311) *sekundäre Verhaltenssysteme* derart, „daß das Verhalten in ihnen mit Objekten umgeht, die die ‚wirklichen‘ Objekte eines primären Verhaltenssystems abbilden“ – graphische Abbildungen gehören ebenso in diese Kategorie wie „die natürliche Sprache und die Kunstsprachen der verschiedenen Wissenschaften“.

165 Das Zitat von PREDIGER & WESSEL (2011) enthält erneut die kritisierte Verwendung des Bezeichners »symbolisch«. Im dortigen Kontext ergeben sich keine unmittelbaren negativen Konsequenzen, weil die Autorinnen mit den gewählten Bezeichnern lediglich das Vernetzen der Darstellungsarten konstruktiv-geometrisch, verbal-begrifflich und formal-algebraisch fordern. Erst ein Anwenden des EIS-Prinzips, das die symbolische Ebene als Ziel im Mathematikunterricht setzt, verursacht die in 3.2 genannten Probleme.

166 „Wenn das Kind einmal sagen kann: ‚Der erste Turm ist gleich groß wie der zweite, und der zweite ist gleich groß wie der dritte,‘ [sic] so besteht eine gute Chance, daß es auch zu schließen vermag: ‚Der erste ist gleich groß wie der dritte.‘ Entsprechendes gilt für das Beispiel der 5 x 4 Colaflaschen, die Christine aus dem Keller holt“ (Aebli 1983, S. 208).

> können, oder anders ausgedrückt als Mengenklammern, in die Figuren gleicher Art eingesammelt werden können. […] Beim prädikativen Analysieren ist es von Vorteil, wenn man gut mit Wörtern umgehen kann und einem dabei die Namen nicht ausgehen. Einmal gestiftet ist ein präziser Gebrauch der Wörter von Nöten: an den Wörtern (der Namenszuordnung) hängt die erkannte Systematik!
>
> Schwank (2003, S. 72)

Weil also die Alltagssprache des Kindes das Lernen in *jeder* Zeichenart unterstützen kann, darf sie nicht in *einem einzelnen* Feld auf der EIS-Palette verortet werden, insbesondere nicht im Bereich der kodifizierten Zeichen, wie es bei LAUTER (2005, S. 79)[167] der Fall ist. Diesem Bereich gehören zwar verbal-begriffliche Darstellungen an, die jedoch anders als die Alltagssprache des Kindes ausgeschärft sind durch interindividuell geteilte Normen und Gepflogenheiten. Vielmehr begleitet die Alltagssprache jede Zeichenart; bildlich gesprochen *liegt* sie der gesamten EIS-Palette *auf*. Demzufolge wird die Nutzung der Alltagssprache in allen Bereichen immer wieder eingefordert werden müssen, um von ihrer unterstützenden und anregenden Wirkung auf Verstehensprozesse Gebrauch zu machen (vgl. auch Breidenbach 1956, S. 31 und Oehl 1962, S. 21 f.).

3.7 Reflexion der Bezeichnerwahl

Nach der Vertiefung der Theorie ist eine Reflexion gängiger Bezeichner für die drei Kategorien enaktiv, ikonisch und symbolisch möglich – und angebracht:[168] „Steht es nicht jedem Erfinder frei, seine Erfindung zu nennen, wie er will? Im Geschäftsleben leider ja, im Geistesleben allerdings nein! Im geistigen Leben verlangen wir, daß keiner von einem Wort der deutschen Sprache mehr beansprucht, als ihm zukommt“ (Breidenbach 1956, S. 64). Vor allem aber birgt die Bezeichnerwahl die Chance impliziter Begriffsklärung oder soll zumindest das Erfassen des Gemeinten nicht unabsichtlich erschweren.

Dass dieses Potential nicht immer voll ausgeschöpft wird, verdeutlicht HAFENBRAK (2004, S. 22) in doppelter Hinsicht: Explizit kritisiert er die Formulierung didaktischer Prinzipien als verwirrend, weil „[t]eilweise […] unter dem selben Namen zwei verschiedene Dinge verstanden [werden], teilweise werden zwei verschiedene Prinzipien mit dem selben Namen bezeichnet.“ Gleichzeitig verwendet er die Bezeichner »Darstellungsmodus«, »Repräsentationsmodus«, »Darstellungsart«, »Darstellungsebene«, »Repräsentationsebene« und »symbolisches Niveau« zur Bezeichnung von BRUNERs Kategorien und überzeugt damit auch implizit von seiner Kritik.

Bezeichner für BRUNERs Kategorien entstehen in der Regel ohne explizite Reflexion oder Begründung – ROYAR (2013) bildet hier eine Ausnahme – und durch

[167] Statt von *kodifizierten Zeichen* spricht LAUTER (2005) dabei von der *symbolischen Form*.
[168] Im Sinne von REMBOWSKI (2015) findet hier eine Kohärenzbildung statt.

Kombination des Bestimmungswortes »Repräsentation« bzw. »Darstellung« mit einem der Grundwörter »Modus«, »Ebene«, »Art«, »Weise«, »Form« oder »Stufe«. Tabelle 4 soll das breite Spektrum an Namensgebungen andeuten und keine Aussage über die Verbreitung einzelner Bezeichner treffen – daher wird stets nur eine Quellenangabe als Existenznachweis genannt.

	Repräsentations-	Darstellungs-
modus	BARZEL & HUßMANN (2007, S. 6)	BARZEL & HUßMANN (2007, S. 10)
ebene	REISS & HAMMER (2013, S. 31)	LAMBERT (2012)
art	SUSANNE SCHNEPEL (2019, S. 102)	BÖNIG (1995, S. 52 f.)
weise	CHRISTOPH RATZ (2011, S. 180)	WEIGAND (2018, S. 8)
form	PREDIGER & WESSEL (2011, S. 166)	BARZEL & HUßMANN (2007, S. 10)
stufe	SCHUBERT & SCHWILL (2011, S. 78)	BAUERSFELD (1972, S. 244)
niveau	KIRSCH (1977a, S. 98)	
medium	GERHARD STEINER (2006, S. 108)	KIRSCH (1977a, S. 97)
modalität	BERTHOLD ECKSTEIN (2011, S. 165)	

Tabelle 4: Vielfalt bei der Bezeichnung der BRUNERschen Kategorien[169]

Einige weitere Bezeichner sind »Erkenntnisebene« (Regina Bruder, Helmut Linneweber-Lammerskitten & Julia Reibold 2015, S. 19), »Abstraktionsstufe« (Berger 2017, S. 19), »Stufe des Begriffserwerbs« (Meiers 1994, S. 558), »Darbietungsform« (Bruner 1974, S. 68), »Darbietungsart« (Bruner 1974, S. 49), »Präsentationsebene« (Kramer 2013, S. 77), »Ebene der Handlungs-ausführung« (Hartmut Giest & Joachim Lompscher 2006, S. 189) und »Erscheinungsform des Wissens« (Biehler 1985, S. 59).

Keiner der Bezeichner ist grundsätzlich falsch, sondern im ungünstigsten Falle irreführend in Anbetracht der bezeichneten Begriffe. Eine Beurteilung hängt also stets davon ab, welche Begriffe »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« bedeuten sollen – und dies variiert in den obigen Passagen durchaus, allein schon, weil nicht alle der Mathematikdidaktik entstammen. Die Frage lautet daher nicht, welcher Bezeichner der richtige sei, sondern welcher die größte Viabilität aufweist, also die angedachte Begriffsbildung bestmöglich impliziert oder zumindest nicht verstellt. Zunächst seien die oben aufgeführten Bestimmungswörter in dieser Hinsicht untersucht, anschließend die Grundwörter.

[169] Der Tabelle ist zu entnehmen, dass auch abgesehen von HAFENBRAK (2004) unterschiedliche Bezeichner zuweilen synonym verwendet werden. BARZEL & HUßMANN (2007) bilden dabei keine Ausnahme – ein weiteres Beispiel stellen HEITZER & WEIGAND (2020) dar, die in der Beschreibung ihres EIS-Prinzips die Bezeichner »Repräsentationsmodus«, »Darstellungsform« und »Darstellungsweise« gebrauchen.

- Sollen die Bezeichner »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« *Darstellungen* oder *Repräsentationen* zugeordnet werden?

Allein von PEIRCE ausgehend lässt sich hierzu keine klare Antwort ableiten. Für ihn sind Indizes, Ikonen und Symbole besondere Repräsentamen (CP 4.447). Zwar seien diese DÖRFLER (2005, S. 171) zufolge „in irgendeiner Form materialiter verfügbar", weshalb DÖRFLER „Schriftzeichen oder allgemeine Inskriptionen (‚Aufgeschriebenes') […] oder auch Gesprochenes" als Prototypen nennt. NÖTH (2000, S. 132) ergänzt jedoch, dass für PEIRCE auch „ein bloßer Gedanke" ein Repräsentamen sein könne, was durchaus notwendig ist, weil in den „sich ‚fortzeugenden' Zeichenketten" der Interpretant wiederum zu einem determinierenden Zeichen – also zu einem Repräsentamen – für einen weiteren Interpretanten werde (Hoffmann 2001, S. 3).

Die EIS-Palette ist jedoch mit DÖRFLERs (2005) Sichtweise stimmig, denn sie unterscheidet in Anlehnung an ECO (1977) bzw. SCHAFF (1973) *ausdrücklich hervorgebrachte*, *künstliche Zeichen* – daher sind enaktiv, ikonisch und symbolisch in der vorliegenden Arbeit Eigenschaften von *Darstellungen*. Dennoch basiert die Unterscheidung des Umgangs mit den Zeichen und damit auch die Zuschreibung als symbolisch nicht auf den sichtbaren Eigenschaften der Darstellungen, sondern auf den subjektiven Vorstellungen, die damit verbunden sind.

Gegenüber dem Begriff der (externen) Darstellungen, die schon FREGE von (internen) Vorstellungen unterscheidet – vgl. LAMBERT (2005a) –, ist der Begriff der Repräsentation weitaus unklarer und wird in der Mathematikdidaktik mit unterschiedlichen Bedeutungen versehen (vgl. Royar 2013 bzw. Kapitel 1). Allein deshalb wäre seine Verwendung problematisch.[170]

- Sollen mit »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« *Weisen*, *Arten* bzw. *Formen* unterschieden werden oder *Ebenen* bzw. *Stufen*?

Enaktiv, ikonisch und symbolisch werden in der vorliegenden Arbeit anders als im Ad-Hoc-Verständnis nicht als unterschiedliche Möglichkeiten verstanden, mit denen – mal besser, mal schlechter – ein und dasselbe dargestellt und untersucht werden kann. Stattdessen heben sich Symbole durch den subjektiven Umgang, durch das Hineinprojizieren des intendierten Symbolgehalts ab. Sie sind wie bei PEIRCE eine Entwicklung aus Zeichen; sie sind aus ihnen *gewachsen* (CP 2.302). Die Grundwörter »Art«, »Weise« und »Form« sind daher unpassend, denn sie implizieren drei ebenbürtige Kategorien, zwischen denen beliebig gewechselt werden kann.

Der PEIRCEschen Auffassung von Symbolen und dem in dieser Arbeit vertretenen Verständnis wird das Grundwort »Ebene« gerecht: Wie Abb. 26 bereits auf den

---

[170] Im Kontext Fundamentaler Ideen ist die Situation vergleichbar: „Die Unschärfe des Ideenbegriffs leistet einen Beitrag zur Uneinigkeit über den Begriff der Fundamentalen" (von der Bank 2016, S. 146).

ersten Blick preisgibt, steht Symbolisches *über* Enaktivem und Ikonischem, ist aus diesen Darstellungen entwachsen, hat eine zusätzliche Qualität hinzugewonnen. Das Grundwort »Stufe« würde zwar ebenfalls den Prozess des Wachsens aus anderen Zeichen heraus betonen, dabei aber zugleich eine Sequenzialität von enaktiv über ikonisch zu symbolisch implizieren, die der Vielfalt von Lernprozessen zuwiderläuft (vgl. Abschnitt 4.1.2). Gegen das Grundwort »Niveau« spricht dessen Mehrdeutigkeit, die u. a. der Gebrauch der Bezeichner »Repräsentationsniveau«[171] und »Darstellungsniveau«[172] in der Mathematikdidaktik illustriert – BRUNERs Kategorien sind hier nicht gemeint. Die Grundwörter »Modus«, »Medium« und »Modalität« hingegen sind ähnlich wie der Bezeichner »Repräsentation« zu universell, ihre Verwendung ließe die Chance einer impliziten Begriffsklärung aus. Aus diesen Gründen wurde auf den vorherigen Seiten und wird im Folgenden von den drei *Darstellungsebenen* enaktiv, ikonisch und symbolisch die Rede sein.

In der Literatur stehen nicht nur unterschiedliche Bezeichner für denselben Begriff, sondern auch ein und derselbe Bezeichner für unterschiedliche Begriffe (vgl. REMBOWSKI 2015, S. 19 ff.). Dementsprechend verweist der Bezeichner »Darstellungsebene« nicht eindeutig auf die hier vertretene Auffassung des EIS-Prinzips, wie abschließend an zwei Beispielen verdeutlicht wird:

- Beim Übersetzen zwischen *Darstellungsebenen* im Rahmen einer von HEFENDEHL-HEBEKER (1998, S. 204) betrachteten Aufgabe gehe „es darum, eine geometrische Konfiguration hinsichtlich der betrachteten Flächengröße und deren Beziehungen algebraisch zu beschreiben, um algebraische Techniken zur Lösung des Problems nutzen zu können". Hier werden eindeutig die *Sprachformen* konstruktiv-geometrisch und formal-algebraisch angesprochen, die den kodifizierten Zeichen angehören.
- BÜCHTER & HAUG (2013, S. 5) sprechen ebenfalls von *Darstellungsebenen*, deuten diese jedoch wie im Ad-Hoc-Verständnis (vgl. Unterkapitel 2.2). Dass sie dennoch von *Ebenen* sprechen, leuchtet in Anbetracht der stellenweise implizierten Rolle enaktiver und ikonischer Darstellungen ein: „Solange Valentin noch nicht sicher auf der rein symbolischen Ebene agiert, stellen die praktisch-gegenständliche und die bildlich-anschauliche Ebene aber immer wieder Stützen der Vorstellung dar" (ebd., S. 2).

[171] Das Repräsentationsniveau „meint die Abstraktheit der psychischen Repräsentation, die von konkreten Handlungen (Operationen mit Objekten, Mengen) über ihre (teilweise) vorgestellte Ausführung bis zur ‚rein geistigen' Lösung zunimmt" (Holger Probst 1983, S. 85, zitiert nach Gerster & Schultz 2004, S. 233).

[172] HEFENDEHL-HEBEKER (2015, S. 179) lässt in fachdidaktischen Übungen Aufgaben auf dem „Darstellungsniveau einer Lehrkraft" bearbeiten. Das ausschlaggebende Kriterium scheint das Maß an „mathematischer Substanz", zu sein, das „ans Licht geholt" wurde: Ist nur „das Kalkül […] und die Feststellung von Fakten" oder aber eine Orientierung „an authentischen Prozessen mathematischer Wissensbildung" erkennbar? (ebd., S. 181).

Derartige Passagen weisen möglicherweise ungewollt „der Anschauung eine dienende Rolle zu“[173], als könnten Lernende „das Anschauungsmaterial […] vergessen, wie man eine Leiter zurückstößt, nachdem man die Höhe erreicht hat“ (Ernst Linde 1922a, S. 61 f.). „Man betrachtet die Anschauungen lediglich als die Durchgangsstufe zur Gewinnung von Abstraktionen“ und unterschlägt so „den Wert der Anschauungen […] doch noch sehr erheblich“ (Linde 1922b, S. 51). DÖRFLER (2006b, S. 71) beschreibt und kritisiert passend dazu ein „weit verbreitetes stereotypes Bild von Mathematik“, das im Unterricht erzeugt werde – im Grunde bezieht er sich also eher auf *Mathe* als auf *Mathematik* (vgl. Lambert 2020): „Mathematik ist eine mentale Tätigkeit, deren Gegenstände abstrakte nicht-sinnliche Objekte […] sind. […] Darstellungen (Visualisierungen, Diagramme) haben den primären Zweck, die abstrakten Objekte einzuführen; sie sind also bloße Mittel, ein Durchgangsstadium zur Verinnerlichung in Form mentaler Konstrukte“ (Dörfler 2006b, S. 71) Sie „werden kaum selbst zum relevanten Lerngegenstand oder etwas, das in sich schon interessant ist, untersucht werden kann, wichtige Eigenschaften hat“ und „illustrieren ‚nur‘ die eigentlichen mathematischen Objekte“ (ebd., S. 71; vgl. auch Sfard & McClain 2002, S. 154 f.).

> Darstellungen sind eben im Mathematikunterricht nur Darstellungen von etwas Anderem, das dann als viel wichtiger als sie selbst aufgefasst wird. Dieses „Andere“ bekommen aber die Lernenden nie zu Gesicht, daher empfinden sie Unverständnis, Versagen, Frustration, Ärger und Wut, und viel Angst […] vor diesem abstrakten Unfassbaren.
>
> Dörfler (2006b, S. 72)

Das Grundwort »Ebene« kann also auch implizieren, dass Enaktives und Ikonisches Steigbügel des wirklichen Mathematiktreibens mit arbiträren Zeichen seien – die Bezeichnerwahl allein kann nie alle Missverständnisse ausschließen.

3.8 Zwischenfazit zur Vertiefung der Theorie

Abschließend sei mit Bezug auf die in Unterkapitel 2.3 aufgeworfenen Fragen der bisher geleistete Beitrag zur Vertiefung der Theorie herausgestellt:

- Die drei Tätigkeiten Machen, Zeichnen und Notieren wurden mit bestehenden mathematikdidaktischen Konzepten in Einklang gebracht und in die erweiterte Theorie integriert, sodass sich die vorliegende Arbeit *nicht* als Gegenentwurf zum Ad-Hoc-Verständnis versteht. Stattdessen nimmt sie diese gängige Auffassung ernst, präzisiert und erweitert sie.
- Zentrale Anmerkungen u. a. von LAMBERT (2012) zu dessen EIS-Prinzip sind mit der EIS-Palette so weit expliziert, dass sich der redensartliche Finger auf

[173] Anschauung und Selbsttätigkeit – zwei zentrale Forderungen zu Zeiten der Reformpädagogik – sind sinngemäß Vorläufer von Enaktivem nach LAMBERT (2012) bzw. von objekthaften Zeichen. Durch die Ausschärfung der vorliegenden Arbeit – hier kommen insbesondere die Kriterien objekthafter Zeichen zum Tragen – lässt sich diese Entsprechung expliziter benennen als zuvor.

sie legen lässt: Die Felder konkretisieren z. B., dass formal-algebraische Darstellungen nicht symbolisch sein müssen und dass auch Handlungen und Bilder symbolisch werden können, aber nicht „bereits an sich ‚Stufen mathematischer Erkenntnis' darstellen" (Royar 2013, S. 38). Damit einhergehend wird außerdem die Lösung des Bedeutungsproblems expliziert, das BIEHLER (1985) und JAHNKE (1984) für BRUNERs Theorie aufwerfen (vgl. Unterabschnitt 2.1.2.2): Die Grenze zwischen Veranschaulichungsmitteln und formal-algebraischen Darstellungen ist insofern relativiert, als dass sie alle die *Möglichkeit* eint, symbolisch zu werden – sie *sind* im Gegensatz zu JAHNKEs (1984) Vorschlag aber nicht per se Symbole.

- Ebenfalls durch die Felder expliziert ist die Zielsetzung von Mathematikunterricht: Während diverse Modifikationen und Hinweise zum EIS-Prinzip eigens betonen mussten, dass Mathematikunterricht in allen Zeichenarten stattfinden soll und „Regeln für den Umgang mit bestimmten Repräsentationen" erlernt werden müssen – siehe etwa SCHMIDT-THIEME & WEIGAND (2015, S. 463) –, wurde dieser Aspekt der Theorie immanent, indem die symbolische Ebene einen verständigen Umgang mit den Zeichen verlangt.
- Durch das Aufgreifen von PEIRCE' Vorarbeiten in der Tradition von HOFFMANN und DÖRFLER konnten die Faktoren, von denen die Einordnung eines Zeichens als Symbol abhängig sein soll, expliziert und erweitert werden: Zu dem bereits bei LAMBERT (2012) hervorgehobenen Subjekt ist der stärker betonte intendierte Symbolgehalt als zweiter Faktor hinzugetreten, der bei LAMBERT (2020) im Prozess des *Situierens* Beachtung findet.
- Die EIS-Palette liefert einen sprachlichen Rahmen, mit dem Phänomene im und Aussagen zum Lernen aus Handlungen einheitlich formuliert werden können – so auch die folgende: „[A]lthough adults can recognize mathematical relationships in the models as a consequence of their prior mathematical enculturation, the students might only see the concrete material" (Gravemeijer, Paul Cobb, Janet Bowers & Joy Whitenack 2000, S. 226). Dies bedeutet nichts anderes, als dass der Umgang mit objekthaften Zeichen naiv oder verständig sein kann.
- Durch die explizite Verfeinerung der ikonischen Ebene finden formal-algebraische Darstellungen ihren berechtigten[174] Platz innerhalb der Theorie:

[174] Für den berechtigten Platz formal-algebraischer Darstellungen und gegen ein „avoiding or marginalizing the use of and the manipulation of mathematical formulas" tritt beispielsweise DÖRFLER (2018, S. 7) unter Verweis auf PEIRCE und WITTGENSTEIN ein. Dort fließen auch Aspekte des diagrammatischen Denkens und Schließens explizit ein. Diagramme seien keine isolierten, einzelnen Inskriptionen, „sondern gehören immer zu einem Darstellungssystem. Dieses liefert die Mittel zur Erstellung der Inskriptionen […] nach gewissen Regeln und gibt auch Regeln für das Lesen und Verwenden der Diagramme vor" (Dörfler 2006a, S. 210). Entsprechend wären sie auf der EIS-Palette vorrangig als kodifizierte Zeichen einzuordnen, wobei erweiternde, andere Zeichenarten miteinschließende Auffassungen möglich sind: „Generally speaking, diagrams are kind of inscriptions of some permanence in any kind of medium (paper, sand, screen, etc). Those inscriptions mostly are planar but some are 3-dimensional like the models of geometric solids or the manipulatives in school mathematics" (Dörfler 2002, S. 1 f.). Diagrammatisches Denken sei

Auch – aber nicht nur – mit ihnen ist der Übergang zur symbolischen Ebene möglich. Während formal-algebraische Darstellungen im Ad-Hoc-Verständnis überbetont werden (als Hauptziel von Mathematikunterricht), bleiben sie in vereinzelten Passagen modifizierter Deutungen sogar unterrepräsentiert:

> In Lehr-Lern-Prozessen sollten mathematische Inhalte auf drei unterschiedlichen, aber aufeinander bezogenen Ebenen dargestellt werden; wesentlich dabei sind die *Übergänge* zunächst von konkreten Handlungen zu Abbildern dieser und dann zum Erkennen und Erfassen von mathematischen Spielregeln in diesen Abbildern, die genau dadurch zu Symbolen werden.
>
> Lambert (2013, S. 597; Hervorhebung im Original)

- Am selben Zitat lässt sich eine nächste Erweiterung herausstellen: Übergänge zwischen den Zeichenarten und Übergänge im Umgang mit den Zeichen sind unterschiedlicher Natur und werden dementsprechend durch unterschiedliche didaktische Maßnahmen unterstützt. Durch die mit der EIS-Palette ermöglichte Differenzierung zwischen horizontalen und vertikalen Übergängen wird dieser Umstand deutlicher kommuniziert; wovon auch das Konkretisieren und die Anwendung der Theorie profitiert.

Eben diesem Konkretisieren und Anwenden der Theorie widmen sich die folgenden Kapitel 4 und 5. Dabei sollen jeweils unterschiedliche Funktionen von Theorieelementen nach PREDIGER (2015)[175] wirksam werden: Unterkapitel 4.1 ist vorwiegend *deskriptiv*, Unterkapitel 4.2 und Kapitel 5 vorwiegend *präskriptiv* orientiert, wobei auch immer wieder *erklärende bzw. verstehende* sowie *prognostische* Theorieelemente zutage treten.

---

nun nach PEIRCE „die Konstruktion von Diagrammen, das Ausführen von Experimenten mit den Diagrammen, das Beobachten und Festhalten der Ergebnisse der Experimente und die Vergewisserung der allgemeinen Gültigkeit" (ebd., S. 211) – es beschreibt also den Prozess des Übergangs auf die symbolische Ebene (mithilfe kodifizierter Zeichen) detaillierter. Weil die vorliegende Arbeit primär auf die zweckdienliche Gestaltung der verschiedenartigen Zeichen abzielt, durch die günstige semiotische Bedingungen beim Mathematiklernen aus Handlungen entstehen, schlagen sich Aspekte zum diagrammatischen Schließen – beispielsweise die oben genannten wesentlichen Schritte – nur gelegentlich und implizit nieder, beispielsweise bei den kurz gehaltenen Ausführungen zur Anregung vertikaler Übergänge in Abschnitt 4.2.4.

[175] PREDIGER (2015, S. 652) unterscheidet *deskriptive Theorieelemente*, die ein „[d]ifferenziertes Wahrnehmen und Beschreiben" ermöglichen, *erklärende bzw. verstehende Theorieelemente*, die „[r]ückschauendes Begreifen" unterstützen, *normative Theorieelemente* zum Festlegen und Begründen von Zielen, *präskriptive Theorieelemente*, die Handlungsbedingungen zur Erreichung eines Ziels explizieren, und schließlich *prognostische Theorieelemente*, die die Folgen bestimmter Bedingungen vorhersagen.

4 Erste Konkretisierungen des vertieften EIS-Prinzips

4.1 Gebrauch des EIS-Prinzips in seiner deskriptiven Funktion

In Unterkapitel 4.1 soll sich das EIS-Prinzip in seiner deskriptiven Funktion beweisen, also ein „[d]ifferenziertes Wahrnehmen und Beschreiben“ ermöglichen (Prediger 2015, S. 652). Dazu führt Abschnitt 4.1.1 am Beispiel der bereits thematisierten Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck zunächst Zeichen auf, die bei diesem Lernen aus Handlungen auftreten, und ordnet sie begründet auf der EIS-Palette ein – dies dient zugleich der prototypischen Begriffsbildung zu den einzelnen Feldern der Palette. Anschließend strukturiert Abschnitt 4.1.2 weitere Lernprozesse mit Hilfe der EIS-Palette.

4.1.1 Ordnen von Zeichen

Bei einem Unterrichtsgang zur Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck können zahlreiche Zeichen auftreten (vgl. LAMBERT 2019): Ein Papierdreieck, von dem Ecken abgerissen, umsortiert und anschließend womöglich aufgeklebt werden, Fotografien, beschriftete Zeichnungen der Handlungen, Simulationen am Computer und ausformulierte Begründungen. All diese Zeichen lassen sich auf der EIS-Palette einordnen, um Übersicht zu stiften und die Auswahl von Zeichen für den Unterricht zu unterstützen (im Zusammenspiel mit Abschnitt 4.2.1):

- Beispiel 1: Ein ausgeschnittenes Papierdreieck

Das erste Zeichen lässt sich zwar nicht abdrucken, aber leicht durch Ausschneiden eines Dreiecks aus Papier erzeugen (siehe dazu Unterkapitel 8.2). Es handelt sich bei dem so hergestellten Dreieck – nicht aber bei Abb. 28 – um ein objekthaftes Zeichen, weil es effektiv manipulierbar ist und die Folgen dieser Manipulationen beobachtet werden können. Oder anders gesagt: Lernende müssen sich die Handlung des Eckenabreißens und -umsortierens nicht vorstellen, sondern können sie wahrnehmen (Aebli 1985, S. 5).

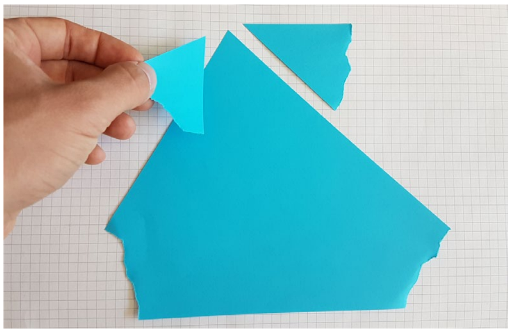


Abb. 28: Ausgeschnittenes Dreieck aus Papier

Je nach subjektivem Umgang ist das Papierdreieck damit der enaktiven oder der symbolischen Darstellungsebene zuzuordnen: Symbolisch ist dieses objekthafte Zeichen bei einem verständigen Umgang – also dann, wenn die bei LAMBERT (2019) intendierten Symbolgehalte hineingesehen werden: Das Anlegen von zwei abgerissenen Ecken an die verbleibende erzeugt eine Parallele zur gegenüberliegenden Dreiecksseite – und zwar *immer*: Zunächst ließe sich stets durch einen Eckpunkt die beim Basteln gefundene Parallele zur gegenüberliegenden Seite konstruieren. Die beiden anderen Ecken passen dann immer genau in die freien Lücken neben der ersten, weil Wechselwinkel vorliegen. Die Innenwinkelsumme im Dreieck ergibt somit stets 180°. Diese Muster und Ursachen sind es, die beim Übergang vom Zeichen zum Symbol „wachsen" bzw. „sich aus anderen Zeichen entwickeln" müssen, um PEIRCE' Wortwahl zu verwenden (CP 2.302, zitiert nach Nöth 2000, S. 180).

Wird dieser intendierte Symbolgehalt nicht in die Handlung mit dem Papierdreieck hineinprojiziert, handelt es sich um ein naiv-objekthaftes Zeichen und die Person befindet sich auf der enaktiven Ebene.

- Beispiel 2: Eine Fotografie des ausgeschnittenen Papierdreiecks

Abb. 28 selbst ist nicht effektiv manipulierbar, sondern ein statisches Abbild der Handlung bzw. der Handlungsobjekte und damit ein entlehntes Zeichen.[176] Es kann also ikonisch oder symbolisch sein: Ikonisch – also ein naiv-entlehntes Zeichen – wäre es für eine Person, die nicht den in Beispiel 1 beschriebenen intendierten Symbolgehalt in dieses Zeichen hineinprojiziert, sondern beispielsweise nur die Handlung mit dem haptischen Papierdreieck. Symbolisch im Sinne des vertieften EIS-Prinzips wäre es analog zum ausgeschnittenen Papierdreieck für eine Person, die die anvisierten Muster und deren Ursachen in dieser Fotografie sieht.

Natürlich kann – und soll (vgl. Abschnitt 4.2.2) – das Zeichen gleichzeitig ikonisch für die Handlung stehen. Dass ein Zeichen ikonisch in eine Zeichenrelation und symbolisch in eine andere eingebunden ist, ist alles andere als untypisch und ist z. B. bereits bei Buchstaben der Fall: „Though ikons of one geometrical figure, the letters b, d, q, p, have different symbolic values" (Freudenthal 1983, S. 241) – genau wie der von PEIRCE angeführte „Fußabdruck, auf den Robinson im Sand stieß" gleichermaßen Index und Symbol war (CP 4.531, zitiert nach Pape 2007, S. 50). Lediglich hinsichtlich ein und desselben Symbolgehalts kann ein Zeichen nicht sowohl ikonisch als auch symbolisch für eine Person sein. Erneut wird deutlich, dass die Unterscheidung zwischen Zeichen und Symbol nicht nur von der Person, sondern auch von einem festzulegenden intendierten Symbolgehalt abhängig ist.

[176] Mit einem Wechsel der Zeichenart gehen oftmals – so auch hier – Verschiebungen in der angesprochenen funktionalen Präferenz (prädikativ oder funktional) einher (vgl. Schwank 2003). Für vorwiegend funktional denkende Lernende wäre es daher von Vorteil, den dynamischen Prozess im entlehnten Zeichen anzudeuten, beispielsweise mithilfe von Pfeilen oder der Darstellung mehrerer Zwischenschritte im Handlungsprozess.

- Beispiel 3: Aufgeklebte Papierstücke

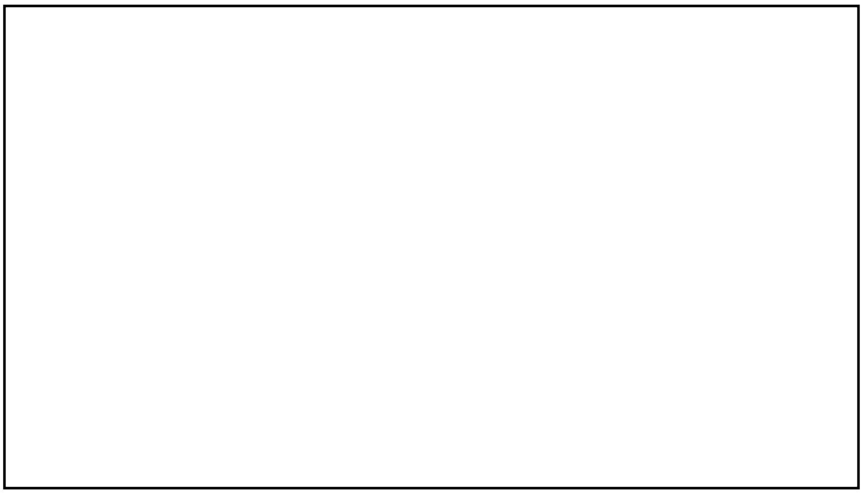


Abb. 29: Aufgeklebte Papierstücke[177]

Sobald die Papierstücke aufgeklebt wurden, liegt kein objekthaftes Zeichen mehr vor, obwohl es sich nach wie vor um dasselbe haptische Material handelt: Die Handlungen sind nicht mehr effektiv ausführbar[178], sodass nur noch ein Abbild der Handlung vorliegt, also ein entlehntes Zeichen. Die Unterscheidung zwischen Ikon und Symbol verläuft analog zu den vorherigen Beispielen.

- Beispiel 4: Eine Skizze der umsortierten Handlungsobjekte

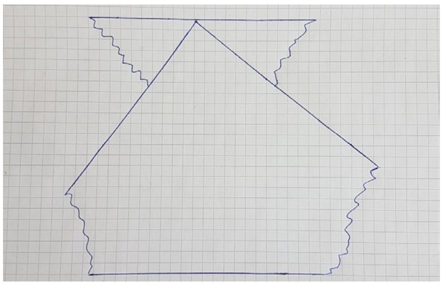


Abb. 30: Skizze der Situation mit Papierstücken

Die Skizze der Papierstücke verhält sich bezüglich der Zeichenart und des Umgangs mit dem Zeichen analog zu Beispiel 2 und Beispiel 3. Dies bestätigt, dass nicht das Haptischsein ausschlaggebend für die Einordnung als objekthaftes oder entlehntes Zeichen ist, sondern die effektiv ausführbaren Aktivitäten (bzw. die zur Ausführung vorgesehenen Aktivitäten, schließlich wäre es erneut möglich, durch Ausschneiden der aufgemalten Teile effektive Handlungen zu ermöglichen).

---

[177] Im Anhang (Unterkapitel 8.2) ist ein Dreieck als Bastelvorlage abgedruckt, das ausgeschnitten, zerrissen und oben in Abb. 29 eingeklebt werden kann, um diese zu vervollständigen.

[178] Streng genommen sind die Handlungen durchaus noch ausführbar, weil die Papierstücke wieder von der Unterlage abgetrennt werden könnten – *vorgesehen* ist dies aber nicht. Statt also in Anlehnung an WITTMANN (1981b) die effektiv ausführ*baren* Aktivitäten als Kriterium zur Unterscheidung objekthafter und entlehnter Zeichen heranzuziehen, müsste genauer von den *zur Ausführung vorgesehenen* Aktivitäten die Rede sein. Der Nutzen dieser Änderung für den Gebrauch des vertieften EIS-Prinzips ist jedoch überschaubar, weshalb diese Feinheit bei der Charakterisierung der Zeichenarten ausgespart wurde.

- Beispiel 5: Ein *erstes* Dreieck in einem DGS

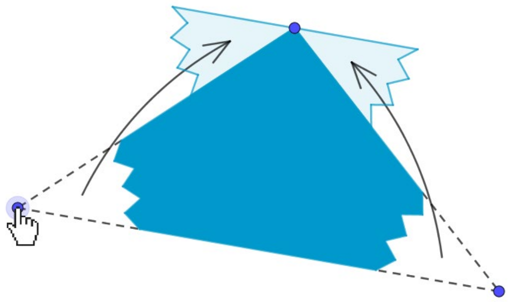


Abb. 31: Darstellung eines ersten Dreiecks in einem DGS

In Abb. 31 deutet der Cursor die einzigen Handlungsmöglichkeiten an, die zur Verfügung stehen: Die Eckpunkte des Dreiecks sind beweglich, sodass für unterschiedliche Dreiecke das Handlungsergebnis betrachtet werden kann.

Etwas voreilig wird diese oberflächliche Beweglichkeit zuweilen als hinreichend für das Vorliegen eines enaktiven Einstiegs erachtet und nicht von solchen Fällen wie Beispiel 6 unterschieden: Bei der Auswahl von Software sei „darauf zu achten, dass den Kindern nicht nur starre Bilder vorgesetzt werden, sondern dass sie die Möglichkeit haben zu handeln und Veränderungen vorzunehmen. Sprich die Kinder sollen ‚virtuell-enaktiv' tätig werden können" (Ladel 2014, S. 8). Obwohl im hier angeführten Beispiel Veränderungen vorgenommen werden können, ist der Handlungsspielraum nicht derselbe wie in Beispiel 1: Für jede Konstellation ist nur ein Abbild der effektiven oder vorgestellten Handlung sichtbar. Das Abreißen, Verschieben, Drehen oder Wenden der Ecken ist jedoch selbst *nicht* effektiv ausführbar. Trotz der Dynamik handelt es sich daher erneut um ein entlehntes Zeichen – oder genauer: um sehr viele entlehnte Zeichen. Entscheidend ist also nicht, *dass* Veränderungen vorgenommen werden können, sondern *welche*.

Damit ist auch die Unterscheidung zwischen Ikonen und Symbolen wie in den vorherigen Beispielen zu treffen.

- Beispiel 6: Ein *zweites* Dreieck in einem DGS

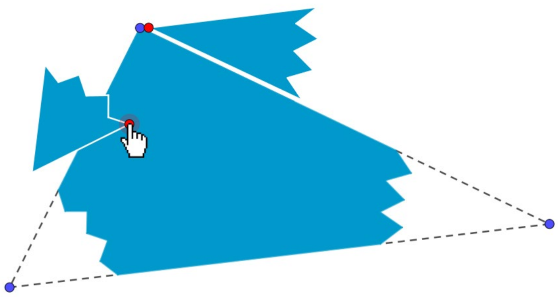


Abb. 32: Darstellung eines zweiten Dreiecks in einem DGS

Digitale Medien *können* aber auch objekthafte Zeichen hervorbringen: Abb. 32 stellt ein (nach wie vor bewegliches) Dreieck in einem DGS dar, dessen abgetrennte Ecken verschiebbar sind und an den roten Punkten gedreht werden können – all diese Handlungen sind wahrnehmbar und müssen nicht vorgestellt werden. Obwohl hier kein haptisches Material vorliegt, handelt es sich somit dennoch um ein objekthaftes Zeichen.[179]

Die Unterscheidung zwischen der enaktiven und der symbolischen Darstellungsebene verläuft analog zu den vorherigen Beispielen.

- Beispiel 7: Eine beschriftete Zeichnung

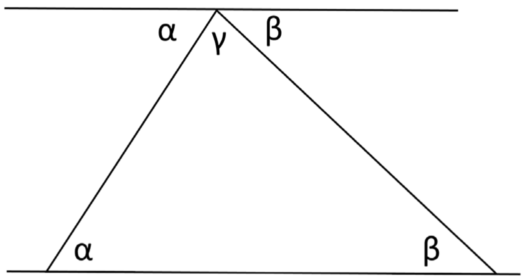


Abb. 33: Beschriftete Zeichnung

Die Zeichenart ist bei Abb. 33 nicht eindeutig feststellbar, weil unklar ist, aus welchem Prozess das Zeichen entstand: Es könnte sich um eine überarbeitete Zeichnung wie jene aus Beispiel 4 handeln, sodass immer noch Aspekte eines entlehnten Zeichens vorlägen. Primär stechen aber die kodifizierten Elemente heraus, allen voran die griechischen Buchstaben, die, Konventionen folgend, Winkel alphabetisch gegen den Uhrzeigersinn bezeichnen. Derartige Konventionen sind darüber hinaus notwendig, um Geraden von Strecken zu unterscheiden. Somit liegt ein Mischzeichen aus entlehntem und kodifiziertem Zeichen vor, wobei die individuelle Gewichtung vom Entstehungsprozess abhängt.

Die Unterscheidung zwischen Ikon und Symbol verläuft wie oben. Sollte es sich um ein naiv-kodifiziertes Zeichen handeln, kann das Zeichen in der Wahrnehmung der Person dennoch Elemente aufweisen, die PEIRCE zufolge als symbolisch einzuordnen wären – beispielsweise α. Die Konfrontation mit „komplexen Zeichen", in denen indexikalische, ikonische und symbolische Zeichenrelationen auftreten, sei sogar eher die Regel als die Ausnahme (Hoffmann 2001a, S. 13). Entscheidend für das Erklimmen der symbolischen Darstellungsebene ist im vertieften EIS-Prinzips jedoch nicht das Erfassen irgendeines potentiellen Symbolgehalts, sondern des intendierten: Dass α einen Winkel bezeichnet, ist bei der Erschließung der Innenwinkelsumme kollaterales Wissen.

---

[179] Dieselben Manipulationsmöglichkeiten wären ebenfalls in einem Grafikprogramm umsetzbar. Hinreichend für die Eignung in Lernprozessen ist diese Eigenschaft aber nicht: BIEHLER, DANIEL FRISCHEMEIER & SUSANNE PODWORNY (2016, S. 22) warnen im Kontext der Stochastik vor der „Verschleierung des Phänomens durch Technik […], die in der jeweiligen Software notwendig ist, um das Modell aufzustellen, die Simulation durchzuführen und/oder die Simulation auszuwerten". Diese Warnung gilt auch in anderen Gebieten: Die Bedienbarkeit von Grafikprogrammen schränkt ihre Eignung in Lernsituationen wie der obigen ein – hierfür sind sie auch nicht gedacht.

- Beispiel 8: Eine beschriftete Zeichnung mit ausformulierter Begründung

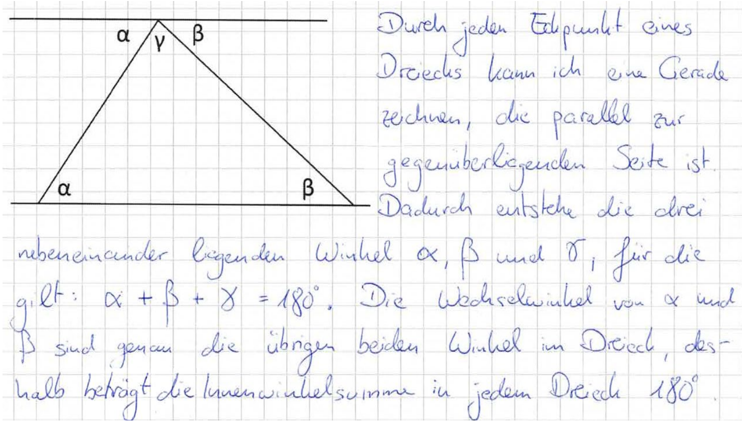


Abb. 34: Beschriftete Zeichnung mit ausformulierter Begründung

Deutlicher als in Beispiel 7 liegt hier ein kodifiziertes Zeichen vor. Der Ersteller dieses komplexen Zeichens verwendet die formal-algebraische, konstruktiv-geometrische und verbal-begriffliche Sprache mit einer Auswahl[180] ihrer Normen und Gepflogenheiten, die allein schon beim Schreiben von links nach rechts bzw. von oben nach unten beginnen. Auf die Einordnung als Ikon oder Symbol hat dies keinen Einfluss: Genau wie in Beispiel 7 kann es sich um ein naiv-kodifiziertes oder um ein verständig-kodifiziertes Zeichen bzw. Symbol handeln – je nachdem, ob eine Person den intendierten Symbolgehalt in die Darstellung hineinsieht.

4.1.2 Ordnen von Lernprozessen

Unterkapitel 3.1 folgend ist Mathematiklernen vielfältig und darf keiner strengen, alternativlos vorsequenzierten Abfolge unterworfen werden. Eine mit der Realität des Unterrichtens verträgliche Auffassung des EIS-Prinzips muss diese Vielfalt im Unterricht abbilden – also unterschiedliche Lernprozesse erfassen können.

Das Ad-Hoc-Verständnis als Dreischritt konnte dieser Anforderung nicht gerecht werden (vgl. Abschnitt 0) – anders als die EIS-Palette: Ausgangspunkt für Lernprozesse können naiv-objekthafte, naiv-entlehnte und naiv-kodifizierte Zeichen sein, wobei der Übergang zur symbolischen Ebene mit allen Zeichenarten gelingen kann. Dieser Übergang muss nicht in jeder Zeichenart von Neuem bewältigt werden, weil subjektiv erschlossene Symbolgehalte zwischen Zeichenarten übertragen werden können – darauf basiert das Lernen aus Handlungen. Die nachfolgenden Abschnitte sollen diesen strukturierenden Blick auf diverse Lernprozesse illustrieren, indem konkrete Beispiele aus der mathematikdidaktischen Literatur mithilfe der EIS-Palette erfasst werden.

---

180 Verzichtet wurde beispielsweise auf die Unterscheidung zwischen α und α', deren Bedeutung sich wiederum über Normen und Gepflogenheiten erschließt. Auch die verbal-begriffliche Sprache könnte um kodifizierte Zeichen wie *gestreckter Winkel* ergänzt werden, denn in Abb. 34 liegt eine typische Mischung von Bildungssprache und Alltagssprache vor – auf beiderlei sei am Ende von Abschnitt 4.2.4 nochmals eingegangen.

4.1.2.1 Das Galtonbrett bei CHRISTOPH SELTER (1985)

Als erstes Beispiel dient ein dokumentierter Unterrichtsversuch von SELTER (1985), der ein Galtonbrett mit vier Zapfenreihen und fünf Zielfächern einsetzt. Er will Lernende einer vierten Klasse „zu der Erkenntnis leiten, daß eine Kugel 16 mögliche Wege durchlaufen kann, daß diese Wege gleichberechtigt sind, und daß mehr solcher Wege in der Mitte landen als in den äußeren Fächern“ (ebd., S. 10) – dies sind die intendierten Symbolgehalte. Dabei werden als Ausgangspunkt des Lernens objekthafte Zeichen in Form realer Kugelläufe am Galtonbrett erzeugt, entlehnte Zeichen knüpfen als eingezeichnete Kugelläufe auf einem abgedruckten Galtonbrett an (Abb. 35), und schließlich treten kodifizierte Zeichen mithilfe einer eigens eingeführten Notation hinzu: *b* steht für blau und bedeutet, dass eine Kugel in Richtung der blauen Markierung gefallen ist, die auf einer Seite des Brettes befestigt ist; *r* steht für das Fallen zur roten Seite. Die Farben sollen Missverständnisse bei der Nutzung der Richtungsangaben links und rechts vermeiden, die mit der Betrachterposition variieren und für Lernende in diesem Alter einen nicht unerheblichen Teil der kognitiven Ressourcen beanspruchen können. Das zu Abb. 35 gehörige kodifizierte Zeichen lautet demnach *rbbb*.

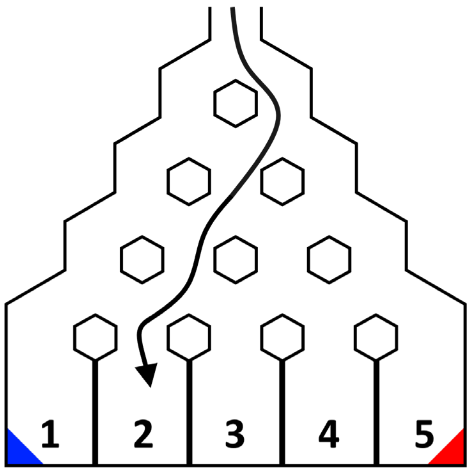


Abb. 35: Entlehntes Zeichen nach SELTER (1985, S. 11)

Die Momente des Übergangs auf die symbolische Ebene beschreibt SELTER (1985) ausschnittsweise:

> Anschließend wurden die Ergebnisse der Schüler diskutiert. Ich hatte dazu eine Overhead-Folie vorbereitet, die eine Kopie des Arbeitsblattes darstellte, auf der ich gemäß Schüleräußerungen („am 1. Hindernis nach rot, dann blau, …“) die Wege zur 2 einzeichnete und im Fach die jeweils zugehörige Symbolik (z. B.: bbbr, bbrb, brbb, rbbb) notierte. Thomas meinte: „Da ist immer einmal rot.“ Markus: „Und dreimal blau.“ Ich fragte: „Woher wissen wir denn, daß wir alle Wege zur 2 haben?“ Thomas: Die Kugel fällt an 4, an 3, an 2, an 1 nach rot.“ Eleni: „Bei einem neuen Weg fällt sie wieder an der 2. oder der 3. Stelle nach rot, und das haben wir schon.“

Selter (1985, S. 11)

Der Kürze der Beschreibung geschuldet, wird nicht unmissverständlich klar, an welcher Zeichenart der Übergang von einem naiven zu einem verständigen Umgang gelungen ist. Zwei unterschiedliche Interpretationen liegen jedoch nahe:

(1) Der Übergang gelingt mit *kodifizierten* Zeichen: Es gibt vier Wege zum zweiten Fach, weil die zugehörigen Buchstabenkombinationen einmal *r* enthalten müssen. Für diesen Buchstaben gibt es vier mögliche Plätze.
(2) Der Übergang gelingt mit *entlehnten* Zeichen: Es gibt vier Wege zum zweiten Fach, weil Wege dorthin auf dem Arbeitsblatt genau eine Abzweigung nach rot aufweisen müssen. Insgesamt stehen vier Abzweigungen zur Auswahl.

Ersichtlich und plausibel ist lediglich, dass der Übergang zur symbolischen Ebene *nicht* mit objekthaften Zeichen gelungen ist: Diese machen zwar das Gesamtergebnis zugänglich, aber nicht die Begründung[181], da die Kugeln zu schnell und unübersichtlich durch das Galtonbrett rauschen, als dass dieser Prozess einer eingehenden Beobachtung und Untersuchung zugänglich wäre. Hendriks Resümee[182] hingegen scheint das effektive Galtonbrett miteinzubeziehen, auf das er die erschlossenen Symbolgehalte übertragen hat. Damit lassen sich die dokumentierten Zeichenübergänge wie folgt auf der EIS- Palette visualisieren:[183]

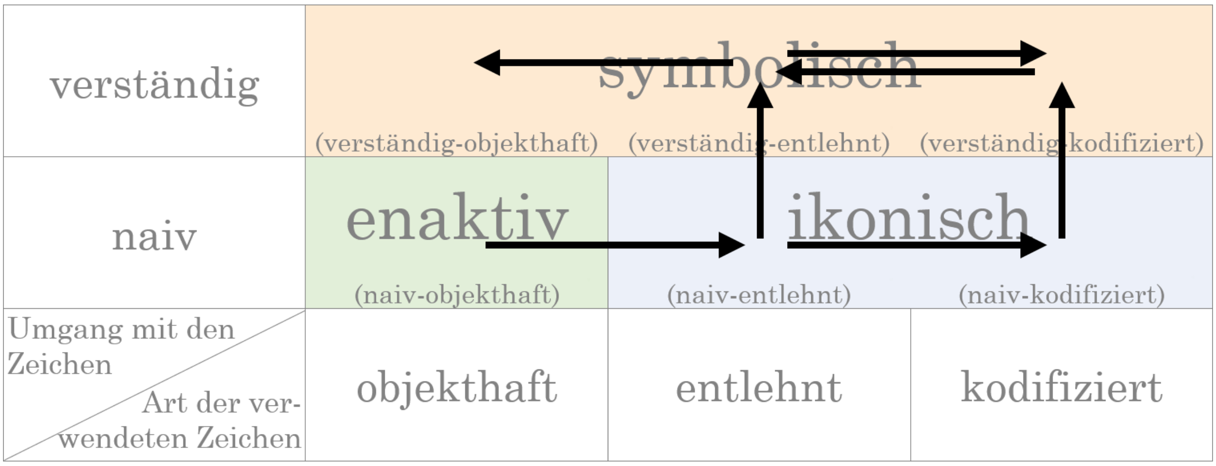


Abb. 36: Zeichenübergänge am Galtonbrett bei SELTER *(1985)*

[181] Die Frage, ob ein Zeichen eine Aussage oder deren Begründung oder beiderlei zugänglich macht, war bereits am Beispiel der Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck von Relevanz und wird es auch im Weiteren wieder sein, siehe etwa Abschnitt 5.1.6.

[182] „Man weiß nicht, wo eine Kugel hingeht. Aber wenn ich viele habe, gehen viele in die Mitte und wenige zur 1 oder zur 5. Zur Mitte gehen mehr, weil da mehr Wege sind, und nach außen gehen weniger, weil da weniger Wege sind" (Selter 1985, S. 11).

[183] Gerichtete Pfeile zeigen dabei stets nur das *erstmalige* Auftreten der Zeichen bzw. Symbole an. Sie sollen insbesondere nicht missverstanden werden als Implikation der Irreversibilität eines Wechsels der Zeichenart. Treten an einem Übergang zwei Pfeile in beide Richtungen auf – in Abb. 36 beim Übergang zwischen entlehnten und kodifizierten Symbolen –, soll damit ausgedrückt werden, dass sowohl zunächst entlehnte Symbole vorgelegen haben können, die dann das Hineinsehen derselben Symbolgehalte in kodifizierte Zeichen ermöglichten, als auch umgekehrt. Es wäre sogar auch denkbar, dass der Übergang zur symbolischen Ebene isoliert einmal mit entlehnten und einmal mit kodifizierten Zeichen gelang – vgl. BAUERSFELDs (1983) Bemerkungen zu getrennten subjektiven Erfahrungsbereichen in Unterabschnitt 4.2.2.1.

4.1.2.2 Addieren negativer Zahlen bei PETER GALLIN & URS RUF (1998)

Jede Zahlbereichserweiterung legt Ausgangsfragen in kodifizierten Zeichen nahe, etwa die folgende:

> Christina ist siebenjährig und besucht seit neun Monaten die erste Klasse der Primarschule. […] Ich notiere die folgenden Rechnungen, die Christina mit Leichtigkeit löst:
>
> $$3 + \square = 5$$
> $$2 + \square = 5$$
> $$1 + \square = 5$$
> $$0 + \square = 5$$
>
> Bei der letzten Aufgabe zögert sie einen Moment, schreibt aber dann die richtige Zahl ins Leerfeld. […]. Christina verlangt aber weitere Rechnungen. „Schau, da habe ich etwas ganz Schwieriges. Was meinst du dazu?"
>
> $$-1 + \square = 5$$
>
> […] Sie rechnet zwar wie wild, nimmt ihre Finger zu Hilfe und nennt auch ein paar Zahlen; es ist aber ein reines Ratespiel.

Gallin & Ruf (1998, S. 77 f.)

Beim Lernen aus Handlungen werden solche Fragen nicht in kodifizierten, sondern in objekthaften oder entlehnten Zeichen untersucht. Eine Möglichkeit dazu stiften Bewegungen auf einer Zahlengeraden, die GALLIN & RUF (1998) durch Markierungen auf dem Boden entstehen lassen – die Kerze markiert die Null; Spielkarten die übrigen Zahlen (Abb. 37).

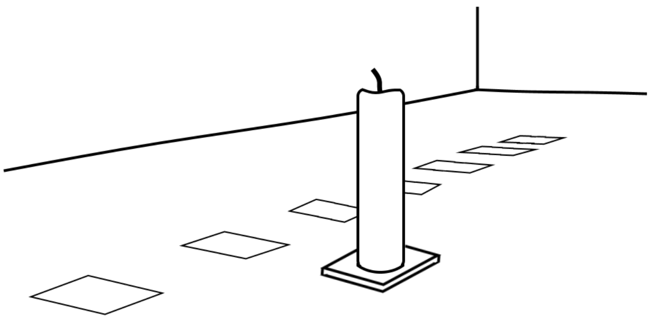


Abb. 37: Eine Zahlengerade im Wohnzimmer (Gallin & Ruf 1998, S. 78)

In der folgenden Beschreibung tritt auffällig hervor, dass der Übergang zur symbolischen Ebene erstmals in objekthaften Zeichen[184] gelingt und dann auf kodifizierte übertragen wird:

[184] Die Überzeugungskraft der objekthaften Zeichen kann auch damit zusammenhängen, dass sie Christina einen „*Standort* […] *innerhalb der Aufgabensituation*" einnehmen ließen, während sie im vorherigen Unterricht mit abgedruckten Zahlengeraden „die Aufgabe aus einer neutralen Position von außen" untersucht hatte (Peter Herbert Maier 1999, S. 41; Hervorhebung im Original). Ersteres ist nicht zwangsläufig geeigneter für den Übergang zur symbolischen Ebene als Letzteres, sondern eröffnet einen weiteren Zugang. Das Anbieten beider Zugänge wird in Abschnitt 5.1.3 – ebenfalls im Kontext des Rechnens mit negativen Zahlen – wieder aufgegriffen und umgesetzt.

> Erst jetzt, nachdem sie mit ihren eigenen Schritten ihren eigenen Zahlenstrahl aufgebaut hat, begreift sie, was es bedeuten kann, von einer vorgegebenen Zahl aus durch eine Addition zu einer zweiten, größeren Zahl zu gelangen. Sie hat die Rechnung $4 + \square = 5$ in eine eigene Handlung übersetzt und kann jetzt formulieren: *Vom Startpunkt 4 aus muß man einen Schritt vorwärts gehen, um zum Zielpunkt 5 zu gelangen.*
> Wo befindet sich nun aber der Startpunkt −1? […] Von der ungewohnten Schreibweise scheint eine Suggestivwirkung auszugehen, jedenfalls legt Christina ohne große Umschweife eine Karte einen Schritt weit hinter die Null und bezeichnet sie als Startpunkt. Diese Handlung eröffnet uns neue Möglichkeiten: So, wie wir zuvor den Zahlenstrahl durch Vorwärtsschreiten aufgebaut haben, so erweitern wir ihn jetzt durch Rückwärtsschritte: Aus dem Zahlenstrahl wird die *Zahlengerade*. Ohne Mühe löst Christina jetzt folgende Aufgaben:
>
> $$-1 + \square = 5$$
> $$-2 + \square = 5$$
> $$-3 + \square = 6“$$
>
> Gallin & Ruf (1998, S. 78 f.; Hervorhebung im Original)[185]

Die beschriebenen Zeichenübergänge stellt Abb. 38 dar:

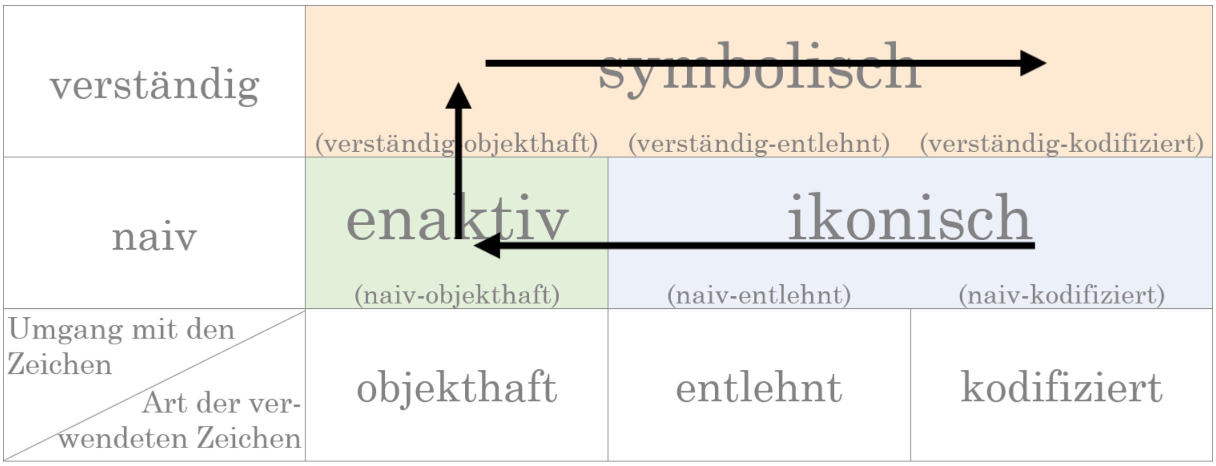


Abb. 38: Zeichenübergänge beim Rechnen mit negativen Zahlen bei GALLIN *&* RUF *(1998)*

4.1.2.3 Addieren natürlicher Zahlen bei OEHL (1962)

> Nehmen wir an, ein schwaches Kind versagt bei einer Aufgabe (etwa bei 520+40). Es wäre verkehrt, nunmehr auf die Aufgabe 20+40 zurückzugreifen. Vielmehr wird man das Kind die Aufgabe mit Hilfe eines Anschauungsmittels (etwa des Tausenderblattes) rechnen lassen. Will man es auf das Analogieprinzip hinweisen, so lasse man (immer am Tausenderblatt) mehrere Aufgaben der gleichen Art rechnen (also: 120+40; 220+40, usw.). Diese anschaulichen Übungen müssen noch an Beispielen mit anderen

[185] Christina verwendet hier unter anderem formal-algebraische Symbole (die Gleichungen) und verbal-begriffliche Symbole (die Formulierung in Worten), wobei all diese Zeichen als kodifiziert einzuordnen sind.

> Operationsschritten durchgeführt werden, bis die Gesetzmäßigkeit der Analogie wirklich erkannt und begriffen ist.

Oehl (1962, S. 113)[186]

OEHL (1962) will das eigentliche Problem (520 + 40) eigenständig lösen lassen, statt mithilfe einer geschickten Rechnung daran vorbeizuführen. Da dies in kodifizierten Zeichen nicht gelingt, bietet er vertrautere, entlehnte Zeichen an, mit denen das Kind das Analogieprinzip bemerken soll, um es anschließend in kodifizierten Zeichen einzusetzen. Dem beabsichtigten Lernprozess, den das obige Zitat skizziert, entspricht daher folgender Weg auf der EIS-Palette:

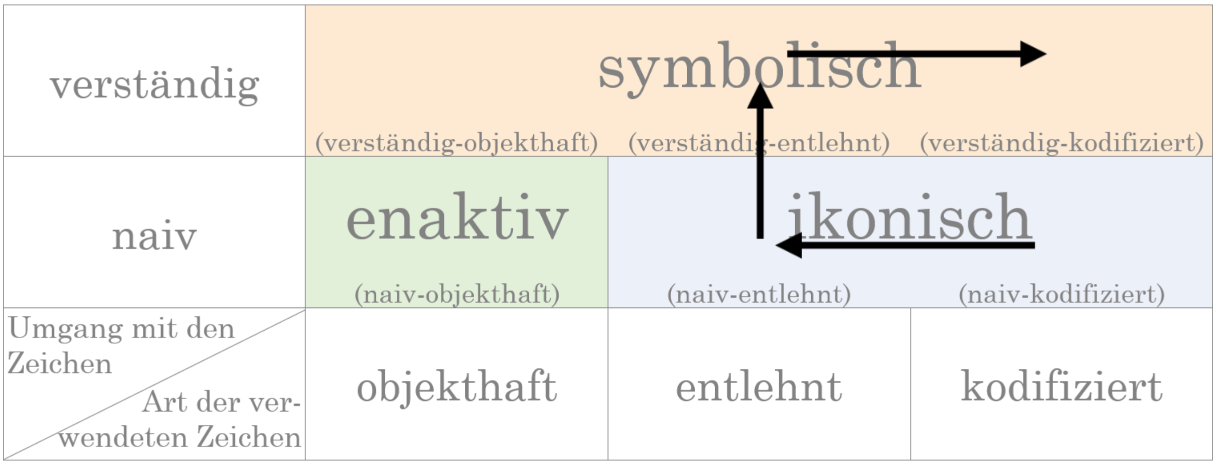


Abb. 39: Zeichenübergänge zum Addieren natürlicher Zahlen bei OEHL (1962)

4.1.2.4 Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises bei HEYWANG (1923)

HEYWANGS (1923) Unterrichtsversuch wurde bereits in Unterkapitel 3.4 wiedergeben und sei hier wiederholt, um die dazu passenden Zeichenübergänge in Abb. 40 nachvollziehen zu können:

> Die Formel für die Kreisberechnung war erläutert an der Hand der bekannten Anschauungsmittel, die ich mir selbst herstellte. Ein Kreis aus Holz war in zwei Halbkreise mit Lederumfang geteilt. Und diese wieder hatte ich in gleiche Dreiecke mit möglichst kleiner Grundlinie zersägt, so daß jeder Halbkreis beim Ausziehen der Leder aussah wie eine Säge mit langen Zähnen. Durch Ineinanderschieben entstand ein Rechteck mit dem halben Umfang als Grundlinie und dem Halbmesser als Höhe. Der Inhalt dieses Rechtecks war also […] gekürzt und geordnet r · r · 3,14.

Heywang (1923, S. 165)

---

[186] Eine heute gebräuchliche Entsprechung des *Tausenderblattes* ist das *Tausenderbuch* von WITTMANN & MÜLLER (1997): Im vollständig aufgeklappten Zustand zeigt es zehn Quadrate bestehend aus je 100 rot bzw. blau gefüllten Kreisen, wobei in den Quadraten wiederum jeweils Teilquadrate von 25 Punkten optisch abgegrenzt sind – siehe auch die Handreichungen für die Praxis in WITTMANN & MÜLLER (2015).

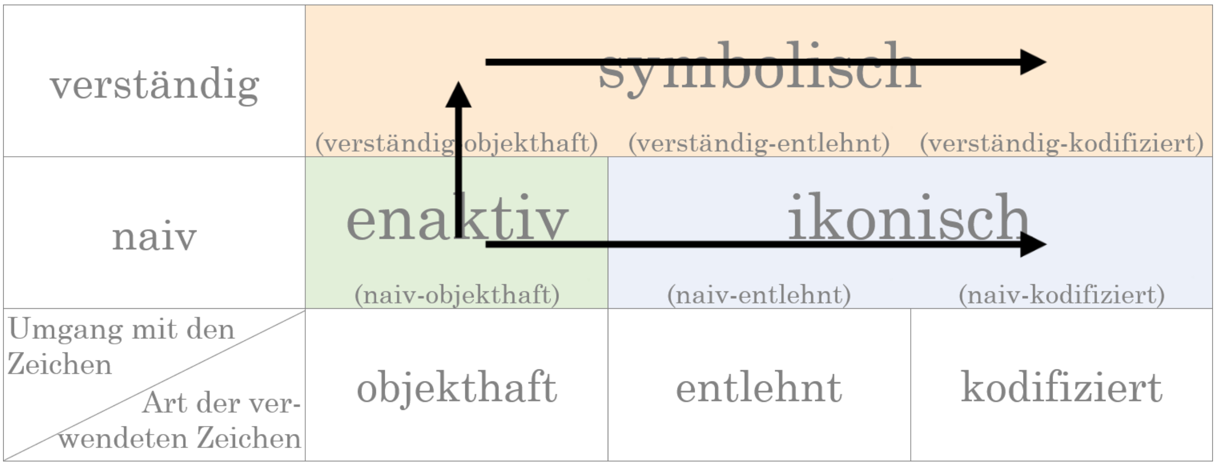


Abb. 40: Zeichenübergänge bei der Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises bei HEYWANG *(1923)*

Hinsichtlich des Lernerfolgs stellt HEYWANG (1923) ernüchtert fest, dass die symbolische Ebene von den Lernenden nicht nachhaltig erklommen wurde; insbesondere die Begründung geriet in Vergessenheit:

> Zweimal hatten wir den Weg gemacht. Und in der nächsten Stunde, die umständehalber erst 14 Tage später war, wußte niemand mehr den Weg zu finden. Alle wußten aber noch r · r · 3,14 und konnten es auch auf alle Fälle anwenden. Wo lag der Fehler? Jedenfalls war die abgezogene Einführung zu lang, um zu haften.
>
> Heywang (1923, S. 165)

Mögliche Ursachen zeigt Abschnitt 4.2.1 auf, in dem das vertiefte EIS-Prinzip in seiner *erklärenden bzw. verstehenden* sowie *präskriptiven* Funktion (Prediger 2015) theoretisch begründete Praxisempfehlungen generiert – gegen einige dieser verstößt HEYWANG (1923) hier.

4.1.2.5 Pyramidenvolumen bei LIETZMANN (1916)

Ein vergleichbares Vorgehen schlägt LIETZMANN (1916) zur Herleitung der Volumenformel einer Pyramide vor, wobei er anders als HEYWANG (1923) einerseits das Ausführen der Handlungen durch die Lernenden selbst fordert und andererseits entlehnte Zeichen erstellen lässt (Abb. 41):

> Den Übergang von der Inhaltsformel des Prismas zu der der Pyramide vermittelt die Zerlegung des dreiseitigen Prismas in drei dreiseitige Pyramiden. Man kann übrigens auch den Würfel in ähnlicher Weise in drei Pyramiden zerlegen. Erfahrungsgemäß machen diese Zerlegungen den Schülern rein anschauungsgemäß große Schwierigkeiten. Es genügt nicht, ein vorher präpariertes Modell vorzuführen. Die Schüler müssen die Schnitte möglichst selbst ausführen – sehr zu empfehlen ist Seife, wenn Plastilin nicht zur Hand ist – und die entstehenden Körper in schräger Parallelperspektive darstellen.
>
> Lietzmann (1916, S. 188 f.)

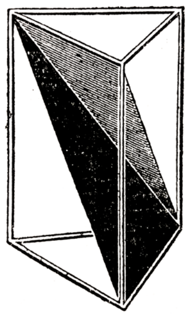


Abb. 41: Zerlegung eines dreiseitigen Prismas (Lietzmann 1916, S. 188)

In einem kodifizierten Zeichen wie $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ soll letztendlich – vermittelt durch objekthafte und entlehnte Zeichen – nicht nur die Anleitung zur Volumenberechnung gesehen werden, sondern auch die Zerlegung eines Prismas:

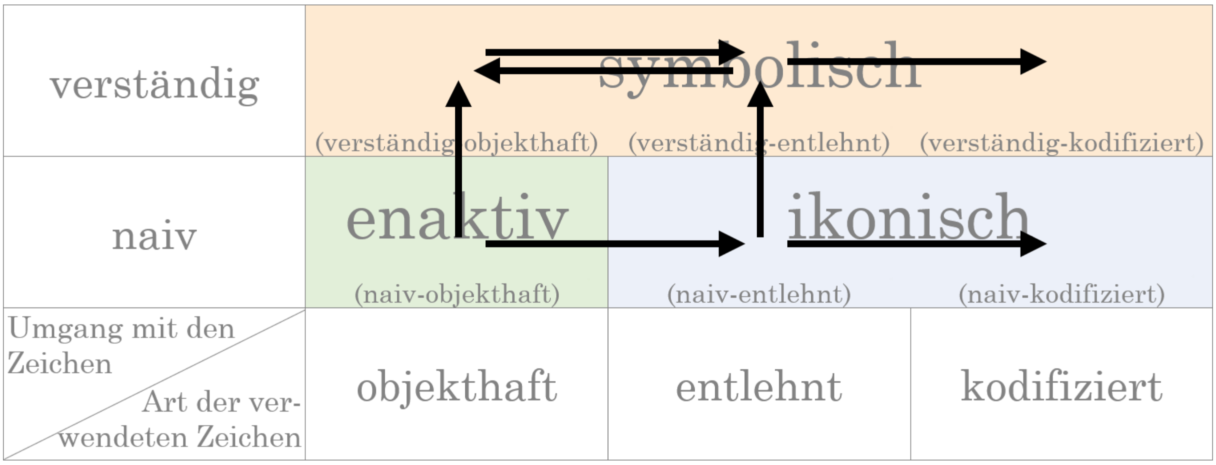


Abb. 42: Zeichenübergänge bei der Bestimmung des Pyramidenvolumens bei LIETZMANN *(1916)*

Diese Zeichenübergänge sind typisch für das Lernen aus Handlungen: So führt etwa auch beim Erweitern und Kürzen von Brüchen das Falten eines Papierblattes bzw. eine zeichnerische Darstellung dessen zur folgenden Erkenntnis.

> Unterteilen wir die Ausgangsfläche *doppelt* so oft, so ist jede Teilfläche nur *halb so* groß, also müssen wir *doppelt* so viele Teilstücke zusammenfassen; unterteilen wir die Ausgangsfläche *viermal* so oft, so ist jede Teilfläche ein *Viertel* so groß, also müssen wir *viermal* so viele Teilstücke zusammenfassen usw.
>
> Padberg & Wartha (2017, S. 44; Hervorhebung im Original)

Diese Regeln werden dann auf objekthafte Zeichen übertragen – BAUERSFELD (1983, S. 31) spricht vom „Fortsetzen geläufiger Konstruktionsprinzipien in neue Gebiete hinein“ und bezeichnet dies als metonymisches[187] Fortsetzen.

---

[187] Die Metonymie ist eine rhetorische Figur und beschreibt nach ALO ALLKEMPER & NORBERT OTTO EKE (2021, S. 92) die „Ersetzung des eigentlichen Wortes durch ein anderes, das zu ihm in realer (zeitlicher, räumlicher, ursächlicher) Beziehung steht.“ BAUERSFELD überträgt hier also einen Begriff aus der Rhetorik auf das Lernen aus Handlungen, bei dem Handlungsobjekte z. B. durch Zahlen ersetzt und die zugrundeliegenden Regeln übertragen werden.

4.1.2.6 Aufgabensequenz bei FALK, ROHRAUER & WAIS (1926)

FALK, ROHRAUER & WAIS (1926) demonstrieren, dass ein durch mathematische Fragestellungen angestoßener Bearbeitungsprozess sogar sehr weitgehend *ohne* kodifizierte Zeichen auskommen kann:

> 5. Nimm einen Draht von 24 cm Länge und biege ihn zu einem Rechteck zusammen! Wie vielerlei Rechtecke lassen sich bilden, wenn die Maßzahlen für Länge und Breite nur ganze Zahlen werden sollen? Gib die Flächen der verschiedenen Rechtecke an! Ist auch eine Berechnung der Umfänge nötig? Wann ist die Fläche am größten?
> 6. Wiederhole die Aufgabe 5, bediene dich dabei aber nicht des Drahtes, sondern bloß einer Zeichnung!
> 7. Schneide aus den Quadratzentimetertafeln Rechtecke von 36 cm² Flächeninhalt aus, aber wieder so, daß die Maßzahlen für Länge und Breite ganze Zahlen werden! Wie vielerlei Rechtecke kannst du da machen? Gib immer die Umfänge an! Wann ist der Umfang am kleinsten?
> 8. Auch die Aufgabe 7 kann man durch bloßes Zeichnen lösen.
> 9. Bilde ähnliche Aufgaben wie in Nr. 5 und 7! Geübte können die Aufgaben sogar ohne Zeichnung machen, sie müssen sich alles nur sehr gut vorstellen.

Falk, Rohrauer & Wais (1926, S. 131 f.)

Auch wenn die Ergebnisse in kodifizierten Zeichen formuliert würden, kann die angestoßene Schülertätigkeit völlig auf diese verzichten:

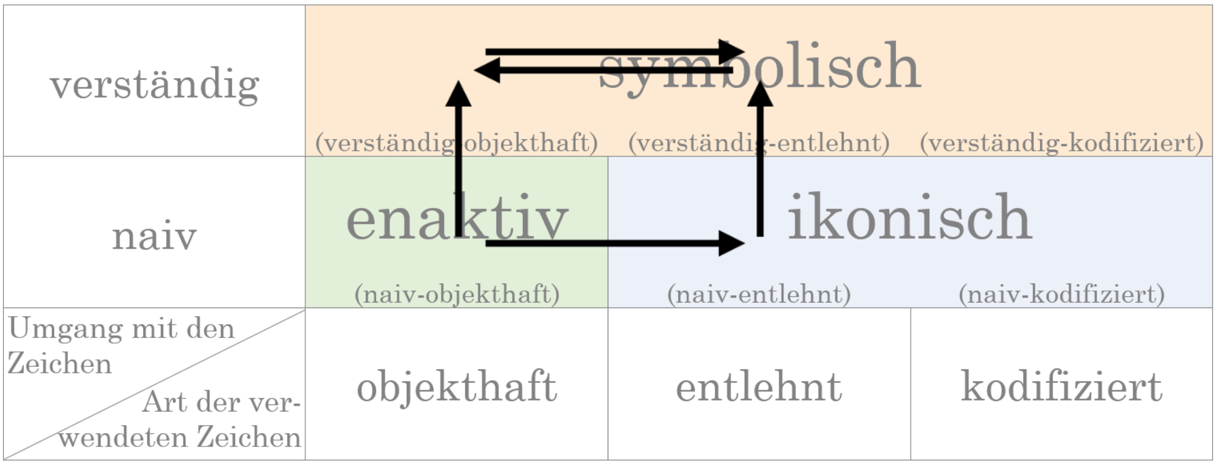


Abb. 43: Zeichenübergänge zur Aufgabensequenz bei FALK, ROHRAUER & WAIS (1926)

4.1.2.7 Einführung der Klammerschreibweise bei HOLE (1973)

Komplementär zum vorherigen Beispiel kann Mathematiklernen aber auch *ausschließlich* in kodifizierten Zeichen gelingen:

> Bei der Einführung der Klammerschreibweise im 3. Schuljahr stellte der Lehrer die Schüler innerhalb der symbolischen Ebene in den folgenden Konflikt: „Wie stellt ihr euch zu den Behauptungen von Uli und Peter, daß jeder richtig gerechnet habe: Uli: $3 \cdot 5 + 2 = 21$ Peter: $3 \cdot 5 + 2 = 17$.“

> Bald kamen die Schüler darauf, daß es sich eigentlich um zwei verschiedene Rechnungen handle und daß man irgend etwas unternehmen müsse, damit klarwerde, was eigentlich gerechnet werden soll. Der Lehrer anerkannte den Vorschlag von Schülern, durch Unterstreichen zum Ausdruck zu bringen, welche Operation zuerst ausgeführt werden soll, und ersetzte ihn durch die Klammerkonvention. […] Die „Punkt vor Strich"-Vereinbarung wurde erst nach mehreren Stunden getroffen.

Hole (1973, S. 87)[188]

Es muss also „nicht jedes Lernen enaktiv eingeleitet und via ikonischen Modus" übertragen werden (WITTMANN 1974, S. 73). Eine Person solle bei dem beginnen, was sie als konkret empfindet – und dies variiert intersubjektiv (Zech 2002, S. 117). Auch KIRSCH (1977a, S. 99; Hervorhebung im Original) betont selbiges mit dem „*Beginn* auf der jeweils geeigneten Stufe der Repräsentation". Auch solche Lernprozesse, die dem Lernen aus Handlungen eigentlich gar nicht unmittelbar zuzuordnen sind, lassen sich auf der EIS-Palette abbilden (Abb. 44).[189] Sie vermeidet dadurch eine überzogene Polarisierung, vor der DAHLKE (1981, S. 128) im Kontext mathematikdidaktischer Prinzipien warnt.

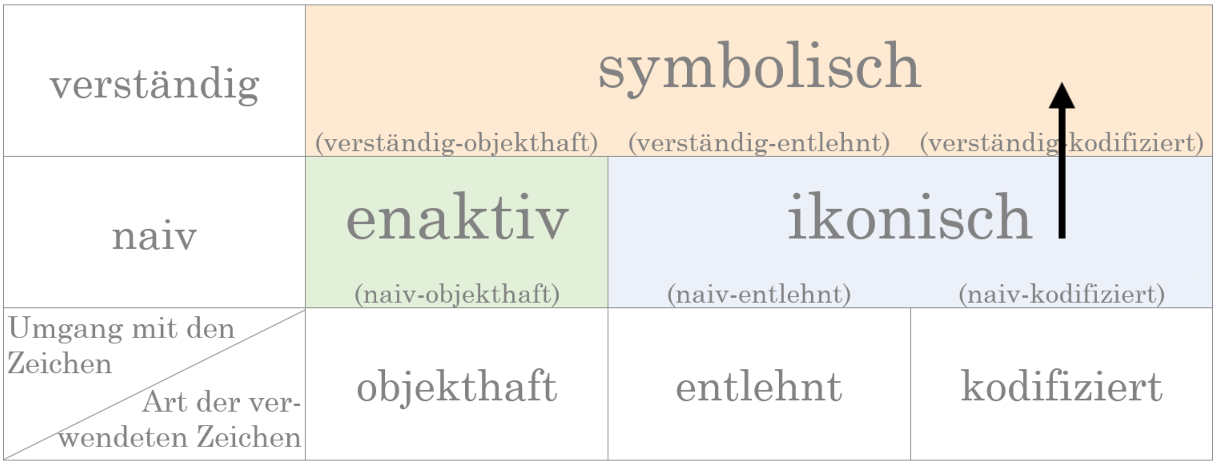


Abb. 44: Zeichenübergänge bei der Einführung der Klammerschreibweise bei HOLE (1973)

[188] HOLE (1973) verwendet den Bezeichner »symbolisch« gemäß dem Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips, also synonym zu »kodifiziert« bzw. zu »formal-algebraisch«.

[189] Auch wenn derartige Lernprozesse im Rahmen der vorliegenden Arbeit fast schon exotisch wirken, sind sie dies in der Unterrichtspraxis natürlich nicht: Der Fehler des Unterrichtens „über den Kopf des Schülers hinweg'" sei zwar am besten durch den Rückgriff auf eine „*niedrigere Stufe der Abstraktion*" zu beheben, allerdings „kann und muß gesagt werden, daß es nur in den seltensten Fällen mathematisch-fachlich überhaupt möglich sowie methodisch sinnvoll ist, bis auf die Stufe der unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung konkreter Sachverhalte zurückzugehen. Meist ist es viel günstiger, im Begrifflich-Symbolhaften [also in kodifizierten Zeichen] zu verbleiben, aber entweder eine andere Darstellungsweise zu wählen oder ein Beispiel anzuführen. Vor allem erweist es sich sehr oft als nützlich, arithmetische oder analytische Sachverhalte geometrisch zu deuten und sich dabei der verschiedenen Formen der graphischen Darstellung zu bedienen" (Neigenfind 1977, S. 297 f.; Hervorhebung im Original). Ob hier tatsächlich von *den seltensten Fällen* die Rede sein sollte, sei dahingestellt – entscheidend ist aber, dass der Übergang zur symbolischen Ebene nicht ausschließlich über objekthafte und entlehnte Zeichen verläuft.

Auch auf dieses Beispiel wird in Abschnitt 4.2.1 bei der Entwicklung erster Praxisempfehlungen rekurriert, wenn also vorwiegend präskriptive statt deskriptive Theorieelemente beleuchtet werden. Dass es nicht unstrittig ist, deutet bereits OEHL (1965, S. 30) an, der ein analoges Vorgehen[190] als unpädagogisch und oberflächlich bezeichnet, weil es im Vergleich zu einem Rückgriff auf konkretes Operieren nur ein flaches Bedeutungserlebnis hervorrufe.

4.1.3 Fazit zum deskriptiven Gebrauch des EIS-Prinzips

Die übersichtsartige Einordnung einiger Zeichen in Abschnitt 4.1.1 sowie einiger Lernprozesse in Abschnitt 4.1.2 mithilfe der EIS-Palette soll andeuten, dass das EIS-Prinzip in der hier vertretenen Auffassung eine adäquate und sinnvolle Brille darstellt, durch die Mathematikunterricht betrachtet werden kann:

- Adäquat ist die Brille, weil sie Lernprozesse nicht in das Korsett zwängt, das ROYAR (2013) gemäß Unterabschnitt 2.1.2.3 zu seinem ablehnenden Urteil gegenüber der BRUNERschen Theorie[191] bewegt: Ein umfassendes Unterrichtsprinzip darf nicht verneinen, dass Lernprozesse durchaus allein unter Verwendung kodifizierter Zeichen gelingen können. Das EIS-Prinzip soll vielmehr explizit zu Bewusstsein bringen, dass Mathematiklernen nicht auf kodifizierte Zeichen beschränkt sein muss – mehrere Wege führen zur symbolischen Ebene und damit auch zu verständig-kodifizierten Zeichen.
- Sinnvoll ist die Brille, weil ihrer Nutzung Ordnung und Übersicht, Gemeinsamkeiten und Unterschiede, Ursachen für Unstimmigkeiten und Ansatzpunkte für Änderungsvorschläge entspringen können.

Vom zweitgenannten Punkt kann der aktuelle Abschnitt nur teilweise überzeugen, weil das Ableiten von Änderungsvorschlägen bewusst ausgespart wurde. Diesem Unterfangen widmet sich das nachfolgende Unterkapitel ausführlich.

4.2 Gebrauch des EIS-Prinzips in seiner präskriptiven Funktion

In Abschnitt 3.2.3 wurde der Anspruch erhoben, das Ad-Hoc-Verständnis nicht gänzlich zu verwerfen, sondern einige Bestandteile bei der Vertiefung der Theorie zu integrieren. Infolgedessen erstrecken sich die theoretisch begründeten Praxisempfehlungen, die durch präskriptive Theorieelemente des vertieften EIS-Prinzips gewonnen werden können, von solchen,

[190] „Man könnte etwa von einer Additionsaufgabe mit reinen Zahlen ausgehen: 3 + 3 + 3 + 3, dann die Frage stellen, wie oft die Drei dort steht – eben 4 mal –; vier mal drei schreiben wir: 4 · 3 … usw.“ (Oehl 1965, S. 30).

[191] „Insgesamt ist die BRUNERsche Theorie für erkenntnistheoretische Betrachtungen zwar ausgesprochen hilfreich, sie ist aber keine tragfähige Basis, auf die sich die gängige Unterrichtspraxis bei der ‚Behandlung‘ der Grundrechenarten vom Handeln über die Anschauung zur formalen Symbolik wissenschaftlich gründen ließe. Der wünschenswerte Aufbau ‚adäquater Vorstellungsbilder‘ mag mit Hilfe von Anschauungsmitteln häufig gelingen, dass diese deswegen aber Voraussetzungen hierfür sind, darf angezweifelt werden“ (Royar 2013, S. 37 f.).

- die bereits das Ad-Hoc-Verständnis analog äußert (Abschnitt 4.2.1) über
- Praxisempfehlungen, die das Ad-Hoc-Verständnis nur andeutet und die jetzt ausgeschärft werden können (Abschnitt 4.2.2) bis hin zu
- Praxisempfehlungen, die über das Ad-Hoc-Verständnis hinausgehen und der Vertiefung der Theorie zu verdanken sind (Abschnitt 4.2.3).

Dabei werden zunächst allgemeine Praxisempfehlungen aus der Theorie gewonnen und an dokumentierten Beispielen erläutert, bei denen oftmals intuitiv jeweils dieselben Werkzeuge Einsatz fanden. Das eigentliche Anwenden der Praxisempfehlungen auf einzelne Unterrichtsgegenstände obliegt anschließend Kapitel 5.

4.2.1 Verwenden aller Zeichenarten

Plakativ macht die EIS-Palette auf die verschiedenartigen Zeichen aufmerksam, die zu Symbolen werden können und daher nach Möglichkeit Einsatz finden sollen. Dies motiviert zum ersten und offenkundigsten von drei Leitsätzen, die der EIS-Palette entspringen: *Nutze im Mathematikunterricht die Vielfalt der Zeichenarten – sowohl kindgemäß als auch sach- und fachgemäß*. Dieser Leitsatz erinnert u. a. an KIRSCH (1977a, S. 99) und WINTER (1996, S. 21), der als nonverbale Sprachen „vor allem die Sprache der Handlungen und die Sprache der Bilder“ hervorhebt. Auch das Ad-Hoc-Verständnis ist von dieser Idee geprägt (vgl. Wittmann 1974); sie ist ein dementsprechend bewährtes Mittel in der Mathematikdidaktik: „Die Idee, über Handlungen – als didaktisches Medium zur Vernetzung von Lernenden mit dem Stoff – und deren aktive, häufig bildliche Abbildung zum Symbolischen (und Operativen) in der Mathematik vorzudringen und dabei Darstellungen und Vorstellungen zu berücksichtigen, ist alt“ (Lambert 2012, S. 13).

FÜHRER (1997, S. 61) bezeichnet es zwar als naiv, „die anerkannte Notwendigkeit materialgestützten und induktiven Arbeitens von der konkret-operationalen Phase der Primarstufe auf Jugendliche der formal-operationalen Phase“ zu verallgemeinern. Andererseits sei „[d]as Handeln und das Wahrnehmen […] auch für das ältere Kind, den Jugendlichen und den Erwachsenen die Grundlage und die Urform des geistigen Lebens“ (Aebli 1985, S. 4) – darin kann auch nach der Primarstufe ein Schlüssel zu tiefgreifenden Verständnis liegen:

> Ein Erlebnis bei einem Montessori-Kurs hat mir gezeigt, dass die enaktive Ebene auch noch für Erwachsene wichtig sein kann. Der Kursleiter gab uns ein Brett zum Wurzelziehen. In Form eines quadratischen Gitters waren Vertiefungen in ein Holzbrett gebohrt. Die Wurzel aus 25 bestimmten wir, indem 25 Perlen so in dieses Raster gelegt wurden, dass ein volles Quadrat entstand. Ich habe staunend gesehen, welche Begeisterung dies bei normalen Erwachsenen hervorrufen konnte. Mehrere Personen versicherten überzeugend, dass [s]ie jetzt zum ersten Mal „begriffen“ hätten, was die Wurzel einer Zahl ist.
>
> Hafenbrak (2004, S. 23)

Der Widerspruch zwischen FÜHRER (1997) und AEBLI (1985) ist nur ein vermeintlicher und löst sich auf durch die Unterscheidung zwischen der *Möglichkeit* und der *Notwendigkeit* materialgestützten Arbeitens zum Zwecke des Mathematiklernens. FÜHRER (1997) widerspricht Letzterem, HAFENBRAKs (2004) Erlebnis bestätigt Ersteres. Diese Überlegung leitet zur folgenden Einordnung bezüglich des EIS-Prinzips hin: Die EIS-Palette macht auf die *Möglichkeit* materialgestützten Arbeitens aufmerksam, nicht auf die *Notwendigkeit*. Aus ihm soll keine Pflicht entspringen, *alle* mathematischen Lernprozesse im Unterricht über effektive Handlungen initiieren zu müssen.

Wann aber bzw. für wen ist das Verwenden aller Zeichenarten besonders vielversprechend? Muss GRIESELs (1976, S. 69) Einschätzung übernommen werden, der als Anwendungsgebiet von OEHLs *Prinzip von der Herauslösung eines Begriffs aus Umweltbezügen* „vor allem die Bereiche der Grundschulmathematik und Teile der Mathematik aus dem Bereich der Sekundarstufe I“ identifiziert? Ist im Unterricht nur „für schwächere Lernende“ auf Handlungen zurückzugreifen, wie Studierende und Lehrpersonen LAMBERT (2012, S. 15) zufolge oftmals annehmen?

WITTMANN (1933)[192] würde dem widersprechen, und auch BENDER & SCHREIBER (1985) formulieren – für ihr *Prinzip der operativen Begriffsbildung* (abgekürzt POB) – eine dies verneinende Antwort, die mit Hinblick auf das vertiefte EIS-Prinzip ebenfalls überzeugt: Sie erachten das potentielle Anwendungsfeld als unabhängig von Alter oder Begabung der Lernenden; stattdessen soll das Prinzip immer dann Einsatz finden, wenn Handlungen Teil der Begriffsbildung sind:

> Eine solche Orientierung an Handlungen wird zurzeit vor allem im Geometrieunterricht der Primarstufe verwirklicht […]. Das POB fordert sie darüber hinaus für den Geometrie-Unterricht aller Stufen, und zwar vorrangig aus inhaltlichen Gründen: *Die Handlungen sind Teil der Begriffsbildung, und die Begriffe haben sich in ihnen zu bewähren.*
>
> Bender & Schreiber (1985, S. 192; Hervorhebung im Original)

Um anzudeuten, wie sich das Streben nach der Verwendung aller Zeichenarten auf Unterrichtsentwürfe auswirken kann, wird dieser Prozess für zwei der zuvor aufgezeigten Übersichten zu Zeichenübergängen exemplarisch durchgeführt. Das grundsätzliche Anliegen, bestenfalls alle Zeichenarten einzusetzen, wird aber auch die nachfolgenden Abschnitte und das nächste Kapitel prägen.

---

[192] „Es ist daher eine Verkennung des wirklichen Sachverhalts, wenn man sagt, man müsse zwischen einer Methode für Schwache und einer solchen für begabte Kinder unterscheiden, und die Meinung äußert, die von mir angestrebte Methode gelte vielleicht besonders für schwache Kinder. Diese Auffassung verkennt, daß die methodische Anordnung der als wesentlich unterscheidbaren Zwischenaufgaben nicht eine willkürliche, sondern eine durch die Psychologie der Erkenntnis notwendig geforderte eindeutige sein muß, und daß lediglich das zeitliche Tempo und die Leichtigkeit, mit der die Aufgaben im Unterricht erledigt werden können, mit den Fähigkeiten der Kinder wechseln“ (Wittmann 1933, S. 20).

4.2.1.1 Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises bei HEYWANG (1923)

Eine[193] Ursache für den ausbleibenden langfristigen Lernerfolg bei HEYWANG (1923) kann darin liegen, dass einzelne Elemente der EIS-Palette unzureichend oder gar nicht eingesetzt werden: Ersteres insofern, als dass der zersägte Kreis aus Holz den Ansprüchen an objekthafte Zeichen nicht in vollem Maße genügt:

- Einerseits wird er v. a. als Demonstrationsmodell eingesetzt und bedarf als solches „unbedingt der *Ergänzung* durch ein *Lehrmittel für die Hand der Kinder*“ (Kühnel 1954, S. 248; Hervorhebung im Original; Original von 1916): „Der Bildung des mathematischen Begriffes soll ein solches Begreifen mit den Augen und Händen vorausgehen“ (Lietzmann 1919, S. 56).[194]
- Andererseits lenkt die vorgesägte Holzscheibe effektive Manipulationen in enge Bahnen (z. B. das Umsortieren) bzw. vermeidet sie (z. B. das Verfeinern der Einteilung des Kreises).

Ausgeschnittene Kreise aus Papier oder Pappe wären in dieser Hinsicht vorzuziehen, weil sie eben jene Schwachpunkte vermeiden.

Auf entlehnte Zeichen verzichtet HEYWANGs (1923) Beschreibung sogar gänzlich. Dabei hätte ihr Einsatz gerade der Vergänglichkeit der durch die effektive Handlung errungenen Einsicht entgegenwirken können (vgl. Unterkapitel 6.2). In einem abermaligen Unterrichtsversuch wäre daher zu empfehlen, Abbilder der ausgeführten Handlungen festzuhalten, beispielsweise durch Zeichnungen oder durch Aufkleben ausgeschnittener Kreissektoren für unterschiedlich feine Einteilungen. Nach diesen Änderungen wären die erhofften Zeichenübergänge wie in Abb. 45 darzustellen.

---

193 Im Laufe des Kapitels werden weitere mögliche Ursachen identifiziert. Dennoch wäre es illusorisch, anzunehmen, allein mit dem vertieften EIS-Prinzip derartige Unterrichtssequenzen vollumfänglich analysieren zu können. Um dies zu verdeutlichen, seien drei potentielle Ursachen für HEYWANGs (1923) Misserfolg genannt, die sich nicht unmittelbar durch Anwendung des EIS-Prinzips zu erkennen geben: Zunächst stellt BREIDENBACH (1956, S. 29) fest, dass Einsicht nichts nützt, „wenn das Kind nur ein einziges Mal (beim ersten Auftreten des Problems) veranlaßt wird, sie zu vollziehen. Einsichten bedürfen ebenso des mehrfachen Vollzuges wie jede Technik, sollen sie dem Kind zur Verfügung stehen“. Außerdem seien Tempo und Rhythmus so zu gestalten, „daß das Kind allmählich in das Neue hineinwächst“ (OEHL 1962, S. 31). Es ist kaum zu beurteilen, ob dies bei HEYWANG (1923) der Fall war. Zu guter Letzt erweckt die Beschreibung des Lerngangs – „Zweimal hatten wir den Weg gemacht“ (Heywang 1923, S. 165) – den Eindruck einer starken Steuerung durch die Lehrperson. Auch dies wäre eine potentielle Ursache: „Wie oft merkt der Lehrer nicht zu seiner großen Enttäuschung, daß vor wenigen Wochen Gelerntes, wie es scheint, spurlos verschwunden ist, wenn es inzwischen nicht geübt wurde. Daß ein logischer Weg vom Damaligen zum Heutigen führte, hilft da nichts, denn es war nicht der Schüler, sondern der Lehrer oder Lehrbuchverfasser, der diesen Zusammenhang konstruiert hatte, in der Meinung, daß solche Konstruktionen geheimnisvoll im Geist des Schülers wirken“ (Freudenthal 1973, S. 78).

194 HEYWANG (1923, S. 158) selbst ist sich dessen sogar bewusst: „Wie nun sollen die Kleinen die Einsicht erlangen? Durch Ansicht, durch klare Anschauung. […] Die Kinder müssen den Hergang so oft als möglich selber wirklich ausführen“. Dies erinnert an KURT LIEWALDs (1908, S. 3) ehemaligen Lehrer der Pädagogik, den er wie folgt zitiert: „Es wird viel über Anschaulichkeit im Unterricht gesprochen, und doch unterlässt man es nur zu oft, sie im einzelnen anzuwenden.“

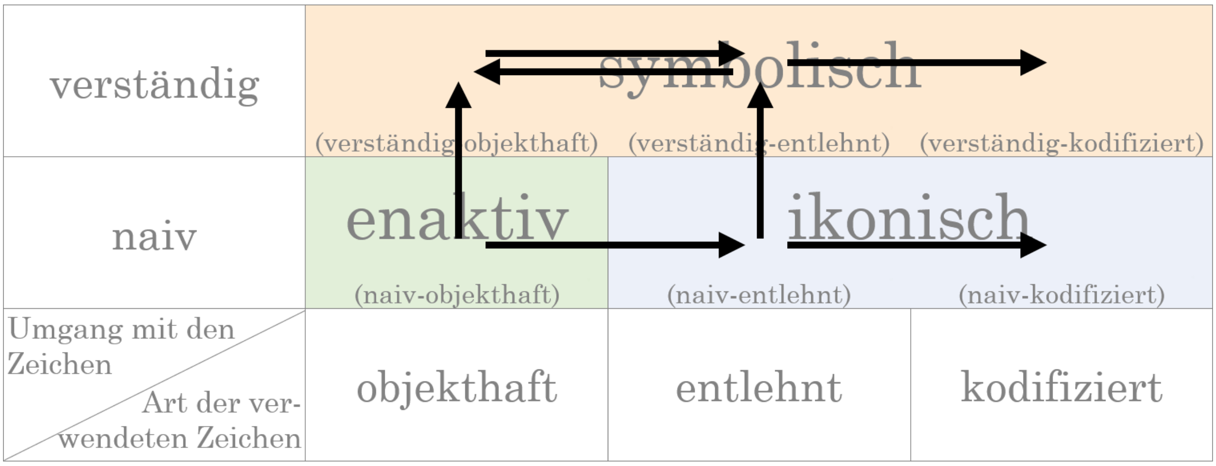


Abb. 45: Ergänzte Zeichenübergänge bei Heywang (1923)

4.2.1.2 Einführung der Klammerschreibweise bei Hole (1973)

Drastischer als Heywang (1923) schränkt der von Hole (1973, S. 87) beschriebene Unterricht die angebotenen Zeichenarten ein (vgl. Unterabschnitt 4.1.2.7) – und lässt Lernende dennoch die symbolische Ebene erklimmen: „Bald kamen die Schüler darauf, daß es sich eigentlich um zwei verschiedene Rechnungen handle und daß man irgend etwas unternehmen müsse, damit klarwerde, was eigentlich gerechnet werden soll“. Besteht also überhaupt Änderungsbedarf?

Führers (1996) Kritik[195] an Wagenschein ermutigt dazu, derartige Beschreibungen infrage zu stellen: Wer sind *die Schüler*, die bemerken, dass doch etwas unternommen werden müsse, weil $3 \cdot 5 + 2$ hier 21 und dort 17 ergibt? Sätze und Worte in der Alltagssprache sind doch allzu oft mehrdeutig. Und ist es tatsächlich für *alle* Lernenden die Situation in formal-algebraischen Zeichen, die vom Handlungsbedarf überzeugt – oder das bestätigende Nicken der Lehrperson auf den ersten Vorschlag *eines* Lernenden? Linde (1922b) legt Letzteres nahe:

> Im Kopfe können die richtigsten Gedanken, die saubersten Begriffe und die schönsten Wahrheiten wohnen: Das Herz läßt sich dadurch nicht von seinem Wege abbringen. Ihm vermag nur die Wirklichkeit zu ragen. Und darum: Wollen wir einen wahrhaft erziehenden Unterricht, so müssen wir uns hierzu der Wirklichkeit bedienen! Auch das bloß Gedachte und Erdachte, das bloß innerlich Angeschaute muß dem Schüler, ich möchte sagen, mit der Wucht der Wirklichkeit auf die Nerven fallen.
>
> Linde (1922b, S. 57)[196]

[195] „Der Lehrer macht sich selbst gern etwas vor, über den sachlichen Gehalt und die Breite des kollektiven Erlebnisses, das tatsächlich nur er mit seinen Musterschülern hatte, und die wenigen Schüler mit echten Erfolgserlebnissen täuschen sich im Nachhinein leicht über ihre tatsächliche Leistung und über ihr Leistungsvermögen“ (Führer 1996, S. 12).

[196] Falls sich die hier unterstellte Bedeutung des Satzes „Ihm vermag nur die Wirklichkeit zu ragen“ in Ermangelung des Gesamtkontextes nicht ohne Weiteres erschließt, sei die Interpretation der vorliegenden Arbeit expliziert: Nur die Wirklichkeit vermag eine Person von Grund auf, tiefgreifend und nachhaltig zu überzeugen.

Dass formal-algebraische Zeichen trotzdem vollends von der Problematik überzeugen *können*, ist kein Widerspruch: Welche Erlebnisse der *Wirklichkeit* zuzuschreiben sind, variiert intersubjektiv und hängt – in Anlehnung an BRANFORD (1913, S. 2) – davon ab, wo die eigene Welt des Vertrauten und Verständlichen endet und eine andere, unangenehme und fremde Welt beginnt. Die Anwendung des vertieften EIS-Prinzips strebt daher eine *zusätzliche* Übersetzung des Missverständnisses in objekthafte (und entlehnte) Zeichen an, um bestenfalls *alle* Lernenden inhaltlich vom Handlungsbedarf zu überzeugen. Die *deskriptive* und die *präskriptive* Funktion der EIS-Palette spielen hierbei ineinander: Wie lässt sich der von HOLE (1973) beschriebene Unterrichtsgang ergänzen, sodass weitere sinnvolle Zeichenübergänge (Abb. 46) angeboten werden?

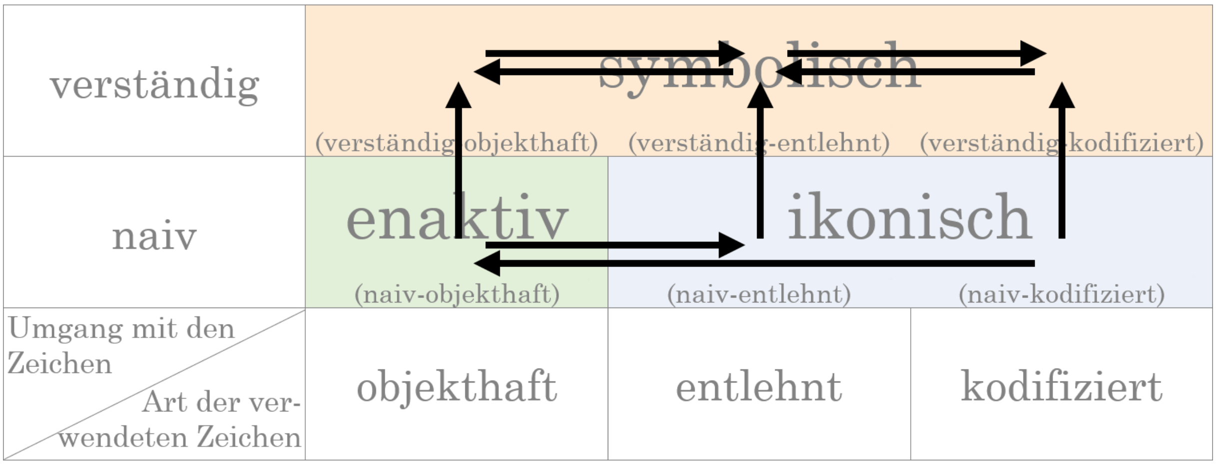


Abb. 46: Erweiterte Zeichenübergänge bei HOLE (1973)

Objekthafte Zeichen könnten durch ein Rollenspiel erzeugt werden – ein gelegentlich anzutreffender Fall einer enaktiven Darstellung (Lauter 2005, S. 81). Im vorliegenden Fall böte sich z. B. eine Restaurantszene an: Die Lehrperson nimmt als Kellnerin oder Kellner die Bestellung von zwei Lernenden auf („Für mich bitte eine Pizza und eine Apfelschorle." – „Für mich das gleiche.") und notiert sie für alle sichtbar in Worten oder Bildern an der Tafel – auf eine an die formal-algebraische Sprache angelehnte Weise: *2-mal Pizza und Apfelschorle.*[197] Hinter dem Tresen angekommen, wirft die zerstreute Lehrperson einen versichernden Blick auf ihre Notiz und bringt den Gästen anschließend zwei Pizzen und eine Apfelschorle. *Bald kommen die Schüler darauf, dass es sich eigentlich um zwei verschiedene Bestellungen handle und dass man irgendetwas unternehmen müsse, damit klarwerde, was eigentlich zubereitet werden soll.* Die Auseinandersetzung mit dem Missverständnis in dieser Form kann dessen erneutes Erkennen und Auflösen in kodifizierten Zeichen wie $3 \cdot 5 + 2$ unterstützen.

[197] Diese der Alltagssprache entsprungene Notation ist nicht unproblematisch, denn sie legt das stärker kodifizierte Zeichen $2 \cdot P + A$ nahe, bei dem die Objekt-Zahl-Konvention missachtet wird: „*In der elementaren Algebra bedeuten Buchstaben nicht die zugrundeliegenden konkreten Objekte, sondern gewisse diesen Objekten zugeordnete Zahlen (bzw. Größen)*" (Malle 1993, S. 108; Hervorhebung im Original).

4.2.2 Horizontale Übergänge auf der EIS-Palette

Abschnitt 4.2.2 fokussiert Praxisempfehlungen, die zwar auch mit dem Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips zugänglich sind, die aber durch die vertiefte Auffassung eine Präzisierung und Erweiterung erfahren. Es handelt sich dabei um Empfehlungen zu den horizontalen Übergängen auf der EIS-Palette, bei denen die Zeichenart gewechselt wird – diese Übergänge wurden im Ad-Hoc-Verständnis mit dem Bezeichner »intermodaler Transfer« bezeichnet.[198] Die diesbezüglichen Anregungen stimmen weitestgehend miteinander überein (vgl. Abschnitt 2.1.1):

- Die „*Fähigkeit, einen Inhalt von einer Darstellung in eine andere (des gleichen Modus oder eines verschiedenen Modus) zu übertragen*", müsse gefördert werden (Wittmann 1981b, S. 91; Hervorhebung im Original).
- „*Im Sinne von Bruner kommt es darauf an, alle durch die Pfeile angedeuteten Übergänge zwischen den Darstellungsebenen zu pflegen*" (Zech 2002, S. 107; Hervorhebung im Original).
- Es komme „schon im Einführungsunterricht darauf an, durch die Behandlung der Transfers Beziehungen zwischen allen Ebenen herzustellen" (Bönig 1993, S. 39). Dabei ziehe „die Fähigkeit zur Übersetzung in [eine] Richtung" in der Regel nicht „automatisch die Rückübersetzung nach sich […], ohne daß diese im Unterricht behandelt werden müßte" (ebd., S. 39).
- Es müsse „der Transfer zwischen verschiedenen Repräsentationsformen gelernt werden" (Schmidt-Thieme & Weigand 2015, S. 463).

Nichts von alldem sei für unzutreffend erklärt – aber für ausbaufähig: Zwar wird das Wechseln zwischen Zeichenarten als Hindernis in Lernprozessen ausgemacht, und die Sensibilisierung dafür ist ein wesentlicher Schritt. Doch Hinweise wie „Fördert die Fähigkeit des Übertragens!", „Pflegt die Übergänge!", „Behandelt die Transfers!" und „Lasst den Transfer erlernen!" geben einer Lehrperson nicht mehr als ein selbstverständliches Mittel an die Hand: Lasse das Wechseln auf sinnvolle Art und Weise üben! Zweifelsohne muss das Wechseln geübt werden – „zweckmäßige Übungen gehören zum Arbeitsstoff", so ausgefeilt der Unterricht auch sein mag (Freudenthal 1973, S. 134). Es bleibt jedoch verborgen, dass die Lehrperson zu einem gewissen Grad beeinflusst, wie anspruchsvoll das Wechseln zwischen Zeichenarten für Lernende ist.

Durch die Brille des EIS-Prinzips blickend – v. a. durch die Zeichenübergänge motiviert (vgl. Abschnitt 4.1.2) – lässt sich hierzu ein übergeordneter Leitsatz

[198] Derartige Übergänge thematisiert die Mathematikdidaktik seit jeher, wenn auch nicht immer mit dem heutigen Problembewusstsein oder der Wortwahl und Systematik der vorliegenden Arbeit: „Man kann dem Menschen nach und nach die beständige oder ununterbrochene wirkliche Gegenwart und den reellen Einfluß vieler äußerlicher Gegenstände, nicht aller, entbehrlich machen. Man muß nur die Zeichen und die Sachen gehörig mischen; erst lauter Sachen, dann ein paar Zeichen darunter gemischt; von Zeit zu Zeit ein [p]aar mehr; bald wird man ein Kind eine ganze Minute mit Zeichen, d. i. mit der idealen Gegenwart der Dinge unterhalten können; bald darauf zwei Minuten u. s. f." (Ernst Christian Trapp 1780, S. 167).

ableiten, dem konkretere Praxisempfehlung entspringen können: Die Zeichenübergänge sehen vor, erschlossene Symbolgehalte von einer Zeichenart auf eine andere zu übertragen. Genau dieser Prozess ist es, der nicht nur durch wiederholtes Üben, sondern auch durch die Gestaltung der Zeichen unterstützt werden soll. Um zunächst auf den so hervorgehobenen Einfluss der Lehrperson aufmerksam zu machen, fordert der zweite Leitsatz in Bezug auf die horizontalen Übergänge auf der EIS-Palette: *Gestalte Zeichen derart, dass Symbolgehalte bestmöglich übertragbar sind*. Diese Forderung ist gewiss noch vage und es wird zu konkretisieren sein, wie sie umzusetzen ist.

Ein erster Schritt zur Klärung liegt in der Vernetzung mit bestehenden Elementen der Mathematikdidaktik, denn das obige Bestreben ist keine neue Errungenschaft, sondern eine Übertragung von Aspekten altbekannter didaktischer Theorien – insbesondere von der Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche nach BAUERSFELD (1983).[199] Aus diesem Grund sei sie im nachfolgenden Unterabschnitt näher beleuchtet und mit der Sichtweise des EIS-Prinzips in Verbindung gebracht.

4.2.2.1 Subjektive Erfahrungsbereiche nach BAUERSFELD (1983)

BAUERSFELDs (1983) Modell

> geht aus von einer nicht-hierarchischen, kumulativen Speicherung der Erfahrung beim Individuum, und zwar entsprechend der situativen Bindung in deutlich getrennten „*Subjektiven Erfahrungs-Bereichen*“ (im weiteren kurz „SEB“). Die SEB’e umfassen stets die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw., also nicht nur die kognitive Dimension.
>
> Bauersfeld (1983, S. 2; Hervorhebung im Original)

Die in einem subjektiven Erfahrungsbereich speicherbaren Erfahrungen sind also vielfältig: Für das schriftliche Addieren beispielsweise sind „nicht nur die ‚Mittel‘ – die Zahlwörter […] und die Zerlegungsverfahren […] – an spezifische SEB gebunden. Auch die […] zugrunde liegenden ‚*Konstruktionsprinzipien*‘ – das Bildungsgesetz der Zahlwörter und das Übertragungsprinzip – sind in spezifischen SEB’en aufgehoben“ (ebd., S. 30; Hervorhebung im Original). Diese Konstruktionsprinzipien werden „im Handeln beiläufig erworben, und zwar während dem Handelnden geläufig wird, *wie* man es macht, ohne daß sie dabei als Regeln thematisiert werden müssen“ (ebd., S. 30; Hervorhebung im Original). BAUERSFELD (1983) erläutert die in der Unterrichtspraxis immer wieder zu beobachtenden Auswirkungen getrennter subjektiver Erfahrungsbereiche am

[199] Auch OEHL (1962, S. 169) skizziert in seinen Ausführungen über den Weg von der Handlung zum Bild und vom Bild zur Schrift viele der Ideen, die hier unter dem Leitsatz für horizontale Übergänge entwickelt werden – beispielsweise sei „besonders auf die Entsprechung von zeichnerischer Darstellung und Schriftbild [zu] achten“ – vgl. Unterabschnitt 4.2.2.2.

Beispiel von Alexandria[200]: Derselbe mathematische Lerngegenstand wird in zwei strukturgleichen Situationen unterschiedlich gut beherrscht: Beispielsweise kann beim Papierfalten die Spielregel gewonnen werden, dass eine doppelt so feine Einteilung auch das Verdoppeln der Teilstücke einer Teilfläche nach sich zieht. Die Regel ist aber zunächst nur in diesem subjektiven Erfahrungsbereich gespeichert und befähigt nicht automatisch zum Erweitern von $\frac{3}{4}$.

Die Entstehung subjektiver Erfahrungsbereiche sei weder ein von außen herbeizuführender Prozess noch werden sie „einfach nur durch ‚Verfeinerung und Spezialisierung' im Gebrauch entwickelt. Ihre Grenzen überschreitet das Individuum aktiv entwerfend, erprobend und aushandelnd in Situationen sozialer Interaktion" (ebd., S. 31). Ein mächtiges Instrument hierzu sei im Mathematikunterricht das oben erwähnte *metonymische Fortsetzen*, also „die Fortsetzung geläufiger Konstruktionsprinzipien in neue Gebiete hinein" (ebd., S. 31).

BAUERSFELD (1983) erläutert dieses Instrument – und damit auch die Entstehung neuer subjektiver Erfahrungsbereiche – an einer Einführung des Rechnens mit ganzen Zahlen mittels Bewegungen auf der Zahlengeraden.[201] Dabei werden positive Zahlen als Vorwärtsschritte gedeutet, negative als Rückwärtsschritte. Beim Addieren werde der Blick in die positive Richtung gewandt, beim Subtrahieren in die negative (vgl. Heinrich Wieleitner 1912, S. 8 f. und heute z. B. Heinz Böer et al. 2013, S. 17).

> Kinästhetische Erfahrungen und Beschreibungen aus dem Erfahrungsbereich des „Gehens auf Wegen" werden hier beansprucht, um in den anderen Erfahrungsbereich des „Operierens auf der Zahlengeraden" hinein *fortgesetzt* zu werden. Diesem Erfahrungsbereich sind Rechen-Bereiche untergeordnet u.a.m. Mit der Fortsetzung ändert sich der Sinn der vertrauten Handlungen – wir können jetzt auch sagen: ihr Kontext ändert sich. Da dergleichen nicht automatisch geschieht, wird eine *aktive Sinnkonstruktion* vom Lernenden gefordert.
>
> Bauersfeld (1983, S. 36; Hervorhebung im Original)

Anders als die Entstehung sei das Auslöschen eines subjektiven Erfahrungsbereiches nicht mit bewusster Anstrengung zu bewältigen. Dennoch schwinden

[200] „Offenbar hat für Alexandria das halbschriftliche Rechnen nichts mit Geld zu tun. Das eine tut man mit Schreibzeug und Symbolen auf Papier; das andere betrifft Münzen und Banknoten, für die man viele reizvolle Dinge kaufen kann. Die Handlungen, Interessen und Gefühle in den beiden Erfahrungsbereichen sind für ein Kind zunächst grundverschieden. Je weniger sich die Situationen gleichen, desto weniger gibt es zwischen ihnen zu „übersetzen", wenn übersetzen Darstellungswechsel bei gleichbleibendem Inhalt heißt. Im Gegenteil: Das in beiden SEB geläufige Wort „acht" wird gar nicht als dasselbe wahrgenommen, weil es für ganz verschiedene Vorstellungen steht, nämlich einmal für das Symbol „8" auf dem Papier und zum anderen für einige Münzen […] oder einige Geldscheine" (Bauersfeld 1983, S. 6)

[201] Allerdings könne das metonymische Fortsetzen in dieser Situation „seine konstruktive Macht nicht entfalten" (Bauersfeld 1983, S. 37) – siehe dazu Unterabschnitt 5.1.3.4.

„[m]anche SEB […] langsam dahin, d. h. werden mangels Aktivierung oder durch Interferenz diffuser und schließlich vergessen“ (ebd., S. 43).

Es bleibt kaum aus, in alldem deutliche Überschneidungen mit dem EIS-Prinzip zu konstatieren – zunächst hinsichtlich der Grundzüge beider Theorien:

- Die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Zeichenarten bewirkt eine Aktivierung unterschiedlicher subjektiver Erfahrungsbereiche.
- Ein in einer Zeichenart erschlossener Symbolgehalt gehört zu der in einem subjektiven Erfahrungsbereich gespeicherten Erfahrung.

Dank dieser Überschneidungen lassen sich weitere Hinweise von BAUERSFELD (1983) übertragen. Im Folgenden werden drei dieser stichpunktartig genannt, in Klammern in die Terminologie des EIS-Prinzips übersetzt und gegebenenfalls kurz ausgeführt.

(1) Erfahrungen werden bereichsspezifisch erworben. *(Symbolgehalte werden nicht automatisch in allen Zeichenarten gesehen – gerade deshalb ist das Wechseln der Zeichenart ein Stolperstein im Lernprozess.*[202]*)*
(2) Die Lehrperson hat Einfluss auf das Maß an Isoliertheit, das bei der Entstehung eines subjektiven Erfahrungsbereichs anfällt. *(Die Lehrperson hat Einfluss darauf, wie anspruchsvoll das Übertragen eines Symbolgehalts zwischen unterschiedlichen Zeichenarten ist.)*

„Die ‚Papiersummen-Welt‘ Miriams zeichnet sich offenbar durch besondere Isoliertheit aus, was möglicherweise an der Art ihrer Einführung […] liegt“ (ebd., S. 19).[203] Bei dieser Einführung wurde Miriam lediglich gezeigt, „wie man zwei untereinandergeschriebene Zahlen in beliebiger Reihenfolge spaltenweise addieren kann […] und anschließend bei den Spalten mit mehrstelligen Summen den ‚Einer rüberbringen‘ muß“ (ebd., S. 19). Ein erster konkreter Hinweis darauf, was es bei Einführungen zu beachten gilt, um dieses Problem abzumildern, lässt sich dem Eingangsbeispiel zum halbschriftlichen Rechnen von Alexandria entnehmen: „Je weniger sich die Situationen gleichen, desto weniger gibt es zwischen ihnen zu ‚übersetzen‘, wenn übersetzen Darstellungswechsel bei gleichbleibendem Inhalt heißt“, hieß es dort (ebd., S. 6). Im Umkehrschluss folgt daraus, dass sich die Situationen (trotz unterschiedlicher Zeichenarten) so gut wie möglich gleichen sollen.

[202] „Erfahrungen aus den verschiedenen Ebenen E-I-S werden auch nicht automatisch zu einem gemeinsamen Begriffskern integriert und abstrahiert. Häufig ist es so, daß diese Erfahrungen in disparate Bereiche zerfallen, ohne daß eine Integration gelingt“ (Bauer 1993, S. 79). Daher können die Stufen „zu einem jeweils neuen, zusätzlich zu bewältigenden Lernstoff werden“. Siehe auch HANS-DIETER GERSTER & RITA SCHULTZ (2004, S. 352): „Für das Kind ist es ein großer Unterschied, ob eine Aufgabe als konkrete Sachsituation, als bildliche Darstellung oder als mit Symbolen geschriebener Rechenterm vorgelegt wird. Wenn ein Kind die Kekse-Aufgabe mit Keksen, mit Hilfe von Zählplättchen oder mit Hilfe von gezeichneten Kringeln löst, dann hat das mit einem Subtraktionsterm wie 8 – 5 möglicherweise nichts zu tun.“

[203] Die „Papiersummen-Welt“ umfasst das Schreiben auf Papier, keine enaktive Handlung mit selbigem.

(3) Getrennte subjektive Erfahrungsbereiche sind unvermeidbar und das Verbinden zweier ist kein Selbstläufer. (*Auch bei bester Gestaltung der Zeichenarten muss das Wechseln der Zeichenarten geübt werden.)*

Die Isoliertheit subjektiver Erfahrungsbereiche sei zwar weder gänzlich vermeidbar noch „Unglücksfall einer mißlungenen Unterweisung" (ebd., S. 8) – aber eine Konstante ebenso wenig: Subjektive Erfahrungsbereiche können entweder bereits bei der Entstehung zu einem gewissen Grad „direkten Kontakt mit den darunterliegenden Mikrowelt-Strukturen"[204] halten, oder aber durch nachträgliche, bewusste Aktivität miteinander verknüpft werden (Lawler 1981, S. 15, zitiert nach Bauersfeld 1983, S. 20):

> Wenn das Theoriemodell der Subjektiven Erfahrungsbereiche zutrifft, dann ist eine Verbindung von zwei situativ so verschiedenen SEB'en weder als selbstverständlich noch gar als automatisches Ereignis zu erwarten. Wenn die beiden auf halbschriftliche Division und auf den Umgang mit Geld bezogenen SEB'e Alexandrias ihre je spezifische Sprache, Handlungsmuster und Logik haben, dann kann ein Vergleich oder ein In-Beziehung-Setzen ihrer Elemente oder Produkte nur über einen dritten Bereich geleistet werden, dessen Vorstellungs-, Denk- und Handlungsmöglichkeiten ein solches Vergleichen erlauben.
>
> Bauersfeld (1983, S. 7)

BAUERSFELD (1983) konkretisiert damit ZECHs (2002) Anregung, die Übergänge zwischen Zeichenarten und Sprachformen (dort hießen sie Darstellungsebenen) zu pflegen: Eine solche Pflege darf nicht nur das wiederholte Üben umfassen, sondern auch das bewusste Identifizieren und Reflektieren von Gemeinsamkeiten und Unterschieden. Erst dieser neue Blickwinkel bzw. die „Verknüpfung der Perspektiven von SEB'en" begründe einen „neuen SEB, in dem die Beschreibung der Vergleichsaspekte die Perspektive bildet" – also den geforderten dritten, übergeordneten Erfahrungsbereich (ebd., S. 34).

Zur Konkretisierung des oben formulierten Leitsatzes des vertieften EIS-Prinzips ist vor allem (2) ein wesentlicher Fortschritt. Die Suche nach exemplarischen Umsetzungen der Verbesserung der Gleichheit zwischen Situationen – und damit auch zur konkreten Anwendung des besagten Leitsatzes – in der mathematikdidaktischen Literatur fördert Vorschläge zutage, die ohne die vorherige Klärung durchaus befremdlich oder gar nutzlos wirken könnten:

> Die Erfahrung in Hilfsschule und Grundschule zeigt uns, daß schwache Kinder, die schon gelernt hatten, Steine oder Erbsen in Reihen zu ordnen, die auch schon gelernt hatten, die Menge der Kinder in Paaren aufzustellen, doch noch nicht ohne weiteres nun auch Erbsen in Paaren ordnen oder Paare von Erbsen malend darstellen konnten. Überaus interessant ist es, daß diese

---

[204] BAUERSFELD (1983) identifiziert ROBERT LAWLERs (1981) Mikrowelten als subjektive Erfahrungsbereiche.

> Kinder das zunächst nur dann konnten, wenn sie die Menge der Erbsen von den spielenden Kindern aus auffaßten, wenn sie die Erbsen gleichsam als spielende Kinder auffaßten und mit ihnen spielten. Dazu gehörte dann, daß sie auch das Lied sangen, das beim Spiel in Paaren gesungen wurde.
>
> Wittmann (1933, S. 145)

WITTMANN (1933) liefert mit dem Singen eines Liedes ein Extrembeispiel einer befremdlich wirkenden Maßnahme. Aber auch Vorschläge in Unterkapitel 5.2 könnten sich dieser Einschätzung ausgesetzt sehen – etwa, wenn in Abschnitt 5.2.1 empfohlen wird, Arbeitsblätter zum Galtonbrett aufrecht zu positionieren. Mithilfe von BAUERSFELDs (1983) Theorie lassen sich zwei Argumente formulieren, die der Befremdlichkeit entgegenwirken:

Erstens umfassen subjektive Erfahrungsbereiche „die Gesamtheit des als subjektiv wichtig Erfahrenen und Verarbeiteten, einschließlich der Gefühle, der Körpererfahrung usw." – die Gleichheit von Situationen ist also in vielen Facetten optimierbar (Bauersfeld 1983, S. 2). Zweitens ist das eigene Empfinden von Nützlichkeit einer Unterstützungsmaßnahme nur mit Vorsicht auf Lernende zu übertragen – darauf macht BREIDENBACH (1956)[205] aufmerksam (vgl. im Kontext der Repräsentationsmodi Gerster & Schultz 2004, S. 352). Methodische Hilfen sollten also nicht kategorisch abgelehnt werden, nur, weil sie Probleme angehen, die sich keiner Lehrperson und nicht allen Lernenden stellen:

> Auch das schwache Kind *muß* zur Einsicht kommen, die sich zuletzt in einem selbstständigen geistigen Akt vollzieht. Diesen Akt auszulösen muß der Lehrer jede methodische Anstrengung machen. Die Behandlung eines Rechenstoffes ist erst dann methodisch einwandfrei, wenn *auch das schwache Kind* möglichst schon bei der ersten Behandlung zur Einsicht kommt, mag diese bei ihm zunächst auch noch weniger eindringlich sein als bei den begabteren Kindern. Eine Behandlung, die nicht so viel – *sachlich* richtige! – Hilfen wie möglich gibt, ist keine methodische Leistung.
>
> Breidenbach (1956, S. 31; Hervorhebung im Original)

Derart detaillierte Vorschläge wie die Positionierung eines Arbeitsblattes entspringen jedoch nicht unmittelbar dem allgemein gehaltenen Leitsatz für horizontale Übergänge, sondern erst seiner weiteren Konkretisierung. Dieser widmet sich der nachfolgende Unterabschnitt.

---

[205] „Im Rechenunterricht, zumal der ersten Schuljahre, besteht für den Junglehrer eine Hauptschwierigkeit darin, daß er alles, was er behandeln muß, „kann". Die Lösungen der Aufgaben sind für ihn selbstverständlich, ein Besinnen ist nicht nötig, alles läuft aufs leichteste ab. Und daher zieht der Junglehrer leicht den verhängnisvollen Schluß, daß in all diesen Rechenaufgaben auch für den Schüler gar keine sachlichen Schwierigkeiten, gar keine oder nur geringe sachliche Probleme vorlägen. Zwar will alles nicht so recht gehen, aber das liegt natürlich an der Dummheit der Kinder – und so überlegt sich der Anfänger methodische Hilfen, die ihren Ursprung samt und sonders in der angeblichen Dummheit der Kinder haben. Und damit ist das Unglück bereits geschehen" (Breidenbach 1956, S. 21).

4.2.2.2 Zur Konkretisierung des Leitsatzes für horizontale Übergänge

Es wäre illusorisch, die Übertragbarkeit eines Symbolgehalts garantieren zu wollen. Stattdessen sollen hier erste Ansatzpunkte herausgearbeitet werden, die vielfach anwendbar sind und potentiell hilfreiche Unterstützungsmaßnahmen generieren. Als prototypischer Lerngegenstand dient immer wieder die Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck, zu der verwendete Zeichen bereits in Kapitel 4 näher beleuchtet und auf der EIS-Palette eingeordnet wurden, wobei vereinzelt weitere Beispiele aus der mathematikdidaktischen Literatur hinzutreten.

Unterkapitel 5.2 wird die Anwendung des Leitsatzes für horizontale Übergänge und damit auch das Anwenden besagter Ansatzpunkte fortsetzen. Letztendlich soll auf diese Weise die große Bandbreite an Optimierungsmöglichkeiten der horizontalen Übergänge auf der EIS-Palette demonstriert werden, um ein kreatives und umfassendes Aufsuchen solcher Möglichkeiten in anderen Anwendungsfällen zu motivieren. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Vernetzung von Zeichenarten nicht allein durch eine verbesserte Gestaltung der Zeichen beim erstmaligen Übergang bewältigt wird, sondern zusätzlicher Maßnahmen[206] bedarf, das aktive Bemühen um Verbindung auch im Nachhinein verlangt und von motivationalen Faktoren abhängt: „Die Schüler müssen einsehen, daß man ein neues Zeichen braucht“ (Hole 1973, S. 62).

- Erster Ansatz: Gleichheit der Situationen verbessern

Dieser erste Ansatzpunkt ist terminologisch und inhaltlich an BAUERSFELD (1983) angelehnt, der, wie oben bereits zitiert, feststellt: „Je weniger sich die Situationen gleichen, desto weniger gibt es zwischen ihnen zu ‚übersetzen‘, wenn übersetzen Darstellungswechsel bei gleichbleibendem Inhalt heißt“ (Bauersfeld 1983, S. 6). Umgekehrt resultiert daraus das Ziel, größtmögliche Gleichheit zwischen Situationen in unterschiedlichen Zeichenarten anzustreben.

Bezogen auf das Erschließen der Innenwinkelsumme im Dreieck ist hier zu beachten, dass die objekthaften Zeichen im Unterrichtsgeschehen intersubjektiv variieren: In der Regel schneiden Lernende selbst gezeichnete Dreiecke aus. Mit dem Ziel, Gleichheit zwischen Situationen zu schaffen, müssen sich die entlehnten Zeichen dem anpassen. Einen ersten Beitrag zur Verbesserung der Übertragbarkeit erschlossener Symbolgehalte von objekthaften zu entlehnten Zeichen leistet daher das Verwenden der *eigenen* Dreiecke als Vorlage für abbildhafte Zeichnungen – ein fremdes Musterbeispiel von der Tafel ist weniger geeignet.
Dass Gleichheit von Situationen nicht nur die optische Entsprechung umfasst, wurde oben unter Verweis auf WITTMANN (1933) erläutert. Im Bewusstsein dessen

[206] MALLE (1993, S. 36; siehe auch Hole 1973, S. 63) merkt beispielsweise zur Einführung einer offiziellen Notation (in kodifizierten Zeichen) an, dass ein Kommunikationsprozesses notwendig sei, „in dem die Schüler ihre eigenen Notationsvorschläge mit der offiziellen Notation vergleichen können und dadurch die Eigenheiten der letzteren erkennen können“.

lässt sich für HEYWANGs (1923, S. 165) mehrfach erwähnten Unterrichtsversuch ein weiteres Verbesserungspotential aufzeigen: Nachdem ein zersägter Kreis aus Holz in „ein Rechteck mit dem halben Umfang als Grundlinie und dem Halbmesser als Höhe" umsortiert wurde, folgt die Formel $r \cdot r \cdot 3{,}14$ mit *drei* Faktoren. Die Aufmerksamkeitsfokussierung auf zwei Größen (halber Umfang und Halbmesser) beim Umgang mit objekthaften Zeichen wäre jedoch getreuer in kodifizierte Zeichen übertragen, wenn die Formel $3{,}14r \cdot r$ oder $(3{,}14 \cdot r) \cdot r$ verwendet worden wäre – zumindest vorübergehend: „In der Schreibweise müssen die einzelnen Denkschritte, durch die die Lösung erfolgt, lange Wochen hindurch festgehalten werden" (Breidenbach 1956, S. 131). Mathematisch gesehen ist $3{,}14r \cdot r$ zwar nichts anderes als $r \cdot r \cdot 3{,}14$ oder auch $\pi \cdot r^2$, doch solche Zeichen können und sollen mehr als eine Ergebnisinformation übermitteln. An dieser Stelle wirken in der Terminologie von PREDIGER (2015, S. 652) *erklärende bzw. verstehende* sowie *präskriptive* Theorieelemente des vertieften EIS-Prinzips: Es ordnet nicht nur Zeichen und Lernprozesse in ein System ein (*deskriptive* Funktion), sondern kann dadurch das Auftreten von Phänomenen wie HEYWANGS Misserfolg teilweise erklären und vielversprechende Handlungsmöglichkeiten aufzeigen.

BREIDENBACH (1956) ergänzt ein Analogon zum obigen Vorschlag bezogen auf die Herleitung der Flächeninhaltsberechnung im Rechteck. Üblicherweise werden dabei Flächen mit quadratischen Kacheln ausgelegt und deren Anzahl (systematisch) bestimmt. Auch hier kann die Gleichheit zwischen Situationen in verschiedenartigen Zeichen durch deren Gestaltung optimiert werden:

> Die Formel „Länge mal Breite" ist falsch. Sie fordert, dass wir 8 cm mit 6 cm malnehmen sollen. Das geht nicht! […] Es liegt kein Grund vor, von der […] Formel für die Rechteckfläche, die den Denkvorgang genau wiedergibt, abzugehen, jedenfalls nicht im 5. und 6. Schuljahr.
>
> Breidenbach (1956, S. 192)[207]

Die *richtige* Formel laute „Flächeninhalt des Rechtecks = Grundstreifen mal Anzahl der Streifen" (ebd., S. 192). Dadurch wird die Gleichheit der Situationen in objekthaften bzw. kodifizierten Zeichen verbessert, weil beim Auslegen mit Flächen gearbeitet wird, nicht mit Längen. Zwar sehen die Mathematikerin und der Mathematiker zurecht keinen Unterschied zwischen $8\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}$ und $8 \cdot 6\ \text{cm}^2$, die Mathelehrerin und der Mathelehrer jedoch schon. Es lohnt sich, zwischen beidem zu unterscheiden – siehe LAMBERT (2020) bzw. FÜHRER (1997, S. 65).
BREIDENBACH (1956) plädiert natürlich nicht dafür, ein kodifiziertes Zeichen wie $8\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm}$ für immer zu meiden. Aber da es den anfänglichen Denkvorgang nicht

[207] Das Argument *Zentimeter mal Zentimeter ergeben doch Quadratzentimeter* entkräftet BREIDENBACH (1956, S. 191) wie folgt: „Es besteht sachlogisch keine Notwendigkeit die Flächengröße eines Meterquadrates gerade Quadratmeter zu nennen. Man hätte auch ‚1 Hedron' (griech. = Fläche) als Namen verwenden können, wie man es beim Ar (area = Fläche) tut." Das Ar wurde als Einheitsmaß zur Angabe eines Flächeninhalts eingeführt, ist jedoch mittlerweile – anders als zu Zeiten von BREIDENBACHs Zitat – keine SI-Einheit mehr.

adäquat wiedergebe, solle es nicht unreflektiert, ohne Zwischenschritt und scheinbar selbstverständlich im direkten Anschluss an die Handlungen verwendet werden: „Es ist falsch, bereits ‚ökonomisch' zu sprechen, solange wir noch das Verständnis gewinnen und üben müssen" (Breidenbach 1956, S. 192).

Erneut wirkt das EIS-Prinzip in seiner *erklärenden* bzw. *verstehenden* Funktion bereichernd – hier aber nicht in Bezug auf beobachtete Phänomene, sondern auf didaktische Hinweise zur Gestaltung von Zeichen wie jener von BREIDENBACH (1956): Es unterstützt die „ökonomische Erklärung und Beschreibung spezieller didaktischer Maßnahmen" und ist dadurch viabel (Wittmann 1975, S. 231).

- Zweiter Ansatz: Mischzeichen verwenden

Dieser zweite Vorschlag resultiert aus einer Abstrahierung von BRANFORDs (1913) Beobachtungen zur Einführung der Ziffernschreibweise im Dezimalsystem:

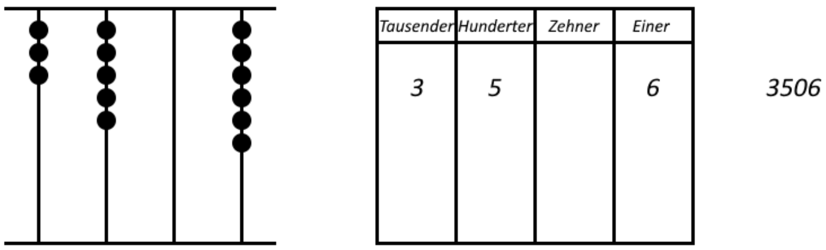


Abb. 47: Verwendete Zeichen bei BRANFORD (1913, S. 254)

> Vor einigen Jahren entdeckte ein Lehrer im Westen Englands (eine Dame, deren Namen ich nicht kenne), daß der Übergang vom Rechenbrett zur fertigen Schriftsymbolik viel leichter gestaltet werden konnte, wenn man eine Art Papierrechenbrett einschaltete, bei welchem Kolumnen an die Stelle der Stäbchen traten, wenn die Kügelchen durch Zahlen ersetzt wurden. Das obenstehende Diagramm wird das Wesen der Erfindung zeigen.

1. Stufe.	2. Stufe.	3. Stufe.
Hölzernes Rechenbrett mit Kügelchen.	Graphisches Rechenbrett mit geschriebenen Zahlen und Kolumnen.	Vollständig entwickelte geschriebene Symbolik.

Branford (1913, S. 254 f.)

In gewisser Weise handelt es sich beim graphischen Rechenbrett um ein entlehntes Zeichen, weil einige Gestaltungselemente vom hölzernen Rechenbrett übernommen wurden – beispielsweise bleibt anfangs eine Spalte frei, wenn sich an der entsprechenden Stange im hölzernen Rechenbrett keine Kugel befindet. Gleichzeitig aber werden kodifizierte Elemente wie Ziffern verwendet. Als Mischzeichen stellt es somit eine Zwischenstufe dar, dank der auf dem Weg vom hölzernen Rechenbrett bzw. von einer abbildhaften Zeichnung dessen hin zur Darstellung 3506 nicht ein großer, sondern nur zwei kleine Schritte bewältigt werden müssen – laut BRANFORD (1913, S. 255) trägt dies Früchte: „Die Einschaltung der 2. Stufe, wo die Kolumnen die Stäbe des ursprünglichen

Rechenbretts ersetzen und die geschriebenen Symbole die Kügelchen, macht den schließlichen Übergang zu der vollständig entwickelten Symbolik leicht“.

Für den Fall der Innenwinkelsumme im Dreieck resultieren mehrere Impulse: Mischzeichen zwischen entlehnten und kodifizierten Zeichen lassen sich erzeugen, indem bestehende entlehnte Zeichen (beispielsweise eingeklebte Papierstücke) mit kodifizierten Zeichen ergänzt werden: Dabei kann es sich um zwei parallele, geradlinige Striche handeln, die als Geraden gelesen werden sollen oder um griechische Buchstaben für Winkel, die auf die übliche Weise in den Ecken des Papierdreiecks markiert werden. Ein solches Ergänzen von Zeichnungen ist unterrichtspraktischer Alltag und wird beispielsweise von Zech (2002, S. 96; Hervorhebung im Original) vorgeschlagen – dort unter dem Leitgedanken, entlehnte und kodifizierte Zeichen „*möglichst dicht zusammenzubringen* und einander deutlich zuzuordnen“, wie etwa in Abb. 48.

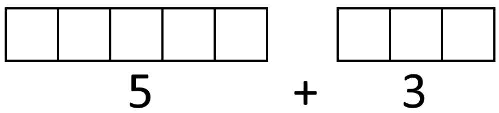


Abb. 48: Dicht zusammengebrachte Zeichenarten nach Zech (2002, S. 96)

Objekthaft-entlehnte Mischzeichen wären ebenfalls denkbar: Beim Einkleben der Papierstücke kann eine Ecke nur mit einem Faden im Heft fixiert sein, sodass ein eingeschränkter Spielraum für effektive Handlungen bleibt.

- Dritter Ansatz: eine Zeichenart aus einer anderen hervorgehen lassen

Branford (1913) setzt auch diese Möglichkeit um: Ausgehend vom graphischen Rechenbrett wird die Ziffernschreibweise mit ihrem „Prinzip des Stellenwertes beinahe unbewußt eingeführt, indem man an der Tafel die Linien auslöscht, welche die Kolumnen scheiden“ (Branford 1913, S. 255). Einen zweiten Prototyp nennt Lambert (2012, S. 29 f.) bei der Untersuchung der Frage, wie zwei Spiegel (z. B. in einer Umkleidekabine) zu positionieren sind, um sich selbst von hinten begutachten zu können. Dazu werden enaktive Darstellungen (objekthafte Zeichen) mithilfe einer Spielfigur und zwei Spiegelkacheln erzeugt, aus denen ikonische Darstellungen (entlehnte Zeichen) wie folgt hervorgehen:

> Spiegelkachel und Spielfigur stehen dazu auf einem Papierbogen. Die Unterkante der Spiegelkachel dient als Lineal zum Zeichnen einer Linie […]. Dazu zeichnet man zu der Linie den „Punkt“ ein, auf dem die Spielfigur vor dem Spiegel steht und – geeignet angepeilt – den „Punkt“ hinter dem Spiegel, auf dem das virtuelle Pendant der Spielfigur verortet zu sein scheint. Nach Entfernen von Spielfigur und Spiegelkachel hat man eine ikonische Darstellung des mathematischen Modells der Situation.

Lambert (2012, S. 29 f.)

Die enaktive Darstellung mit Spielfigur und Spiegelkacheln bleibt dauerhaft präsent und bildet keine separate Situation, die zunächst abschließend behandelt und dann von den neuen, entlehnten Zeichen abgelöst wird. Dieses Gegenteil des *Hervorgehens aus einer anderen Zeichenart* läge bei der Herleitung der Innenwinkelsumme im Dreieck vor, wenn die zerrissenen Dreiecke gänzlich beiseitegelegt würden, bevor die zeichnerische Tätigkeit einsetzt. Wie genau das Hervorgehen umgesetzt werden kann, ist von Einzelfall zu Einzelfall zu beschreiben: Hier empfiehlt es sich, als entlehnte Zeichen nicht nur Zeichnungen erstellen zu lassen, sondern anfangs zumindest ein Exemplar eines zerrissenen Papierdreiecks einzukleben. Dabei geht durch die entfallende Möglichkeit effektiver Manipulationen ein entlehntes Zeichen aus einem objekthaften hervor – gleichzeitig verbessert sich die Gleichheit zwischen den Situationen, weil in beiden dasselbe haptische Material verwendet wird bzw. wurde.

Weitere Beispiele zu diesem und den vorherigen Ansätzen finden sich in Unterkapitel 5.2. Im nun anschließenden Abschnitt werden Praxisempfehlungen aus einem dritten Leitsatz gewonnen, die im Ad-Hoc-Verständnis verschlossen bleiben und die erst durch die in der Mathematikdidaktik vorbereitete und in der vorliegenden Arbeit fortgesetzte Vertiefung der Theorie zugänglich werden.

4.2.3 Vertikale Übergänge auf der EIS-Palette

Zunächst ist eine Einschränkung in Bezug vertikale Übergänge angebracht:

> Der Prozess [des Lernens] selbst entzieht sich lebensweltlich und wissenschaftlich unserer Aufmerksamkeit. […] Dabei handelt es sich nicht um eine vermeidbare Nachlässigkeit. Es gehört vielmehr als Struktur-eigentümlichkeit zum Lernen selbst dazu, dass sich der Vollzug ins Dunkle zurückzieht. […] Lernen als das Aufgehen einer bislang nicht eingenommenen Perspektive ist wie das Aufwachen. […] Ebenso wenig wie mein Wille den Anfang des eigentlichen Lernens erzwingen kann, ist ein Lehren möglich, das diesen Beginn setzt. Es kann stets mit ihm rechnen und die Bedingungen günstig gestalten, ihn aber nicht garantieren.

Käte Meyer-Drawe (2003, S. 508 f.)[208]

Aus dieser Beschreibung des Lernens als Prozess im Dunklen soll jedoch nicht geschlossen werden, dass die Beobachtung eines lernenden Menschen nicht lohnenswert sei.[209] Für das EIS-Prinzip bedeutet die obige Einschränkung damit in erster Linie, dass sich der Übergang zur symbolischen Ebene nie als

[208] Vgl. OEHL (1965, S. 45): „Einsicht gewinnen ist immer ein unmittelbarer geistiger Akt, zu dem der Lehrer zwar die bestmöglichen Voraussetzungen schaffen, den er aber nicht erzwingen kann."

[209] „Man sage nicht, daß Lernprozesse sich im Inneren des Lernenden abspielen und also nicht beobachtbar seien. Das ist wieder einmal solch ein unsinniger Gemeinplatz. Wir untersuchen ja auch, was sich im Inneren der Sonne und der Atome abspielt. Ein Lehrer, der zusieht, hat schon so viele Lernprozesse beobachtet, und er weiß es. Wieviel gibt es da nicht zu beobachten, wenn Menschen lernen – andere und man selber; es ist nur so schwierig, die Beobachtungen zu ordnen, zu beschreiben, zu bewerten" (Freudenthal 1978, S. 161).

folgerichtiger, nächster Schritt nach einigen vorhergehenden planen lässt, sondern als plötzlicher Sprung einsetzt, den FREUDENTHAL (1978, S. 59) als Unstetigkeit und das „Wesentliche in allen Lernprozessen“ bezeichnet. Es sollen daher keine Richtlinien dazu formuliert werden, wie der vertikale Übergang von einem naiven zu einem verständigen Umgang mit Zeichen herbeizuführen wäre.[210] Das Ziel ist stattdessen das Schaffen günstiger Voraussetzungen: Während der zweite Leitsatz – jener zu den horizontalen Übergängen – Symbolgehalte möglichst gut *übertragbar* machen sollte, fordert der dritte Leitsatz bezogen auf die vertikalen Übergänge: *Gestalte Zeichen derart, dass die intendierten Symbolgehalte bestmöglich erschließbar sind.*[211]

Dies setzt zunächst die grundsätzliche *Möglichkeit* des Erschließens voraus: Die intendierten Symbolgehalte müssen Teil des potentiellen Symbolgehalts sein. Verstöße dagegen werden am häufigsten mit objekthaften und entlehnten Zeichen begangen und dokumentiert: LIETZMANN (1919, S. 58) bezeichnet beispielsweise die folgende Episode als „geradezu grotesk“ und „unbegreiflich“.

> Das Tollste, was in der Veranschaulichung wohl je geleistet wurde, ist folgender verbürgte Fall: Ein Lehrer wollte das „Erweitern“ der Brüche erklären. Er zog aus der Tasche ein Gummiband und verlängerte es vor den Augen der Schüler. Frage und Antwortspiel lieferte schließlich den Satz: Ein Gummiband, das „erweitert“ wird, ändert seinen Wert nicht. Lehrer: Beim Bruch ist es genau so; also welcher Satz gilt für jeden Bruch? usw. … Wenn dies auch ein etwas krasses Beispiel ist, so ist es doch typisch. So manches Modell bringt gerade den Kernpunkt einer wichtigen Sache nicht zur Veranschaulichung […].
>
> Paul Fischer (1913, S. 8)

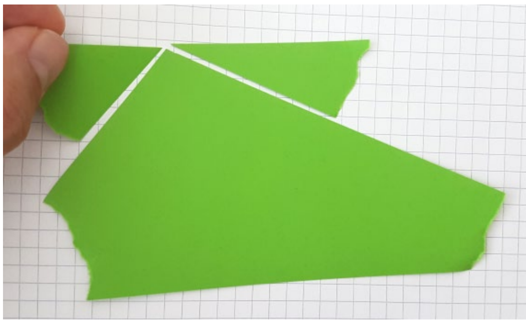
Entsprechend wenig revolutionär ist der Leitsatz für vertikale Übergänge: „Die billigste Forderung, die man an ein Anschauungsmittel stellen kann, sollte eigentlich die sein, daß es auch tatsächlich das veranschaulicht, was es zeigen soll“ (Fischer 1913, S. 8). BREIDENBACH (1956) formuliert ähnliches unter dem Schlagwort *Isomorphie* (vgl. Abschnitt 6.1.1), BESUDEN (1970a, S. 121; Hervorhebung im Original) postuliert als Hauptkriterium „[b]ei der Entscheidung für ein bestimmtes Arbeitsmittel“, dass es „in seiner Anordnung *die* Beziehungen verdeutlicht, die für den Begriff konstitutiv sind“ und KIRSCH (1977b, S. 169; Hervorhebung im Original) diskutiert die *„Adäquatheit einer Repräsentation“*, zu der auch HOLE (1973) mahnt:

[210] An dieser Stelle sei KIRSCHs (1977a, S. 100; Hervorhebung im Original) Kommentar wiederholt: „Alle hier beschriebenen Bemühungen verstehen sich nur als Hilfestellung, die dem Lernenden den Zugang erleichtern, aber ihm den entscheidenden *Akt der Aneignung prinzipiell nicht abnehmen* können. Nicht jeder Schüler vermag für jeden Gegenstand diesen Akt zu leisten.“

[211] Basierend darauf können Möglichkeiten ergriffen werden, die den Übergang zum Symbolischen *anregen* – diese untersucht Abschnitt 4.2.4 im Anschluss.

> Zunächst geht es darum, zu dem mathematischen Unterrichtsgegenstand Handlungen zu finden, die diesem adäquat und einsichtsfördernd sind. Das heißt, daß Handlungen nicht ausschmückende Vorgänge sind, […] sondern daß sie in Verbindung mit den Handlungsobjekten oder den handelnden Subjekten Bestandteile, Beziehungen oder Verknüpfungen darstellen, die den mathematischen Begriff begründen.
>
> Hole (1973, S. 38)

Die Nützlichkeit dieser grundlegenden Voraussetzung vermittelt der von FISCHER (1913) dokumentierte Unterrichtsausschnitt jedoch nur unzureichend, denn die Unstimmigkeit liegt auf der Hand. Es sind die weniger offensichtlichen Verbesserungspotentiale, mit deren Ausreizen diese Forderung von sich überzeugt. Als ein solches wurde in Unterabschnitt 2.1.2.4 der Hinweis wiedergegeben, bei der Herleitung der Innenwinkelsumme im Dreieck nur zwei Ecken abzureißen und an die dritte anzulegen: „In dieser Situation bleibt die *zur Begründung notwendige* Parallele erhalten und ermöglicht einen Weg zum Beweis“ (Lambert 2019, o. S.; Hervorhebung im Original).



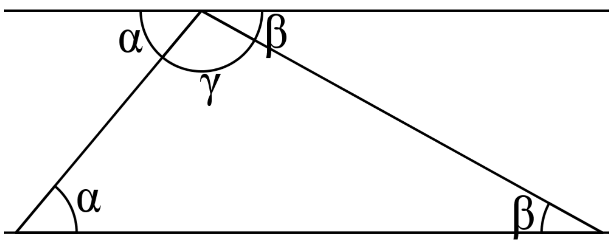


Abb. 49: Zwei Ecken abreißen und an der gleichen Seite anlegen[212]

Das in Abb. 49 gezeigte Anlegen ist jedoch alles andere als alternativlos (vgl. Abb. 50 bis Abb. 52). Welche der Handlungen ist also vorzuziehen und warum? Das EIS-Prinzips fällt diese Entscheidung durch Abgleich der intendierten mit den potentiellen Symbolgehalten dieser Zeichen:

Das Anlegen zweier Ecken gemäß Abb. 50 schließt das Hineinsehen der Parallelen zwar nicht gänzlich aus, erschwert es aber erheblich, weil es die Aufmerksamkeit auf die Gerade lenkt, der je ein Schenkel der abgerissenen Winkel angehört. Dennoch ist dieses Zeichen einen zweiten Blick wert, um nicht vorschnell seine potentiellen Symbolgehalte zu beschneiden: Ließe sich der Satz hier auf andere Weise begründen? Wäre dies Lernenden mit der ihnen zur Verfügung stehenden

[212] Die Abbildungen folgen der auch bei Lernenden beobachtbaren Gewohnheit, die Dreiecke mit einer Spitze nach „oben“ auszurichten und die beiden "unteren" Ecken abzureißen, obwohl hinsichtlich der angestrebten Begründung auch jedes andere Eckenpaar ausgewählt werden könnte. Mit KIRSCHs (1977a, S. 89; Hervorhebung im Original) „*Sensibilität für Unterschiede* gerade dort, wo der Mathematiker ‚keinen Unterschied‘ sieht“, erscheint die Wahl des unteren Eckenpaares jedoch durchaus sinnvoll: Die zu entdeckenden Parallelen verlaufen dadurch (nahezu) parallel zur Tischkante bzw. (an der Tafel) horizontal – und in dieser ausgezeichneten Richtung werden sie leichter bemerkt.

Argumentationsbasis möglich, würde sich dieses Zeichen für einen Unterrichtseinsatz qualifizieren. Selbiges trifft auf die Anordnung in Abb. 51 zu.

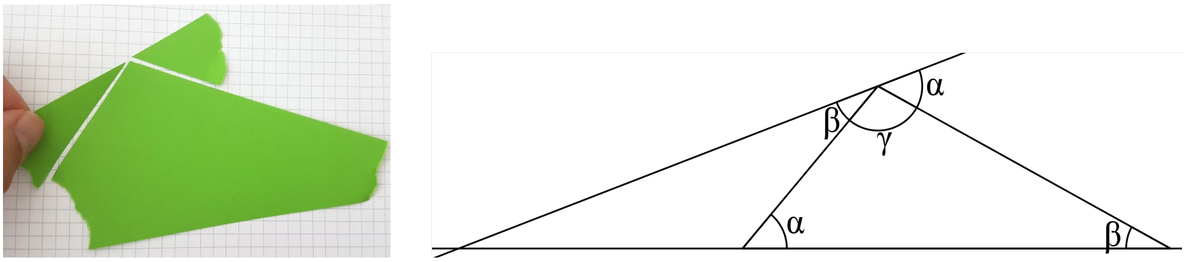


Abb. 50: Zwei Ecken abreißen und an der anderen Seite anlegen

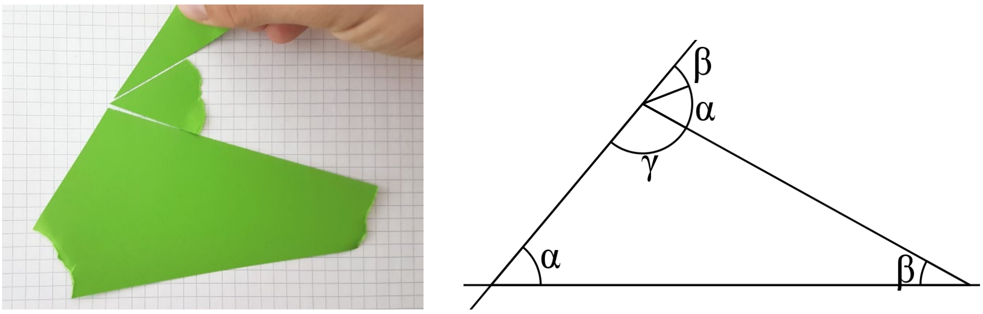


Abb. 51: Zwei Ecken abreißen, die erste an der anderen Seite anlegen, die zweite daneben

Das in Abb. 52 dargestellte objekthafte Zeichen ähnelt in seinen potentiellen Symbolgehalten wiederum jenem aus Abb. 49: Die beiden parallelen Geraden können (vielleicht etwas weniger offensichtlich als zuvor) in dieses Zeichen hineingesehen werden – und damit auch die intendierten Symbolgehalte. Anders als zuvor liegen ein Wechsel- und ein Stufenwinkel vor.

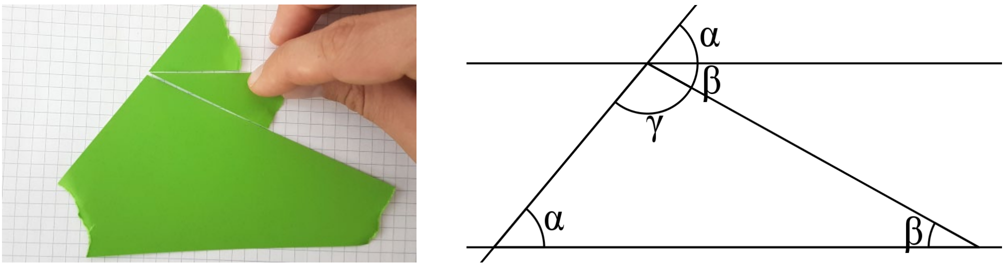


Abb. 52: Zwei Ecken abreißen, die erste an der gleichen Seite anlegen, die zweite daneben

Wie aber lässt sich diese theoriegeleitete Auswahl einsichtsfördernder Handlungen in der Unterrichtspraxis realisieren? Immerhin ist sie lediglich „gerechtfertigt als Teil des Gesamtplans", den die Lernenden noch gar nicht kennen (Wertheimer 1957, S. 102; Original von 1945).

Eine Lehrperson könnte gewisse Zeichen einfordern und Handlungen explizit anleiten, ganz im Sinne der allgemeinen Formel, die FRIEDRICH FRÖBELs Unterricht zugrunde liege – ROBERT RIßMANN (1910, S. 89) zitiert sie aus „einer älteren Schrift" FRÖBELs: „Tue dies und siehe, was in dieser Beziehung aus deinem Handeln folgt und zu welcher Erkenntnis es dich führt!"

Aber wie reglementiert, wie kleinschrittig darf der Unterricht sein, ohne dass Lernende ihre persönliche Beteiligung am Prozess aufgeben, weil sie fremdgesteuert agieren müssen? Wie viel darf – anfangs nicht nachvollziehbarer Weise – vorgegeben werden, ohne dass Lernenden Sinnzusammenhänge abtrünnig werden? Diese Hemmungen und Zweifel beim Einfordern der einsichtsfördernden Handlung sind berechtigt, schließlich gelten beide Aspekte (die persönliche Beteiligung und das Lernen in Sinnzusammenhängen) als zentrale Voraussetzung für eigene Denkleistungen und Langzeiterfolg von Mathematikunterricht (Wittmann 1994) – bereits WERTHEIMER (1957; Original von 1945)[213] weist auf die unerwünschten Nebenwirkungen von zu starker Führung in Problemlöseprozessen hin, zu der auch das Einfordern bestimmter Zeichen zählen kann.

Die obigen Fragen lassen sich nicht abschließend beantworten, denn das Maß an Steuerung bleibt eine pädagogische Entscheidung, die die Lehrperson in Anbetracht aller individuellen Rahmenbedingungen am zutreffendsten fällen kann – dazu gehört auch, wie viel Offenheit im Unterricht die Lehrperson für sich selbst als bewältigbar einschätzt. Insofern kann es durchaus ratsam sein, bei ersten Versuchen zum Lernen aus Handlungen mehr steuernde Vorgaben einzusetzen als in späteren Durchgängen oder die Offenheit erst im Nachhinein zuzulassen: *Warum haben wir die Ecken eigentlich nicht anders angelegt?* Dies ließe sich zeiteffizient in entlehnten Zeichen mit einem DGS untersuchen:

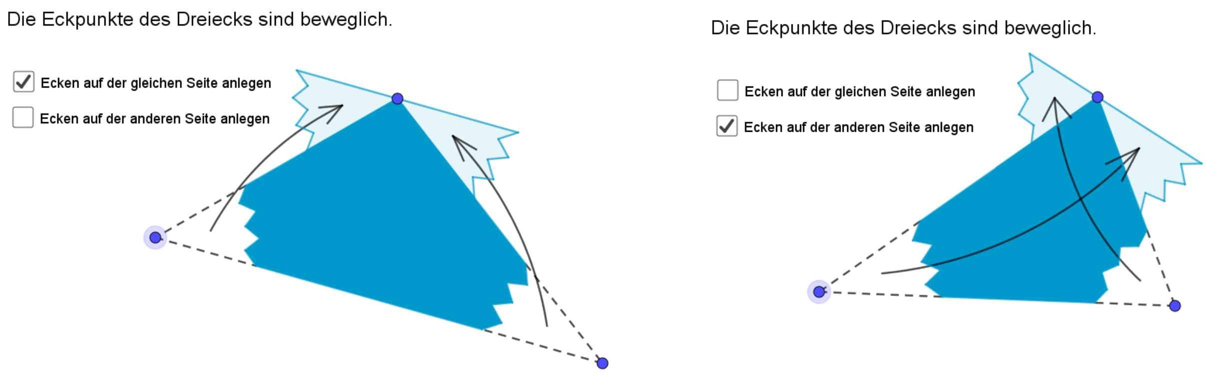


Abb. 53: Untersuchung verschiedener Handlungen in einem DGS

Wird ein größeres Maß an Offenheit bereits zu Beginn zugelassen – *Reiße zwei Ecken von deinem Dreieck ab und lege sie an die dritte. Was beobachtest du?* –

---

[213] „Ich möchte ein Problem lösen; ich fasse die Problemlage ins Auge; ich möchte sehen, wie ich den Sachverhalt klären kann, um die Lösung zu erreichen. […] Statt dessen kommt einer daher und sagt mir, ich solle diese oder jenes tun, […], Dinge, die sichtlich keine inneren Beziehungen zur Sache haben, die in einer anderen Richtung gehen, in einer aufgabenfremden Richtung. Warum gerade dies? Mir wird gesagt, „Du sollst es einfach tun"; und dann wird ein zweiter Schritt angehängt, der wieder in seiner Richtung unverstehbar ist. Die Schritte fallen vom Himmel, ihr Inhalt, ihre Richtung. Der ganze Vorgang wächst nicht sinnvoll aus den inneren Forderungen der Lage hervor, erscheint willkürlich, blind für die Grundfrage […]. Am Ende *führen* die Schritte zu einer korrekten oder sogar bewiesenen Antwort. Aber das unzweifelhafte Ergebnis kommt auf eine Weise in den Blick, die keine Einsicht, keine Klarheit gibt" (Wertheimer 1957, S. 38 f.; Hervorhebung im Original; Original von 1945).

bedürfen folgende Fragen im Vorhinein einer Klärung, die hier nur exemplarisch am Beispiel der Innenwinkelsumme angedeutet wird.

- Welches sind mögliche objekthafte Zeichen und deren Symbolgehalte?
- Wie lassen sich jene Zeichen herausfiltern, die zu Symbolen werden können?

Zur ersten Frage geben die obigen Ausführungen Aufschluss. Hinsichtlich der zweiten Frage gilt, dass die Handlungsoptionen zunächst bewusst in der Klasse reflektiert werden sollten: Wo liegen *besondere Fälle* vor, in denen stets Gleiches passiert, denen bestimmte Muster zugrunde zu liegen scheinen? Bei welcher Vorgehensweise lässt sich das Handlungsresultat auch im Vorhinein recht präzise zeichnen, ohne die Winkel messen zu müssen? Wie funktioniert das? Im Zuge dieser Untersuchungen kehrt sich der Ablauf der Handlung bereits in den Ablauf der angestrebten Argumentation um: erst die Parallelen, dann die Winkel. Durch solche gezielten Fragestellungen, für die es kein routineartiges Patentrezept gibt, kristallisieren sich unter allen Zeichen diejenigen heraus, die in gewisser Hinsicht *interessanter* oder *nützlicher* sind, ohne dass diese Auswahl vorgegeben werden muss. Diese gezielten Fragestellungen sind außerdem ein erster Prototyp für das Anregen von Verstehensprozessen, das in 4.2.4 weiter beleuchtet wird.

Die bisher behandelte Forderung – intendierte Symbolgehalte sollen Teil der potentiellen Symbolgehalte sein – ist allerdings keine hinreichende, sondern eine notwendige Bedingung für die Eignung eines Zeichens zu Lernzwecken. Abb. 50 und Abb. 52 deuten bereits an, dass das Hineinsehen der intendierten Symbolgehalte zwar möglich, aber erschwert sein kann, etwa dadurch, dass die Aufmerksamkeit auf andere Aspekte gelenkt wird. Auch diesem Unterschied ist Beachtung zu schenken, und der dritte Leitsatz für vertikale Übergänge wird dem gerecht, indem er fordert, die intendierten Symbolgehalte durch die Gestaltung der Zeichnung *bestmöglich* erschließbar zu machen. Doch was bedeutet das?

Erneut lässt sich eine Klärung durch Bezugnahme auf verwandte mathematikdidaktische Theorien anbahnen: Wenn Symbolgehalte in einem Zeichen erschließbar sind, heißt das nichts anderes, als dass das Zeichen der Person als Mittel der Erkenntnis zur Verfügung steht – und dazu müsse es PEIRCE folgend transparent sein (Hoffmann 2005). Das Zeichen wird dann nicht als Gegenstand betrachtet, „sondern als *Mittel* zur Betrachtung dessen, was durch dieses Zeichen repräsentiert werden soll“ (Hoffmann 2005, S. 36; Hervorhebung im Original). Natürlich variiert auch diese Eigenschaft intersubjektiv.

Zwei enaktive Zugänge[214] zu den Rechengesetzen der Multiplikation sollen die unterschiedliche Zugänglichkeit von Symbolgehalten bzw. die unterschiedliche Tauglichkeit von Zeichen als Mittel der Erkenntnis verdeutlichen:

---

[214] BRUNER (1974) will mit dem zweiten Zugang die Faktorenrechnung eher vertiefen und anwenden als einführen. Dennoch wird hier die Tauglichkeit beider Wege als Einführung verglichen, ohne dass BRUNER (1974) unterstellt sei, beide gleichberechtigt als solche anzusehen.

Die erste Lernaufgabe, die wir stellten, hatte damit zu tun, wie eine Menge kubischer Blöcke in verschiedener Weise in Flächenformen (in rechtwinkliger Anordnung auf dem Tisch, nur einen Kubus hoch ausgelegt) […] geordnet werden können. […] Bestimmte Anzahlen von Kuben erwiesen sich als ungeeignet für Umgruppierungen (die Primzahlen natürlich), andere dagegen ließen sich auf interessante Weise kombinieren – drei Reihen mit je drei Würfeln waren zusammen neun […].
An der Balkenwaage bestand nun die Aufgabe darin, herauszufinden, welche verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten auf der einen Seite der Balkenwaage möglich waren, um einen einzigen Ring am neunten Haken auf der anderen Seite auszubalancieren. Tatsächlich ist dies dasselbe Problem, wie wenn man fragt, auf welche verschiedenen Weisen neun Blöcke gruppiert werden können.

Bruner (1974, S. 61 f.)

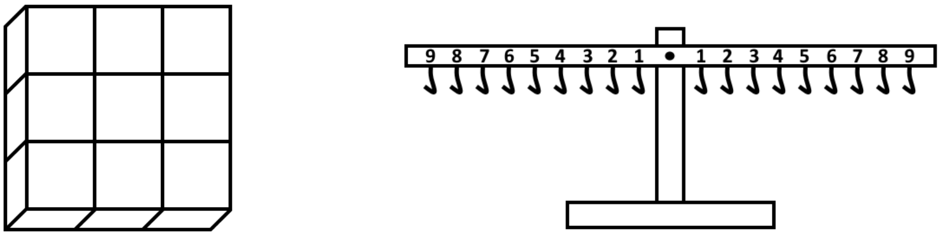


Abb. 54: Kubische Blöcke und Balkenwaage nach BRUNER (1974, S. 63 bzw. 66)

Handelt es sich tatsächlich um dasselbe Problem? Und vor allem: für wen? Immerhin könne es „isomorphe Veranschaulichungen geben, die für den Unterricht völlig ungeeignet sind. Die gewählte Veranschaulichung muß auch *vom Kinde her* gesehen werden“ (Breidenbach 1956, S. 27; Hervorhebung im Original; vgl. auch Lorenz 1993[215]). In genau diesem Sinne fordert KIRSCH (1977a, S. 89; Hervorhebung im Original) „über innermathematische Gesichtspunkte hinaus Einfühlungsvermögen, Kenntnis und Berücksichtigung von Vorwissen – insgesamt: *Sensibilität für Unterschiede* gerade dort, wo der Mathematiker ‚keinen Unterschied‘ sieht“. Diese gibt es auch bei den Einführungen der Multiplikation:

Den Rechteckflächen lassen sich zwei Informationen leicht entnehmen: die Anzahl der Reihen und die Anzahl der Blöcke innerhalb einer Reihe. Wer auf beiderlei aufmerksam geworden ist, kann mit dem objekthaften Zeichen die Multiplikation als Abkürzung einer wiederholten Addition untersuchen und dadurch Symbolgehalte erschließen – beispielsweise eine Begründung für das Kommutativgesetz: „[D]ie angestrebte Gleichheit m.n=n.m [sic] ergibt sich letztlich über die zwei verschiedenen Herstellungsarten des Rechteckschemas als

[215] „Aus mathematischer Sicht sind die unterschiedlichen Veranschaulichungsmittel inklusive der Symbolik isomorph, dies heißt aber nicht, daß sie dies auch notwendig psychologisch, im Denken der Schüler sind. Die Isomorphie zu erkennen, ist selbst eine Verstandesleistung, wie jede Grundschullehrerin weiß und beklagen kann. Denn dem Kind ist die strukturelle Gleichheit von Rechenleiste und Hundertafel [sic], von Cuisenaire-Stäben und Dienes-Blöcken so evident nicht“ (Lorenz 1993, S. 142).

eine Beziehung zwischen zwei Mustern der Aufmerksamkeitsfokussierung (bzw. der Interpunktion der Wahrnehmung): Zeilenweises und spaltenweises ‚Durchlaufen' des Rechteckschemas" (Dörfler 1988, S. 95). Die Transparenz dieser Zeichen erfordert wenig Vorwissen (vgl. Hoffmann 2005, S. 35).

An der Balkenwaage können Lernende dank der vorgegebenen Benennung der Haken passende Produkte zu aufgehängten Ringen notieren, nachdem sie dazu angeleitet wurden. Doch einer der Faktoren steht nur für den Namen des Hakens. „Die beiden Glieder der Multiplikation haben verschiedene strukturelle und funktionelle Bedeutung, und wenn das nicht gesehen wird, kann die Formel, ja die Bedeutung des Multiplizierens selbst, nicht verstanden werden" (Wertheimer 1957, S. 39; Original von 1945). Das Problem tritt beispielsweise an folgender Stelle zutage: Könnten Lernende durch vorgestellte Handlungen entscheiden, ob $3 \cdot 4$ größer als $1 \cdot 10$ ist? Nicht die Balkenwaage ist hilfreich zur Untersuchung der Multiplikation, sondern umgekehrt – als Erkenntnismittel ist sie hier daher ungeeignet, denn sie macht die intendierten Symbolgehalte unzureichend zugänglich.[216] Das ist auch BRUNER (1974, S. 62) bewusst, der die Reihenfolge der Modelle entsprechend wählt – und doch handelt es sich für Lernende eben nicht um „dasselbe Problem".

Ein ähnliches Gegensatzpaar findet sich bei Darstellungen von Zahlen im Stellenwertsystem – man vergleiche OVERBERGs (1793) Stöckchen, Bündchen, Bunde, Päckchen usw. mit einer Darstellung durch Cuisenaire-Stäbe:

> Die Zahl 1000 kann z. B. so hergestellt werden, daß auf einen Einerwürfel drei Zehnerstäbe gelegt werden, was dann dem Produkt $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ entspricht. Erfahrungsgemäß sind einschlägige Handlungssituationen kaum lernwirksam, weil die Schüler mit großen Verständnisschwierigkeiten zu kämpfen haben.
>
> Bauer (1993, S. 78)

Die Ursache der eingeschränkten Tauglichkeit von Balkenwaage und Cuisenaire-Stäben in den obigen Situationen formuliert BAUERSFELD (1983, S. 37; Hervorhebung im Original) wie folgt: „[I]hrerseits erklärungsbedürftig muß sie [die Erfahrung] als Erklärung dienen, - ein klassischer Zirkel"; „ich kann die algebraische Struktur […] hineinsehen, aber ich kann sie nicht zwingend daraus *ableiten*. […] [I]ch brauche eine Theorie, *um so sehen* zu können." Das heißt natürlich nicht, dass eine Erprobung in der Praxis in jeder Hinsicht fehlschlägt:

> Kinder und Schüler nehmen vieles hin. […] [D]er bekannte Erfolg liegt in der Erleichterung der Gewöhnung. Wenn der Schüler nur lange genug im neuen Erfahrungsbereich mit der Hilfsvorstellung operiert und Routinen ausgebildet hat, ist der Funke der Erklärungsversuche erloschen. Das dem Ansatz zu

[216] Siehe dazu bereits JOHANN FRIEDRICH HERBART (1841, S. 198; Hervorhebung im Original): „Dem Schüler, welchem die arithmetischen Begriffe noch Mühe machen, sollte man Beispiele geben, die ihm so geläufig sind, dass er *daraus* den arithmetischen Gedanken *von neuem erzeugen* kann, und nicht nöthig hat ihn *darauf* anzuwenden."

> Grunde liegende und höchst nützliche ‚metonymische Fortsetzen', das die Überschreitung der SEB-Grenzen ermöglicht, kann in dieser (Nicht-)Aufarbeitung seine konstruktive Macht nicht entfalten und wird als Eselsbrücke zur Eingewöhnung in ein Handlungsrezept mißbraucht.
>
> Bauersfeld (1983, S. 37)

All dies lässt sich nun in BREIDENBACHs (1956, S. 163) prägnante Forderung hineinlesen: „Je naiv-anschaulicher wir aber eine Einführung gestalten, um so besser ist sie."[217] Für den Leitsatz zu den vertikalen Übergängen folgt daraus, dass der intendierte Symbolgehalt in einem Zeichen desto besser erschließbar ist, je weniger ein Interpret zusätzlich wissen bzw. „hinzudenken" muss, damit das Zeichen als Mittel zur Betrachtung dessen dient, was durch es repräsentiert werden soll. Erläuternd sei an dieser Stelle eine kurze Anwendung auf den Unterrichtsgang zum Galtonbrett bei SELTER (1985) angegeben, der bereits in Unterabschnitt 4.1.2.1 analysiert wurde. Weitere Anwendungen beider Leitsätze finden sich gebündelt in Kapitel 5.

4.2.3.1 Exemplarische Anwendung

Die in Handlungen zu entdeckenden Beziehungen resultieren in der Regel „zwischen Stadien der Handlungen, die real meistens gar nicht simultan vorliegen" (Dörfler 1988, S. 82). Entlehnte Zeichen unterstützen das Entdecken der Beziehungen, weil sie diese Stadien festhalten (vgl. Abschnitt 6.2.2). Derart verhält es sich auch am Galtonbrett: Um die intendierten Symbolgehalte zu erschließen, muss zunächst die Aufmerksamkeit auf die Momente gerichtet werden, in denen die Kugel zu einer der beiden Seiten fallen kann.

SELTER (1985) geht nicht explizit auf die Gestaltung der Abbilder eines Kugellaufes ein. Er gibt jedoch ein Exemplar eines Schülers wieder (ebd., S. 11), das in seiner Pfeildarstellung der linken Seite von Abb. 55 entspricht. Zwar liegen in einem solchen Zeichen die Handlungsstadien simultan vor, ihre Identifikation ist jedoch kein Leichtes, weil sie ineinander verschwimmen. Unter Anwendung des Leitsatzes zu vertikalen Übergängen ist daher eine Pfeildarstellung wie in Abb. 55 rechts vorzuziehen.

---

[217] BREIDENBACH verwendet den Bezeichner »naiv« nicht wie die EIS-Palette, sondern in einem Alltagsverständnis: Eine Einführung soll direkt, mit möglichst wenig Vorwissen zugänglich sein. Siehe dazu z. B. NEIGENFIND (1977, S. 299; Hervorhebung im Original), dessen ausführlichere Beschreibung denselben Schwerpunkt betont: „Das zur Motivierung und Stimulierung benutzte Problem darf *nicht zum Selbstzweck* werden […]. Deshalb muß das mit Hilfe des Unterrichtsmittels aufgeworfene Problem sachlich-inhaltlich für die Schüler sofort verständlich sein, darf nicht viele zusätzliche Erklärungen erforderlich machen und muß relativ leicht sowie ohne Umwege und ‚Kunstgriffe' in das laut Lehrplan zu behandelnde mathematische Problem überführbar sein." Vgl. auch FISCHER (1913, S. 7): „Kein komplizierter Aufbau oder verwickelter Mechanismus darf sich unseren Betrachtungen störend in den Weg drängen und womöglich ebensoviel der Erklärung bedürfen wie die Tatsache oder der Vorgang, den uns das Modell erläutern soll."

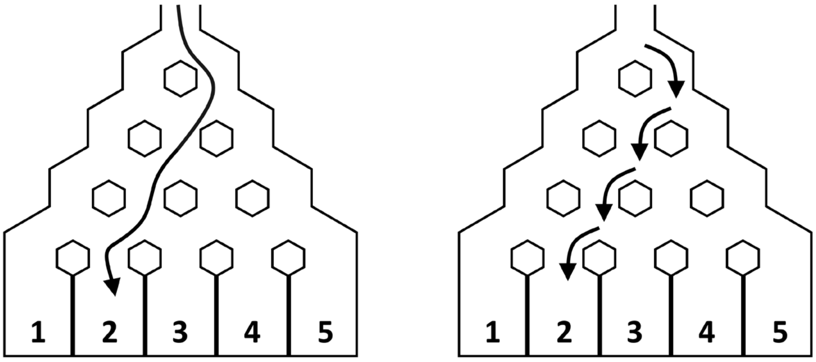


Abb. 55: Entlehntes Zeichen nach SELTER (1985, S. 11)

Diese neue Darstellung ist nicht in jeder Hinsicht von Vorteil: Problematisch ist der Übersichtsverlust, sobald mehrere Kugelläufe in einem Bild festgehalten werden. Um die Zusammengehörigkeit gewisser Einzelpfeile zu kommunizieren, könnten daher unterschiedliche Farben eingesetzt werden – solange dies nicht mit den Bezeichnungen *blau* und *rot* für seitliche Richtungen kollidiert.[218]

4.2.4 Zur Anregung vertikaler Übergänge

Bislang wurden Leitsätze formuliert, die die Voraussetzungen für Verstehensprozesse möglichst günstig gestalten sollen – hierin sieht die vorliegende Arbeit den Kern des vertieften EIS-Prinzips.

Unter Verweis auf OEHL (1965) und MEYER-DRAWE (2003) wurde zwar klargestellt, dass die Anfänge der Verstehensprozesse nicht willentlich gesetzt werden können, doch dieser Umstand soll nicht von der Aufgabe entbinden, Rahmenbedingungen theoretisch zu identifizieren und praktisch bewusst herbeizuführen, die „zu geistiger Mitarbeit“ und „zum einsichtsvollen persönlichen Nachdenken“ ermuntern (Oehl 1965, S. 29) – also den Übergang zur symbolischen Ebene anregen: „[N]icht die Tätigkeiten an sich garantieren schon eine Erarbeitung im operativen Sinne; sie müssen vielmehr durch geeignete Aufgabenstellung auf die Eigenschaften des jeweiligen Begriffs gerichtet sein“ (Fricke 1970c, S. 106; vgl. Abschnitt 6.1.2 für die Parallelen zwischen operativem Prinzip und EIS-Prinzip). Bei ausreichendem Optimismus wäre dazu kaum ein Zutun notwendig:

---

218 Als weitere Anwendung desselben Leitsatzes ließe sich der Rückschluss aus Unterabschnitt 4.2.2.2 für HEYWANGs (1923) Unterricht wiederholen:
Das kodifizierte Zeichen $3{,}14r \cdot r$ bzw. $(3{,}14 \cdot r) \cdot r$ erleichtert es, den intendierten Symbolgehalt zu erschließen (im Vergleich zu $r \cdot r \cdot 3{,}14$), weil ein Produkt aus *zwei* voneinander getrennten Faktoren gewöhnlich mit der Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks assoziiert wird, während ein Produkt aus *drei* solcher Faktoren auf eine Volumenbestimmung hindeutet.
Hiermit sei demonstriert, dass zwei unterschiedliche Forderungen – in Unterabschnitt 4.2.2.2 war es die nach verbesserter Gleichheit der Situationen; hier sollten Symbolgehalte bestmöglich erschließbar gemacht werden – zu ein und derselben Änderung führen können. Dies liegt in der Sache begründet: Eine Änderung kann mehrere Aspekte gleichzeitig verbessern (oder auch verschlechtern). Dennoch sind die Leitsätze nicht austauschbar, wie die Anwendung hier am Galtonbrett belegt: Die vorgeschlagene Anpassung der entlehnten Zeichen lässt sich nicht mit dem Ziel motivieren, die Gleichheit der Situationen zu verbessern.

> Nun, wir glauben wohl alle an einen ursprünglichen Erkenntnistrieb im Menschen, der überall in der Welt der Erscheinungen Zusammenhänge schafft und umgekehrt die ererbten oder sonstwie erworbenen Begriffe vom Weltgeschehen auf Grundanschauungen zurückführt. Dieser Trieb, mit seiner Umwelt ins Reine zu kommen, Ordnung zu schaffen, die Gesetze des Geschehens zu begreifen, der ist uns so notwendig, daß wir ohne ihn nicht leben könnten […]. Auf diesen Erkenntnis- und Lerntrieb können wir auch in der Jugend unmittelbar rechnen. Wenn wir ihrem Geiste nur immer Nahrung zu geben verständen, so könnten wir ruhig den Schulzwang und den Unterrichtszwang abschaffen; die Kinder würden schon von selbst kommen und sie würden von sich aus die Störungen im Unterricht abweisen. Das wissen wir alle aus jahrelangen, allerdings sporadisch gesäten Erfahrungen.

Fritz Gansberg (1912, S. 392)[219]

Die Wurzeln dieser Auffassung reichen bis in die „erste Mathematikstunde in der Menschlichkeitsgeschichte" zurück (Winter 2016, S. 9; Original von 1989):

> Ausdrücklich wird von Plato vorausgesetzt (und auch im „Menon" stillschweigend unterstellt), dass in den Menschen ein Streben nach wahrer Erkenntnis vorhanden ist und auch gestillt werden könne. Heute glauben wir zu wissen, dass die Lust an der Theorie, das Verlangen nach Einsicht und Durchblick (gegen alle Widerstände und unabhängig von Belohnungen externer Art) zumindest keine bare Selbstverständlichkeit ist. Vielmehr wird die Motivationsproblematik als besonders heikel eingeschätzt.

Winter (2016, S. 16; Original von 1989)

Auch WERTHEIMER (1957; Original von 1945) sieht im Menschen

> das Verlangen, die Begierde, den springenden Punkt, den strukturellen Kern, die Wurzel der Situation in den Blick zu bekommen (der Sache auf den Grund zu kommen); von einer unklaren, unangemessenen Beziehung zur Sache zu einer klaren, durchsichtigen, unmittelbaren Gegenüberstellung zu gelangen – geradewegs vom Herzen des Denkers zu dem Herzen seines Gegenstandes, seines Problems.

Wertheimer (1957, S. 221; Original von 1945)

Er betont das Possessivpronomen *seines* aber nicht umsonst zweifach: Damit das Verlangen und die Begierde Lernende packen können, müssen sie zunächst ein Problem zu ihrem eigenen gemacht haben und eine (vielleicht auch künstlich herbeigeführte) Notwendigkeit empfinden, es überhaupt zu lösen (vgl. Oehl 1962, S. 126). Die nachfolgenden Vorschläge zum Anregen vertikaler Übergänge können dazu nur einen Teilbeitrag leisten, denn das Zueigenmachen eines Problems basiert ganz wesentlich auch auf dem Lernklima, der persönlichen Beteiligung am Unterricht oder der überspringenden Begeisterung der Lehrperson (Wittmann 1994). Ähnlich wie in Unterabschnitt 4.2.2.2 ist es unmöglich, die Konkretisierung

---

[219] GANSBERGs Worte erinnern an das Konzept der Äquilibration nach PIAGET.

soweit voranzutreiben, dass ein abzuarbeitender Maßnahmenkatalog entstünde. Es lassen sich aber gewisse Typen von Arbeitsaufträgen und Maßnahmen herauskristallisieren:

- Direkte Fragen stellen

Was beobachtest du? Findest du Gemeinsamkeiten in den vorliegenden Beispielen? Warum wird es in anderen Fällen genauso sein? Warum ist das immer so?

Derartige Fragen zählen zu den Klassikern, die (nicht nur)[220] beim Lernen aus Handlungen Verstehensprozesse in Gang setzen sollen – in Unterabschnitt 2.1.2.4 trat bereits ein Prototyp auf: *Reiße zwei Ecken von deinem Dreieck ab und lege sie an die dritte. Was beobachtest du?* Das Anwendungsspektrum ist naturgemäß sehr breit. Die Formulierungen können durchaus einen Forscherdrang wecken, motivieren aber in erster Linie extrinsisch zur Mustersuche, weil diese selbst das vorgegebene Ziel ist und nicht Mittel zum Erreichen eines anderen.

- Unhandliche Aufgaben stellen

Einen enaktiven Zugang zur Bruchmultiplikation mit Hilfe der Von-Deutung stellt das Falten eines (nicht zwangsläufig) quadratischen Zettels dar, wie es Abb. 56 zeigt (vgl. z. B. Horst Hischer 2012, S. 258 ff.): Die zu multiplizierenden Anteile (hier $\frac{1}{3}$ von $\frac{2}{5}$ oder umgekehrt) wurden durch horizontale und vertikale Faltungen erzeugt und markiert. Dadurch unterteilt sich der Zettel in 15 Rechtecke, sodass der Wert des Produktes – der doppelt markierte Anteil – zwei solcher Fünfzehntel beträgt. Auch eine Bruchaddition ließe sich in Abb. 56 hineinsehen.

Abb. 56: Entlehntes Zeichen

Lernende können eine Vielzahl ähnlicher, in kodifizierten Zeichen formulierte Aufgaben lösen, indem sie sich objekthafter oder entlehnter Zeichen bedienen und das gewonnene Resultat rückübersetzen. Die anvisierten Muster bzw. „[d]ie Invarianz der konstituierten Beziehung innerhalb der unendlichen Vielfalt von Möglichkeiten der Ausführung der konkret-materiellen Handlung“ (Dörfler 1988, S. 108) müssen die Lernenden dabei *nicht unbedingt* erkennen, wie Hole (1973)

[220] Bei Breidenbach (1956, S. 254) findet sich ein entsprechendes Beispiel zu Permanenzreihen: „Wir schreiben die Aufgaben bis zum Strich an und lassen sie ausrechnen. Dann fragen wir, ob den Kindern an den Zahlen nichts auffiele.“

mit seinem Verweis auf *blindes Handeln* herausstellt: Die Nutzung des Musters ist nicht notwendig zur Lösungsfindung, weshalb ein Verbleib auf der enaktiven und ikonischen Ebene droht; womöglich ohne dass die Lehrperson darauf aufmerksam wird (vgl. Lorenz 1995, S. 11). Ein typisches Symptom sind anfängliche Erfolgserlebnisse, gefolgt von Schwierigkeiten beim Herleiten einer Rechenregel in kodifizierten Zeichen, die dann notgedrungen vorgegeben wird.[221] Welche Impulse können hier den Übergang zur symbolischen Ebene anregen?

PADBERG & WARTHA (2017, S. 91) nennen im Kontext der Addition und Subtraktion von Brüchen mehrere „Maßnahmen bzw. Hinweise" zur „effektive[n] und gezielte[n] Prävention und Intervention […] bei fehlerhaften Schülerstrategien". Eine dieser Maßnahmen ist das „*Herstellen kognitiver Konflikte* bei den Schülerinnen und Schülern durch die Wahl von Extrembeispielen", die jedoch nicht weiter konkretisiert werden (ebd., S. 92; Hervorhebung im Original). FREUDENTHAL (1973, S. 248) deutet den womöglich gemeinten, über ein Extrembeispiel induzierten kognitiven Konflikt beiläufig an: „$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ – das geht gut, auf der Zahlengeraden kann man es übrigens klar sehen. Aber wie ist es nun, wenn man das mit $\frac{127}{131}$ und $\frac{8}{47}$ machen soll?"

Derartige, besonders *unhandliche* Multiplikationen wie $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}$ oder $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{12}$ bis hin zu absurden wie $\frac{127}{131}\cdot\frac{8}{47}$ (die gerade durch ihre Absurdität eingestehen, dass nicht ihr Ergebnis, sondern ihr Lösungsweg relevant ist, vgl. Lambert 2006[222]) können – als besondere Herausforderung deklariert[223] – die Musterfindung initiieren: Weil diese Aufgaben durch naiven Umgang mit objekthaften oder entlehnten Zeichen nicht mehr (effizient) lösbar sind, wird eine geeignete Handlung vorgestellt. Vorgestellte Handlungen bedürfen jedoch der Nutzung der zugrundeliegenden Regeln: „Nicht mehr das, was vor Augen ist, ist primär entscheidend, sondern das, was durch das Denken als richtig erkannt wird. Das Denken übernimmt die

[221] In anderen Worten beschreibt auch FREUDENTHAL (1973, S. 133) dieses Verweilen auf der enaktiven Ebene, das womöglich erst beim Übergang zu kodifizierten Zeichen bemerkt wird: „Rechnen auf dem Rechenbrett ist anschauliches Handeln mit konkretem Material. Ein Mathematiker, der dem Rechner zusieht, weiß, welche Gesetze er anwendet (etwa bei der Fünfer oder Zehnerübertragung), aber der Rechner selbst braucht es nicht zu wissen. Er befindet sich auf der nullten Stufe; er kann von der wohl zur ersten aufsteigen, aber er braucht es nicht zu tun. Das ändert sich, wenn man von den Rechensteinen zu den Ziffern übergeht […]. Die Ziffern sind, jedenfalls anfänglich, nicht konkret wie die Mengen von Rechensteinchen. Man muß verstehen, was man auf dem Abakus getan hat, wenn man es ins schriftliche Rechnen übersetzen will. Man erschafft das schriftliche Rechnen auf höherer Stufe, indem man seine Regeln erkennt."

[222] LAMBERT (2006) verweist auf die lange Tradition absurder Aufgaben: Bereits LIETZMANN (1943, S. 123) lässt $1\frac{1}{2}$ Hühner in $1\frac{1}{2}$ Tagen $1\frac{1}{2}$ Eier legen und zitiert noch weitaus ältere, wertschätzende Worte über „[s]ölliche spöttliche Exempla" von STIFEL (1553, zitiert nach Lietzmann 1943, S. 1).

[223] Hiermit sei impliziert, dass es nicht viele solcher Extrembeispiele bedarf; womöglich genügt sogar ein einziges: Eine Extremaufgabe wirkt (höchstens) so lange herausfordernd, wie ihr Bewältigen ungewiss ist – und damit steht und fällt auch die Motivation, die von ihr ausgeht: „Die komplizierten Brüche und die Operationen mit ihnen sind eine Schulmeistererfindung" und beiderlei „ist, außer vielleicht beim Kürzen, im Rechenunterricht kaum zu motivieren" (Freudenthal 1973, S. 248).

Kontrollfunktion im Erfahrungsbereich, während beim konkreten Denken die Erfahrung das Denken kontrolliert“ (Oehl 1965, S. 25 f.). Auf diese Weise wird die Mustersuche in den übersichtlichen Fällen motiviert – und damit zu einem verständigen Umgang. Lernende sollten solche Aufgaben dennoch zunächst in objekthaften oder entlehnten Zeichen in Angriff nehmen dürfen – das Unterfangen mag zwar hoffnungslos erscheinen, ist es aber pädagogisch gesehen nicht: Einerseits können die Grenzen des Modells am eigenen Leib erfahren werden, andererseits sind erste reale Handlungsschritte ein guter Ausgangspunkt für vorgestellte Handlungen. Das Auffinden eines Musters kann auf diesem Wege ein eigenes Problem des Lernenden werden, weil es nicht unmittelbar verlangt wird, sondern notwendig ist zur Bewältigung der gestellten Herausforderung.

Natürlich ist die Strategie, unhandliche Aufgaben zu stellen, nicht immer anwendbar – bei der Innenwinkelsumme im Dreieck erweist sie sich etwa als wenig gewinnbringend: Wie sollte ein Papierdreieck aussehen, bei dem das (vorgestellte) Abreißen und Umsortieren nicht mehr effizient ist?

Unhandliche Aufgaben bergen noch ein ganz anderes Potential, das MALLE (1993, S. 66 f.) expliziert. Es steht zwar hier nicht im Fokus, soll aber dennoch erwähnt werden, nachdem in Unterabschnitt 4.2.2.2 der Einfluss motivationaler Faktoren bei horizontalen Übergängen angedeutet wurde: Notwendigkeit und Sinn einer neuen Zeichenart (insbesondere formal-algebraischer Zeichen als Prototyp kodifizierter Zeichen) sollten von Lernenden nachempfunden werden können – ganz in diesem Sinne rät BRANFORD (1913, S. 70, vgl. auch Kühnel 1954, S. 150 f.; Original von 1916): „Gib keine Abkürzungen, ehe nicht die Schüler fühlen, daß darin eine Zeitersparnis steckt, ehe sie nicht des Gebrauchs der alten Bezeichnungsweise überdrüssig sind.“ Dieser Moment kann im Unterricht durch unhandliche Aufgaben herbeigeführt werden, wie Abb. 57 am Beispiel einer Gleichung andeutet und MALLE (1993, S. 66 f.) anhand von Säckchen und Kugeln im Kontext von Zahlenrätseln erläutert. Auch hier gilt: Lernende sollten solche Aufgaben trotz aller Unhandlichkeit in objekthaften und entlehnten Zeichen in Angriff nehmen dürfen, um die Wertschätzung einer effizienteren Notation ausbilden zu können.

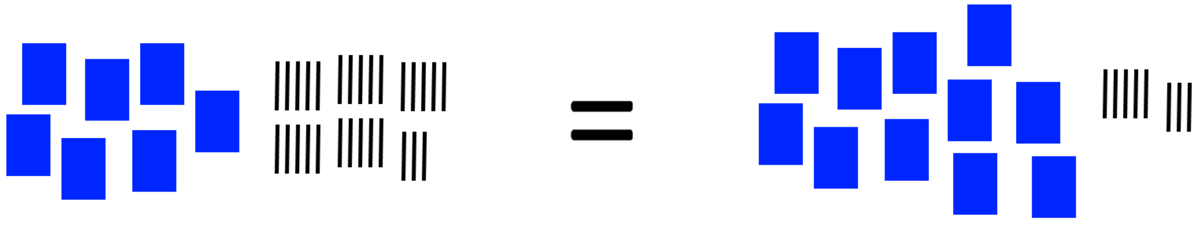


Abb. 57: Beispiel einer Darstellung, die kodifizierte Zeichen motiviert

HOLE (1973, S. 41) nennt zwei weitere mögliche Auswege, um das oben beschriebene *blinde Handeln* zu vermeiden – sie bilden die folgenden beiden Unterpunkte:

> Um ein „blindes Handeln" auszuschalten, kann man auf zweifache Weise vorgehen: man läßt den Schüler nach der Handlung berichten, was er eigentlich getan hat, oder – was reizvoller und zugleich intensiver ist – man läßt den Schüler vor der Handlung vermuten, was wohl das Ergebnis der Handlung sein wird.
>
> Hole (1973, S. 41)

- Handlungsergebnisse im Vorhinein (begründet) vermuten lassen

Ein dritter Aufgabentyp, der den Übergang auf die symbolische Ebene anregen kann, ist das begründete Aufstellen einer Vermutung *vor* der tatsächlichen Lösung in objekthaften Zeichen. HOLE (1973) berichtet diesbezüglich von einem Unterrichtsversuch[224] zur Einführung des Ternärsystems:

> Trotz der vielfachen, ausgeführten Handlungen waren viele Kinder anschließend nicht in der Lage, ohne Handlungen, allein aus der Vorstellung heraus, entsprechende Aufgabenstellungen (Übersetzungen zwischen dem Zehner- und Dreiersystem) zu bewältigen. Ein wesentlicher Grund für das Versagen muß darin gesehen werden, daß die Kinder in den ersten 10 Minuten zu keinem Augenblick genötigt waren, sich die Situation vor Handlungsbeginn vorzustellen. Zwar nicht vom ersten Male an, jedoch bereits nach den ersten effektiv ausgeführten Handlungen hätten die Kinder anhand einer vorgegebenen Kistenmenge und später auch Kistenzahl die Handlungen im Kopf vorausdenken müssen.
>
> Hole (1973, S. 42)

Auch bei OEHL (1965, S. 45) und AEBLI (1983, S. 200) findet sich dieser Ansatz wieder. Ein Prototyp kam außerdem in 4.2.3 bereits zum Einsatz, als nach einer Zeichnung des Handlungsresultats *im Vorhinein* gefragt war – ohne dass dabei ein Winkel gemessen werden sollte. Ähnlich wie im vorherigen Unterpunkt machen sich Lernende das Aufspüren der intendierten Symbolgehalte zum *eigenen* Problem, weil darin der Schlüssel zur Lösung der explizit gestellten Aufgabe liegt.

---

[224] An besagtem Unterrichtsversuch lassen sich die Elemente der EIS-Palette ein weiteres Mal erläutern: In der künstlich geschaffenen Umwelt stehen drei Fahrzeuge zur Verfügung, um eine gewisse Anzahl an Kisten (im Dezimalsystem gezählt) zu transportieren: Ein Lastwagen (Ladungsfläche für neun Kisten), ein Lieferwagen (Ladungsfläche für drei Kisten) und ein Unimog (Ladungsfläche für eine Kiste). Als Kisten legen die Lernenden dabei 2x2 große Legosteine in Pappschachteln der entsprechenden Größe, die als Fahrzeuge dienen. Ein Fahrer soll aus Kostengründen nur mit voll beladenen Fahrzeugen einen Umzug vornehmen und dabei so wenige Fahrten wie möglich absolvieren.
Die Legosteine und Pappschachteln sind objekthafte Zeichen, gezeichnete Abbilder eines Umzugs wären entlehnte Zeichen. Indem alle Fahrten zusätzlich in einem tabellarisch angelegten Fahrtenprotokoll festgehalten werden, entstehen Mischzeichen aus entlehnten und kodifizierten Zeichen, ganz ähnlich wie im Eingangsbeispiel von BRANFORD (1913) – analog würde hier also auch der Übergang zu den kodifizierten Zeichen durch Auswischen der Tabellenlinien gelingen. Die von HOLE (1973, S. 42) beschriebenen Lernenden, die nach dem Unterrichtsgang nicht in der Lage waren, zwischen Dezimal- und Ternärsystem zu wechseln, gingen bis zuletzt naiv mit all diesen Zeichen um, sodass sie sich auf der enaktiven oder ikonischen Ebene befanden. Erst das Erkennen der (von HOLE nicht explizit genannten) intendierten Symbolgehalte, die zum Wechsel zwischen den Systemen befähigen, würden aus den Zeichen Symbole wachsen lassen.

- Während bzw. nach[225] der Handlung berichten lassen, was getan wird

Sowohl *während* als auch *nach* einer effektiven Handlung kann die Sprache das Denken bereichern sowie anregen und umgekehrt (vgl. Unterkapitel 3.6). Dennoch sind beide Zeitpunkte nicht gleichzusetzen: *Während* einer effektiven Handlung stützen sich Beschreibungen auf zeitgleich ablaufende Prozesse, sodass die Herausforderung primär im Ausformulieren des unmittelbar Sichtbaren liegt und der positive Effekt auf Denkprozesse auf den beschriebenen Zusammenhang zur Sprache zurückzuführen ist. *Nach* einer effektiven Handlung beschreiben Lernende eine mentale oder reale Repräsentation dieser bzw. werden indirekt dazu aufgefordert, die Handlung in ihrer Vorstellung zu wiederholen. Hierbei können die zu entdeckenden Muster genutzt werden, wenn die Erinnerung keine ausreichende Stütze bildet – auch auf diese Weise wird das Aufsuchen von Mustern angeregt.

Aus der Relevanz des Sprechens für die vertikalen Übergänge auf der EIS-Palette resultiert die Notwendigkeit einer Verzahnung mit weiteren Bausteinen der Mathematikdidaktik, die den Aspekt des Spracheinsatzes, dessen Rahmenbedingungen, Voraussetzungen und Bestandteile näher beleuchten: Zunächst unterscheiden WESSEL, BÜCHTER & PREDIGER (2018) unter Verweis aus HELMUTH FEILKE (2012) zwischen Alltagssprache, Bildungssprache und Fachsprache:

> Die Alltagssprache wird etwa beim täglichen Umgang miteinander, beim Spiel oder beim Einkaufen verwendet. Sie erfordert einfachere Sprachmittel als die weiter elaborierte Unterrichtssprache, die die fachübergreifende Bildungssprache und die spezifische Fachsprache umfasst. Bildungssprache wird – grob gesprochen – immer dann benötigt, wenn verallgemeinernd über abstrakte Zusammenhänge kommuniziert wird […].
>
> Wessel, Büchter & Prediger (2018, S. 4)

Der Einsatz der Sprache zur Anregung von vertikalen Übergängen auf der EIS-Palette bedarf also eines bedeutungsbezogenen Sprachschatzes (z. B. *Anteile im Ganzen* oder *feiner einteilen*), der allerdings oftmals fälschlicherweise der Alltagssprache der Lernenden zugeschrieben wird. Anders als formalbezogene Sprachmittel (z. B. *Zähler, Nenner* oder *erweitern*), die klar der Unterrichtssprache zuzuordnen sind, wird der bedeutungsbezogene Sprachschatz im Mathematikunterricht zumeist nicht ausreichend thematisiert, obwohl auch er einen eigenen Lerngegenstand bilden könnte. Infolgedessen bleiben heterogene sprachliche Lernvoraussetzungen bestehen, die die Mathematikleistungen beeinflussen (vgl. Prediger, Nadine Wilhelm, Büchter, Erkan Gürsoy & Claudia Benholz 2015).[226]

---

[225] Verwandte Ansätze stellen die Lerntagebücher nach RUF & GALLIN (2005) sowie die Aufgaben zur Wissensreflexion nach JOHANN SJUTS (2001) dar.

[226] Es sei sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf diese spärlichen Hinweise beschränkt, die lediglich zum Ausdruck bringen sollen, dass *das EIS-Prinzip allein* das Lernen aus Handlungen in der Unterrichtspraxis nicht vollumfänglich beraten kann, sondern in einzelnen Forderungen immer wieder auf das Heranziehen weiterer mathematikdidaktischer Theorien angewiesen ist.

5 Beispiele zur Anwendung der Leitsätze

In Kapitel 4 wurden die Leitsätze an bestehenden Vorschlägen aus der mathematikdidaktischen Literatur erläutert. Auch auf diese Weise – also bei der „ökonomische[n] Erklärung und Beschreibung spezieller didaktischer Maßnahmen“ (Wittmann 1975, S. 231) – kann ein didaktisches Prinzip von seiner Nützlichkeit überzeugen. Das vertiefte EIS-Prinzip soll sich jedoch in mehrerlei Hinsicht als viabel erweisen und daher weiterhin „eine didaktische Anreicherung von Unterrichtsvorlagen anregen“ (Wittmann 1975, S. 232). Diesem Vorhaben widmen sich Unterkapitel 5.1 und 5.2 an den unten aufgelisteten Beispielen. Dabei fokussiert Unterkapitel 5.1 vorrangig[227] die Umsetzung des Leitsatzes für vertikale Übergänge (Abschnitt 4.2.3) sowie das Verwenden aller Zeichenarten (Abschnitt 4.2.1), während Unterkapitel 5.2 Anwendungen des Leitsatzes für horizontale Übergänge auf der EIS-Palette (Abschnitt 4.2.2) diskutiert.

- Runden (5.1.1)
- Lineare Gleichungen (5.1.2)
- Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen (5.1.3)
- Zum Steigungsbegriff bei linearen Funktionen (5.1.4)
- Zum Einsatz des Prozentbandes (5.1.5)
- Satz des Thales (5.1.6)
- Hypothesentests (5.1.7)
- Mehrstufige Zufallsexperimente am Galtonbrett (5.2.1)
- Füllgraphen bei portionsweisem Einfüllen (5.2.2)
- Baumdiagramme (5.2.3)

5.1 Beispiele zur Anwendung des Leitsatzes für vertikale Übergänge

5.1.1 Runden

In Abschnitt 3.6.1 wurde darauf hingewiesen, dass die Auswahl intendierter Symbolgehalte der Lehrperson obliegt. Damit geht einher, dass allein die Nutzung des EIS-Prinzips noch keinen verständnis- und vorstellungsbasierten Unterricht garantiert. Der Lerninhalt *Runden* stellt eine gute Gelegenheit dar, dies zu explizieren und anschließend das vertiefte EIS-Prinzip auf einige intendierte Symbolgehalte anzuwenden.

PADBERG & WARTHA (2017, S. 169) sehen im Runden eine vorwiegend technische Voraussetzung für das Schätzen, nennen die altbekannten Rundungsregeln und erwähnen die Möglichkeit einer anschaulichen Begründung eher am Rande. Damit geben sie bezüglich des Rundens die konsensuelle Schwerpunktsetzung der meisten Schulbücher wieder: Intendierte Symbolgehalte umfassen in erster Linie

[227] Diese Einteilung ist nicht gänzlich trennscharf. So werden beispielsweise die Abschnitte 5.1.3 und 5.1.4 auch Hinweise aufgreifen, die dem Leitsatz für horizontale Übergänge entspringen.

die fehlerfreie Anwendung und präzise Formulierung der vorgegebenen Rundungsregeln in unterschiedlichen Kontexten – meist lediglich „auf Zehner, Hunderter, Tausender etc.“ (Matthias Römer 2016, S. 19). Dies gelinge auch ohne zusätzliche didaktische Maßnahmen „relativ schnell und sicher“ – „es müssen dafür keine allzu großen kognitiven Anstrengungen eingebracht werden“ (Susanne Bobrowski 1990, S. 15). In Anbetracht dessen erscheint es fraglich, ob die Anwendung des EIS-Prinzip hier überhaupt nötig ist.

Die Auseinandersetzung mit dem Runden dürfe sich jedoch nicht auf das Obige beschränken, weil sonst „formal verengten Vorstellungen vom Runden“ Vorschub geleistet und „die Breite der Rundungsidee“ beschnitten werde (Jürgen Blankenagel 1999, S. 11) – „der Blick für den wahren Sinn des Rundens und dessen mathematischen Charakter“ wird verstellt (Römer 2016, S. 19). Gerundet werde nämlich in vielfältigen Situationen der außerschulischen Lebenswelt (z. B. bei Bewertungen im Sport) und der Mathematik (z. B. lokales Linearisieren einer nichtlinearen Funktion); und das nicht immer gemäß den formalen Vorschriften (Blankenagel 1999 bzw. Römer 2016): Bei einem Restaurantbesuch wird der Rechnungsbetrag – falls er gerundet wird – nie ab-, sondern in Abhängigkeit von gewissen Faktoren aufgerundet. Umgekehrt wird laut Abgabenordnung „der zu verzinsende Betrag jeder Steuerart auf den nächsten durch 50 Euro teilbaren Betrag abgerundet“, aber nie aufgerundet (§ 238 Absatz 2 AO). Ein weiteres Beispiel liefern Durchschnittsnoten: Die Rahmenprüfungsordnung der Universität des Saarlandes schreibt vor, die errechnete Gesamtnote auf eine Stelle nach dem Komma abzurunden. Anschließend wird sie zur Angabe im Zeugnis und in der Urkunde kategorisiert, wobei alle Noten bis einschließlich 1,5 in die Kategorie *sehr gut* fallen (BMRPO, Artikel 24 Absatz 3 und 5). Auch im Mathematikunterricht selbst lohne es sich zuweilen, die Rundungsregeln zu brechen – etwa dann, wenn beim überschlagenden Multiplizieren alle Multiplikanden aufgerundet werden müssten sowie bei der überschlagenden Division:

> Bei dem Runden des Dividenden spielt die bekannte Regel überhaupt keine Rolle […]. Das Runden des Dividenden erfolgt dagegen einzig und allein unter dem Gesichtspunkt der „passenden“ Einmaleinszahl. Es wird die nächstgelegene „passende“ (zu dem gerundeten Divisor passend) Einmaleinszahl gesucht […].
>
> Oehl (1965, S. 90 f.)

Ähnlich verhält es sich beim Abschätzen von $\sqrt{51}$, wo eine Veränderung des Radikanden „die Rechnung im Kopf ausführbar“ machen soll – deshalb sollte 51 nicht auf 50, sondern auf 49 gerundet werden (Blankenagel 1999, S. 11).[228]

[228] Das Runden eines Radikanden ist ein Sonderfall, weil die Mitte zwischen zwei Rundungszielen nicht dem arithmetischen Mittel entspricht – es muss ein anderer Mittenbegriff gebildet werden (vgl. Hischer 2004). Die Reflexion dieses Umstandes wird hier durch die Nähe zu einem Rundungsziel vermieden, wodurch Fehlvorstellungen entstehen bzw. fortbestehen können.

Die Rundungsregel sei damit „eine gute Vereinfachungsvorschrift, weil sie den Fehler gering hält", es müsse „jedoch bei jeder Anwendung eigentlich überlegt werden, ob nicht im gerade vorliegenden Fall eine Modifikation der Regel eine ‚angemessenere' Vereinfachung bringt" (ebd., S. 11). Dafür sei es unerlässlich, „Runden nicht als reine Technik" zu behandeln (Blankenagel 1983, S. 282). Dass dies jedoch oft geschieht, lassen nicht nur die bereits erwähnten Einführungen in Schulbüchern vermuten, sondern u. a. auch die Untersuchung von HAROLD L. SCHOEN, GLENDON BLUME & ERIC HART (1987) mit Fünft- bis Achtklässlern – siehe auch SABRINA HUNKE (2012, S. 69 ff.), die diesbezüglich weitere Studien zitiert.

Als Gegenentwurf dazu setzen z. B. WERNER BREUER et al. (1983, S. 82) neben die Anwendung der Regeln das inhaltliche Verständnis als Schwerpunkt, durch das sich Lernende die Rundungsregeln selbst erarbeiten sollen. Sie streben somit das Aufdecken von Zusammenhängen und grundlegenden Ideen an, die einerseits Rundungsregeln begründen und dadurch der Gewöhnung an deren unreflektierten Gebrauch vorbeugen und andererseits mehr als nur das Runden auf Vielfache von 1, 10, 100, usw. ermöglichen. Was aber umfasst das inhaltliche Verständnis? Oder im Sprachgebrauch des vertieften EIS-Prinzips gefragt: Was sind die hier intendierten Symbolgehalte? Die folgenden beiden Aspekte lassen sich aus BLANKENAGELs (1999, S. 11) soeben zitierter Beschreibung des Rundens als „Vereinfachungsvorschrift", die „den Fehler gering hält", herausschälen:

- Beim Runden einer Zahl soll diese durch eine zweite ersetzt werden, die „leichter handhabbar" ist (Lorenz 2005, S. 44). Sinnvolle Rundungsziele entspringen dem Kontext und müssen im Vorhinein festgelegt werden.
- Durch das Runden entsteht meistens ein Fehler, der so klein wie möglich gehalten werden soll. Dazu muss das nächstgelegene Rundungsziel ausgewählt werden (vgl. Oehl 1965, S. 90 f.).

Für die Erschließung *dieser* Symbolgehalte birgt die Anwendung des EIS-Prinzips durchaus Potentiale: Es schärft unmittelbar den Blick dafür, dass Lernenden üblicherweise nicht die gesamte Bandbreite an Zeichenarten zur Verfügung steht: So heißt es etwa bei BREUER et al. (1983, S. 84) zunächst: „Wenn wir Regeln für das Runden finden, Rundungsregeln, können wir nächstgelegene Vielfache schnell und leicht angeben und müssen nicht erst durch Rechnen die Richtigkeit beweisen". Der Weg zu diesem Ziel lautet jedoch schlicht: „Schüler *betrachten* das LB-Bild 12 unter der gegebenen Zielstellung" (ebd., S. 84; Hervorhebung J. L.)[229]. Genauso verweisen PADBERG & WARTHA (2017, S. 270) als anschauliche Begründung der Rechenregeln nur auf eine graphische Darstellung, wie man sie laut BLANKENAGEL (1983, S. 282) „in den Schulbüchern vielfach in der Nähe der Rundungsvorschrift" antreffe. HENDRIK RADATZ & WILHELM SCHIPPER (1983,

[229] Die Abkürzung *LB-Bild* steht für *Lehrbuch-Bild* und verweist auf MANFRED DENNERT, GÜNTHER LORENZ, WERNER TIETZ & ARTUR WOLF (1982, S. 58). Dort sind die natürlichen Zahlen von 420 bis 430 auf einem Zahlenstrahl dargestellt, wobei anhand von zwei Pfeilen die auf 420 bzw. auf 430 zu rundenden Zahlen ersichtlich sind.

S. 99) stoßen in das gleiche Horn: „Am Zahlenstrahl ist zu erkennen, welche Nachbarzehner, -hunderter die Zahl hat, welche Zehner- oder Hunderterzahl ihr am nächsten liegt. Daraus kann dann (mit der Sonderregel für 5) das Runden von Zahlen abgeleitet werden".

Die Anwendung des EIS-Prinzips hat somit die Forderung nach objekthaften Zeichen zur Folge, die die intendierten Symbolgehalte zugänglich machen. Dazu wird das Runden mit einem Apparat situiert, dessen Funktionsweise Lernende untersuchen, um schließlich auch ohne ihn runden zu können – er soll die unverzichtbaren „Bezüge zum Alltag" daher nicht ersetzen, sondern ergänzen (Römer 2016, S. 19):

Auf einer Pinnwand ist eine laminierte Skala angebracht, die einen passenden Bereich um die zu rundende Zahl abdecken soll. Dementsprechend ist sie zu beschriften, wobei erste Versuche später überarbeitet werden können. Über der Skala spannt sich eine elastische Schnur (oder eine starre, die an beiden Enden durch herabhängende Gewichte gespannt wird). Als Darstellung der zu rundenden Zahl ist eine einzelne Perle aufgezogen und passend positioniert (Abb. 58).

Abb. 58: Ausgangskonfiguration: Gespannte Schnur mit aufgezogener Perle noch ohne Pinnadeln

Im ersten Schritt sollen alle möglichen Rundungsziele (z. B. Vielfache von 10 oder 5 oder 2) herausgehoben werden, die auf der Zahlengeraden abgebildet sind – hier findet also eine Selektion anhand des Kontextes statt. Zur Markierung der Rundungsziele stechen Lernende oberhalb der gespannten Schnur Pinnadeln ein. Dieses gezielte Einstechen ist eine notwendige Voraussetzung für die nun vorgesehene Handlung, die den Rundungsprozess situiert: Wenn die Schnur mittig zwischen zwei Rundungszielen nach oben gezogen wird, rutscht die Perle zu der Zahl, auf die zu runden ist:

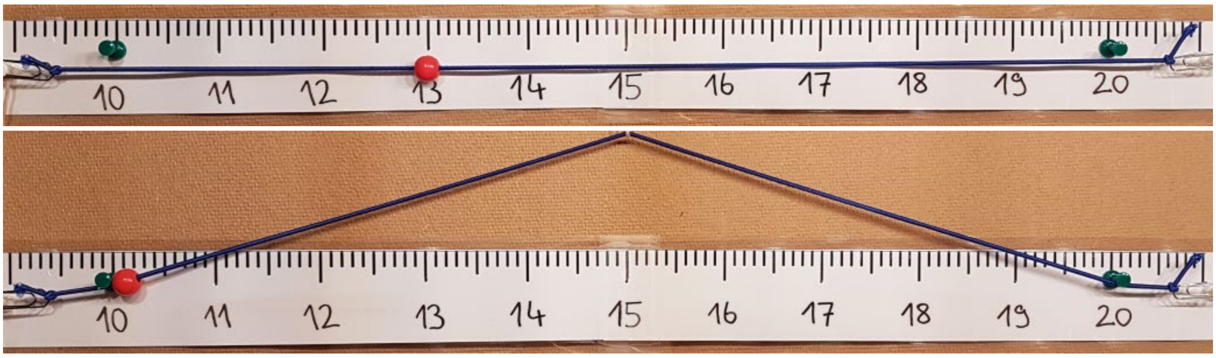


Abb. 59: Runden von 13 auf Vielfache von 10 nach Situieren der Rundungsziele

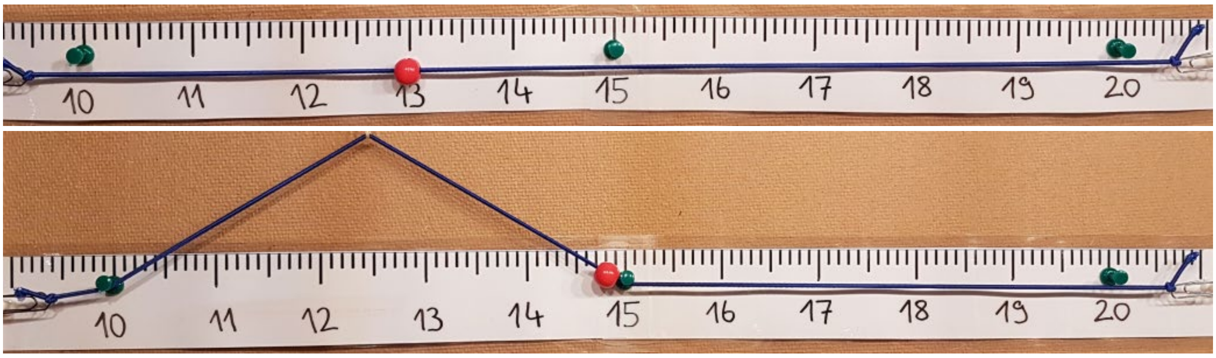


Abb. 60: Runden von 13 auf Vielfache von 5

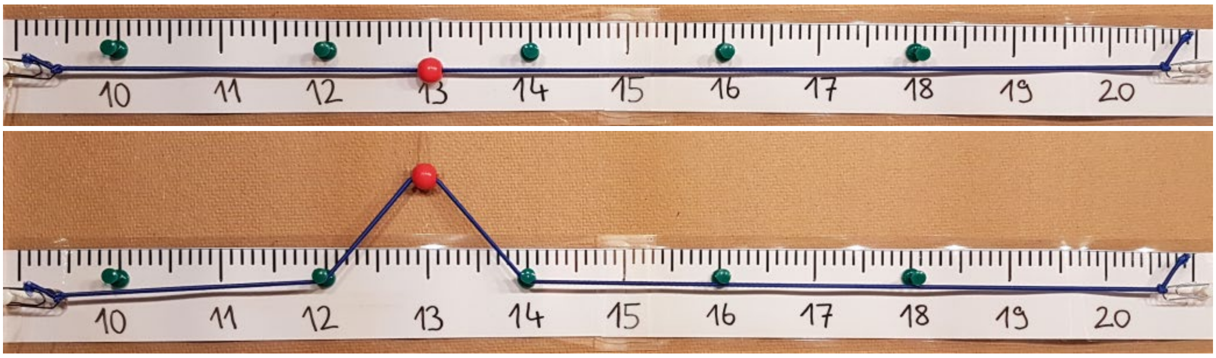


Abb. 61: Runden von 13 auf eine gerade Zahl – labiles Gleichgewicht

Natürlich ist diese Handlung nicht dauerhaft als Werkzeug zur Bestimmung der gerundeten Zahl vorgesehen, sondern dient unter Zuhilfenahme impulsgebender Fragen (s. u.) als Anlass zu weiteren Überlegungen, die in Anlehnung an Bender & Schreiber (1985, S. 261) das Bewusstsein vom Sinn dieser Handlung hinzutreten lassen sollen, bevor dann die Rundungsregeln erarbeitet werden:

(1) Warum werden die Rundungsziele mit Pinnnadeln markiert?

Offenkundig setzt das Hochziehen der Schnur nur dann einen zielführenden Prozess in Gang, wenn Pinnadeln die Schnur fixieren. Bevor also mit der Apparatur die gerundete Zahl bestimmt werden kann, muss ihr „mitgeteilt" werden, welche Zahlen Rundungsziele sind. Dieser Mechanismus wird beim späteren Runden beibehalten: Bevor eine unhandliche Zahl durch eine handlichere ersetzt werden kann, muss eine Festlegung darüber getroffen werden, welche Zahlen dafür in Frage kommen.

(2) Wie lässt sich im Vorhinein entscheiden, zu welchem Rundungsziel eine Perle rutschen wird?

Da die Schnur stets mittig zwischen den beiden benachbarten Rundungszielen nach oben gezogen wird, entscheiden die Abstände zu diesen: Befindet sich die Perle links von der Mitte, also näher am kleineren Rundungsziel, wird sie zu diesem rutschen und vice versa. Wer auf die Auswahl des näheren Rundungsziels aufmerksam geworden ist, kann das Hochziehen durch ein Schieben der Perle ersetzen. Die Pfeilbilder, auf die Padberg & Wartha (2017) verweisen, sind dann entlehnte Zeichen als Abbilder dieser Handlung.

(3) Wie lässt sich der Gebrauch der Apparatur optimieren?

Das Hochziehen der Schnur benötigt zur Fixierung nicht alle Pinnadeln, sondern nur die beiden direkten Nachbarn der zu rundenden Zahl. Es genügt also beim Runden, lediglich diese aufzusuchen.

(4) Warum ist es sinnvoll, mittig an der Schnur zu ziehen – bzw. warum ist es sinnvoll, Zahlen auf diese Weise zu runden?

Würde die Schnur an einer anderen Stelle nach oben gezogen, entstünden größere Abweichungen beim Runden. Das mittige Ziehen hält also den Fehler gering: Die größtmögliche Abweichung ist der halbe Abstand zwischen den beiden nächstgelegenen Rundungszielen.

(5) Was passiert, wenn sich die zu rundende Zahl genau in der Mitte zwischen zwei Rundungszielen befindet?

Die Perle würde auf der Spitze der nach oben gezogenen Schnur verweilen, ohne jemals von selbst in eine der beiden Richtungen zu fallen – die Abstände nach links und rechts (also die drohenden Fehler beim Runden) sind gleichgroß. Es liegt daher am Benutzer der Apparatur, sie in eine Richtung zu bugsieren – üblicherweise richtet man sich dabei „nach einer international gültigen Festsetzung", indem die Zahl in dieser Situation nach rechts geschoben wird (Breidenbach 1956, S. 204)[230] – alternativlos ist dies selbstverständlich nicht.[231]

Für das Herausarbeiten der gängigen Rundungsregeln beim Runden auf Vielfache von 1, 10, 100 usw. lässt sich an BREUER et al. (1983, S. 84) anknüpfen:

(6) „Kann man es den Ziffern ‚ansehen', ob sie auf- oder abgerundet werden? Wie verändern sich die Zahlen, wenn sie auf- bzw. abgerundet werden? Wenn wir das herausfinden, müssen wir nicht mehr in jedem Einzelfall überlegen oder gar rechnen!" Oder anders gefragt: Kann man es den Ziffern einer Zahl „ansehen", ob sie nach links oder nach rechts rutschen wird?

BREUER et al. (1983) arbeiten anfangs mit den natürlichen Zahlen von 421 bis 429, die auf Vielfache von 10 zu runden sind. Anschließend übertragen Lernende die erkannten Regeln auf Vielfache von 100, 1000 usw., indem einige Zahlen zwischen

[230] Der Fehlerminimierung wäre das Schieben nach links ebenso dienlich. Aber durch das Schieben nach rechts wird es möglich, die Rundungsregel allein auf die erste Dezimalzahlstelle nach der Rundungsstelle zu beziehen, weil z. B. beim Runden auf natürliche Zahlen sowohl 3,5 als auch 3,51 aufgerundet werden. Aus der getroffenen Festlegung folgt, dass beim Runden auf Vielfache von 1, 10, 100 usw. bei 5 aufgerundet wird – es muss keine Fallunterscheidung getroffen werden, ob noch weitere Dezimalstellen ungleich Null folgen oder nicht.

[231] In den *Technischen Normen, Gütevorschriften und Lieferbedingungen* (TGL 1962) findet sich der DDR-Standard für das Runden von Zahlen, der den systematischen Fehler durch stetes Aufrunden der genau mittigen Zahl beheben soll: „Folgt vor dem Runden auf die letzte Stelle, die noch angegeben werden soll, eine *genaue* 5 (das ist eine 5, hinter der nur Nullen folgen), so wäre an sich die Abrundung ebenso berechtigt wie die Aufrundung. Muß jedoch mit der *gerundeten* Zahl weitergerechnet werden, dann wird so gerundet, daß die letzte Stelle zu einer geraden Zahl wird; das heißt, daß sie unverändert bleibt, wenn sie schon gerade ist, dagegen um 1 erhöht wird, wenn sie ungerade war (‚Gerade-zahl-Regel')" (TGL 0-1333 1962, S. 2).

1701 und 1799 auf Vielfache von 100 gerundet werden. Dabei beschränken sie sich bewusst auf eine prototypische Begriffsbildung und verzichten auf eine logische.[232]

Abschließend sei ein kritischer Gedanke ernstgenommen, der sich hier vielleicht stärker aufdrängt als in den restlichen Beispielen: Wozu das alles? Sind Bilder nicht bereits ausreichend anschaulich und fällt das richtige Runden Lernenden mit etwas Übung der Regeln nicht ohnehin leicht? Werden Lernende bei diesem Vorgehen wirklich bessere Ergebnisse in der nächsten Klassenarbeit erzielen?

Zunächst findet das Runden dank der Situierung in der Lebenswelt der Lernenden statt. In einer erlebten Wirklichkeit wird es *allen* Lernenden einer naiven Durchführung bzw. Beobachtung zugänglich, die kaum Vorwissen erfordert und dennoch Zusammenhänge erfahrbar macht. Außerdem wird ein Anker im Realen geschaffen, durch den sie die Zusammenhänge und darüber vermittelt auch die Rundungsregeln leichter reproduzieren (vgl. Büchter & Haug 2013 und Ganter 2013, siehe auch Unterabschnitt 6.2.1.1). Die vertraute Wirklichkeit kann schließlich schrittweise erweitert werden, sodass die sonst einer eher fremden Welt zugehörigen Pfeilbilder an eine selbst ausgeführte Handlung anknüpfen und an Bedeutung gewinnen. Eine bessere Rundungstechnik garantiert all dies dennoch nicht – aber das soll nicht ausschlaggebend[233] sein:

> Auch bei den kleinsten Maßnahmen muß das Kind erkennen, warum die Maßnahmen zweckmäßig und notwendig sind. […] Man achte solche Dinge nicht für „Kleinigkeiten“. Nur wenn wir alle Gelegenheiten ausnützen, das Kind immer wieder vor das „Warum“ zu stellen, haben wir Aussicht, es vor gedankenlosem, mechanischem Tun und von den nachteiligen Wirkungen des Autoritätsglaubens […] zu bewahren. Das Addieren oder Subtrahieren [oder Runden] an sich wird nicht besser oder schlechter […]. Aber die gesamtgeistige Verhaltensweise des so leicht formbaren kindlichen Geistes wird durch den Stil der unterrichtlichen Einwirkung, die sich aus unzählig vielen kleinen und kleinsten Maßnahmen zusammensetzt, entscheidend geprägt, und darum geht es hier. Wer als Lehrer immer nur das stoffliche Ziel an sich, die Fertigkeit, die Beherrschung einer Technik sieht, wird notwendigerweise seine Kinder nicht vor einer unguten Mechanisierung bewahren können.
>
> Oehl (1962, S. 29)

[232] „Die Schüler erkennen, daß alle Grundziffern nach den Vielfachen von 100 durch Nullen ersetzt werden und daß nicht mehr die letzte Grundziffer […], sondern die Grundziffer nach den Vielfachen von 100 entscheidend ist. Am Beispiel 1701 ≈ 1700 wird gezeigt, daß auch bei Null abgerundet wird. […] Es wird nicht empfohlen, die Regeln neu oder umfassender zu formulieren. Die Schüler prägen sich das Vorgehen vielmehr an mehreren Beispielen ein, wobei in einem Kommentar das Auf- bzw. Abrunden begründet wird“ (Breuer et al. 1983, S. 85).

[233] Siehe auch Breidenbach (1956): „Es wird niemand mehr seine Methode mit dem ‚Erfolg‘ begründen wollen! Der momentane Erfolg ist bei einem halbwegs geschickten Lehrer immer groß! Aber wie kurzlebig ist er! Liegt etwas nur 14 Tage zurück, sitzt die halbe Klasse hilflos vor Aufgaben, die vorher jeder in der Klasse prächtig konnte! Diese Erfahrung ist doch nun wirklich alt genug“ (ebd., S. 43) – vgl. Heywang (1923, S. 165).

5.1.2 Lineare[234] Gleichungen

Das Waagemodell und das Boxenmodell sind zwei handlungsorientierte Zugänge zu linearen Gleichungen, die sowohl Theorie als auch Praxis besonders prägen.[235] Zunächst werden beide kurz charakterisiert:

> Beim Waagemodell wird das äquivalente Umformen handelnd erfahrbar bzw. bildlich veranschaulicht. Die Seiten der Gleichung werden (samt Variablen) als „Gewichte“ einer Balkenwaage betrachtet. Äquivalente Umformungen sind dann Veränderungen, bei denen die Waage stets im Gleichgewicht bleibt: „Auf beiden Seiten das Gleiche tun“.
>
> Barzel & Holzäpfel (2011, S. 6)

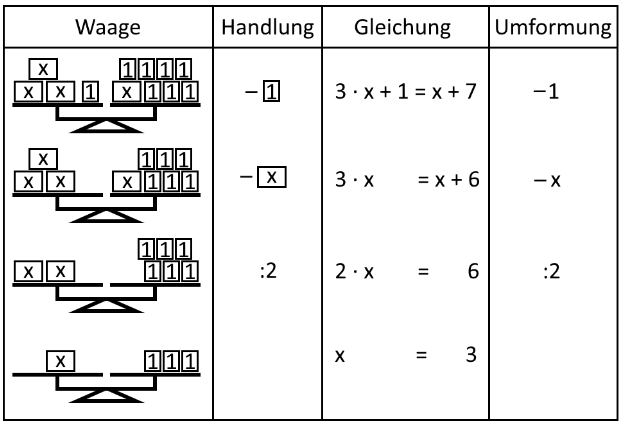


Abb. 62: Waagemodell – entlehnte und kodifizierte Zeichen bei Barzel & Holzäpfel (2011, S. 6)

Das Boxenmodell wird u. a. vom Schulbuch *mathbu.ch 7* verwendet (Affolter et al. 2003). Vivien Landgraf (2013) beschreibt es wie folgt:

> Auf beiden Seiten eines Gleichheitszeichens sind Streichhölzer und Boxen abgebildet. Die Schülerinnen und Schüler können für die Lösung der Aufgabe die dargestellte Situation mit dem Material nachlegen. Ziel ist es, herauszufinden, wie viele Streichhölzer in einer Box liegen. Dabei gilt die Regel: In jeder Box liegen stets gleichviele Hölzer. Außerdem müssen auf beiden Seiten der Gleichung gleich viele Hölzer liegen […].
>
> Landgraf (2013, S. 46)

---

[234] Die Beschränkung auf *lineare* Gleichungen soll keineswegs implizieren, dass der Unterricht (neben den quadratischen Gleichungen) andersartige Gleichungen außer Acht lassen sollte. Ganz im Gegenteil kann es sogar lohneswert sein, „an verschiedenen Einzelbeispielen zweckmäßige Vorgehensweisen für das Lösen von Gleichungen zu erarbeiten“, für die kein vollständiger Lösungsalgorithmus bekannt ist (Walsch 1992, S. 8).

[235] Zwei weitere handlungsorientierte Zugänge liegen in Zahlenrätseln und im Falten von Papier. Erstere finden typischerweise bei der Einführung von Termen mit Variablen Einsatz (vgl. Lietzmann 1943; Malle 1993) und bieten Lernenden dabei eine gute Chance, durch Selbstwirksamkeitserlebnisse Begeisterung für Mathematik zu entwickeln (von der Bank 2021). Sie lassen sich aber auch als Hinführung zu linearen Gleichungen einsetzen (Daniela Hesse 2011). Den zweitgenannten Zugang nennen Barzel & Lars Holzäpfel (2011) das *Faltmodell* (s. u.). Rainer Stahl (2001) grenzt es deutlich vom Waagemodell ab, wobei diese Abgrenzung einer kritischen Prüfung kaum standhalten dürfte. Einige seiner Kritikpunkte am Waagemodell, auf denen diese Abgrenzung beruht, werden im weiteren Verlauf des Abschnitts aufgegriffen und eingeordnet.

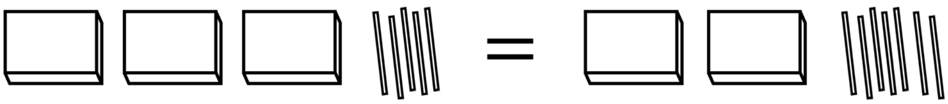


Abb. 63: Boxenmodell – entlehnte Zeichen bei BARZEL & HOLZÄPFEL (2011, S. 6)

Beide Modelle sind als handlungsorientierte Einführungen linearer Gleichungen trotz ihrer weiten Verbreitung keineswegs unstrittig. Im Kontext des aktuellen Kapitels sind geäußerte Kritikpunkte äußerst wertvoll, weil sie stets mögliche Ansatzpunkte für eine Anwendung des vertieften EIS-Prinzips darstellen. Aus diesem Grund seien in Unterabschnitt 5.1.2.1 mehrere der Kritikpunkte zusammengetragen, geprüft und ergänzt – auch unter Zuhilfenahme des EIS-Prinzips in seiner Rolle als ordnende Theorie, dank der viele der zitierten Eindrücke ökonomisch beschrieben, begründet und systematisiert werden können. Anschließend erläutert Unterabschnitt 5.1.2.2 mithilfe des Leitsatzes für vertikale Übergänge mögliche Lösungsansätze zu bestehenden Kritikpunkten.

5.1.2.1 Kritikpunkte

(1) Eingeschränkter Gültigkeitsbereich

VOLLRATH (1994, S. 219) richtet diesen Einwand an das Waagemodell: Es beziehe „sich nur auf positive Zahlen" und behandle „Multiplikation und Division nicht allgemein". Dieser Makel haftet vielen Veranschaulichungsmitteln im Bereich der Arithmetik und Algebra an, auch dem Boxenmodell. BARZEL & HOLZÄPFEL (2011, S. 6) beschreiben daraus entstandene „Versuche, auch negative Zahlen sichtbar zu machen": Das Waagemodell kann dazu um „‚Luftballons' (als negative Gewichte)" ergänzt werden, wobei das Modell durch diese Modifikation auch komplex und irritierend werde, weil „z. B. eine negative Zahl als Ballon und eine positive als Kiste symbolisiert wird".[236] Für das Boxenmodell existieren vergleichbare Ansätze; so könnte man etwa analog zum Guthaben-Schulden-Modell verschiedenfarbige Boxen und Hölzer verwenden.[237] FRIEDER KORN (2013, S. 81) verfolgt einen ähnlichen Ansatz, arbeitet allerdings mit einer Ortskodierung: Die Ausrichtung der Hölzer und Schachteln dient zur Unterscheidung positiver und negativer Zahlen.[238]

---

[236] Die Luftballons sind eine metaphorische Umsetzung der Grundvorstellung des Aufhebens, die für negative Zahlen z. B. im Guthaben-Schulden-Modell realisiert wird. Im Vergleich wird die obige Komplexität und Irritation besonders augenfällig, denn im Guthaben-Schulden-Modell sind einerseits *alle* Zahlen Scheine, andererseits üben Gut- und Schuldscheine intuitiv *gleichstarke* gegensätzliche Wirkungen aus – anders als Einheitsgewichte und Luftballons.

[237] Eine Schülerin schlug diese Adaption in meinem Unterricht vor.

[238] Der Unterschied zwischen positiven und negativen Zahlen materialisiert sich bei Streichhölzern durch die Ausrichtung des Brennkopfes zur oberen bzw. unteren Tischkante. Da den Schachteln ein vergleichbares Merkmal fehlt, entscheidet hier die Sichtbarkeit von Vorder- oder Rückseite. Die Kombination von beidem ist jedoch problematisch: Eine 180°-Drehung einer Schachtel um ihre zur Tischplatte senkrechte Drehachse scheint die Gleichung unverändert zu lassen, obwohl die Streichhölzer im Inneren ihre Ausrichtung ändern. Womöglich arbeitet KORN (2013, S. 80) daher mit einer weiteren Zusatzregel – zumindest die Abbildungen deuten dies an: Schachteln werden stets so positioniert, dass der Aufdruck von oben nach unten zu lesen ist.

Gerade wegen der angesprochenen Irritationen sollten all diese Vorschläge allerdings nicht als Auswege angesehen werden, durch die sich die Modelle von ihrem eingeschränkten Gültigkeitsbereich befreien wollen. Vielmehr handelt es sich um ein gemeinsames Ausloten der Möglichkeiten und Grenzen – und dieser Prozess kann durchaus in der vergleichsweise abstrakten Einsicht münden, dass „es im Prinzip so weiterfunktioniert", auch wenn keine effektive Handlung mehr ausführbar ist: „Erfahrungsgemäß" werde „die rein symbolische Erweiterung auf negative Zahlen problemlos" verstanden (Barzel & Holzäpfel 2011, S. 7)[239]. Dass derartige Erweiterungen von Modellen nicht immer logisch lückenlos gelingen, sollte mit den Ansprüchen des pädagogischen Rahmens bewertet werden, nicht mit jenen eines fachlichen Rahmens (vgl. Wittmann 1933)[240].

(2) Mangelnder Realitätsbezug

„Erschwerend kommt hinzu, dass das Waagemodell keinen oder nur geringen Realitätsbezug besitzt, da heutigen Schülerinnen und Schülern solche Waagen eher unbekannt sind und außerdem das verlangte Hantieren in keinem Fall dem eigentlichen Umgang mit einer Balkenwaage entspricht" (Stahl 2001, S. 296). Beide Punkte treffen durchaus zu – allerdings sind die daraus zu ziehenden Rückschlüsse zu reflektieren:

Beim Anbieten von objekthaften Zeichen soll im Sinne von LAMBERT (2020) eine *erlebte* Wirklichkeit geschaffen werden, in der Erfahrungen durch eigenes Tätigsein gesammelt werden: „Lehrpersonen situieren dazu im Unterricht ausgewählte mathematische Inhalte in einer für die Lernenden selbst erleb- und erfassbaren (inner- und außermathematischen) Wirklichkeit" (ebd., S. 14). Vorwissen über den Gebrauch von Balkenwaagen ist also nicht notwendig, solange der Unterricht ermöglicht, diese Kenntnisse zu erwerben.

Auf ähnliche Weise lässt sich das zweite Argument entkräften: Zunächst ist fraglich, ob Lernende das Hantieren überhaupt als ungewöhnlich empfinden, wenn ihnen der gewöhnliche Gebrauch der Waage unbekannt ist. Vor allem aber darf sich erlebte Wirklichkeit durchaus von der außerschulischen unterscheiden:

---

[239] Der Bezeichner »symbolisch« wird in diesem Zitat synonym zu »formal-algebraisch« verwendet. Gemeint ist also, dass das Arbeiten in objekthaften Zeichen – ausschließlich mit positiven Zahlen – auch das Lösen von Gleichungen mit negativen Zahlen (in kodifizierten Zeichen) unterstützt, selbst wenn diese nicht in das Modell übersetzt werden.

[240] „Man verlasse das Ideal der logischen Lückenlosigkeit, gebe dem Kinde Gelegenheit, seine schöpferische Phantasie so reich wie möglich zu betätigen, mag dabei das einzeln Erkannte auch noch lückenhaft nebeneinander stehen; man lasse den Kindern Zeit, ihre Gedanken an weniger abstrakten, gehaltreicheren Gegenständen zu üben, und strebe ganz allmählich im Laufe der Jahre nach einer logischen Lückenlosigkeit des Denkens hin. Sie soll das Letzte, das Ergebnis, die Krönung aller Erziehung zum Selbstdenken sein; aber sie darf nicht das Erste, das von allem Anfang an Herrschende sein. […] Der Grund der Überschätzung dieses Ideals liegt einerseits in einer zu ängstlichen, falschen Gewissenhaftigkeit des Lehrers, andererseits darin, daß der Lehrer das, was er unterrichtet, selbst nur in dieser schon systematisch geordneten Form gelernt hat und immer wieder aus Büchern schöpft, daß er nie erfahren hat, wie dieses in freier Phantasiebildung erzeugt werden kann" (Wittmann 1933, S. 142)

GRIESEL (1976) beispielsweise bezieht bei der Erläuterung von OEHLs *Prinzip von der Herauslösung eines Begriffs aus Umweltbezügen* ausdrücklich *auch* die künstliche Umwelt mit ein, die durch jede Art von Arbeitsmaterial im Mathematikunterricht geschaffen werde (siehe Fußnote 350). Arbeitsmittel wie die Waage sollen also nicht in erster Linie über die außerschulische Realität aufklären, sondern „die eigene, persönliche, selbsttätige Auseinandersetzung mit Phänomenen und Problemen, in konkreten, von Lehrpersonen geeignet situierten Handlungen" ermöglichen (Lambert 2020, S. 11).

(3) Routinen statt Verständnis

> Insgesamt zeigt sich, dass beim Waagemodell selbst Mindestanforderungen an eine Visualisierung nicht erfüllt sind und es zum Veranschaulichen des Gleichungslösens insbesondere bei der unterrichtlichen Einführung denkbar ungeeignet ist. Vielmehr scheint das Waagemodell in der Unterrichtspraxis (hier auch nur im Gymnasium) lediglich als visuelle ‚Eselsbrücke' zu funktionieren. Dass es sich in der Praxis bewährt (hat), ist mehr als zweifelhaft, wenn man darunter versteht, dass es sich für die Schülerinnen und Schüler im Unterricht bewährt hat und nicht dass es lediglich von den Lehrerinnen und Lehrern im Unterricht immer wieder verwendet wird.

Stahl (2001, S. 297)

An dieser Stelle grenzt sich STAHL (2001) explizit von VOLLRATH (1994) ab, der dem Waagemodell die von STAHL (2001) abgesprochene Praxistauglichkeit bescheinigt. Als Gründe führt er neben dem oben behandelten Realitätsbezug erstens an, dass

> die Waage den Schülerinnen und Schülern nahe legt, alle Umformungen auf einmal als gleichzeitiges Wegnehmen durchzuführen: *Das unbekannte Gewichtsstück wird auf der linken Seite belassen und auf die rechte Seite werden soviel bekannte Gewichtsstücke gelegt, bis die Waage im Gleichgewicht ist.*

Stahl (2001, S. 297; Hervorhebung im Original)

Zweitens sei

> die Division durch eine Zahl mit der Waage gar nicht zu veranschaulichen. Dies funktioniert nur, wenn das Ergebnis bereits vorher bekannt ist.
> Bei *3x = 6 muss das Ergebnis x = 2 bereits vorher bekannt sein, um beim Umformen auf der linken Seite zwei unbekannte Gewichte und auf der rechten Seite 4 Gewichtsstücke der* Einheit 1 wegnehmen zu könne[n].

Stahl (2001, S. 297; Hervorhebung im Original)

In Bezug auf Ersteres muss konkretisiert werden, dass die Waage das abgekürzte Lösen *ermöglicht* – genau wie die übrigen Modelle: Auch in dem von STAHL (2001) bevorzugten Faltmodell lassen sich bei korrekter Skalierung alle Teile nach hinten falten, bis auf einen Bereich, der der gesuchten Größe entspricht (Abb. 64), während im Boxenmodell ein Blick in eine Box das Ergebnis offenbart, falls die

Boxen zuvor passend befüllt wurden.[241] Es bleibt also stets notwendig, eine Übereinkunft bezüglich zugelassener Handlungen in einer Situierung zu treffen.

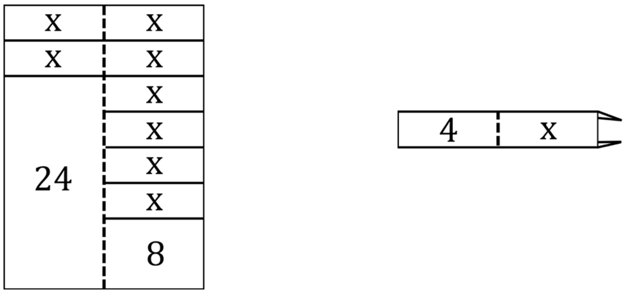


Abb. 64: Abkürzendes Lösen der Gleichung $2x + 24 = 6x + 8$ *im Faltmodell*

Ob das Waagemodell das abgekürzte Lösen aus sich heraus stärker als andere Modelle nahelegt, erscheint fraglich. Den größeren Einfluss hat wohl der soziale Vertrag, der aus den impliziten Vorerfahrungen im Mathematikunterricht entsteht und der darüber aufklären kann, dass in einer erlebten Wirklichkeit wie dem Waagemodell der unbekannte Wert nicht das einzige Ziel darstellt (vgl. Sjuts 2003): Lernenden kann auch ohne explizite Thematisierung bewusst sein, dass mit objekthaften Zeichen eine Situation geschaffen wird, in der sie etwas Neues erschließen sollen, das sie im späteren Verlauf dazu befähigt, dieselben Probleme in anderen Zeichenarten zu lösen.

Dem zweitgenannten Grund – Division lasse sich nur bei bekanntem Ergebnis veranschaulichen – ist hingegen zu widersprechen: Beim Teilen beider Seiten der Gleichung $3x = 6$ durch 3 wird auf beiden Seiten der dritte Teil zweier gleichgroßer Ganzer beibehalten und alles Übrige entfernt. Die Gleichheit des Entfernten basiert also auf der Gleichheit des Anteils und der Ganzen. Nicht $x = 2$ muss zur Durchführung der Handlung bekannt sein, sondern $3x : 3 = 1x$ (mittels der Grundvorstellung des Verteilens) und $6 : 3 = 2$.

STAHLS (2001) These, das Waagemodell diene ausschließlich als visuelle Eselsbrücke, trifft überzeugender auf Versuche zu, bei denen das Boxenmodell und das Waagemodell miteinander kombiniert werden: Befüllbare Objekte – z. B. Dosen – ersetzen die unbekannten Gewichtstücke, um den Einsetzungsaspekt von Variablen nach MALLE (1993) hervorzuheben. Befüllt werden diese Objekte beispielsweise mit Chips, die an die Stelle der Einheitsgewichte treten (Abb. 65).

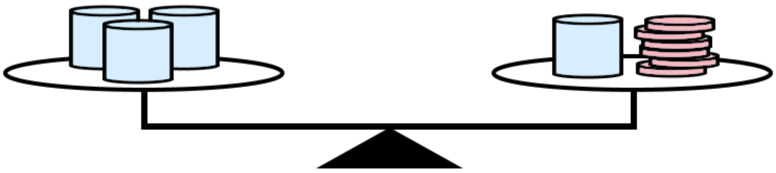


Abb. 65: Kombination aus Boxenmodell und Waagemodell bei REBECCA KRÖGER & ANNE HILGERS (2011, S. 3)

[241] Erst wenn im Faltmodell die Skalierung beliebig gewählt, im Boxenmodell auf die passende Befüllung im Vorhinein verzichtet oder im Waagemodell nur eine vorgestellte Balkenwaage eingesetzt wird, entfallen die abkürzenden Lösungsmöglichkeiten. Das heißt jedoch nicht, dass vor diesem Zeitpunkt die Tauglichkeit der Modelle eingeschränkt sein muss, wie aus den folgenden Ausführungen zu sozialen Verträgen im Mathematikunterricht hervorgeht.

Dieses Modell funktioniert durchaus als Metapher in entlehnten Zeichen, die eine vorgestellte Handlung abbilden. Es widerspricht jedoch naiv-anschaulichen Vorerfahrungen bzw. intuitiven Vorstellungen der Situation und ließe sich mit realen Dosen und Chips auf einer derartigen Balkenwaage nicht realisieren: Wenn sich auf beiden Seiten gleichviele Chips befinden, wäre die Waage wegen der ungleich vielen Dosen im Ungleichgewicht. Außerdem würden selbst im labilen Gleichgewicht bereits kleinste Einflüsse die empfindliche Balance entscheidend stören, weil der Drehpunkt unterhalb des Schwerpunktes des Waage-Systems liegt – das ließe sich jedoch ohne Weiteres in der Abbildung beheben.

Damit verstößt dieser Aufbau gegen den Leitsatz für vertikale Übergänge: Die intendierten Symbolgehalte (z. B. zulässige Äquivalenzumformungen) lassen sich *nicht* in objekthafte Zeichen und *nur deutlich erschwert* in entlehnte Zeichen hineinsehen, weil vermeidbare Regeln (z. B. Dosen sind gewichtslos) beherrscht werden müssen, um die Waage als Mittel zur Untersuchung von Gleichungen einsetzen zu können. Hier zeigt sich die Gefahr, dass Modelle „auch einen ‚cognitive overload' erzeugen [können]: Das Modell bzw. die Visualisierung an sich ist ‚Zusatzstoff', der zunächst einmal nachvollzogen werden muss" (Barzel & Holzäpfel 2011, S. 6). Dieses Nachvollziehen ist umso ressourcenintensiver, je mehr zusätzliche, nicht naiv-anschauliche Gebrauchsregeln benötigt werden.

Es sei vorausgreifend auch BAUERSFELDs (1983) Mahnung aus Abschnitt 5.1.3 erwähnt: Im Unterricht wird immer wieder vertraute Erfahrung zu Veranschaulichungszwecken deformiert und soll Lernenden zur Erklärung dienen. Dieser Prozess scheitert jedoch, wenn die deformierte Erfahrung selbst erklärungsbedürftig bleibt: Sie dient Lernenden dann nur als Hilfsvorstellung, um im neuen Erfahrungsbereich Routinen auszubilden; also „als Eselsbrücke zur Eingewöhnung in ein Handlungsrezept" (ebd., S. 37). Auf dieser Grundlage lässt sich STAHLs (2001) obige Kritik durchaus rechtfertigen: Die Mischung aus Waage- und Boxenmodell funktioniert bestenfalls als Metapher nach zusätzlichen Regeln, nicht jedoch als objekthaftes Zeichen, mit dem Lernende eigentätig arbeiten. Bei KRAMER (2013, S. 76 f.) fungiert daher eine Person mit ausgestreckten Armen als Balkenwaage; „[e]s handelt sich um eine besondere Waage, welche nur Streichhölzer und keine Schachteln misst. Leere Schachteln werden nicht gewogen, auch wenn sie auf der Hand liegen". Dies birgt jedoch nach wie vor vergleichbare Anforderungen als Zusatzstoff wie Abb. 65. Das Boxenmodell umgeht die angesprochene Problematik durch das Aussparen des Gleichgewichtsaspekts, macht sich dafür aber an anderer Stelle angreifbar: Es sei

(4) nicht ausreichend naiv-anschaulich.

„Ein Nachteil des Boxenmodells ist, dass die Gleichheit nicht innerhalb des Modells begründet ist. Sie ist vielmehr eine vorgegebene Regel. Im Waagemodell[…] hingegen wird die Gleichheit durch die Gleichgewichtsvorstellung begründet" (Landgraf 2013, S. 48).

Die Kritik ist derselben Natur wie zuvor: Eine fremdartige Regel muss präsent gehalten werden, damit ein transparentes Zeichen (vgl. Unterkapitel 3.5) vorliegt – die Erschließung der intendierten Symbolgehalte ist also erschwert. Gerät die Regel in Vergessenheit, führen Lernende Operationen nur einseitig aus – vgl. LOTHAR FLADE & VIENG NALY MOUNNARATH (1992, S. 12) – oder begehen diverse Fehler, die MALLE (1993, S. 202) dem Übersichtsverlust zuschreibt. Als weitere benötigte Regel ließe sich die *Zusammengehörigkeit* aller Objekte auf einer Seite ergänzen – dies war im Waagemodell durch die Waagschalen verkörpert. Aus einem Verlust dieser Regel resultiert ein Fehler, auf den JÜRGEN TIETZE (2015, S. 115) gesondert hinweist, weil er besonders gehäuft wiederkehre: Lernende wenden beim Multiplizieren und Dividieren die entsprechende Operation nicht auf alle Bestandteile der Gleichung an. VOLLRATH (1994, S. 200) bezeichnet diesen Fehler als typisch für das Verwechseln von Algorithmen, das aus dem fehlenden Erkennen der entscheidenden Ideen resultiere.

5.1.2.2 Lösungsansätze

Damit das kombinierte Boxen- und Waagemodell nicht nur als Metapher in entlehnten Zeichen dient, sondern auch in objekthaften Zeichen intendierte Symbolgehalte zugänglich macht, muss das Gewicht eines befüllbaren Objekts verglichen mit dem Gewicht eines Füllobjektes vernachlässigbar klein sein. Dosen und Chips oder Streichholzschachteln und Streichhölzer sind dementsprechend ungeeignet; undurchsichtige Druckverschlussbeutel (hier 0,6 Gramm) und Murmeln (hier 8 Gramm) hingegen stellen unter diesem Gesichtspunkt eine geeignetere Situierung von Variablen und Zahlen dar. Als objekthaftes Zeichen sollte das Waage-System allen Lernenden zumindest partnerweise zur Verfügung stehen, daher muss es kostengünstig, unkompliziert und mehrfach zu beschaffen sein. Kleiderbügel[242], an denen weit geöffnete Pappkegel als Waagschalen befestigt sind, stellen eine Möglichkeit dar (Abb. 66 links)[243].

Abb. 66: Kombination aus Boxenmodell und Waagemodell in objekthaften Zeichen: $x + 3 = 2x + 1$

[242] Beim Aufhängen des Kleiderbügels an seinem Haken wären Auflagepunkt und Drehpunkt nicht identisch – zu Lasten der Sensibilität der Waage, die ein leichtes Ungleichgewicht kaum anzeigt.
[243] Die in Abb. 66 rechts gezeigte Aufhängung vermeidet störende Rotationen um die Vertikalachse und ist an einer Schulbank gut umsetzbar.

Selbstverständlich beeinflussen die Druckverschlussbeutel die Gewichtsverteilung ab einer gewissen Anzahl so stark, dass die objekthaften Zeichen missverständlich werden. Um diesen Einfluss exemplarisch anzudeuten, ist in Abb. 67 links die Gleichung $4x = 4$ und rechts die Ungleichung $4x < 5$ dargestellt.

Abb. 67: Einfluss der Druckverschlussbeutel

Bei einem Einsatz des Boxenmodells in Reinform können ebenfalls – dem Leitsatz für vertikale Übergänge folgend – Details angepasst werden: Auf der linken und der rechten Seite der Gleichung lassen sich statt Waagschalen andere optische bzw. haptische Rahmungen unterlegen. Diese Rahmung eint im objekthaften und entlehnten Zeichen die beiden Seiten der Gleichung zu je einer Gesamtheit, sodass sich die Zusammengehörigkeit im Zeichen ausdrückt und nicht mehr ohne diese Stütze hinzugedacht werden muss (Abb. 68). Das Untersuchen dessen, was mit dem Zeichen dargestellt werden soll, wird erleichtert und damit auch das Erschließen der intendierten Symbolgehalte.

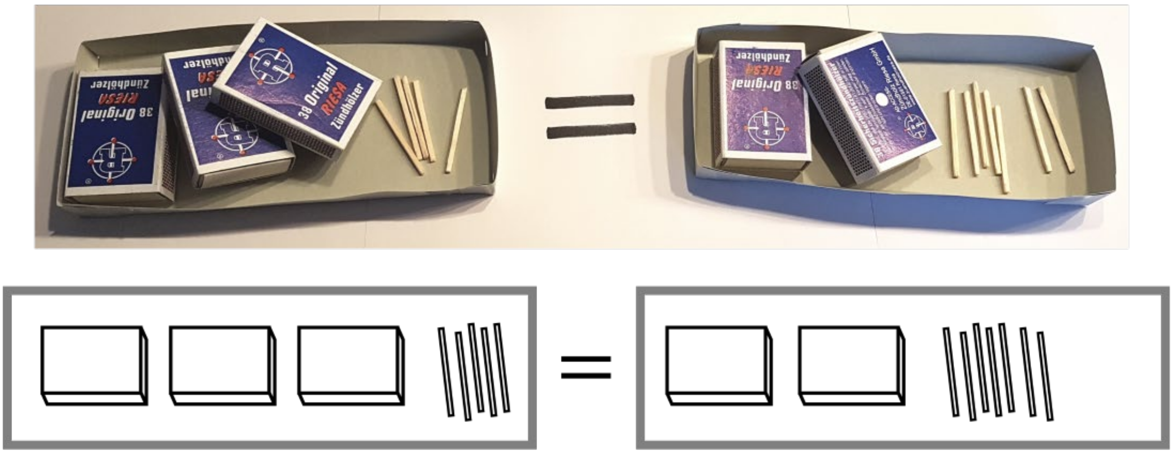


Abb. 68: $3x + 5 = 2x + 7$ *im erweiterten Boxenmodell*

Falls zuvor an einer Balkenwaage als Demonstrationsmodell gearbeitet wurde, erleichtert diese Ergänzung darüber hinaus das Präsenthalten der geforderten Gleichheit, weil das Einrahmen an die Waagschalen erinnert – und damit an die gesamte Situation an der Balkenwaage.

5.1.3 Addieren und Subtrahieren negativer Zahlen

„Zur Einführung der negativen Zahlen sind zahlreiche […] Modelle entwickelt worden“ (Hefendehl-Hebeker 1990, S. 89), worunter URSULA VIET (1983, S. 118) „konkrete Sachverhalte“ versteht, „durch die eine mathematische Struktur repräsentiert wird. Sie können aus der Umwelt entnommen sein […] oder es kann sich um ein erdachtes System aus Elementen und Regeln handeln, z. B. um ein Spiel“. Als Vertreter nennt HEFENDEHL-HEBEKER (1990) das Guthaben-Schulden-Modell und das Pfeilmodell.

Die Wurzeln solcher Modelle reichen weit zurück, obwohl ihre Popularität vorübergehend unter dem Einfluss der „‚Neue[n] Mathematik‘, in der Öffentlichkeit als ‚Mengenlehre‘ bezeichnet“, litt (Wittmann 2018, S. 3): Die eingeführte axiomatische Methode samt strengem mathematischen Formalismus sollte die wirtschaftliche Konkurrenzfähigkeit im internationalen Wettkampf sicherstellen. 1957 wurden diese Versuche durch den Sputnik-Schock aus- und etwa zwei Jahrzehnte später wieder abgelöst. Trotz alter[244] und neuer[245] Kritik konnte „[e]rst der offenkundige Misserfolg der ‚Mengenlehre‘“ bzw. des mathematisch strengen Formalismus in der Schule eine Umkehr anstoßen (ebd., S. 5) – eine Umkehr, die im Kontext negativer Zahlen nicht neu war (vgl. Fußnote 110).

„Der Schaden für das Bildungssystem war immens“, insbesondere, weil „die gewachsene curriculare Struktur des Unterrichts zerstört worden war“ (ebd., S. 5). Vor diesem Hintergrund ließe sich GRIESELs (1976, S. 69) etwas überraschende Einschätzung erklären, „dass es den Didaktikern erst in der Gegenwart gelungen ist, Umweltsituationen bereitzustellen, aus denen die Einführung der negativen

[244] „Man setzt im Grunde voraus, daß der Schüler eine Reife des Denkens besitzt, wie sie nur der Erwachsene besitzen kann und nicht einmal in allen Fällen besitzt. […] Man hätte tiefer in das Problem eindringen müssen, und man hätte finden können, daß im allzu frühen, allzu strengen und allzu einseitig synthetischen, logisch systematischen Aufbau des Unterrichts die Wurzel des Übels zu suchen ist“ (Wittmann 1933, S. 140).

[245] Während WINTER & THEODOR ZIEGLER (1977, S. 33) noch für das Vermitteln „der einen Mathematik von der Grundschule bis zur Universität“ eintreten, prangert FREUDENTHAL (1963, S. 17) wie schon KLEIN (1908, S. 589; vgl. Fußnote 62) das Lehren einer fertigen Mathematik an: Diese sei „präfabriziert vom erwachsenen Mathematiker, der weiß, wie die Teile einmal ineinander passen sollen, und wofür jeder einzelne dient, aber ein wesensloser Haufen isolierter Bausteine für den Schüler, dem diese esoterische Wissenschaft verborgen bleibt. Es kann in solch ein System soviel hineingeheimnist sein, daß auch dem erwachsenen Mathematiker Hören und Sehen vergeht. Warum? Weil der Verfasser sich ausleben will in seinem ästhetischen Genuß der Mathematik oder weil ihn Skrupel mathematischer Strenge und Systematik quälen. Die Strenge ist dann genau die, die der Verfasser nun einmal als allein seligmachend sieht, und die Systematik die, die ihm die weiteste Durchsicht verschafft. Solche Auffassungen sind weit entfernt vom Mathematikunterricht als geführter Wiederentdeckung. Der Begriff der Strenge oder Systematik, der den Entwerfer getrieben hat, kann beim Schüler nicht wirksam sein, weil ihm alle Voraussetzungen dazu fehlen. Soll der Schüler dann die Gewissensbisse des Lehrers imitieren?“. Siehe auch FREUDENTHAL (1973, S. 29): „Warum sollte man nicht nach Belieben f oder $f(x)$ als Funktionsbezeichnung schreiben, wenn es nicht darauf ankommt? Und solange jemand auf einem Gebiet bleibt, wo es nicht darauf ankommt, wird ihm die Akribie der anderen als Akrobatik vorkommen. Wenn man immer nur mit jeweils einer Funktion, oder mit zwei Funktionen, oder mit einer explizit aufgeschriebenen Gesamtheit von Funktionen zu tun hat, spielt es auch keine Rolle.“

Zahlen und die der Addition und Subtraktion negativer Zahlen gewonnen werden können“ – denn die Mathematikdidaktik kannte durchaus schon weitaus früher Situationen und Modelle zur Einführung der negativen Zahlen, wie hier nur knapp an drei Beispielen angedeutet sein soll (vgl. auch Charon & Lotz 2022):

KARL BRÜCHER (1911, S. iv) strebt ein „wirkliches Erfassen aller Rechnungsarten durch die Schüler“ an, indem sich Lernende „durch das Bauen mit Zahlkörpern eine Analogie dessen, was sie sich sonst im Geiste vorstellen sollen, vor Augen führen“. Bei diesen „Zahlkörpern“ – „ein bedeutungsvolles Hilfsmittel zur Auffindung von Zahlzusammenhängen“ (ebd., S. 11) – handelt es sich um ungleich lange Holzbrettchen mit unterscheidbaren Vorder- und Rückseiten, mithilfe derer positive von negativen Zahlen abgegrenzt werden.

> Kommen […] in einer Aufgabe positive und negative Zahlen vor, so muß man die Festsetzung machen: Man kann nur mit gleichartigen Zahlen rechnen. Also muß man eine Sorte in die entgegengesetzten verwandeln, am besten die negative in positive. Diese Verwandlung kann am Modell durch einfaches Umdrehen der Zahlkörper erfolgen. Mit den umgedrehten Zahlenquadern muß dann aber auch in entgegengesetzter Richtung gebaut werden

Brücher (1911, S. 13)

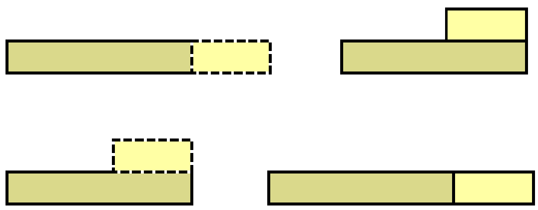


Abb. 69: Addition und Subtraktion einer negativen Zahl mit Quadern bei BRÜCHER (1911, S. 13)

SIMON (1985; Original von 1908) lässt erahnen, dass auch das Reflektieren von Umweltsituationen und die (damals nicht als solche bezeichneten) Grundvorstellungen *Aufheben* und *Bewegungen* keine Errungenschaft der letzten 50 Jahre ist. Ihm zufolge sei es „endlich Zeit, daß man die ‚Schulden und Vermögen‘ als Einführung der negativen Zahlen fallen ließe“, um den Richtungsgegensatz stärker zu betonen (ebd., S. 69).

LIETZMANN (1916, S. 271 f.) liefert eine mögliche Umsetzung dieser Forderung, die er wiederum HEINRICH WIELEITNER zuschreibt – siehe dazu WIELEITNER (1912, S. 8 f.). Wegen der dem Modell immanenten Unterscheidung der Blickrichtung sei es im Folgenden als *orientiertes Bewegungsmodell* bezeichnet:

> Ich benutze hier eine Einkleidung, die Wieleitner einmal gegeben hat, sie zeigt, daß es gar nicht so ganz einfach ist, das Bild bis in alle Teile durchzuführen. Es handelt sich um die vier Formeln:
>
> (1) $m + (+a) = m + a,$
>
> (2) $m - (+a) = m - a,$
>
> (3) $m + (-a) = m - a,$
>
> (4) $m - (-a) = m + a.$

> […] Was bedeutet die dritte Formel: Von einem beliebigen (positiv oder negativ bezeichneten) Punkte m der Zahlengeraden soll man, das Gesicht nach rechts gewandt (das bedeutet das Operationssymbol „+") a Schritte rückwärts (das bedeutet das Vorzeichen „–" vor a) gehen. Dann erreicht man die Stelle $m - a$. Im Falle der vierten Formel soll man, das Gesicht nach links gewandt, a Schritte rückwärts gehen. Dann erreicht man die Stelle $m + a$. Man sieht, in dieses Bild passen auch die ersten Formeln […].
>
> Lietzmann (1916, S. 271 f.)

Welchen Beitrag kann nun das EIS-Prinzip (nicht) leisten in einer Domäne, die bereits Generationen von Mathematikdidaktikern eingehend durchdacht haben?

All die unterschiedlichen Modelle werden in der Regel separat verwendet, untersucht und miteinander verglichen[246] – womöglich in Ermangelung einer sie verbindenden Theorie. Als solche soll sich im Folgenden das vertiefte EIS-Prinzip bewähren. Dazu wird zunächst das Pfeilmodell als Ausgangspunkt kurz erläutert, um anschließend an ihm zu erläutern, inwiefern das EIS-Prinzip einen übergeordneten, theoretischen Rahmen des Mathematiklernens zur Verfügung stellt, in den einzelne Modelle eingepasst werden können. Dieses Einpassen ist kein Selbstzweck, sondern stiftet Übersicht, einen einheitlichen theoretischen und sprachlichen Rahmen, kann explizit begründet Lücken und Ergänzungen hervortreten lassen, neue Querverbindungen zwischen bestehenden Modellen schaffen und vor voreiligem Durchmischen selbiger warnen.

Von einer Anwendung des vertieften EIS-Prinzips soll jedoch nicht erwartet werden, das früher allmählich Gewachsene zu revolutionieren – geschähe dies, sollten eher Zweifel an der neuen Theorie geäußert werden. Auch die Festlegung einer Art des Einsatzes der Modelle entzieht sich dem Wirkungsbereich des Prinzips: Sollen Lernende die Rechenregeln durch Nutzung des Modells und nach einem „selbstständigen Wegsuchen" entdecken (Kühnel 1954, S. 212; Original von 1916)? Oder soll nach einer Diskussion verkündet werden, „welcher Rechenweg sich unter Fachleuten durchgesetzt hat", weil es „im Zweifelsfall ehrlicher sein [kann], im Unterricht zunächst die Rechenregeln zu verraten und dann zu untersuchen, warum diese sich bewähren" (Hefendehl-Hebeker 1990, S. 97, 93)? Es erscheint ohnehin fraglich, ob hierzu die *eine* Antwort für *alle* Lerngruppen gesucht werden sollte.

5.1.3.1 Beschreibung des Pfeilmodells

„Jeder positiven Zahl lässt sich eindeutig ein Vektor zuordnen: die Richtung wird durch die Richtung des positiven Zahlenstrahls festgelegt; der Betrag durch die

[246] Siehe dazu beispielsweise INGO WEIDIG (1983, S. 71 f.), der zwischen Bewegungen auf der Zahlengeraden und der Pfeilmethode abwägt. Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird herausgestellt, dass beide Modelle Teile desselben Ganzen sein können und sich als solche gegenseitig bereichern.

Zahl als Maßzahl der Länge vorgeschrieben“ (Hans Minning 1955, S. 24). Bei üblichen, waagerechten Darstellungen der Zahlengeraden hat also „[d]er zu $+k$ bzw. $-k$ gehörige Pfeil [...] die Länge von k Längeneinheiten und ist nach rechts bzw. links gerichtet“ (Kirsch 1973, S. 24). Beim Addieren wird mit der Vorstellung des Hinzufügens oder „Weiterzählens“ (Lietzmann & Julius Jarosch 1926, S. 312) „der Angriffspunkt des zweiten Summanden auf den Zielpunkt des ersten gelegt“ (Minning 1955, S. 24). HEFENDEHL-HEBEKER (1990) spricht dabei in Anlehnung an KIRSCH (1973) von der *Fuß-an-Spitze-Regel*[247].

Für die Subtraktion begründet KIRSCH (1973, S. 38)[248], dass die Orientierung „an einer eigenen, mit dem ‚Wegnehmen‘ verwandten Grundvorstellung“ einer Orientierung an der Vorstellung des Ergänzens oder der Umkehrung vorzuziehen sei – beide Alternativen finden sich in der Literatur.[249] Eine Argumentation, die das Umkehren verwendet, wäre beispielsweise die folgende: Wird die Addition von +2 auf den Ausgangspfeil +3 angewendet, resultiert der Ergebnispfeil +5. Soll dieser Prozess umgekehrt werden, sodass +5 als Ausgangspfeil und +3 als Ergebnispfeil fungiert, muss eine Subtraktion von +2 stattfinden (Abb. 70). Die einzige Möglichkeit, Ausgangs- und Ergebnispfeil in dieser Situation mit Hilfe des +2 Pfeils in Verbindung zu bringen, ist das Anlegen nach der Regel S*pitze-an-Spitze* – mit dieser arbeiten unter anderem KIRSCH (1973, S. 38), MINNING (1955, S. 25) und BREIDENBACH (1969, S. 39 bzw. S. 63).

Abb. 70: Herleitung der Regel „Spitze an Spitze“ durch Umkehrung

Die von KIRSCH (1973) bevorzugte Vorstellung des Wegnehmens konkretisiert HEFENDEHL-HEBEKER (1990, S. 90) prädikativ als ein „Abschneiden von Strecken“. Auch daraus resultiert die obige Regel.

---

[247] Ein alternativer Bezeichner zu »Fuß« aus dem Kontext des Bogenschießens ist »Nocke«.

[248] Zur Verwendung der Deutung der Subtraktion als Umkehrung der Addition äußert sich KIRSCH (1973, S. 38; Hervorhebung im Original) wie folgt: „Sachlich ist dieses Vorgehen offenbar gerechtfertigt; didaktisch gesehen hat es aber den Nachteil, daß die [...] definierte Subtraktion in $\mathbb{Z}$ *keine natürliche Erweiterung* der Subtraktion in $\mathbb{N}_0$ ist (die ja ohne Bezugnahme auf ‚entgegengesetzte Zahlen‘ eingeführt werden muß)“.

[249] LIETZMANN & JAROSCH (1926) sowie RUDOLPH VOM HOFE & VIKTOR FAST (2015) argumentieren explizit mit der Idee der Umkehrung. Den Darstellungen von ANNIKA M. WILLE (2016, S. 128) hingegen scheint eine Orientierung am Ergänzen zugrunde zu liegen, auch wenn sie sich auf die Umkehrung beruft: Beide Pfeile, aus denen die Differenz gebildet wird, werden mit der Nocke an den Nullpunkt angelegt. Der Ergebnispfeil erscheint hier als derjenige, der an der Spitze des Minuendenpfeils angelegt – ergänzt – werden muss, um zur Spitze des Subtrahendenpfeils zu gelangen. Ähnliches findet sich bei WEIDIG (1983, S. 70), der darin eine weniger verbreitete Darstellungsmöglichkeit der Subtraktion sieht.
Offensichtlich existiert somit nicht *das* Pfeilmodell. Vorgestellt wird im Fließtext lediglich die gängigste Variante.

Das Wegnehmen scheitert erst dann, wenn das Wegzunehmende nicht gänzlich vorliegt. „Dort trifft man die Entscheidung, die Verknüpfungsregeln […] zu übertragen; an dieser Stelle ist das definitorische Moment versteckt“ (Hefendehl-Hebeker 1990, S. 91). Eine Alternative, die die Vorstellung des Wegnehmens beibehält, stellt die Addition von Nullpaaren dar, übertragen aus dem Guthaben-Schulden-Modell (vgl. Fritz Malsch, Eugen Maey & Hans Schwerdt 1929, 34): In Abb. 71 wurde der Ausgangspfeil ergänzt, ohne die Gesamtbewegung zu verändern – doch jetzt lässt sich ein negativer Pfeil entfernen. Der resultierende Ergebnispfeil endet stets am Fuß des zu subtrahierenden Pfeils – die Spitze-an-Spitze-Regel liefert also weiterhin passende Resultate.

Abb. 71: Addition von Nullpaaren im Pfeilmodell

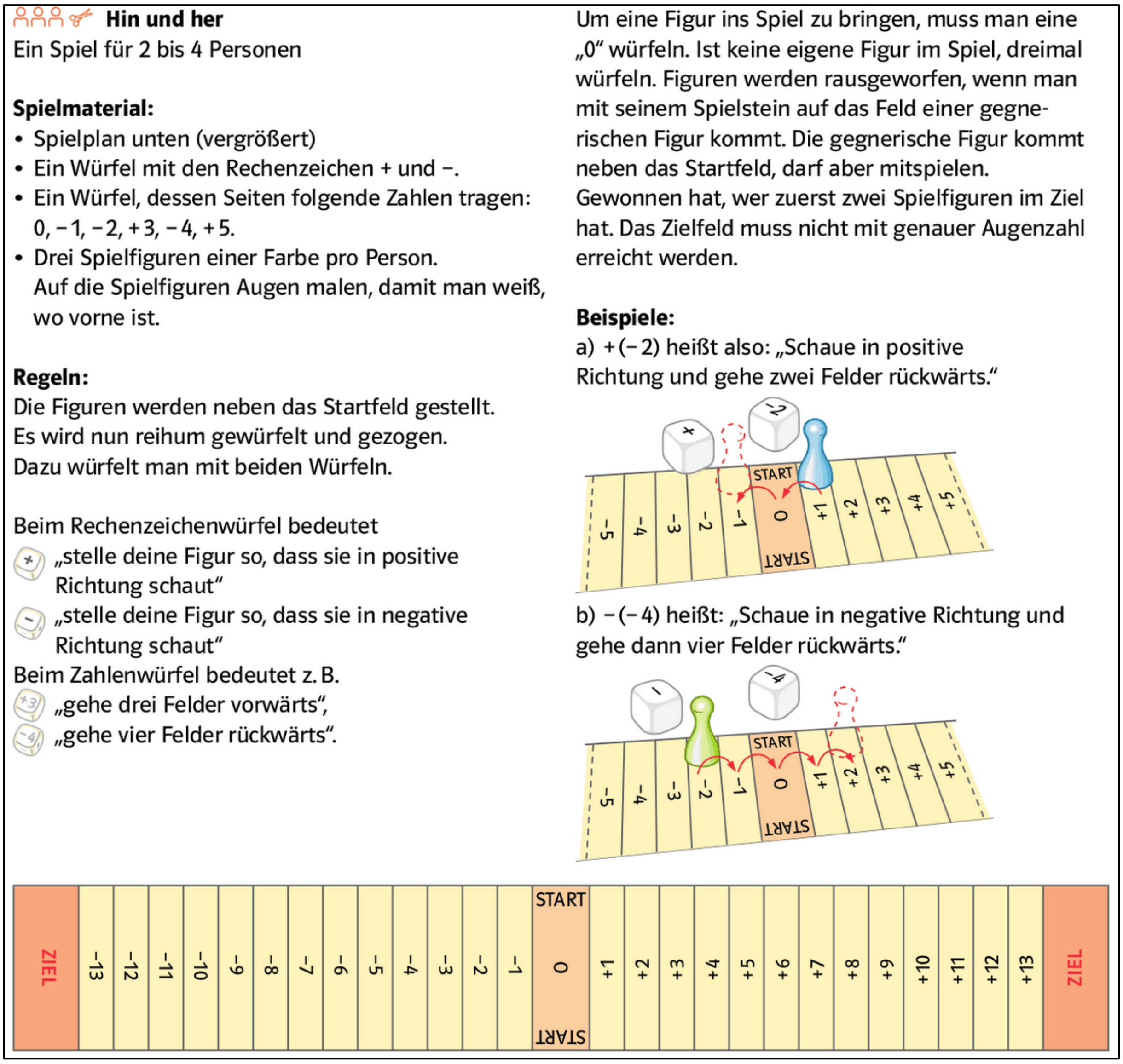
Dieses Vorgehen liegt dann nahe, wenn Nullpaare aus vorhergehenden additiven Verknüpfungen von mindestens drei Pfeilen bereits bekannt sind. Das definitorische Moment bleibt natürlich vorhanden, wenn auch unauffälliger als zuvor. Ob dies ein Vor- oder Nachteil ist, sei dahingestellt.[250]

5.1.3.2 Einpassung des Pfeilmodells auf der EIS-Palette

Das Arbeiten im Pfeilmodell unterscheidet sich zwar sichtbar vom Verwenden von Ziffern und Rechenzeichen, da es sich der konstruktiv-geometrischen und nicht der formal-algebraischen Sprache bedient. In anderer Hinsicht gleichen sich beide jedoch: Auch die konstruktiv-geometrischen Pfeile sind auf der EIS-Palette (in der Wahrnehmung der Lernenden) nach der oben skizzierten Einführung als kodifizierte Zeichen einzuordnen, denn ihr Äußeres und ihr Gebrauch richten sich nach gewissen Regeln, die aus früheren Lernprozessen bekannt sind (Länge der Pfeile je nach Betrag, Nocke-an-Spitze-Regel) oder neu eingeführt werden (Ausrichtung der Pfeile je nach Vorzeichen, Spitze-an-Spitze-Regel). Damit liefert die EIS-Palette unmittelbar einen ersten, naheliegenden Impuls: Wie lässt sich vom gesamten Spektrum der Zeichenarten Gebrauch machen? Welche objekthaften Zeichen könnten den Pfeilbildern vorausgehen, sodass sie Abbilder effektiver Handlungen und damit entlehnte Zeichen sind?

Da Pfeile üblicherweise mit Bewegungen assoziiert werden, bietet sich WIELEITNERS (1912) Bewegungsmodell an. Als eigener Zugang zum Rechnen mit negativen Zahlen findet es immer wieder Erwähnung – siehe z. B. WEIDIG (1983, S. 68) – und tritt bis heute fast unverändert in Schulbüchern auf (Abb. 72).

[250] Die Subtraktion bleibt im Pfeilmodell trotz aller Bemühungen weniger intuitiv als die Addition. Im Schulbuch von OEHL, JOSEF EVERS & WILHELM KASTROP (1965) wird es dementsprechend nur zur Addition verwendet, während für die Subtraktion das Permanenzprinzip bemüht wird.



Hin und her
Ein Spiel für 2 bis 4 Personen

Spielmaterial:
- Spielplan unten (vergrößert)
- Ein Würfel mit den Rechenzeichen + und −.
- Ein Würfel, dessen Seiten folgende Zahlen tragen: 0, −1, −2, +3, −4, +5.
- Drei Spielfiguren einer Farbe pro Person. Auf die Spielfiguren Augen malen, damit man weiß, wo vorne ist.

Regeln:
Die Figuren werden neben das Startfeld gestellt.
Es wird nun reihum gewürfelt und gezogen.
Dazu würfelt man mit beiden Würfeln.

Beim Rechenzeichenwürfel bedeutet
„stelle deine Figur so, dass sie in positive Richtung schaut“
„stelle deine Figur so, dass sie in negative Richtung schaut“
Beim Zahlenwürfel bedeutet z. B.
„gehe drei Felder vorwärts“,
„gehe vier Felder rückwärts“.

Um eine Figur ins Spiel zu bringen, muss man eine „0“ würfeln. Ist keine eigene Figur im Spiel, dreimal würfeln. Figuren werden rausgeworfen, wenn man mit seinem Spielstein auf das Feld einer gegnerischen Figur kommt. Die gegnerische Figur kommt neben das Startfeld, darf aber mitspielen.
Gewonnen hat, wer zuerst zwei Spielfiguren im Ziel hat. Das Zielfeld muss nicht mit genauer Augenzahl erreicht werden.

Beispiele:
a) +(−2) heißt also: „Schaue in positive Richtung und gehe zwei Felder rückwärts.“

b) −(−4) heißt: „Schaue in negative Richtung und gehe dann vier Felder rückwärts.“

Abb. 72: Situierung des Rechnens mit ganzen Zahlen im Schulbuch mathe live 7 (Böer et al. 2013, S. 17)

5.1.3.3 Vergleich der Bewegungshandlung mit dem Pfeilmodell

Beim Aneinanderreihen mehrerer Bewegungen im orientierten Bewegungsmodell fällt schnell eine Unstimmigkeit auf: Wird von einer positiven Zahl eine zweite subtrahiert, entspricht dem eine Vorwärtsbewegung in die umgekehrte Richtung. Abbildhaftes Darstellen dieser Handlung erzeugt also einen umgekehrt gerichteten Pfeil (Abb. 73 links). Das Pfeilmodell nutzt zur Darstellung einer Subtraktion positiver Zahlen jedoch gleichgerichtete Pfeile (Abb. 73 rechts) – die Addition einer negativen Zahl zu einer positiven enthält dieselbe Problematik.

Abb. 73: (+5) – (+3) *im orientierten Bewegungsmodell (links) und im beschriebenen Pfeilmodell (rechts)*

Der ausgemachte Unterschied – BREIDENBACH (1956) würde ihn eine unzureichende Isomorphie nennen (vgl. Abschnitt 6.1.1) – erzeugt wohl auch ohne jede Theorie ein didaktisches Unwohlsein, für dessen Ausdruck und Begründung das vertiefte EIS-Prinzip einheitliche Bezeichner zur Verfügung stellt:

Die Pfeilbilder sind als Abbilder von Bewegungen entlehnte Zeichen. Der Übergang von objekthaften zu entlehnten Zeichen ist jedoch erheblich gestört durch die fehlende Gleichheit der beiden Situationen – sie war gerade eine der Maßnahmen, um horizontale Übergänge zu erleichtern (Unterabschnitt 4.2.2.2). Diese Störung hat einerseits die Konsequenz, dass in einer Zeichenart erschlossene Symbolgehalte kaum übertragbar sind, und verhindert andererseits, dass die entlehnten Zeichen (bevor und nachdem sie Symbole wurden) ikonisch[251] auf die zugrundeliegenden, objekthaften Zeichen verweisen und an diese erinnern – das aber ist eine ihrer zentralen Funktionen (vgl. Unterabschnitt 6.2.2.1). Um das Problem zu lösen, müssten entweder die Bewegungen dem Pfeilmodell angepasst werden oder umgekehrt. Beides ist möglich, weil die intendierten Symbolgehalte jeweils zugänglich sind:

- Möglichkeit (1): Die Spielregeln werden dem Pfeilmodell angepasst.

Positive Zahlen werden durch das Gehen nach rechts, negative Zahlen durch das Gehen nach links dargestellt. Die Blickrichtung entspricht intuitiv der Gehrichtung, sodass sie nicht explizit unterschieden werden muss – daher sei diese Umsetzung als *nicht-orientiertes Bewegungsmodell* bezeichnet.

Dass ein Term wie $(+5) - (+3)$ mit fünf Vorwärtsschritten nach rechts und drei Rückwärtsschritten nach links dargestellt wird, lässt sich nun stärker funktional begründen: Wenn Subtrahieren als Wegnehmen gedeutet wird, muss eine Bewegung nach rechts entfernt werden. Wie soll dies gelingen, wenn doch die wegzunehmende Bewegung der Vergangenheit angehört? Eine Möglichkeit bieten (echte oder vorgestellte) Filmaufnahmen: Auf dem eigenen Smartphone oder in der Vorstellung wird die Aufnahme soweit zurückgespult, dass der ausgeführten Bewegung drei Schritte nach rechts wieder „weggenommen" werden. Beim Zurückspulen vollzieht die gefilmte Person (bzw. eine Person, die das Zurückspulen vor der Klasse simuliert) drei Rückwärtsschritte nach links.

Analog zur Fortsetzung der Regeln im Pfeilmodell auf Differenzen wie $(+5) - (-3)$ kann nun festgelegt werden, dass das „Zurückspulen" des Subtrahenden auch dann stattfinden soll, wenn diese Bewegung zuvor gar nicht ausgeführt wurde. In weiterer Übereinstimmung besteht außerdem die Möglichkeit der Addition von Nullpaaren. Dies wäre erneut dann besonders naheliegend, wenn Nullpaare bereits von vorhergehenden zusammengesetzten Bewegungen bekannt sind.

[251] Es sei daran erinnert, dass ein ikonisches Zeichen in Unterabschnitt 3.5.1.2 als ein solches charakterisiert wurde, „das für etwas steht, bloß weil es ihm ähnelt" (CP 3.362, zitiert nach Nöth 2000, S. 195). Dies scheitert hier.

- Möglichkeit (2): Die Pfeile passen sich den Spielregeln an.

Positive Zahlen werden dem orientierten Bewegungsmodell entsprechend durch Vorwärtsschritte, negative Zahlen durch Rückwärtsschritte dargestellt. Diese Deutung beobachten GALLIN & RUF (1998):

> Von der ungewohnten Schreibweise [−1] scheint eine Suggestivwirkung auszugehen, jedenfalls legt Christina ohne große Umschweife eine Karte einen Schritt weit hinter die Null und bezeichnet sie als Startpunkt. Diese Handlung eröffnet uns neue Möglichkeiten: So, wie wir zuvor den Zahlenstrahl durch Vorwärtsschreiten aufgebaut haben, so erweitern wir ihn jetzt durch Rückwärtsschritte […].
>
> Gallin & Ruf (1998, S. 79)

Wenn hier der Term (+5) − (+3) in objekthaften Zeichen dargestellt werden soll, wäre das Rückwärtsschreiten um drei Schritte missverständlich, denn dieser Bewegung entspricht bereits das Addieren von −3. MINNINGs (1955, S. 25) Deutung der Subtraktion als „Rückgängigmachen" eröffnet einen Ausweg: Würde +3 addiert werden, wären drei Vorwärtsschritte in positive Richtung auszuführen. −(+3) weist dazu an, diese Bewegung mit Hilfe von drei Vorwärtsschritten rückgängig zu machen. Das gelingt durch vorheriges Umdrehen. Die Übertragung auf Differenzen wie (+5) − (−3) verläuft – basierend auf der Festlegung, dass die Subtraktion weiterhin die Addition rückgängig machen soll – analog wie zuvor.

Welche Rückschlüsse sind nun aus der Einpassung des klassischen Pfeilmodells nach KIRSCH (1973), BREIDENBACH (1969) oder MINNING (1955) in die EIS-Palette für den praktischen Unterricht zu ziehen?

- Falls das klassische Pfeilmodell durch Bewegungen ergänzt oder vorbereitet werden soll, muss eine positive Zahl von Vorwärtsschritten in positive Richtung, eine negative Zahl mit Vorwärtsschritten in negative Richtung verkörpert werden – anders als im orientierten Bewegungsmodell.
- Falls an das orientierte Bewegungsmodell Pfeile als entlehnte Zeichen anknüpfen, sollen diese nicht den bekannten Regeln des klassischen Pfeilmodells Folge leisten, sondern die Handlungen getreu abbilden.

Aus der Analyse der Passung zwischen Bewegungen und dem Pfeilmodell mithilfe des vertieften EIS-Prinzips entspringt also keine zwingende Entscheidung zwischen dem orientierten und dem nicht-orientierten Bewegungsmodell. Daher sollte keine Deutung, die Lernende im Unterricht vorschlagen, als falsch bezeichnet werden, bloß, weil sie in der eigenen Wahrnehmung der Lehrperson umständlicher oder ungeschickter ist. Womöglich ist KÜHNELs (1954, S. 212; Original von 1916) Plädoyer für das zeitweise Zulassen von Umwegen auch hier recht am Platze: „Hier hineinfahren mit einem ‚So dumm!' oder ‚Falscher Weg!' würde das Kind nur irre machen und ihm auch dort die Sicherheit nehmen, wo es gar nicht irren kann".

Unabhängig von einer Entscheidung produziert die Einpassung auf der EIS-Palette noch einen dritten Rückschluss für die Gestaltung der Pfeile – hier herausgestellt am klassischen Pfeilmodell:

- In objekthaften Zeichen (Bewegungen) sind Rückwärtsbewegungen unmittelbar als solche zu erkennen. Wurde die Handlung in entlehnte Zeichen (Pfeile) übersetzt, ist das Hineinsehen der Rückwärtsbewegung erschwert: Nur die Positionierung des Pfeils dient als Hinweis darauf.
  Der Gebrauch des Modells kann erleichtert werden, wenn die Unterscheidung zwischen Vorwärts- und Rückwärtsbewegung in entlehnten Zeichen ebenso eingängig dargestellt wird wie in objekthaften Zeichen. Dies gelingt beispielsweise mit unterschiedlichen Farben (Abb. 74). Dadurch werden beide Leitsätze bedient: Einerseits wird das Erschließen der intendierten Symbolgehalte erleichtert, andererseits verbessert sich die Gleichheit der beiden Situationen in objekthaften bzw. entlehnten Zeichen.

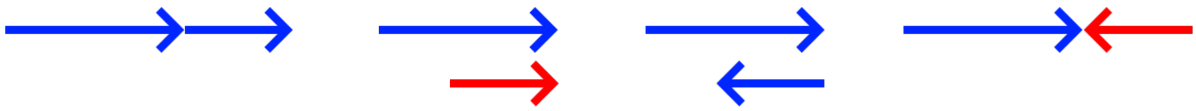


Abb. 74: (+5) + (+3), (+5) – (+3), (+5) + (–3) *und* (+5) – (–3) *im eingefärbten Pfeilmodell*

Dass sich allein durch die Analyse der Passung keines der Bewegungsmodelle als überlegen herausstellt, bedeutet nicht, dass die Entscheidung dem Zufall zu überlassen sei. Es müssen jedoch andere Argumente ins Feld geführt werden: Solche wären beispielsweise KIRSCHs (1973) obige Bedenken zur Deutung der Subtraktion als Umkehrung der Addition, der Wunsch, den Vektorbegriff vorzubereiten, oder BAUERSFELDs (1983) Zweifel an der Zumutbarkeit einer Unterscheidung von Geh- und Blickrichtung (siehe Unterabschnitt 5.1.3.4) – und letztlich auch die konkrete Unterrichtssituation: Sollte eine Lerngruppe vollends von der einen Verkörperung der Zahlen als Bewegungen überzeugt sein und das Gegenstück als unnatürlich empfinden, darf dies den Ausschlag geben.

BAUERSFELDs (1983) Kritik lässt sich im Sprachgebrauch der EIS-Palette begründen und regt zu weiteren Überlegungen im Rahmen dieser Theorie an – daher sei sie im nachfolgenden Unterabschnitt genauer beleuchtet.

5.1.3.4 Weitere Analyse des Spiels *Hin und her*

BAUERSFELD (1983) erachtet die im orientierten Bewegungsmodell geforderte Unterscheidung von Blickrichtung und Gehrichtung zwar als möglich und vorstellbar, aber im Alltag als unüblich und unzumutbar. Dem ließe sich entgegenhalten, dass eine künstliche Umwelt zu Lernzwecken geschaffen wird, die den außerschulischen Alltag nicht zwangsweise adäquat abbilden muss. Doch selbst innerhalb dieser künstlichen Umwelt ist die Deutung der Addition und Subtraktion als „Schaue in die positive bzw. negative Richtung“ höchst erklärungsbedürftig, weil sie sich nicht mit bekannten Grundvorstellungen dieser

Operationen deckt – ohne dass dies einer für Lernende nachvollziehbaren Herleitung entspringt. Hier „wird vertraute Erfahrung“ – dazu gehört auch innerschulische Erfahrung, z. B. vertraute Deutungen von Addition und Subtraktion[252] – „zu *Veranschaulichungszwecken deformiert*, und das ist ein Indiz dafür, daß es mit der Schlüssigkeit des Übertragens hapert“ (Bauersfeld 1983, S. 36; Hervorhebung im Original).

Diese Deformation der außer- und innerschulischen Erfahrung tritt Lernenden als Spielregel in einem Spielkontext entgegen, und dies stellt sich als weiteres Problem heraus: In einem Spielkontext werden die vorgeschriebenen Regeln üblicherweise nicht hinterfragt. Wenn nun begründet werden soll, warum das Subtrahieren einer negativen Zahl dem Addieren der positiven Gegenzahl entspricht, dann kann die Antwort nur lauten: Weil die Spielregeln von *Hin und her* es so festlegen; es findet lediglich ein „wahrnehmungsmäßiges Ablesen“ statt (Fricke 1970a, S. 19) – ganz ähnlich wirkt es im Pfeilmodell bei VOM HOFE & FAST (2015). Die Kritik lässt sich im Sprachgebrauch des EIS-Prinzips wie folgt ausdrücken: Begründungen, die auf den Eigenschaften der Addition und Subtraktion beruhen, zählen zu den intendierten Symbolgehalten und müssen in die Zeichen hineingesehen werden, damit daraus Symbole wachsen. Sie sind zwar potentielle Symbolgehalte (d. h., es ist grundsätzlich möglich, sie in das Spielen hineinzusehen), aber sie sind aus den oben genannten Gründen für Lernende kaum zugänglich – der Leitsatz für vertikale Übergänge wird also verletzt.

Der Spielkontext erscheint somit eher hinderlich als förderlich: Zwar mag er die von BRÜCHER (1911, S. 14) gelobte „erfreuliche Belebung“, Spielspaß und dadurch (oberflächliche) Motivation stiften, doch darf dies nur von zweitrangiger Bedeutung bei der Bewertung eines Modells sein (siehe Abschnitt 6.2.1). Zum obigen Kritikpunkt – als Spielregel wird die Deutung von Addition und Subtraktion kaum hinterfragt – können sich sogar weitere gesellen:

- Die unweigerliche Aufmerksamkeitsfokussierung auf das Spielziel des Gewinnens (vgl. Abb. 72) ist dem Durchdringen der Zusammenhänge nicht zuträglich und lenkt eher vom Wesentlichen ab: Nicht dem Zustand, ein Randfeld erreicht zu haben, sondern dem Weg dorthin sollte die Aufmerksamkeit gelten.

---

[252] Oft werde gefordert, eine Problemstellung „müsse an die Erfahrungswelt des Kindes anschließen. Das ist sicher wahr; es fragt sich nur, was darunter zu verstehen sei. Die Erfahrungswelt des Kindes umfasst nicht nur das Wissen, das es in seiner außerschulischen Umgebung gewonnen hat. Zwar werden wir im Unterricht die Beziehung zu seiner täglichen Erfahrung überall schließen, wo dies sinnvoll ist, und wir wissen auch, daß ein intelligenter und wirklichkeitsverbundener Lehrer hierzu eine Vielzahl von Gelegenheiten wahrzunehmen weiß. Es bleibt indessen die Tatsache bestehen, daß viele Problemstellungen vom Schüler freudig aufgegriffen werden, wenn sie auch nicht unmittelbar mit seiner Umwelt zusammenhängen. Das Problem kann auch aus dem vorangehenden Unterricht herauswachsen. Es muß in Begriffen formuliert sein und sich auf Tatbestände stützen, welche dem Schüler vertraut sind, habe es sie im vorangehenden Unterricht oder in seiner außerschulischen Erfahrung gewonnen“ (Aebli 1983, S. 197).

- Die nach THOMAS JAHNKE (2005) aufgefasste Authentie[253] ist eingeschränkt: Das Spiel will weitaus mehr, als es zugibt.
- Das Spielfeld birgt dieselbe Problematik, die auch Hinführungen zum Koordinatensystem mittels eines Schachbrettes innewohnt: Ziffern werden zur Nummerierung (ungleich großer) Zwischenräume verwendet. Dass dies für Zahlengeraden nicht infrage kommt, liegt auf der Hand.[254]

Aus all diesen Gründen sei hier vorgeschlagen, den Spielkontext durch die von GALLIN & RUF (1998, S. 78 f.) in Unterabschnitt 4.1.2.2 beschriebene Situierung der Zahlengeraden zu ersetzen: Im Klassenraum erschaffen Lernende „mit ihren eigenen Schritten ihren eigenen Zahlenstrahl" bzw. ihre eigene Zahlengerade, indem sie entsprechende Markierungen auf dem Boden platzieren. In einer späteren Phase kann das Schreiten auf der Zahlengeraden durch Spielfiguren und eine kleinere Zahlengerade auf einem DIN-A4-Blatt repliziert werden, sodass nicht ausschließlich an einem Demonstrationsmodell gearbeitet werden muss, an dem die meisten Lernenden keine eigenen Handlungen ausführen. Darüber hinaus wechselt hierbei der Standort innerhalb der Aufgabensituation (vgl. Unterabschnitt 4.1.2.2 sowie Maier 1999, S. 41).

Die Umsetzung von Addition und Subtraktion soll innerhalb dieser Situierung nicht mehr durch vorgegebene Spielregeln bestimmt sein, sondern der Überlegung der Lernenden entspringen – sie wird also zum Ausgangsproblem: *Bevor wir mit Bewegungen auf der Zahlengeraden neue Rechnungen untersuchen, sollten wir zunächst altbekannte Rechnungen auf diese Weise verstehen: Wie stellen wir positive und negative Zahlen dar? Wie funktionieren Addition und Subtraktion mit Bewegungen auf der Zahlengeraden?*

Neben dem Aufwiegen der Nachteile des Spielkontextes ist in dieser Situierung transparent, dass weder Spielspaß noch Nützlichkeit Anlass der Beschäftigung sind, sondern das Ziel, selbst etwas Neues herauszufinden – spätestens seit der Reformpädagogik eine Standardforderung der Mathematikdidaktik. Daher läge

[253] „Wenn man die Bezeichnung authentisch für Mathematikaufgaben retten will, dann darf man sie nicht an die Realität oder authentische Kontexte binden, sondern muss sich mit der übertragenen Bedeutung ‚echt', ‚glaubwürdig', ‚zuverlässig' begnügen. Unter ‚echt' könnte man auch ‚in sich stimmig' verstehen, ob eine Aufgabe also nichts anderes will, als sie zugibt" (Jahnke 2005, S. 12).

[254] „Ich sah sogar eine Zahlengerade, bei der die Ziffern 1, 2, … genau in der Mitte zwischen den Teilpunkten standen; ihr Autor hatte in der Tat beabsichtigt, die Intervalle zu nummerieren. Es ist das an und für sich nicht so dumm. Wir machen es ja mit den Jahren nach Chr. […]. Das Unzweckmäßige dieser Methode zeigt sich bei den Jahren vor Chr.: das, an dessen Ende Jesus geboren wurde, heißt 1 vor Chr., und es gibt gar kein Jahr 0, sondern auf die 1 vor Chr. folgt direkt 1 nach Chr. Es versteht sich, daß der Autor, der die Intervalle nummerierte, sich in Widersprüche verstrickte, als er die Erforschung der Zahlengeraden ins Negative fortsetzte" (Freudenthal 1973, S. 231).

hier nach JAHNKE (2010) keine negativ konnotierte Einkleidung[255] mehr vor. Das eigene Nachdenken erzeugt im Unterricht allerdings auch eine Offenheit, mit der größere Anforderungen an die Lehrperson einhergehen: Sie sollte beispielsweise auf mögliche Ideen vorbereitet sein und deren Anschlussfähigkeit einschätzen können. Dabei unterstützen die Ausführungen aus Unterabschnitt 5.1.3.2.

5.1.4 Zum Steigungsbegriff bei linearen Funktionen

5.1.4.1 (Keine) Grundvorstellungen zum Steigungsbegriff

Wenn innerhalb der Didaktik der Analysis Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe beleuchtet werden, spielt der Steigungsbegriff bei linearen Funktionen meist eine Nebenrolle. So wirkt es zum Beispiel im einschlägigen Buch von GREEFRATH, OLDENBURG, SILLER, ULM & WEIGAND (2016), obwohl die Autoren überzeugend die allgemeine Relevanz von Grundvorstellungen darlegen, aufgefasst als „eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt" (ebd., S. 17): „Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen [sind] die Basis für jegliches mathematische Denken", geben Lehrenden eine Zielorientierung und Wissen „darüber, was sich Lernende unter mathematischen Begriffen (wie etwa Ableitung oder Integral) vorstellen sollten", und schaffen „einen Rahmen für empirische mathematikdidaktische Forschung" (ebd., S. 20 f.). „Ohne die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen besteht die Gefahr, dass lediglich formales, rezeptives Wissen erworben wird" (ebd., S. 20). Für diese Entwicklung könne die didaktische Phänomenologie nach FREUDENTHAL (1983) eine Leitlinie bilden:

> Dabei geht es Freudenthal nicht um das Lehren eines in irgendeiner Weise abstrakt vorhandenen Begriffs, der durch unterschiedliche Darstellungen veranschaulicht oder mit Phänomenen erklärt wird, sondern er möchte *ausgehend* von Phänomenen Vorstellungen über Begriffe aufbauen. Phänomene sind die Ausgangspunkte für das Lehren und das Lernen.
>
> Greefrath et al. (2016, S. 43; Hervorhebung im Original)

Für den Funktionsbegriff werden als zielführende Phänomene das Gehen mit variierenden Geschwindigkeiten, gleichmäßiges Befüllen unterschiedlich geformter Gefäße und das Ziehen an einer Schraubenfeder genannt (ebd., S. 51). Propädeutisch untersuchen Lernende hier bereits Änderungsraten – aber wie gelangen sie zum enger gefassten Begriff der Steigung einer linearen Funktion?

[255] „Man kann zum einen Mathematik benutzen, um die Welt zu verstehen. Das nennt man Modellieren, in seiner einfachsten Form wohl auch [A]nwenden. Man kann zum anderen die Welt benutzen, um Mathematik zu verstehen. Dies wird heute häufig mit einigem Schmäh auch als Einkleiden bezeichnet. Aber diese abfällige Konnotation ist nur dann berechtigt, wenn der Einkleider dem Auskleider suggeriert, er erführe etwas über die Welt, was meistens nicht der Fall und auch gar nicht Sinn der Übung ist" (Jahnke 2010, o. S.).

> Wenn im Mathematikunterricht Funktionstypen wie lineare Funktionen $x \longmapsto mx + t$, quadratische Funktionen $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, Sinusfunktionen $x \longmapsto a\sin\bigl(b(x + c)\bigr) + d$ oder Exponentialfunktionen $x \longmapsto ca^x + b$ untersucht werden, ist jeweils auch die Frage eingeschlossen, welche Bedeutung die Parameter für den Verlauf des Graphen besitzen. Bei linearen Funktionen gelangt man so zu den Begriffen der Steigung und des y-Achsenabschnitts.

Greefrath et al. (2016, S. 57)

Diese Herangehensweise ist zwar operativ im Sinne von WITTMANN (1985, S. 8), „denn man führt algebraische Veränderungen an dem Funktionsterm aus und studiert, wie sich diese auf die Graphen auswirken“. Aber sie vermittelt keine inhaltliche Deutung zu einer Zahl wie $\frac{1}{3}$ in der Funktionsvorschrift $x \longmapsto \frac{1}{3}x + 2$. Bestenfalls bilden Lernende empirisch einen Teilaspekt, den BENDER (1991a) zu den Grundverständnissen zählen würde: Je größer der Betrag der Steigung, desto steiler steigt oder fällt der Graph. Aber „*Verständnis ist nicht ohne Vorstellungen, und Vorstellungen sind nicht ohne Verständnis möglich*“ (Bender 1991a, S. 55; Hervorhebung im Original). Daher lauert hier die bereits erkannte Gefahr, ohne tragfähige Grundvorstellungen formales, rezeptives Wissen zu vermitteln: Nur mit dem obigen Grundverständnis ausgestattet können Lernende die Steigung des Graphen einer linearen Funktion zwar verlässlich, aber vorwiegend verfahrensorientiert bestimmen – womöglich auf Anweisung einer Lehrperson, der nach Lektüre einschlägiger Literatur die Relevanz und der Zweck einer inhaltlichen Deutung der Steigung kaum bewusst sein dürfte: *Ich zeichne ein Steigungsdreieck mithilfe zweier gut ablesbarer Punkte und messe die Katheten: 1 und 3. Für die Steigung muss ich jetzt das eine durch das andere dividieren.* $\frac{3}{1} = 3$ *wäre falsch, weil das viel zu steil wäre, also muss die Steigung* $\frac{1}{3}$ *sein* (Abb. 75).

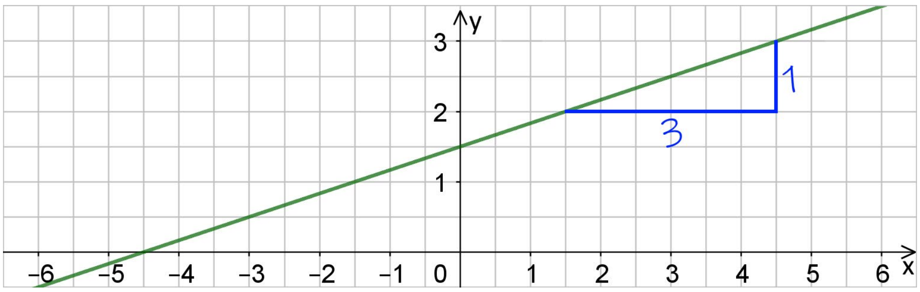


Abb. 75: Steigungsdreieck als erster Schritt der Steigungsbestimmung

Bei einem solchen Vorgehen produzieren Lernende in der Regel richtige Ergebnisse, da der anzuwendende Regelkanon überschaubar bleibt. Es ist aber nicht frei von unerwünschten Nebenwirkungen, die sich teilweise erst im Analysisunterricht der Sekundarstufe II deutlich manifestieren, sobald der Wust von Regeln das rein mechanische Arbeiten erschwert: Dieser spätere Analysisunterricht sei „oft dadurch geprägt, dass (zu) früh mit dem Kalkül gearbeitet wird, Kalkül vor Verständnis geht und dass dann oft unverstanden gerechnet wird, ohne eine Grundvorstellung von lokaler Steigung, Ableitung(-sfunktion) oder

Krümmung zu haben“ (Hans-Jürgen Elschenbroich 2016, S. 26). RAINER DANCKWERTS & DANKWART VOGEL (2010, S. 13) konkretisieren ELSCHENBROICHs (2016) Eindruck durch eine exemplarische Gegenüberstellung zu „Idee und Bedeutung vs. kalkülhaftes Arbeiten“. Diese in der Sekundarstufe II identifizierten Probleme können präventiv abgemildert werden, indem der Analysisunterricht der Sekundarstufe I auf solche Bestandteile hin abgesucht wird, an denen „die fruchtbare Balance zwischen [den] beiden Polen“ Kalkül und Grundvorstellung wiederhergestellt werden muss (Danckwerts & Vogel 2010, S. 14): Überwiegt das Kalkül, findet schon vor der Sekundarstufe II eine schleichende Gewöhnung an rein mechanisches Ermitteln von Ergebnissen in diesem Bereich der Schulmathematik statt, und es werden unerwünschte Maßstäbe für die Tiefe der Durchdringung beim Umgang mit Funktionen gesetzt. In die Gegenüberstellung *Idee und Bedeutung vs. kalkülhaftes Arbeiten* fügt sich das Berechnen der Steigung umstandslos ein. Darüber hinaus erscheint es fraglich, ob sich ein tiefgreifendes Gefühl von Überzeugung und Sinnhaftigkeit in der Sekundarstufe II einstellen kann, wenn das Fundament letztlich unverstanden ist: Ein Differenzenquotient soll als Steigung gedeutet werden – aber was genau ist eine Steigung eigentlich?

Möglicherweise wird der Steigungsbegriff in mathematikdidaktischer Literatur dennoch oftmals vergleichsweise stiefmütterlich behandelt, weil er selbsterklärend zu sein scheint, in der Sekundarstufe I kaum Probleme verursacht und gemeinsam mit dem y-Achsenabschnitt auftritt, der auch fast ohne didaktisches Zutun im Kontext linearer Funktionen von Lernenden schnell erfasst wird.[256] Vielleicht drückt sich hier aber auch die Schwierigkeit aus, Grundvorstellungen zum Steigungsbegriff explizit zu formulieren.[257] So betonen beispielsweise ROTH

[256] Dennoch birgt der Begriff des y-Achsenabschnitts Lernhürden, denn spätestens bei Parabeln in Scheitelpunktform gibt die *alleinstehende* Zahl nicht mehr den y-Achsenabschnitt an. Hier droht ein *Übergeneralisieren* (Malle 1993): Lernende entwickeln zunächst anhand von Musterbeispielen ein allgemeines Schema, das den „Charakter mathematischer Regeln“ habe (ebd., S. 160): *Die alleinstehende Zahl gibt den y-Achsenabschnitt an.* „[G]leichzeitig mit der Bildung des allgemeinen Schemas“ müsse eigentlich „ein Metawissen mitentwickelt werden […], welches besagt, wann das neue Schema angewandt werden darf und wann nicht. […] Dieser kritische Schritt unterbleibt leider häufig, sodaß der Anwendungsbereich der allgemeineren Schemas nicht genügend eingeschränkt ist“ und es auch in unpassenden Situationen Anwendung findet (ebd., S. 172). Allein die „Wahrnehmung gewisser Merkmale eines algebraischen Ausdrucks“ (*eine alleinstehende Zahl*) bewirkt dann den Aufruf des besagten Schemas (ebd., S. 162). Eine solche automatische Verbindung nennt MALLE (1993, S. 163) mit Verweis auf SHEVAREV (1946) *Konnexion*.

[257] Die besagte Schwierigkeit, eine Bedeutung in Worten zu explizieren, zeigt sich auch bei anderen Begriffen, wie BREIDENBACH (1956, S. 239; Hervorhebung im Original) betont: „Die Definition lautet: *Einen Bruch erweitern bedeutet, ihn aus zweimal, dreimal, … so viel Stücken aufbauen.* Das bisher in Schulen übliche Verfahren hat niemals in Worten angegeben, was Erweitern eigentlich bedeutet. Das ist ein nicht geringer sachlicher und auch methodischer Fehler. Erweitern *bedeutet* nicht, Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplizieren. Diese Wörter geben lediglich an, wie wir das Erweitern *technisch* durchführen.“ In diesem Licht erscheint der Satz, in dem die durchaus vorstellungsbasierte Hinführung zum Erweitern bei PADBERG & WARTHA (2017, S. 48) mündet, unglücklich formuliert: „Dieses Multiplizieren von Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben (von 0 und 1 verschiedenen) natürlichen Zahl nennen wir Erweitern.“

& SILLER (2016, S. 3) zwar, dass Grundvorstellungen zu diesem Begriff ausgebildet werden sollen, konkretisieren sie aber nicht: „Eine sekundäre Grundvorstellung zur Änderungsrate einer linearen Funktion kann z. B. anhand eines Steigungsdreiecks am Funktionsgraphen erworben und mental ‚gespeichert' werden."[258]

Der vorliegende Abschnitt nähert sich dieser Problematik daher mithilfe des vertieften EIS-Prinzips und kehrt erst im Nachhinein zur Frage möglicher Grundvorstellungen zurück. Auf diese Weise stellen sich zwar andere Fragen, doch die Antworten zielen auf denselben Kern ab:

- Was sind intendierte Symbolgehalte, die Lernende in ein formal-algebraisches, kodifiziertes Zeichen wie $\frac{1}{3}$ hineinprojizieren sollen, wenn sie es z. B. in der Funktionsvorschrift $x \longmapsto \frac{1}{3}x + 2$ verwenden?[259] Dieselbe Frage gilt für konstruktiv-geometrische, ebenfalls kodifizierte Zeichen wie Steigungsdreiecke.
- Welche objekthaften und welche entlehnten Zeichen machen diese intendierten Symbolgehalte zugänglich?[260]

Zur Komplexitätsreduzierung werden die folgenden Vorschläge ohne Einbettung in einen Lernprozess entworfen. Es wird also offengelassen, ob hieraus eine erste Einführung linearer Funktionen entwickelt werden sollte, an die variierende

[258] Nach ANGELIKA BIKNER-AHSBAHS könne die Formulierung von Grundvorstellungen zum Steigungsbegriff an den drei Aspekten *Winkel*, *Verhältnis von Zahlenpaaren* (vorrangig prädikativ) und *Änderung pro Einheit* (vorrangig funktional) ausgerichtet werden, die jeweils gewisse Eigenschaften des Steigungsdreiecks aufgreifen (persönliche Kommunikation, 08. Januar 2022).
[259] Diese Frage zielt auf die *allgemeine Verbindlichkeit* und den *fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet* ab – zwei Ebenen im Konzept der Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen nach BENDER (1991a).
[260] Diese Frage überschneidet sich erstens mit BENDERs (1991a) dritter Ebene (*Verankerung in der Lebenswelt*), zweitens mit dem Anspruch, Grundvorstellungen ausgehend von Phänomenen zu entwickeln (Greefrath et al. 2016) und drittens mit der „Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen". Letztere bildet einen von drei Aspekten der individuellen Begriffsbildung, die VOM HOFEs (1995, S. 97) Grundvorstellungsidee charakterisiert. Die übrigen beiden Aspekte lauten „Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen', die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen", und „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur" (ebd., S. 98).
Die unterschiedlichen Grundvorstellungskonzepte und das vertiefte EIS-Prinzip hegen teilweise übereinstimmende Absichten, die in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter expliziert werden. Dieser Explikation müsste zunächst die Herausstellung eines viablen Grundvorstellungskonzepts vorangestellt werden – siehe dazu REMBOWSKI (2015) –, denn die Begriffsbilder zum Grundvorstellungsbegriff sind in der mathematikdidaktischen Literatur alles andere als einheitlich: Wie soll etwa die Deutung einer Grundvorstellung als das „*Gemeinsame aller Vorstellungen*" bei JAN WESSEL (2015, S. 7; Hervorhebung im Original) mit der allgemeinen Verbindlichkeit und dem fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet vereinbar sein? Müssten nicht sogar bewährte Grundvorstellungen – z. B. Subtrahieren als Wegnehmen, Bruch als Teil eines Ganzen – verworfen werden unter dem Anspruch, *allen* Vorstellungen zugehörig zu sein? Da Kapitel 5 auf die prototypische Begriffsbildung zu zentralen Begriffen des vertieften EIS-Prinzips abzielt und allein dieser Prozess bereits diverse Begriffsbilder aktiviert, wurde im Fließtext auf die Diskussion unterschiedlicher Grundvorstellungskonzepte verzichtet.

Kontexte auch aus der natürlichen Umwelt anknüpfen, oder ob die Umsetzung in der Praxis als Einschub an späterer Stelle geeignet ist, nachdem „so mancher Schüler erst über das kalkülhafte Arbeiten an die Sache herangeführt und für die Bedeutungsfrage gewonnen“ werden konnte (Danckwerts & Vogel 2010, S. 14).

5.1.4.2 Analyse mithilfe des EIS-Prinzips

Im eng gefassten Kontext von Graphen linearer Funktionen in einem üblichen Koordinatensystem lautet *ein* intendierter Symbolgehalt: Die Steigung liefert ein numerisches Maß für die Steilheit eines gleichmäßigen Anstiegs oder Abstiegs, indem sie das Verhältnis aus Schritten in y-Richtung zu Schritten in x-Richtung bildet (vgl. Silvia Drees 2013). Der erste Impuls, der aus dem EIS-Prinzips entspringt, ist das Anbieten aller Zeichenarten für die Erschließung dieses Symbolgehalts – also insbesondere auch objekthafter Zeichen (vgl. Abschnitt 4.2.1).

Als objekthafte Zeichen, die diesen Symbolgehalt zugänglich machen, wird der Bau von Rampen mithilfe einer Holzleiste und einem kleinformatigen Gliedermaßstab vorgeschlagen, der beim Ausklappen in senkrechter Position arretiert. Der senkrecht ausgeklappte Gliedermaßstab fungiert als Unterbau und wird auf der eigenen Tischplatte aufgestellt, sodass die Holzleiste als eigentliche Rampe an dessen Enden aufgelegt werden kann (Abb. 76).

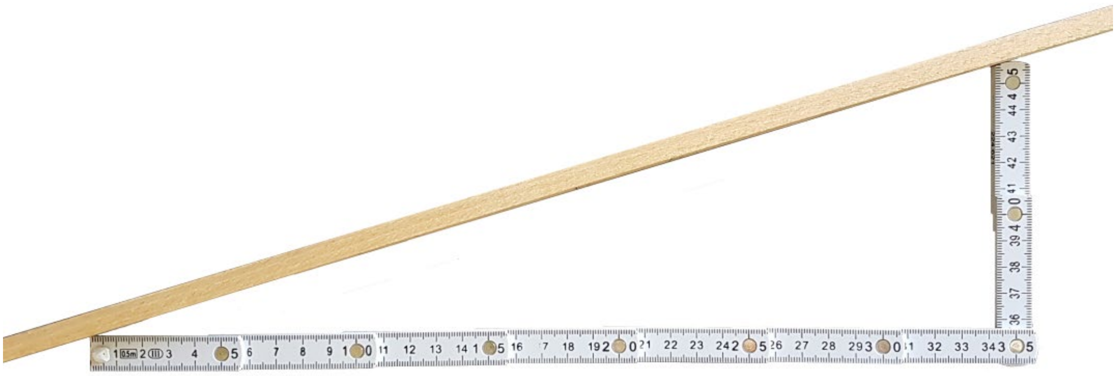


Abb. 76: Rampenbau mit einer Holzleiste und einem Gliedermaßstab

Einbinden lässt sich diese Handlung beispielsweise an die folgende Situation: Die Lehrperson zeichnet eine scheinbar zufällig gewählte, gerade Linie an die Tafel.[261]

[261] Die gerade Linie soll von Lernenden als Aufriss einer Rampe gelesen werden, also als entlehntes Zeichen. Diese Assoziation kann im Unterricht erleichtert werden, indem zunächst einige objekthafte Zeichen – beliebige Rampen auf den Tischen – erzeugt werden, um den vollzogenen Reduktionsprozess beim Übergang zu entlehnten Zeichen nachvollziehen zu können. Als Ausgangspunkt der beabsichtigten Zeichenübergänge auf der EIS-Palette gelten dann naiv-objekthafte Zeichen, nicht aber naiv-entlehnte Zeichen, wie der Fließtext andeutet. Weiterhin ließe sich die Assoziation dadurch unterstützen, dass ein Unterbau an der Tafel ergänzt wird – man denke hier an das Verbessern von Gleichheit der Situationen mit verschiedenartigen Zeichen als eine Strategie zur Unterstützung der Übergänge zwischen Zeichenarten in Unterabschnitt 4.2.2.2. Dies könnte jedoch dazu verleiten, *genau diesen* Unterbau anzustreben und dadurch das Erschließen der intendierten Symbolgehalte erschweren, die unter anderem die Regel umfassen, dass *unterschiedliche* Unterbauten an *jeder* Stelle der Rampe bzw. Linie ansetzen können.

Hierbei existieren günstige und weniger günstige Steigungen in Anbetracht des weiteren Unterrichtsverlaufs. Es sei davon ausgegangen, dass – für ein hinzugedachtes kartesisches Koordinatensystem in üblicher Positionierung und mit gleicher Achsenskalierung – eine Steigung von etwa $\frac{2}{3}$ vorliegt. Natürlich sollte der Zeichenprozess der Lehrperson die anvisierte Entdeckung der Steigungsmessung nicht bereits vorwegnehmen.

Die Aufgabe lautet: *Baue mit dem Material eine Rampe auf deinem Tisch, die genauso steil ist wie die Linie an der Tafel. Baue zunächst nach Augenmaß, gleiche dein Bauwerk dann an der Tafel ab und nimm gegebenenfalls Korrekturen vor. Findest du mehrere Möglichkeiten?*

Für das Anhalten des Baumaterials ist es vorteilhaft, wenn die Linie bis zur bodennahen Tafelkante gezeichnet wurde, die eine Orientierung für die waagerechten Elemente des Gliedermaßstabs darstellt. Dass eine waagerechte Positionierung dieser Elemente überhaupt angestrebt wird, resultiert intuitiv aus dem vorherigen Rampenbau auf der eigenen Tischplatte. Ausprobierend stoßen Lernende neben einigen ungenauen auf zwei besonders zufriedenstellende Lösungen (Abb. 77). Weitere passende Aufbauten werden gefunden, wenn sich Lernende mit ihrem Baumaterial zusammenschließen. Die Holzleisten sind dann zwar womöglich zu kurz, um noch angehalten zu werden, aber der Abgleich mit der Linie an der Tafel funktioniert auch ohne sie.

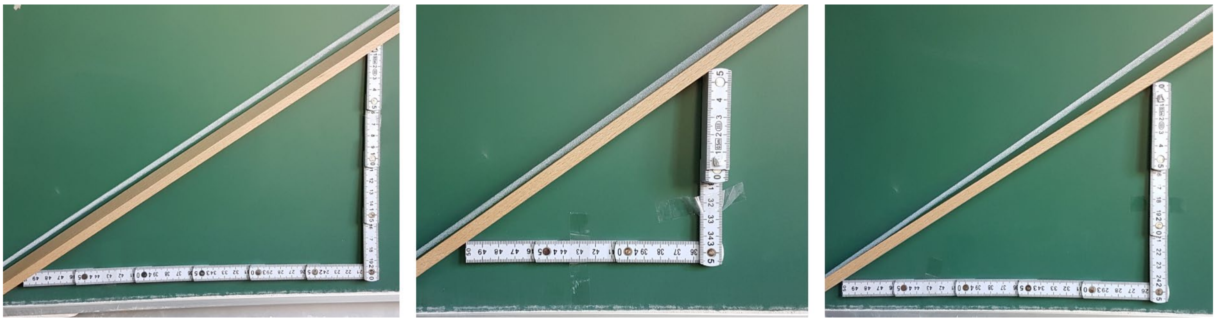


Abb. 77: Gebaute Rampen im Vergleich mit der vorgegebenen Linie

Steckwürfel wären hier auch ein denk- und oft verfügbares Material für den Unterbau[262] – in Anbetracht des Leitsatzes für die vertikalen Übergänge jedoch ungeeignet: Damit die beabsichtigte Verfahrensweise des Messens von Steigungen – ebenfalls ein intendierter Symbolgehalt – in das Handeln mit Steckwürfeln

[262] Denkbar wären ebenfalls zwei skalierte Stäbe, die durch ein Kreuzstück geführt senkrecht zueinander verschiebbar sind – wegen der nicht unerheblichen Materialkosten kann sich die Herstellung in einem 3D-Drucker anbieten. Neben der erschwerten Bedienbarkeit (z. B. bei der Arretierung) sprechen Argumente aus Sicht des EIS-Prinzips gegen dieses objekthafte Zeichen: Beim Einzeichnen von Steigungsdreiecken – egal, ob sie als entlehnte oder kodifizierte Zeichen wahrgenommen werden – sollen lediglich zwei Katheten ergänzt werden. Im soeben beschriebenen objekthaften Zeichen liegen jedoch sich kreuzende Stäbe vor, die in der Regel nicht beim Kreuzstück enden. Die Gleichheit zwischen den Situationen in objekthaften Zeichen bzw. in entlehnten oder kodifizierten Zeichen ist daher beeinträchtigt und läuft dem Leitsatz für vertikale Übergänge auf der EIS-Palette zuwider.

hineingesehen wird, bräuchte es eine Zusatzregel: Nur die *innenliegenden* Flächen der Würfel werden gezählt, nicht die Würfel selbst. Wie in Abschnitt 4.2.3 bei der Formulierung des erwähnten Leitsatzes bereits ausgeführt wurde, steigert jede verzichtbare Zusatzregel die Komplexität eines Modells ohne Notwendigkeit und hemmt die Zugänglichkeit der intendierten Symbolgehalte.

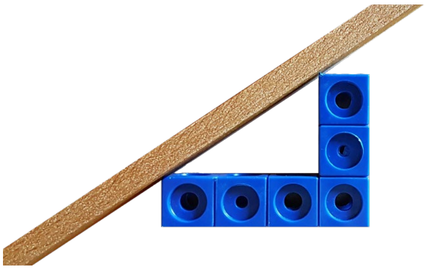


Abb. 78: Rampenbau mit einer Holzleiste und Steckwürfeln

Die Gemeinsamkeit aller Aufbauten kann in einer anschließenden Reflexion herausgearbeitet werden: Das Verhältnis aus der Anzahl der vertikal laufenden Streifen zur Anzahl der horizontal laufenden Streifen ist stets gleich: „2 nach oben pro 3 nach rechts".[263] Auch bei Betrachtung der Zentimeterskala findet sich dieses Verhältnis wieder, und mit dieser Spielregel lassen sich sogar passende, riesige Rampen vorstellen und beschreiben.

Die Ergebnisse der effektiven und vorgestellten Handlungen werden nun abbildhaft festgehalten. Die Lehrperson sieht hierin bereits die später gezielt verwendeten Steigungsdreiecke, die für die Lernenden dank der Vorarbeit jedoch nicht als kodifizierte Zeichen entgegentreten, sondern als vertraute, entlehnte Zeichen in einem bedeutungsvollen Kontext. Hierbei sollte auch der Wechsel von der vertikal positionierten Tafel zum horizontal positionierten Heft kurz thematisiert werden (vgl. Abschnitt 5.2.1).

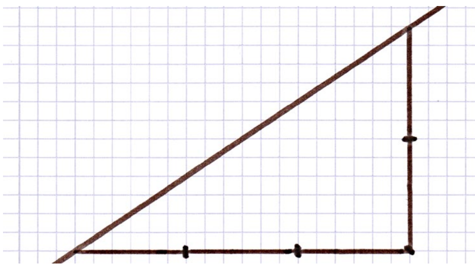
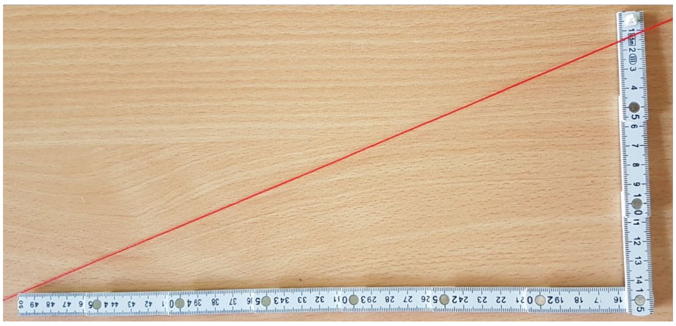


Abb. 79: Abbild des Rampenbaus

[263] Das umgekehrte Verhältnis „3 nach rechts pro 2 nach oben" würde die derzeitigen Bedürfnisse ebenso gut bedienen. Beide Varianten sind in Alltagssituationen vertreten: Während Geschwindigkeiten auf der Autobahn in km/h angegeben werden, orientieren sich Langläufer meist an der Zeit pro Kilometer. Die Lehrperson muss daher eine Festlegung treffen, um spätere Missverständnisse in der Bruchschreibweise zu vermeiden. Ob die folgenden Beweggründe der Entscheidung von Lernenden unmittelbar nachvollzogen werden müssen, sei offengelassen: Im Koordinatensystem wird die unabhängige Variable auf der Abszisse abgetragen, sodass Fragen nach Auswirkungen von Schritten nach rechts oder links typisch sind. Diese zu beantworten, fällt mit der Information „2 nach oben pro 3 nach rechts" weitaus leichter, weil kein Umdenken notwendig ist. Darüber hinaus ist $f(x) = m \cdot x + n$ wohl ansprechender als $f(x) = \frac{x}{m} + n$.

Sind anschließend neue Linien von der Tafel nachzubauen, liegt der Sinn des Messens ihrer Steilheit auf der Hand: Auf diese Weise kann das naive Vorgehen gemäß der Strategie Versuch und Irrtum durch ein effizienteres ersetzt werden. Aber wie genau funktioniert das Messen mit dem Gliedermaßstab?

Um allen Lernenden Gelegenheit zur eigentätigen Entwicklung von Ideen zu geben, kann das Demonstrationsmodell an der Tafel von Schnüren auf den Tischen abgelöst werden, die mit Klebeband oder durch Festbinden gespannt werden. Nach dem vorherigen Einsatz des Gliedermaßstabs als Unterbau einer Rampe nutzen ihn Lernende wie folgt als Messinstrument: Sie suchen eine rechtwinklig ausgeklappte Konstellation, die bei passender Ausrichtung zu den Tischkanten mit beiden Enden die Schnur berührt. Dazu wird häufig ein Ende des Gliedermaßstabs als Ausgangspunkt auf der Schnur fixiert. Ist ein passender Unterbau gefunden – wenn nötig auch mit vorgestellten Bruchteilen eines Streifens –, lassen sich an ihm problemlos die Informationen ablesen, die als Anleitung für weitere Unterbauten genutzt werden können.



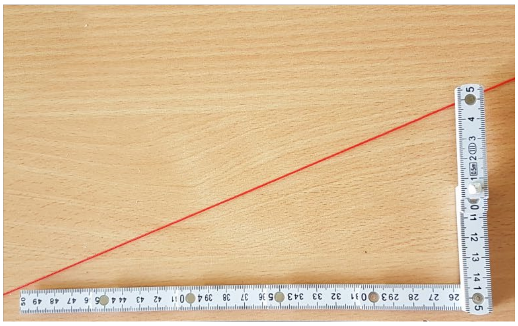


Abb. 80: Steigungen messen

Die Notationsweise für diese Anleitung drängt sich nicht auf und muss in der Regel vorgegeben werden – das ist kein Makel in einem aktiv-entdeckenden Unterricht: „Bei allen Freiheiten, die der Lehrer den Schülern beim Lernen läßt, muß es aber seine Sorge sein, […] diejenigen Sprech-, Schreib- und Darstellungsweisen einzuführen, die für den sozialen Gebrauch des Wissens *über die Klasse hinaus* unerläßlich sind“ (Wittmann 1994, S. 167; Hervorhebung im Original). Mit der Grundvorstellung eines Bruches als Verhältnis lässt sich die Schreibweise $\frac{2}{3}$ als Darstellung eines Messergebnisses motivieren, wobei durch vielfältige anknüpfende Aufgaben Gelegenheit gegeben werden sollte, die in objekthaften und entlehnten Zeichen gesehenen Symbolgehalte auf diese neuen, kodifizierten Zeichen zu übertragen. Beispielsweise können Rampen zu vorgegebenen Steigungen gebaut, Steigungen miteinander verglichen und die Auswirkungen von Manipulationen an der formal-algebraischen Bruchdarstellung untersucht werden.

Auf diesen Unterrichtsausschnitt sei die Anwendung des EIS-Prinzips im vorliegenden Abschnitt beschränkt. Ausgeklammert bleibt also die Behandlung negativer Steigungen und die Einbettung in ein Koordinatensystem, bei der die Anfangshöhe der Rampe miteinzubeziehen wäre.

Stattdessen sei die anfänglich aufgeworfene Frage nach inhaltlichen Deutungen zum Steigungsbegriff wieder aufgegriffen – ob der Bezeichner »Grundvorstellung« trotz der engen Eingrenzung auf den Kontext von Graphen linearer Funktionen angemessen ist, sei dahingestellt. In diesem Kontext jedenfalls tritt die Steigung als ein *Maß für Steilheit* auf. Diese Deutung wird kaum überraschen – Wikipedia nennt sie im ersten Satz des Artikels zum Thema *Steigung* („Steigung" 2021). Aber wird diese Deutung Lernenden (adäquat) vermittelt? Entsteht ein Bedürfnis, Steilheit quantitativ zu messen? Womöglich scheint die obige Deutung völlig selbsterklärend zu sein, als würde das Wort *Steigung* bereits genügen. Für Lernende trifft dies gewiss nicht zu, denn der Bezeichner »Steigung« wird in der Alltagssprache auch synonym zu »Anstieg« verwendet. Inhaltliche Deutungen sind damit jedoch nicht ausreichend konkretisiert – es wurde lediglich ein Rahmen geschaffen: Wie ist dieses Maß anzugeben? Oder umgekehrt: Wie ist beispielsweise $\frac{2}{3}$ als Maß für Steilheit zu verstehen? Entscheidend dafür ist die Vorstellung der (Bruch-)Zahlen. Grundvorstellungen zu ihnen – z. B. nach MALLE (2004) oder HISCHER (2012, S. 255 ff.) – grenzen daher die Möglichkeiten ein. Dem vorliegenden Abschnitt liegt die Deutung eines Bruchs als Verhältnis zugrunde. Andere Grundvorstellungen resultieren in anderen Deutungen der Steigung $\frac{2}{3}$:

Wird der Bruch als Resultat einer Division aufgefasst, entspräche dem ein Verteilen des gesamten Höhenanstiegs auf die waagerechten Streifen. $\frac{2}{3}$ Streifen ist dann das Bauteil, das bei nur einem waagerecht ausgeklappten Streifen vertikal angesetzt werden muss. Auch dieser Aspekt entspricht einer altbekannten Deutung (vgl. Oskar Lesser & Karl Schwab 1929, S. 106) und findet sich außerdem in der obigen Auflistung möglicher Grundvorstellungen nach BIKNER-AHSBAS (persönliche Kommunikation, 08. Januar 2022) wieder. Ein solche Deutung der Steigung $\frac{2}{3}$ erleichtert unter anderem das Berechnen des Höhenzuwachses einer Rampe zu einer vorgegebenen Anzahl waagerechter Streifen und führt so zu Funktionstermen wie $\frac{2}{3}x$. Der Aufbau dieser Vorstellung könnte an das bisherige Unterrichtsgeschehen anknüpfen, indem die entlehnten Zeichen entsprechend ergänzt werden.

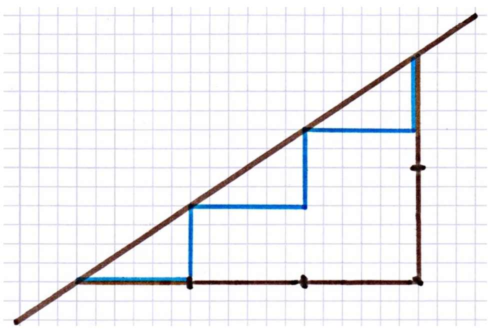


Abb. 81: Vorgestellter Bau der Rampe bei nur einem waagerecht ausgeklappten Streifen

5.1.5 Zum Einsatz des Prozentbandes

In diesem Abschnitt soll der Einsatz des Prozentbandes[264] im Kontext der Prozentrechnung diskutiert werden – es wird also ein objekthaftes Zeichen hinsichtlich potentieller und intendierter Symbolgehalte untersucht. Einleitend sei zunächst ein konkreter Unterrichtsgang von SCHILLIG (2010) wiedergegeben. In ihm zeigt sich die gewöhnliche Verwendung des Prozentbandes im Unterricht, die sich beispielsweise bereits bei BREIDENBACH (1956)[265] und auch bei RÜDIGER VERNAY, REGINA PUSCHER, MARC SCHÖNFELDER & MICHAEL KATZENBACH (2017) oder digital bei ALEXANDER WILLMS (2021) antreffen lässt.

5.1.5.1 Typischer Unterrichtseinsatz des Prozentbandes

Das Prozentband ist ein simples Arbeitsmittel, das Lernende selbst herstellen können: Ein dehnbares, mindestens ein Zentimeter breites Gummiband wird mit einer Skala versehen, auf der (meist in Zehnerschritten) wachsende Prozentsätze eingetragen sind – beginnend bei 0 % und gegebenenfalls auch über 100 % hinaus (Schillig 2010, siehe Abb. 84 unten). Im Zusammenspiel mit einer zweiten Skala, beispielsweise einem Zollstock, lassen sich nun Prozentsätze, Prozentwerte und Grundwerte bestimmen:

> Im Anschluss [an den Eigenbau der Prozentbänder] messen die Schülerinnen und Schüler weitere Teilstrecken am Tisch aus. Dazu lesen sie Prozentsätze vom gestreckten Gummiband ab. Um den dazugehörigen Prozentwert zu bestimmen, markieren sie die Stelle vorsichtig mit einem Bleistift und messen die Strecke mit einem Zollstock aus. Auf die gleiche Weise können die Lernenden umgekehrt auch Prozentsätze ermitteln: eine Strecke am Tisch oder an einem anderen Objekt markieren, das Prozentband anlegen und den Prozentsatz ablesen.

Schillig (2010, S. 14 f.)

Auf ähnliche Weise werden im nächsten Schritt Körpergrößen miteinander verglichen: „*Messt eure Körperlänge aus. Wählt jemanden aus, der 100 % sein soll.*

---

[264] Mit dem Bezeichner »Prozentband« wird wie bei WILTRAUD SCHILLIG (2010) das objekthafte Zeichen bezeichnet, also das dehnbare, effektiv manipulierbare Band. »Prozentstreifen« verweist hingegen auf die niedergeschriebene Visualisierung.

[265] Um mithilfe „eines Meterstabes mit cm-Teilung“ zu messen, dass 15 rote von insgesamt 60 gleichgroßen Würfeln einem Anteil von 25 % entsprechen, müssten „die 60 Würfel, dicht bei dicht gestellt, genau die Länge von 1 m einnehmen […]. Die Schwierigkeit entsteht durch die Starrheit der Einheitsstrecke. Wir können sie sehr einfach beseitigen, indem wir ein dehnbares Gummiband als Maßeinheit verwenden. Um mit diesem dehnbaren Gummiband zu messen, müssen wir dreierlei tun: a) Da wir Bruchteile der Einheit ausmessen wollen, müssen wir die Einheit unterteilen. Wir unterteilen die ganze Länge des Gummibandes in 100 gleiche Teile. […] b) Wir stellen alle 60 Würfel dicht bei dicht auf, die roten voraus. c) Wir dehnen das Gummiband, so daß die gedehnte Länge genau der Würfelreihe entspricht und lesen genau ab: Die roten Würfel machen 25 Hundertstel aller Würfel bzw. 25 % aller Würfel aus. Wir können die Aufgabe der Prozentrechnung jetzt anschaulich so formulieren: Prozentrechnung treiben bedeutet, einen Teil einer Gesamtmenge mit einem dehnbaren Einheitsmaß ausmessen, wobei das Ganze die Maßzahl 1 erhält“ (ebd., S. 283 f.).

Wie viel Prozent beträgt eure Körperlänge im Vergleich zur ausgewählten Länge?" (ebd., S. 15; Hervorhebung im Original). Durch den Einsatz beider Skalen können die Lernenden „die Vergleiche schnell und sicher bestimmen und den Prozentsatz in eine Tabelle eintragen" (ebd., S. 15).

Das Prozentband wird beim Präsentieren der Ergebnisse von einer neuen Darstellung ergänzt: „Eine Schülerin hat die Größen und Prozente in einer Doppelleiter dargestellt: auf der einen Seite der Leiter stehen die Größenangaben in cm und auf der anderen die Prozentsätze" (ebd., S. 15). Diese Doppelleiter ähnelt bereits dem Prozentstreifen, der sich in der Mathematikdidaktik erfolgreich als eine lernförderliche Visualisierung in der Prozentrechnung etabliert hat[266] – siehe etwa PETERS (2019) oder BENJAMIN THIEDE (2020), die auch zahlreiche diesbezügliche Arbeiten der letzten Jahrzehnte nennen. Im weiteren Verlauf wird die Doppelleiter „zu einer Leiter mit einem mittigen ‚Holm' verkürzt" (Schillig 2010, S. 16) – THIEDE (2020, S. 33) gebraucht den Bezeichner »Vergleichsskala« unter Verweis auf JACQUELINE M. DEWAR (1984).

An diesen Leitern entwickeln die Lernenden Ansätze zur Dreisatznutzung: Auch das Arbeiten mit den Prozentleitern „erweist sich manchmal als zu ungenau, denn die Größen der Schülerinnen und Schüler sind ja nicht auf die 10 %-Schritte normiert. Daraufhin entstehen erste Tabellen, in denen die Jugendlichen beispielsweise mit dem Dreisatz die genauen Zahlen ermitteln" (Schillig 2010, S. 16). Mit den Prozentleitern und den Dreisatztabellen seien die Lernenden schließlich in der Lage, alle Grundaufgaben der Prozentrechnung auch in anderen Kontexten zu lösen, beispielsweise „Wie viel sind 60 % von 1 380 kg?" oder „Ein Schüler hat 34 von 56 Punkten erhalten. Wie viel Prozent der Aufgaben hat er richtig gelöst?" (ebd., S. 17). Mit dem Prozentband gelinge selbiges wie folgt: „Wenn man zwei Größen (Grundwert und Prozentwert) hat, kann ich dieses Verhältnis als Prozentsatz auf dem Gummiband ablesen. Dazu muss man die Größen auf Strecken übertragen und das Band entsprechend dehnen" (ebd., S. 17).

5.1.5.2 Analyse mithilfe der EIS-Palette

Der verständnisbasierte Gebrauch des Dreisatzes kann im beschriebenen Unterrichtgang als ein zentraler intendierter Symbolgehalt identifiziert werden: Grundaufgaben der Prozentrechnung lassen sich über Umwege lösen, d. h. über die Berechnung anderer Paare von Prozentsätzen und Prozentwerten. Trotz der Verwendung aller Zeichenarten erschließen Lernende diesen Symbolgehalt bei SCHILLIG (2010) nur an den entlehnten Zeichen (Leitern als Abbilder der Handlungen mit dem Prozentband) und an den kodifizierten Zeichen

[266] Insbesondere hat sich in der jüngeren Mathematikdidaktik das Projekt *VisDeM* der Untersuchung tatsächlicher Lernförderlichkeit von Visualisierungen im Unterricht gewidmet.

(Dreisatztabellen)[267], nicht aber an den objekthaften Zeichen (Handlungen mit dem Prozentband) (Abb. 36) – dies steht dem Leitsatz für vertikale Übergänge entgegen (vgl. Abschnitt 4.2.3).

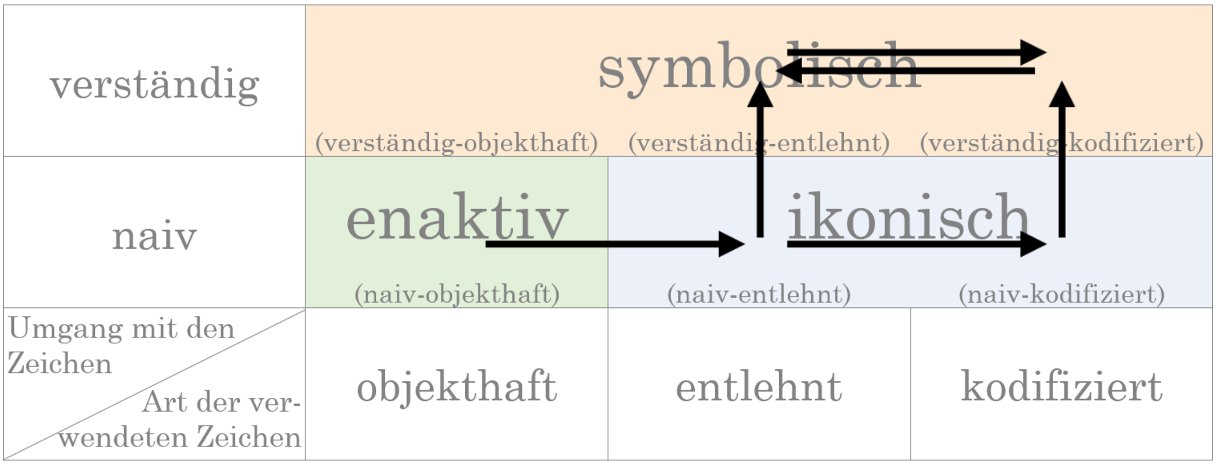


Abb. 82: Zeichenübergänge beim üblichen Einsatz des Prozentbandes zur Erschließung des Dreisatzes

Grundsätzlich möglich wäre das Erschließen des Symbolgehalts mit den objekthaften Zeichen durchaus, doch es fehlt der Anreiz dazu, denn das bloße Ablesen der gesuchten Information liegt in den beschriebenen Situationen weitaus näher, ist effizienter, ausreichend genau und weniger fehleranfällig. Die Nutzung des Prozentbandes initiiert also kein Denken im Dreisatz, weil kein Bedarf für eine neue Lösungsstrategie geweckt wird. Dass VERNAY et al. (2017) zufolge „[l]eistungsstarke Schülerinnen […] hier auch schon rechnerische Ideen entwickeln“ *können*, reicht nicht aus: Einerseits sollen sie diese Ideen auch entwickeln *wollen*, andererseits müssen enaktive Einstiege *allen* Lernenden den Übergang zur symbolischen Ebene ermöglichen.[268]

Aus diesem Umstand folgt das Ziel bei der Gestaltung der objekthaften Zeichen – dazu zählen auch die Handlungen selbst – gemäß dem Leitsatz für die vertikalen Übergänge: Durch das Prozentband soll Lernenden neben den Grundverständnissen auch das verständnisbasierte Nutzen des Dreisatzes zugänglich werden (Abb. 83).

---

[267] In SCHILLIGs (2010) Unterrichtsversuch werden zwar auch die Leitern ausschließlich zum bloßen Ablesen der gesuchten Information genutzt, nachdem eine zweite Skala ergänzt wurde. Es steht aber außer Frage, dass sich der Prozentstreifen und damit auch die analog aufgebauten Leitern durchaus zur Anbahnung und Umsetzung des Dreisatzes (und anderer Lösungsstrategien wie z. B. Verhältnisgleichungen) eignen und in dieser Rolle eingesetzt werden (Thiede 2020, S. 89, siehe zur praktischen Umsetzung beispielsweise Prediger, Selter, Hußmann & Marcus Nührenbörger 2017).

[268] Dennoch sind die beschriebenen Handlungen mit dem Prozentband durchaus geeignet, um unverzichtbare, grundlegende Verständnisse zum Prozentbegriff zu entwickeln, wie etwa die Proportionalität zu einem zweiten Größenbereich oder die Normierung der Anteilsvergleiche – zu diesem Zweck verwendet auch BREIDENBACH (1956) das Prozentband. VERNAY et al. (2017) sprechen diesbezüglich vom Erarbeiten von Grundvorstellungen zum Prozentbegriff, ohne diese weiter zu konkretisieren (vgl. Abschnitt 5.1.4).

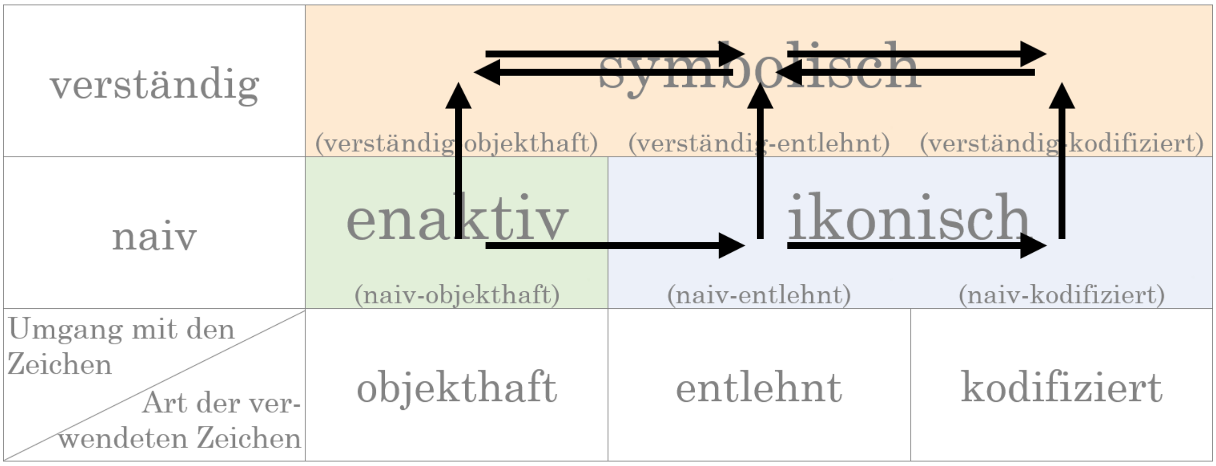


Abb. 83: Erweiterte Zeichenübergänge beim Einsatz des Prozentbandes bzgl. des Dreisatzes

Dazu muss nicht das Band als solches verändert werden, aber die Handlung mit ihm: Es muss in Situationen Einsatz finden, in denen das Anlegen einer zweiten Skala so aufwendig wäre, dass alternative Lösungswege aufgesucht werden. Eine solche wird im Folgenden beschrieben und analysiert. Benötigt werden dabei ein Prozentband, zwei Sorten von Holzleisten[269], einige Wäscheklammern, an denen laminiertes Papier befestigt ist, sowie eine Haushaltswaage (Abb. 84).

Abb. 84: Material beim Einsatz des Prozentbandes

Mithilfe der Haushaltswaage wird eine Holzleiste jeder Sorte gewogen. Diese Ausgangswerte sollten im Vorhinein durch Anpassung der Längen sinnvoll von der Lehrperson gewählt worden sein – hier sind es 30 g und 90 g. Zunächst wird mit der leichteren Leiste gearbeitet. Die Frage an die Lernenden lautet:

- *Wie schwer wird die Holzleiste sein, wenn sie auf 60 % ihrer Länge gekürzt wird?* [270]

Das Spannen des Prozentbandes über die Holzleiste verschafft einen ersten Überblick, der durch Beschriften und Anbringen der Klammern festgehalten wird (Abb. 85). Das didaktische Ziel dahinter ist dasselbe wie am strukturgleichen Prozentstreifen, der hier erst später hinzutritt: „Die Textaufgaben-Verstehensstrategien *Gegeben-Gesucht* und *Fokus auf Beziehungen* […] werden

[269] Die Längen der Holzleisten können durchaus stärker voneinander abweichen als in Abb. 84.

[270] Die Zahlenwerte sind in allen Beispielen bewusst so gewählt, dass sich die Fragestellung mithilfe der objekthaften Zeichen gut beantworten lässt – zu Beginn ist dies empfehlenswert. Ein Ausloten der Grenzen dieser Zeichen ist ein im Unterricht notwendiger, hier aber ausgesparter nächster Schritt, der beispielsweise initiiert werden kann durch eine Variation der Ausgangsfrage, so dass das Berechnen des Prozentwertes zum Prozentsatz 1 % erforderlich wird.

durch das strukturierte Eintragen der gegebenen und gesuchten Informationen am Streifen unterstützt“ (Prediger et al. 2017, S. 132; Hervorhebung im Original).

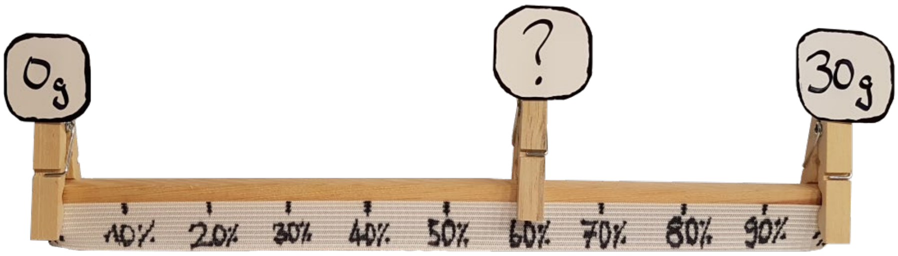


Abb. 85: Prozentwert gesucht – Ausgangssituation am Prozentband

In weiterer Analogie zum Arbeiten mit dem Prozentstreifen lässt sich nun die Suche nach sinnvollen Zwischenschritten in Angriff nehmen. Dazu könnten in einem ersten Schritt vorwärts arbeitend jene Prozentwerte hervorgehoben werden, die sich schnell bestimmen ließen (Abb. 86), um dann rückwärts arbeitend einen dieser auszuwählen, der zur Lösung der Ausgangsfrage verhilft (Abb. 87).

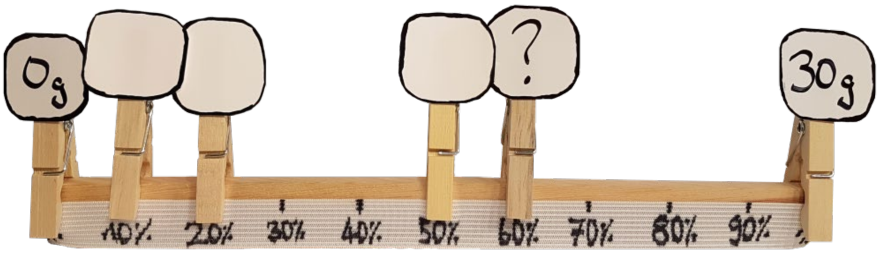


Abb. 86: Prozentwert gesucht – Auswahl möglicher Zwischenschritte

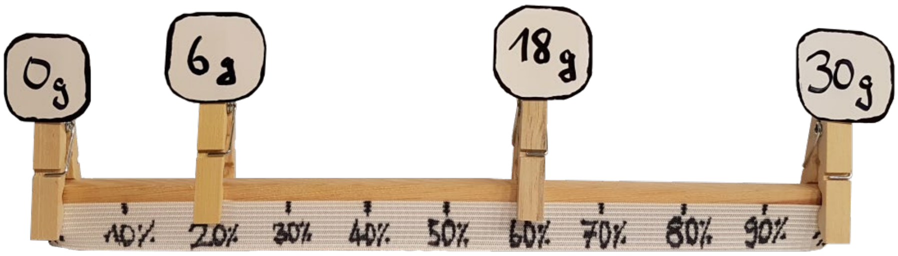


Abb. 87: Prozentwert gesucht – Lösung der Ausgangsfrage mithilfe eines Zwischenschritts

Sollten – anders als in den obigen Abbildungen – unterschiedlich schwere Holzleisten in der Klasse verwendet worden sein, bietet sich eine vergleichende Auseinandersetzung mit den Bearbeitungen an: In allen Fällen wurden gleichgroße Anteile gekennzeichnet, aber unterschiedlich große Teile. Die Prozentskala als Einteilung in einhundert Teile ließ sich auf alle Holzleisten gleichsam passend aufprägen, sodass das prinzipielle Vorgehen stets dasselbe war.

Eine Holzleiste kann nun wie angekündigt tatsächlich zersägt werden, um die Resultate auf der Haushaltswaage zu validieren. Gleichzeitig wird der Nutzen der getanen Arbeit herausgestellt: Das Ergebnis konnte tatsächlich präzise vorausgesagt werden, ohne dass das Holz dafür hätte zersägt werden müssen.

Abschließend oder begleitend wird die Aufgabenbearbeitung zeichnerisch und reduziert festgehalten (Abb. 88). Die Lehrperson erkennt hierin Prozentstreifen, Lernende hingegen vertraute Abbilder des Prozentbandes. Die Prozentstreifen werden somit nicht als fremde Werkzeuge eingeführt, deren Gebrauchsweise erst die Lehrperson entschlüsselt. Dass die Länge eines Streifens beim Zeichnen unabhängig von der Größe des Grundwerts beliebig gewählt werden darf, folgt aus der obigen Beobachtung zu unterschiedlichen Holzleisten: Das prinzipielle Vorgehen war stets dasselbe. Lernende können versuchsweise unterschiedliche Möglichkeiten erproben und identifizieren schließlich z. B. 10 cm als geeignete Länge.

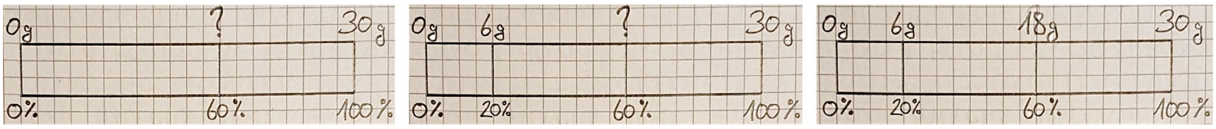


Abb. 88: Prozentstreifen als entlehnte Zeichen

Mit den Holzleisten lässt sich eine zweite Situation kreieren. Da den Lernenden viele Paare aus Prozentwert und Prozentsatz an den leichten Holzleisten mittlerweile geläufig sind, sollte ein neues Gewicht verwendet werden – hier also die 90 g schwere Leiste:

- *Es soll ein 36 Gramm schweres Stück abgesägt werden. Wie viel Prozent der Leiste sind das?*[271]

Auch hier ist der erste Schritt die Darstellung der Ausgangssituation (Abb. 89): Die gesamte Leiste wiegt 90 g; gefragt ist nach der Position der Klammer mit der Beschriftung 36 g[272] (bzw. der Prozentsatz, der zum Prozentwert 36 g gehört).

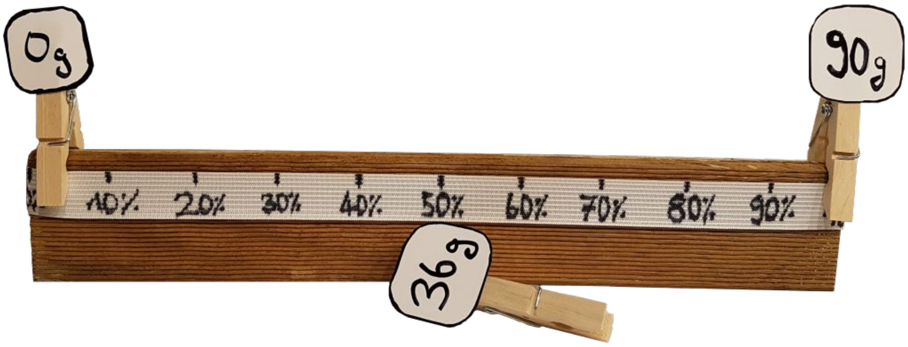


Abb. 89: Prozentsatz gesucht – Ausgangssituation am Prozentband

Ähnlich wie zuvor lässt sich vorwärts und rückwärts arbeiten: Welche Paare aus Grammzahl und Prozentsatz lassen sich gut bestimmen? Welche Paare verhelfen

---

[271] An dieser Stelle kann die Wahl der Ausgangsgewichte reflektiert und hinterfragt werden: Dass die zweite Leiste genau dreimal so schwer ist wie die erste, legt funktionale Zusammenhänge nahe, die zwar ebenfalls wertvoll sind, aber den anvisierten Dreisatz unterbinden können: Hier ließe sich dieser Dreisatz umgehen, weil 18 g an der ersten Leiste 60 % entsprechen – und somit 20 % an der zweiten, weil diese dreimal schwerer ist. Daher sind 36 g genau 40 % von der zweiten Leiste.

[272] Die Klammer könnte auch unter Vorbehalt an einer Stelle befestigt werden, um nach weiteren Überlegungen gegebenenfalls ihre Position zu korrigieren. Dieses Vorgehen entspräche dem bei PREDIGER et al. (2017) mit Prozentstreifen, die bei Aufgaben des Typs *Prozentsatz gesucht* eher als Skizze dienen. Für Lernende ist es jedoch gerade im Anfangsstadium schwer zu unterscheiden, wann präzise gearbeitet werden muss und wann nicht – entsprechende Hemmungen zeigen sie erfahrungsgemäß vor dem ungefähren Platzieren der Markierung. In einem späteren Stadium ist dieses Vorgehen aber durchaus effizient.

zum gesuchten Prozentsatz? Dies kann zu Abb. 90 führen, wobei ein Validieren erneut durch Sägen und Wiegen möglich ist.

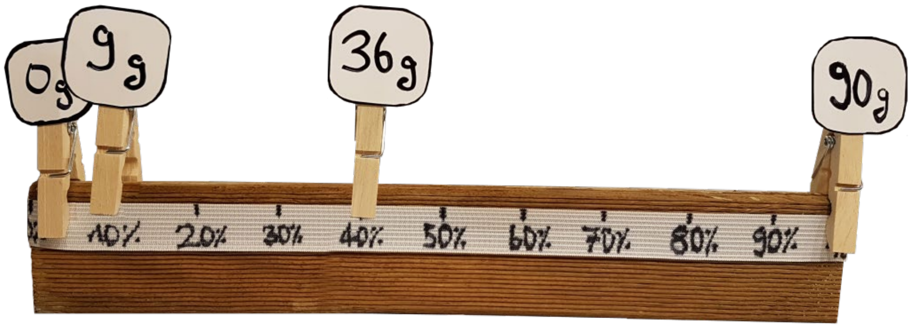


Abb. 90: Prozentsatz gesucht – Lösung der Ausgangsfrage mithilfe eines Zwischenschritts

Schließlich wird auch die dritte Grundaufgabe der Prozentrechnung untersucht:

- *Unsere Holzleiste war ursprünglich Teil einer größeren und wurde von dieser abgesägt. Der Anteil unserer Holzleiste an der großen Leiste betrug 60 %. Wie schwer war die große Leiste?*

In diesem Fall wird das Prozentband über die Holzleiste hinaus gespannt.[273] Das bekannte Gewicht der vorliegenden Leiste entspricht also erstmals nicht 100 %.

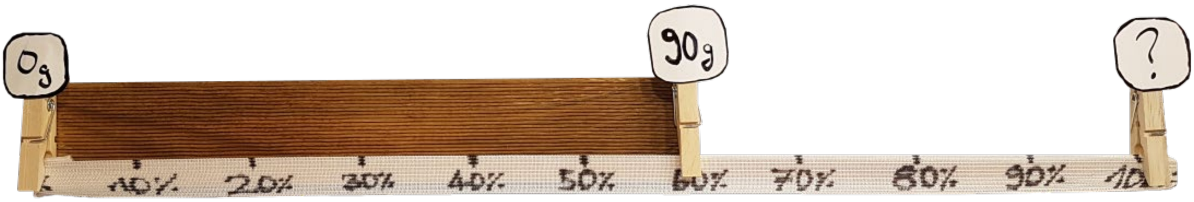


Abb. 91: Grundwert gesucht – Ausgangssituation am Prozentband

Auf ähnliche Weise wie zuvor stoßen Lernende nach der Darstellung von Gegebenem und Gesuchtem in Abb. *91* durch entsprechende Fragen auf gut bestimmbare Zwischenschritte (Abb. 92), die zur Lösung verhelfen.

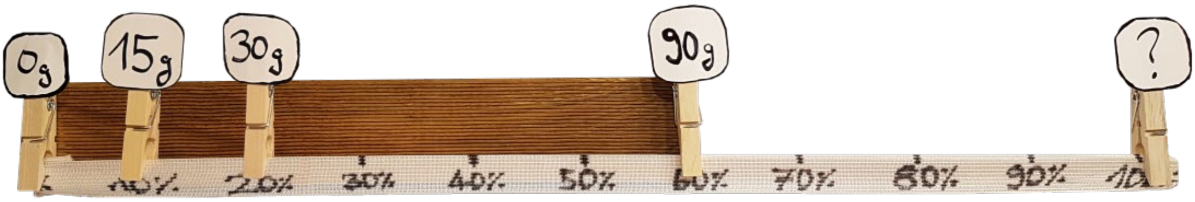


Abb. 92: Grundwert gesucht – Auswahl zielführender Zwischenschritte

Erneut ist eine Validierung möglich: Hierzu kann die Lehrperson weitere Leisten entsprechender Länge vorbereitet haben, oder aber das zu ergänzende Stück wird von einer anderen Leiste abgesägt und mit auf die Waage gelegt.

[273] Die in Abb. 91 gezeigte Konstellation bedarf entweder einer zweiten, ausdauernden Person, die das Band unermüdlich fixiert, oder einer längeren Holzleiste, an der das Prozentband befestigt wird – dies kann jedoch an der begrenzten Klemmkraft der Klammern scheitern. Empfehlenswert erscheint im Unterricht partnerweises Arbeiten, bei dem das Prozentband nur vorübergehend von einer Person passend gespannt wird, während die zweite Person die Ausmaße und Markierungen auf einen langen Papierstreifen überträgt, der dann das gespannte Prozentband ersetzt.

Zur Einordnung dieser Einführung folgen abschließend zwei Anmerkungen:

- Die Vorschläge liefern kein strukturell anderes Vorgehen zur Einführung der Grundaufgaben als beispielsweise PREDIGER et al. (2017)[274].
  Erstens aber erlaubt die präsentierte Vorgehensweise effektive Handlungen an haptisch wahrnehmbaren Objekten und lässt Lernende damit von den Vorteilen enaktiver Darstellungen profitieren (vgl. Abschnitt 6.2.1).
  Zweitens tritt der Prozentstreifen in diesem Prozess allen Lernenden nicht als eine neuartige Darstellung auf, die nach gewissen Regeln zu gebrauchen ist (also als vorwiegend kodifiziertes Zeichen), sondern erwächst dem Prozess genetisch als bloßes Abbild von einer vertrauten Handlung bzw. von Zwischenschritten dieser Handlung (also als entlehntes Zeichen). Dies verspricht einen positiven Einfluss auf den weiteren Gebrauch des Prozentstreifens, der wie jede „Visualisierung an sich […] ‚Zusatzstoff' [ist], der zunächst einmal nachvollzogen werden muss" (Barzel & Holzäpfel 2011, S. 6, vgl. im konkreten Kontext des Prozentstreifens Peters (2019, S. 129)).
- Die Einführung ist nach dem oben Skizzierten nicht abgeschlossen. Weitere Schritte wären analog zum Vorgehen bei PREDIGER et al. (2017) das Untersuchen ähnlicher Fragen mit vorgestellten Gewichtsangaben, bei denen nur noch das Prozentband verwendet wird (Abb. 93), sowie das Übertragen des Gebrauchs des Prozentbandes und des Prozentstreifens auf andere Kontexte.

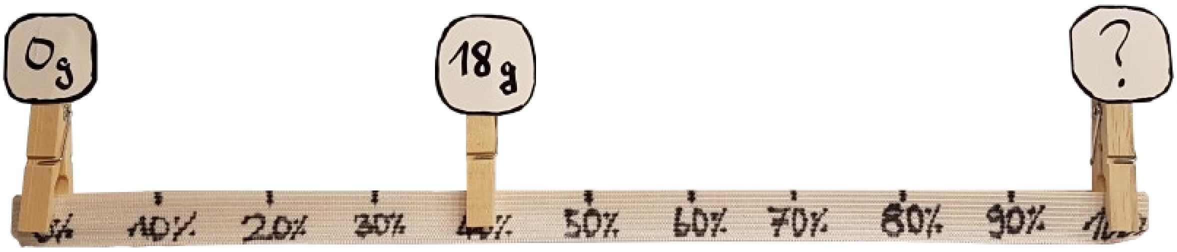


Abb. 93: Grundwert gesucht – Variation mit vorgestelltem Gewicht

[274] Vor der Vertiefung am alltagsnahen Einkaufskontext mithilfe von Prozentstreifen arbeiten PREDIGER et al. (2017) mit Downloadstreifen. Über didaktische Unterschiede ließe sich diskutieren, trotz struktureller Gleichheit mit dem Vorgehen an Holzleisten: Die Wahl der Downloadstreifen ist begründet durch die Hoffnung, auf Alltagserfahrungen der Lernenden zurückzugreifen – auch hier soll also der Prozentstreifen keine eigens eingeführte Darstellung sein. Downloads werden jedoch bei weitem nicht immer als Streifen dargestellt (besonders am Smartphone), sind oft allzu schnell beendet, ohne dass eine wirkliche Auseinandersetzung mit ihrer Darstellung stattgefunden hätte, und liefern als weitere Information zuweilen die bereits benötigte Zeit, die jedoch nur selten proportional zum angezeigten Prozentsatz ist. Auf welche Vorerfahrungen zurückgegriffen werden sein könnte, ist somit unklar und intersubjektiv variabel. Außerdem birgt dieser Einstieg eine weitere Schwierigkeit: Der Abstraktionsschritt, zwei ungleich große Grundwerte durch gleichgroße Streifen darzustellen, wird hier bereits vorausgesetzt und nicht im Laufe der Beschäftigung als sinnvoll empfunden und beschlossen.

5.1.6 Satz des Thales

Nach LAMBERT (2019, o. S.) ist das Vorliegen der Innenwinkelsumme von 180° im ebenen Dreieck zwar ein potentieller Symbolgehalt beim Abreißen und Aneinanderlegen *aller* Ecken eines Papierdreiecks (ein objekthaftes Zeichen). „Aber diese Handlung führt leider nicht zur üblicherweise gewünschten konstruktiv-geometrischen symbolischen Begründung“. Aus diesem Grund empfiehlt er das Abreißen nur zweier Ecken und deren Anlegen an die dritte, sodass auch die Begründung des Zusammenhangs ein potentieller Symbolgehalt des objekthaften Zeichens wird. Mit einer analogen Vorgehensweise lassen sich enaktive Einführungen des Satzes des Thales untersuchen.

LAMBERT (2019, o. S.) betont, „dass hier sowohl eine Aussage als auch ihre Umkehrung wahr sind“, die „in zwei unterschiedlichen – jeweils stimmig passenden – Situationen“ anzubieten sind: Auf dem Geobrett wird ein Durchmesser des Kreises mit einem Gummi gespannt. Anschließend lassen sich unter Zuhilfenahme der Pins auf der Kreislinie unterschiedliche Dreieck bilden, deren gemeinsame Eigenschaft gesucht ist (Abb. 94 links). „In dieser Situation ist zunächst der Kreis da, und die rechten Winkel entstehen nach und nach an den Kreispunkten“ (o. S.) In der umgekehrten Situation wird der rechte Winkel eines Geodreiecks so weit wie möglich durch einen Spalt in einem Blatt Papier geschoben. Die möglichen Positionen des Scheitels werden markiert (Abb. 94 rechts). „[H]ier ist enaktiv der rechte Winkel gegeben, und der Kreis folgt“ (o. S.).

Abb. 94: Unterschiedliche Situationen für Satz und Umkehrung nach LAMBERT (2019)

Die von LAMBERT (2019) intendierten Symbolgehalte lassen sich mit diesen objekthaften Zeichen durchaus erschließen. In Übertragung des obigen Gedankenganges machen die effektiven Manipulationen jedoch nur unzureichend Begründungen zugänglich. Dies leisten die folgenden Situierungen. Neben ihrer kurzen Vorstellung liegt der Fokus dabei auf der Vielfalt von Zusammenhängen, die durch die objekthaften Zeichen angebahnt werden und derer sich eine Lehrperson bewusst sein sollte – zum Beispiel, um aufkeimende Ideen als solche zu erkennen. Die Auflistung der Argumente versteht sich daher nicht als Erwartungshorizont bei einer eigenen Erprobung im Unterricht, und sie nimmt zuweilen sogar Züge einer elementargeometrischen Untersuchung an, die weniger Nähe zur praktischen Unterrichtssituation und deren Teilnehmenden aufzuweisen scheint als die übrigen Anwendungsbeispiele – dies ist jedoch nicht auf den Unterrichtsgegenstand zurückzuführen, sondern auf die hiesige Schwerpunktsetzung.

5.1.6.1 Der rechte Winkel ist gegeben, der (Halb-)Kreis folgt

Jede Schülerin und jeder Schüler soll mit einem gleichlangen, geraden Schnitt eine Ecke von einem DIN-A4-Blatt abschneiden. Als gemeinsame Norm für die Länge des Schnittes bietet sich beispielsweise die Länge einer Kante des Schulbuches an, welche gleichzeitig als Schablone für den anvisierten Schnitt dient. Auf diese Weise entstehen rechtwinklige Dreiecke, die allesamt in der Länge ihrer Hypotenuse übereinstimmen. Werden sie übereinandergelegt, entsteht eine ähnliche Situation wie zuvor beim Schieben des Geodreiecks durch den Papierspalt (Abb. 95).

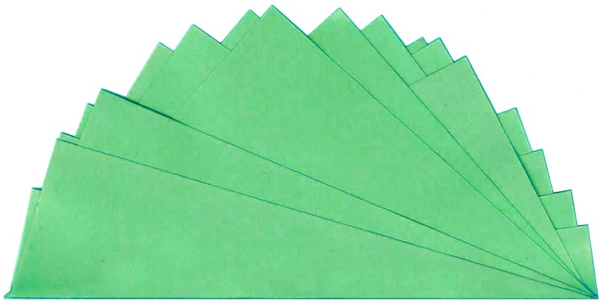


Abb. 95: Übereinandergelegte Papierdreiecke

Die überraschende Besonderheit tritt umso deutlicher zutage, je mehr unterschiedliche Dreiecke die Lernenden in der Klasse übereinanderstapeln: Die Eckpunkte der rechtwinkligen Dreiecke liegen alle auf einem gemeinsamen Kreis bzw. Halbkreis um den Mittelpunkt der Hypotenuse. Dieser hat also stets gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten eines jeden Dreiecks

Die Ursachen dieses Musters lassen sich durch weitere Verwendung der objekthaften Zeichen untersuchen, denn die Papierdreiecke erlauben es, Faltungen vorzunehmen. Dazu ziehen Lernende ein beliebiges Dreieck aus dem gemeinsamen bzw. dem eigenen Stapel. Hierdurch wird bereits impliziert, dass Argumente nur an einem Vertreter entwickelt werden, aber dennoch für alle Gültigkeit haben sollen – diese Allgemeingültigkeit muss daher begründet werden. Gleichzeitig ist die Richtung des Argumentierens einsichtig: Lernende halten rechtwinklige Dreiecke in der Hand und versuchen, das überraschende Auftreten des Kreises zu erklären – bei der zweiten Situierung wird es umgekehrt sein.

Ausgangspunkt beim effektiven Manipulieren ist dementsprechend der rechte Winkel. Durch ihn weisen die Dreiecke die Eigenschaft auf, dass die Maße der beiden übrigen Winkel in Summe ebenfalls 90° ergeben – die spitzwinkligen Ecken des Papierdreiecks lassen sich also in jedem Dreieck passgenau in die rechtwinklige Ecke hineinfalten (Abb. 96).

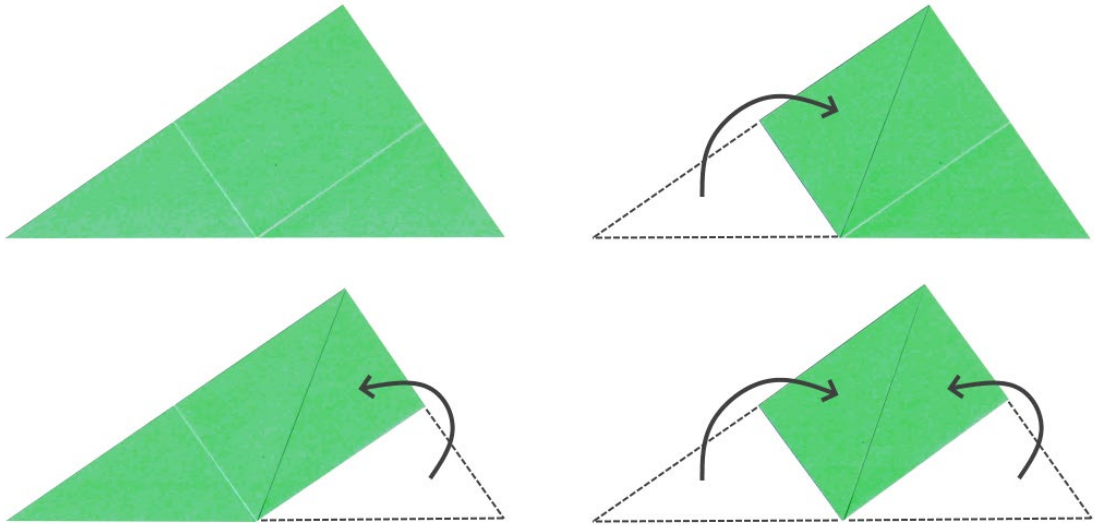


Abb. 96: Vorgesehene Faltungen am rechtwinkligen Dreieck[275]

Diese Handlung muss nicht zwingend von Lernenden selbst entdeckt werden – vgl. Unterabschnitt 2.1.2.4 –, sondern kann auch als adäquate Situierung vorgegeben werden, die nun weiter zu durchdringen ist: Warum hat der Mittelpunkt der Hypotenuse stets gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten? Mehrere Ideen führen zum Ziel, von denen drei im Folgenden kurz dargelegt werden. Zur Nachvollziehbarkeit wird stets vorab die Beweisidee in kodifizierten Zeichen skizziert, bevor erläutert wird, inwiefern die Handlungen genau diese Argumentation anbahnen.

- Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – erste Beweisidee

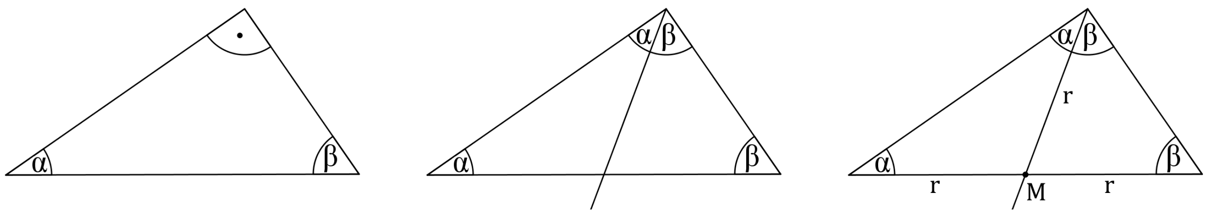


Abb. 97: Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – Vorabskizze der ersten Beweisidee[276]

Das Falten hebt die Strecke zwischen einem Punkt auf der Hypotenuse und dem Scheitelpunkt des rechten Winkels hervor, denn an dieser Strecke treffen die Kanten beim Falten aufeinander (Abb. 98). Eine solche Strecke ließe sich in jedem

[275] Der Leitsatz für die horizontalen Übergänge regt zur Frage an, wie der Übergang von den objekthaften Zeichen aus Papier zu entlehnten Zeichen gestaltet werden sollte. Es läge nahe, Mischzeichen zu verwenden: Ausgeschnittene Dreiecke lassen sich mit Klebstoff so im Heft anbringen, dass nur die statischen Elemente befestigt sind, nicht aber an diejenigen, die beim Falten bewegt werden. Das entstandene Zeichen schränkt mögliche Manipulationen ein, wäre aber dennoch vorwiegend als objekthaft einzuordnen. Kodifizierte Elemente – z. B. Winkel und deren Namen – können nun auf Vorder- und Rückseite ergänzt werden und bewegen sich beim Falten mit.

[276] In jedem rechtwinkligen Dreieck lässt sich wegen der Innenwinkelsumme von 180° der rechte Winkel mit einem Strahl in zwei Winkel teilen, deren Maß jeweils mit einem der spitzwinkligen Innenwinkel des Dreiecks übereinstimmt. Der Strahl schneidet die Hypotenuse im Punkt M und zerlegt das Dreieck in Teildreiecke, die wegen gleichgroßer Basiswinkel gleichschenklig sind. Mit der Transitivität der Gleichheitsrelation folgt, dass alle Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke gleichlang sind, sodass M zu allen Eckpunkten des Ausgangsdreiecks gleichen Abstand hat.

rechtwinkligen Dreieck konstruieren, indem der rechte Winkel in zwei Winkel unterteilt wird, deren Maße mit denen der übrigen beiden Innenwinkel übereinstimmen. Durch die Strecke wird das rechtwinklige Dreieck in zwei Teildreiecke zerlegt, die gleichgroße Basiswinkel besitzen – also symmetrisch und insbesondere gleichschenklig sind, worauf die Handlung des Faltens von Beginn an aufmerksam machte.

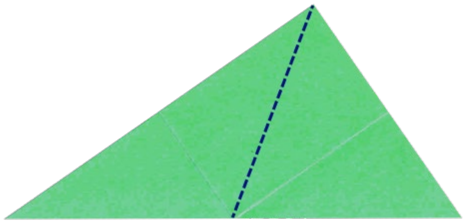


Abb. 98: Zerlegung in gleichschenklige Dreiecke

Aus der paarweisen Gleichheit der Schenkel (und der Transitivität der Gleichheitsrelation) folgt die zu zeigende Eigenschaft: Der Schnittpunkt auf der Hypotenuse ist gleichzeitig ihr Mittelpunkt und hat zu allen Eckpunkten des Dreiecks gleichen Abstand.

- Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – zweite Beweisidee

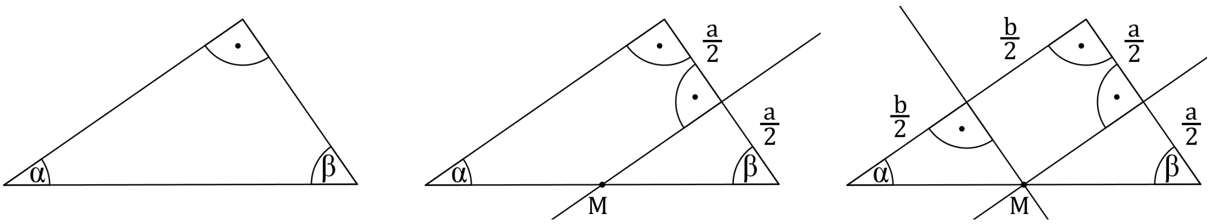


Abb. 99: Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – Vorabskizze der zweiten Beweisidee[277]

Das Falten hebt die Faltkanten hervor (Abb. 96, erstes Bild). Sie sind jeweils Mittelsenkrechte zu den Eckpunkten, die aufeinander gefaltet wurden – ihr Schnittpunkt hat demnach den gleichen Abstand zu allen Eckpunkten des Dreiecks. Aber warum liegt er stets auf der Hypotenuse?

Beim Falten der rechts unten gelegenen Ecke entsteht ein Teildreieck, das zum Ausgangsdreieck ähnlich ist (Abb. 100): Beide sind rechtwinklig und haben einen weiteren Winkel gemeinsam. Durch das Falten begründet folgt, dass die Seiten des Teildreiecks halb so lang wie die des Ausgangsdreiecks sind. Daher verläuft diese erste Faltkante stets durch den Mittelpunkt der Hypotenuse des Ausgangsdreiecks.

[277] In jedem rechtwinkligen Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten zu den Katheten in einem Punkt, der gleichen Abstand zu allen Eckpunkten besitzt. Gezeigt werden muss noch, dass dieser Punkt auf der Hypotenuse liegt: Jede der beiden genannten Mittelsenkrechte trennt ein Teildreieck vom Ausgangsdreieck ab. Teildreieck und Ausgangsdreieck sind wegen identischer Innenwinkel jeweils ähnlich zueinander, wobei die Seiten des Teildreiecks in beiden Fällen halb so lang wie die des Ausgangsdreiecks sind – daher verläuft jede Mittelsenkrechte durch den Mittelpunkt der Hypotenuse, der somit gleichen Abstand zu allen Eckpunkten des Dreiecks hat.

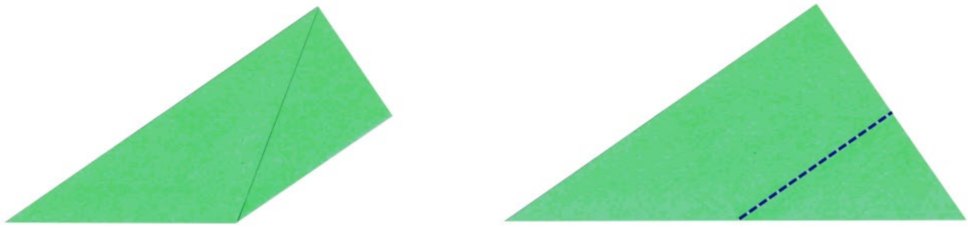


Abb. 100: Falten der rechts unten gelegenen Ecke

Analog lässt sich für die Faltung der links unten gelegenen Ecke begründen, dass die Faltkante durch den Mittelpunkt der besagten Hypotenuse verläuft (Abb. 101). Dieser hat also gleichen Abstand zu allen drei Eckpunkten des Ausgangsdreiecks.

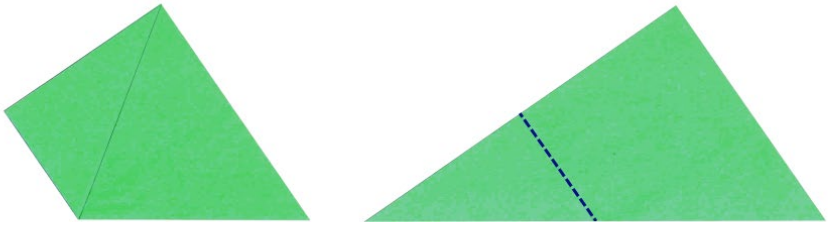


Abb. 101: Falten der links unten gelegenen Ecke

- Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – dritte Beweisidee

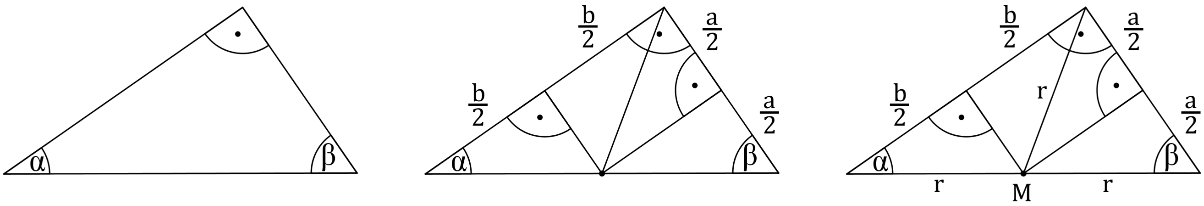


Abb. 102: Dem rechten Winkel folgt der Halbkreis – Vorabskizze der dritten Beweisidee[278]

Das Falten hebt – in Kombination der beiden erstgenannten Ansätze – die Faltkanten sowie die Strecke vom Schnittpunkt der Faltkanten zum Scheitelpunkt des rechten Winkels hervor. Diese drei Linien teilen (den zuvor bereits skizzierten Argumenten folgend) das rechtwinklige Dreieck in vier rechtwinklige Teildreiecke.

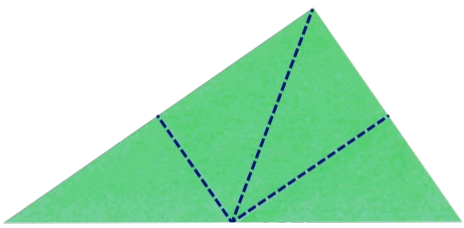


Abb. 103: Zerlegung in zueinander kongruente Dreiecke

[278] Jedes rechtwinklige Dreieck lässt sich durch die Mittelsenkrechten zu den Katheten und durch eine Strecke von deren Schnittpunkt (Mittelpunkt der Hypotenuse, siehe oben) zum Scheitelpunkt des rechten Winkels in vier Teildreiecke zerlegen. Diese sind zueinander kongruent: Die beiden „mittigen" Teildreiecke bilden wegen der Innenwinkelsumme im Viereck ein Rechteck. Aus den Eigenschaften des Rechtecks folgt die Kongruenz der beiden genannten Teildreiecke. Die beiden „linken" bzw. „rechten" Teildreiecke sind jeweils mit dem Kongruenzsatz SWS kongruent zueinander. Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten hat somit gleichen Abstand zu allen Eckpunkten des Dreiecks, weil die verbindenden Strecken allesamt Hypotenusen zueinander kongruenter Teildreiecke sind.

Die vier Teildreiecke wirken zueinander kongruent. Mit einer Begründung dieser Vermutung würde die zu zeigende Eigenschaft folgen: Die Strecken vom Mittelpunkt der Hypotenuse des Ausgangsdreiecks zu dessen Eckpunkten wären allesamt Hypotenusen zueinander kongruenter Teildreiecke – und damit gleichlang.

Es gibt zahlreiche Wege, die Kongruenz zu begründen: Weil das Ausgangsdreieck rechtwinklig ist und die Innenwinkelsumme im Viereck 360° beträgt, liegt im gänzlich zusammengefalteten Zustand (Abb. 96 letztes Bild) ein Rechteck vor. Aus den Eigenschaften eines Rechtecks folgt die Kongruenz der mittigen Teildreiecke. Für aufeinander gefaltete Dreiecke bietet sich der Kongruenzsatz SWS an, wobei der auszuwählende Winkel der rechte ist.

Der Unterricht sollte ausgehend von den ausgeschnittenen Dreiecken weitere Wege einschlagen: Werden die Dreiecke so aufeinandergelegt, dass der rechte Winkel auch unterhalb der Hypotenuse zum Liegen kommt, stechen Sonderfälle hervor: Einige Paare von Dreiecken bilden ein Rechteck im Kreis. Hieraus kann der abbildungsgeometrische Beweis über die Punktspiegelung am Mittelpunkt der Hypotenuse generiert werden, der am Geobrett ebenso zugänglich wäre.

5.1.6.2 Der (Halb-)Kreis ist gegeben, der rechte Winkel folgt

Lernende markieren auf einem ausgeschnittenen Papierhalbkreis Dreiecke, sodass zwei Eckpunkte den Durchmesser begrenzen und der dritte auf der Kreislinie liegt. In Übereinstimmung mit dem Vorgehen am Geobrett stoßen sie bald auf eine Gemeinsamkeit: Alle derartigen Dreiecke im Halbkreis scheinen rechtwinklig zu sein. Die Suche nach den Ursachen dieses Zusammenhangs erfolgt mit einem Papierhalbkreis, auf dem zur Übersicht nur ein Dreieck eingezeichnet ist. Die Manipulationsmöglichkeiten des objekthaften Zeichens werden – verglichen mit der Situierung auf dem Geobrett – erweitert, indem die gezeichneten Strecken etwas mehr als hälftig eingeschnittenen werden (Abb. 104).

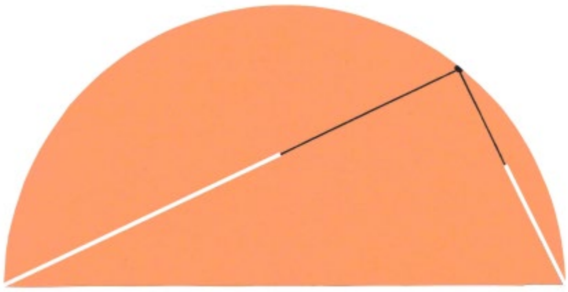


Abb. 104: Einschnitte ermöglichen Manipulationen des Papierhalbkreises

Die beabsichtigten Faltungen zeigt Abb. 105. Sie bestätigen den Eindruck der Rechtwinkligkeit dieses einen Dreiecks, weil sich wegen der Innenwinkelsumme von 180° nur im rechtwinkligen Dreieck zwei Winkel passgenau in den dritten falten lassen.

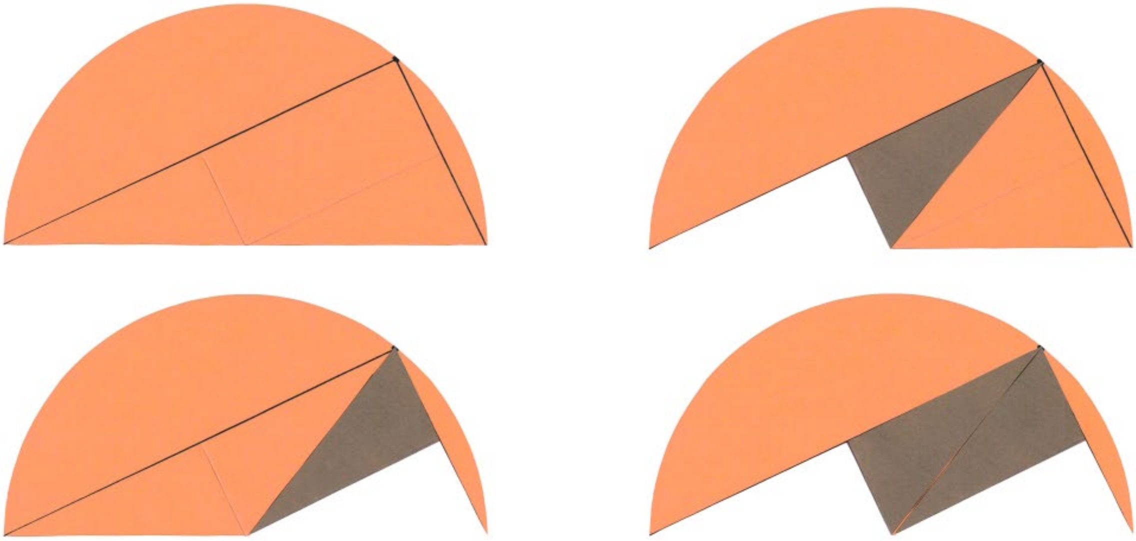


Abb. 105: Beabsichtigte Faltungen nach dem Einschneiden

Allgemeingültige Ursachen dieser Besonderheit erschließen sich jedoch erst durch weiteres Hineinsehen von Zusammenhängen, die durch das Falten angebahnt werden. Umgekehrt wie zuvor halten Lernende Halbkreise in der Hand und begründen das überraschende Auftauchen rechtwinkliger Dreiecke – erneut auf unterschiedlichen Wegen:

- Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – erste Beweisidee

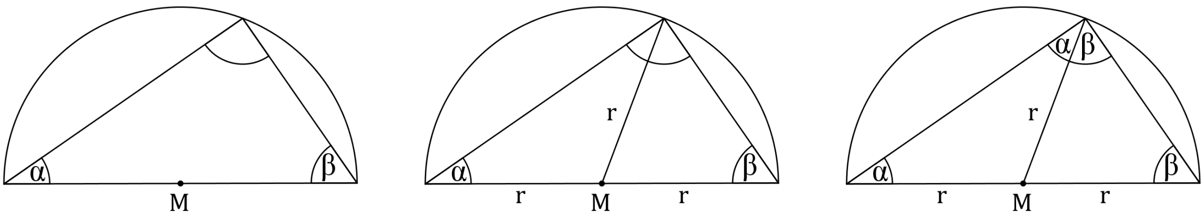


Abb. 106: Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – Vorabskizze der ersten Beweisidee[279]

Das Falten hebt den Radius zum anvisierten Punkt auf der Kreislinie hervor: An dieser Strecke treffen scheinbar die Papierkanten aufeinander – zumindest in diesem einen Dreieck (Abb. 107). Einzeichnen ließe sich diese Strecke jedoch ohne Zweifel in jedem Dreieck.

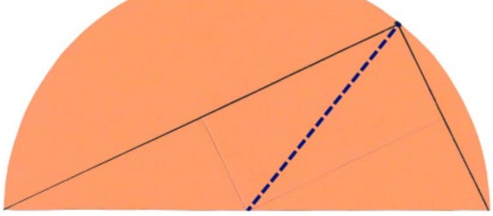


Abb. 107: Hervorheben des Radius

[279] Jedes Dreieck im Halbkreis lässt sich auf die angegebene Weise in zwei gleichschenklige Teildreiecke zerlegen, die insbesondere jeweils gleichgroße Basiswinkel besitzen. Mit der Innenwinkel-summe im Dreieck folgt der rechte Winkel.

Der hervorgehobene Radius teilt ein Dreieck stets in zwei jeweils gleichschenklige Teildreiecke, weil ihre Schenkel allesamt Radien des Kreises sind. Die Winkel des großen Ausgangsdreiecks lassen sich daher nach dem Einschneiden tatsächlich immer passgenau übereinander falten. Die Innenwinkelsumme von 180° liegt dann „doppelt" in dem Winkel, der folgerichtig ein rechter ist.

- Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – zweite Beweisidee

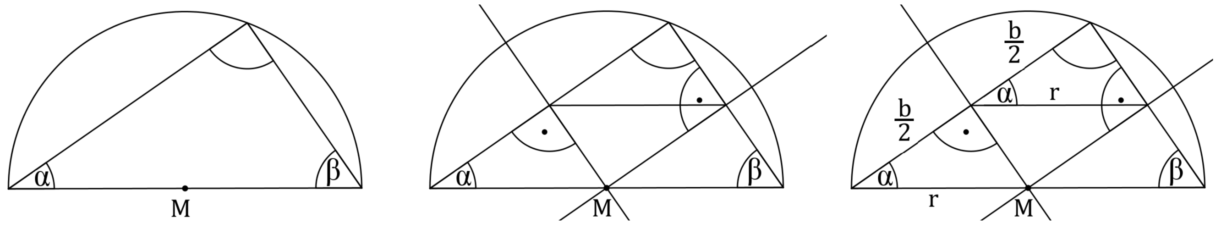


Abb. 108: Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – Vorabskizze der zweiten Beweisidee[280]

Das Falten hebt die Faltkanten hervor. Als Mittelsenkrechte zu Kreissehnen verlaufen diese durch den Mittelpunkt des Kreises, denn sie enthalten alle Punkte, die von den beiden Endpunkten der Kreissehne gleichen Abstand haben, also auch den Kreismittelpunkt (Abb. 109 links).

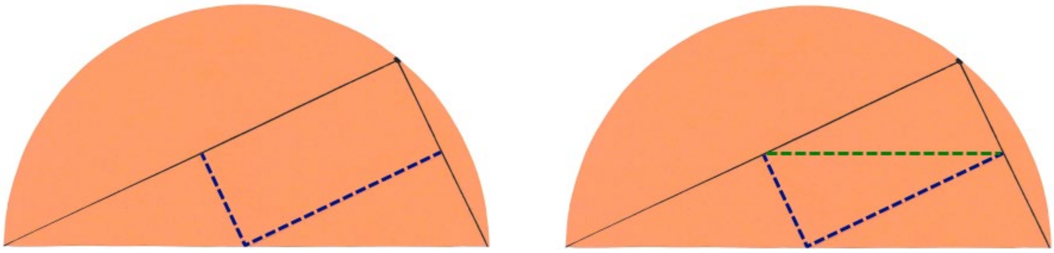


Abb. 109: Hervorheben der Faltkanten

In dieser Konstellation kann vermutet werden, dass das obere Teildreieck kongruent zu einem der in Abb. 109 links dargestellten, rechtwinkligen Teildreiecke ist – sollte sich der Verdacht bestätigen, wäre auch das Ausgangs-dreieck rechtwinklig.

Die eingezeichnete Diagonale des mittigen Vierecks verbindet die Sehnenmitten (Abb. 109 rechts). Sie ist parallel zum Durchmesser und halb so lang wie dieser, weil beide Sehnenmitten „auf halber Höhe" über ihm liegen. Mit den Sätzen über Winkel an geschnittenen Parallelen und dem Kongruenzsatz SWS folgt schließlich die Kongruenz des oberen Teildreiecks zum linken bzw. zum rechten Teildreieck.

[280] Jedes Dreieck im Halbkreis kann mithilfe zweier Mittelsenkrechten und einer Mittelparallelen in vier Teildreiecke zerlegt werden. Aus den Eigenschaften der Mittelparallelen und der Gleichheit von Stufenwinkeln folgt mit dem Kongruenzsatz SWS die Kongruenz des „oberen" und des „linken" Teildreiecks. Letzteres ist rechtwinklig und damit auch Ersteres sowie das Ausgangsdreieck.

- Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – dritte Beweisidee

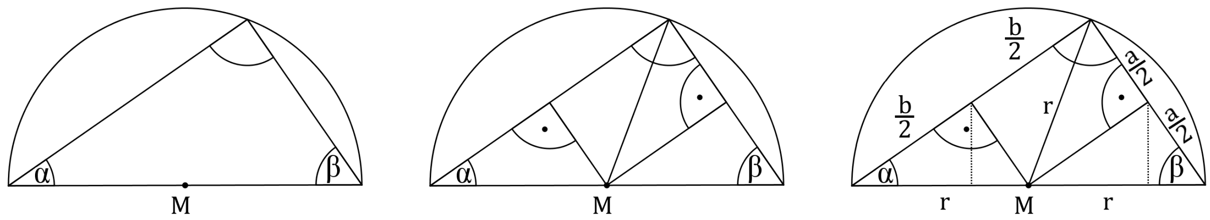


Abb. 110: Dem Halbkreis folgt der rechte Winkel – Vorabsskizze der dritten Beweisidee[281]

Das Falten hebt – in Kombination der beiden erstgenannten Ansätze – den Radius zum anvisierten Punkt auf der Kreislinie und die beiden Faltkanten hervor. Es entstehen vier Teildreiecke, die allesamt rechtwinklig sind. Sobald die Kongruenz der vier Teildreiecke begründet wurde, ist das Ziel erreicht, weil die Maße der beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Teildreiecks in Summe 90° ergeben.

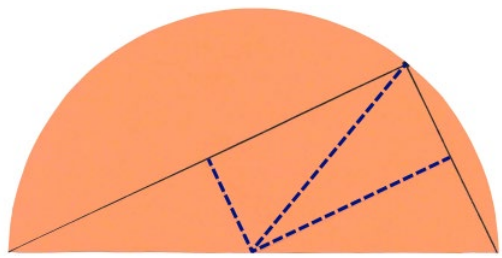


Abb. 111: Hervorheben des Radius und der Faltkanten

Die Kongruenz jener Dreieckspaare, die aufeinander gefaltet werden, lässt sich (beispielsweise) dank übereinstimmender Seitenlängen sicherstellen: Die längste Seite ist bei beiden Partnern der Kreisradius, eine weitere Seite ist stets die Hälfte derselben Kreissehne und die dritte Seite ist die Faltkante, die beide gemeinsam haben. Für die Kongruenz aller Teildreiecke muss noch eine Brücke geschlagen werden, etwa mithilfe der Teildreiecke unten links und unten rechts. Sie haben dreierlei gemeinsam: den rechten Winkel, die Länge der Hypotenuse und die Länge der Höhe auf dieser. Hier hilft das Wissen über die Umkehrung des Satz des Thales: Würden die beiden Teildreiecke übereinandergelegt wie in Abb. 95, lägen die Scheitelpunkte auf dem Halbkreis über der Hypotenuse – und zwar im selben Punkt, weil die Höhen (und die Orientierung) übereinstimmen. Die beiden Dreiecke sind also deckungsgleich – und damit alle vier.

Trotz der Vielfalt möglicher Argumentationen legen die hier beschriebenen Situationen natürlich nicht jeden Beweis nahe. Im Unterricht können sich nach ersten handlungsorientierten Zugängen daher weitere Begründungen anschließen, die sich vorwiegend kodifizierter Zeichen bedienen.

---

[281] Jedes Dreieck im Halbkreis lässt sich auf die dargestellte Weise in vier Teildreiecke zerlegen. Die beiden „linken“ bzw. die beiden „rechten“ Teildreiecke sind jeweils wegen des Kongruenzsatzes SSS kongruent zueinander. Außerdem ist „das linke“ Teildreieck kongruent „zum rechten“ Teildreieck, denn beide sind rechtwinklig, haben gleichlange Hypotenusen und gleichlange Höhen – der Scheitelpunkt des rechten Winkels liegt also jeweils an derselben Stelle auf einem gedachten Halbkreis über der Hypotenuse. Somit sind alle Teildreiecke kongruent zueinander. Der gesuchte Winkel setzt sich also aus α und β zusammen, deren gemeinsames Maß 90° beträgt.

5.1.7 Hypothesentests

Eine Anwendung des EIS-Prinzips darf es sich erlauben, übergeordnete didaktische Fragestellungen vorübergehend auszublenden. Daher widmet sich die folgende Diskussion um den Einsatz von Hypothesentests in der Schule nicht dem Ob, sondern nur dem Wie – es sei aber zumindest darauf verwiesen, dass NORBERT HENZE, THOMAS HOTZ, WOLFGANG RIEMER, BIRGIT SKORSETZ & REIMUND VEHLING (2020, S. 6) Lehrenden Trost spenden, „die in ihrem Bundesland immer noch testen müssen und noch nicht schätzen dürfen".

Falls das Hypothesentesten Bestandteil des Mathematikunterrichts ist und „das Verfahren und die mit ihm verbundenen Begriffe aus einer Problemsituation heraus von Schülerinnen und Schülern aktiv entwickelt werden" sollen, stellt sich unmittelbar eine Frage, bei der sich das EIS-Prinzip bereits bewährt hat (Leuders 2005, S. 9): Wie genau ist die erlebte Wirklichkeit zu gestalten (vgl. Lambert 2020)? Oder konkreter im Kontext: „Welches soll nun die Hypothese sein, die man im Unterricht [mittels eigener Experimente unter Annahme einer Nullhypothese] erforscht?" (Leuders 2005, S. 9). Dazu existiert bereits eine Vielzahl an Vorschlägen:

LEUDERS (2005, S. 9) zufolge sei „z. B. die Frage, ob ein Würfel, der bei zehnmaligem Würfeln viermal die 3 zeigt, vielleicht gezinkt ist", ein klassischer Aufhänger. Dementsprechend findet sich dieser Aufhänger auch bei THORSTEN MEYFARTH (2006) wieder, der eine ganze Reihe möglicher Alternativen aus unterschiedlichen Quellen zusammenträgt – unter anderem die folgenden:

- Zur Heranführung an das „Grundprinzip des Hypothesentestens" (ebd., S. 88) bzw. zu dessen Festigung dient ein Cola-Test (es „soll getestet werden, ob man Coca-Cola am Geschmack erkennen kann" (ebd., S. 106)) bzw. ein Experiment zur außersinnlichen Wahrnehmung: Die Testperson nennt eine aufgedeckte Karte, ohne sie zu sehen.
- Die „Einführung in die Konstruktion eines Hypothesentests mit gegebenem Signifikanzniveau" wird mit einem Geschmackstest in Form von RONALD AYLMER FISHERs (1953; Original von 1935) „Tea-Tasting-Lady" bewältigt (Meyfarth 2006, S. 92). In einem zweiten Beispiel behauptet ein Händler, die Bio-Äpfel eines Landwirts seien mindestens zu 20 % verwurmt, obwohl dieser mit höchstens 10 % wirbt.
- Das Erkennen, Beschreiben, Berechnen und Interpretieren des Fehlers erster Art und des Fehlers zweiter Art soll in der Situation eines Torwarttrainings gelingen: Nach einem speziellen Training behauptet ein Torwart, dass seine Elfmeterquote von 25 % auf 33 % gestiegen sei. Um Manager und Trainer von einer Anpassung des Vertrages zu überzeugen, werden 30 Schüsse durchgeführt. Eine zweite Situation stellt das Spielcasino dar; hier werden erneut potentiell gezinkte Würfel untersucht (ebd., S. 110).

Auffällig ist in dieser ausschnittsweisen Zusammenstellung, dass sich die Situationen allesamt strukturell gleichen, obwohl unterschiedliche Symbolgehalte angestrebt werden – diese schlagen sich lediglich in den Aufgabenstellungen zu den sonst austauschbaren Kontexten nieder, nicht aber in der erlebten Wirklichkeit selbst: Sie gleicht stets einem „Blindflug im Nebel", bei dem man „trotzdem gezwungen wird, Entscheidungen zu fällen" (Riemer 2020, S. 31).[282] Insofern sind Aussagen – z. B. die Elfmeterquote beträgt 33 % – nie mit völliger Sicherheit be- oder widerlegbar; ihnen kann lediglich mit einiger Gewissheit ver- oder misstraut werden.

Aus der Sichtweise der fertigen Mathematik wäre es sinnlos, Hypothesentests in anderen Kontexten einzusetzen, denn der Kontrollverlust schafft erst die Notwendigkeit des Testens. Aus Sicht der werdenden Mathematik darf darüber durchaus diskutiert werden – immerhin existieren auch kontrollierbarere Situierungen für Hypothesentests im Unterricht. Eine solche stellt das sogenannte Entscheidungsspiel von RIEMER (2020) dar: Das Spielmaterial umfasst zwei Urnen mit je drei Kugeln. In der ersten Urne ist eine von drei Kugeln rot, in der zweiten Urne sind es zwei. Wird eine rote Kugel gezogen, zählt dies als Treffer (Abb. 112).

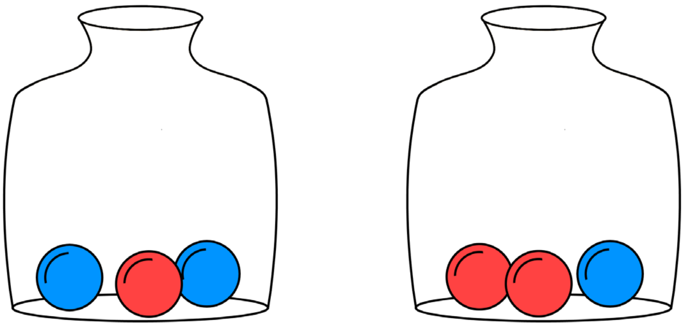


Abb. 112: Unterschiedlich gefüllte Urnen nach RIEMER (2020)

Eine Person wählt zufällig eine der beiden Urnen – wohlwissend, um welche es sich handelt. Anschließend zieht sie elf Kugeln mit Zurücklegen und nennt die Ergebnisse. Eine zweite Person soll nun entscheiden, welche Urne im Einsatz war.

Im Gegensatz zu allen vorherigen Situationen genießt hier eine Person die sonst unerreichbare Kontrolle über die Wahrheit und kann feststellen, ob bzw. wie häufig beim Verwerfen oder Nicht-Verwerfen ein Fehler begangen wurde – und wird dies der testenden Person im Unterrichtsgeschehen kaum verbergen wollen. Selbst vor dieser Enthüllung lassen sich anders als zuvor

[282] Dass oftmals „in verschiedenen Phasen des Erkenntniserwerbs immer wieder dasselbe Modell benutzt" wird, bemerkt bereits NEIGENFIND (1977, S. 289, Hervorhebung im Original) und führt es darauf zurück, dass „*die besonderen Potenzen und Grenzen der unterschiedlichen Unterrichtsmittel* nicht hinreichend beachtet" werden. Zur Behebung dieser Ursache werden im Folgenden potentielle Symbolgehalte und deren Zugänglichkeit für unterschiedliche Situierungen abgeglichen. Ganz analog dazu schätzt NEIGENFIND (1977, S. 290 f.) die Eignung unterschiedlicher Quadermodelle in Abhängigkeit des von Lernenden zu Erfassenden ein.

> den Hypothesen A-priori-Wahrscheinlichkeiten zuordnen und in Abhängigkeit von Testergebnissen A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten berechnen. So wird quantifizierbar, was es bedeutet, Hypothesen auf dem 5 %-Signifikanzniveau (mit 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit) zu verwerfen: Die verworfene Hypothese H_0 wird unwahrscheinlicher, aber die Alternative H_1 gilt weit verbreiteten Fehlvorstellungen zum Trotz beileibe nicht mit 95 %iger Sicherheit.
>
> Riemer (2020, S. 30)[283]

Diese (das Hypothesentesten scheinbar ad absurdum führende) Kontrolle über die Situation kann konsequent weitergeführt werden, indem sogar die testende Person selbst die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung kennt – und dennoch einen Test unter Annahme einer womöglich abweichenden Nullhypothese durchführt. LAMBERT (2018) schlägt eine solche Situierung vor: In einer Urne befinden sich zwölf blaue oder rote Kugeln. Die Nullhypothese lautet, dass vier von ihnen blau sind. Zur Überprüfung werden sechs Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Dies wird für unterschiedliche, *bekannte* Aufteilungen zwischen blauen und roten Kugeln zunächst mit farbigen Plättchen simuliert, anschließend am Computer.

Im Zentrum steht die Frage, wie gut die Entscheidungsregel ist, bei einer, zwei und drei blauen Kugeln die Nullhypothese nicht abzulehnen – insbesondere sollen also mögliche Fehler und deren Wahrscheinlichkeit aufgedeckt werden. Wie oft die Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl sie wahr ist bzw. wie oft die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, obwohl sie falsch ist, kann wie bei RIEMER (2020) empirisch festgestellt und anschließend systematisch untersucht werden; auch unter Variation der wahren Trefferwahrscheinlichkeit. Ein auf diese Weise zugänglicherer Symbolgehalt ist beispielsweise der Zusammenhang, dass das Risiko für einen Fehler zweiter Art kleiner wird, je „falscher" die Nullhypothese ist.

Zunächst läge nahe, die zuletzt genannten Situierungen abzulehnen, weil ohne den Kontrollverlust das Grundprinzip und der Sinn von Hypothesentests verwischt werden und Fehlvorstellungen resultieren können: Zu den weitverbreiteten „Illusionen über die Bedeutung eines signifikanten Testergebnisses" rechnen STEFAN KRAUSS & CHRISTOPH WASSNER (2001, S. 30) eben jene Auffassung, nach dem Verwerfen der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit dafür ableiten zu können, „dass die Alternativhypothese richtig ist" – vgl. RIEMERs (2020) A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten. Nicht ohne Grund mahnt RIEMER (2020, S. 31) dazu, beim „Transfer der Erkenntnisse auf Realsituationen" mit Bedacht herauszuarbeiten, „auf welche (von den meisten Anwendern herbeigewünschten) Aussagen man bedauerlicherweise verzichten muss, wenn man […] wichtige Parameter nicht kennt".

---

[283] Dass im entsprechenden Arbeitsauftrag für Lernende „B (wegen $X \leq 5$) auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 12\%$ verworfen" wurde und A dann „mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}44 : (0{,}44 + 0{,}06) = 88\%$" gilt, ist bezüglich der obigen Klarstellung etwas irreführend (Riemer 2020, S. 32).

Andere typische Fehlvorstellungen können in den kontrollierten Settings hingegen besonders effektiv *abgebaut* werden: Der Eindruck etwa, dass nach dem Verwerfen der Nullhypothese eindeutig bewiesen sei, „dass die Nullhypothese falsch“ und „dass die Alternativhypothese wahr ist“, wird schnell und zweifelsfrei widerlegt (Krauss & Wassner 2001, S. 30).

Das EIS-Prinzip hilft nun bei der Einordnung dieser Argumente für oder gegen eine Situierung, indem es dazu auffordert, die Auswahl der (objekthaften) Zeichen vor dem Hintergrund intendierter Symbolgehalte zu treffen:

Wenn zunächst das Grundprinzip des Hypothesentestens als intendierter Symbolgehalt ausgemacht wird, sollten Lernende mit objekthaften Zeichen umgehen, die dieses bestmöglich zugänglich machen. In kontrollierten Situationen liegen zusätzliche Informationen vor, die den Fokus auf das Grundprinzip womöglich verwischen und eher dessen Beherrschen voraussetzen, um sie adäquat einzuordnen.

Spätestens dann jedoch, wenn mögliche Fehler beim Testen – deren Existenz und Wahrscheinlichkeit – entdeckt werden sollen, ist es durchaus begründet, kontrollierte Situationen aufzusuchen: Diese Symbolgehalte lassen sich leichter in die Handlungen hineinsehen, weil tatsächlich festgestellt werden kann, ob eine getroffene Entscheidung richtig oder falsch war. Erzeugen die erhobenen Daten beispielsweise bei einem Hypothesentest mit 5 % Signifikanzniveau einen Fehler 1. Art, können Lernende erleben und darüber staunen, dass soeben ein sehr seltenes Ereignis eingetreten ist, welches sie zuvor mit vollster Überzeugung zu einem fehlerhaften Urteil bewogen hätte. Dieses emotionale Involviert-Sein und Erleben ist gerade deshalb wichtig, weil hier von „nicht leicht fasslichen Begriffen“ die Rede ist (Leuders 2005, S. 9). Außerdem wird insbesondere bei LAMBERT (2018) durch Variation der wahren Verteilung handelnd realisiert, „dass der Fehler 1. Art und der Fehler 2. Art beim Signifikanztest nur bedingte Wahrscheinlichkeiten sind“ – dies werde „in der Deutung nicht nur von Schülerinnen und Schülern, sondern auch von Erwachsenen, die in ihrem Beruf mit Tests zu tun haben, oft missverstanden“ (Renate Motzer 2010, S. 29 f.).

Die eigentlich fehlende Notwendigkeit zur Durchführung eines Hypothesentests könnte sogar positiv wirken: Gerade *wegen* ihr wird Lernenden transparent vermittelt, dass nicht nur eine weitere Situation, sondern etwas Anderes – das Testen selbst – untersucht werden soll. Vor diesem Hintergrund lässt sich RIEMERs (2020) Urteil bekräftigen, dass es sich um authentische Gewinnspiele handelt, falls Authentie im Sinne von JAHNKE (2005, siehe oben) verstanden wird.

Die Anwendung des EIS-Prinzips macht im vorliegenden Abschnitt also darauf aufmerksam, dass beide strukturell unterschiedlichen Arten von Situierungen im Unterricht zu rechter Zeit am rechten Ort sind. Der jeweiligen Vor- und Nachteile sollte eine Lehrperson sich dennoch bewusst sein, aber sie muss keineswegs eine Situierung zugunsten der anderen verwerfen.

5.2 Beispiele zur Anwendung des Leitsatzes für horizontale Übergänge

5.2.1 Mehrstufige Zufallsexperimente am Galtonbrett

Der Unterrichtsversuch zum Galtonbrett von SELTER (1985) wurde bereits an mehreren Stellen der vorliegenden Arbeit thematisiert. Für seine Beschreibung sei daher auf Unterabschnitt 4.1.2.1 verwiesen, während hier lediglich die verschiedenartigen Zeichen wiederholt werden: Als objekthafte Zeichen setzt SELTER (1985) reale Kugelläufe an einem Galtonbrett ein, woran entlehnte Zeichen in Form von abbildhaften Pfeildarstellungen auf abgedruckten Galtonbrettern anschließen. Kodifizierte Zeichen treten als Buchstabenkombinationen auf, wobei jeder einzelne Buchstabe für eine gewisse Richtung steht, in die eine Kugel an einem Zapfen gefallen ist.

Zwischen all diesen Zeichen muss im Verlauf der Unterrichtsstunde gewechselt werden. Unterabschnitt 4.2.2.2 hat dazu konkrete Ansatzpunkte genannt, die im Folgenden einzeln thematisiert werden. Zu jedem Ansatzpunkt werden stets zunächst die von SELTER (1985) bereits getroffenen Maßnahmen identifiziert, die durch die Einbettung in das EIS-Prinzip eine explizit begründete Sinnhaftigkeit erhalten. Anschließend werden jeweils zusätzliche Verbesserungsmöglichkeiten herausgearbeitet, die bereits in LOTZ (2020) angerissen sind und hier gründlicher dargelegt und teilweise ergänzt werden. Dabei sind einzelne Vorschläge nicht immer trennscharf nur genau einem Ansatzpunkt zuzuordnen.

- Größere Gleichheit der Situationen herstellen

Den Übergang zu entlehnten Zeichen beschreibt SELTER (1985) wie folgt:

> Dann stellte ich die Aufgabe: „Findet heraus, wohin die meisten Wege führen.“ Zu diesem Zweck teilte ich für jedes Kind 3 Arbeitsblätter aus, die jeweils eine Aufsicht auf das Galton-Brett im Maßstab 1:1 wiedergaben. Auf eines sollten die Wege zu Fach Nr. 1 und Nr. 5, auf ein anderes die Wege zu Fach Nr. 2 und Nr. 4 und auf das dritte Blatt die Wege zu Fach Nr. 3 mit Bleistift eingetragen werden.
>
> Selter (1985, S. 11)

Die dabei ergriffene Maßnahme zur Gestaltung der Zeichen liegt in der Wahl des Maßstabs: Bewusst wurde dieser so gewählt, dass das abgedruckte Galtonbrett dieselben Ausmaße wie das hölzerne einnimmt. Beide Situationen – jene, in der Lernende mit objekthaften Zeichen arbeiten und jene, in der sie mit entlehnten Zeichen arbeiten – gleichen sich dadurch mehr als bei jeder anderen Wahl des Maßstabs.

Zur weiteren Verbesserung der Gleichheit der angesprochenen Situationen könnten Lernende die Arbeitsblätter anfangs aufrecht vor sich positionieren –

beispielsweise, indem sie sie an ein aufgestelltes Buch anlehnen.[284] Auf diese Weise wird die vorherige räumliche Beziehung zum Betrachter beibehalten. Nachdem erste Wege in der aufrechten Positionierung eingezeichnet wurden, sollte das Blatt *bewusst* in die übliche, waagerechte Position gebracht werden und der Weiterarbeit in gewohnter Weise dienen. Das aufrechte Positionieren mag jenen überflüssig erscheinen, die davon nicht profitieren, weil sie entsprechende Konventionen[285] zur Genüge verinnerlicht haben. Für manche Lernende kann hierbei jedoch eine entscheidende Brücke geschlagen werden, wie HOLE (1973, S. 74) an einem analogen Einsatz eines Demonstrationsmodells bezeugt: „Besonders wurden die Kinder dadurch verwirrt, daß die Erarbeitung der Drehbegriffe […] ausschließlich am Demonstrationsmodell erfolgte, das lotrecht an der Tafel aufgehängt war, wohingegen sich die Modelle der Schüler in waagerechter Lage befanden“. Dieselbe Idee ließe sich auf die Gestaltung der kodifizierten Zeichen übertragen und würde darin resultieren, Buchstabenketten nicht von links nach rechts, sondern von oben nach unten zu notieren.

Das anzustrebende Ideal der Gleichheit von Situationen beschränkt sich jedoch nicht nur auf äußerliche Merkmale, wie BAUERSFELD (1983, S. 6) betont. Auch im vorliegenden Fall lassen sich weitere Stolpersteine beim Übergang von objekthaften zu entlehnten Zeichen durch einen weiterschweifenden Blick identifizieren: Am realen Galtonbrett ist der Verlauf einer Kugel dem Zufall überlassen und wird beobachtet. Auf den Arbeitsblättern müssen Lernende den Lauf der Kugel jedoch selbst bestimmen. Dieser Umstand soll keineswegs vermieden werden, kann aber – bei Bedarf – verzögert und sanfter angebahnt werden: Zu diesem Zweck filmen Lernende das rasante Fallen einzelner Kugeln mit einem Smartphone. Die Filmaufnahme wäre bereits ein entlehntes Zeichen und kann umgemünzt werden in erste Pfeilbilder auf den Arbeitsblättern, indem verlangsamt abgespielte Kugelläufe nachgezeichnet werden. Die Situationen mit hölzernen bzw. gedruckten Galtonbrettern würden sich so stärker gleichen als zuvor, weil dieselben beobachteten Kugelläufe im Fokus stehen.

Lernende werden ab einem gewissen Zeitpunkt (gegebenenfalls auch von Anfang an) von selbst auf dieses Transkribieren ihrer Filmaufnahmen verzichten, sobald sie in der Lage sind, fehlende Wege durch vorgestellte Handlungen zu identifizieren. Erneut versteht sich diese Maßnahme als ein Angebot, das nur solange genutzt werden sollte, wie es bereichernd wirkt.

[284] Umgekehrt wäre es auch möglich, Galtonbretter nur in geringer Schräglage vor sich zu positionieren – dann aber benötigen Lernende mindestens paarweise ein Galtonbrett.

[285] „Was auf dem Papier oben und unten ist, ist natürlich auch Konvention; merkwürdigerweise ist das in allen Zivilisationen übereinstimmend gewählt worden: unte[n] ist der Rand, der der Brust des Schreibers am nächsten ist“ (Freudenthal 1973, S. 231). Allzu merkwürdig oder zufällig erscheint dies jedoch nicht; schließlich ist das entsprechende Drehen eines aufrechten Blattes – mit der unteren Kante zur Brust hin – die einfachste Bewegung, um es mit der Vorderseite aufwärts zeigend in waagerechte Lage zu bringen.

- Mischzeichen verwenden

SELTER (1985, S. 11) setzt Mischzeichen gewinnbringend ein: Zusätzlich zu den bedruckten Arbeitsblättern erhalten Lernende „einen aus Pappe ausgeschnittenen Kreis (Durchmesser 2 cm), der eine Kugel symbolisieren sollte“ und mit dem sie eingezeichnete Wege nachfahren. In der abbildhaften Darstellung lassen sich jetzt Kugelläufe rekonstruieren; effektive Handlungen und Abläufe sind auf eine gewisse Art wieder möglich. Regeln zur Unterscheidung von Wegen, die am effektiv manipulierbaren Galtonbrett angewendet und erkannt wurden, sollten nach der Verwendung dieser Mischzeichen besser in den entlehnten Zeichen zum Tragen kommen – mit Erfolg:

> Dadurch, daß mit dem Kreis die Wege nachgefahren werden konnten, wollte ich erreichen, daß zwei Bleistiftstrichen, die auf dem gleichen Weg laufen, sich aber etwa in der Entfernung oder Verlaufskurve unterscheiden, auch als gleiche erkannt werden. Bei der Auswertung der Arbeitsblätter, die nach der Bearbeitungsphase von den Kindern nicht mehr korrigiert werden konnten, zeigte sich, daß bei demjenigen Viertel der Schüler, die den Kreis als Hilfsmittel nicht benutzten, einige Wege doppelt auftauchten, während die anderen bis auf ganz wenige Ausnahmen keine Duplikate aufwiesen, so daß ich bei einer Wiederholung der Unterrichtsstunde strikt verlangen würde, daß alle Kinder die „Kugelattrappe“ benutzen.

Selter (1985, S. 11)

Andere Mischzeichen – etwa solche zwischen entlehnten und kodifizierten Zeichen – könnten wie üblich entstehen, indem die abbildhaften Darstellungen mit zentralen Aspekten der Kodifizierung angereichert werden. In SELTERs (1985) abgedruckten Galtonbrettern bietet sich beispielsweise an, jene Zapfen, auf die die Kugel trifft, zum Eintragen des passenden Buchstabens zu nutzen (Abb. 113). Natürlich sind diese Mischzeichen ungeeignet, sobald mehrere Wege in einem Bild festzuhalten sind – dafür sind sie auch nicht erdacht. Ihr Zweck ist es, den Übergang zu kodifizierten Zeichen zu erleichtern, und hierzu tragen bereits wenige Beispiele dieser Art bei.

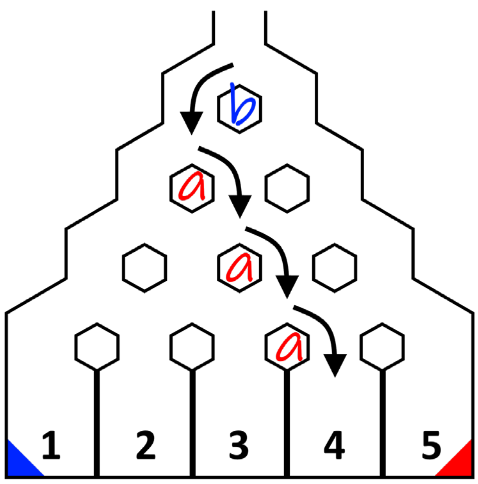


Abb. 113: Mischzeichen zwischen entlehntem und kodifiziertem Zeichen

Auf diese Weise treten die Buchstabenketten nicht isoliert neben die bisherigen Zeichen/Symbole, sondern gehen durch Reduktion der Darstellung als eine besonders effiziente Notation mit gleichbleibendem Informationsgehalt aus den entlehnten Zeichen hervor. Insofern ist dieses Vorgehen ebenso dem nächsten Ansatz zuzuordnen:

- Eine Zeichenart aus einer anderen hervorgehen lassen

Dieser Kategorie lässt sich die Entscheidung zuweisen, auf der linken und rechten Seite des benutzten Galtonbrettes farbige Markierungen anzubringen. „Dadurch wurde es möglich, von einer ‚roten' (r) und einer ‚blauen' (b) Seite zu sprechen" (Selter 1985, S. 10) – die kodifizierten Zeichen erscheinen also nicht willkürlich gewählt, sondern entspringen der Gestaltung der objekthaften Zeichen.

Das Aufsuchen weiterer Ansatzpunkte aus dieser Kategorie führt z. B. zum Einsatz einer leeren Folie vor dem Aushändigen der Arbeitsblätter. Diese ließe sich in einer Plenumsphase auf das Galtonbrett auflegen, um dann wesentliche Konturen zu übertragen. Dadurch entsteht eben jene Darstellung, die Lernende auf den Papierblättern nutzen. Im selben Zug wäre es Lernenden möglich, auf der Folie erste Wege einzuzeichnen, noch während sie auf dem Galtonbrett aufliegt.

5.2.2 Füllgraphen bei portionsweisem Einfüllen

In diesem Abschnitt wird kein konkret dokumentierter Unterrichtsgang herangezogen, sondern das typische Vorgehen beim Erstellen erster Füllgraphen in Klassenstufe 5/6. Um die hier auftretenden Zeichen zu identifizieren, wird auf LAMBERT (2013) zurückgegriffen, der in diesem Kontext Elemente der enaktiven bzw. ikonischen Darstellungsebene aufführt:

„[P]ortionsweises Füllen von konkreten Körpern" und das „Messen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Füllvolumen" sei für Lernende zunächst enaktiv (Lambert 2013, S. 597). Diese Handlungen samt den Handlungsobjekten sind also objekthafte Zeichen, mit denen eine Person anfangs naiv umgeht. Ergänzt werden könnte die Aufzählung durch vergleichbare Vorgänge auf dem Bildschirm: In der Computer-Simulation bei MICHAELA LICHTI & ROTH (2019, S. 39) „wird durch ein Klicken auf den entsprechenden Button (‚+20 ml' […]) ein Gefäß mit Wasser gefüllt. Durch Bewegen des Lineals mit der Maus kann dann auch die Füllhöhe in der Simulation gemessen werden". Wie bereits in Unterkapitel 3.4 betont wurde, geht aus der Einordnung in dasselbe Feld auf der EIS-Palette allerdings keine Austauschbarkeit der Darstellungen einher.

Der ikonischen Darstellungsebene zugehörig sei das „Fotografieren der Füllstände", das „Tabellieren der Werte" sowie eine „graphische Darstellung als Säulen" (Lambert 2013, S. 597). Durch die Erweiterung in der vorliegenden Arbeit kann die Theorie an dieser Stelle ihre ordnende Funktion noch detaillierter erfüllen und durch „proaktive Sprachgebung strukturierte Klarheit im

Unterrichtsalltag schaffen helfen“ (ebd., S. 596): Fotografien der Füllstände sowie abbildhafte Zeichnungen der Gefäße sind als entlehnte Zeichen einzuordnen, während Tabellen mit Zahlenwerten und graphische Darstellungen als Säulen bereits stärkere Kodifizierungsaspekte aufweisen. Als rein kodifiziertes Zeichen in Klasse 5/6 könnte noch der diskrete Funktionsgraph im Koordinatensystem aufgeführt werden, in dem Punkte an die Stelle der eher abbildhaften Säulen treten. Die „Interpolation […] der Messwerte zu einem kontinuierlichen Funktionsgraph“ schließt sich erst zu einem späteren Zeitpunkt in Klassenstufe 7/8 an und wäre ebenfalls ein kodifiziertes Zeichen (ebd., S. 598). Trotz dieser zusätzlichen Bezeichner ist es nach wie vor mit der erweiterten Theorie verträglich, all diese Darstellungen als ikonisch zu bezeichnen, solange der Umgang mit ihnen naiv ist.

Welche Symbolgehalte angestrebt werden und welche Maßnahmen zu deren Erschließung beitragen, soll hier ausgeklammert werden, denn die beabsichtigte Anwendung des Leitsatzes für die horizontalen Übergänge fokussiert die Wechsel der Zeichenarten. Einen kompakten, aber umfassenden Blick auf potentielle Symbolgehalte ergänzen jedoch LAMBERT & HILGERS (o. J.).

Im Folgenden werden erneut Gestaltungsvorschläge für objekthafte Zeichen (Handlung mit konkreten Gefäßen), entlehnte Zeichen (Fotografien, abbildhafte Zeichnungen) und kodifizierte Zeichen (als Extrembeispiel: Punkte im Koordinatensystem) gemäß den übergeordneten Ansätzen aus Unterabschnitt 4.2.2.2 generiert.

- Größere Gleichheit der Situationen herstellen

Bei der Einführung von Füllgraphen könnten die unterschiedlichen Zeichenarten in folgender Dramaturgie auftreten: Zunächst befüllen Lernende ein Gefäß portionsweise und protokollieren den Prozess dabei Schritt für Schritt durch Ausfüllen einer Wertetabelle. Anschließend werden die Informationen aus der Wertetabelle nach feststehenden Regeln in ein Koordinatensystem übertragen.

Auffällig ist hierbei, dass Wertetabelle und Koordinatensystem mehrere Zwischenstände gleichzeitig visualisieren, die sich in der vertrauten Handlung ablösen – so auch in der Simulation von LICHTI & ROTH (2019) in Abb. 116. Mit dem Ziel, stärker übereinstimmende Situationen zu schaffen, resultieren Anpassungen an den objekthaften Zeichen, um die Zwischenstände bereits in der Handlung überdauernd darzustellen: Bei einer erstmaligen Einführung der Darstellung im Koordinatensystem lohnt es sich, mehrere gleichartige Gefäße einzusetzen, sodass für jede Anzahl eingefüllter Portionen ein eigenes Gefäß aufgereiht werden kann (Abb. 114).

Abb. 114: Zwischenstadien der Handlung bleiben sichtbar

- Mischzeichen verwenden

Mischzeichen liegen nach der im ersten Unterpunkt vorgeschlagenen Anpassung der objekthaften Zeichen sehr nahe: Die Gefäße lassen sich in ein Grundgerüst eines Koordinatensystems einpassen, indem ein gemeinsames Maßband zum Ablesen der Füllhöhe bzw. eine Angabe zur Anzahl der eingefüllten Portionen ergänzt wird (Abb. 115).

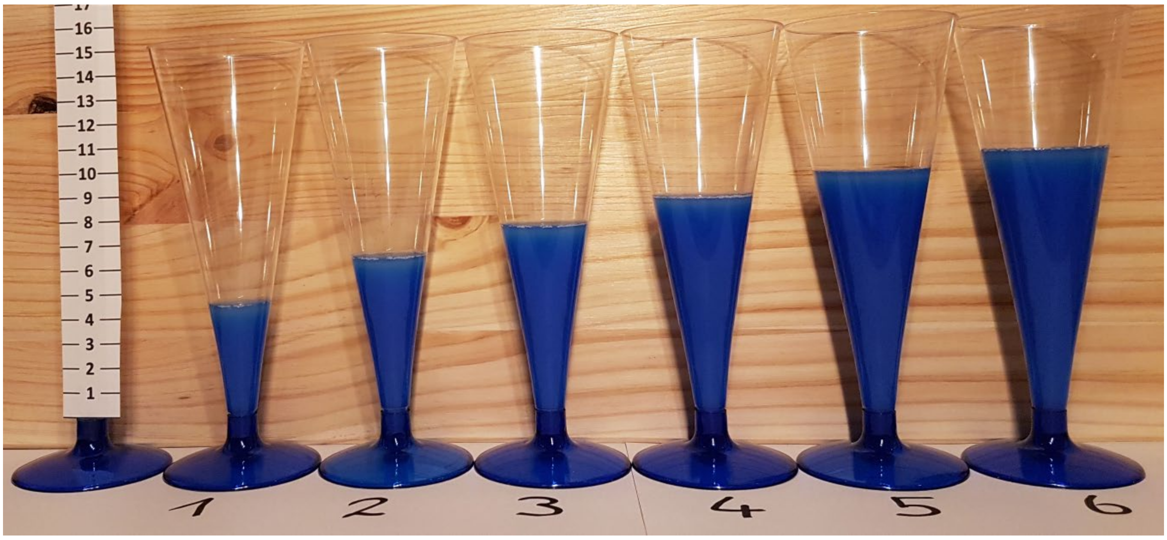


Abb. 115: Einpassung in das Grundgerüst eines Koordinatensystems

- Eine Zeichenart aus der anderen hervorgehen lassen

Unter diese Kategorie fallen zunächst die Bestrebungen zur „Vernetzung des Graphen mit der Simulation" von LICHTI & ROTH (2019, S. 39): „Durch Verbindungslinien zwischen den zwei Fenstern und eine entsprechende Farbgebung wird kenntlich gemacht, wie die einzelnen Punkte zustande kommen, aus welchen Werten sie sich zusammensetzen bzw. wie die Werte entstanden sind."

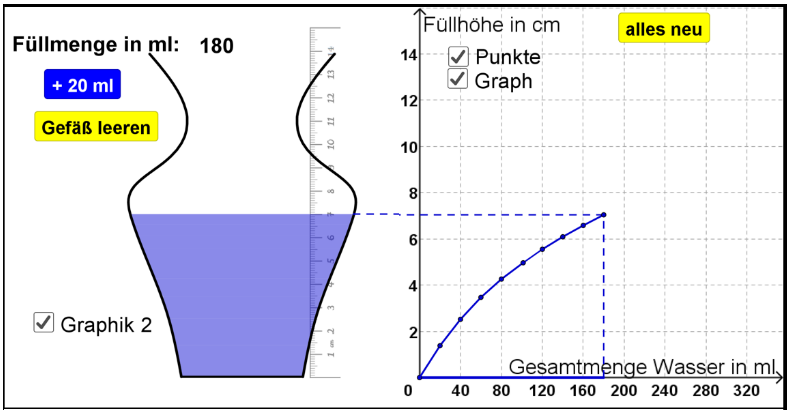


Abb. 116: Oberfläche der Computer-Simulation zu Füllgraphen bei LICHTI *&* ROTH *(2019, S. 39)*

Werden reale Füllvorgänge ohne ergänzende Simulationen durchgeführt, stellen entlehnte Zeichen eine zweite Möglichkeit dar, die kodifizierten Zeichen hieraus zu entwickeln. Dies gelingt wie schon bei BRANFORD (1913)[286] durch Auslöschen verzichtbarer Linien an der Tafel, im Heft oder am Tablet: Die Gefäßkonturen sind verzichtbar, weil beim Prozess des Messens einer Füllhöhe die Form des Gefäßes keine Rolle spielt – entscheidend ist die Wasserlinie im Gefäß. Diese ließe sich weiter reduzieren, denn zum Ablesen der Höhe auf der nebenstehenden Skala genügt auch ein einzelner Punkt der Wasserlinie. Dieses Hervorgehenlassen von kodifizierten Zeichen aus entlehnten Zeichen legt wesentliche Abstraktionsschritte offen und begleitet sie; ohne diesen Prozess werden sie leichtfertig vorgegeben und können unentdeckt Lernschwierigkeiten verursachen.[287]

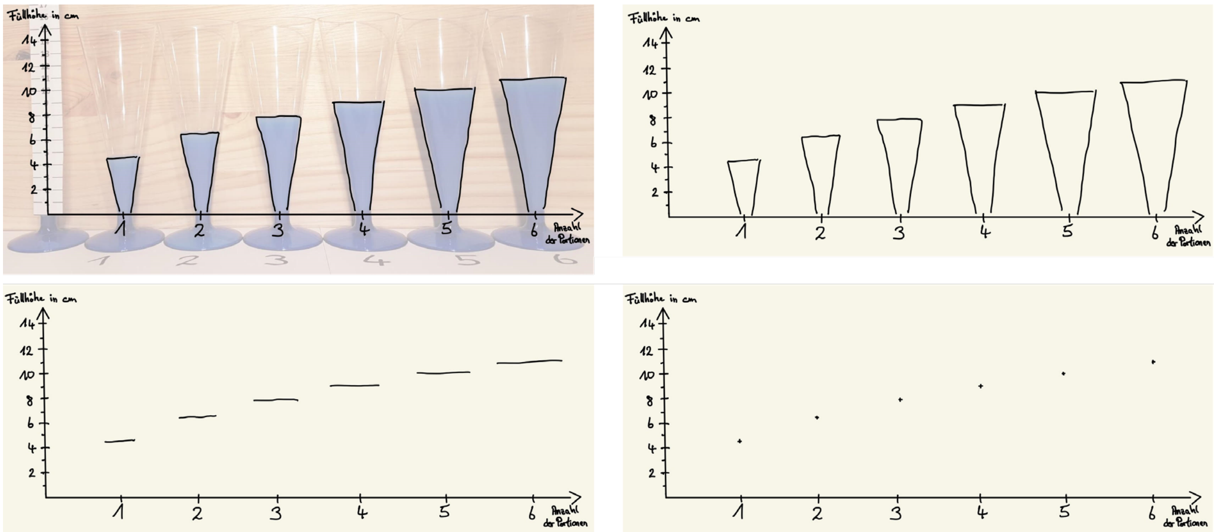


Abb. 117: Vom Gefäß über die Wasserlinie zum Punkt: Übergang zu kodifizierten Zeichen

[286] Ausgehend von einem graphischen Rechenbrett mit geschriebenen Zahlen und Kolumnen (entlehntes Zeichen mit vertrauten Aspekten einer Kodifizierung) wird „das Prinzip des Stellenwertes beinahe unbewußt eingeführt, indem man an der Tafel die Linien auslöscht, welche die Kolumnen scheiden“ (Brandorf 1913, S. 255).
[287] HANS SCHUPP hat mehrfach darauf aufmerksam gemacht, dass es für Lernende eine häufig übersehene Problematik darstellt, wenn Punkte für Bereiche stehen. Dies beginne bereits bei Längen – wie auch hier: Ein Punkt im Koordinatensystem steht für die Füllhöhe bei einer gewissen Anzahl eingefüllter Portionen (A. Lambert, persönliche Kommunikation, 19. August 2021).

5.2.3 Baumdiagramme

Als dritte Anwendung des Leitsatzes für horizontale Übergänge sei lediglich eine einzelne Darstellung untersucht – die des Baumdiagramms. Es begegnet Lernenden erstmals in der Sekundarstufe I, sei ELMAR COHORS-FRESENBORG & CHRISTA KAUNE (2005, S. 201) zufolge die am häufigsten anzutreffende Visualisierung für mehrstufige Zufallsexperimente in Schulbüchern und gehöre „unzweifelhaft […] zu bildhaften Darstellungen“ (ebd., S. 203). Dennoch ist das Baumdiagramm als entlehnt-kodifiziertes Mischzeichen einzuordnen, denn auch in Abb. 118 angedeutete, geteilte Normen und Gepflogenheiten – beispielsweise die Verwendung *gerader* Kanten – prägen die Ausrichtung und Struktur des gesamten Diagramms sowie die Positionierung einzelner Informationen:

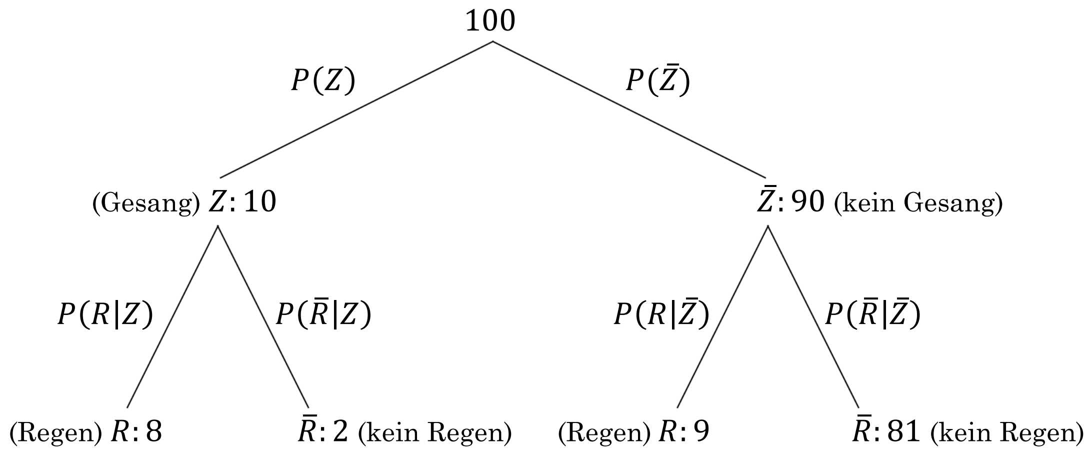


Abb. 118: Beispiel eines Baumdiagramms nach EICHLER & VOGEL (2013, S. 207)

Die Einführung dieses komplexen Zeichens findet in reduzierteren Situationen statt. Als eine solche sei hier eine an SCHUPP (2002) angelehnte Initialaufgabe für Aufgabenvariationen herausgegriffen: „*Aus einer Urne mit zwei blauen und drei roten Kugeln ziehst du zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Sind es zwei blaue, hast du gewonnen. Wie stehen deine Chancen?*“ (Lara Kubiak & Lotz 2021, S. 28; Hervorhebung im Original). Das dazu passende Baumdiagramm ist in Abb. 119 dargestellt.

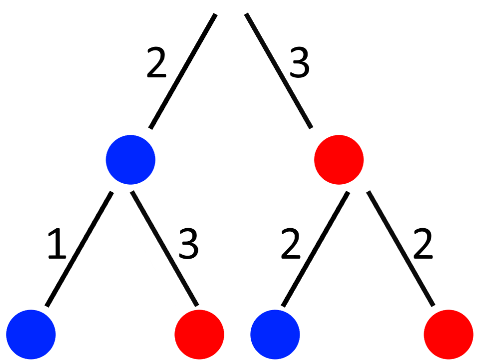


Abb. 119: Baumdiagramm mit absoluten Häufigkeiten zur gestellten Aufgabe (Kubiak & Lotz 2021, S. 28)

Bei einem Vergleich mit der Situation des realen Ziehens aus einer Urne – also mit objekthaften Zeichen – fällt ein Unterschied auf, der der effizienten Gestaltung des Baumdiagramms geschuldet ist: Im ersten Zug aus der Urne wird eine von fünf Möglichkeiten ausgewählt, während das Baumdiagramm gleichfarbige Kugeln zusammenfasst und daher nur zwei Möglichkeiten unmittelbar darstellt.

Der Leitsatz für horizontale Übergänge sensibilisiert für derartige Unterschiede, indem er unter anderem dazu auffordert, größtmögliche Gleichheit zwischen Situationen herzustellen, die sich verschiedenartiger Zeichen bedienen. Diesem Bestreben ließe sich auch hier nachkommen durch eine Anpassung des Baumdiagramms, die als Vorstufe[288] zu Abb. 119 geeignet ist:

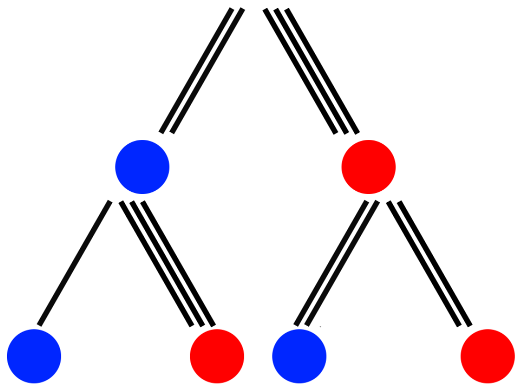


Abb. 120: Angepasstes Baumdiagramm

Die größere Gleichheit mit der Situation in objekthaften Zeichen stiftet Vorteile, die besonders im Vergleich mit anderen Darstellungen in der Stochastik augenfällig werden:

Bereits Wolfgang Bea & Roland Werner Scholz (1995, S. 320) attestieren dem Einheitsquadrat in ihrer Versuchsstichprobe die stärkste und insbesondere eine „deutlich stärkere Trainingswirkung" als dem Baumdiagramm – in den letzten Jahren bestätigen dies beispielsweise Katharina Böcherer-Linder, Eichler & Vogel (2016). „Aus kognitionspsychologischer Sicht" erachten Bea & Scholz (1995, S. 320) ihre Beobachtung als „gut nachvollziehbar, da das Einheitsquadrat die relevanten Informationen ausgeprägter visualisiert". Darüber hinaus vermittle „[a]llein das Einheitsquadrat […] einen graphischen und somit intuitiv zugänglichen Eindruck der *Mächtigkeit*, sprich *Wahrscheinlichkeit* der Ereignismengen. Gerade diese intuitive Zugänglichkeit zu den Qualitäten ist es aber, die auch die Kognition der qualitativen Zusammenhänge in hohem Maße fördert" (ebd., S. 321; Hervorhebung im Original).

Diese Vorteile lassen sich auch dem angepassten Baumdiagramm in Abb. 120 zusprechen: Es visualisiert die Anzahl von Möglichkeiten und gibt sie nicht nur

[288] Es sei also nicht verlangt, das klassische Baumdiagramm im Unterricht dauerhaft zu ersetzen. Thematisiert wird hier der *Übergang* zum klassischen Baumdiagramm, das keinem völlig isolierten Erfahrungsbereich angehören soll, sodass z. B. erschlossene Symbolgehalte am Baumdiagramm auch auf das Ziehen aus einer Urne übertragen werden können.

numerisch an, sodass sich häufig zu erwartende Ereignisse offenkundig als solche zu erkennen geben und allein durch den optischen Eindruck von seltenen unterscheiden. In Folge dieser intuitiven Zugänglichkeit liegen auch die Pfadregeln sehr nahe: So könnten z. B. die $3 \cdot 2 = 6$ Pfade zu *rot-rot* in Abb. 120 sogar mit einem Stift nachgefahren werden – anders als in Abb. 119.[289]

5.3 Fazit zur Anwendung der Theorie

Aus den Leitsätzen für vertikale und horizontale Übergänge lassen sich Rückschlüsse über die Gestaltung künstlicher Zeichen generieren, die Lernende beim Erschließen und Übertragen von Symbolgehalten unterstützen – hier entfaltet die BRUNERsche Theorie ein Potential, das im Ad-Hoc-Verständnis verborgen bleibt (vgl. Abschnitt 0).

Die Rückschlüsse stellen jedoch nie notwendige Bedingungen für das Gelingen von Lernprozessen dar, sind weder verbindlich noch unverzichtbar – allein die Fülle von Vorschlägen zu SELTERs (1985) Unterrichtsdokumentation würde gewiss kontraproduktiv wirken, wenn sie allen Lernenden in Gänze angeboten würde. Stattdessen verstehen sich alle Rückschlüsse als Angebote bzw. Werkzeuge, die sich eine Lehrperson zu eigen machen kann, um mit unterschiedlichen Mitteln auf akute Verständnisprobleme zu reagieren bzw. zur Prävention selbiger beizutragen. Damit sei das Gestalten der Zeichen keineswegs zur Hauptaufgabe einer Lehrperson auserkoren, als ob sie sich getrost zurückziehen könnte, nachdem allen Problemen bestmöglich vorgebeugt wurde – ganz im Gegenteil: „Je besser (und das heißt auch je flexibler) eine Unterrichtseinheit geplant ist, desto mehr kann sich der Lehrer anderen Rollen widmen" (Wittmann 1974, S. 9). Als solche nennt er beispielsweise Partner des Schülers, Menschenfreund und Erzieher.

[289] Diese Anschaulichkeit schlägt sich auch in einer Passung zu Metaphern nieder, die die Nutzung von Baumdiagrammen begleiten können. Eine solche schildert BENDER (1997, S. 16): „Auch in einem 'objektivistisch' verstandenen Konzept von Wahrscheinlichkeit erscheint mir folgendes Bild hilfreich: Ich habe eine Wahrscheinlichkeits'masse' (die ich mir als elastischen, beliebig teilbaren und gut formbaren Stoff vorstelle) vom Umfang 1 in der Hand und verteile diese Masse auf die Menge der Ausfälle des Experiments, den Wahrscheinlichkeitsraum. […] Hat man den Wahrscheinlichkeitsraum mit den Spitzen eines Baumdiagramms identifiziert, das für einen Zufallsprozeß steht, dann kann man die Wahrscheinlichkeitsmasse durch den ganzen Baum 'drücken': An jedem Verzweigungspunkt kommt ein bestimmter Teil an, und dieser wird auf die von da abgehenden Wege entsprechend deren (sich zu 1 aufsummierenden) bedingten Wahrscheinlichkeiten verteilt und weitergeschoben. An jeder Baumspitze kommt schließlich der ihr zustehende Anteil von Wahrscheinlichkeit an." Dass das *Drücken durch den Baum* an manchen Stellen schwerer und an anderen leichter fällt, liegt bei der angepassten Darstellung des Baumdiagramms auf der Hand: Durch doppelt so viele *Rohre* passt auch doppelt so viel *Wahrscheinlichkeitsmasse.*

6 Vorläuferideen und -theorien

Eine die Theoriebildung und deren Anwendung abschließende vergleichende Analyse von Vorläuferideen und -theorien kann mehrere Funktionen erfüllen. BREIDENBACH (1956) nennt einige dieser Funktionen in seiner Einleitung zu den Einblicken in die Geschichte der Rechenmethodik – sie bildet genau wie Kapitel 6 in der vorliegenden Arbeit eines der abschließenden Kapitel seines Buches:

> Die folgenden kurzen Hinweise werden aus mehreren Gründen gegeben. Einmal scheint es dem Verfasser wünschenswert, daß der junge Lehrer erfährt, daß sich vor ihm bereits andere bemüht haben. Zum anderen wird er erfahren, wie alt gewisse Forderungen sind, die an einen rationellen Rechenunterricht gestellt werden müssen, Forderungen, die immer bleiben werden, weil sie aus der Struktur des Gegenstandes mit Notwendigkeit folgen. Vergleicht er damit sein eigenes Tun, so sieht er, wieviel ihm noch zu tun bleibt, um diesen Forderungen gerecht zu werden. Endlich ersieht der junge Lehrer, wie kurzlebig Gedankengänge und Forderungen waren, die aus rechenfremden Erwägungen heraus dem Rechnen aufgeprägt werden sollten. Das mag ihn mahnen, sich gegenüber ähnlichen Bestrebungen der eigenen Zeit kritisch zu verhalten.

Breidenbach (1956, S. 299)[290]

Die Reihenfolge in der obigen Aufzählung *Vorläuferideen und -theorien* ist genetisch orientiert: Ausgearbeitete Theorien explizieren Ideen, die zuvor implizit wirksam waren; sie systematisieren bereits Dagewesenes und ordnen es in einen übergeordneten theoretischen Rahmen ein. Im Folgenden kehrt sich diese Reihenfolge um: In Unterkapitel 6.1 werden zwei Vorläufertheorien des EIS-Prinzips[291] analysiert und mit diesem verglichen, während das Hauptaugenmerk in Unterkapitel 6.2 auf einigen Elementen der noch älteren Ideengeschichte liegt – namentlich auf den traditionsreichen sowie begründeten Forderungen nach objekthaften und entlehnten Zeichen. Das Umkehren der Reihenfolge ist durch den Aufbau der vorliegenden Arbeit motiviert, die gemäß Abb. 1 das Vertiefen der Theorie mit Kapitel 5 abgeschlossen hat: Die Vorläufertheorien knüpfen unmittelbar an die vorherigen Ausführungen an, indem sie direkte Parallelen mit der vertieften Theorie aufzeigen, wogegen die Vorläuferideen zusätzlich hinzutreten und zu einer Überzeugung verhelfen sollen, die der gesamten Arbeit zugrunde liegt und die jetzt im entwickelten Sprachgebrauch formuliert und begründet werden kann.

[290] Siehe auch BENDER & SCHREIBER (1985, S. 12): „Gerade die Mathematik-Didaktik erfährt zunehmend das Kurzlebige einiger ihrer Moden sowie die Notwendigkeit, die eigene Geschichte wahrzunehmen und das in ihr Überlieferte gründlicher als bisher auszuarbeiten."

[291] Wenn im Folgenden von *dem* EIS-Prinzip die Rede ist, wird damit stets die vertiefte Auffassung der vorliegenden Arbeit bezeichnet. Auf diese Klarstellung wurde gelegentlich verzichtet, um den Lesefluss zu verbessern.

6.1 Vorläufertheorien

Die in der vorliegenden Arbeit betriebene Theoriebildung wurde u. a. von BREIDENBACH und AEBLI maßgeblich beeinflusst. Gleichzeitig haben beide eigene Theorien zum Lernen aus Handlungen entwickelt – BREIDENBACH (1956) mit dem Kriterium der *Isomorphie*, AEBLI (1961, 1983, 1985) unter dem Dach des *operativen Prinzips*. Unterkapitel 6.1 zielt auf eine vergleichende Analyse dieser Theorien bzw. einiger ihrer Teilbereiche ab. Diese Analyse ist erst jetzt, rückbeziehend und unter Zuhilfenahme des vertieften EIS-Prinzips in einer „Zirkelstruktur des Verstehens" angebracht (Gadamer 1960, S. 277): Wir „verstehen […] überlieferte Texte auf Grund von Sinnerwartungen, die aus unserem eigenen vorgängigen Sachverhältnis geschöpft sind" (ebd., S. 278), wobei dieses *Verstehen* kein „Besserverstehen" sei: „Es genügt zu sagen, daß man *anders* versteht, *wenn man überhaupt versteht*" (ebd. 280; Hervorhebung im Original). Das Auffinden von wiederkehrenden Ideen bei BREIDENBACH und AEBLI wäre also ohne das Vorwissen zum vertieften EIS-Prinzip erheblich erschwert, auch, weil sie dort weniger präzise, explizit und eingängig formuliert werden.

Auf diese Weise werden einerseits die weitreichenden Vorarbeiten von BREIDENBACH und AEBLI gebührend entfaltet, andererseits stellt sich das vertiefte EIS-Prinzip als eine vereinheitlichende Theorieweiterentwicklung heraus und erfährt zusätzliche, unabhängige und historisch gestützte Legitimation.

6.1.1 Isomorphie bei BREIDENBACH

BREIDENBACHs Kriterium der Isomorphie wird im aktuellen mathematikdidaktischen Diskurs nicht mehr explizit aufgegriffen oder angewendet – obwohl BREIDENBACH selbst es als durchaus revolutionär und bedeutsam einschätzt: Mit der Isomorphie sei

> ein *objektives Kriterium* gewonnen – erstmalig übrigens, um zu entscheiden, ob eine im Rechenunterricht angewendete Veranschaulichung und Einführung wirklich geeignet ist und den Erfolg haben kann, den wir von ihr erwarten: nämlich eine sachlich richtige Vorstellung des fraglichen Gegenstandes im kindlichen Geiste möglichst einfach und sicher zu erwecken.
>
> Breidenbach (1956, S. 27; Hervorhebung im Original)

Bereits hier wird deutlich, dass Parallelen zwischen Isomorphie und EIS-Prinzip existieren[292], denn die von BREIDENBACH angesprochenen Potentiale decken sich mit denen des EIS-Prinzips, das u. a. durch Beachtung der intendierten Symbolgehalte Aussagen über die Eignung objekthafter Zeichen trifft. Es lohnt sich daher, diese Vorläufertheorie genauer zu beleuchten.

[292] Sie sind aber – im Vergleich zu den Parallelen zwischen dem operativem Prinzip nach AEBLI und dem vertieften EIS-Prinzip – weniger zahlreich, weil bei BREIDENBACH viele Aspekte latent bleiben. Aus dem Grund fällt Abschnitt 6.1.2 umfangreicher aus als Abschnitt 6.1.1.

BREIDENBACHs (1956) Motivation für das eingehende Analysieren von Anschauungsmitteln entspringt seiner Auffassung von Mathematikunterricht: Es gehe darum, „*unter allen Umständen auf die einfachste und auf die sicherste Weise auch beim schwachen Kind Einsicht*" zu erzeugen sowie Selbsttätigkeit in einem forschenden Unterricht zu ermöglichen (ebd., S. 47, Hervorhebung im Original). In den ersten Jahren sei daher das Lernen aus Handlungen alternativlos[293]:

> Das Kind kann in die Welt der abstrakten Zahlen und der abstrakten Operationen mit ihnen nur an Hand von konkreten Gegenständen und von konkreten Handlungen mit ihnen eingeführt werden. Dabei vertreten die konkreten Gegenstände (das Wort im umfassenden Sinne gemeint; auch ein gemalter Kringel ist ein Gegenstand) die Zahlen, während die Handlungen mit den konkreten Gegenständen den Operationen mit den abstrakten Zahlen entsprechen.
>
> Breidenbach (1956, S. 22)

Bei der Auseinandersetzung mit dem Lernen aus Handlungen treten unmittelbar strukturelle Gemeinsamkeiten mit dem vertieften EIS-Prinzip hervor: Die an ECO (1977) angelehnte Unterscheidung der Zeichenarten entspricht bei BREIDENBACH (1956) – wenn auch etwas vage – der obigen Einordnung von Gegenständen auf einem Kontinuum zwischen konkret und abstrakt:

Objekthafte Zeichen treten auf BREIDENBACHs Kontinuum als *konkrete Gegenstände und Handlungen* auf, wobei im Unterricht eingesetzte Handlungen auch *Spielhandlungen* heißen. Beispielhaft dafür steht ein Kaufmannsspiel mit Münzen zur Einführung der schriftlichen Addition – eine (zunächst) enaktive Situierung.[294] Werden Geldstücke aus dem Kaufmannsspiel durch *gemalte Kringel* oder *Kreise* vertreten – „verhältnismäßig konkrete Symbole" –, erfordere dies bereits den Übergang von der Spielhandlung „zu einer abstrakteren Darstellung" (ebd., S. 87). Im Sprachgebrauch des EIS-Prinzips handelt es sich dabei um entlehnte Zeichen. Entlehnt-kodifizierte Mischzeichen bedienen sich bereits der „abstrakten Zahlen", spiegeln aber nach wie vor räumliche Beziehungen aus der konkreten Handlung wider (siehe Tabelle 2 auf Seite 70), während ein rein kodifiziertes Zeichen dann vorliegt, wenn Lernende „zu der ganz abstrakten Formulierung" übergehen (ebd., S. 18) bzw. zur „abstrakte[n] Schreibform" (ebd., S. 184).

---

[293] Natürlich können Lernende mathematische Lernprozesse auch ohne konkrete Handlungen bewältigen: Bei der Bruchmultiplikation schlägt BREIDENBACH (1956, S. 253) selbst mit der Verwendung von Permanenzreihen einen solchen Zugang vor.

[294] „Der Zusatz ‚Spiel' soll darauf hindeuten, daß die gewählte Handlung für das Kind nach Möglichkeit einen spielartigen und damit lustbetonten Charakter haben soll. Ich sage nicht einfach ‚Spiel', weil die Spielhandlungen keine echten Spiele sind" (Breidenbach 1956, S. 22). Während in echten Spielen im Rahmen vorgegebener Spielregeln möglichst erfolgreich agiert werden soll, ist in der Spielhandlung das Erkennen gewisser Regeln selbst das Ziel: Genau wie enaktive Einstiege sind Spielhandlungen daher keine ausschmückenden Vorgänge (vgl. Abschnitt 6.2.1); sie haben „Bedeutung […] für das Zustandekommen einer Erkenntnis" und sollen die „Vorstellungsgrundlage für den ideellen Unterrichtsgegenstand" schaffen (ebd., S. 25).

	M	Gr	Pf		H	Z	E		
	3	5	8		3	5	8		358
+		7	9	+		7	9	+	79
+		7	7	+		7	7	+	77
	3	19	24		5	1	4		514
	3	21	4						
	5	1	4						

Tabelle 5: Steigende Abstraktion beim schriftlichen Addieren

Das Fortschreiten im Grad der Abstraktion ist aber nicht der einzige Prozess, den es beim Mathematiklernen zu beachten gelte. Lernende benötigen auch „Gelegenheit zu handelndem Erkennen“ (ebd., S. 36): „An dem von der Anschauung gelieferten Material muß nun gedacht werden, um es geistig zu bewältigen“ (ebd., S. 30). Neben dem Übergang von *konkreten* zu *abstrakten* Darstellungen (horizontale Übergänge auf der EIS-Palette) findet also ein zweiter Prozess statt, und zwar ein solcher des *geistigen Bewältigens* (vertikale Übergänge auf der EIS-Palette).[295] Im Vergleich zur EIS-Palette bleibt BREIDENBACH terminologisch jedoch weniger präzise: Statt zwischen objekthaften, entlehnten und kodifizierten Zeichen zu unterscheiden, ordnet er Darstellungen (vorrangig prototypisch begriffsbildend) auf einem Spektrum von konkret bis abstrakt ein; außerdem existiert keine terminologische Unterscheidung der Zustände vor und nach dem geistigen Bewältigen. Dennoch entsprechen sich einige der aus den Theorien ableitbaren Rückschlüsse:

Den Prozess des geistigen Bewältigens im Blick habend, seien die Spielhandlungen zu ersinnen: „Damit erhebt sich die ganz bestimmte Frage: Wie ist die als Vorstellungsgrundlage dienende Spielhandlung einzurichten, damit die Struktur des ideellen Gegenstandes vom Kinde deutlich erkannt werden kann?“ (ebd., S. 25). Diese Aufgabe falle der Lehrperson zu, weshalb trotz Selbsttätigkeit des lernenden Kindes „der Anteil des Lehrers am Zustandekommen der Erkenntnis keineswegs gering“ sei: „Denn *er* hat die Situationen geschaffen, die das Kind zum Nachdenken und Selbstfinden veranlassen“ (ebd., S. 35; Hervorhebung im Original). Entsprechend gestalten Lehrende im Sprachgebrauch des vertieften EIS-Prinzips objekthafte Zeichen, mit denen Lernende die intendierten Symbolgehalte erschließen sollen – vgl. auch das *Situieren* bei LAMBERT (2020).

In seinem Beispiel zur Einführung der schriftlichen Addition – ein Kaufmannspiel – wird deutlich, dass auch BREIDENBACH (1956, S. 23) nicht zwingend „die getreue Wiedergabe eines Vorganges im Leben“ heranzieht[296]: Die erfundenen Vorgänge müssen „in einer bestimmten Weise abgewandelt, gereinigt“ werden

[295] Das im vertieften EIS-Prinzip beabsichtigte Ineinanderspielen beider Übergänge bezeichnet BREIDENBACH (1956, S. 23) als „Auswertung“ der Spielhandlung „in das abstrakte Zahlenreich hinein“, wobei diese Schlagwörter von BREIDENBACH vorgesehene und in seinen Beispielen erläuterte Zwischenschritte überspringen.

[296] „Natürlich kann auch einmal ein Lebensvorgang oder ein echtes Kinderspiel als einführende Spielhandlung dienen. Dann nämlich, wenn sie gewisse methodische Forderungen erfüllen, die wir an eine Spielhandlung als ein methodisches Hilfsmittel stellen müssen“ (Breidenbach 1956, S. 23).

(ebd., S. 22), denn „nur so ‚entspricht' die Handlung der Addition abstrakter Zahlen" (ebd., S. 23). Mit dem Entsprechen und Bereinigtsein sei die zu erfüllende Anforderung jedoch nur „vage umschrieben", und „[o]bwohl hierbei vermutlich jeder Leser das Richtige fühlt, wäre es gut, die Forderung, die eine Spielhandlung erfüllen muß, um ein geeignetes methodischen Hilfsmittel zu sein, begrifflich in aller Schärfe festzulegen" (ebd., S. 23). Dieses Festlegen in aller Schärfe führt zum „Begriff der Isomorphie[297] (= Gleichgestaltigkeit)" (ebd., S. 25):

> Zwei Gegenstände heißen isomorph, wenn sie bei inhaltlicher Verschiedenheit die identisch gleiche formale Struktur besitzen.
> Wir erläutern den Begriff am einfachsten, indem wir die […] geschilderte Spielhandlung und das abstrakte Verfahren der schriftlichen Addition abstrakter Zahlen einander gegenüberstellen. Zunächst ist offensichtlich, daß Spielhandlung und mathematisches Verfahren inhaltlich völlig verschieden sind. Bei der Spielhandlung handelt es sich […] um einen realen Vorgang mit bestimmten realen Dingen, nämlich bestimmten Geldstücken. Zwar „entspricht" das Handeln mit den realen Dingen dem Operieren mit Zahlen, aber beide sind *inhaltlich nicht identisch*, weil das eine aus realen Handlungen mit realen Dingen, das andere aber aus abstrakten Handlungen mit abstrakten Dingen (den Zahlen) besteht. […] Beide Vorgänge „entsprechen" sich eben nur, d. h. sie entsprechen sich im Formalen. Dabei ist die Spielhandlung (mit Absicht) so eingerichtet, daß das Entsprechen im Formalen das denkbar größte ist. Es besteht nämlich im *Formalen* zwischen Spielhandlung und mathematischem Verfahren *Identität*.
>
> Breidenbach (1956, S. 25 f.; Hervorhebung im Original)[298]

Beispielsweise dürfe bei der Einführung der schriftlichen Addition wegen der Beschaffenheit des Dezimalsystems „das abgezählte Geld […] nur 1-M-Stücke, 1-Groschen-Stücke und 1-Pfennig-Stücke enthalten" (ebd., S. 16). Außerdem „muß

[297] VOLLRATH (1969, S. 176) erachtet den Bezeichner »Isomorphie« als „etwas verschwommen" und ersetzt ihn durch »Homomorphie«: Ein Mathematisierungsprozess sei „nur dann mathematisch einwandfrei, wenn eine Homomorphie […] zwischen Spielhandlung (Original-bereich) und mathematischem Bereich (Bildbereich) besteht" (ebd., S. 176; siehe auch HOLE 1973, S. 40). VOLLRATH und HOLE nehmen dabei die Sicht der Lernenden ein, die sich des gewünschten Ausschnitts der Mathematik zunächst noch nicht bewusst sind. Aus Sicht der Lehrperson, die einen bewusst ausgewählten mathematischen Teilbereich in eine Spielhandlung übersetzen will – Ersteres ist jetzt Originalbereich, Letzteres Bildbereich –, ist der Bezeichner »Isomorphie« allerdings durchaus passend. Die mathematischen Begrifflichkeiten dienen bei alldem ohnehin nur als Metaphern, die das Gemeinte eingängig und unmissverständlich kommunizieren sollen. Ob die etwas kalten Bezeichner »Isomorphie« und »Homomorphie« dafür geeignet sind, sei dahingestellt – AEBLI (1983) verzichtet bei der Darlegung derselben Ideen jedenfalls auf sie: „Um den lebenspraktischen Zusammenhang zu finden, in dem das Problem der Unterrichtseinheit gestellt werden kann, muß nicht nur die logische Struktur der Operation scharf analysiert werden, sondern auch diejenige der praktischen Situation, denn zwischen den beiden Strukturen soll ja Identität bestehen" (ebd., S. 229).

[298] Für WINTER (1984, S. 121) wird hier ein *implizites didaktisches Prinzip* beschrieben, also ein Unterrichtshinweis, der zwar nicht ausdrücklich als didaktisches Prinzip formuliert wurde, aber dennoch diesen Status besitzt: „So ist z.B. für Breidenbach […] wesentlich, daß im Rechenunterricht neue Begriffe durch Spielhandlungen erarbeitet werden, die der mathematischen Begrifflichkeit isomorph sind (Isomorphie-Prinzip)."

er [der Kaufmann] vor dem ersten Kauf schon etwas in der Kasse haben; nicht, weil das der Kaufmann draußen auch so hat, sondern weil eine Additionsaufgabe mit einer Zahl beginnt, zu der andere addiert werden sollen“ (ebd., S. 16). Vor dem Hintergrund der „Erkenntnis, zu der […] die Spielhandlung verhelfen soll“, wird somit selbige gestaltet (ebd., S. 36):

> Im Rechnen können wir von manueller Selbsttätigkeit als didaktischem Mittel nur sprechen, wenn das körperliche Tun zuletzt auf ein Erkenntnisziel gerichtet ist, auch wenn zunächst nur der Lehrer um dieses Ziel weiß. Wenn die Kinder die Spielhandlung […] selbstständig durchführen, so wissen sie selbst noch nicht um die Erkenntnis, zu der ihnen die Spielhandlung verhelfen soll. Wohl aber weiß es der Lehrer. Für ihn war das Ziel sogar das erste, von ihm her hat er die Spielhandlung erst erfunden.
>
> Breidenbach (1956, S. 36)

Ganz analog verhält es sich im EIS-Prinzip: Die Lehrperson legt in der Planung des Unterrichts gewisse intendierte Symbolgehalte fest (die Erkenntnisse, zu denen verholfen werden soll) und richtet die Gestaltung der Zeichen nach eben diesen aus – so soll etwa der intendierte Symbolgehalt Teil der potentiellen Symbolgehalte sowie bestmöglich erschließbar sein. Das Zugänglichsein deutet Breidenbach (1956, S. 27; Hervorhebung im Original) ebenfalls an: „Es kann isomorphe Veranschaulichungen geben, die für den Unterricht völlig ungeeignet sind. Die gewählte Veranschaulichung muß auch *vom Kinde her* gesehen werden.“ Ein konkretes Beispiel einer isomorphen Veranschaulichung, die vom Kinde her gesehen ungeeignet ist, nennt er erst an späterer Stelle bei einer seiner Einschätzung nach falschen Einführung der Multiplikation:

> Man beginnt mit einer Spielhandlung: Karl kauft eine Feder und zahlt dafür 2 Pfennige. Beides wird schön nebeneinandergelegt. Karl kauft noch eine Feder und zahlt wieder 2 Pfennige. Auch dies wird nebeneinandergelegt, und ebenso noch einmal. […] Die Spielhandlung ist abgeschlossen, das Wort „mal“ oder gar die Aufgabe „dreimal zwei“ sind noch nicht gefallen. […] Jetzt fragt der Lehrer: „Wieviel mal hast du eine Feder gekauft?“ und Karl antwortet: „Ich habe dreimal eine Feder gekauft.“ Das entscheidende Wort, um dessen Klärung in Zusammenhang mit Mengen es doch einzig und allein geht, fällt, nachdem die Handlung beendet ist. […] Der Lehrer fragt weiter: „Wieviel mal hast du also 2 Pfennige gezahlt.“ Die Antwort kommt natürlich richtig: „Ich habe dreimal 2 Pfennige gezahlt.“ Jetzt endlich ist das „dreimal zwei“ da; aber, wie schon gesagt, viel zu spät und – auf Grund eines logischen Schlusses! […] Das aber ist keine kindgemäße Einführung.
>
> Breidenbach (1956, S. 144 f.)

Unter dem übergeordneten Ziel der Isomorphie deutet Breidenbach auch Aspekte des Leitsatzes für horizontale Übergänge an, insbesondere das Herstellen von Gleichheit zwischen Situationen, die sich durch die Art der verwendeten Zeichen unterscheiden. Dazu fordert er Isomorphie zwischen den konkreten und abstrakten Darstellungen – also zwischen Darstellungen in unterschiedlichen Zeichenarten: „Wenn wir nun zu einer abstrakteren Darstellung übergehen, wie es doch das Malen bedeutet, so *muß* das abstraktere Kreis-Bild zum konkreteren Objekt-Bild *isomorph* sein. Nur dann ist der denkbar einfachste Übergang von einem zum andern gewährleistet“[299] (ebd., S. 87; Hervorhebung im Original). „Die Aufgabe 1 + 1 = 2“ (ein kodifiziertes Zeichen) dürfe daher „niemals so gemalt“ werden wie Abb. 121 (ein entlehntes Zeichen), weil „beim Operieren mit den Körpern“ (ein objekthaftes Zeichen) beispielsweise „ein Apfel hingelegt“ wird „und ein zweiter dazu“ kommt „und dann ist Schluß. Daß die zwei Körper durch Addition zusammengekommen sind, kann etwa durch die verschiedene Farbe kenntlich gemacht werden. Jedenfalls liegen zwei Objekte da und nicht mehr“ (ebd., S. 87).

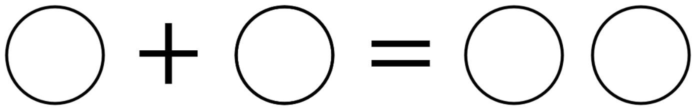


Abb. 121: Addition als entlehntes Zeichen

Das Umsetzen dieses Anspruchs wird z. B. bei der Gestaltung des Kaufmannsspiels sichtbar: „Wir spielen das Spiel nun noch einmal. Dabei stehen die Kästchen so, daß (von der Klasse aus) das M-Kästchen links, in der Mitte das für Groschen, rechts das für die Pfennige steht“ (ebd., S. 17). Diese Anpassung objekthafter Zeichen ist nicht vor dem Hintergrund der beabsichtigten Erkenntnis begründbar, sondern soll den späteren Übergang zu kodifizierten Zeichen erleichtern.

Damit ist zugleich der wesentliche Unterschied zum EIS-Prinzip ersichtlich. Er ist weniger inhaltlicher Natur, sondern liegt im Grad des Explizierens und terminologischen Präzisierens: BREIDENBACH behandelt Maßnahmen zur Unterstützung vertikaler und horizontaler Übergänge unter der einen Forderung nach Isomorphie – einerseits zwischen Spielhandlung und Gegenstand[300], andererseits zwischen Spielhandlung und einer abstrakteren Darstellung. Auf der EIS-Palette hingegen schlägt sich die Andersartigkeit der Übergänge zwischen Zeichenarten und der Übergänge im Umgang mit den Zeichen terminologisch und strukturell nieder, woraus eine Präzisierung und Verdeutlichung des Gemeinten resultiert.

Sogar BREIDENBACHs (1956) Musterbeispiel zur schriftlichen Addition könnte davon profitieren, die unterschiedlichen Ansprüche „begrifflich in aller Schärfe festzulegen“, wie er es selbst gutheißt (ebd., S. 23): Dies würde u. a. dazu motivieren, die Zeichenarten und deren Übergänge bewusster zu untersuchen, und infolgedessen könnte das Fehlen von vorwiegend entlehnten Zeichen beanstandet werden. Als ein solches dient Abb. 122, an das Tabelle 2 anknüpfen kann – der Übergang von der Handlung zur ersten Tabelle wäre dementsprechend mit einem

[299] Der dadurch erlangte Vorteil lautet im EIS-Prinzip, dass erschlossene Symbolgehalte besser von einer Zeichenart (objekthaft) auf eine andere (entlehnt) übertragen werden können, und wird bei der Gestaltung horizontaler Übergänge fokussiert.

[300] Dabei sei der Begriff des Gegenstandes nicht zu eng zu denken: „In der Wissenschaft meint das Wort Gegenstand alles, was Objekt einer wissenschaftlichen Untersuchung sein kann. So ist die schriftliche Addition Gegenstand des Rechnens“ (Breidenbach 1956, S. 25).

Zwischenschritt versehen. Selbstverständlich ist eine derart aufwendige Zeichnung nicht mehrfach anzufertigen – eine einzige in den Heften der Lernenden kann bereits genügen, um von den Funktionen entlehnter Zeichen zu profitieren (vgl. Abschnitt 6.2.2) und die Effizienz der kodifizierten Zeichen wertzuschätzen.

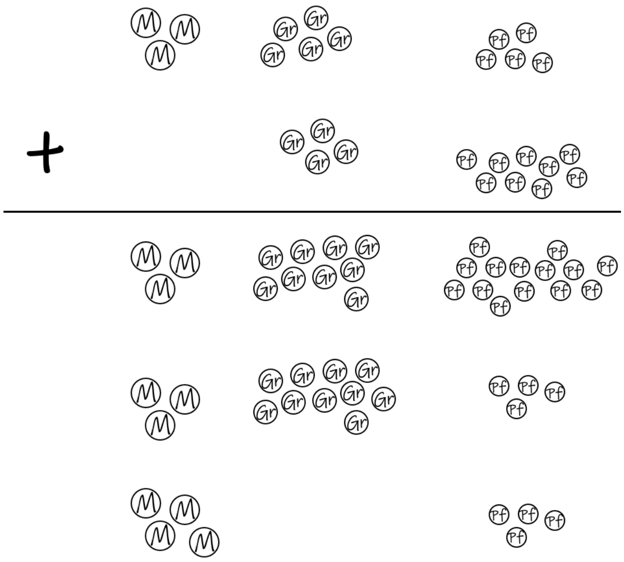


Abb. 122: Schrittweises Bündeln in entlehnten Zeichen im Kaufmannsspiel

Auch wenn BREIDENBACH (1956) das Verwenden des Pluszeichens – seiner Einschätzung[301] zu analogen Darstellungen von 1 + 1 = 2 folgend – kritisch sehen könnte, wäre das grundsätzliche Bestreben hinter dem Einsatz entlehnter Zeichen gewiss in seinem Sinne: „Diesen Akt [des Erringens der Einsicht; J. L.] auszulösen muß der Lehrer jede methodische Anstrengung machen. […] Eine Behandlung, die nicht so viel – *sachlich* richtige! – Hilfen wie möglich gibt, ist keine methodische Leistung“ (Breidenbach 1956, S. 31; Hervorhebung im Original).[302]

[301] „a) Die Zeichen + und = (und bei entsprechenden Aufgaben das Zeichen −) treten viel zu früh auf […]. b) Es ist stillos, verhältnismäßig konkrete Symbole wie die Kreise, die doch immer noch Äpfel oder ähnliches bedeuten, mit den ganz abstrakten mathematischen Zeichen in der gleichen Darstellung zu verwenden. c) Diese Koppelung ist völlig unkindlich. d) Beim Operieren mit den Körpern selbst wird ein Apfel hingelegt und ein zweiter dazu und dann ist Schluß. Daß die zwei Körper durch Addition zusammengekommen sind, kann etwa durch die verschiedene Farbe kenntlich gemacht werden. Jedenfalls liegen zwei Objekte da und nicht mehr“ – hier werden erneut horizontale Übergänge auf der EIS-Palette untersucht (Breidenbach 1956, S. 87).

[302] Da dieses Zitat ohne seinen Kontext leicht missverstanden werden könnte, muss expliziert werden, dass BREIDENBACH nicht die Angabe eines vorgeformten Lösungswegs durch die Lehrperson als Hilfe zur Erringung von Einsicht erachtet. Die erwähnten Hilfen liegen vielmehr u. a. im Gestalten günstiger Rahmenbedingungen, etwa durch die Wahl des Bezeichners »Groschen« (siehe Abschnitt 3.2.2). Expliziert wird diese Auffassung von *Hilfen* beispielsweise in OEHL (1965, S. 49): „Lehren heißt, dem Lernenden Lernhilfen geben. Es ist ein Unterschied, ob der Lehrende von der Vorstellung ausgeht, er könne dem Lernenden den ‚Stoff' einfach übermitteln und ihn dabei weitgehend zu einem passiven und rezeptiven Verhalten bestimmt, oder ob er sich bemüht, den Lernenden durch Bereitstellung von Arbeitsmitteln, durch Fragen oder Fingerzeige, durch die Art und Weise, wie er den Lehrinhalt angeht, zu leiten und zu lenken, ihm dabei aber das größtmögliche Maß an selbstständigem Tun und Denken zumutet.“

6.1.2 Das operative Prinzip bei AEBLI

Parallelen zwischen einem EIS-Prinzip und dem operativen Prinzip nach AEBLI sind keine Neuheit – siehe dazu beispielsweise ZECH (2002, S. 104) oder SCHERER & WEIGAND (2017, S. 36 f.). In der Regel wird jedoch das Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips mit einer gewissen Deutung[303] von AEBLIs Theorie verglichen, und insofern sind diese Analysen für das Vorhaben des aktuellen Unterkapitels mit Vorsicht zu genießen.

Gemeinsamkeiten des vertieften EIS-Prinzips mit dem operativen Prinzip nach AEBLI sind weniger offensichtlich als jene mit BREIDENBACHs (1956) Isomorphie, weil das operative Prinzip ursprünglich eine enorme inhaltliche Breite aufwies und im Laufe der Jahre weitreichenden Anpassungen unterlag. Wird lediglich eine aktuelle Wiedergabe von WITTMANNs (1985) Adaption der Theorie für den Mathematikunterricht herangezogen, bleiben die Gemeinsamkeiten sogar gänzlich verborgen: „Das operative Prinzip wird häufig gleichgesetzt mit der charakteristischen Fragestellung ‚*Was geschieht mit …, wenn …?*‘“, heißt es eingangs bei GÜNSTER & RUPPERT (2020, S. 22; Hervorhebung im Original). Sie beschränken den Nutzen des Prinzips in Anlehnung an WITTMANN (1985) somit vorrangig darauf, Ideen bzw. Begründungsanlässe[304] zu produzieren, die die Lehrperson anschließend bewerten und anpassen muss.

AEBLIs (1985, S. 4) Beschreibung zeichnet ein durchaus abweichendes Bild: „Das operative Prinzip ist ein Satz von innerlich zusammenhängenden didaktischen Regeln, die auf bestimmten Vorstellungen über den Ursprung, das Wesen und das Ziel des menschlichen Denkens beruhen.“ Seine Zusammenfassung zeugt von einer ambitionierten Reichweite des Prinzips:

> Schulische Lernprozesse sollten ihren Ausgangspunkt in Problemen nehmen, die für den Schüler aufgrund seiner konkreten Vorerfahrung bedeutungsvoll sind, und die Lernergebnisse sollten am Ende ihren Wert wiederum in Anwendung vor diesen Problemen erweisen. Operationen und Begriffe sollten in einem Prozeß der schrittweisen Verinnerlichung und der Abstraktion gewonnen werden, wobei sie zugleich geklärt, auf durchsichtige Weise rekonstruiert werden. Weil wir wissen, daß viele Lernergebnisse vorerst noch rigide sind und an den besonderen Situationen haften, an denen wir sie gewonnen haben, arbeiten wir sie in der Folge durch und verleihen ihnen die notwendige Beweglichkeit. Zugleich aber streben wir schon bei der Konstruk-

[303] Voneinander abweichende Auffassungen des operativen Prinzips werden im Folgenden nur rudimentär gegenübergestellt, in erster Linie Bezug nehmend auf AEBLI (1961, 1983), WITTMANN (1985) und STEPHAN MICHAEL GÜNSTER & MARKUS RUPPERT (2020). Die Abweichungen liegen nicht nur in „punktuellen Modifikationen am operativen Regelwerk“, die BAUER (1993, S. 76) beobachtet, sondern ähnlich wie bei den unterschiedlichen EIS-Prinzipien auch im Verständnis grundlegender Begriffe wie dem der *Operation* (siehe unten).

[304] Dieser Fokus ist womöglich auch dadurch zu erklären, dass WITTMANN durch seine intensive Auseinandersetzung mit operativen Beweisen (vgl. z. B. Wittmann 2014) die mathematischen Zusammenhänge und deren Begründungen stark in den Mittelpunkt rückte.

> tion, ebenso wie beim Durcharbeiten und Anwenden, die zunehmende Einsicht des Schülers in den Systemcharakter der Operationen und Begriffe an.
>
> Aebli (1985, S. 6)[305]

Grundlegend für den Entwicklungsprozess von einem umfangreichen Regelsatz zu einem spezialisierten Werkzeug ist WITTMANNs (1985) Beitrag. Er will aus AEBLIs (1985) Vorarbeit „das herausarbeiten, was [er] aus der Sicht der *Mathematikdidaktik* für den Kern des operativen Prinzips" hält (Wittmann 1985, S. 7; Hervorhebung im Original). Es liegt auf der Hand, dass einige Pfeiler der Theorie diesem Prozess des Ausschärfens zum Opfer fallen können – er mündet letztlich in folgender Darlegung, die ganz ähnlich zuvor in WITTMANN (1983, S. 269) publiziert wurde:

> Den didaktischen Kern der Beispiele der ersten beiden Abschnitte möchte ich als operatives Prinzip der Mathematikdidaktik folgendermaßen formulieren (Wittmann 1983): *Objekte* erfassen bedeutet, zu erforschen, wie die *konstruiert* sind und wie sie sich *verhalten*, wenn auf sie *Operationen* (Transformationen, Handlungen, …) ausgeübt werden. Daher muß man im Lern- oder Erkenntnisprozeß in systematischer Weise
> (1) untersuchen, welche *Operationen* ausführbar und wie sie miteinander verknüpft sind,
> (2) herausfinden, welche *Eigenschaften* und *Beziehungen* den Objekten durch Konstruktion *aufgeprägt* werden,
> (3) beobachten, welche *Wirkungen* Operationen auf *Eigenschaften* und *Beziehungen* der Objekte haben (Was geschieht mit …, wenn …?)
>
> Wittmann (1985, S. 9; Hervorhebung im Original)

AEBLIs (1985) Vorlage wurde also dahingehend ausgeschärft, dass sie direkter als zuvor hilfreiche Unterstützungsmaßnahmen zum Erfassen von Objekten liefert: Das operative Prinzip „soll dazu verhelfen, Ideen zu produzieren. Ob die Produkte etwas taugen, muß eigens bewertet werden" (Wittmann 1985, S. 10) – siehe beispielsweise WITTMANN (1981a) als Beispiel für das Produzieren solcher Ideen. Im Sprachgebrauch des EIS-Prinzips ließe sich dies wie folgt formulieren: Das operative Prinzip wurde zu einer vielversprechenden Strategie, um Anlässe zu generieren, die den Übergang zur symbolischen Ebene anregen. Dabei ist ohne Zweifel an die gesamte symbolische Ebene in allen Zeichenarten zu denken:

---

[305] Die von AEBLI (1985, S. 5) postulierte Notwendigkeit, „Produkte des Denkens und Lernens" anzuwenden, verneint FÜHRER (1999, S. 30): „Diese Behauptung wird blanker Unsinn, wenn man sie so absolut nimmt, wie sie hier – scheinbar – formuliert ist. Es wären ja z.B. subjektiv überraschend klare (‚Evidenz'-)Einsichten in das Dasein, in Schmerz oder Freude an sich und es wären kreative Einfälle, zweckfreies divergentes Denken, Phantasiegebilde oder fiktionale Entwürfe als Äußerungen von ‚Denken' ausgeklammert und folglich auch keine lehrreichen ‚Produkte'. […] Ob das menschliche Denken ‚letztendlich' und ‚immer' auf Zwecke oder gar Handlungszwecke gerichtet ist (‚Utilitarismus'), dürfte eine reine Glaubensfrage oder intellektuelle Geschmackssache bleiben. […] Es handelt sich um eine normative Wertsetzung, die man unterschreiben kann, aber nicht unterschreiben muss." Allerdings sei es möglich, „Aeblis strenge Auffassung vom ‚operativen Prinzip'" abzulehnen „und trotzdem einige wertvolle Lehren aus der Grundidee" zu ziehen (ebd., S. 30).

> Ich möchte besonders betonen, daß beim operativen Prinzip die Natur der »Objekte« bewußt *nicht* spezifiziert ist. Damit ist dieses Prinzip offen gehalten für die Untersuchung von konkret, zeichnerisch oder symbolisch repräsentierten Objekten, ist also keineswegs beschränkt auf die konkreten Materialien des elementaren Unterrichts.
>
> Wittmann (1983, S. 270; Hervorhebung im Original)[306]

Hierbei deutet sich bereits eine strukturelle Ähnlichkeit mit dem EIS-Prinzip an, das einerseits vertikale Übergänge bezüglich des Umgangs mit Zeichen thematisiert – vgl. das Erfassen der Objekte – und andererseits horizontale Übergänge bezüglich der Zeichenart – vgl. die Natur der Objekte – abbildet. Dieses Nebeneinander zweier andersartiger Übergänge durchdringt ebenfalls konkrete Umsetzungen der von WITTMANN (1985) skizzierten Ideen, wie etwa die operativen Beweise zur Parität des Wertes einer Summe aus zwei natürlichen Zahlen in Abhängigkeit der Paritäten der Summanden:

> Die Kinder können jetzt in der Lage sein, ggf. mit Hilfe der Lehrerin, zu beschreiben, welche Wirkung das Zusammensetzen von Doppelreihen ohne bzw. mit einem einzelnen Plättchen auf die Parität des Ergebnisses hat, und sich klar zu machen, dass dabei die Länge der Doppelreihen keine Rolle spielt. Der formale Beweis dieses zahlentheoretischen Satzes, der in der Mittelstufe gegeben wird, beruht auf den gleichen Operationen. Er wird nur in einer anderen Sprache, der Sprache der Algebra, formuliert.
>
> Wittmann (2014, S. 216)

Wenn jedoch über diese Andeutungen hinausgehende, explizite Gemeinsamkeiten zum EIS-Prinzip herausgearbeitet werden sollen, erweist sich die Adaption des operativen Prinzips für die Mathematikdidaktik nach WITTMANN (1985) als wenig ergiebig: Es wirkt eher wie ein wichtiges Zahnrad im EIS-Prinzip – für AEBLIs (1985) umfassende Deutung des operativen Prinzips als Satz didaktischer Regeln gilt das Umgekehrte. Dass allerdings mit Operationen ganz ähnliche Ideen verknüpft sein können wie mit dem EIS-Prinzip, deutet FRICKE (1970b) an: Die Auswahl lernförderlicher Handlungen – der sich das Ad-Hoc-Verständnis verwehrte und die das vertiefte EIS-Prinzip unterstützt – ist ein Problem, dessen Lösung er im Kontext von Operationen vermutet.[307]

Die Gemeinsamkeiten existieren also und müssen in den angesprochenen Grundpfeilern der Theorie aufgesucht werden, die im Laufe des Ausschärfens

---

[306] Wie schon bei seiner Wiedergabe des EIS-Prinzips (vgl. Unterabschnitt 2.1.1.1) verwendet WITTMANN (1983) den Bezeichner »symbolisch« gemäß dem Ad-Hoc-Verständnis, also synonym zu »formal-algebraisch« bzw. »kodifiziert«, anders als die vorliegende Arbeit.

[307] „Die zweite Voraussetzung für den Aufbau erfolgreicher Lernprozesse besteht, insbesondere für den Anfangsunterricht, in der Untersuchung der Frage, durch welche Tätigkeiten, durch welches Material und welche Anordnung der Aufgaben das mit der ersten Voraussetzung gesetzte Ziel optimal erreicht werden kann. Dies ist eine Aufgabe didaktischer Forschung, die trotz mancher Ansätze noch weiterer Bemühung bedarf. Ihre Lösung aber sollte gesucht werden unter der Leitidee der ‚Operation'" (Fricke 1970b, S. 78).

unter mathematikdidaktischer Perspektive teilweise abgebaut oder verwischt wurden – insbesondere darin, was eine Operation gegenüber einer Handlung auszeichnet und wie sie aufgebaut werde. Bei AEBLI (1985; s. u., linke Spalte) finden sich dazu noch einige komprimierte Hinweise, die an den Unterschied zwischen Zeichen und Symbolen im Sinne der vorliegenden Arbeit erinnern und die GÜNSTERs & RUPPERTs (2020; s. u., rechte Spalte) Darstellung entbehrt:

> „Piaget spricht ganz allgemein von der ‚Konstruktion' von Begriffen und Operationen. Indem wir diesen Begriff auf die Überführung von Handlungen in Operationen anwenden, sprechen wir davon, daß der Schüler die Handlung und die Wahrnehmung mit Hilfe der begrifflichen Elemente, über die er verfügt, klärt und damit die Operation als geklärte, durchsichtig gewordene Handlung konstruiert."
>
> Aebli (1985, S. 5)

> „Der Unterschied zwischen Handlung und Operation besteht somit darin, dass die Lernenden Handlungen an konkreten Objekten, in einer konkreten Situation durchführen, die sich bestimmter Darstellungsformen bedient, und dort Auswirkungen beobachten können. Dagegen werden Operationen rein mental durchgeführt."
>
> Günster & Ruppert (2020, S. 22)

Detaillierter ausgeführt werden diese komprimierten Hinweise u. a. bei AEBLI (1983)[308] bzw. AEBLI (1961)[309] sowie AEBLI (1980)[310], die dadurch einen unverkennbaren Widerspruch zur obigen Darstellung von GÜNSTER & RUPPERT (2020) bilden. Sollten GÜNSTER & RUPPERT (2020) derartige Passagen beachtet haben – wovon auszugehen ist, schließlich lohne es, „sich der Grundzüge des operativen Prinzips

---

308 „Eine Operation ist nicht durch ihre Innerlichkeit gekennzeichnet. Es ist falsch zu sagen, eine Operation sei eine ‚interiorisierte Handlung'. Wenn der Schüler eine Handlung effektiv ausführt, indem er sich die Gegebenheiten wahrnehmungsgemäß vergegenwärtigt, so ist das genauso eine Operation, wie wenn er sich diese Gegebenheit als Zeichen vergegenwärtigt. Entscheidend ist nicht die Art der Vergegenwärtigung der Gegebenheiten; entscheidend ist das Bewußtsein der Beziehungen, die durch die Operation erzeugt oder verändert werden" (Aebli 1983, S. 220).

309 „Das Eigentliche einer Operation ist nicht die Art ihres – innerlichen oder äußerlichen – Vollzugs, sondern ihre logische Struktur, das System von Beziehungen, das sich in der Operation ausdrückt. […] Damit es eine Operation sei, muß die Handlung einsichtig vollzogen werden: es muß dem Ausführenden die logische Struktur des Aktes bewußt sein. Dies heißt nun aber nicht etwa, daß neben der Handlung eine innerlich vollzogene Operation einherlaufen müsse. […] Während er [der Schüler; J. L.] die effektiven Operationen ausführt, müssen ihm ganz einfach die Zusammenhänge bewußt sein. Er muß sinnvoll handeln. Was er tut, muß ihm durchsichtig sein. Manipuliert der Schüler nur sinnlos, versteht er nicht, was er tut, durchschaut er die Struktur der Handlung nicht, so nützt es ihm auch nichts, sich die Manipulation, die er vollzogen hat, vorzustellen" (Aebli 1961, S. 82 f.).

310 „Die Innerlichkeit kann nicht das Kennzeichen der Operation sein. Auch Handlungen kann man verinnerlichen. Sie werden damit zu vorgestellten Handlungen, bewahren dabei aber alle strukturellen Kennzeichen der Handlung. Was sie von effektiv vollzogenen Handlungen unterscheidet, ist hauptsächlich die Art, wie ihre Objekte und Ergebnisse im menschlichen Geist repräsentiert sind […]. Wir werden sehen, daß Operationen effektiv ausgeführt und verinnerlicht werden können. Nur bezeichnet diese – äußerliche oder innerliche – Ausführungsform nicht ihren wesentlichen Kern, sondern einen akzidentellen Zug. Welches sind also die wesentlichen, definierenden Züge der Operation? Sie sind im Bereiche der Struktur zu finden" (Aebli 1980, S. 213).

zu erinnern und sie bewusst anzuwenden“ (ebd., S. 24) –, kann ein Triangulationsbruch Ursache der Abweichungen sein: Mit dem Bezeichner »abstrakt«, den AEBLI im Kontext von Operationen verwendet[311], scheinen unterschiedliche Begriffe assoziiert zu sein. AEBLIs Standpunkt wird hier ersichtlich:

> Wer einen Waagebalken ins Gleichgewicht bringen kann, besitzt noch keinen Begriff vom Hebelgesetz, und wer den Durchmesser eines Kreises (z. B. mit Hilfe eines Fadens) 3,14 x auf dem Umfang abgetragen hat, besitzt noch keinen klaren Begriff von der Zahl π. Muß daher ein ganz anderes Element dazukommen […]? Eine operative Didaktik ist nicht dieser Meinung. […] Man kann auch Handlungen abstrakt betrachten.

Aebli (1985, S. 5)

> So können wir eine Operation eine abstrakte Handlung nennen. Sie kann effektiv ausgeführt oder nur gedacht werden: Das ist unwesentlich. Wenn sie effektiv ausgeführt wird, so sieht der Handelnde von anderen […] Aspekten der Handlung ab, um einen einzigen zu zentrieren, diesen aber in Klarheit und in bestmöglicher Strukturierung zu sehen.

Aebli (1980, S. 216)

Mögliche Aspekte, die in Klarheit gesehen werden können, erläutert AEBLI wie folgt – und behandelt dabei potentielle Symbolgehalte bzw. Übergange auf die symbolische Ebene mit kodifizierten Zeichen: In Abb. 123

> kann man […] einmal bloß Winkel („Ecken“) und ein Gewirr von Dreiecken und Quadraten sehen. Wer aber etwas von Flächensätzen im rechtwinkligen Dreieck gehört hat, wird noch vieles andere wahrnehmen: vorerst wohl das dick schraffierte, rechtwinklige Dreieck, sodann seine Katheten und über diesen die beiden Kathetenquadrate k_1 und k_2. Man wird auch zwei große Quadrate sehen, von denen das eine dem anderen eingeschrieben ist. Das eingeschriebene Quadrat h' ist das um die Hypotenuse nach oben gedrehte Hypotenusenquadrat h. Weiter kann man entdecken oder gelernt haben, zwei Vierergruppen von kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken zu sehen, außerhalb des eingeschlossenen kleineres Quadrates h', und sodann jene zwei Paare von leicht schraffierten Dreiecken, die zusammen zwei Rechtecke im großen Quadrat bilden. Mit ein wenig Übung kann man sogar das eingeschlossene Hypotenusenquadrat h' als Restfläche, nach Abzug der vier außerhalb von ihm liegenden, punktierten Dreiecke und die beiden Kathetenquadrate k_1 und k_2 als die Restfläche des großen Quadrates, nach Abzug der zwei schraffierten Rechtecke sehen, womit man einen Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes „sieht“.

Aebli (1980, S. 170 f.)

[311] „Gewisse Operationen kann man gewinnen, indem man entsprechende praktische Handlungen und konkrete Vorgänge *abstrakt betrachtet*“ (Aebli 1985, S. 5; Hervorhebung im Original).

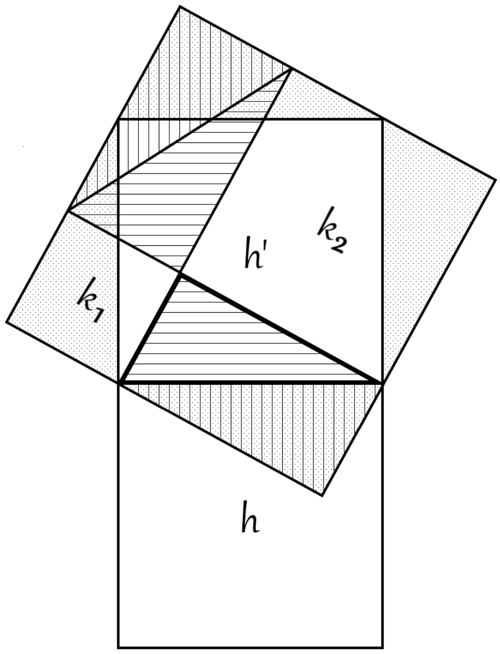


Abb. 123: Eine geometrische Figur als Wahrnehmungsgegenstand bei AEBLI (1980, S. 170)

Während AEBLI (1985) mit der Verwendung des Bezeichners »abstrakt« somit das Erschließen eines Symbolgehalts kennzeichnet, scheint der Bezeichner bei GÜNSTER & RUPPERT (2020) in einem Alltagsverständnis gedeutet worden zu sein: Abstrakt ist, was nicht unmittelbar bzw. sinnlich vorliegt, sondern vorgestellt werden muss. Wer mit dieser Auffassung AEBLIs Aussage deutet – *Operationen werden gewonnen, indem praktische Handlungen und konkrete Vorgänge abstrakt betrachtet werden* –, wird ihr die obige Unterscheidung zwischen Handlung und Operation bei GÜNSTER & RUPPERT (2020) entnehmen. Bei AEBLI jedoch entspricht dies lediglich dem Verinnerlichen einer Handlung oder konkreten Wahrnehmung „zu Handlungs- und Wahrnehmungsvorstellungen" – nicht aber zu Operationen[312] (Aebli 1985, S. 5).[313]

Allein die obigen Passagen von AEBLI (1983, S. 220) bzw. AEBLI (1961, S. 82 f.) wirken bereits äußerst vielversprechend hinsichtlich wesentlicher Gemeinsamkeiten mit dem EIS-Prinzip. Um sich nun dem eigentlichen Anliegen dieses

[312] Siehe auch OEHL (1965, S. 44 f.), der im Sprachgebrauch der EIS-Palette auf die Möglichkeit enaktiver Handlungen verweist, die trotz einer Auseinandersetzung mit ihnen nicht zu Symbolen wurden: „Der Vorgang der Verinnerlichung hat mit der für jede Operation notwendigen Einsicht unmittelbar nichts zu tun. Es ist durchaus denkbar, daß auf der Stufe des konkreten Handelns keine Einsicht gewonnen wird, dann kann man auch nicht von konkretem Operieren sprechen; denn erst durch die Einsicht erfüllt das Handeln die Bedingungen der Operation. Nun läßt sich auch eine nicht einsichtige Handlung nach gewissen Wiederholungen in der Vorstellung nachahmend durchführen. Der Prozeß der Verinnerlichung ist also auch hier möglich, aber für das Verständnis der Handlung als einer mathematischen Operation ist damit gar nichts erreicht."

[313] Die unterstellte Bedeutung zum Bezeichner »abstrakt« bei GÜNSTER & RUPPERT (2020) gegenüber jener von AEBLI erinnert auf einer Metaebene erneut an BRUNERs Theorie der Repräsentationsmodi: Auch hier haben intuitive Deutungen in einem Alltagsverständnis erhebliche Auswirkungen auf die Auffassung der Theorie – in diesem Fall betrifft dies vor allem den Bezeichner »symbolisch« (vgl. Abschnitt 3.2.1). Weitere derartige Gemeinsamkeiten auf einer Metaebene werden am Ende das Unterkapitels beleuchtet.

Unterkapitels zu widmen, seien im Folgenden diese Hinweise auf Gemeinsamkeiten zwischen Aufbau und Eigenart von Operationen nach AEBLI (1961, 1983)[314] und dem vertieften EIS-Prinzips ausgebreitet. Dabei werden die Gemeinsamkeiten so deutlich, dass die von AEBLI angesprochenen Aspekte nicht mehr in aller Ausführlichkeit reflektiert, bewertet und eingeordnet werden müssen – sie werden lediglich in knappen Worten anmoderiert, zitiert und in zweispaltigen Tabellen (links) ihrer Entsprechung im EIS-Prinzip (rechts) gegenübergestellt.

6.1.2.1 Vergleich von AEBLIs Operationen mit dem vertieften EIS-Prinzip

AEBLIs Nähe zu PIAGET impliziert die Erwartung, bei der Definition der Operation PIAGETs logische Regeln wiederzufinden, die eine internalisierte Handlung erfüllen muss, um als Operation zu gelten.[315] Diese Erwartung könnte den Blick auf AEBLIs Ansichten beeinflussen, wie es bei ZECH (2002) den Anschein hat.[316] Es sei daher mit dem nachfolgenden Zitat vorab hervorgehoben, dass AEBLI *nicht* eng an PIAGETs Vorlage haftet – dies hat sich bei kritischer Auseinandersetzung mit PIAGET in der Mathematikdidaktik als notwendig herausgestellt, siehe dazu etwa FRICKE (1981), HANS-GEORG STEINER (1974) und WITTMANN (1972).

> Man erkennt, daß wir in dieser Definition [einer Operation; J. L.] nichts über die Beweglichkeit und die Systemhaftigkeit der Operationen sagen. Wir bezweifeln nicht, daß es bewegliche und systembildende Operationen gibt, meinen jedoch, daß es schwierig sei, zu bestimmen, welcher Grad der Beweglichkeit erreicht sein müsse, damit wir von einer Operation sprechen können. Ebenso schwierig ist es, die Anforderungen zu definieren, denen die Systeme genügen müssen, damit wir die konstituierenden Operationen als solche anerkennen. Piaget jedenfalls hat die Anforderungen so hoch angesetzt, daß klassische Operationen wie die Subtraktion mit natürlichen Zahlen nicht mehr unter seine Definition der Operation fallen, und auch die Forderung der Reversibilität ist bei vielen geometrischen Operationen nur schwer zu erfüllen.
>
> Aebli (1983, S. 209)

[314] Die Ausführungen in AEBLI (1961) bzw. AEBLI (1983) sind in ihren Grundzügen identisch. In den folgenden Abschnitten werden beide verwendet – einerseits, um herauszustellen, wie weit die Ideen zurückreichen, andererseits, um die klarere Formulierung vorzuziehen. Wegen der inhaltlichen Entsprechung spielt die Wahl darüberhinausgehend keine Rolle.

[315] „Kennzeichnend für diese verinnerlichten Handlungen oder – wie Piaget sie nennt – ‚Operationen' sind ihre Flexibilität oder Beweglichkeit, d. h. sie sind umkehrbar oder reversibel *(Reversibilität)*, zusammensetzbar oder kompositionsfähig *(Kompositionsfähigkeit)* sowie assoziativ *(Assoziatitvität)*, d. h. man kann auf verschiedenen Weisen zum Ziel kommen" (Scherer & Weigand 2017, S. 36; Hervorhebung im Original).

[316] „Die *Addition natürlicher Zahlen* ist nach PIAGET und AEBLI als Denkoperation erworben, wenn ihre Kompositionsfähigkeit (sprich: Kommutativität und Assoziativität im mathematischen Sinne) sowie ihre Reversibilität (sprich: Umkehrbarkeit durch die Subtraktion) erfaßt ist und beweglich angewandt werden kann" (Zech 2002, S. 94; Hervorhebung im Original). Das obige Zitat von AEBLI (1983, S. 209) und insbesondere die nachfolgenden Ausführungen weisen das Feststellen einer Operation nach diesen Kriterien zurück.

Wenn AEBLI (1983, S. 203) Operationen untersucht, geht es ihm „nicht mehr nur um Handlungen, sondern […] um das mathematische Denken“ – ein erster Hinweis darauf, dass eine subjektive Komponente das Wesen der Operation ausmacht. Dies expliziert AEBLI anschließend unmissverständlich:

„Eine Operation ist ein subjektives Phänomen. Auch wenn sie sich in äußeren Handlungen ausdrückt, hängt alles an der Einsicht in die Beziehungen, die ihr innewohnen“ (Aebli 1961, S. 83). „Jede Handlung hat ihre Struktur. Wir sagen auch: die Struktur ist der Handlung ‚*inhärent*‘, sie ‚*wohnt ihr inne*‘. Wenn die Handlung als Automatismus abläuft, so ist sich der Handelnde der Struktur nicht bewußt. Aber Bewußtsein kann eine effektive Handlung begleiten. Dann sagen wir: Der Handelnde weiß, was er tut. Er ist sich der Zusammenhänge innerhalb seines Tuns und mit der Umwelt seines Tuns bewußt“ (Aebli 1983, S. 207; Hervorhebung im Original).	Ob ein Zeichen ein Symbol ist, hängt vom Subjekt ab: Nur, wenn dieses die intendierten Symbolgehalte in ein Zeichen hineinprojiziert, handelt es sich um ein Symbol. Objekthafte Zeichen besitzen potentielle Symbolgehalte, die ihnen innewohnen. Eine konkrete Handlung kann von einer Person ausgeführt werden, ohne dass sie gewisse Symbolgehalte erfasst – dann geht sie naiv mit den Zeichen um. Aber sie kann die Symbolgehalte auch in die Zeichen hineinsehen und würde in diesem Fall verständig mit dem Zeichen umgehen.

Eben diese vom Subjekt abhängige Eigenschaft gibt – wie bereits oben unter Verweis auf AEBLI (1983, S. 220) und AEBLI (1961, S. 82 f.) angesprochen – den Ausschlag bei der Unterscheidung zwischen Handlung und Operation:

„Operationen sind keine Denkvorgänge, die das Tun *begleiten*, also *nebenher laufen*; die Handlungen selbst werden zu Operationen, wenn sie im Bewußtsein der inhärenten Beziehungen ausgeführt werden“ (Aebli 1983, S. 207 f.; Hervorhebung im Original). „Die Operation schält sich aus der konkreten Handlung heraus. Der Schüler erkennt nun ihren Beziehungskern, ihre Struktur“ (ebd., S. 214). „Eine Handlung wird zur Operation, indem sich der Handelnde die Beziehungen vergegenwärtigt, die er durch seine Handlung zwischen den Gegebenheiten herstellt“ (ebd., S. 217).	Objekthafte Zeichen selbst werden zu Symbolen, wenn eine Person die intendierten Symbolgehalte – in der Regel Beziehungen, Zusammenhänge oder Muster und deren Ursachen – in sie hineinprojiziert: „Symbole wachsen. Sie entstehen, indem sie sich aus anderen Zeichen entwickeln […]. Wenn ein Mensch ein neues Symbol schafft, so nur durch Gedanken, die Konzepte beinhalten“ (CP 2.302, zitiert nach Nöth 2000, S. 180).

AEBLI erläutert diese Unterscheidung zwischen Handlung und Operation im Kontext der Multiplikation. Gegenübergestellt ist die Unterscheidung zwischen (objekthaftem) Zeichen und Symbol:

„Es gibt natürlich ein Handeln ohne das Bewußtsein der zahlenmäßigen Zusammenhänge. Ein Kind kann jedesmal vier Flaschen fassen und heraufzutragen, ohne sich *der gleichen Zahl* der Flaschen bewußt zu sein (es kann sein, daß es einfach so viele Flaschen greift, wie es zu halten vermag). Es ist aber auch möglich, daß es sich bewußt wird: ‚Ich nehme jedesmal vier Flaschen.' Dann ist es weiter möglich, daß es zählt, wie viele Male es marschiert, wobei es jedesmal vier Flaschen heraufträgt. Und schließlich ist es auch denkbar, daß es kontrolliert, wie viele Flaschen nach jedem Gang vorhanden sind, um die Handlung abbrechen zu können, wenn die gewünschten 20 Flaschen da sind. Damit gelangt das Kind von der Handlung zur Operation. Operieren heißt also: im Bewußtsein der Zusammenhänge handeln" (Aebli 1983, S. 207; Hervorhebung im Original).	Mit objekthaften Zeichen kann naiv umgegangen werden (enaktive Ebene): Zusammenhänge und deren Ursachen bleiben unbewusst. Beispielsweise kann eine Person mehrfach vier Flaschen greifen, ohne sich der Spielregeln dieser Handlung gewahr zu werden. Geschieht dies doch, lassen sich neue Aussagen generieren. Auf diese Weise wird die Handlung für die Person zu einem Symbol.

Im Mathematikunterricht sollen effektive Handlungen aber nicht nur von einem Bewusstsein der Zusammenhänge begleitet werden, sondern auch in einem anderen „Darstellungsmittel" (Aebli 1983, S. 238) bzw. mit einer anderen „Art der Vergegenwärtigung der Gegebenheiten" (ebd., S. 220) ausgedrückt werden: Zum Zweck der Kommunikation, der Reduzierung von Cognitive Load[317] und zur Ermöglichung einer Automatisierung müssen „Denkoperationen genau wie die übrigen geistigen Gehalte durch geeignete Zeichen vertreten und ausgedrückt werden können, ein Vorgang, den wir ‚Symbolisierung' nennen werden" (Aebli 1961, S. 84). Daher unterscheidet AEBLI (ebd., S. 102) die „Art des Vollzugs einer Operation"; genau wie das EIS-Prinzip verschiedenartige Zeichen kennt:

„Welche Darstellungsmittel stehen dabei zur Verfügung? Die drei großen Gruppen sind	Das EIS-Prinzip unterscheidet beim Lernen aus Handlungen drei Zeichenarten:

[317] AEBLI (1961, S. 83) formuliert dies natürlich in anderen Worten: „Zudem, so werden wir sehen, ist auch der einzelne auf Formen des abgekürzten Vollzugs der Operation angewiesen, wenn er seine Aufmerksamkeit zur Bewältigung umfassender Probleme freihalten will." Cognitive Load ist aktueller Gegenstand empirischer Forschung in der pädagogischen Psychologie, bleibt in der vorliegenden Arbeit jedoch meist implizit.

(a) wirkliche, manipulierbare Objekte,
(b) Bilder der wirklichen Objekte,
(c) Zeichen“ (Aebli 1983, S. 238).

(a) objekthafte Zeichen
(b) entlehnte Zeichen
(c) kodifizierte Zeichen

Diese Gruppen führt bereits AEBLI (1961, S. 103 f.; Hervorhebung im Original) auf, der den „*effektive*[n] *Vollzug der Operation am wirklichen Gegenstand*“, die „*Vorstellung der Operation auf Grund ihrer bildlichen Darstellung*“ sowie die „*Vorstellung der Operation auf Grund der ziffernmäßigen, algebraischen oder sprachlichen Darstellung*“ unterscheidet.

Ein Bild oder eine Zeichnung stelle „noch immer den konkreten Gegenstand und sogar bis zu einem gewissen Grad die Operation selber anschaulich“ dar, sei jedoch „ein zweidimensionales, abstraktes Gebilde. Dies ist aber in den meisten Fällen nur ein geringes Hindernis. […] Wichtiger ist daher das zweite Charakteristikum der Zeichnung: man kann sie nicht bewegen“ (Aebli 1981, S. 240 f.).

Entlehnte Zeichen richten sich in ihrer äußeren Gestaltung nach einer realen oder vorgestellten Vorlage; im Unterrichtsverlauf üblicherweise nach den objekthaften Zeichen. Von ihren Vorlagen unterscheiden sie sich insbesondere dadurch, dass sie keine effektiven Manipulationen erlauben.

Nach der Verwendung dieser Darstellungsmittel werde „der Schritt zu einer Ausdrucksweise vollzogen, deren Zeichen keinerlei Ähnlichkeit, weder mit dem Gegenstand der Operation noch mit den äußeren Zügen ihrer Ausführung, trägt“; sie sind „völlig willkürlich, ohne formale Ähnlichkeit mit der Sache, gewählt“ (Aebli 1961, S. 104 f.). „Das Wort der natürlichen Sprache oder das Zeichen einer Kunstsprache ist an die Stelle der bildhaft wahrgenommenen oder vorgestellten Gegebenheit getreten“ (Aebli 1983, S. 219).

In kodifizierten Zeichen sind keine äußerlichen Gemeinsamkeiten mit den objekthaften Zeichen mehr sichtbar. Sie sind arbiträr, da sich ihr Äußeres vorrangig an intersubjektiv geteilten Normen und Gepflogenheiten orientiert.

Beispiele für kodifizierte Zeichen sind Noten, Schriftzeichen und Morsezeichen – und auch die natürliche Wortsprache.

Stattgefunden hat also eine „Übersetzung in ein Verfahren mit Zeichen. Wir sprechen von der symbolischen Kodierung der Operation. […] Noten stellen einen Kode für Töne dar, Schriftzeichen, Morsezeichen, aber auch die Rillen auf einer Schallplatte[318] sind ein Kode für Laute. (Die Rillen der Grammophonplatte kann man zwar von Auge nicht lesen; aber das Grammophon ‚übersetzt' sie zurück in Laute, die wir hören können.) Auch die natürliche Wortsprache ist ein Kode" (ebd., S. 215).

Wie aber spielen die beiden terminologisch abgegrenzten Übergänge – der *Aufbau von Operationen* und die *Symbolisierung* – ineinander?

> In der Phase 1 vollzieht sich das Lernen rein handelnd. In der Phase 2 wird die Handlung mit ihrer bildlichen Darstellung verbunden. Auf der Stufe 3 stellt sich der Schüler die Operation allein aufgrund eines Bildes vor. In der Phase 4 wird das Bild mit dem Zeichen, also mit der Ziffergleichung, verbunden. Auf der Stufe 5 führt der Schüler die Operation allein aufgrund der Darstellung durch Ziffern aus.

Aebli (1983, S. 238)

AEBLI (1983, S. 238) bezeichnet diesen Vollzug explizit als *idealtypisch*; er ist also *nicht* alternativlos. Sein Abbild auf der EIS-Palette ist in Abb. 124 dargestellt. Es verdeutlicht eine terminologische Ungenauigkeit in Phase 1 und begründet implizit AEBLIs bewusste(?) Wahl der Bezeichner »Phase« und »Stufe«.

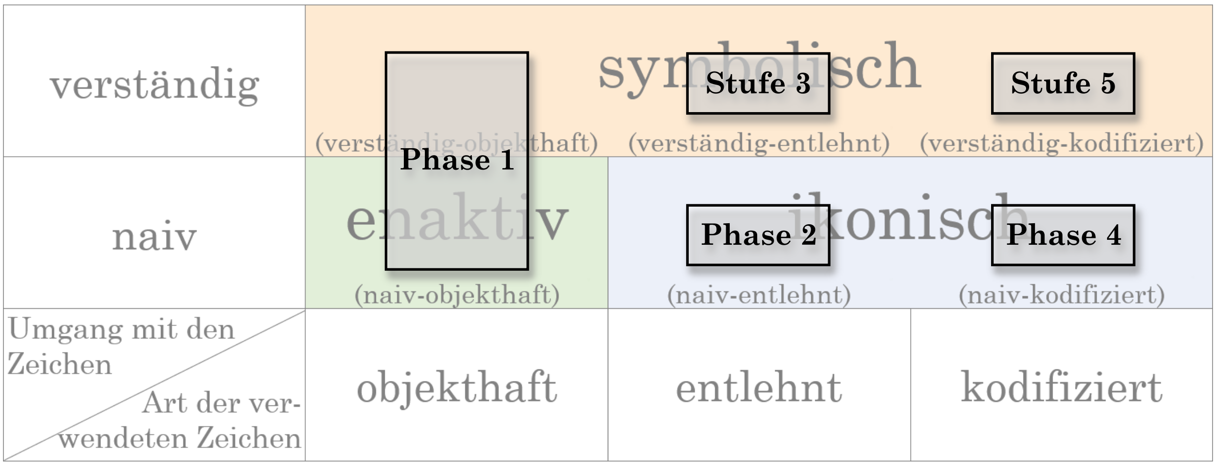


Abb. 124: AEBLIs Phasen und Stufen auf der EIS-Palette

Zu den drei genannten Gruppen von Darstellungsmitteln ergänzt AEBLI (1983, S. 237) „als viertes Darstellungsmittel (d) die gesprochene Sprache". Sie nimmt dabei eine Sonderrolle ein, sodass AEBLI sie nicht als vierte große Gruppe neben die ersten drei stellt, denn „[d]er sprachliche Kommentar begleitet das Operieren auf allen fünf Stufen" (Aebli 1983, S. 238). Analog handhabt es die EIS-Palette, der die Sprache des Kindes in Gänze *aufliegt* (vgl. Unterkapitel 3.6).

[318] Die Rillen auf einer Schallplatte wirken neben den übrigen Beispielen etwas deplatziert, denn ihre äußere Gestalt ist nicht beliebig, sondern richtet sich – wie es für entlehnte Zeichen typisch ist – nach ihrem Vorbild: Die Rillen bilden die physikalischen Luftschwingungen ab.

Das *Übersetzen in ein Verfahren mit Zeichen* bzw. die *Kodierung* oder *Symbolisierung* sei jedoch keine notwendige Voraussetzung für das Vorliegen einer Operation, die sich wie oben ausgeführt durch ein Bewusstsein der Zusammenhänge auszeichnet. Beide Unterscheidungen – die des Darstellungsmittels und die des Vorliegens einer Operation – sind somit separat zu treffen:

„Damit aber meinen wir nicht, daß hinter der Wahrnehmung […] ein in einem Symbolsystem repräsentierter, wahrnehmungsfremder, neuer Aussage- oder Erkenntnisakt stehe. Wenn wir die Parallelität oder das Senkrecht-aufeinander-Stehen zweier Geraden sehen […], so ist die entsprechende Erkenntnis im Wahrnehmungsakt vollständig realisiert, sie braucht nicht in eine neue, […] sprachlich kodierte Aussage *umgesetzt* zu werden.“ (Aebli 1980, S. 176; Hervorhebung im Original).	Die Verwendung kodifizierter Zeichen ist keine notwendige Voraussetzung für das Vorliegen von Symbolen. Auch objekthafte und entlehnte Zeichen können symbolisch werden.
Für die Frage, ob eine Operation vorliegt, sei „nicht die Art der Vergegenwärtigung der Gegebenheiten [entscheidend; J. L.]; entscheidend ist das Bewußtsein der Beziehungen, die durch die Operation erzeugt oder verändert werden“ (Aebli 1983, S. 220).	Entscheidend für die Zuschreibung als symbolisch ist nicht die Zeichenart, sondern der Umgang einer Person mit den Zeichen.
„Wenn der Schüler eine Handlung effektiv ausführt, indem er sich die Gegebenheiten wahrnehmungsgemäß vergegenwärtigt, so ist das genauso eine Operation, wie wenn er sich diese Gegebenheit als Zeichen vergegenwärtigt“ (ebd., S. 220).	Wenn eine Person die intendierten Symbolgehalte in eine effektive Handlung hineinsieht, so ist das genauso ein Symbol, wie wenn sie diese Symbolgehalte in ein kodifiziertes Zeichen projiziert.
„Indem wir die Wirklichkeit mit Hilfe von Zeichensystemen abbilden, klären sich die Zusammenhänge so sehr, daß viele Mathematiker, Psychologen und Didaktiker die Operationen der Mathematik überhaupt nur als Beziehungen innerhalb von Zeichen verstanden haben. Es ist Piagets Verdienst, erkannt zu haben, daß auch eine Handlung eine Operation ist, wenn sie im Bewußtsein der inhärenten Beziehungen ausgeführt wird“ (ebd., S. 208).	Weit verbreitet ist die Ansicht, dass nur kodifizierte Zeichen Symbole seien: Besonders im Mathematikunterricht bzw. in der Mathematikdidaktik wird die formal-algebraische Sprache oftmals mit Symbolischem identifiziert. Dem widerspricht die vorliegende Arbeit, indem sie das Erschließen des intendierten Symbolgehalts als ausschlaggebend kennzeichnet. Infolgedessen kann auch eine Handlung ein Symbol sein.

Die Entwicklung zwischen Handlung und Denken finde also „in zwei Dimensionen statt: in einer strukturellen und in einer medialen“ (Aebli 1980, S. 14). In Unterkapitel 3.6 resultierte hieraus die EIS-Palette, womit die BRUNERschen Schlagwörter *enaktiv*, *ikonisch* und *symbolisch* Einzug hielten. AEBLI (1983) verzichtet zwar auf eine Einführung neuer Bezeichner – insbesondere ein Pendant zu »ikonisch« (naiv-entlehnte und naiv-kodifizierte Zeichen) fehlt –, aber die Grundstruktur beider Theorien ist dieselbe:

<table>
<tr><td>ja</td><td colspan="3">Operationen</td></tr>
<tr><td>nein</td><td>einfache Manipulationen, bloße Handgriffe</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Beziehungen bewusst? / Darstellungsmittel</td><td>wirkliche, manipulierbare Objekte</td><td>Bilder der wirklichen Objekte</td><td>Zeichen</td></tr>
</table>

Abb. 125: Auftragen von AEBLIs Begrifflichkeiten auf die EIS-Palette

Der strukturellen Gleichheit entsprechend ähneln sich die Rückschlüsse aus beiden theoretischen Rahmungen. Zunächst werden Passagen zitiert, die deutlich an den Leitsatz für horizontale Übergänge auf der EIS-Palette erinnern:

Beim Wechsel der Darstellungsmittel „stellt sich dem Schüler das grundlegende Problem, Beziehungen, die er bei einer ersten, konkreten Darstellung der Operation verstanden hat, auch dann noch zu verstehen, wenn die Gegebenheiten immer wirklichkeitsferner, immer ‚symbolischer‘[319] werden […]. Das Ziel ist, daß sich die symbolische Darstellung mit der Bedeutung auflädt, die die konkrete Darstellung schon besitzt“ (Aebli 1983,

Symbolgehalte, die bereits in einer Zeichenart erschlossen wurden, sollen einem Wechsel der Zeichenart nicht zum Opfer fallen. Das Ziel ist vielmehr, dass Lernende diese Symbolgehalte von einer Zeichenart auf eine andere übertragen – beim Lernen aus Handlungen in der Regel von objekthaften oder entlehnten auf kodifizierte Zeichen.

[319] AEBLI verwendet den Bezeichner »symbolisch« an dieser Stelle analog zum Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips – übergreifend jedoch durchaus inkonsequent: Im Widerspruch zur obigen Bedeutung führt AEBLI SAUSSUREs (2001; Original von 1916) Abgrenzung zwischen Zeichen und Symbol an: „Symbole sind ihrer Bedeutung ähnlich. Man kennt sie als nichtsprachliche Zeichen in Bahnhöfen und Flughäfen: eine brennende Zigarette für ein Raucherabteil, ein Koffer in einem Quadrat für ein Schließfach usw. Ein Zeichen gleicht seiner Bedeutung nicht. Es ist willkürlich gewählt; um seine Bedeutung zu kennen, muß man es gelernt haben und es sich einprägen. Worte der natürlichen Sprachen, Ziffern und algebraische Zeichen sind in diesem Sinne ‚Zeichen‘“ (Aebli 1983, S. 215). Doch kurz darauf gebraucht er beide Bezeichner scheinbar synonym: „So können wir die vier und die drei Objekte, mit denen wir die Additionsoperation ausführen, ‚*symbolisch* kodieren‘, das heißt *durch Zeichen* darstellen“ (Aebli 1983, S. 215; Hervorhebung J. L.). Passagen, in denen AEBLI mit dem Bezeichner »symbolisch« arbeitet, sind daher stets im Kontext zu sehen.

S. 237 f.; Hervorhebung im Original; ganz ähnlich in Aebli 1961, S. 106).	
„In einer Ziffergleichung, in einer algebraischen Gleichung oder Formel, in einem Satz, der eine Operationsregel aus der Arithmetik oder der Geometrie ausdrückt, soll der Schüler nun alle jene Zusammenhänge erkennen, die er ursprünglich in der konkreten Handlung und dann im Bild gesehen hat. Er muß, mit anderen Worten, die Rechnungen, Formeln und Sätze bei der Lektüre mit Sinn füllen“ (Aebli 1983, S. 241).[320]	In eine Ziffergleichung, in eine algebraische Gleichung oder Formel, in einen Satz, der eine Operationsregel aus der Arithmetik oder der Geometrie ausdrückt, soll der Schüler nun alle jene Symbolgehalte hineinprojizieren, die er ursprünglich in den objekthaften Symbolen und dann in den entlehnten Symbolen gesehen hat.
„*Jede neue, symbolischere Darstellung der Operation muß mit der vorangehenden, konkreten in möglichst enge Verbindung gebracht werden*“ (ebd., S. 238; Hervorhebung im Original)	Der Isoliertheit der subjektiven Erfahrungsbereiche, die durch Verwendung verschiedenartiger Zeichen entstehen, ist mithilfe des Leitsatzes für horizontale Übergänge entgegenzuwirken.

Als Nebenbemerkung fügt sich hier passend Royars (2013) Kritik aus Unterabschnitt 2.1.2.3 und deren Auflösung ein – dieser kurze Exkurs bietet eine weitere Chance zur Klärung von Aeblis Begriffsbildern:

> Eine solche methodische Verkürzung findet man bereits 1961 bei Aebli, der bis heute weitgehend ohne kritische Relativierung zitiert wird: […] „Die „symbolische Darstellung“ soll sich mit der „Bedeutung“ „aufladen“, „die die konkrete Darstellung schon besitzt“ – aber wie kann diese etwas schon „besitzen“, das erst im weiteren Fortschritt aufgebaut werden soll, wie kann eine Operation bereits „durchdacht“ werden, bevor sie verinnerlicht wurde? Das von Aebli vorgeschlagene Modell erscheint bei genauer Betrachtung als zu linear und vereinfachend.
>
> Royar (2013, S. 39)

Nach den obigen Ausführungen liegt das Missverständnis zwischen Royar und Aebli auf der Hand: Royar (2013) geht davon aus, dass die konkrete Darstellung ihre Bedeutung erst *im weiteren Fortschritt*, also *nach* der Übersetzung in andere Darstellungsmittel bzw. *nach* der Verinnerlichung gewinnt. Die Möglichkeit, dass eine effektive Handlung zur Operation wird, scheint er Aeblis Vorarbeit nicht zu entnehmen. Royar (2013, S. 39) beschreibt seinen Eindruck damit zurecht als „zu linear und vereinfachend“ – die Ursachen dafür liegen bei genauerer Betrachtung jedoch nicht in Aeblis Modell. Insbesondere einer linearen Auffassung vom Lernen

[320] Hiermit sei nicht impliziert, dass der Fortschritt im Mathematikunterricht immer in Rechnungen, Formeln oder Sätzen münden müsse. Stattdessen sind diese im Sinne des darüberstehenden Zitats mit Sinn zu füllen, *wenn* die Gegebenheiten immer wirklichkeitsferner werden.

widerspricht AEBLI explizit: Es sei kein Muss, eine Bedeutung zuerst an wirklichen, manipulierbaren Objekten oder an Bildern dieser aufzuladen:

„Ja, es ist sehr wohl möglich, daß uns die Beziehungen viel klarer werden, wenn wir sie zwischen den Zeichen herstellen, als wenn wir das Vielerlei der konkreten Gegenstände vor uns haben. Denn dieses Vielerlei kann uns von den wesentlichen Zusammenhängen ablenken. […] Das ist allerdings eine zweischneidige Sache. Wir werden im didaktischen Teil sehen, daß die symbolische Kodierung auch ihre Tücken hat“ (Aebli 1983, S. 219).

Der Übergang zur symbolischen Ebene kann auch erstmals mit kodifizierten Zeichen gelingen, die durch ihre Prägnanz kognitive Ressourcen schonen und Übersicht verschaffen. Im Gegenzug werden jedoch einige Risiken in Kauf genommen (vgl. Unterabschnitt 4.2.1.2).

Wie aber ist das Ausbilden einer Operation didaktisch und methodisch zu begleiten? Oder im Kontext der EIS-Palette gefragt: Wie können Lernende bei vertikalen Übergängen unterstützt werden? Zunächst muss der Rahmen des Möglichen eingegrenzt werden, bevor eine Entsprechung des Leitsatzes für vertikale Übergänge auf der EIS-Palette formuliert wird:

„Bei alldem muß sich der Lehrer bewußt bleiben, daß er das Verständnis im Schüler nicht erzwingen kann. Die Einsicht ist ganz die Leistung des Schülers. […] Gelingt ihm dies nicht, so bleiben für ihn alle ausgeführten Operationen einfache Manipulationen, bloße Handgriffe“ (Aebli 1961, S. 98).

Der Übergang zur symbolischen Ebene ist kein unvermeidbarer, nächster Schritt, der durch eine hinreichend gute Vorarbeit garantiert werden kann. Gelingt er nicht, bleibt der Umgang naiv und die Handlungen sind nach wie vor Zeichen statt Symbole.

„Handle es sich um das Überschreiten des ersten Zehners, um das Erweitern von Brüchen, um die Flächenmessung, die Flächenverwandlung oder um die Zahl π: immer stellt sich die Frage, wie die konkrete Operation ausgeführt werden kann“ (Aebli 1983, S. 229).

Handle es sich um das Überschreiten des ersten Zehners, um das Erweitern von Brüchen, um die Flächenmessung, die Flächenverwandlung oder um die Zahl π: Immer stellt sich die Frage, welche objekthaften Zeichen zu Symbolen werden können.

„Um den lebenspraktischen Zusammenhang zu finden, in dem das Problem der Unterrichtseinheit gestellt werden kann, muß nicht nur die logische Struktur der Operation scharf analysiert werden, sondern auch diejenige der praktischen Situation, denn zwischen den beiden Strukturen soll ja Identität bestehen“ (ebd., S. 229). „Das Prinzip ist einfach: die Problemstellung muß so beschaffen sein,

Bei der Auswahl objekthafter Zeichen müssen die intendierten Symbolgehalte und die potentiellen Symbolgehalte der in Frage kommenden Zeichen analysiert werden. Dem Leitsatz für vertikale Übergänge folgend, sollen die intendierten Symbolgehalte einerseits Teil des potentiellen Symbolgehalts der Zeichen

daß sie zur gesuchten Operation hinführt“ (ebd., S. 231).	und andererseits für Lernende bestmöglich erschließbar sein.

Gemeinsamkeiten zwischen dem EIS-Prinzip und dem operativen Prinzip in der Darstellung von AEBLI (1985) zeigen sich nicht nur bei einer inhaltlichen Auseinandersetzung wie bisher, sondern ebenfalls auf einer Metaebene:

- So wie ROYAR (2013) gemäß Unterabschnitt 2.1.2.3 zwischen BRUNERs übergeordneter, umfassender Theorie der Repräsentationsmodi und einem womöglich verfälschenden mathematikdidaktischen Destillat daraus unterscheidet, lässt sich – in Anbetracht der obigen Wiedergabe von AEBLIs Vorlage sowie den eingangs zitierten Adaptionen für den Mathematikunterricht – mit dem operativen Prinzip verfahren.
- Im Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips wird in erster Linie der Gebrauch einer gewissen Zeichenart fokussiert, während die vorliegende Arbeit das Erschließen von Symbolgehalten hervorhebt. Analog dazu stehe in einigen Auffassungen des operativen Prinzips „die Schematisierung[321] (Verinnerlichung) des Prozesses (der Ausführung) von Handlungen im Zentrum“, während „andererseits nicht die Handlungen entwickelt, sondern mit den Handlungen […] Resultate und Beziehungen hergestellt“ werden (Dörfler 1985, S. 95): Einem „naiven ‚Operativen Prinzip‘ […], das mathematische Operationen (und Begriffe) unmittelbar aus Handlungen quasi automatisch entstehen lassen will“, stehe eine differenziertere Auffassung gegenüber, die das „auch von der mathematischen Entwicklung des Subjekts abhängige komplexe Verhältnis der Handlungen und mathematischen Operationen“ in den Blick nehme (Dörfler 1986, S. 11). Genau wie das Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips in seinem Kern (*Was ist ein Symbol?*) also die Person aus dem Blick verliert, unterschlägt ein naives operatives Prinzip diese Abhängigkeit an einer ebenso zentralen Stelle (*Was ist eine Operation?*).
- Eine Grundidee des operativen Prinzips werde „oft zur These verkürzt, mathematisches Wissen könne ausschließlich mit Hilfe von Handlungserfahrungen entstehen. Diese These ist problematisch“ (Bauer 1993, S. 78). Selbiges wurde bezüglich des Ad-Hoc-Verständnisses des EIS-Prinzips kritisiert: Es zwängt Lernen in ein sequenzielles Dreischritt-Schema, das stets mit effektiven Handlungen beginnt, von dort zu Bildern und schließlich zu Formeln vordringt (vgl. Abschnitt 0).
- „Die Funktion von Handlungen […] erschöpft sich nicht darin, daß sie lediglich den Ausgangspunkt für den mathematischen Lernprozeß bilden – dieser Eindruck wird bei der Rezeption des operativen Prinzips häufig erweckt“ (Bauer 1993, S. 78 f.). Nicht anders verhält es sich bei Rezeptionen

[321] Dabei bedeute die „Schematisierung von Handlungsabläufen […] strukturell identischen Nachvollzug materieller (oder vorgestellter) Handlungen als Handlungen an artifiziellen und formalen Objekten, die die materiellen Gegenstände ersetzen“ (Dörfler 1986, S. 13).

von BRUNERs Theorie (vgl. z. B. Unterabschnitt 2.1.1.3), weshalb KIRSCH (1977a, S. 99) eigens für die potentielle „Vollwertigkeit auch der ‚unteren' Darstellungsmedien" eintritt.

Als ein Unterschied zwischen dem Aufbau von Operationen und der Entwicklung von Symbolen könnte der folgende ausgemacht werden: Die Zielsetzung, Operationen aufzubauen, legt die Ausgrenzung von Objekten bzw. deren Eigenschaften und Beziehungen nahe – ersichtlich beispielsweise bei WITTMANN (1983)[322] – und somit eine Verengung des Anwendungsbereichs der Theorie. Beim Anspruch, Symbolgehalte zu erschließen, ist dies nicht der Fall. WITTMANNs (1983, S. 269 bzw. 1985, S. 9) Anpassung des operativen Prinzips ist entsprechend geleitet von dem Anliegen, eine Erweiterung zu bewirken. Ob die Verengung des Anwendungsbereichs tatsächlich AEBLIs Theorie attestiert werden sollte, ist unklar – zumindest deutet AEBLI (1961) an, beim Aufbau von Operationen *auch* Objekte im Blick zu haben, weil diese Operationen bezeichnen; an anderer Stelle spricht er vom Objektivieren des Geschehenen:

> Die Tatsache, daß die meisten Operationen rein innerlich vollzogen werden, hat zur Folge, daß ihr Ursprung in der effektiven Handlung in vielen Fällen wenig deutlich ist. So etwa die Zahl π. Sie ist offenbar eine Verhältniszahl [und damit ein Objekt; J. L.]. Aber welche Operation ist damit bezeichnet? Es ist die Operation des Abtragens, des Messens. Die Zahl π bezeichnet die Tatsache, daß der Durchmesser des Kreises 3,14 ... mal auf den Umfang abgetragen werden kann.

Aebli (1961 S. 81)

Unabhängig davon, ob hier ein Unterschied zu AEBLIs Theorie oder zu Adaptionen von AEBLIs Theorie vorliegt, bleibt festzustellen, dass das EIS-Prinzip in dieser Hinsicht weniger missverständlich ist, weil Eigenschaften und Beziehungen von Objekten eindeutig als Symbolgehalte einzuordnen sind. Weitere Unterschiede lassen sich höchstens in Details ausmachen: Beispielsweise ist die Zuordnung von entlehnten Zeichen im EIS-Prinzip zu *Bildern der wirklichen Objekte* bei AEBLI (1983, S. 238) nicht völlig stimmig, weil AEBLI (ebd., S. 240 f.) Beweglichkeit statt Durchführbarkeit der Handlungen fordert. Die beiden Dreiecke in einem DGS (Abb. 126) wären bei AEBLI daher derselben Kategorie zugehörig – anders als im EIS-Prinzip (vgl. Unterkapitel 3.4).

---

[322] „Während nämlich im elementaren Rechen- und Geometrieunterricht über weite Strecken der Aufbau von Operationen und deren Ausführung vorzuherrschen scheint, treten im weiteren immer deutlicher die Gegenstücke der Operation heraus: die mathematischen *Objekte*, auf die sich die Operationen beziehen. Es ist dann nicht mehr mit dem Aufbau und der Ausführung von Operationen an sich getan, sondern die Operationen müssen zur Untersuchung der Eigenschaften und Beziehungen von Objekten *erkenntnisstiftend* eingesetzt werden" (Wittmann 1983, S. 269; Hervorhebung im Original).

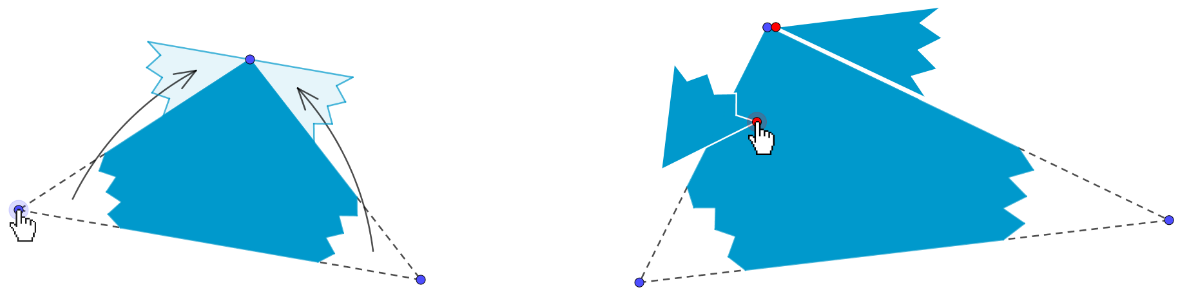


Abb. 126: Dreiecke in einem DGS

6.1.3 Fazit zur vergleichenden Analyse von Vorläufertheorien

Die Vergleiche mit BREIDENBACHs Isomorphie bzw. AEBLIs Aufbau von Operationen stellen markante, inhaltliche Parallelen zum EIS-Prinzip heraus, sodass der Eindruck dreier in sich geschlossener Systeme der Verständigung über weitgehend isomorphe Theorien entsteht.[323] Das vertiefte EIS-Prinzip formuliert die herausgearbeiteten Ideen jedoch präziser, weist inhaltlich unterschiedenen Begriffen unterscheidbare Bezeichner zu, kann dadurch unmissverständlicher kommuniziert werden und Auslassungen in den anderen beiden Theorien aufzeigen. BREIDENBACHs Isomorphie und AEBLIs Ausführungen zum Aufbau von Operationen lassen sich daher im Rückblick als Reduktionen[324] des vertieften EIS-Prinzips deuten bzw. Letzteres als eine vereinheitlichende Weiterentwicklung von bereits bestehenden Vorläufertheorien.

[323] Derartige Parallelen ließen sich mit Sicherheit auch in älteren Beiträgen der Mathematikdidaktik aufzeigen, wie VOLLRATH (1969, S. 176) indirekt mit seinem Kommentar zu BREIDENBACHs Isomorphie bestätigt: „Natürlich sind diese Kriterien schon immer intuitiv von guten Lehrern verwendet worden." Siehe dazu z. B. CLEMEMS BAEUMKER (1913, S. 105), der bei der Einführung der Addition die zu vollziehende Handlung nach seinem Begriff der Addition ausrichtet: „Man addiert nicht schon, wenn man zwei Mengen von Gegenständen zusammenwirft und nun die erhaltene Gesamtmenge abzählt; denn addieren heißt nicht, die tatsächliche Summe empirisch zu finden, sondern die Summe genetisch ableiten" wie folgt: $3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5$. „Ohne allen theoretischen Ballast, ja ohne daß es überhaupt nötig wäre, sich der Gründe bewußt zu werden, wird der Unterricht diese Schritte machen, wenn man Addenden und Summe nicht als etwas Fertiges betrachtet, das man sich nur gedächtnismäßig einprägt" (ebd., S. 106). Um dieses Entstehen im Unterricht erlebbar zu machen, bedarf es nun der Anschauung – „nur muß diese *in der richtigen Weise geleitet* werden" (ebd., S. 106; Hervorhebung J. L.): „Man nehme vielmehr 3 und 2 Stäbchen, gehe jede Gruppe zählend durch (Definition von 3 und von 2!), lege von den 2 Stäbchen das eine zu den 3, spreche dabei die Zahl 4 aus (Definition von 4!), lege dann das zweite von den 2 Stäbchen zu den 4, unter Aussprechung der Zahl 5 (Definition von 5!)" (ebd., S. 106).

[324] BREIDENBACH impliziert mit seinen Beispielen einen reduzierten Anwendungsbereich der Theorie, indem er sie vorrangig der Primarstufe entnimmt. In der Theorieweiterentwicklung der vorliegenden Arbeit hat somit ein Übertragungsprozess von Ideen zum Lernen in der Primarstufe auf das Lernen in der Sekundarstufe stattgefunden, der durch die Anwendungsbeispiele in Kapitel 5 legitimiert wird. Ohne diese Anwendungsbeispiele wäre das Übertragen durchaus in Frage zu stellen, denn nicht alle Aspekte des Lernens in der Primarstufe gelten gleichermaßen für die Sekundarstufe, wie FÜHRERs (1997, S. 60) bereits zitierter Kritik am entdeckenden Lernen zu entnehmen ist: „‚Entdeckendes Lernen' ist naiv, weil es die anerkannte Notwendigkeit materialgestützten und induktiven Arbeitens von der konkret-operationalen Phase der Primarstufe auf Jugendliche der formal-operationalen Phase verallgemeinert."

Im ersten Impuls könnte dieser Umstand zu einem ernüchternden Schluss führen: All das, was im Zuge des Vertiefens von BRUNERs Theorie (nicht nur in der vorliegenden Arbeit) bewerkstelligt wurde, existiert längst in anderem Gewand. Dies soll die getane Arbeit aus zwei Gründen jedoch nicht entwerten:

Einerseits ist das EIS-Prinzip in Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts sehr präsent, auch, weil es dichter an der Alltagssprache von Lehrpersonen liegt. Gerade deshalb ist es wichtig, riskante Auffassungen dieses Prinzips zu lernförderlichen auszubauen – unabhängig davon, ob die entwickelten Kernideen ein Novum darstellen. Andererseits – darauf macht FREUDENTHAL (1973) im nachfolgenden Zitat aufmerksam – ist das Wiederaufgreifen von bereits Gesagtem in der Mathematikdidaktik keineswegs überflüssig, nur, weil es nicht neu ist – anders als in der Mathematik. Entscheidend sei, ob das einst Gesagte in der seitdem weiterentwickelten Unterrichtskultur noch wirksam ist; ob *offene Türen eingerannt* werden oder nicht:

> Als ich einmal dem passiven Lernen das aktive Sicherarbeiten gegenüberstellte, bemerkte jemand: „Das hat ja schon der alte Comenius gesagt“. Ich bin hinsichtlich Comenius nicht ganz sicher, aber mindestens von Pestalozzi an wurde es immer wieder gefordert. Immer wieder – das heißt, daß „einmal“ nicht hilft. Wenn man einmal einen mathematischen Satz bewiesen hat, so ist er bewiesen; wenn einmal die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nachgewiesen ist, so muß viel passieren, bis jemand sie ernsthaft leugnet. […] Wenn Comenius, wenn Pestalozzi dies oder jenes „schon gesagt“ hat, so werden seine Worte, in einem anderen Zeitalter, etwas anderes bedeutet haben. Man denke nicht, daß die großen Pädagogen nichts ausgerichtet hätten, weil ihre Wünsche noch nicht erfüllt sind. Inzwischen hat sich ja auch die Gesellschaft entwickelt, und wenn die Erziehung dem nur Schritt gehalten hat, so sind wir eben relativ nicht weiter als zu Comenius’ oder Pestalozzi’s Zeiten. […] Wie weit nun heutzutage in der Unterrichtspraxis der Forderung des aktiven Lernens entsprochen wird, wage ich nicht zu beurteilen. Ist die Forderung nun schon ein Ladenhüter, und rennt man offene Türen ein, wenn man sie wiederholt?
>
> Freudenthal (1973, S. 61 f.)

Darüber hinaus fällt sowohl für BRUNERs Repräsentationsmodi bzw. die EIS-Prinzipien als auch für AEBLIs Operationen bzw. die operativen Prinzipien die Tendenz auf, Theorien für das Mathematiklernen auf ein fast unmittelbar verständliches Extrakt zu reduzieren, das kompakt und eingängig kommuniziert werden kann: Eine Operation zeichne sich dadurch aus, dass sie „rein mental durchgeführt“ werde (Günster & Ruppert 2020, S. 22), während im Ad-Hoc-Verständnis des EIS-Prinzips Symbole mit arbiträren Zeichen gleichgesetzt werden, die etwas bedeuten können. Diese wiederkehrende[325] Tendenz ist einerseits als „didaktische Reduktion didaktischer Theorien zur Praxistauglichkeit für das Feld Mathematikunterricht“ (Lambert 2012, S. 5) wünschenswert und notwendig, schließlich soll ein didaktisches Prinzip u. a. mitteilbar sein und eine Lehrperson entlasten (Heitzer & Weigand 2020, S. 2 f.). Andererseits ist das Lernen (aus Handlungen) komplex (Dörfler 1988) – und ein diesbezügliches didaktisches Prinzip muss dem gerecht werden. Folglich darf das Reduzieren nicht beliebig weit vorangetrieben werden:

> Reduktion bedeutet nicht, alles in kleinste Häppchen zu zerlegen, sondern die wesentlichen Happen zu finden. Reduktion bedeutet nicht, alles Anspruchsvolle einfach wegzulassen, sondern zu prüfen, was denn das wirklich Wesentliche am Anspruchsvollen ist – und sich dann die notwendige Zeit dafür zu nehmen, zu geben.
>
> Lambert & Herget (2017, S. 2)[326]

Wie lässt sich diesen ambivalenten Ansprüchen begegnen? Einen wesentlichen Beitrag leistet die Mathematikdidaktik, indem sie das Anwenden einer komplexen Theorie oder eines komplexen Prinzips auf einzelne Unterrichtsgegenstände nicht nur der Praxis überlässt, sondern – wie in Kapitel 5 geschehen – auch selbst mehrfach in Angriff nimmt, Vorschläge diskutiert und überarbeitet. Aus diesem Prozess entspringen zwar enger abgesteckte Hinweise, die jedoch leicht mitteilbar, entlastend und vor allem lernförderlich sind. Gleichzeitig sind nützliche Rückschlüsse aus einem übergeordneten Prinzip die wohl beste Motivation zur Auseinandersetzung mit selbigem – und diese Auseinandersetzung soll durch Angabe konkreter Hinweise keineswegs obsolet werden:

> Der vielfach anzutreffenden Neigung, in der didaktischen Diskussion dahingehend konkret zu werden, daß man sich auf Einzelhinweise (Winke, Tips, Fingerzeige, …) beschränkt und grundsätzliche Erörterungen als überflüssig ablehnt, muss m.E. Widerstand entgegengesetzt werden. […] Eine solche Reduktion auf eine Liste unterrichtstechnischer Hinweise wäre einmal unvereinbar mit dem Rang akademischer Lehrerausbildung und würde vor allem aber zu Sterilisation in der Unterrichtspraxis führen.
>
> Winter (1984, S. 123)

[325] Bereits DIESTERWEGs Didaktik und insbesondere seine didaktischen Prinzipien sind – wie in Unterkapitel 0.1 erwähnt – „häufig verkürzt worden zu oberflächlicher methodischer Rezeptologie. So wurde z.B. im Rechenunterricht der Volksschule aus dem Prinzip ‚vom Einfachen zum Zusammengesetzten‘ das Prinzip der Stufung in kleine und kleinste Lernschritte abgeleitet und derart exzessiv durchexerziert, daß geradezu Effekte der Lernbehinderung auftreten mußten“ (Winter 1984, S. 120).

[326] Diese Reduktion im Sinne einer Beschränkung auf das Wesentliche vom Anspruchsvollen hat auch in der vorliegenden Arbeit stattgefunden, beispielsweise bei der Auseinandersetzung mit PEIRCE’ Vorarbeit: Während die Charakterisierung von Symbolen für das EIS-Prinzip übernommen und ergänzt wurde, ist die Unterscheidung zwischen Ikonen und Indizes ausgespart worden. Genauso wurden aus ECOs Klassifikation nach dem Grad der Zeichenspezifität einige Zeichenkategorien ausgelassen.

6.2 Ausgewählte Vorläuferideen

Nachdem bisher hauptsächlich BREIDENBACH und AEBLI zu Wort kamen, weil sie ausgearbeitete Theorien entwickelten, werden nun mit der Darlegung des didaktischen Nutzens objekthafter und entlehnter Zeichen ausgewählte Einblicke in die davorliegende Ideengeschichte ermöglicht. Die Einblicke reichen bis zu DIESTERWEG (1828) zurück, beziehen sich aber vor allem auf die Blütezeit der Reformpädagogik zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts. Diesem Rückblick sind auch neuere Arbeiten zugehörig – insbesondere FREUDENTHAL (1973, 1978) und FÜHRER (1997, 1999) –, da beide die historische Dimension mitreflektieren.

Die Untersuchung des didaktischen Nutzens objekthafter und entlehnter Zeichen für das Mathematiklernen bleibt stets historiographisch und zielt primär auf „ein Lernen von früher für heute und morgen“ ab (Lambert 2010, S. 140): Einerseits soll durch das Bewusstsein über den Nutzen objekthafter und entlehnter Zeichen ihr adäquater Einsatz unterstützt werden, andererseits soll überhaupt von der Sinnhaftigkeit des Einsatzes überzeugt werden.[327] Letzteres ist eine notwendige Voraussetzung für die Wirksamkeit der in Kapitel 3 bis 5 entwickelten Theorie in der Praxis, denn selbst noch so ausgefeilte Rückschlüsse aus dem vertieften EIS-Prinzip tragen kaum Früchte, wenn die Lehrperson auf objekthafte und entlehnte Zeichen verzichtet, weil sie ihre Tragweite geringschätzt. Dass dies nicht ungewöhnlich ist, deutet schon LIEWALD (1908, vgl. Fußnote 194 auf Seite 150) an:

> Und doch muss ich dabei immer an ein Wort meines hochverehrten ehemaligen Lehrers in der Pädagogik, des verstorbenen schlesischen Provinzial-Schulrats Hoppe denken, welcher seinerzeit das „pädagogische Seminar für gelehrte Schulen“ in Breslau leitete, dem anzugehören ich den Vorzug hatte. Dieser erfahrene Pädagog[e] sagte einmal: „Es wird viel über Anschaulichkeit im Unterricht gesprochen, und doch unterlässt man es nur zu oft, sie im einzelnen anzuwenden.“
>
> Liewald (1908, S. 3)

Dieses Unterlassen muss nicht ausschließlich darauf zurückzuführen sein, dass die Funktionen der Zeichenarten einer Lehrperson unbekannt seien. Einen weiteren naheliegenden Grund stellen ernüchternde Erfahrungen mit dem Lernen aus Handlungen im eigenen Unterricht dar, wie sie HEYWANG (1923, S. 165) beschreibt (vgl. Unterkapitel 3.4). Weil das vorliegende Unterkapitel Überzeugungsarbeit für die Verwendung aller Zeichenarten – und damit für das

[327] Vor dem Hintergrund dieser Zielsetzung ist begründet, dass der Nutzen kodifizierter Zeichen im Folgenden nicht weiter expliziert oder konkretisiert wird, denn von der Sinnhaftigkeit des Einsatzes dieser Zeichen muss kaum überzeugt werden. Es soll aber dennoch betont werden, dass kodifizierte Zeichen ganz eigene Vorzüge mit sich bringen und im fortschreitenden mathematischen Diskurs (siehe zu dessen Eigenheiten Sfard 2008, S. 127 ff.) mehr und mehr unverzichtbar werden – vgl. beispielsweise PAPPERITZ (1901, S. 4 bzw. 6), HOLE (1973, S. 62), FÜHRER (1997, S. 93) oder BARZEL & HUßMANN (S. 5 f.). Lernende profitieren von diesen potentiellen Vorzügen allerdings nicht bedingungslos (vgl. Freudenthal 1973, S. 274 ff.; Führer 1997, S. 92 oder Barzel & Hußmann 2007, S. 6).

Lernen aus Handlungen – leisten will, sei zunächst auf eine dieserart entstandene Ablehnung eingegangen. Dieses Eingehen muss sich – genau wie die gesamte Überzeugungsarbeit – bescheidene Ziele setzen: Wer auf dem Wege praktischer Erfahrung zu einer Einschätzung gelangt ist, wird sich nur schwer durch niedergeschriebene Theorie umstimmen lassen – mit gutem Recht: Das bereits zu Beginn von Unterkapitel 6.2 angebrachte Zitat, welches LINDE (1922b) auf Lernende im Unterricht bezieht, greift analog für Lehrpersonen und deren Einstellung zum Lernen aus Handlungen: „Auch das bloß Gedachte und Erdachte, das bloß innerlich Angeschaute muß […], ich möchte sagen, mit der Wucht der Wirklichkeit auf die Nerven fallen“, um wahrhaftig zu überzeugen (Linde 1922b, S. 57).

Insofern sollen die nachfolgenden, den Vorläuferideen vorausgehenden Ausführungen lediglich zu einer Erprobung des Lernens aus Handlungen im eigenen Unterricht ermutigen, denn tiefgreifende Überzeugung von diesem Ansatz kann nur dort errungen werden – auch unter Zuhilfenahme des EIS-Prinzips. Vier Aspekte seien daher genannt, die es sich zu diesem Zweck zu hinterfragen lohnt:

- Einschätzung des erwarteten Lernerfolgs

Es ist alles andere als einfach, die Wirksamkeit eines Lernarrangements im vorab einzuschätzen. Selbst Koryphäen der Mathematikdidaktik scheitern hierin:

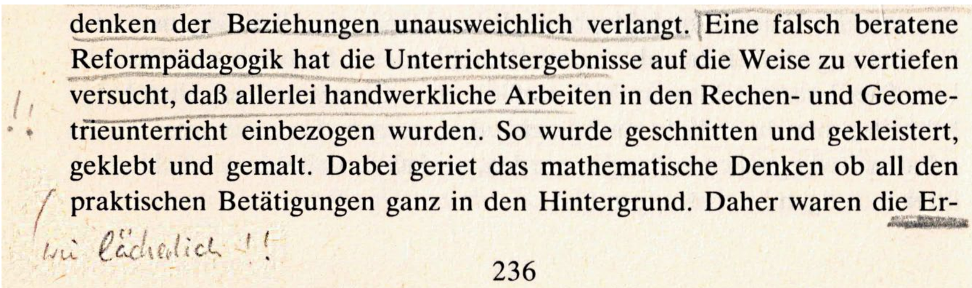
> Es wird mit einem großen Würfel gespielt, und die Lehrerin stellt zufällig und unbeabsichtigt Fragen wie: „Ist es leichter, eine Eins oder eine Sechs zu werfen? Ist es für *mich* leichter, eine Sechs zu werfen als für *dich*?“ Die Schül[e]r geben einhellig und ohne zu zögern oder zu zweifeln die „falsche“ Antwort. Sie wissen ja vom „Mensch, ärgere dich nicht“ her, wie schwer es ist, eine Sechs zu werfen, und auch daß Erwachsene geschickter als Kinder sind, ist ihnen wohlbekannt. Nach diesen Vorübungen läßt man die Schüler – einzeln – Würfel aus Kartonnetzwerken ausschneiden und kleben; es kostet viel Zeit (die armen Linkshändigen mit den rechten Scheren! der Klebstoff, der vom Karton aufgesaugt wird! der Würfel, der beim Bemalen zusammenklappt!)
> Ich denke mir: „was für eine Zeitvergeudung!“
>
> Freudenthal (1978, S. 180; Hervorhebung im Original)

Diese Einschätzung stellt sich jedoch überraschend als falsch heraus:

> Dann spielen sie wieder, schreiben Resultate auf, vergleichen sie, und achtlos fragt die Lehrerin nochmals: „Ist es leichter, eine Sechs als eine Eins zu werfen? Ist es für den oder jenen leichter, eine Sechs zu werfen?“ Einhellig geben die Schüler die „richtige“ Antwort – ja, sie finden die Fragen einfach lächerlich. […] Dieser völlige Umschwung von überzeugtem Ja zu überzeugtem Nein, und das, während eigentlich kaum unterrichtet wurde! Dem mühselig Selbstverfertigen der Würfel bis zum Aufmalen der Zahlensymbole wohnte eine Überzeugungskraft inne, die Menschen und Engelzungen kaum gegeben wäre.
>
> Freudenthal (1978, S. 180)

FREUDENTHAL (1978, S. 180) bezeichnet diese Geschichte als „Ausgangspunkt für vielerlei didaktische Überlegungen“. An dieser Stelle geht daraus hervor, dass über Sinn und Unsinn einer auszuführenden Handlung mit Bedacht, weder vorschnell noch per se zu urteilen ist: Der Wirkmechanismus einer Tätigkeit auf das Lernen ist nicht immer unmittelbar einsichtig.

Das obige Zitat soll dabei nicht implizieren, dass *jede* Handlung einen Lernprozess in Gang setzt: Es bleibt stets dafür Sorge zu tragen, dass handwerkliches Arbeiten Medium des Inhalts ist, nicht Inhalt selbst (vgl. Bender & Schreiber 1985, S. 261). Die Sensibilisierung für die Fehlbarkeit der eigenen Einschätzung soll aber davor bewahren, diese Tätigkeiten im Mathematikunterricht prinzipiell als sinnlos oder gar lächerlich zu erachten. Dass dieser Impuls verlockend ist, demonstriert ein Vorbesitzer des in Abb. 127 auszugsweise abgebildeten Buches – entleihbar in der Saarländischen Universitäts- und Landesbibliothek – mit seinem Kommentar zu den Worten „So wurde geschnitten und gekleistert, geklebt und gemalt“ (Aebli 1983, S. 236).


denken der Beziehungen unausweichlich verlangt. Eine falsch beratene Reformpädagogik hat die Unterrichtsergebnisse auf die Weise zu vertiefen versucht, daß allerlei handwerkliche Arbeiten in den Rechen- und Geometrieunterricht einbezogen wurden. So wurde geschnitten und gekleistert, geklebt und gemalt. Dabei geriet das mathematische Denken ob all den praktischen Betätigungen ganz in den Hintergrund. Daher waren die Er-

wie lächerlich !!

236

Abb. 127: „wie lächerlich!!“ – kommentierte Passage aus AEBLI (1983, S. 236)

- Einschätzungen des beobachteten Lernerfolgs

Was für eine Beurteilung a priori gilt, lässt sich auf eine solche a posteriori übertragen: Wenn Lernende beispielsweise beim Rechnen mit negativen Zahlen nach wenigen Wochen die anschaulichen Grundlagen vergessen haben, könnte der Schluss naheliegen, dass all das Hantieren mit Gutscheinen und Schuldscheinen vergebens war. Auch hierzu bezieht FREUDENTHAL (1973) Stellung:

> Normalerweise schleift die Anschaulichkeit sich von selber ab. Das bedeutet nicht, daß sie je überflüssig gewesen sei. Daß der Schüler 7+5 auswendig kann und es anwenden kann, hat er dem zu danken, daß er einmal 7+5 anschaulich rechnete; wenn er schriftlich addiert, so wirkt die Erfahrung des Rechnens am Abakus nach; und schließlich, wenn er das Rechnen in für ihn neuartiger Weise anzuwenden hat, kann es für ihn entscheidend sein, daß er den anschaulichen Sinn der Operation in allerlei Varianten kennt.

Freudenthal (1973, S. 250)

Die Verallgemeinerung daraus lautet: „Nichtvergessenwerden ist also nicht nur kein hinreichendes, es ist auch kein notwendiges Kriterium der zu erlernenden

Mathematik“ (ebd., S. 79). Dies erläutert FREUDENTHAL (1978) an einem weiteren, außermathematischen Beispiel an anderer Stelle.[328]

- Ursachenzuschreibung bei Misserfolgen

Dennoch *kann* allzu zeitnahes Vergessen darauf hinweisen, dass die Handlungen mit konkretem Material keinen nachhaltigen Lerneffekt bewirken konnten. Entscheidend ist nach ausgemachten Misserfolgen die Kausalattribuierung: Liegt die Ursache im Lernen aus Handlungen selbst oder lässt sie sich in der Umsetzung identifizieren?

Mögliche Fehler in der Umsetzung sind vielfältig und müssen von Fall zu Fall – mit angemessener Fehlerfreundlichkeit[329] – untersucht werden. Sie können unter Zuhilfenahme des vertieften EIS-Prinzips bereits in der Planung des Lerngangs zu identifizieren sein, beispielsweise, wenn sich in die verschiedenartigen Zeichen nicht oder nur eingeschränkt dieselben Muster projizieren lassen – es sei hier nochmals an HEYWANG (1923) erinnert, der nach dem Umsortieren eines Kreises dessen Flächeninhalt mit $r \cdot r \cdot 3{,}14$ statt mit $3{,}14r \cdot r$ angibt (vgl. Unterabschnitt 4.2.2.2). Die praktische Durchführung im Unterricht birgt jedoch zahlreiche weitere Fallstricke, wie Fußnote 193 auf Seite 150 ebenfalls an HEYWANGs (1923) Beschreibung darlegt.

Die Kombination aus dieser Vielfalt möglicher Fehlerquellen und den begrenzten Kapazitäten, die in der tagtäglichen Praxis für die (gemeinsame) Reflexion derartiger Einzelheiten zur Verfügung stehen, lässt die Ursachen eines unzufriedenstellenden Lernprozesses oftmals verborgen bleiben. Es ist nur allzu verständlich, wenn sie dann im Lernen aus Handlungen selbst ausgemacht werden – aber dieses Urteil hätte bei eingängiger Analyse womöglich anders ausfallen können und sollte deshalb nicht in Stein gemeißelt sein.

[328] „Ich habe mich von jeher für Geschichte interessiert, habe auch noch einige Zeit gezweifelt, ob ich statt Mathematik nicht doch Geschichte studieren sollte. Ich habe historische Vorlesungen gehört und habe mich immer wieder sehr ernsthaft mit Geschichte beschäftigt, z. B. sehr genau mit der Periode von 1670 bis 1750. Ich war einmal ein großer Kenner von Jahreszahlen; ich kenne kaum noch eine, übersehe dafür die Weltgeschichte wie mein eigenes Leben. Waren die Jahreszahlen, die sächsisch-fränkischen Könige, die Markgrafen und Kurfürsten überflüssig? Nein, sie sind das Gerüst gewesen, an dem ich mir ein Gebäude der Weltgeschichte errichtet habe. Das Gebäude steht da – in meiner Vorstellung – das Gerüst ist abgetragen, ich brauche es nicht mehr, ich habe viel organischere Mittel der Strukturierung erworben. Wäre es auch ohne Jahreszahlen usw. gegangen? Vielleicht ja. Vielleicht hätten es auch Münzen sein können oder Wappen oder Stammbäume oder Waffenrüstungen. Aber immer stellt sich letzten Endes heraus, daß man viel Überflüssiges gelernt hat, viel mehr Überflüssiges als Dauerhaftes, aber auch das ist ein wesentlicher Zug des Erwerbens von Bildung, daß weniges nur im Siebe bleibt, im Siebe, das mein Sieb ist, das ich mir erschaffen habe“ (Freudenthal 1978, S. 43).

[329] „Ganz verkehrt wäre es, wollte man seine Unzufriedenheit mit sich selbst so weit treiben, daß man sich selbst seine Arbeit vernörgelt. Fehler sind schließlich dazu da, daß man aus ihnen lernt. Und Fehler wird man bei der hier geforderten Art der Bildung von Anschauungen am Anfang sicher machen, sei es, daß man zu abstrakt oder zu genau verfährt oder zu lange bei einem Thema verweilt“ (Wittmann 1933, S. 166).

- Zielsetzung von Mathematikunterricht

Hier genügt ein Zitat von ERNST WEBER (1911b), der an sich selbst das Hinterfragen von Unterrichtszielen und die Auswirkungen dieses Prozesses beschreibt:

> Es ist auch eine Täuschung, anzunehmen, das durch manuelle Tätigkeit erworbene Wissen sitze fester im Gedächtnis. Früher glaubte ich das auch einmal eine Zeitlang. Besonders eine originelle Äußerung unseres Schulrates in der „Pädagogischen Reform“ 1904 war mir auf die Nerven gefallen. „Die mit Wissensstoffen schön patinierten dreizehnjährigen Kinderköpfe erscheinen bei der Revision am Ende des sechzehnten Lebensjahres wie blank polierte hohle Kupferkessel.“ Das ist ein hübscher, anschaulicher Vergleich und – was die Hauptsache ist – er stimmt. Wie aber steht’s mit dem Wissen, das unser „physikalischer Arbeitsunterricht“ vermittelt? Man mache den Versuch, man frage nach drei, nach zwei, nach einem oder einem halben Jahre nach diesem „selbsterarbeiteten“ Wissensstoff und man wird „Kupferkessel“ finden, die jenen sechzehnjährigen aus der „Lernschule“ an blanker Politur nicht nachstehen.
> Das könnte mißmutig stimmen. Hat mich auch zuweilen unzufrieden gemacht. Aber am Ende rang ich mich zu einer bessern Ansicht durch. Es ist dieselbe, die Dr. [Georg] Kerschensteiner in einem 1906 gehaltenen Vortrag über „Produktive Arbeit und ihr Erziehungswert“ vertrat: „Das Wertvollste, was wir einem Schüler geben können, ist eben nicht das Wissen, sondern eine gesunde Art des Wissenserwerbes und eine selbstständige Art des Handelns“. Diese „gesunde Art des Wissenserwerbs“ und diese „selbstständige Art des Handelns“ tritt aber nur da in Erscheinung, wo die Impulse zum Wissenserwerb, zum Lernen und die Triebkräfte zum Handeln, zum Schaffen der Natur, dem Wesen des lernenden, schaffenden, handelnden Menschen entspringen und nicht einem Gebiete entlehnt werden, das seinem Wesen, seiner Eigenart jener Menschen-, jener Kindesnatur fremd gegenübersteht.
>
> Weber (1911b, S. 503)[330]

WEBER (1911b) reißt an dieser Stelle bereits erste Funktionen objekthafter Zeichen an. Seine Ansätze seien nun aufgegriffen, um zum eigentlich Anliegen des aktuellen Unterkapitels zurückzukehren: die Erörterung des didaktischen Nutzens objekthafter und entlehnter Zeichen – beginnend bei Ersteren.

[330] An diesem Zitat wird außerdem ersichtlich, dass metakognitive Aspekte und Ziele – z. B. Lernen lernen – schon vor über einem Jahrhundert Teil der Methodik waren. Sie finden sich auch bei LIETZMANN (1926, S. 163) wieder, der Lernenden „eine gewisse Untersuchungstechnik beibringen oder besser gesagt, sie von ihnen erarbeiten lassen“ will, denn das Ziel sei „nicht bloß das Erarbeitete selbst. Neben dieses materiale Ziel tritt das formale, die Einsicht in den Vorgang des Erarbeitens.“ Siehe dazu in jüngerer Zeit beispielsweise FREUDENTHAL (1973) – „Ehrlich gesagt, wir wissen von keinem Stoff, den wir den Kindern übermitteln sollen, ob es der rechte sei. Wir können sie aber etwas Kostbares lehren: wie man den Stoff meistert“ (ebd., S. 61) – oder auch FISCHER (1984b), der noch über das obige hinausgehend für „*die Entwicklung eines reflektierten, realistischen Verhältnisses zum jeweiligen Wissen*“ plädiert (ebd., S. 52; Hervorhebung im Original), sodass statt des Wissens selbst das „*Verhältnis des Menschen (insbesondere des Lernenden) zum Wissen*“ zum hauptsächlichen Lerngegenstand wird (ebd., S. 64; Hervorhebung im Original).

6.2.1 Zur Tradition des didaktischen Nutzens objekthafter Zeichen

Als Wegweiser in diesem weiten Feld dient eine Passage aus DIESTERWEG (1875, S. 312)[331], in der die Vorzüge von „körperlichen Veranschaulichungsmitteln" ergründet werden – dass er sich ihrer bereits fünfzig Jahre früher bewusst war, belegen seine Kapitelüberschriften in DIESTERWEG (1828)[332]. Obwohl er alldem nur einen kurzen Absatz widmet, werden dabei drei im folgenden Zitat zusätzlich kenntlich gemachte Orientierungspunkte genannt, die sich zur Strukturierung der folgenden Ausarbeitung eignen.

> [Orientierungspunkt 1:] Mit je mehr Sinnen ein Gegenstand wahrgenommen werden kann, desto kräftiger wird sich seine Gestalt etc. in der Vorstellung wieder erzeugen; es wird also für die Veranschaulichung der Zahl vorteilhafter sein, wirkliche Dinge statt ihrer Abbildungen zu gebrauchen. [Orientierungspunkt 2:] Wer auf der untersten Stufe der rechnerischen Thätigkeit steht, pflegt nicht nur die zu zählenden Dinge anzuschauen, sein Auge von einem zum andern gleiten zu lassen; er liebt es, die zu zählenden Dinge anzutasten, anzugreifen (begreifen). Dies muß ein Fingerzeig sein, dem ersten Unterrichte in der Zahl wirkliche, tastbare Gegenstände zugrunde zu legen. [Orientierungspunkt 3:] Aber auch deshalb müssen es solche sein, weil dem Kinde die Möglichkeit gegeben werden muß, selbst die Dinge zusammenzulegen, vorhandene durch Hinzuthun zu vermehren, durch Abnehmen zu vermindern, durch Hinlegen gleicher Anzahl Gruppen zu bilden, welche die Vorstellung des Vervielfältigens erzeugen, sowie durch Auseinanderlegen einer Anzahl gleiche kleinere Anzahlen die Vorstellung des Theilens herbeizuführen.

Diesterweg (1875, S. 312)

Die entsprechenden Teilpassagen aus DIESTERWEG (1875) werden zu Beginn jedes nachfolgenden Unterabschnitts wiederholt, um die einzelnen Überlegungen einzuleiten.

6.2.1.1 Erzeugen eines ***kräftigen*** Abbildes in der Vorstellung

> Mit je mehr Sinnen ein Gegenstand wahrgenommen werden kann, desto kräftiger wird sich seine Gestalt etc. in der Vorstellung wieder erzeugen; es wird also für die Veranschaulichung der Zahl vorteilhafter sein, wirkliche Dinge statt ihrer Abbildungen zu gebrauchen.

Diesterweg (1875, S. 312)

[331] Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung dieser Ausgabe war DIESTERWEG bereits verstorben. Die Erstauflage seines *Wegweisers zur Bildung für deutsche Lehrer* erschien 1835 und wurde 1873 bzw. 1875 in zwei getrennten Bänden in fünfter Auflage überarbeitet und herausgegeben vom Kuratorium der Diesterwegstiftung.

[332] DIESTERWEG (1828, S. xxvii) beginnt mit „Betrachtungen und Nachbildungen. Sinnliche, mechanische Verrichtungen."

Mit dem kräftigen Erzeugen einer Vorstellung und dem Ansprechen möglichst vieler Sinne ist oftmals die Hoffnung verbunden, dass Inhalte des Mathematikunterrichts nachhaltiger gelernt und tiefer verankert werden. So ist beispielsweise LINDE (1922b, S. 78) der Überzeugung, dass „eine solche Wahrheit […] tief Wurzel im Gemüt des Zöglings“ schlägt, die „dem Verstand in dem Augenblick nahegebracht [wird], wo ein Ereignis, ein Gegenstand, der eben diese Wahrheit sinnlich darstellt, angeschaut worden ist und auch schon ein ahnendes Vorempfinden dieser Wahrheit geweckt hat“. [333] LIEWALD (1908) geht am Beispiel des Flächeninhalts noch einen großen Schritt weiter:

> Etwa 1000 Quadratzentimeter, aus Zinkblech geschlagen, genügen zum Messen von Flächenstücken. Wird durch Belegen mit diesen Quadratzentimetern auch nur ein einziges Mal die Flächengrösse eines Buches auf direktem und ursprünglichem Wege festgestellt, so wird der Schüler den Grundbegriff der Flächenmessung niemals aus seinem Gedächtnis verlieren und der Flächenberechnung ein ganz anderes Verständnis entgegenbringen als ohne jene Veranschaulichung.
>
> Liewald (1908, S. 12f.)[334]

Es sind wohl (leider) nicht allzu viele Unterrichtserfahrungen notwendig, um in dieser Schilderung eine Überschätzung enaktiver Zugänge in Bezug auf den langfristigen Lernerfolg auszumachen – siehe die oben zitierte Passage aus WEBER (1911b, S. 503). Diese Überschätzung ist nicht nur unangemessen, sondern auch gefährlich: Sie verleitet dazu, die Konfrontation mit objekthaften Zeichen kurzzuhalten, woran letztlich das Lernen aus Handlungen scheitern kann:

> Der Notstand, in dem sich die Geometrie befindet, muß eigentlich noch schärfer gekennzeichnet werden. Man veranschaulicht Messen und Wägen auch da, wo man messen und wägen läßt, noch immer so, daß diese Übungen einmal gemacht werden, dann aber wird die gewonnene „Erfahrung“ sofort zur Grundlage von „Gedankenübungen“ genutzt.
>
> Oskar Frey (1914, S. 6)

> Psychologisch ist es doch so, daß ein einmaliges Aufzeigen der Zusammenhänge nicht genügt, auch wenn es methodisch noch so geschickt gemacht und noch so gut verstanden wird. Die unmittelbar darauf einsetzenden Zahlenübungen lassen diese Einsicht allzu rasch verblassen. Damit wird dann das Rechnen für das weniger begabte Kind zu einem rein mechanisch-assoziativen Tun.
>
> Oehl (1962, S. 65)

---

[333] Siehe auch KARL GIEBEL (1915, S. 5): „Dagegen ist das Modell eine kräftige Stütze für die Anschauung. Ein körperliches, greifbares Modell, das man von allen Seiten besehen kann, mit dem man experimentieren kann, prägt sich den Sinnen und dem Gedächtnis viel tiefer ein als eine starre leblose Zeichnung.“

[334] Heute lassen sich quadratische Mosaikplättchen aus Kunststoff mit Seitenlänge 1 cm problemlos im Bastelbedarf beschaffen – vielen Dank an Karl Charon für den Hinweis.

Dass LIEWALDs (1908) Beschreibung eine Überschätzung darstellt, bedeutet jedoch nicht, dass objekthafte Zeichen keinen Beitrag zu nachhaltigem Lernen leisten. Die heutige mathematikdidaktische Literatur wiederholt DIESTERWEGs (1875) Hinweis nach wie vor, zieht aber bescheidenere Schlüsse: „Praktisch-gegenständliche Handlungen sprechen grundsätzlich mehr Sinne an und bieten der Erinnerung mehr Anknüpfungspunkte (Anker) als die rein gedankliche Auseinandersetzung mit Abbildungen“ (Büchter & Haug 2013, S. 4). „Schülerinnen und Schüler schaffen sich so Ankerbeispiele, auf die sie auch nach längerer Zeit immer wieder Bezug nehmen“ (Lichti & Roth 2020, S. 8 unter Verweis auf Ganter 2013). Es sei also „zwar nicht so, als ob durch das konkrete Operieren die Einsicht und das Verständnis garantiert werden könnten“, doch die manuelle Tätigkeit stifte eine Möglichkeit zur Rückbesinnung auf haptische Erfahrungen als zusätzliche Chance zum Wiederverstehen (Oehl 1965, S. 45) – LIEWALD (1908, S. 8) spricht von mittelbarer Veranschaulichung, die „in einem Hinweise, in einer Erinnerung an sinnlich wahrgenommene Gegenstände“ besteht. Diese bescheidenere Einschätzung wirkt sich auf den Gebrauch objekthafter Zeichen im Unterricht aus: „Die Beziehung zwischen der realen Welt der Dinge und der Welt der Zahlen muß immer wieder neu hergestellt und gepflegt werden“ (Oehl 1962, S. 63).

Bisher wurden ausschließlich die unmittelbar beabsichtigen Lernprozesse fokussiert. Dass der Nutzen objekthafter Zeichen über diese hinausreicht, war bereits in WEBERs (1911b, S. 503) Zitat ersichtlich, der sie nicht wegen der Hoffnung auf nachhaltigeres Lernen verwendet, sondern damit vielmehr eine „gesunde Art des Wissenserwerbs und eine selbstständige Art des Handelns“ fördern will – dies gelinge nur, wenn „die Impulse zum Wissenserwerb […] dem Wesen des lernenden, schaffenden, handelnden Menschen entspringen“. Daran knüpft der zweite Orientierungspunkt aus DIESTERWEGs (1875) Ausgangszitat an:

6.2.1.2 Anpassung an die natürlichen Gesetze der Kindesnatur

> Wer auf der untersten Stufe der rechnerischen Thätigkeit steht, pflegt nicht nur die zu zählenden Dinge anzuschauen, sein Auge von einem zum andern gleiten zu lassen; er liebt es, die zu zählenden Dinge anzutasten, anzugreifen (begreifen). Dies muß ein Fingerzeig sein, dem ersten Unterrichte in der Zahl wirkliche, tastbare Gegenstände zugrunde zu legen.

Diesterweg (1875, S. 312)

Diese Forderung stellt einen Schluss aus DIESTERWEGs Leitprinzip der Naturgemäßheit dar, das anders als bei COMENIUS „nicht über biologische Analogien sondern mit dem Hinweis auf die Natur des Menschen“ und psychologische Komponenten gerechtfertigt wird (Winter 1984, S. 118; vgl. Unterkapitel 0.1). In diesem Sinne ist LINDEs (1922a, S. 6) „Wink der Natur, dem wir nachkommen müssen“ zu verstehen, den auch WEBER (1911a, S. 418) expliziert: „Der Unterricht muß sich den natürlichen Gesetzen der Kindesnatur anpassen“. Aus seiner Charakterisierung der Kindesnatur zieht er folgende Schlüsse:

> Weil die Kinder das Konkrete lieben, darum ruft man nach Sachen, nach Realitäten, nach Natur, nach Wirklichkeit, nach Leben; darum verwirft man das sogenannte „Buchwissen", das bloße „Maulbrauchen", den extremen Intellektualismus, den Gedächtnisdrill. Weil die Kinder ausgesprochene Sinnesmenschen sind, darum fordert man Übung aller Sinne, besonders jener, die es mit der konkreten Welt zu tun haben: den Muskel- und Tastsinn. Darum verlangt man die Pflege der Hand, die Kultur des Sehens. Kinder sind Phantasiemenschen mit dem Trieb nach Selbsttätigkeit; darum sollen sie schauen und schaffen, gestalten und produzieren.
>
> Weber (1911a, S. 418 f.)[335]

Auch KÜHNELs (1954; Original von 1916) Äußerung aus Unterkapitel 3.4 bestätigt dies, insbesondere in Gegenüberstellung zu gebildeten Erwachsenen[336]:

> Es ist nicht uninteressant, den Unterschied der kindlichen Seele und Gefühlsrichtung und der des gebildeten Erwachsenen auch in dieser Beleuchtung zu sehen. Für den gewöhnlichen Typus des höher gebildeten Erwachsenen ist die „Inspektion" das weitaus mehr Gefühlsbetonte und darum höher Bewertete […]. Dem Typus des normalen Kindes kann aber die inspizierende Tätigkeit nicht zusagen, es will *selbst* schaffen. Im Selbstschaffen entwickelt es seine Kräfte, im Selbstschaffen ergibt sich auch der höchstmögliche Lernerfolg.
>
> Kühnel (1954, S: 205 f.; Hervorhebung im Original; Original von 1916)[337]

Dementsprechend warnt BRANFORD (1913) – wie bereits in Unterabschnitt 2.1.1.3 und Abschnitt 3.2.2 zitiert – vor dem Nicht-Anpassen von Mathematikunterricht an die Adressaten (bzw. vor dem Anpassen an Nicht-Adressaten):

> Eins der auffallendsten Zeichen unserer Zeit hinsichtlich der Schulerziehung scheint mir die allmählich durchdringende Erkenntnis zu sein, daß das Kind beim Betreten der Schule nicht die Empfindung habe dürfe, in eine unangenehme fremde Welt zu kommen, wo alles geheimnisvoll und gekünstelt

[335] Der beschriebene *Wink der Natur* prägt die mathematikdidaktische Literatur nach wie vor. So werden etwa die beiden nachfolgenden Aussagen von BRUNER (1969), die das obige paraphrasieren, häufig zitiert: „The task of teaching a subject to a child at any particular age is one of representing the structure of that subject in terms of the child's way of viewing things" (Bruner 1969, S. 33). „It is only when such basic ideas are put in formalized terms as equations or elaborated verbal concepts that they are out of reach of the young child, if he has not first understood them intuitively and had a chance to try them out on his own" (ebd., S. 13)

[336] Zu Anfang des 20. Jahrhunderts hatte es noch keine allzu lange Tradition, die Kindheit als eigenständig bzw. das Kind als Wesen eigener Art zu erachten, das sich auch kognitiv und emotional vom Erwachsenen unterscheidet und daher besonderer Fürsorge bedarf. Eine solche Sichtweise bildete sich erst im Zuge der schlechten Arbeitsbedingungen von Kindern während der industriellen Revolution aus und lässt sich in späteren Jahren immer wieder aufzeigen – sehr deutlich etwa bei WAGENSCHEIN (1956, S. 2): Begründungen für einen strengen, systematischen Lehr-Gang im Unterricht seien zwar logisch, aber nicht pädagogisch, denn „[s]ie sehen das fertige Fach und im Grund nicht das Kind sondern den fertigen Menschen, den Erwachsenen vor sich, nur im Kleinformat, nur quantitativ noch ‚beschränkt in der Auffassungsgabe'. Aber Lehrer sein heißt: Sinn haben für den werdenden, den erwachenden Geist. Und Fachlehrer sein heißt: zugleich Sinn haben für das gewordene und werdende Fach."

[337] Mit *Inspektion* verweist KÜHNEL auf das innere Nachdenken und die Vorstellung.

ist, und die es nach ein paar Stunden mit einem Wirrwarr von Gedanken im Kopfe wieder verläßt – nur allzu glücklich, wieder in der Welt des ihm Vertrauten und Verständlichen zu sein.

Branford (1913, S. 2)

Zwei Einschränkungen sind in Bezug auf das Obige zu treffen: Erstens ist auch WEBER (1911a)[338] bewusst, dass nicht alle Kinder über einen Kamm geschert werden können. Wenn also vom Anpassen an die natürlichen Gesetze der Kindesnatur die Rede ist, dann bedeutet dies nicht, dass Mathematikunterricht ohne dieses Anpassen der Natur *aller* Lernenden zuwiderliefe – auch formal-algebraische Darstellungen können sich in die eigene Lebenswelt einreihen.

Zweitens lassen sich ebenso wenig alle Lerngegenstände vereinheitlichen und selbstschaffend, womöglich sogar entdeckend[339] aus der Wirklichkeit gewinnen: „Die seit Pestalozzi traditionsreichen Klagen über eine angeblich ‚verkopfte' Schule, die dem Lernen mit ‚Herz und Hand' endlich mehr Raum lassen müsse, unterschätzen entweder die Schwierigkeiten geistiger Enkulturation für Normalschüler oder die Steuerungsfunktionen gedanklicher Schemata im kollektiven Bewußtsein" (Führer 1997, S. 104 f.). Um das Anpassen an die oben genannten *natürlichen Gesetze der Kindesnatur* daher nicht als allumfassendes Credo auszurufen, sondern seinen intersubjektiv variablen Wert am rechten Platz herauszustellen, seien in den folgenden beiden Unterpunkten einige Vorteile konkretisiert, die mit einer solchen Anpassung einhergehen.

- Positive Einflüsse auf kognitive Aspekte

In einem vertrauten Erfahrungsbereich, wie er durch die Anpassung an die Gesetze der Kindesnatur bestenfalls für alle Lernenden geschaffen wird, existieren Elemente, die bereits als sinnvoll empfunden werden – es herrscht eine „familiarity that gives intuition something to work with" (Bruner 1969, S. 57)[340].

---

[338] „Trotz dieser gemeinsamen Merkmale, durch die man die kindliche Natur zu charakterisieren sucht, darf man nicht vergessen, daß auch Kinder Individualitäten sind, deren wissenschaftliche Durchforschung sich nicht restlos vollziehen läßt" (Weber 1911a, S. 418)

[339] „Zeitgemäße Allgemeinbildung habe [nach Freudenthal] eben vielerlei Fakten- und Methodenwissen aus der viertausendjährigen Mathematikentwicklung aufzunehmen, jedenfalls mehr als durch Selbstentdeckung zu assimilieren sei. Das erfordere durchaus mehr Führung und Anleitung durch den Lehrer, der jedoch naive Ansätze der Schüler stets lernbegierig aufnehmen und weiterführen sollte. Als fruchtbarstes Lehrprinzip für den Mathematikunterricht[…] sei daher die ‚*Nacherfindung unter (vornehmlich heuristischer) Führung*' zu empfehlen" (Führer 1997, S. 49; Hervorhebung im Original). Siehe dazu auch LIETZMANN (1926, S. 163): „Es ist kein Zweifel: ein Schüler oder eine Arbeitsgemeinschaft kann sich nicht die Frucht einer Jahrtausende zu ihrer Entwicklung gebrauchende Wissenschaft in neun Jahren selbst erarbeiten."

[340] Die Notwendigkeit dieser Intuition unterstreicht auch KARL HOFFMEISTER (1834): „Was der Verstand entwickeln will, muß unentwickelt vorhanden, und was er suchen soll, muß seinem Forschen schon durch das Gefühl angedeutet sein, sonst könnte er gar nicht einmal auf den Einfall kommen, zu suchen. Das Gefühl geht der Wissenschaft auf ähnliche Weise voran, wie die Sprache der Sprachlehre. Eher muß die Wahrheit im Gefühl erlebt werden, als sie der Verstand auf allgemeine Begriffe bringen kann. Die gefühlte Wahrheit ist die ursprüngliche, die wissenschaftliche die abgeleitete" (Hoffmeister 1834, S. 292, zitiert nach Diesterweg 1873, S. 234).

Lernende knüpfen somit an ihr Vorwissen an – diesen Prozess bezeichnet im mathematikdidaktischen Kontext beispielsweise KIRSCH (1977a, S. 92 ff.) als eine zentrale Strategie des Zugänglichmachens, die sich außerdem bereits bei PEIRCE erkennen lässt: Damit ein Zeichen einer Person als Mittel der Erkenntnis zur Verfügung steht, muss es ihr ausreichend vertraut sein (Hoffmann 2005).

Gleichzeitig eröffnen sich in einer vertrauten Situation breitere Möglichkeiten des Mathematiktreibens:

> Für Zwölfjährige sind konkrete Phänomene viel eher fragwürdig und begründbar als algebraische Regeln, und man kann nicht früh genug anfangen, zum Begründen und Argumentieren anzuhalten. Was eingewandt wird, ist lediglich, daß das Begründen und Argumentieren sich auf Gegenstände oder Gedankendinge beziehen sollte, deren Bedeutung man kennt. Abstraktion soll man nicht aufdrängen. Die mathematisch geschulte Sprache des Lehrers verführt dazu, Bezeichnungen mit Begriffen zu verwechseln. Im Unterricht muß er warten können, bis die Zeit reif ist, um aus Erfahrungen Begriffe und aus Begriffen benennbare Gegenstände wachsen zu lassen. Erst dann kann über gewisse Beziehungen der Gegenstände (altersgemäß) streng argumentiert werden.
>
> Führer (1997, S. 98)

Ohne dieses Warten, bis die Zeit reif ist, droht „Denken ohne Bezug zur Wirklichkeit“ stattzufinden, „zu einer Bewegung von Phantomen, zu einer Parade toter Wahnfiguren, zu einem Tanz von Schatten“ zu verkommen, statt „zu realem, inhaltlichem Denken eines Kindes“ (Vygotskij 2002 S. 118).

- Positive Einflüsse auf nicht-kognitive Aspekte

Wenn erstens konkrete Phänomene Lernenden *fragwürdiger* als algebraische Regeln sind, macht sie das für jene Lernenden zugleich interessanter: Das „Verstehen der Wirklichkeit“ – auch der erlebten – wird „selbst zum Problem“; es verschafft „Freude und Befriedigung […], herauszufinden, ‚warum sie tickt‘“ (Aebli 1983, S. 184). Dementsprechend zielen DIESTERWEG und FRÖBEL darauf ab, dass durch „die formende Tätigkeit der Hand […] im Schüler Bedürfnis und Trieb nach Lehre und Aufklärung erregt werde“ (Rißmann 1910, S. 89), was mit algebraischen Regeln seltener gelinge: „Es ist für einen Mathematiker von Fach schwer begreiflich, wie geringes Interesse selbst die älteren Schüler dem rein formalen Standpunkt entgegenbringen“ (Simon 1985, S. 71 f.; Original von 1908).
Wenn zweitens konkrete Phänomene für Lernende *begründbarer* als algebraische Regeln sind, können Lernende an ihnen leichter selbst Argumentationen und Begründungen generieren, deren Entwicklung sonst oft nur der Lehrperson obliegt. Damit geht für Lernende „die Aussicht auf Hebung des Selbstwertgefühls“ einher – der hauptsächliche Motor für leistungsfähige und überdauernde, intrinsische Motivation (FÜHRER 1997, S. 117). Die tragfähige Grundlage für diese Motivation sei daher „in den Lebensbezügen und Strukturen des Faches

Mathematik“ zu suchen, die unbedingt „in den Wahrnehmungsbereich der Kinder […] rücken“ müssen (ebd., S. 166).

Ein dritter nicht-kognitiver Aspekt lässt sich ableiten aus LIETZMANNs (1919, S. 128)[341] Rat im Kontext der Einführung der Innenwinkelsumme im ebenen Dreieck – vgl. auch HEINRICH EMIL TIMERDING (1912, S. 100 f.)[342]: Mathematikunterricht soll mit seinen Wahrheiten diejenigen, an die er sich richtet, bestmöglich überzeugen, beeindrucken und verblüffen; und dies gelingt besonders gut in deren Welt: „Handlungen können mathematische Gesetzmäßigkeiten deutlicher ins Bewußtsein treten lassen als deren bildhafte oder symbolische Repräsentation“[343] (Hole 1973, S. 44).[344]

Genau wie Wahrheiten sollen auch Widersprüche als solche empfunden werden – also einen kognitiven Konflikt auslösen: Ein solcher sei jedoch oftmals nur bedeutungsvoll für die Lehrperson, obwohl er es für diejenigen sein müsste, bei denen er ausgelöst werden soll (Margarita Limón 2001, S. 373).[345] Um dies zu erreichen, seien unter anderem Neugierde, Interesse und ein gewisses Maß an Vorwissen vonnöten (Limón 2001, S. 365 ff.) – all das sind Anforderungen, deren Erfüllung besser gelingt, wenn die Probleme in einer der Natur des Kindes gemäßen Art und Weise angeboten werden. Das Präsentieren von widersprüchlichen Informationen allein sei jedenfalls nicht hinreichend.

6.2.1.3 Ermöglichen effektiver Manipulationen

> Aber auch deshalb müssen es solche [sog. wirkliche, tastbare Gegenstände] sein, weil dem Kinde die Möglichkeit gegeben werden muß, selbst die Dinge zusammenzulegen, vorhandene durch Hinzuthun zu vermehren, durch Abnehmen zu vermindern, durch Hinlegen gleicher Anzahl Gruppen zu bilden, welche die Vorstellung des Vervielfältigens erzeugen, sowie durch

[341] „Man kann diese erste Methode [das Nachmessen der Innenwinkel] in leichter Weise abändern, um ihr eine weit größere Überzeugung zu geben: Man schneidet ein beliebiges Dreieck aus Papier aus, reißt die Ecken des Dreiecks ab und legt die abgerissenen Winkel aneinander, dann ‚sieht‘ man, daß die Winkelsumme zwei Rechte beträgt“ (Lietzmann 1919, S. 128). Dass durch geringfügige Anpassung der objekthaften Zeichen auch eine Begründung angebahnt werden kann, wurde zuvor bereits ausführlich dargelegt (vgl. Lambert 2019).

[342] „Die Figur läßt sich ausschneiden und ihre Teile aufeinanderlegen, dann wirkt sie im Unterricht viel überzeugender als jeder Beweis, und die Überzeugung des Schülers ist doch das erste, was man erreichen will. Der alte Unterricht hat eben dadurch, daß er immer bewies und doch nicht überzeugte, gefehlt; denn damit ein Beweis überhaupt wirken kann, müssen gewisse persönliche Voraussetzungen für die Möglichkeit des Verständnisses erfüllt sein, und die waren eben bei den Schülern vielfach nicht erfüllt“ (Timerding 1912, S. 100 f.)

[343] Der Bezeichner »symbolisch« wird hier in einem Alltagsverständnis verwendet, also abweichend von der vorliegenden Arbeit.

[344] Es sei nochmals erinnert an LINDE (1922b, S. 57): „Auch das bloß Gedachte und Erdachte, das bloß innerlich Angeschaute muß dem Schüler, ich möchte sagen, mit der Wucht der Wirklichkeit auf die Nerven fallen.“

[345] BAUERSFELD (1983, S. 5) macht hierauf im Rahmen getrennter subjektiver Erfahrungsbereiche aufmerksam.

Auseinanderlegen einer Anzahl gleiche kleinere Anzahlen die Vorstellung des Theilens herbeizuführen.

Diesterweg (1875, S. 312)

Mit effektiven Manipulationen bezweckt DIESTERWEG (1875) v. a. die Ausbildung adäquater Vorstellungen. Diese Absicht verfolgen auch FREY (1914)[346] oder OEHL (1962, S. 93; Hervorhebung im Original): Basierend auf PIAGETs Untersuchungen zur Genese der Zahl betont er die Wichtigkeit der Fähigkeit, „vor allem manuellen Tun *Handlungen* in *Gedanken* (*vorstellend*) zu *vollziehen*" – diese sei „zu entwickeln und zu pflegen"; „[d]as kann aber nicht anders geschehen als durch Umgang mit konkreten Dingmengen und nachfolgend durch die zeichnerische Darstellung ihrer Struktur und Strukturveränderungen in einfachen Schemabildern". Dergleichen betonen auch PIAGET & BÄRBEL INHELDER (1975) selbst:

> Die Vorstellung ersetzt also erst dann wirklich das Handeln, wenn es von diesem Handeln selbst ausreichende Informationen empfangen hat, und man kann sie demnach nicht ohne einen künstlichen Schnitt von ihrem Handlungskontext lösen, ebenso wie man eine Wahrnehmung nicht von ihrem sensomotorischen Kontext trennen kann.

Piaget & Inhelder (1975, S. 525 f.)

Neben dem Stiften einer Vorstellungsgrundlage können effektive Manipulationen das Explorieren erleichtern, weil die „zusätzliche geistige Leistung", Handlung *und* Gegenstand präsent zu halten, nicht erbracht werden müsse (Aebli 1961, S. 64). Dadurch reduziert sich der Cognitive Load – wie es heute hieße – und es stehen größere Ressourcen für die Identifikation der Zusammenhänge zur Verfügung. Dies beschreibt bereits ÉTIENNE BONNOT DE CONDILLAC (1714-1780): „Mit Steinen nun lassen sich die Zahlen bequemer zerlegen als mit den Fingern und mit den Namen, und statt umständlicher Redewendungen haben wir einfache Zeichen, die das Gedächtnis überflüssig machen, da sie uns vor Augen stehen" (Condillac 1959b, S. 217; Original von 1798).[347]

Einen zweiten Vorteil für das Explorieren stellt die „unmittelbare Rückmeldung (ohne die Lehrperson!)" dar, die Lernende beim effektiven Manipulieren erhalten und die „die aufgestellte Hypothese stützt oder gegebenenfalls schwächt" (Ganter 2013, S. 37 f.)[348] – vgl. auch hierzu CONDILLAC (1959a, S. 10; Original von 1780):

---

[346] „[A]uch die einfachen Aufgaben, wie Teilen, Abtragen usw., bekommen einen dem Empfindungsgehalte des Wortes (bzw. der Aufgabe) entsprechenden Inhalt, wenn die Vierecke, Dreiecke, Kreise als Papierflächen geteilt, zusammengestellt, zur Deckung gebracht werden" (Frey 1914, S. 6).

[347] Es sei wiederholt, dass all diese Funktionen nicht für jede Person gleichermaßen erfüllt werden: „Es scheint, daß Kinder sich mit dem Material schneller üben als Mathematiklehrer, die offenbar von den formalen Methoden zu sehr durchdrungen sind, um noch so anschaulich arbeiten zu können" (Freudenthal 1973, S. 224).

[348] Dies ist von besonderer Bewandtnis, weil Lernende MALLEs (1993, S. 162) Beobachtungen folgend beim Umgang mit kodifizierten Zeichen oft nur über schwach entwickelte Kontrollmechanismen verfügen: „[W]eder Begründungen noch Widerlegungen" können durchgeführt werden, und die Möglichkeit falscher Umformungen wird gar nicht in Betracht gezogen.

„Die Irrtümer beginnen also, sobald die Natur uns nicht mehr auf unsere Mißverständnisse hinweist.“ Dieses Schwächen von Hypothesen bzw. die Möglichkeit ihrer Falsifizierung expliziert AEBLI (1961, S. 64 f.): „Die Beobachtung des Resultats warnt den Schüler häufig, wenn er in einer konkreten Handlung einen Irrtum begehen sollte. Eine Konstruktion droht einzustürzen, oder der Handlungsablauf gerät sonst irgendwie in die Klemme. Die gedachte Handlung entbehrt dieser Sicherung.“[349]

Eine Szene aus dem eigenen Unterricht soll die beiden genannten Vorteile für das Explorieren erläutern, ohne den Anspruch eines empirischen Belegs zu erheben:

Ein Schüler in Klassenstufe 10 will an zwei gezeichneten Quadraten der Größe 1 cm^2 bzw. 1 dm^2 die Umrechnungsregel zwischen den Einheiten mit Sinn füllen. Er beschreibt einen Auslegungsprozess und zeichnet dessen Zwischenresultate – also entlehnte Zeichen als Abbilder einer vorgestellten Handlung: Zunächst entsteht eine Reihe aus 10 Quadratzentimetern (Abb. 128 links). Von nun an verzichtet der Schüler auf weitere Zeichnungen und beschreibt seine Vorstellung: An den übrigen drei Seiten seien ebenfalls derartige Reihen einzufügen, weshalb 40 Quadratzentimeter in einen Quadratdezimeter passen (Abb. 128 Mitte). Nach kurzem Zögern merkt er an, dass der Quadratdezimeter noch nicht voll ausgefüllt sei; daher sei das Muster nach innen auszubauen: 8 rechts, 8 links, 8 oben, 8 unten (Abb. 128 rechts). Dies müsse fortgesetzt werden bis zur Mitte.

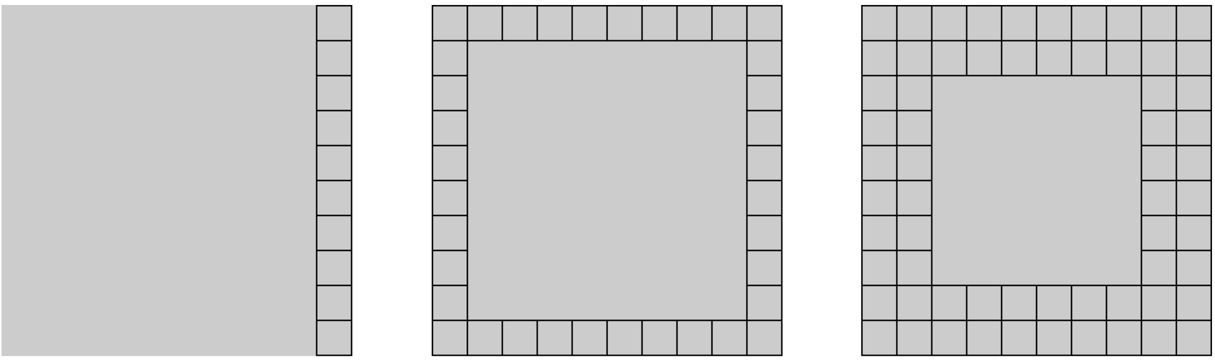


Abb. 128: Zwischenresultate im Auslegungsprozess

Die verkomplizierende Herangehensweise ist der Übergeneralisierung eines Schemas (in dem Fall das der Umfangsberechnung) zuzuschreiben (vgl. Malle 1993, S. 172 ff.) – sie wäre wohl auch durch effektives Auslegen nicht vermieden worden. Das Fehlen objekthafter Zeichen wird stattdessen an den übrigen beiden Fehlern ersichtlich: Erstens wurde kurzzeitig angenommen, dass das Auslegen bereits mit 40 Quadratzentimetern abgeschlossen sei; zweitens blieben doppelt gezählte Quadrate in den Ecken unbemerkt. Insbesondere Letzteres illustriert die

[349] Beide oben genannten Vorteile für das Explorieren fließen bei HEINRICH ROTH (1976, S. 261) zusammen: „Kinder müssen auch ‚Suchen und Irren‘ können, aber sie sind genötigt, das auf einer niederen Abstraktionsstufe zu tun. […] Entscheidend ist dabei nicht so sehr die Meinung des Lehrers über das, was bedeutungsvoll und sinnvoll für das Kind ist, sondern ob das Kind von sich aus einen Sinn erleben und erfassen kann.“

Schwierigkeit, alle Elemente der vorgestellten Handlung gleichzeitig präsent zu halten und das resultierende Ausbleiben einer Rückmeldung ohne die Lehrperson.

Dennoch stoßen effektive Handlungen an Grenzen, weil Beziehungen in Handlungen oftmals „zwischen Stadien der Handlungen“ resultieren, die „real […] gar nicht simultan vorliegen“ (Dörfler 1988, S. 82) – diese müssen dann doch auf Kosten des Cognitive Load präsent gehalten werden. Genau hier knüpfen *entlehnte* Zeichen an, die auch im obigen Unterrichtsausschnitt als Abbild der vorgestellten Handlung eine Hilfe hätten darstellen können. Vor dem Übergang zu Abschnitt 6.2.2 seien jedoch noch zwei rückblickende Anmerkungen ergänzt:

Erstens hat das Ausbreiten der drei Orientierungspunkte nicht *alle* Einzelfunktionen objekthafter Zeichen hervorgebracht. Unerwähnt blieb beispielsweise das Fördern der Anwendbarkeit auf Umweltsituationen (Oehl 1962):

> Für das gesteuerte Lernen von Mathematik ist es günstig, wenn die zu lernenden bzw. zu bildenden Begriffe vom Schüler selbst aus Umweltbezügen herausgelöst werden, weil dann die beste Gewähr besteht, daß sie vom Schüler auch wieder auf Umweltbezüge angewendet werden können.
>
> Griesel (1976, S. 62)[350]

Ebenso wenig wurden Abwechslung, Erheiterung oder Motivation als Argumente eingebracht, wie dies beispielsweise bei LICHTI & ROTH (2020, S. 9) unter Verweis auf ROBERT GOLDSTONE & JI SON (2005) geschieht – auch dieser Gedanke ist alt.[351]

FREUDENTHAL (1973, S. 70) sieht derlei kritisch: „Es ist ein heuchlerisches Argument, denn wir suchen ja sonst nicht den Lehrstoff daraufhin aus, ob er die Kinder ergötze“. HOLE (1973, S. 38) ergänzt: „Handlungsorientiertes Vorgehen darf […] nicht verengt unter dem methodischen Aspekt der Motivation oder Abwechslung verstanden [werden], sondern muß als eine notwendige Maßnahme zur Einleitung mathematischer Denktätigkeiten betrachtet werden.“ Trotzdem verbietet es sich nicht, Motivation als Argument anzubringen, wie es BREIDENBACH (1956) im nach-

---

[350]„Unter dem Begriff ‚Umwelt‘, der in der Formulierung des Prinzips, dem unsere Untersuchung gilt, vorkommt, sollte man nicht streng nur die natürliche Umwelt unterordnen. Auch Formen und Merkmalplättchen, ja alle Arten von Arbeitsmaterialien gehören auch zur Umwelt des Kindes. Freilich ist diese aus Materialien bestehende Umwelt um vieles künstlicher, so daß häufig sogar von einer Laborsituation gesprochen wird. Sie ist eine sinnvolle und notwendige Ergänzung zur natürlichen Umwelt, die im übrigen auch nicht mehr vollkommen ‚natürlich‘ ist, sondern viele Elemente des vom Menschen Gemachten enthält“ (Griesel 1976, S. 67).

[351] „Durch die Benutzung des Modells wird so eine erfreuliche Belebung der entsprechenden Stunden erzielt und damit die Rechenfreudigkeit der Schüler wach erhalten werden. […] Man darf überzeugt sein, daß gerade eine solche Betrachtungsweise geeignet sein wird, Interesse für die Mathematik, für mathematisches Denken, für die in ihr schlummernde eigentümliche Schönheit und Klarheit zu wecken“ (Brücher 1911, S. 14 f.). „Wir wissen auch aus der psychologischen Forschung und aus unserer eigenen pädagogischen Erfahrung, daß die Lernlust der Schüler gewaltig erhöht werden kann, wenn das theoretische Wissen aufs engste mit ihrem praktischen Erleben in Beziehung gesetzt und das neue Wissen mit allen Sinnen erfaßt wird“ (Gansberg 1912, S. 386).

stehenden Zitat empfiehlt. Sie soll aber nicht das ausschlaggebende, hauptsächliche Ziel sein, sondern „freilich mitgeliefert“ werden (Griesel 1976, S. 62).

> Es ist aufs innigste zu wünschen, daß die Behandlung eines Stoffes, die nach einer sachgerechten *und* kindggemäßen Methode vorgenommen wird, dem Kinde nicht nur Einsicht bringt, sondern auch Freude macht. Und es ist gewiß der Anstrengung wert, nach Verfahren zu suchen, die *auch* den Gesichtspunkt der Freude berücksichtigen. Aber es ist akzessorisch und nicht konstitutiv!
>
> Breidenbach (1956, S. 44; Hervorhebung im Original)

Die zweite Anmerkung verweist darauf, dass viele der Funktionen nicht nur durch eine literaturbasierte Analyse zutage treten, sondern auch in Reflexionsphasen mit Lernenden: „Als Vorteile des Materials gegenüber den anderen Medien benennen die Schüler die folgenden Punkte“, die sich allesamt in den obigen Ausführungen wiederfinden (Tobias Huhmann 2013, S. 130):

- „Objekt- und Prozesseigenschaften sind haptisch erfahrbar,
- Option der eigentätigen Kontrolle,
- Möglichkeit der individuellen Benutzersteuerung,
- die modale sowie räumliche Variabilität der Betrachterperspektive durch die Dreidimensionalität des Objekts.“

HUHMANN (2013, S. 130) subsumiert diese Auswahl einiger Funktionen zwar unter dem *einen* Aspekt „Reduktion / Vermeidung von Cognitive Load“ – die vorherigen Schilderungen legen jedoch dar, dass der Einsatz objekthafter Zeichen im Mathematikunterricht mehr als das bewirkt. Insofern erscheint OEHLs (1962, S. 72) große Wertschätzung stimmig: „Nehme ich dem Kinde das zu diesem Ziel hinführende eigene Tätigsein ab und biete ihm nur optisch die Gliederung durch ein Veranschaulichungsmittel an, so habe ich ihm die stärkste Anregung zu der besagten geistigen Leistung genommen.“

6.2.2 Zur Tradition des didaktischen Nutzens entlehnter Zeichen

> Es ist in den letzten Jahren eine starke Neigung bemerkbar, die konkreten und manipulierbaren Objekte durch ihre Abbildungen auf dem Papier zu ersetzen. […] Man könnte sich nun fragen: Ist das nötig? Kann das Kind nicht wie früher die Steinchen auf dem Tisch addieren, warum muß das auf dem Papier abgebildet werden? […] Ich meine, daß ein erfahrener und phantasievoller Lehrer mit freiem, nicht ans bedruckte Papier gebundenem Material viel größere Möglichkeiten ausnutzen kann. Das ans Papier gebundene Material für den anfänglichen Rechenunterricht hat aber zwei Vorteile, die man beachten muß: Erstens läßt die individuelle Tätigkeit des Schülers sich leichter kontrollieren; zweitens wird der unerfahrene Lehrer zu einer wohlüberlegten Didaktik konkreter Operationen gezwungen, auf die er sonst vielleicht nicht kommen würde.
>
> Freudenthal (1973, S. 222 f.)

FREUDENTHAL (1973) impliziert im obigen Zitat trotz der Nennung zweier Funktionen entlehnter Zeichen, dass erfahrene, phantasievolle Lehrende durchaus auf diese verzichten könnten. Vermutlich ist diese Andeutung lediglich der Entweder-Oder-Frage geschuldet, die die *starke Neigung in den letzten Jahren* ähnlich wie DIESTERWEG (1875)[352] zu stellen scheint – immerhin will sie das eine durch das andere *ersetzen*. Insofern verzichtet FREUDENTHAL (1973) zugunsten objekthafter Zeichen auf entlehnte, verneint jedoch nicht, dass entlehnte Zeichen auch den Unterricht einer erfahrenen Lehrperson bereichern: Er hält es sogar für „interessant, prinzipiell die Vorteile und Nachteile des ans Papier gebundenen konkreten Gebrauchsmaterials zu untersuchen", wobei hiermit entlehnte Zeichen angesprochen sind (ebd., S. 222 f.). Das Geringschätzen entlehnter Zeichen ist jedoch keine Seltenheit: Wozu das Abbild einer Handlung festhalten, die gerade so eindrücklich passiert? FREY (1914) spricht hierzu keine betonte Empfehlung aus:

> Sind die Aufgaben so ausgeführt, daß die in der Anordnung der Flächenelemente gegebene Leitung für das Tun zum Bewußtsein kommt, so wird die Charakteristik des aufgebauten Streifens oder Quadrats durch zwei Zahlen (Produkt) als Beschreibung des Tuns aufgefaßt werden. Es wäre möglich, daß der Lehrer es auch noch für nötig hält, die aufgebauten Streifen zeichnerisch zu charakterisieren.
>
> FREY (1914, S. 10)

Abschnitt 6.2.2 strebt hingegen an, *eigene* Funktionen entlehnter Zeichen im Lernprozess herauszustellen, die das effektive Handeln mit Steinchen oder Flächenelementen entbehren. Auf diese Weise kann die Entweder-Oder-Frage durch ein Bewusstsein für das gegenseitige Bereichern beider Alternativen abgelöst werden. Dazu seien drei zentrale Funktionen hervorgehoben.

6.2.2.1 Kompensation der Vergänglichkeit von Handlungen

Diese erste Funktion ist zwar schlicht und offensichtlich, aber dadurch nicht minder relevant oder erwähnenswert: Im Laufe des fortschreitenden Unterrichts wird „das Bedeutungserlebnis […] nach und nach verblassen und recht unanschaulich werden. Aber die Möglichkeit, ihn [den neuen Begriff] voll bewußt machen zu können, muß bestehen; das stärkt die Sicherheit des Könnens" (Oehl 1965, S. 30). Hierbei helfen festgehaltene Abbilder der Handlungen im Heft der Lernenden: Entlehnte Zeichen dienen als überdauernde Stütze zur Erinnerung an die ausgeführten Handlungen. Nicht nur die Handlung selbst kann dadurch leichter rekonstruiert werden, sondern auch die an ihr erschlossenen Symbolgehalte: Es sei diesbezüglich an HEYWANG (1923, S. 165) erinnert, der unmittelbar von objekthaften zu kodifizierten Zeichen übergeht und „in der nächsten Stunde, die umständehalber erst 14 Tage später war", konstatieren muss: „[N]iemand

[352] „[E]s wird also für die Veranschaulichung der Zahl vorteilhafter sein, wirkliche Dinge *statt* ihrer Abbildungen zu gebrauchen" (Diesterweg 1875, S. 312; Hervorhebung J. L.).

[wusste] mehr den Weg zu finden. Alle wußten aber noch r · r · 3,14 und konnten es auch auf alle Fälle anwenden. Wo lag der Fehler?“ Gleichzeitig wird Lernenden – bei denen nicht selten der Gedanke vorherrscht, wichtig sei nur das, was im Heft steht – implizit eine Wertschätzung der Anschauungsgrundlagen vermittelt.

Das Kompensieren der Vergänglichkeit von Handlungen stiftet noch einen dritten Vorteil: Um überhaupt auf ein Muster aufmerksam werden zu können, müssen in der Regel „verschiedene Aspekte simultan erfaßt und […] miteinander verglichen werden können“ (Hole 1973, S. 46) – insbesondere auch mehrere Handlungsabläufe. Da diese jedoch nacheinander ablaufen, ist zur „*simultanen Erfassung verschiedener Alternativen*“ eine Gedächtnisleistung notwendig, die kognitive Ressourcen beansprucht (Wittmann 1974, S. 69; Hervorhebung im Original, Zech 2002, S. 108; Hervorhebung im Original). In entlehnten Zeichen hingegen, bei denen „das sukzessive Element in ein simultanes übergeht“, stehen unterschiedliche Alternativen gleichzeitig für eine Untersuchung zur Verfügung (Schütte 1996, S. 56) – was den zweiten Nutzen entlehnter Zeichen impliziert:

6.2.2.2 Stiftung einer vertrauten Denkunterlage

„Die Zeichenkunst giebt uns Bilder, aus denen man die dargestellten Gegenstände und ihre Eigenschaften erraten kann […]: die Methode, nach der man vom Bilde auf das Original zurückschliesst, wird zur Hauptsache“ (Papperitz 1901, S. 12). Unterricht nach dem EIS-Prinzip bedient sich genau dieser Methode. Das erstmalige Auftreten entlehnter Zeichen entspricht also der Einführung eines neuen Zeichensystems, dessen Elemente zu Symbolen werden können und die als *Denkunterlage*[353] dienen: Nachdem ein konkreter Operationsvorgang „bildlich nachgeahmt“ wurde, wirkt das Bild „als Denkhilfe, indem es das vorstellende Operieren erleichtert“, dem eine zentrale Rolle beim Übergang auf die symbolische Ebene zufällt (Oehl 1962, S. 45) – vgl. Abschnitt 4.2.4. Bedarf für diese Erleichterung besteht in besonderem Maße, weil Beziehungen in Handlungen

> zwischen Stadien der Handlungen [resultieren], die real meistens gar nicht simultan vorliegen. Für die Konstruktion der Beziehung ist also die simultane mentale Präsenz dieser Stadien […] von zentraler Bedeutung. Erst dann ist die Fokussierung der Aufmerksamkeit auf Ausgangsgrößen und Endgrößen und deren mentales In-Beziehung-Setzen möglich.
>
> Dörfler (1988, S. 82)

Dörfler (1988, S. 102) spricht auch von der unverzichtbaren Interpunktion der Handlung, die diese in Abschnitte zerlegt, deren Endkonfigurationen als relevant für das Auffinden eines Musters gelten. Eine solche Interpunktion sei „nicht notwendigerweise naheliegend oder durch die Handlung an sich vorstrukturiert,

[353] Der Bezeichner verweist zugleich darauf, dass „[d]er Gebrauch von Anschauungsbildern […] geistige Arbeit“ ist – „Wahrnehmungen sprechen nicht einfach und einsinnig aus sich heraus“ (Winter 1996, S. 23).

und im Lernprozeß wird es einer gezielten Steuerung der Aufmerksamkeitsfokussierung bedürfen“ (ebd., S. 102). Effektive Handlungen ermöglichen diese Aufmerksamkeitsfokussierung nur unter erschwerten Bedingungen – und zwar aus denselben Gründen, die HUHMANN (2013) bezogen auf Animationen anführt:

> Während des Ablaufs einer Animation können einzelne Animationsabschnitte nur zeitlich begrenzt betrachtet werden. Dadurch müssen Lernende ihren Aufmerksamkeitsfokus zur richtigen Zeit am richtigen Ort haben, relevante Informationen aus unterschiedlichen Abschnitten identifizieren, im Arbeitsgedächtnis aktiv halten (bzw. aus dem Langzeitgedächtnis aktivieren) und diese miteinander in Beziehung setzen. Die Flüchtigkeit animierter Darstellung erfordert dadurch zusätzliche kognitive Anforderungen, schränkt die Möglichkeiten der Analyse ein und führt oftmals zu einem erhöhten Maß an darauf verwendeter Lernzeit.
>
> Huhmann (2013, S. 58)

An dieser Stelle setzen entlehnte Zeichen an, indem sie „die simultane[…] Repräsentation aller relevanten Handlungsstadien und Handlungselemente“ unterstützen (Dörfler 1988, S. 107): „[D]ie Benutzung von Prototypen“, die „die jeweiligen Handlungsbedingungen erfüllen, […] sonst aber soweit möglich keine weiteren Eigenschaften aufweisen“ (ebd., S. 107), sei „sicher denkökonomisch notwendig, weil sonst eine Komplexität resultiert […], die gedanklich nicht mehr bewältigbar ist“ (ebd., S. 77). Entlehnte Zeichen kompensieren somit nicht nur die Vergänglichkeit effektiver Handlungen (und zeigen mehrere Handlungsabläufe gleichzeitig; s. o.), sondern auch deren Flüchtigkeit.[354] Ein (Extrem-)Beispiel einer flüchtigen Handlung ist der – natürlich dennoch empfehlenswerte (vgl. Schupp 1985) – Einsatz des Galtonbrettes, bei dem die Wege der Kugeln kaum nachverfolgt werden können, selbst wenn sie einzeln das Brett durchlaufen. Bewusst wahrgenommen wird in erster Linie das Endergebnis: eine aus Sicht der Lernenden überraschend ungleiche Verteilung. Sie benötigen daher ergänzend Abbilder der einzelnen Wege als Denkunterlage – vgl. Unterabschnitt 6.2.2.2 bzw. SELTER (1985).

Kodifizierte Zeichen – bei SELTER (1985) waren es Buchstabenketten – können natürlich ebenfalls Vergänglichkeit und Flüchtigkeit einer Handlung kompensieren, insofern haben beide Zeichenarten diese Stärke gemein. Ersetzbar durch kodifizierte Zeichen sind entlehnte dennoch nicht:

> Der psychologische Grund für die didaktische Fruchtbarkeit zeichnerischer Hilfen im Lernprozeß besteht darin, daß alles Denken – besonders beim Kinde, aber auch beim Erwachsenen – sich auf bildhafte Vorstellungen oder Schemata gründet. Auf dem methodischen Wege von der konkreten Ausführung einer

[354] Da hier die Bezeichner »Vergänglichkeit« und »Flüchtigkeit« nebeneinander auftreten, seien ihre unterschiedlichen Bedeutungen expliziert: Die Vergänglichkeit einer Handlung spielt darauf an, dass sie als Ganzes zeitlich begrenzt stattfindet und danach nicht mehr wahrnehmbar ist. Flüchtigkeit einer Handlung bezieht sich auf einzelne Handlungsstadien.

Operation bis zu ihrer „Verinnerlichung“ (Piaget, Aebli) sind darum die zeichnerischen Darstellungen eine wichtige Durchgangsstufe.

Oehl (1965, S. 61)

Das Alleinstellungsmerkmal entlehnter Zeichen in dieser Hinsicht ist somit, dass sie für alle Lernenden eine *vertraute*[355] Denkunterlage darstellen – und damit eine eigene Zwischenstufe, die beim Lernen aus Handlungen „Tempo und Rhythmus des Fortschreitens“ regulieren kann (Oehl 1962, S. 99). Dies sei abschließend mit einem entsprechenden Zitat aus OEHL (1962) ausgeführt.

6.2.2.3 Regulation des Rhythmus beim Wechsel der Zeichenarten

> Es kommt also nicht nur darauf an, daß wir einen wohldurchdachten Stufengang planen, sondern wir müssen auf entscheidenden Zwischenstufen auch genügend lange verweilen. Wir müssen für diese Zwischenstufen Arbeits- und Übungsformen finden, durch die das Kind in eigener Tätigkeit sich mit dem Neuen auseinandersetzen kann. Wenn eben möglich, sollten sie zeichnerischer Natur sein, damit die neu zu gewinnenden Beziehungen in einem anschaulichen Bild verdeutlicht werden. […] Wir dürfen uns als Lehrer nicht selbst betrügen, indem wir zwar bei der Einführung einen sauberen Stufengang aufbauen, dem Schüler aber nicht die Zeit lassen, sich auf den einzelnen Stufen mit dem „Neuen“ in Muße zu beschäftigen. Dadurch bringen wir uns selbst um die besten Früchte unserer Arbeit.

Oehl (1962, S. 20)[356]

[355] Siehe auch FÜHRER (1999, S. 30 f.): „Der Rückgriff auf (relativ) ursprünglichere, konkretere oder „niedrigere“ Abstraktionsebenen behält auch beim Erwachsenen einen höheren Grad von intuitiver Vertrautheit, Geborgenheit, Sicherheit und Ergiebigkeit.“

[356] Die erwähnten Zwischenstufen traten bereits in Abschnitt 6.1.2 bei AEBLI auf.

7 Schlussbetrachtungen

7.1 Rückblick auf die vorliegende Arbeit

In Kapitel 0 wurden zwei zentrale Forschungsfragen aufgeworfen, die zur Entwicklung eines (in der (Weiter-)Entwicklung von Mathematikunterricht) viablen EIS-Prinzips und zur Demonstration eben jener Viabilität aufforderten. Als Ausgangspunkt dieses Vorhabens wurden in Kapitel 1 BRUNERs Ausführungen zur Theorie der Repräsentationsmodi analysiert, wobei deren Mehrdeutigkeit dargestellt werden konnte. Dazu wurden aus den Vorarbeiten zwei unterschiedliche EIS-Prinzipien extrahiert: eine eindimensionale BRUNER-Rezeption (später als Ad-Hoc-Verständnis bezeichnet) sowie eine differenziertere BRUNER-Interpretation.

Bei einer Sichtung der mathematikdidaktischen Literatur ließen sich vor diesem Hintergrund in Kapitel 2 beide Deutungen nebst mehreren, für das weitere Vorhaben relevanten Modifikationen wiederfinden – wenn auch ungleich verteilt: Der mathematikdidaktische Alltag stellte sich als überwiegend geprägt von eindimensionalen BRUNER-Rezeptionen heraus, sodass darüberhinausgehende Impulse bisher als weitestgehend wirkungslos erachtet wurden.

Um einen Beitrag zur Anpassung des weitverbreiteten Begriffsbildes zu leisten, musste daher kein gänzlich neues EIS-Prinzip ersonnen werden. Vielmehr galt es in Kapitel 3, das Ad-Hoc-Verständnis zu hinterfragen und daraus motiviert bestehende Vorarbeiten auch aus der Semiotik schrittweise zu einer vertieften Auffassung zusammenzuführen und weiterzuentwickeln. Dieser Prozess mündete schließlich in der EIS-Palette, die die hier vorgesehenen Bedeutungen zu den Bezeichnern »enaktiv«, »ikonisch« und »symbolisch« expliziert: Es handelt sich um intersubjektiv variable Zuschreibungen, die auf der verwendeten Zeichenart *und* auf dem Umgang mit den Zeichen beruhen.

Mit den nachfolgenden Kapiteln 4 und 5 wurde in zwei Konkretisierungsschritten das Potential zur Wirksamkeit der vertieften Theorie in der Praxis gefördert. Zunächst wurden dem übergeordneten theoretischen Rahmen in Kapitel 4 Leitsätze entnommen, die dann in Kapitel 5 auf zehn Unterrichtsgegenstände angewendet wurden. Abschließend wurden in Kapitel 6 zwei Vorläufertheorien sowie einige Vorläuferideen näher beleuchtet und mit dem vertieften EIS-Prinzip verglichen, das auf diese Weise weiter (historisch gestützt) legitimiert wurde.

Eine derart intensive Auseinandersetzung mit einem einzigen Prinzip ist in der aktuellen Mathematikdidaktik eher unüblich, aber alles andere als unangemessen in Anbetracht der gewichtigen Rolle, die mathematikdidaktische Prinzipien für die Unterrichtspraxis spielen (können) – WINTER (1984, S. 143) erachtet es beispielsweise als „zwingend notwendig, die Thematik ‚didaktische und methodische Prinzipien‘ als ein zentrales Gebiet in die fachdidaktischen Studien aller Lehrerstudenten an der Hochschule aufzunehmen.“ Auf diese Weise erweitert sich der potentielle Einflussbereich didaktischer Prinzipien sogar bis zum Selbstverständnis als Lehrperson.[357] Wenn mathematikdidaktische Prinzipien dermaßen bedeutsam sein sollen, muss die Auseinandersetzung mit ihnen dem gerecht werden, also verantwortungsbewusst, reflektiert und sorgfältig stattfinden. Insbesondere gilt es, gängige Deutungen fortlaufend kritisch auf Viabilität zu prüfen, also an den Zwecken zu messen, denen ein didaktisches Prinzip dienen soll (vgl. Ausubel, Novak & Hanesian 1980, S. 27). Daraus können Modifikationen entspringen, die selbst wieder zu diskutieren sind, usw. – stets im Bewusstsein von WALSCHs (1992, S. 6) Bestreben, sich „vor unreflektiertem Traditionalismus ebenso [zu] hüten wie vor unbedachtem Radikalismus".

Für das vertiefte EIS-Prinzip lässt sich rückblickend die Passung zu den Zwecken didaktischer Prinzipien darlegen, die in vorherigen Kapiteln ausführlicher begründet wurde. Zu diesen Zwecken zählen nach WITTMANN (1975, S. 231 ff.)

- das prägnante Charakterisieren einer praktischen Unterrichtslehre,
- das ökonomische Erklären und Beschreiben didaktischer Maßnahmen,
- das Darbieten eines handlichen Leitfadens für die Konstruktion von Unterrichtsvorlagen,
- das didaktische Anreichern von Unterrichtsvorlagen und
- das Erleichtern des Findungsprozesses von praxisrelevanten Hypothesen für die empirische Forschung.

[357] „Diese Forderung […] berührt natürlich das Selbstverständnis des Lehrerberufs überhaupt. Auch heute noch (besser: im Gegensatz zur Situation in den 20er Jahren) dürften sich z.B. die meisten Gymnasiallehrer in erster Linie als Fachleute für Mathematik und weniger für Mathematik*unterricht* verstehen. Jedenfalls beruht ihr Selbstwertgefühl zuvörderst auf dem absolvierten Fachstudium" (Winter 1984, S. 143; Hervorhebung im Original). Siehe dazu auch KERSCHENSTEINER (1921, S. 96), demzufolge „alle Lehrerbildung […] in die Irre [geht], welche Wissenschaftler und Künstler erziehen will", und FÜHRER (1997, S. 65; Hervorhebung im Original): „Ein bedenkliches Gefahrensymptom ist – besonders in Gymnasialkreisen – die Unsitte, sich gegenseitig unwidersprochen als ‚Historiker', ‚Germanistin' oder ‚Mathematikerin' einzustufen und den unterstellten Verrat an der eigenen Profession in schmeichelhafte Anerkennung umzudeuten. Anders gesagt: Wäre Lehrer X. in erster Linie Mathematiker und nicht Lehrer, dann sollte er rasch die Arbeitsstelle wechseln, solange er noch jung genug ist. Mathematik ist keine Unterrichtslehre, sondern ein Wissenschaftszweig. Kleine, meist sehr, sehr alte Ausschnitte werden in der Schule zu Bildungsgegenständen, wenn sie in funktionelle, soziale und erzieherische Kontexte gebunden werden können. In diesem Bemühen liege die Ehre des Mathematiklehrers, nicht in seinem Fachstudium, sonst würde er Mittel und Zweck verwechseln!"
Das Selbstverständnis kann (neben der eigenen, täglichen Lehrtätigkeit) auch mathematikdidaktische Diskussionen beeinflussen: Dass zu Zeiten der Neuen Mathematik wenig Widerstand aus der Praxis laut wurde, führt FREUDENTHAL (1963, S. 17) u. a. zurück auf „die Angst vor dem kritischen Auge des Hochschullehrers und die Angst, nicht für voll genommen zu werden, wenn man zugibt, daß man, sagen wir, den Limesbegriff unstreng behandelt, oder daß geometrische Axiomatik in Obertertia unmöglich ist. Es wundert mich jedenfalls, wie wenig von Seite der Schule protestiert wird sogar gegen Pläne, die ganz offensichtlich illusorisch sind. Hält man es für überflüssig oder hat man Angst, seine Dummheit zu offenbaren, wenn man Zweifel äußert an der Einfachheit dessen, was der Vortragende als ganz einfach bezeichnet hat?" Als Expertin oder Experte für Mathematik*unterricht* hätte jenen für Mathematik hier durchaus widersprochen werden können, ohne die eigene Kompetenz einer möglichen Abwertung auszusetzen – auch hier wirkt die Unterscheidung zwischen *Mathe* und *Mathematik* bereichernd (Lambert 2020).

Dass das vertiefte EIS-Prinzip mit seinen Grundannahmen Aspekte einer gewissen praktischen Unterrichtslehre betont, liegt auf der Hand. Im Gegensatz zum Ad-Hoc-Verständnis zählen zu diesen Aspekten nicht nur der Einsatz aller Zeichenarten (objekthaft, entlehnt und kodifiziert), sondern auch die Verstehensorientierung: Der Übergang zur symbolischen Ebene erfordert einen verständigen Umgang mit den Zeichen.

Expliziter bestätigt wurde jedoch das Bedienen der übrigen vier Zwecke: Sowohl eigene (vgl. Kapitel 5) als auch fremde, unabhängig von EIS-Prinzipien erdachte Maßnahmen konnten in der Terminologie der EIS-Palette bzw. der Leitsätze ökonomisch beschrieben und erklärt werden – es sei etwa an SELTERs (1985) Unterrichtsversuch zum Galtonbrett oder an BREIDENBACHs (1956) Kommentar zur richtigen und falschen Formel für die Berechnung des Rechteckflächeninhalts erinnert. Die in Kapitel 4 im Zuge des didaktischen Kultivierens entworfenen Leitsätze tragen zur Erstellung eines handlichen Leitfadens für die Konstruktion von Unterrichtsvorlagen bei, von dessen Tauglichkeit insbesondere durch die Anwendung auf einzelne Unterrichtsgegenstände in Kapitel 5 überzeugt wurde – man denke aber auch an aus den Leitsätzen generierten Empfehlungen zu HEYWANGs (1923) gescheitertem Unterrichtsversuch oder zu HOLEs (1973) Einführung der Klammerschreibweise. All diese Anwendungen sprechen zugleich die beiden letztgenannten Zwecke unmittelbar an.

7.2 Perspektiven für zukünftige Forschungen

Forschungsperspektiven zeigen sich hier oftmals an den Grenzen, die die vorliegende Arbeit nicht oder nur zaghaft überschreitet. Es handelt sich um Grenzen

(1) bezüglich der Forschungsgebiete der Mathematikdidaktik,
(2) in der Anwendung und im Ausbau der Theorie,
(3) des Vernetzens und Abgleichens mit benachbarten Theorien und
(4) beim Einbeziehen von Aspekten des Lernens aus Handlungen.

Punkt (1) macht auf die offenkundige Forschungsperspektive aufmerksam, aus den Anwendungen in Kapitel 5 falsifizierbare Hypothesen zu formulieren und diese statistisch abgesichert zu überprüfen, ohne sie dabei ökonomisch optimieren zu müssen[358] – dieses Forschungsgebiet wurde von der vorliegenden Arbeit nicht bedient. Dabei profitieren jedoch nicht alle Praxisempfehlungen gleichermaßen von einer solchen Überprüfung: Beispielsweise wäre es zweifelsohne interessant und bereichernd, den Einfluss der vorgeschlagenen Anpassung des Boxenmodells (vgl. Unterabschnitt 5.1.2.2) auf die Auftretenswahrscheinlichkeit typischer Fehler zu messen. Sollen jedoch wie beim Runden alle Zeichenarten zugänglich

[358] FREUDENTHAL (1978, S. 177) warnt vor der „Versuchung, die Erfahrungen aus den Lernprozessen […] zu einer ‚Vervollkommnung' des Materials zu mißbrauchen", bei der Lernsituationen zunehmend zu einem Lernfließband vorkonstruiert werden, damit „mehr Schüler schneller höhere Niveaus der Behandlung erreichen".

gemacht werden, ist fraglich, ob auf ähnliche Weise einschneidende Erkenntnisse gewonnen werden, denn das Anbieten aller Zeichenarten entspringt u. a. einem gewissen „Menschbild" – und in solchen Fällen sei „niemals relevant, in welcher Richtung der Beweis auch geglückt wäre" (Freudenthal 1978, S. 46)[359].

Unter Punkt (2) fällt der sichtbare Fokus der Anwendungen auf Unterrichtsgegenstände der Sekundarstufe I. Dieser impliziert jedoch keineswegs, dass dem EIS-Prinzip unweigerlich diesbezügliche Grenzen gesetzt wären, wie sie GRIESEL (1976)[360] dem (ebenfalls Gemeinsamkeiten mit dem EIS-Prinzip aufweisenden) Prinzip der Herauslösung eines Begriffs aus Umweltbezügen attestiert. Es sind weitere Anwendungsbestrebungen notwendig, bevor ein Urteil gefällt werden kann, denn im Rahmen der ersten Anwendungsversuche ließe sich das vermehrte Ansprechen von Inhalten der Sekundarstufe I auch dadurch erklären, dass „[j]eder sieghafte Gedanke […] sich zunächst die Gebiete [erobert], die am leichtesten zu unterwerfen sind" (Heywang 1923, S. 1).[361] Weitere Anwendungen des vertieften EIS-Prinzips (auch in der Primarstufe und Sekundarstufe I) bilden ohnehin eine lohnenswerte Forschungsperspektive, denn sie erläutern die Theorie, werben für sie, können die Unterrichtspraxis bereichern und immer wieder die Diskussion über das vertiefte EIS-Prinzip selbst anstoßen. Letztere würde auch den Ausbau der Theorie vorantreiben – beispielsweise stellen die Maßnahmen zur Gestaltung

[359] „Das Menschbild ist das Entscheidende, und es bleibt entscheidend, auch wenn es eines schönen Tages eine Unterrichtswissenschaft geben sollte, die alle Probleme haarklein löst. Unterricht und Erziehung ist Technik; wie ich sie ausübe und welcher Technologie ich mich bediene, hängt von meinem Menschenbild ab" (Freudenthal 1978, S. 46). „Ich habe mich zum Anwalt einer anderen Methode gemacht, weil ich an sie glaube, weil ich an das Recht des lernenden Kindes glaube, als lernender Mensch behandelt zu werden. Es ist meine Auffassung der Erziehung; sie zu verteidigen, nenne ich Philosophie, aber man fordere von mir nicht wissenschaftliche Beweise" (Freudenthal 1978, S. 48). Zum Recht des lernenden Kindes zählt FREUDENTHAL (1978, S. 48), passend zum Bestreben des vertieften EIS-Prinzips, „dieselben Freiheiten beim Lernen, die der Erwachsene für sich beansprucht, dieselbe Freiheit des Versuchens und Experimentierens, dieselbe Freiheit des Analysierens, ehe man synthetisiert, dasselbe Recht auf integriertes Material, dasselbe Recht, Fehler zu machen, im Unreinen zu denken und sich den verbalen Ausdruck zu erobern."

[360] „Der Anwendungsbereich des Prinzips, das wir hier diskutieren, ist nicht allumfassend. Sobald es sich um Begriffe höheren Niveaus handelt, dürfte seine Anwendung nicht mehr zu einem optimalen Verlauf der Lernprozesse bei den Schülern führen. Dann dürften innermathematische Zugänge i. a. günstiger sein. Das gilt für große Teile der Algebra, der Analysis, der strukturorientierten Mathematik, aber auch der Geometrie. Die Anwendung des Prinzips betrifft also vor allem die Bereiche der Grundschulmathematik und Teile der Mathematik aus dem Bereich der Sekundarstufe I" (Griesel 1976, S. 69).

[361] Die Anwendung der Theorie beschränkt sich außerdem auf die Unterrichtsphase der Neueinführung von Sachverhalten. Dies jedoch erscheint unvermeidbar in Anbetracht der Zielsetzung des EIS-Prinzips – das Schaffen günstiger semiotischer Bedingungen beim Erschließen neuer Symbolgehalte – und eröffnet daher keine neuen Forschungsmöglichkeiten. Das vertiefte EIS-Prinzip ist insofern durchaus einseitig, wie FÜHRER (1997, S. 55) über die gesamte Didaktik WITTMANNs (1974) urteilt, der passenderweise ebenfalls ein EIS-Prinzip zugehörig ist. Diese Einschätzung stellt (für ein einzelnes Prinzip) jedoch keinen Makel dar und setzt die Bedeutung des EIS-Prinzips nicht herab: „Gerade das Überwinden der anfänglichen Schwierigkeiten bedeutet für den Zögling fast immer einen für seine künftige Beschäftigung mit ähnlichen Dingen wesentlichen Sieg. Viele lernen deswegen nie Mathematik, weil sie diese Anfangssiege nie errungen haben und dadurch der Zuversicht für später beraubt werden" (Brücher 1911, S. 37).

horizontaler Übergänge oder zum Anregen vertikaler Übergänge nur erste, gewiss unvollständig gebliebene Entwürfe dar.

Die unter (3) genannten Grenzen sollen hier nur an einem Beispiel angedeutet werden, obwohl sicherlich zahlreiche Theorien existieren, mit denen das vertiefte EIS-Prinzip gewinnbringend vernetzt werden könnte. Als eine solche zu nennen wäre etwa die Tätigkeitstheorie, die – stark geprägt u. a. von VYGOTSKIJ – offenkundig deutliche Parallelen aufweist:

> Subjekte können nur ihre Wahrnehmungen, Weltvariationen, ihr Bild von der Welt – ihre Wirklichkeiten vergleichen. Dabei handelt es sich immer um Ideelles, um „abgebildete", „widergespiegelte" Realität. Was aber ist der Ursprung dieser im Gehirn konstruierten Wirklichkeit? Der Tätigkeitsansatz geht davon aus, dass es die aktive, intentionale Einwirkung, die Veränderung der Welt und nicht die Beobachtung von „Weltwirkungen" ist, welche (objektive) Erkenntnis ermöglicht. Indem intentional der Gegenstand der Erkenntnis (Erkenntnisobjekt) durch das erkennende Subjekt verändert wird, gleichzeitig vom Subjekt diese Veränderungen wahrgenommen, reflektiert und erlebt werden, besteht eine Brücke zwischen Realität und konstruierter Wirklichkeit. Veränderte Welt und konstruierte Wirklichkeit haben denselben Ursprung – die Tätigkeit.
>
> Giest (2016, S. 55)

Ebenso vielversprechend wirken sogenannte Interiorisierungstypen[362] oder der differenzierte Blick auf Lernhandlungen[363], der Potentiale und Rückschlüsse eröffnet, die an das vertiefte EIS-Prinzip erinnern – so sollen etwa die Lernhandlungen „den jeweiligen Lerngegenständen, -bedingungen und -voraussetzungen adäquat" sein (ebd., S. 192).

Ein solches Vernetzen mit weiteren Theorien kann auch Aspekte des Lernens aus Handlungen hervortreten lassen, die nicht oder nur implizit in das vertiefte EIS-Prinzip eingeflossen sind – hiermit sind die Grenzen unter Punkt (4) angesprochen. Im Fall der Tätigkeitstheorie werden etwa *vorgestellte Handlungen* sehr viel expliziter thematisiert und eingefordert (vgl. die etappenweise Ausbildung geistiger Handlungen nach GALPERIN (1967)), ähnlich wie in einigen operativen Prinzipien. Sie wirkten sich zwar auf die vorliegende Arbeit aus – beispielsweise in den möglichen Maßnahmen zur Anregung vertikaler Übergänge (Abschnitt 4.2.4) –, blieben jedoch auf der EIS-Palette implizit. Sicherlich spielen sie beim Lernen aus Handlungen dennoch eine nicht zu vernachlässigende Rolle:

---

362 „Bei unseren Beobachtungen konnten wir drei Interiorisierungstypen unterscheiden. […] Schließlich der dritte und wichtigste Interiorisierungstyp: Das Kind eignet sich die Struktur des Prozesses an, also die Regeln, nach denen man die äußeren Zeichen anwenden muß" (Vygotskij 1992, S. 258 f.).

363 GIEST & LOMPSCHER (2006, S. 189 f.) zählen unterschiedliche Klassifikationsaspekte auf, unter denen die *Ebene der Handlungsausführungen* – hier werden unmittelbare Einflüsse von BRUNERs Repräsentationsmodi sichtbar – nur den Anfang bildet. Weiterhin seien Lernhandlungen nach der *Art der Eigenaktivität*, dem *Grad der Beherrschung* und der *Selbstständigkeit der Handlungsausführung* zu charakterisieren.

Wenn beispielsweise in späteren Unterrichtsphasen das Lösen einer Gleichung einst bewältigte Probleme bereitet, lautet ein naheliegender Impuls: *Stell dir die Gleichung in unserer Situation von damals vor. Was würdest du tun?* Hierbei sollen kodifizierte Zeichen nachträglich mit den objekthaften Zeichen verbunden werden, um ein Übertragen der Symbolgehalte zu bewirken. Wegen ihrer Relevanz für das Lernen aus Handlungen wäre daher auszuloten, ob und wie (explizit) vorgestellte Handlungen in das vertiefte EIS-Prinzip einfließen sollen.

All diese Forschungsperspektiven stellen Ansatzpunkte dar, deren Untersuchung neue Adaptionen nach sich ziehen kann und soll – immerhin ist auch das vertiefte EIS-Prinzip nur eines unter vielen, das es immer wieder zu hinterfragen gilt.

8 Anhang

8.1 ECOs (1977) Übersicht zu Zeichenklassifikationen

Die in Unterkapitel 3.3. ausgesparten Klassifikationen werden hier wiedergegeben und gegebenenfalls mit knappen Kommentaren oder Erklärungen versehen.

(1) Einteilung nach der Quelle

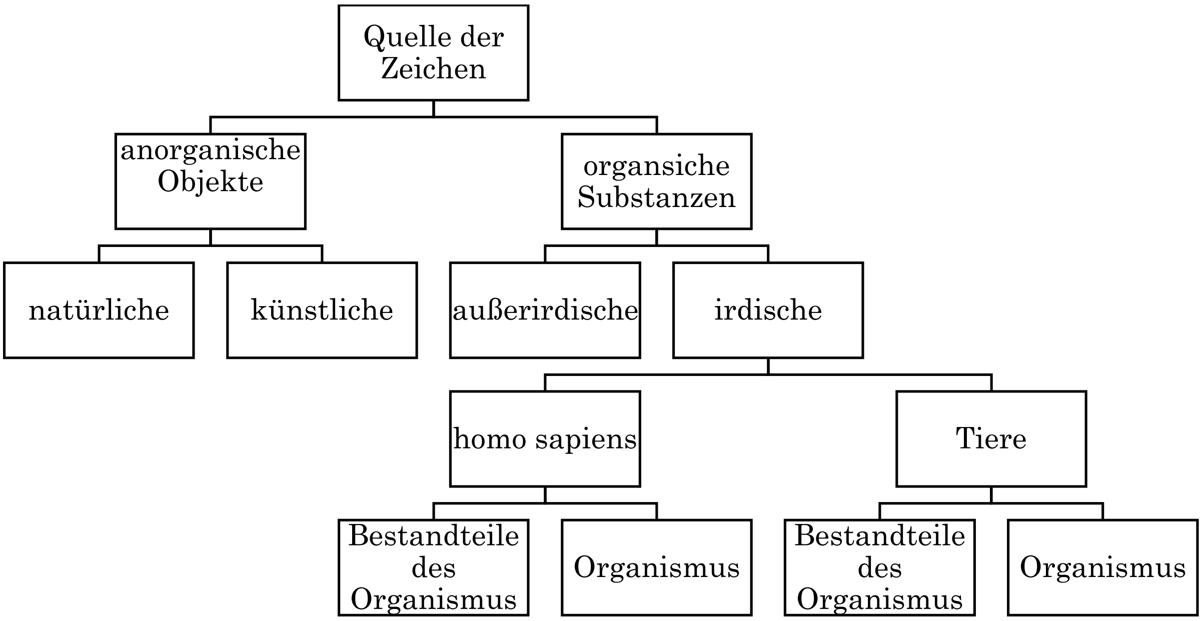


Abb. 129: Einteilung nach der Quelle bei ECO (1977, S. 37)

(2) Einteilung nach Intention und Bewusstseinsgrad des Senders

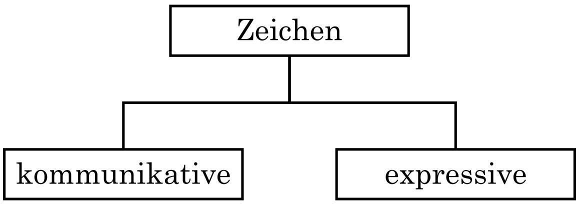


Abb. 130: Einteilung nach Intention und Bewusstseinsgrad des Senders bei ECO (1977, S. 45)

Kommunikative Zeichen werden absichtlich und bewusst hervorgebracht, z. B. ein Schimpfwort, das Wut oder Zorn mitteilt. Selbiges kann ein expressives Zeichen leisten, etwa ein spontan entstehender Gesichtsausdruck oder eine unabsichtlich emporsteigende Zornesröte. Zusätzlich unterscheidet ECO (1977), ob ein Empfänger ein Zeichen bewusst oder unbewusst empfängt und ob dieser dem Sender Absichtlichkeit oder Unabsichtlichkeit unterstellt.

(3) Einteilung nach dem physischen Kanal und dem Empfangsorgan beim Menschen

Beim physikalischen Kanal sind die Unterkategorien *optisch*, *taktil*, *akustisch*, *elektrisch*, *thermisch* und *usw.* sowie weitere Unterkategorien dieser aus

Lesbarkeitsgründen ausgespart. Melanie Horn (2014) fasst mehrere sinnvolle Modifikationen zu dieser Einteilung zusammen, beispielsweise die Ergänzung von *gasförmig* als drittem Aggregatzustand neben *flüssig* und *fest*, der in der Originalübersicht von Thomas A. Sebeok (1979) genannt wird.

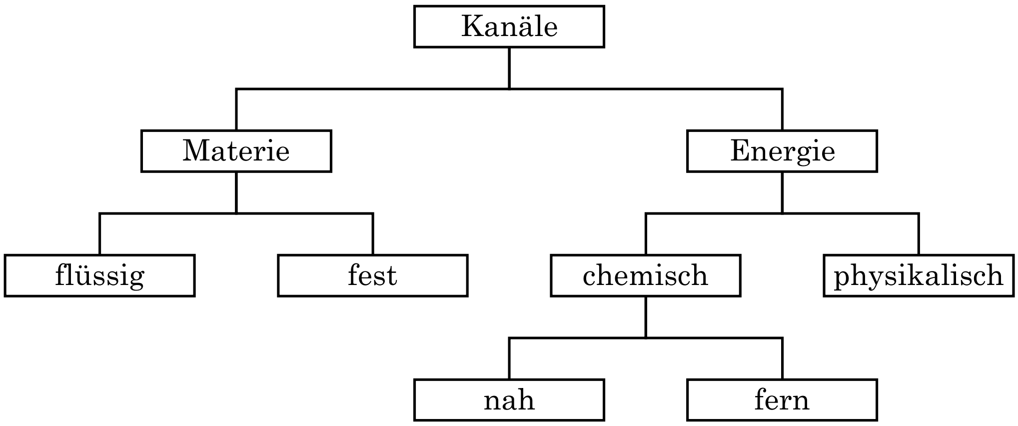


Abb. 131: Einteilung nach dem physischen Kanal und dem Empfangsorgan bei Eco (1977, S. 50)

(4) Einteilung nach der Beziehung zum Signifikat

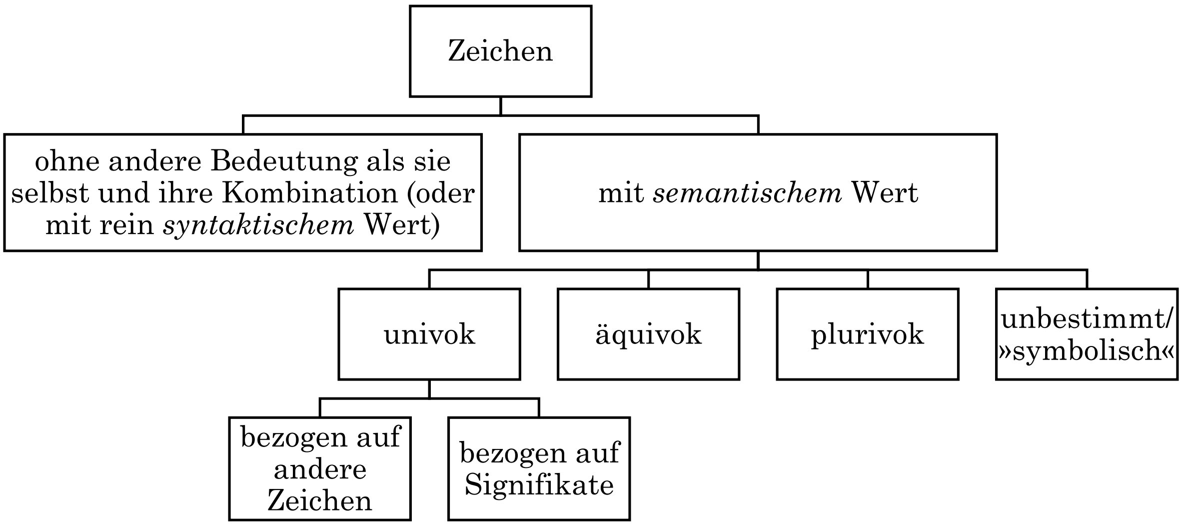


Abb. 132: Einteilung nach der Beziehung zum Signifikat bei Eco (1977, S. 57)

Die Unterscheidung zwischen *univok*, *äquivok*, *plurivok* und *unbestimmt* zielt auf die potentielle Mehrdeutigkeit von Zeichen ab. Univok seien solche Zeichen, „die nur eine einzige Bedeutung haben sollten und bei denen jedes Mißverständnis ausgeschlossen ist“ (Eco 1977, S. 53). Äquivoke und plurivoke Zeichen besitzen mehrere Bedeutungen, allerdings werden diese bei Ersteren gleichermaßen als grundlegend registriert, während sie bei Letzteren durch Konnotation oder andere rhetorische Mittel entstehen, z. B. durch Metaphern. Unbestimmte Zeichen haben „einen unbestimmten und auf Anspielung beruhenden Zusammenhang mit einer nicht festgelegten Reihe von Signifikaten“ (ebd., S. 53).

(5) Einteilung nach der Reproduzierbarkeit des Signifikanten

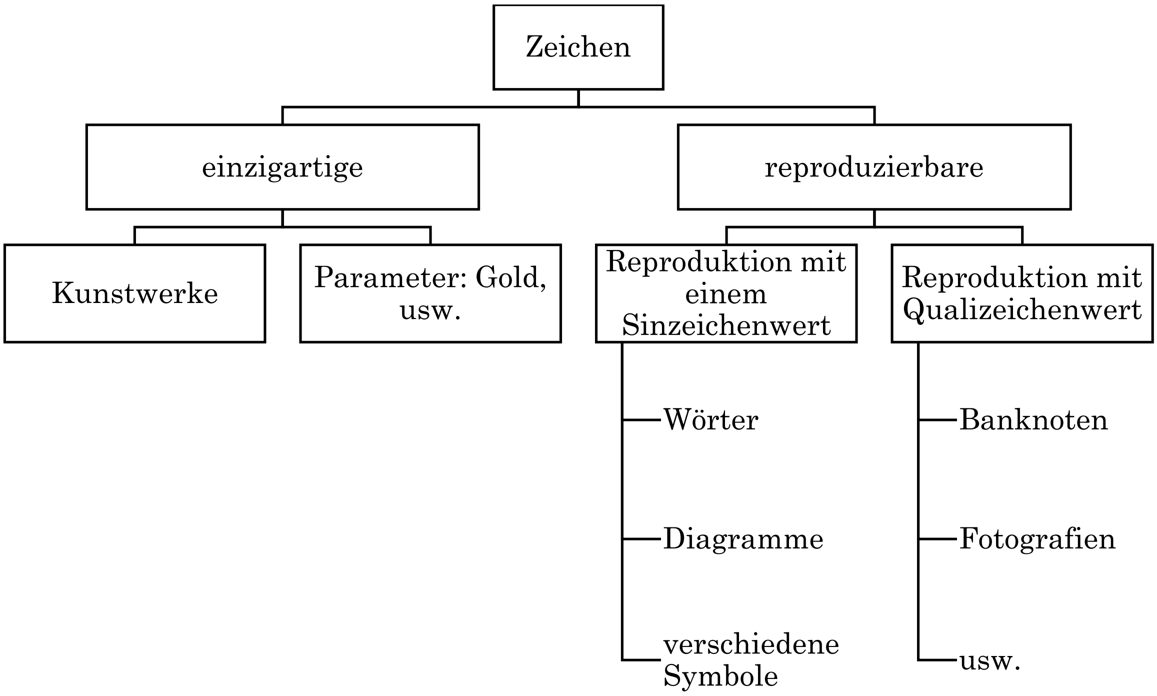


Abb. 133: Einteilung nach der Reproduzierbarkeit des Signifikanten bei E*CO* *(1977, S. 60)*

(6) Einteilung der Zeichen nach ihrem angeblichen Zusammenhang mit dem Referenten

Hierunter versteht ECO (1977) die Unterscheidung zwischen Indizes, Ikonen und Symbolen nach PEIRCE, auf die Kapitel 3.5.1 ausführlich eingeht. Sie steht hier durchaus unpassend neben den übrigen Klassifikationen, denn zur objektiven Einteilung von Zeichen ist sie „mit schwerwiegenden Mängeln behaftet“ und „verliert damit den ursprünglichen Sinn, den sie bei PEIRCE hatte“ (Eco 1977, S. 61). „Der Grund dafür ist einfach: Eine derartige Trichotomie postuliert das Vorhandensein eines Referenten als unterschiedenen Parameters“ (Eco 1987, S. 238).

Dieser Umstand deutet sich bereits in ECOs Überschrift der Einteilung an: Der Zusammenhang mit dem Referenten ist ein *angeblicher*, über ihn lässt sich nur mutmaßen, und er ist nicht bereits mit der Wahl des Zeichens eindeutig festgelegt, sondern intersubjektiv variabel. Eine objektive Einteilung von Zeichen wird dadurch unmöglich: „[J]edes Zeichen, je nach den Umständen, unter denen es auftritt, und nach dem Designationszweck, zu dem man es verwendet, [kann] sowohl als Index wie als Ikon wie als Symbol“ aufgefasst werden (Eco 1977, S. 62). ECO (1987, S. 238) spricht daher von „Allzweckkategorien“, die „wegen ihrer Unbestimmbarkeit für praktische Bedürfnisse gut funktionieren, aber im gegenwärtigen Zusammenhang nicht befriedigend formuliert werden können.“ In Kapitel 3.5.1 erweist sich genau dieser Umstand nicht als Mangel, sondern als notwendig für die Untersuchung und Beschreibung von Zeichen innerhalb von Lernprozessen.

(7) Einteilung nach dem beim Empfänger ausgelösten Verhalten

Weitere Unterscheidungen von Identifikatoren und Formatoren sind ausgespart.

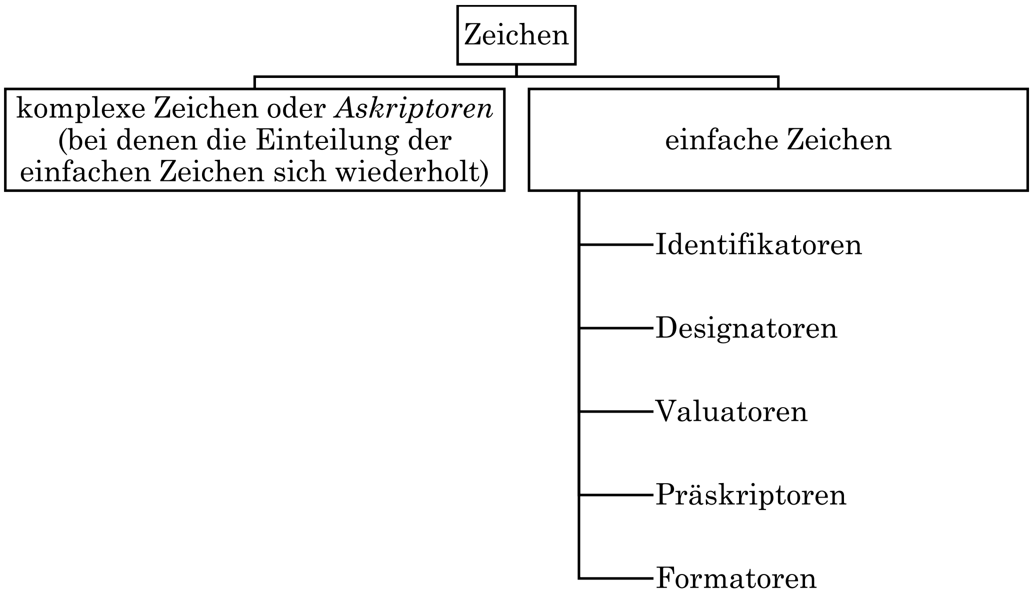


Abb. 134: Einteilung nach dem beim Empfänger ausgelösten Verhalten bei Eco (1977, S. 69)

Identifikatoren seien Zeichen, die einen bestimmten raum-zeitlichen Bereich anzeigen, wie etwa *dort drüben*. Designatoren bezeichnen Merkmale eines raum-zeitlichen Bereichs, beispielsweise *schwarz* oder *höher*. Valuatoren kennzeichnen etwas als vorzuziehen hinsichtlich eines zu bewirkenden Verhaltens; exemplarisch genannt werden *ehrenhaft* und *feige*. Präskriptoren regen ein Verhalten nicht nur an, sondern befehlen es: *komm her*. Formatoren schließlich seien Zeichen, die scheinbar kein Signifikat haben, wie das Wort *oder*. Für weitere Informationen diesbezüglich sei auch auf Charles William Morris (1973) verwiesen.

8.2 Bastelvorlage des Dreiecks zu Abb. 29

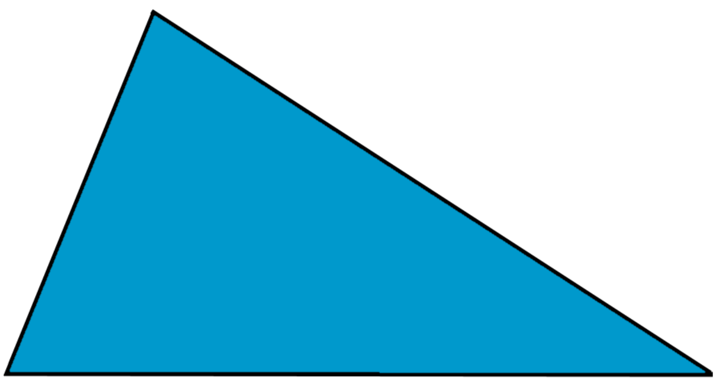


Abb. 135: Bastelvorlage zum Ausschneiden und Einkleben auf Seite 134

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1961). *Grundformen des Lehrens: Ein Beitrag zur psychologischen Grundlegung der Unterrichtsmethode*. Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1963). *Psychologische Didaktik*. Stuttgart: Klett.

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band 1: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band 2: Denkprozesse*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1985). Das operative Prinzip. In: *mathematik lehren, 11*, S. 4-6.

Affolter, W., Beerli, G., Hurschler, H., Jaggi, B., Jundt, W., Krummenacher, R., Nydegger, A., Wälti, B. & Wieland, G. (2003). *mathbu.ch 7*. Bern: schulverlag.

Allkemper, A. & Eke, N. O. (2021). *Literaturwissenschaft*. Paderborn: Brill.

Amborn, H. (1992). Strukturalismus. Theorie und Methode. In: H. Fischer (Hrsg.): *Ethnologie: Einführung und Überblick* (S. 337-365). Berlin: Dietrich Reimer.

Ausubel, D. P., Novak, J. & Hanesian, H. (1980). *Psychologie des Unterrichts: Band 1*. Weinheim: Beltz.

Baeumker, C. (1913). *Anschauung und Denken: Eine psychologisch-pädagogische Studie*. Paderborn: Schöningh.

Barthes, R. (1988). Semantik des Objekts. In: R. Barthes: *Das semiologische Abenteuer* (S. 187-198). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Barzel, B. & Hußmann, S. (2007). Schlüssel zu Variable, Term und Formel. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan & A. Fischer (Hrsg.): *Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 5-16). Hildesheim: Franzbecker.

Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. In: *mathematik lehren, 169*, S. 2-7.

Basedow, J. B. (1763). *Ueberzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewendeten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkenden und zur Beförderung des guten Unterrichts in den Schulen*. Altona: David Iversen.

Bauer, L. (1993). Das operative Prinzip als umfassendes, allgemeingültiges Prinzip für das Mathematiklernen. Didaktisch-methodische Überlegungen zum Mathematikunterricht in der Grundschule. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25* (2), S. 76-83.

Bauersfeld, H. (1972). Einige Bemerkungen zum Frankfurter Projekt und zum "alef"-Programm. In: E. Schwartz (Hrsg.): *Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 237-246). Frankfurt.: Arbeitskreis Grundschule e.V.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt: *Lernen und Lehren von Mathematik: Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Bea, W. & Scholz, R. W. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 16* (3-4), S. 299-327.

Bender, P. (1991a). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel.

Bender, P. (1991b). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. In: *MNU, 44*, S. 238-243.

Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. In: *Stochastik in der Schule, 17* (1), S. 8-33.

Bender, P. & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Bentele, G. & Bystřina, I. (1978). *Semiotik. Grundlagen und Probleme*. Stuttgart: Kohlhammer.

Berger, P. (2017). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Online verfügbar unter http://www.prof-dr-berger.de/pdf/BergerEinfMathDidaktik.pdf [Abruf am 01.03.2021].

Besuden H. (1970a). Nur ein Arbeitsmittel im Mathematikunterricht der Grundschule? In A. Fricke & H. Besuden: *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 117-126). Stuttgart: Klett.

Besuden H. (1970b). Mehr-Modell-Methoden und das Prinzip der Variation. In A. Fricke & H. Besuden: *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 127-138). Stuttgart: Klett.

Biehler, R. (1985). Graphische Darstellungen. In: *mathematica didactica, 8*, S. 57-81.

Biehler, R., Frischemeier, D. & Podworny, S. (2016). Stochastische Simulationen mit TinkerPlots – Von einfachen Zufallsexperimenten zum informellen Hypothesentesten. In: *Stochastik in der Schule, 36* (1), S. 22–27.

Blankenagel, J. (1983). Schätzen, Überschlagen, Runden. Bestandsaufnahme, Reflexion von Bedeutung und Möglichkeiten (1). In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 8*, S. 278-284.

Blankenagel, J. (1999). Vereinfachen von Zahlen. In: *mathematik lehren, 93*, S. 10-14.

Bobrowski, S. (1990). Schätzen – Runden – Überschlagen – Ein verzichtbarer Lerninhalt in der Grundschule? In: *mathematik lehren, 39*, S. 14-19.

Böcherer-Linder, K., Eichler, A. & Vogel, M. (2016). *The impact of visualization on understanding conditional probabilities*. Online verfügbar unter https://iase-web.org/documents/papers/icme13/ICME13_S1_Boechererlinder.pdf [Abruf am 09.01.2022].

Boeckmann, K. (1982). Warum soll man im Unterricht visualisieren? Theoretische Grundlagen der didaktischen Visualisierung. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.): *Visualisierungen in der Mathematik* (S. 11-33). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Böer, H., Göckel, D., Kliemann, S., Koepsell, A., Puscher, R., Richter, M., Schmidt, W., Tönnies, D., Vernay, R. & Werner, S. (2013). *mathe live 7*. Stuttgart: Klett.

Bölter, L. (1843). Zeugnisse gegen Dr. Diesterweg. In: *Süddeutscher Schul-Bote. Eine Zeitschrift für das deutsche Schulwesen, 7* (20), S. 156-160.

Bönig, D. (1993). Empirische Untersuchungen zum Transfer zwischen verschiedenen medialen Repräsentationen am Beispiel multiplikativer Operationen. In J.-H. Lorenz (Hrsg.): *Mathematik und Anschauung* (S. 25-43). Köln: Aulis.

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division: Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern*. Münster: Waxmann.

Branford, B. (1913). *Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität*. Leipzig: Teubner.

Braunfeld, P. (1968). Ein neuer Zugang zur Bruchrechnung vom Standpunkt der Operatoren. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1968*, S. 209-217.

Breidenbach, W. (1956). *Rechnen in der Volksschule*. Hannover: Schroedel.

Breidenbach, W. (1969). *Methodik des Mathematikunterrichts in Grund- und Hauptschule. Band 1. Rechnen.* Hannover: Schroedel.

Breuer, W., Erbrecht, G., Leiße, H., Scheler, K., Schneider, S., Schneider, S. & Winkler, U. (1983). *Unterrichtshilfen Mathematik Klasse 4*. Berlin: Volk und Wissen.

Bromme, R. & Steinbring, H. (1990). Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. In: R. Bromme, F. Seeger & H. Steinbring (Hrsg.): *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 151-229). Köln: Aulis.

Brücher, K. (1911). *Anschauung in der Arithmetik*. Bamberg: Buchner.

Bruder, R., Linneweber-Lammerskitten, H. & Reibold, J. (2015). Individualisieren und differenzieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 513-534). Berlin: Springer Spektrum.

Bruner, J. (1967a). On Cognitive Growth: I. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield: *Studies in Cognitive Growth* (S. 1-29). New York: John Wiley & Sons.

Bruner, J. (1967b). On Cognitive Growth: II. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield: *Studies in Cognitive Growth* (S. 30-67). New York: John Wiley & Sons.

Bruner, J. (1967c). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. (1969). *The Process of Education*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.

Bruner, J. (1971a). Über kognitive Entwicklung. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 21-53). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. (1971b) Über kognitive Entwicklung II. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 55-96). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin-Verlag.

Bruner, J. (1996). *The Culture of Education*. Cambridge: Harvard University Press.

Brunner, M. (2020). In G. Kadunz (Hrsg.): *Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht: Semiotik in Theorie und Praxis* (S. 29-52). Berlin: Springer Spektrum.

Büchter, A. & Haug, R. (2013). Lernen mit Material. In: *mathematik lehren, 176*, S. 2-7.

Burton, L. (1999). Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. In: I. Schwank (Hrsg.): *European Research in Mathematics Education I* (S. 90-105). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Carbonneau, K., Marley, S. & Selig, J. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105* (2), S. 380–400.

Charon, K. & Lotz, J. (2022). Mit dem Negativen rechnen – seit 500 Jahren. In: *Der Mathematikunterricht, 68* (1), S. 16-26.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2005). Baumdiagramme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Auslöser unterschiedlicher mentaler Repräsentationen, aufgedeckt durch metakognitive Aktivitäten. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 26* (3-4), S. 200-223.

Comenius, J. A. (1906). *Didactica magna*. Leipzig: Dürr'sche Buchhandlung.

Condillac, É. B. d. (1959a). Die Logik oder Die Anfänge der Kunst des Denkens. In G. Klaus (Hrsg.): *Étienne Bonnot de Condillac. Die Logik. Die Sprache des Rechnens* (S. 1-116). Berlin: Akademie-Verlag. Original von 1780.

Condillac, É. B. d. (1959b). Die Sprache des Rechnens. Erstes Buch. In G. Klaus (Hrsg.): *Étienne Bonnot de Condillac. Die Logik. Die Sprache des Rechnens* (S. 117-245). Berlin: Akademie-Verlag. Original von 1798.

Dahlke, E. (1981). Zum Stellenwert didaktischer Prinzipien im Mathematikunterricht. In H. Bauersfeld, H. W. Heymann, J.-H. Lorenz (Hrsgg.): *Forschung in der Mathematikdidaktik* (S. 125-135). Köln: Aulis.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2010). *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Dennert, M., Lorenz, G., Tietz, W. & Wolf, A. (1982). *Mathematik 4*. Berlin: Volk und Wissen.

Dewar, J. M. (1984). Another Look at the Teaching of Percent. In: *Arithmetic Teacher, 31* (7), S. 48-49.

Dienes, Z. P. (1965). *Aufbau der Mathematik*. Freiburg: Herder.

Diesterweg, A. (1828). *Raumlehre, oder Geometrie, nach den jetzigen Anforderungen der Pädagogik für Lehrende und Lernende*. Bonn: Eduard Weber.

Diesterweg, A. (1838). *Wegweiser für deutsche Lehrer. Erster Band*. Essen: Bädeker.

Diesterweg, A. (1873). *Diesterweg's Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer. Fünfte Auflage in neuer, zeitgemäßer Bearbeitung herausgegeben von dem Curatorium der Diesterwegstifung. Erster Band. Das Allgemeine*. Essen: Bädeker.

Diesterweg, A. (1875). *Diesterweg's Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer. Fünfte Auflage in neuer, zeitgemäßer Bearbeitung herausgegeben von dem Curatorium der Diesterwegstifung. Zweiter Band. Das Besondere*. Essen: Bädeker.

Dietrich, S., Engel, H., Jung, T., Neißl, U., Röhrich-Zorn, E., Schumacher, M., Schumacher, M. & Winnewisser, C. (2021). *MiniMax 4. Allgemeiner Teil. Lehrerband*. Stuttgart, Leipzig: Klett.

Dörfler, W. (1985). Handlungen und Mathematiklernen – Vergleich von Ansätzen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 19*, S. 94-97.

Dörfler, W. (1986). Das Verhältnis mathematischer Operation und gegenständlicher Handlung. In H.-G. Steiner (Hrsg.): *Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten* (S. 1-14). Köln: Aulis.

Dörfler, W. (1988). Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In: W. Dörfler (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung* (S. 55-125). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Dörfler, W. (2002). *Instances of Diagrammatic Reasoning*. Online verfügbar unter http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=AEFAE5211A6BC8B13E7077B4AA9963DF?doi=10.1.1.106.169&rep=rep1&type=pdf [Abruf am 23.01.2022].

Dörfler, W. (2005). Inskriptionen und mathematische Objekte. In. G. Graumann (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 171-174). Hildesheim: Franzbecker.

Dörfler, W. (2006a). Diagramme und Mathematikunterricht. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 27* (3-4), S. 200-219.

Dörfler, W. (2006b). *Keine Angst – Mathematik* ist *nicht* (*nur*) *abstrakt*. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 71-74). Hildesheim: Franzbecker.

Dörfler, W. (2018). Mathematics without formulas? In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik und ihre Mathematik, 104*, S. 6-8.

Drees, S. (2013). Die steilste Straße der Welt. In: *Lernchancen, 96*, S. 40-45.

DZLM (o. J.). *Verstehensorientierung*. Online verfügbar unter https://primakom.dzlm.de/node/562 [Abruf am 18.01.2021].

Eckstein, B. (2011). *Mit 10 Fingern zum Zahlverständnis. Optimale Förderung für 4- bis 8-Jährige*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Eco, U. (1977). *Zeichen. Einführung in einen Begriff und seine Geschichte*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Eco, U. (1987). *Semiotik. Entwurf einer Theorie der Zeichen.* München: Fink.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Elschenbroich, H.-J. (2005). Mit dynamischer Geometrie argumentieren und beweisen. In: B. Barzel, S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): *Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.

Elschenbroich, H.-J. (2016): Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen. In: *Der Mathematikunterricht, 62* (1), S. 26-34.

Falk, K., Rohrauer, G. & Wais, K. (1926). *Arithmetik und Geometrie für Deutsche und Allgemeine Mittelschulen und verwandte Lehranstalten. 1. Teil*. Wien: Verlag für Jugend und Volk.

Feilke, H. (2012). Bildungssprachliche Kompetenzen – fördern und entwickeln. In: *Praxis Deutsch, 233*, S. 4-13.

Filler, A. (2019). *Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie, Teil 2: Einige lerntheoretische Grundlagen und daraus resultierende Prinzipien für den Mathematikunterricht*. Online verfügbar unter http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/user/filler/geometriedidaktik/02_Lernpsych-Aspekte.pdf [Abruf am 28.02.2021].

Fischer, P. (1913). *Anschauungsmittel im mathematischen Unterricht. Eine Zusammenstellung der vorhandenen Lehrmittel im Rechnen, in der reinen und angewandten Mathematik*. Berlin-Lichterfelde: Hermann.

Fischer, R. (1984a). Mathematik und visuelle Kommunikation. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 18*, S. 118-121.

Fischer, R. (1984b). *Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand – Visionen eines neuen Mathematikunterrichts*. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 5 (1-2), S. 51-85.

Fischer, R. & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Fisher, R. A. (1953). *The Design of Experiments*. Edinburgh: Oliver and Boyd. Original von 1935.

Flade, L. & Mounnarath, V. N. (1992). Zur Könnensentwicklung beim Lösen linearer Gleichungen. In: *mathematik lehren, 51*, S. 11-14.

Frege, G. (1962). Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. In: G. Frege & G. Patzig (Hrsg.): *Funktion, Begriff und Bedeutung: Fünf logische Studien* (S. 89-95). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. Original von 1882.

Freudenthal, H. (1963): Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben? In: *Der Mathematikunterricht, 9* (4), S. 5-29.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1*. Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München: Oldenbourg.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Frey, G. (1961). Symbolische und ikonische Modelle. In H. Freudenthal (Hrsg.): *The Concept and the Role of the Model in Mathematics and Natural and Social Sciences* (S. 89-97). Dordrecht: Reidel.

Frey, O. (1914). *Geometrischer Arbeitsunterricht*. Leipzig: Wunderlich.

Fricke, A. (1970a). Operatives Denken im Rechenunterricht als Anwendung der Psychologie von Piaget. In A. Fricke & H. Besuden: *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 5-30). Stuttgart: Klett.

Fricke, A. (1970b). Operative Zahlerfassung. In A. Fricke & H. Besuden: *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 47-78). Stuttgart: Klett.

Fricke, A. (1970c). Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule. In A. Fricke & H. Besuden: *Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik* (S. 79-116). Stuttgart: Klett.

Fricke, A. (1981). Operative Einheit und Gruppierung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 2* (2), S. 137-145.

Führer, L. (1996). *Wurzeln, Mathematik und Nostalgie - Bedenkliches zum mathematischen Wagenschein*. Online verfügbar unter www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/Schriften/1996_Wagenschein-Kritik.pdf [Abruf am 20.10.2021].

Führer, L. (1997). *Pädagogik des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Führer, L. (1999). *Didaktik der Mathematik, Teil 2*. Unveröffentlichtes Skript zur Vorlesung am Institut für Didaktik der Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main im Wintersemester 1999/2000.

Gadamer, H.-G. (1960). *Wahrheit und Methode. Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr.

Gallin, P. & Ruf, U. (1998). *Sprache und Mathematik in der Schule: Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*. Seelze: Kallmeyer.

Galperin, P. J. (1967). Die Entwicklung der Untersuchungen über die Bildung geistiger Operationen. In: H. Hiebsch (Hrsg.): *Ergebnisse der sowjetischen Psychologie* (S. 367-505). Berlin: Akademie-Verlag.

Gansberg, F. (1904). Lebensbilder im Anschauungsunterricht. Streifzüge durch Neuland. *Die Deutsche Schule, 8*, S. 153-161.

Gansberg, F. (1912). Radikalismus in der Schulreform. Ein Vortrag über die „Arbeitsschule" im Bremischen Lehrerverein. *Neue Bahnen, 23*, S. 385-395.

Ganter, S. (2013). *Experimentieren – ein Weg zum Funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten*. Hamburg: Dr. Kovač.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Online verfügbar unter https://d-nb.info/1124689982/34 [Abruf am 28.11.2021].

Giebel, K. (1915). *Anfertigung mathematischer Modelle*. Leipzig: Teubner.

Giest, H. (2016). *Psychologische Didaktik und kultur-historische Theorie der Lerntätigkeit*. Online verfügbar unter http://www.ich-sciences.de/media/journal/Ausgabe_14/heft_14.pdf [Abruf am 24.01.2022].

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive: Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Berlin: Lehmanns.

Gigerenzer, G., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. & Woloshin, S. (2009). Glaub keiner Statistik, die du nicht verstanden hast. *Gehirn & Geist, 10*, S. 34–39.

Goldstone, R., & Son, J. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. In: *The journal of learning sciences, 14* (1), S. 69-110.

Gravemeijer, K. (1991). An instruction-theoretical reflection on the use of manipulatives. In: L. Streefland (Hrsg.): *Realistic mathematics education in primary school* (S. 57-76). Utrecht: Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. In P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Hrsgg.): *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (S. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Griesel, H. (1971). Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1971*, S. 72-81.

Griesel, H. (1974). Überlegungen zur Didaktik der Mathematik als Wissenschaft. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6* (3), S. 115-119.

Griesel, H. (1976). Das Prinzip von der Herauslösung eines Begriffs aus Umweltbezügen in der Rechendidaktik Wilhelm Oehls und in der gegenwärtigen Didaktik der Mathematik. In: H. Winter & E. Wittmann (Hrsg.): *Beiträge zur Mathematikdidaktik: Festschrift für Wilhelm Oehl* (S. 61-71). Hannover: Schroedel.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin: Springer Spektrum.

Günster, S. M. & Ruppert, M. (2020). Das operative Prinzip. In: *mathematik lehren, 223*, S. 22-24.

Hafenbrak, B. (2004). *Einf. Mathematikdidaktik Kap. 4: Didaktische Prinzipien des Mathematikunterrichts*. Online verfügbar unter https://ph-ooe.at/fileadmin/Daten_PHOOE/EIS/Erstes_Programmieren/Did06_04_36_.pdf [Abruf am 01.03.2021].

Hahn, H. P. (2003). Dinge als Zeichen – eine unscharfe Beziehung. In: U. Veit, T. L. Kienlin, C. Kümmel. & S. Schmidt (Hrsg.): *Spuren und Botschaften: Interpretation materieller Kultur* (S. 29-52). Münster: Waxmann.

Hall, E. T. (1966). *The Hidden Dimension*. New York: Doubleday.

Hefendehl-Hebeker, L. (1990). Überlegungen und Erfahrungen zur Einführung der negativen Zahlen. In: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3*, S. 75-102.

Hefendehl-Hebeker, L. (1998). Aspekte eines sensiblen Mathematikverständnisses. In: *Mathematische Semesterberichte, 45 (2)*, S. 189-206.

Hefendehl-Hebeker, L. (2015). Die fachlich-epistemologische Perspektive auf Mathematik als zentraler Bestandteil der Lehramtsausbildung. In: J. Roth, T. Bauer, H. Koch & S. Prediger (Hrsg.): *Übergänge konstruktiv gestalten: Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik* (S. 179-184). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. & Schwank, I. (2015). Arithmetik: Leitidee Zahl. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 77-115). Berlin: Springer Spektrum.

Heitzer, J. & Weigand, H.-G. (2020). Mathematikdidaktische Prinzipien. (mit)teilbar und handlungsleitend. In: *mathematik lehren, 223*, S. 2-7.

Henze, N., Hotz, T., Riemer, W., Skorsetz, B. & Vehling, R. (2020). Schickt die statistische Signifikanz in den Ruhestand! In: *Der Mathematikunterricht, 66* (4), S. 4-10.

Herbart, J. F. (1841). *Umriss pädagogischer Vorlesungen*. Göttingen: Dieterichsche Buchhandlung.

Hesse, D. (2011). Gedankenlesen – keine Zauberei. In: *mathematik lehren, 169*, S. 16-20.

Heywang, E. (1923). *Die Arbeitsschulidee in der einklassigen Volksschule*. Leipzig: Ernst Wunderlich.

Hischer, H. (2004). Mittenbildung als fundamentale Idee. In: *Der Mathematikunterricht, 50* (5), S. 4-13.

Hischer, H. (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hoffmann, M. (2001a). *Peirces Zeichenbegriff: seine Funktionen, seine phänomenologische Grundlegung und seine Differenzierung*. Online verfügbar unter https://works.bepress.com/michael_hoffmann/18/download/ [Abruf am 18.05.2020].

Hoffmann, M. (2001b). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 22* (3-4), S. 231-251.

Hoffmann, M. (2005). *Erkenntnisentwicklung: Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz*. Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Hoffmann, M. & Roth, W.-M. (2005). What you should know to survive in knowledge societies. On a semiotic understanding of ‚knowledge'. In: *Semiotica, 156*, S. 101-138.

Hoffmeister, K. (1834). *Romeo, oder Erziehung und Gemeingeist: Aus den Papieren eines nach Amerika ausgewanderten Lehrers. Zweites Bändchen*. Essen: Bädeker.

Hofmann, S. (2002). Diagnose und Fördermöglichkeiten bei Rechenschwäche. In J. Birkholz, E. Dinges, H.-L. Worm (Hrsg.): *Förderpädagogik Mathematik* (S. 11-109). Horneburg: Persen.

Hole, V. (1973). *Erfolgreicher Mathematikunterricht: Keine Angst vor seiner Planung, Durchführung und Beurteilung*. Freiburg im Breisgau: Herder.

Hörmann, H. (1983). Über einige Aspekte des Begriffs »Verstehen«. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.): *Kognition und Handeln* (S. 13-22). Stuttgart: Klett-Cotta.

Horn, M. (2014). *Zur Einteilung von Zeichen im Mathematikunterricht*. Wissenschaftliche Abschlussarbeit im Rahmen des Studiums für das Lehramt an Gymnasien im Fach Mathematik an der Universität des Saarlandes. Saarbrücken.

Hubig, C. (2002). *Mittel*. Bielefeld: transcript.

Huhmann, T. (2013). *Einfluss von Computeranimationen auf die Raumvorstellungsentwicklung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hunke, S. (2012) *Überschlagsrechnen in der Grundschule: Lösungsverhalten von Kindern bei direkten und indirekten Überschlagsfragen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Jahnke, H. N. (1984). *Anschauung und Begründung in der Schulmathematik*. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 18*, S. 32-41.

Jahnke, T. (2005). *Zur Authentizität von Mathematikaufgaben*. Online verfügbar unter: https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Dida/Jahnke/Juengere_Vortraege_und_Aufsaetze/pdf/15_Jahnke_Authentizitaet-von-Mathematikaufgaben.pdf [Abruf am 25.08.2021].

Jahnke, T. (2010). *Stochastische Paradoxa als didaktische Provokationen* https://www.math.uni-potsdam.de/fileadmin/user_upload/Prof-Dida/Jahnke/Juengere_Vortraege_und_Aufsaetze/pdf/12_Jahnke_Stochastische-Paradoxa.pdf [Abruf am 25.08.2021].

Jörissen, S. & Schmidt-Thieme, B. (2015). Darstellen und Kommunizieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 385-408). Berlin: Springer Spektrum.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin: Springer Spektrum.

Kauffman, L. H. (1983). *Formal Knot Theory*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press.

Kautschitsch, H. (1989). Wie kann ein einzelnes Bild das Allgemeingültige vermitteln? In H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen* (S. 177-186). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Kerschensteiner, G. (1921). *Die Seele des Erziehers und das Problem der Lehrerbildung*. Leipzig: Teubner.

Kirsch, A. (1965). Über die Veranschaulichung einfacher Gruppenhomomorphismen. *Der Mathematikunterricht, 11* (1), S. 54-67.

Kirsch, A. (1973). Die Einführung der negativen Zahlen mittels additiver Operatoren. In: *Der Mathematikunterricht, 19* (1), S. 5-39.

Kirsch, A. (1976). Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht. In: *Didaktik der Mathematik, 4* (4), S. 257-284.

Kirsch, A. (1977a). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: *Didaktik der Mathematik, 5* (2), S. 87-101.

Kirsch, A. (1977b). Über die „enaktive" Repräsentation von Abbildungen, insbesondere Permutationen. In: *Didaktik der Mathematik, 5* (3), S. 169-194.

Klauer, K. J. (1973). *Revision des Erziehungsbegriffs, Grundlagen einer empirisch-rationalen Pädagogik*. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil 1.* Leipzig: Teubner.

Korn, F. (2013). Wie lassen sich negative Zahlen mit Streichhölzern darstellen? In: M. Kramer (Hrsg.): *Algebra und Analysis als Abenteuer. Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung* (S. 79-81). Online verfügbar unter: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/Skript%20-%20Algebra%20und%20Analysis.pdf [Abruf am 01.09.2021].

Kramer, M. (2013). Haptisches Lösen von (linearen) Gleichungen. In: M. Kramer (Hrsg.): *Algebra und Analysis als Abenteuer. Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung* (S. 76-79). Online verfügbar unter: http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/Skript%20-%20Algebra%20und%20Analysis.pdf [Abruf am 01.09.2021].

Kramer, M. (2017). *Mathematik als Abenteuer: Band III: Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Seelze: Kallmeyer.

Krauss, S. & Wassner, C. (2001). Wie man das Testen von Hypothesen einführen sollte. In: *Stochastik in der Schule, 21* (1), S. 29-34.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2001). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. Heidelberg. Spektrum Akademischer Verlag.

Kröger, R. & Hilgers, A. (2011). MatheWelt. Das Schülerarbeitsheft. Lineare Gleichungen vielfältig üben. In: *mathematik lehren, 169*, S. 25-40.

Krüger, D. & Harnisch, W. (1816). *Der Schulrath an der Oder, für Vorsteher der Volksschulen, Lehrer an denselben und andere Freunde und Beförderer des Volksschulwesens. Zweite verbesserte Auflage*. Breslau: Josef Max.

Kubiak, L. & Lotz, J. (2021). Aufgaben variieren nach Schupp. Ein besonderes Mittel zur Beziehungsgestaltung. In: *mathematik lehren, 227*, S. 27-30.

Kühnel, J. (1954). *Neubau des Rechenunterrichts*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt. Original von 1916.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel: Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ladel, S. (2014). Enaktiv, ikonisch, symbolisch – das und noch viel mehr! Repräsentationsformen und ihre Verknüpfung in digitalen Medien. In: *Grundschule Mathematik, 43*, S. 6-10.

Lambert, A. & Hilgers, A. (o. J.). *Füllgraphen – wie man sieht!* Online verfügbar unter https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/funktionen/funktionale-zusammenhaenge-zwischen-fuellgraph-und-gefaess-erkunden/ [Abruf am 14.09.2021].

Lambert, A. (2003). *Begriffsbildung im Mathematikunterricht*. Online verfügbar unter https://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint77.pdf [Abruf am 28.11.2021].

Lambert, A. (2005a). Beweise, was du (nicht) siehst! In: C. Kaune, I. Schwank & J. Sjuts (Hrsg.): *Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens* (S. 199-213). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Lambert, A. (2005b). Reflektierende Unterrichtsplanung. In: T. Leuders (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (S. 276-288). Berlin: Cornelsen.

Lambert, A. (2006). *Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben*. Online verfügbar unter https://www.math.uni-sb.de/preprints/preprint174.pdf [Abruf am 07.01.2022].

Lambert, A. (2010). Experimentelle Geometrie. Aus Erfahrung Lernen. In K. Krüger & P. Ullmann (Hrsg.): *Von Geometrie und Geschichte in der Mathematikdidaktik. Festschrift zum 65. Geburtstag von Lutz Führer* (S. 139-165). Eichstätt: Polygon-Verlag.

Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht* (S. 5-32). Hildesheim: Franzbecker.

Lambert, A. (2013). Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel "Füllgraph". In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, S. 596-599.

Lambert, A. (2014). Teilprozesse der stoffdidaktischen Methode (in der Geometrie). In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 96*, S. 89.

Lambert, A. (2015a). Algorithmen enaktiv – ikonisch – symbolisch. In: *mathematik lehren, 188*, S. 16-18.

Lambert, A. (2015b). Mit Dijkstra zum kürzesten Weg. In: *mathematik lehren, 188*, S. 48-49.

Lambert, A. & Herget, W. (2017). Die Suche nach dem springenden Punkt. In: *mathematik lehren, 200*, S. 2-6.

Lambert, A. (2018). *Hypothesentests*. Vortrag vom 19. September 2018 zum 8. Tag des Mathematikunterrichts an der Universität des Saarlandes. Saarbrücken.

Lambert, A. (2019). *Enaktive Einsichten am Geobrett: Darstellungsebenen und Sprachformen bewusst wechseln*. Online verfügbar unter https://www.math.uni-sb.de/lehramt/index.php/eis [Abruf am 25.05.2020].

Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe (in der Schule) – ein Vorschlag zur Unterscheidung. In: *Der Mathematikunterricht, 66* (2), S. 3-15.

Landgraf, V. (2013). Das Boxenmodell. Ein handlungsorientierter Zugang zu linearen Gleichungen. In: *mathematik lehren, 176*, S. 46-48.

Lauter, J. (2005). *Fundament der Grundschulmathematik: Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule*. Donauwörth: Auer.

Lawler, R. (1981). The progressive construction of mind. In: *Cognitive Science, 5*, S. 1-30.

Leroi-Gourhan, A. (1980). *Hand und Wort*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Lesser, O. & Schwab, K. (1929). *Mathematisches Unterrichtswerk zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Im Sinne der Meraner Lehrpläne bearbeitet. 1. Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra: für die mittleren Klassen höherer Lehranstalten*. Leipzig : Freytag

Leuders, T. (2005). Darf das denn wahr sein? Eine schüleraktive Entdeckung der Grundidee des Hypothesentestens durch Simulation mit Tabellenkalkulation. In: *Praxis der Mathematik in der Schule, 47* (4), S. 8-16.

Leuders, T. (2016). *Erlebnis Algebra: zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Berlin: Springer Spektrum.

Lichti, M. & Roth, J. (2019). Funktionales Denken fördern. In: *Mathematik 5 – 10, 49*, S. 38-41.

Lichti, M. & Roth, J. (2020). *Wie Experimente mit gegenständlichen Materialien und Simulationen das funktionale Denken fördern.* Online verfügbar unter https://www.juergen-roth.de/veroeffentlichungen/2020/Lichti_Roth_2020_Wie_Experimente_mit_gegenstaendlichen_Materialien_und_Simulationen_das_funktionale_Denken_Foerdern.pdf [Abruf am 28.11.2021].

Lietzmann, W. (1916). *Methodik des mathematischen Unterrichts. 2. Teil.* Leipzig: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W. (1919). *Methodik des mathematischen Unterrichts. 1. Teil.* Leipzig: Quelle & Meyer.

Lietzmann, W. (1943). *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen.* Breslau: Ferdinand Hirt.

Lietzmann, W. & Jarosch, J. (1926). *Arithmetik, Algebra und Analysis für die IV.–VIII. Klasse der Gymnasien und die IV.–VII. Klasse der Realschulen.* Wien: Franz Deuticke.

Liewald, K. (1908). *Die Anschaulichkeit im geometrischen Anfangsunterricht.* Görlitz: Hoffmann & Reiber.

Limón, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*, S. 357-380.

Linde, E. (1922a). *Die Pädagogik der Gegenwart, 5. Band: Pädagogische Streitfragen der Gegenwart.* Leipzig: Nemnich.

Linde, E. (1922b). *Persönlichkeits-Pädagogik: in Mahnwort wider die Methodengläubigkeit unserer Tage.* Leipzig: Friedrich Brandstetter.

Linke, P. (2020). *Entdeckendes Lernen neu denken. Entwicklung normativer Vorstellungen eines mathematikdidaktischen Prinzips.* Münster: WTM.

Lorberg, H. (1878). Referat über den mathematischen Unterricht an den Realgymnasien. In: *Verhandlungen der Directoren-Conferenz der elsaß-lothringischen höheren Lehranstalten am 20. November und 1. Dezember 1877, 1*, S. 47-72.

Lorenz, J.-H. (1993). Veranschaulichungsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht. In J.-H. Lorenz (Hrsg.): *Mathematik und Anschauung* (S. 122-146). Köln: Aulis.

Lorenz, J.-H. (1995). Arithmetischen Strukturen auf der Spur. In: *Die Grundschulzeitschrift, 82*, S. 9-12.

Lorenz, J.-H. (2005). Überschlagen – Schätzen – Runden. Drei Begriffe, eine Tätigkeit? In: *Grundschule Mathematik, 4*, S. 44-45.

Lotz, J. (2020). enaktiv, ikonisch, symbolisch. Einsichten ins Symbolische anbahnen. In: *mathematik lehren, 223*, S. 17-21.

Ludwig, M. (2007). Arbeitskreis ‚Geometrie'. Herbsttagung 2006. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 83*, S. 52-54.

Mader, O. (1977). Der Mathematikunterricht als komplexer Prozeß der Persönlichkeitsentwicklung. In: W. Walsch & K. Weber: *Methodik Mathematikunterricht* (S. 135-151). Berlin: Volk und Wissen.

Maier, P. H. (1999). *Räumliches Vorstellungsvermögen. Ein theoretischer Abriß des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen.* Donauwörth: Auer.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: *mathematik lehren, 123*, S. 4-8.

Malsch, F., Maey, E. & Schwerdt, H. (1929): *Zahl und Raum. Lehr- und Übungsbuch der Mathematik für höhere Schulen. Erstes Heft. Arithmetik und Algebra.* Leipzig: Quelle & Meyer.

Meiers, K. (1994). Grundschulpädagogische Positionen und ihre Relevanz in den zentralen Lernbereichen Sprache und Mathematik. In: *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 22*, S. 554-558.

Meyer-Drawe, K. (2003). Lernen als Erfahrung. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 6* (4), S. 505-514.

Meyerhöfer, W. (2018). Verständnis – Ein Ansatz zur *begrifflichen* Erschließung mathematischer Inhalte. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, S. 1243-1246.

Meyerhöfer, W. (2020). Berthold Eckstein: Brüche, Dezimalzahlen und Prozente darstellen und verstehen. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 108*, S. 100-102.

Meyfarth, T. (2006). *Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom - Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien.* Online verfügbar unter: blob:https://kobra.uni-kassel.de/c2454155-ad98-49f2-bdc5-3a41d84f9c7b [Abruf am 28.11.2021].

Minning, H. (1955). Die Vektoren als Hilfsmittel zur Einführung der Rechenregeln für relative Zahlen. In: *Der Mathematikunterricht, 1* (4), S. 22-31.

Morris, C. W. (1973). *Zeichen, Sprache und Verhalten.* Düsseldorf: Schwann.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen.* Bern: Haupt.

Motzer, R. (2010). Hypothesentest und bedingte Wahrscheinlichkeit. In: *Stochastik in der Schule, 30* (3), S. 29-32.

Nagl, L. (1992). *Charles Sanders Peirce*. Frankfurt: Campus Verlag.

Neigenfind, F. (1977). Materielle Bedingungen für die Realisierung der Ziele und Aufgaben des Mathematikunterrichts. In: W. Walsch & K. Weber: *Methodik Mathematikunterricht* (S. 285-309). Berlin: Volk und Wissen.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Nöth, W. (2000). *Handbuch der Semiotik*. Stuttgart: Metzler.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule*. Hannover: Schroedel.

Oehl, W. (1965). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel.

Oehl, W., Evers, J. & Kastrop, W. (1965). *Welt und Zahl – Mathematisches Unterrichtswerk für Realschulen und verwandte Schulformen. Algebra 1*. Hannover: Schroedel.

Otte, M. (1983). Texte und Mittel. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83* (4), S. 183-194.

Overberg, B. H. (1793). *Anweisung zum zweckmäßigen Schulunterricht für die Schullehrer im Hochstifte Münster*. Online verfügbar unter https://sammlungen.ulb.uni-muenster.de/hd/content/structure/871416 [Abruf am 29.11.2021].

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung*. Berlin: Springer Spektrum.

Pape, H. (2007). Fußabdrücke und Eigennamen: Peirces Theorie des relationalen Kerns der Bedeutung indexikalischer Zeichen. In S. Krämer, W. Kogge & G. Grube (Hrsg.): *Spur* (S. 37-54). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Papperitz, E. (1901). *Über die wissenschaftliche Bedeutung der darstellenden Geometrie und ihre Entwicklung bis zur systematischen Begründung durch Gaspard Monge. Rede beim Antritt des Rektorates für das 163. Studienjahr an der K. S. Bergakademie zu Freiberg, 27. Juli 1901*. Freiberg: Craz & Gerlach.

Peters, B. (2019). *Visualisierung und Strukturierung von Prozentaufgaben mit vermehrtem und vermindertem Grundwert mittels Prozentstreifen*. Dissertation an der Pädagogischen Hochschule Freiburg. Freiburg.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1975). *Gesammelte Werke 6: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Klett.

Prediger, S. (2015). Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 642-662). Berlin: Springer Spektrum.

Prediger, S. & Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (1), S. 239–262.

Prediger, S., Selter, S., Hußmann, S. & Nührenbörger, M. (Hrsgg.) (2017). *Auszug "S6 – Prozentrechnung" aus: Mathe sicher können – Sachrechnen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Online verfügbar unter https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/docs/msk3-sr-hru_s6_200605b.pdf [Abruf am 10.08.2021].

Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen. Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.): *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit* (S. 163-184). Münster: Waxmann.

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E. & Benholz, C. (2015). Sprachkompetenz und Mathematikleistung – Empirische Untersuchung sprachlich bedingter Hürden in den Zentralen Prüfungen 10. *Journal für Mathematik-Didaktik, 36* (1), S. 77-104.

Probst, H. (1983). Testverfahren zur Diagnostik spezifischer Lernvoraussetzungen. In R. Horn, K. Ingenkamp & R. S. Jäger (Hrsg.): *Tests und Trends 3* (S. 77-105). Weinheim: Beltz.

Radatz, H., & Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

Ratz, C. (2011). *Unterricht im Förderschwerpunkt geistige Entwicklung*. Oberhausen: Athena.

Reblin, E. (2012). *Die Straße, die Dinge und die Zeichen: Zur Semiotik des materiellen Stadtraums*. Bielefeld: transcript.

Reiss, K., & Hammer, C. (2013). *Grundlagen der Mathematikdidaktik*. Basel: Birkhäuser.

Rembowski, V. (2015). *Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht*. Dissertation an der Universität des Saarlandes. Saarbrücken.

Riemer, W. (2020). Auf der Suche nach H_0. In: *mathematik lehren, 220*, S. 30-34.

Rißmann, R. (1910). *Deutsche Pädagogen des 19. Jahrhunderts*. Leipzig: Klinkhardt.

Ritthaler, A. (1908). Dr. Wilks „Neue Rechenmethode, gegründet auf das natürliche Werden der Zahlen und des Rechnens". In: *Allgemeine Deutsche Lehrerzeitung, 60* (21), S. 235-239.

Römer, M. (2016). Runden – gar nicht so einfach! In: *Schulmagazin 5-10, 11*, S. 19-21.

Rosch, E. (1983) Prototype Classification and Logical Classification: The Two Systems. In: E. Scholnick (Hrsg.): *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget's Theory?* (S. 73-86). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Rosch, J. (2015). Eine Fallstudie zum Verstehen von Algebra im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 111-134). Berlin: Springer Spektrum.

Roth, H. (1976). *Pädagogische Psychologie des Lehrens und Lernens*. Hannover: Schroedel.

Roth, J. & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung. In: *mathematik lehren, 199*, S. 2-9.

Royar, T. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung: Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen*. Hamburg: Kovač.

Ruf, U. & Gallin, P. (2005). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen*. Seelze: Kallmeyer.

Santaella, L. (1995). *A teoria geral dos signos*. São Paulo: Atica.

Sapir, E. (1921). *Language: An introduction to the study of speech*. New York: Harcourt.

Saussure, F. d. (2001). *Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft*. Berlin: de Gruyter. Original von 1916.

Schaff, A. (1973). *Einführung in die Semantik*. Reinbeke bei Hamburg: Rowohlt.

Scherer, P. & Steinbring, H. (2001). Strategien und Begründungen an Veranschaulichungen – Statische und dynamische Deutungen. In: W. Weiser & B. Wollring (Hrsg.): *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe* (S. 188-201). Hamburg: Dr. Kovač.

Scherer, P., & Weigand, H.-G. (2017). Mathematikdidaktische Prinzipien. In M. Abshagen, B. Barzel, J. Kramer, T. Riecke-Baulecke, B. Rösken-Winter & C. Selter (Hrsg.): *Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten* (S. 28-42). Seelze: Klett Kallmeyer.

Schillig, W. (2010). Ein Universalwerkzeug. Mit einem Prozentband Größen ins Verhältnis setzen. In: *Mathematik 5 bis 10, 10*, S. 14-17.

Schindler, M. (2014). *Auf dem Weg zum Begriff der negativen Zahl: Empirische Studie zur Ordnungsrelation für ganze Zahlen aus inferentieller Perspektive*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schlenker, A. (1904). Der Erziehungsgrundsatz der Naturgemässheit bei Comenius und Rousseau. In: *Comenius-Blätter für Volkserziehung, 12* (2), S. 36-48.

Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461-490). Berlin: Springer Spektrum.

Schnepel, S. (2019). *Mathematische Förderung von Kindern mit einer intellektuellen Beeinträchtigung: Eine Längsschnittstudie in inklusiven Klassen*. Münster: Waxmann.

Schoen, H. L., Blume, G. & Hart, E. (1987). *Measuring Computational Estimation Processes. A Research Paper Presented at the 1987 Annual Meeting of the AERA. Washington, DC.* Online verfügbar unter https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED286929.pdf [Abruf am 16.01.2021].

Schönrich, G. (1990). *Zeichenhandeln: Untersuchungen zum Begriff einer semiotischen Vernunft im Ausgang von Ch. S. Peirce.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Schreiber, C. (2004). The interactive development of mathematical inscriptions - a semiotic perspective on pupils externalisation in an internet chat about mathematical problems. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36* (6), S. 185-195.

Schreiber, C. (2005). Semiotische Lernkarten. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005*, S. 525-528.

Schubert, S., & Schwill, A. (2011). *Didaktik der Informatik.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schubring, G. (1981). Gegenständliche und soziale Momente des Wissens als Kategorien für Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik-Didaktik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 2* (1), S. 3-36.

Schupp, H. (1985). Das Galton-Brett im stochastischen Anfangsunterricht. In: *mathematik lehren, 12*, S. 12-16.

Schupp, H. (2002). *Thema mit Variation: Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Schütte, S. (1996). *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen.* Stuttgart: Klett.

Schwank, I. (1998). *Kognitive Mathematik.* Online verfügbar unter https://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik.htm [Abruf am 18.11.2019].

Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35* (3), S. 70-78.

Sebeok, T. A. (1979). *Theorie und Geschichte der Semiotik.* Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Seeger, F. (1993). Veranschaulichungen und Veranschaulichungsmittel aus kulturhistorischer Perspektive: Einige Randbemerkungen. In J.-H. Lorenz (Hrsg.): *Mathematik und Anschauung* (S. 3-13). Köln: Aulis.

Selter, C. (1985). Warum wird die Mitte bevorzugt? Ein Unterrichtsversuch mit dem Galtonbrett im 4. Schuljahr. *mathematik lehren*, *12*, S. 10–11.

Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* Cambridge: Cambridge University Press.

Sfard, A. & McClain, K. (2002). Analyzing Tools: Perspectives on the Role of Disigned Artifacts in Mathematics Learning. In: *The Journal of the Learning Sciences, 11* (2-3), S. 153-161.

Shevarev, P. A. (1946). An Experiment in the Psychological Analysis of Algebraic Errors. In: *Proceedings of the Academy of Pedagogical Sciences of the Russian Soviet Repuplic, 13*, S. 135-180.

Simon, M. (1985). *Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik.* Paderborn: Schöningh. Original von 1908.

Sjuts, J. (2001). Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). In: *Der Mathematikunterricht, 47* (1), S. 47-60.

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 24* (1), S. 18-40.

Stahl, R. (2001). Lösungsstrategien bei einfachen linearen Gleichungen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 22* (3-4), S. 277-300.

Steigung. (2021, 29. Oktober). In *Wikipedia*. https://de.wikipedia.org/wiki/Steigung

Steinbring, H. (1993). Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – Eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 14* (2), S. 113-145.

Steiner, H.-G. (1974). Bemerkungen zur Wittmannschen Axiomatisierung des Gruppierungsbegriffs von J. Piaget und Hinweise auf weitere didaktisch relevante Modelle. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1973*, S. 239-246.

Steiner, G. (2006). Wiederholungsstrategien. In: H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.): *Handbuch Lernstrategien* (S. 101-113). Göttigen: Hogrefe.

Stifel, M. (1553). *Die Coss Christoffs Rudolffs mit schönen Exempeln der Coss. Durch Michael Stifel. Gebessert und sehr gemehrt*. Online verfügbar unter: www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/rudolff.pdf [Abruf am 29.11.2021].

TGL 0-1333 (1962). *DDR-Standard. Runden von Zahlen.* Online verfügbar unter https://katalog.ub.uni-weimar.de/tgl/TGL_0-1333_07-1962.pdf [Abruf am 24.08.2021].

Thiede, B. (2020). *Der Prozentstreifen als Hilfsmittel bei Prozentaufgaben. Eine Interventionsstudie zu Visualisierungen in der Prozentrechnung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Tietze, J. (2015). *Terme, Gleichungen, Ungleichungen: Rechenregeln begründen, Fehlerfallen vermeiden*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Timerding, E. H. (1912). *Die Erziehung der Anschauung*. Leipzig: Teubner.

Trapp, E. C. (1780). *Versuch einer Pädagogik*. Berlin: Friederich Nicolai.

Van der Waerden, B. L. (1954). Denken ohne Sprache. In G. Révész (Hrsg.): *Thinking and Speaking: A symposium* (S. 165-174). Amsterdam: North-Holland.

Vernay, R., Puscher, R., Schönfelder, M. & Katzenbach, M. (2017). *Mathekoffer – Dezimalzahlen & Prozente*. Nottuln-Appelhülsen: MUED e. V.

Viet, U. (1983). Ein Spiel für die Unterrichtseinheit „Ganze Zahlen“. In H.-J. Vollrath (Hrsg.): *Zahlbereiche. Didaktische Materialien für die Hauptschule* (S. 118-131). Stuttgart: Klett.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J.-H. Lorenz (Hrsg.): *Mathematik und Anschauung* (S. 147-166). Köln: Aulis.

Völkel, S. (2012). *Bilder als Quelle der Information – Die Entwicklung der frühkindlichen Symbolkompetenz*. Dissertation an der Technischen Universität Chemnitz. Chemnitz.

Vollrath, H.-J. (1969). Die didaktische Funktion des Beispiels im Mathematikunterricht. In: *Die Deutsche Schule, 61*, S. 173-181.

Vollrath, H.-J. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Akademischer Verlag.

Vom Hofe, R. (1995) *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Vom Hofe, R. & Fast, V. (2015). Geometrische Darstellungen als Vorstellungsgrundlage für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. In M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 43-55). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Von der Bank, M.-C. (2016). *Fundamentale Ideen der Mathematik. Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung*. Dissertation an der Universität des Saarlandes. Saarbrücken.

Von der Bank, M.-C. (2021). Lustiges und Merkwürdiges. Zahlenrätsel – unterhaltsam und doch so lehrreich. In: *mathematik lehren, 227*, S. 9-12.

Von der Bank, M.-C. (2022). Historiographie als didaktischer Impulsgeber. In: *Der Mathematikunterricht, 68* (1), S. 3.

Von Glaserfeld, E. (1987). Preliminaries to Any Theory of Representation. In: C. Janvier (Hrsg.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 215-225). Hillsdale: Erlbaum.

Von Glaserfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London: Falmer.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and Language*. Massachusetts: M.I.T. Press.

Vygotskij, L. S. (1992). *Geschichte der höheren psychischen Funktionen*. Münster: Lit.

Vygotskij, L. S. (2002). *Denken und Sprechen. Psychologische Untersuchungen*. Weinheim: Beltz.

Wagenschein, M. (1956). *Zum Begriff des exemplarischen Lehrens*. Online verfügbar unter http://martin-wagenschein.de/en/2/W-128.pdf [Abruf am 30.01.2022].

Wagenschein, M. (1970). *Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken*. Stuttgart: Klett.

Walsch, W. (1992). Gleichungen im Mathematikunterricht. In: *mathematik lehren, 51*, S. 6-10.

Weber, E. (1911a). Reformideen und Reformtaten: Ein Beitrag zur Kritik des „Arbeitsunterrichts". *Die deutsche Schule, 15*, 413-430.

Weber, E. (1911b). Reformideen und Reformtaten: Ein Beitrag zur Kritik des „Arbeitsunterrichts" (Schluß.). *Die deutsche Schule, 15*, 494-506.

Weidig, I. (1983). Die Behandlung der negativen Zahlen in der Hauptschule. In H.-J. Vollrath (Hrsg.): *Zahlbereiche. Didaktische Materialien für die Hauptschule* (S. 58-84). Stuttgart: Klett.

Weigand, H.-G. (2018). Ziele des Geometrieunterrichts. In: H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann: *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 1-20). Berlin: Springer Spektrum.

Wertheimer, M. (1957). *Produktives Denken*. Frankfurt am Main: Kramer. Original von 1945.

Wessel, J. (2015). *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion: Stoffdidaktische Analysen und empirische Befunde von Schülerinnen und Schülern des 1. Schuljahres*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wessel, L., Büchter, A. & Prediger, S. (2018). Weil Sprache zählt. Sprachsensibel Mathematikunterricht planen, durchführen und auswerten. In: *mathematik lehren, 206*, S. 2-7.

Wieleitner, H. (1912). *Die sieben Rechnungsarten mit allgemeinen Zahlen*. Leipzig: Teubner.

Wilhelm, K. & Andelfinger, B. (2021). Mathe – heute für morgen: achtsamer Unterricht. In: *mathematik lehren, 227*, S. 2-8.

Wille, A. M. (2016). Das Leitermodell als roter Faden in den Zahlenbereichserweiterungen. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 49*, S. 119-130.

Willms, A. (2021). *Wirkmechanismen virtueller Arbeitsmittel am Beispiel des Prozentbands: Empirische Untersuchung in experimentellen Feldstudien*. Münster: Waxmann.

Winter, H. W. (1984). Didaktische und methodische Prinzipien. In H. W. Heymann (Hrsg.): *Mathematikunterricht zwischen Tradition und neuen Impulsen* (S. 116-147). Köln: Aulis.

Winter, H. W. (1996). *Mathematik entdecken: Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*. Frankfurt am Main: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. W. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer Spektrum. Original von 1989.

Winter, H. W. & Ziegler, T. (1977). *Neue Mathematik 7. Schuljahr. Lehrerheft*. Hannover: Schroedel.

Wittmann, E. Ch. (1972). Zum Begriff der Gruppierung in der Piagetschen Psychologie. In: *Die Schulwarte, 9/10*, S. 62-80.

Wittmann, E. Ch. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1975). Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1975*, S. 226-235.

Wittmann, E. Ch. (1981a). Beziehungen zwischen operativen Programmen in Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, 2* (1), S. 83-95.

Wittmann, E. Ch. (1981b). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1983). Anwendungen des operativen Prinzips im Geometrieunterricht. In L. Montada, K. Reusser & G. Steiner (Hrsg.): *Kognition und Handeln* (S. 267-276). Stuttgart: Klett-Cotta.

Wittmann, E. Ch. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. In: *mathematik lehren, 11*, S. 7-11.

Wittmann, E. Ch. (1987). *Elementargeometrie und Wirklichkeit*. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1994). Wider die Flut der "bunten Hunde" und der "grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. Ch. Wittmann & G. Müller (Hrsg.): *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1* (S. 157-171). Leipzig: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche pädagogische Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In: M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.): *Mathematik in der Grundschule: Ein Arbeitsbuch* (S. 18-46). Seelze: Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica, 37*, S. 213-232.

Wittmann, E. Ch. (2018). *„Kompetenzorientierung“ vs. solide mathematische Bildung: Wohin steuert der Mathematikunterricht?* Online verfügbar unter http://www.mathe2000.de/sites/default/files/1%20Kompetenzorientierung-vs-solide-math-Bildung.pdf [Abruf am 29.08.2021].

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (1997). *Mein Tausenderbuch*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2015). *Fördern und Diagnose mit dem Blitzrechenkurs. Handreichung für die Praxis*. Stuttgart: Klett.

Wittmann, J. (1933). *Theorie und Praxis eines ganzheitlichen, analytisch-synthetischen Unterrichts in Grundschule, Hilfsschule, Volksschule*. Potsdam: Müller & Kiepenheuer.

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis