

Experimentelle Untersuchung und konstitutive Modellierung des inelastischen Verhaltens von Kabeln

Dissertation

zur Erlangung des Grades

des Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät

der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Vanessa Dörlich, M.Sc.

Saarbrücken

2020

Tag des Kolloquiums: 16. November 2020

Dekan:	Prof. Dr. Jörn Erik Walter
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster
Vorsitz:	Prof. Dr.-Ing. Hans-Georg Herrmann
Akad. Mitarbeiter:	Dr.-Ing. Florian Schäfer

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Promotionsstudentin am Lehrstuhl für Technische Mechanik (LTM) an der Universität des Saarlandes unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels in Kooperation mit der Abteilung Mathematik für die digitale Fabrik des Fraunhofer Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM). Die finanzielle Unterstützung dieser Arbeit erfolgte durch ein Promotionsstipendium des Fraunhofer ITWM.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater und Hauptberichterstatter Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels, der mich bereits seit Beginn meines Masterstudiums an der Universität des Saarlandes unterstützt hat. Ich bedanke mich vor Allem für die vielen hilfreichen Diskussionen, das Vertrauen und die Geduld im Laufe meiner Promotionszeit. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Düster für die bereitwillige Übernahme des Zweitgutachtens bedanken.

Des Weiteren möchte ich mich bei Dr.-Ing. Joachim Linn bedanken, der als Betreuer meines Promotionsprojekts am ITWM mit vielen interessanten Diskussionen und Denkanstößen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Bei Peter Češarek, Ph.D. vom Lehrstuhl für Mechanik der Universität Ljubljana möchte ich mich für die konstruktive Zusammenarbeit zur Umsetzung der konstitutiven Modellierung im Rahmen dieser Arbeit bedanken.

Großer Dank gilt sowohl meinen Kollegen am LTM und meinen Kollegen am ITWM, die immer bereit waren für konstruktiven Austausch über Forschungsergebnisse, Hilfe bei technischen Problemen und die Diskussion von Versuchsergebnissen. Damit haben alle Kollegen meinen Arbeitsalltag erleichtert, aber besonders bedanken möchte ich mich bei Dr.-Ing. Tobias Scheffer, PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung und Dr.-Ing. Henning Seibert, die mich mit ihrer Erfahrung in allen Belangen unterstützt haben. Bei meinen Bürokollegen Dr.-Ing. Florian Goldschmidt, Dr.-Ing. Frederik Scherff und Dr.-Ing. Michael Roller möchte ich mich ebenfalls für das angenehme Arbeitsklima bedanken.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich stets unterstützt und gefördert hat und gleichermaßen meinen Freundinnen Nina, Jessica, Samantha und Karin, die mich immer wieder motiviert und dennoch für den nötigen Ausgleich gesorgt haben. Zu guter Letzt danke ich Henning für die fortwährende geduldige Unterstützung während der letzten Jahre.

Saarbrücken, Juni 2020

Vanessa Dörlich

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der experimentellen Untersuchung und konstitutiven Modellierung von Kabeln, die inelastisches Verhalten unter Deformationen zeigen.

Kabel sind technische Bauteile, die in der zunehmend vernetzten Welt vielfältig angewendet werden und an den spezifischen Anwendungsfall angepasst werden. Der strukturelle Aufbau eines Kabels, das heißt die Bestandteile und die Geometrie, wird jeweils auf den Einsatzort abgestimmt. Der Aufbau bestimmt zudem das mechanische Verhalten des Kabels unter Last, da in Kabeln verschiedene Materialien verwendet werden, die meist in näherungsweise konzentrischen Schichten angeordnet sind. Dieser Schichtaufbau verursacht ein komplexes Deformationsverhalten von Kabeln, welches in dieser Arbeit mittels geeigneter experimenteller Methoden detailliert untersucht wird. Ein Fokus liegt dabei auf der gezielten Untersuchung des Biegeverhaltens von Kabeln hinsichtlich inelastischer Effekte wie Elastoplastizität und Schädigung. Diese Untersuchungen sind die Basis für die Modellierung des Deformationsverhaltens von Kabeln mit Hilfe von konstitutiven Gesetzen, welche im Rahmen der Cosseratbalkentheorie auf Basis der Schnittgrößen des Balkens formuliert werden. Damit können komplexe Phänomene, deren Ursachen in der Mikro- und Mesostruktur des Kabels liegen, auf der Makroebene abgebildet werden.

Abstract

The present thesis deals with the experimental investigation and constitutive modelling of cables which show inelastic behavior under deformation.

Cables become more relevant in different fields of application, such as the automotive industry, as the number of electronic devices constantly increases. Their compositions are specifically tailored to the respective application. The structure and composition of a cable, which usually consist of approximately concentric layers of different materials, crucially determines the mechanical behavior of the cable under load. The resulting complex deformation behavior of cables is investigated in detail using suitable experimental methods in this work. The main focus lies on the investigation of bending deformations of cables regarding inelastic effects such as elastoplasticity and damage. Those investigations are the foundation for the modelling of the deformation behavior of cables under load using constitutive equations formulated in the sectional quantities within the framework of Cosserat rod theory. This enables the simulation of complex phenomena on the macroscopic level, which are caused by material and geometrical effects on the microstructural level.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stand der Forschung	7
3	Theoretische Grundlagen	13
3.1	Cosseratbalken	13
3.1.1	Geometrisch exakte Kinematik	14
3.1.2	Statische Gleichgewichtsgleichungen	16
3.1.3	Konstitutivgesetze auf Basis von Schnittgrößen	17
3.2	Konstitutivgesetze	18
3.2.1	Lineare Elastizität	19
3.2.2	Abschnittsweise definierte lineare Elastizität	20
3.2.3	Elastoplastizität	21
3.2.4	Schädigungsmodelle	25
4	Experimentelle Grundlagen	29
4.1	Grundlagenexperimente an balkenartigen Strukturen	30

4.1.1	Uniaxialer Zugversuch	30
4.1.2	Torsionsversuch	32
4.1.3	Biegeversuche	32
4.2	Multiaxiale Experimente an Kabeln	44
4.2.1	Räumliche Kombination aus Biegung, Torsion und Druck . .	45
4.2.2	Kombination von Zug und Torsion	46
5	Ergebnisse und Diskussion der Experimente	49
5.1	Grundlagenexperimente an Kabeln	49
5.1.1	Uniaxialer Zugversuch	50
5.1.2	Torsionsversuch	52
5.1.3	Dreipunktbiegung	53
5.1.4	Diskussion der Grundlagenexperimente	54
5.2	Konstitutives Verhalten von balkenartigen Proben unter Biegung . .	56
5.2.1	CFK-Stäbe: Lineare Elastizität	57
5.2.2	Bowdenzüge: Abschnittsweise definierte lineare Elastizität .	58
5.3	Untersuchung des konstitutiven Verhaltens eines Kabels unter Biegung	59
5.3.1	Grundlagenexperimente: zyklische Dreipunktbiegung und reine Biegung	59
5.3.2	Untersuchung von Struktureffekten auf der Mikro- und der Mesoebene	62
5.3.3	Weiterführende Untersuchung der Plastizität und Schädigung	67
5.4	Multiaxiale Experimente an Kabeln	75

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	iii
5.4.1 Räumliche Kombination aus Biegung, Torsion und Druck . . .	75
5.4.2 Kombination von Zug und Torsion	78
5.4.3 Diskussion der multiaxialen Experimente an einem Koaxial- kabel	81
6 Modellierung der Biegung eines einfachen Kabels	83
6.1 Ein finites Balkenelement auf Basis des Cosseratmodells	83
6.2 Konstitutive Gesetze	86
6.2.1 Ratenuabhängige Elastoplastizität	87
6.2.2 Schädigung	90
6.2.3 Kopplung der Teilmodelle	93
6.3 Parameteridentifikation und Ergebnisse	94
7 Fazit und Ausblick	99
Literaturverzeichnis	104
Anhang	112
A Veröffentlichungen & Proceedings	113
B Vorträge	114

1

Einleitung

Kabel sind spezielle technische Bauteile, die in der zunehmend vernetzten Welt vielfältig angewendet werden. In allen Branchen, zum Beispiel der produzierenden Industrie oder im Automobilbau, finden Kabel Anwendung und sind dabei an den spezifischen Anwendungsfall angepasst. Der strukturelle Aufbau eines Kabels, das heißt die Bestandteile und die Geometrie, wird jeweils auf den Einsatzort abgestimmt. Durch die verschiedenen Anwendungsgebiete existiert folglich eine Vielzahl an unterschiedlichen Kabeltypen, die zum Beispiel zur Leitung von elektrischem Strom, Daten oder optischen Signalen verwendet werden. Die häufigsten Bestandteile sind metallische Drähte (Kupfer oder Aluminium), Ummantelungen (elastomere Kunststoffe, z.B. Polyvinylchlorid), Glasfasern und elektromagnetische Abschirmungen oder mechanische Schutzschichten (metallische Folien oder Geflechte). Kabel sind meistens näherungsweise zylindrisch aufgebaut und die Bestandteile in konzentrischen Schichten angeordnet, wobei die leitenden Schichten aus einer Vielzahl von verdrehten Einzeldrähten bestehen.

Des Weiteren nehmen die Anwendungsfälle zu, in denen Kabel nicht starr verlegt, sondern wiederholt bewegt werden, zum Beispiel an Robotern in der Fertigung oder in Verbindung mit beweglichen Baugruppen im PKW. Die Notwendigkeit, diese flexiblen Bauteile in den virtuellen Prototypen miteinzubeziehen, nimmt damit zu. Die Software *IPS Cable Simulation* ist dazu geeignet, das Deformationsverhalten

von Kabeln physikalisch korrekt zu simulieren. Dies ist durch eine auf den Prinzipien der diskreten Differentialgeometrie basierenden Diskretisierung in Echtzeit möglich. *IPS Cable Simulation* ermöglicht die Integration von flexiblen Bauteilen in den Prozess der Erstellung des virtuellen Prototyps, siehe Abbildung 1.1. Neben Kabeln gibt es eine Vielzahl an technisch relevanten flexiblen, schlanken Bauteilen, wie zum Beispiel Schläuche oder Bowdenzüge, die ebenfalls mit *IPS Cable Simulation* modelliert werden können. Die vorliegende Arbeit dient zur detaillierten Untersuchung des inelastischen Verhaltens von Kabeln und weiteren flexiblen Bauteilen in Hinblick auf eine Weiterentwicklung der konstitutiven Modellierung, die von *IPS Cable Simulation* verwendet wird.

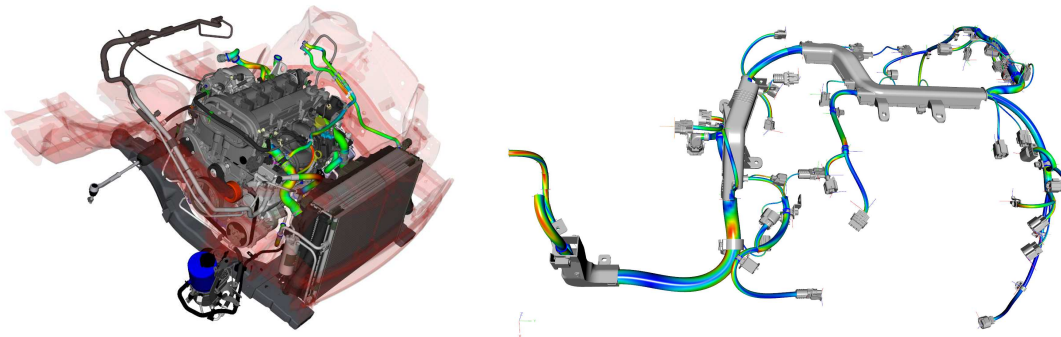


Abbildung 1.1: Szenen aus *IPS Cable Simulation* [37]. *Links*: Analyse der Deformationen in Schlauchleitungen in einem montierten Motorblock. *Rechts*: Analyse eines Kabelbaums.

Die Kenntnis der mechanischen Eigenschaften von Kabeln, zusätzlich zu den primären Leitungseigenschaften, gewinnt somit an Bedeutung. Die mechanischen Eigenschaften bestimmen die Lebensdauer des Kabels, sind aber bereits in der Konstruktion notwendig. Sie werden zum Beispiel benötigt, um den Bauraum zu bestimmen, den ein Kabel insbesondere dann einnimmt, wenn es mit einer beweglichen Baugruppe verbunden ist. So können zu kleine Biegeradien, die in der Anwendung zu Ausfall führen würden, und Kollision mit anderen Bauteilen vermieden werden. Die optimale Länge eines Kabels, das in der Anwendung bewegt wird, kann somit bestimmt werden.

In Kapitel 2 wird zunächst der aktuelle Stand der für diese Arbeit relevanten Forschung zusammengefasst. Die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen theoretischen Grundlagen werden in Kapitel 3 erläutert. Die experimentellen Methoden sind in Kapitel 4 beschrieben und die Ergebnisse der in dieser Arbeit durchgeführten Experimente werden in Kapitel 5 zusammengefasst und diskutiert. In Kapitel 6

wird die Modellierung des konstitutiven Verhaltens eines einfachen Kabels unter ebener Biegung beschrieben. Die daraus resultierenden numerischen Ergebnisse werden mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. In Kapitel 7 werden die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit dargestellt und ein Ausblick auf zukünftige Forschung auf diesem Gebiet gegeben.

Kabel haben im Allgemeinen gemeinsam, dass sie schlank und vergleichsweise flexibel sind. Damit treten große räumliche Verschiebungen und Verdrehungen auf während die lokalen Verzerrungen klein bleiben. Für die Simulation von Kabeln eignet sich folglich eine Modellierung auf Basis der Cosseratbalkentheorie, siehe Kapitel 3.1. Sie beinhaltet die geometrisch exakte Kinematik, die statischen Gleichgewichtsgleichungen und die Konstitutivgesetze und entsprechen dem klassischen Grundgerüst der Kontinuumsmechanik.

Auf den Konstitutivgesetzen für Cosseratbalken liegt in dieser Arbeit ein Fokus, siehe Kapitel 3.1.3. Sie werden in den materiellen Schnittgrößen und zugehörigen objektiven Deformationsmaßen formuliert. Diese Formulierung bietet den Vorteil, dass die Größen, die in das konstitutive Gesetz eingehen, einfach mit Hilfe von experimentellen Methoden für balkenartige Proben auf der *Makroebene* gemessen werden können. In dieser Arbeit werden die Begriffe Makro-, Meso- und Mikroebene verwendet, um Struktureffekte auf verschiedenen Längenskalen zu beschreiben. Das Kabel ist auf der Makroebene ein Bauteil, welches aus unterschiedlich angeordneten Bestandteilen aus verschiedenen Materialien besteht und eine Vorzugsrichtung in der Längsrichtung besitzt. Die charakteristischen Dimensionen der Makroebene liegen im Bereich weniger Millimeter bis mehrere Dezimeter. Die Mesoebene beinhaltet die einzelnen Bestandteile des Kabels, wie zum Beispiel metallische Litzen, Isolationsschichten, die Ummantelung, aber auch zum Beispiel Hohlräume zwischen den Bestandteilen. Deren charakteristische Längen liegen im Bereich von wenigen Mikrometern bis Millimetern. Die Mikrostruktur wird charakterisiert durch den strukturellen Aufbau der einzelnen Bestandteile. Im Fall der metallischen Litzen ist das beispielsweise das Gefüge der Kornstruktur und die charakteristischen Längen liegen im Bereich unterhalb weniger Mikrometer. Während auf der *Mesoebene* Struktureffekte, wie Ablösen der Bestandteile von einander oder Umlagerung, stattfinden, bestimmen auf der *Mikroebene* die Materialeffekte der einzelnen Bestandteile, wie Elastoplastizität oder Viskoelastizität, das Deformationsverhalten. Bedingt durch den geometrischen Aufbau und die verschiedenen Materialien in einem Kabel, ist folglich auf der Bauteilebene ein komplexes Verhal-

ten von Kabeln unter Last zu erwarten. Die Effekte der verschiedenen Materialien (Elastizität, Viskoplastizität) und strukturelle Effekte (Reibung, Abgleiten oder Ablösen von Bestandteilen, Schädigung der Struktur) überlagern sich. Zudem wird eine strukturelle Anisotropie beobachtet, die durch die lange, schlanke Geometrie und die Vorzugsrichtung im Kabel verursacht wird. Dadurch ist das Verhalten von Kabeln unter Zug im Allgemeinen steifer als unter Biegung oder Torsion. Dieses komplexe Verhalten wird in dieser Arbeit detailliert in verschiedenen Experimenten auf der Makroebene untersucht.

Zunächst werden Grundlagenexperimente vorgestellt, welche die Untersuchung der drei grundlegenden für Kabel relevanten Lastfälle *Zug*, *Torsion* und *Biegung* erlauben. Mit Hilfe dieser Experimente ist neben der Bestimmung der Steifigkeiten, die das Verhalten von Kabeln unter den drei Lastfällen im linear elastischen Bereich beschreiben, bereits die Untersuchung von *inelastischen* Effekten möglich, wenn die Experimente in zyklischer Versuchsführung durchgeführt werden. Die Ergebnisse der zugehörigen Experimente werden in Unterkapitel 5.1 diskutiert. Mit dem Begriff *Inelastizität* wird in dieser Arbeit jenes konstitutive Verhalten bezeichnet, welches zu Energiedissipation führt und damit irreversibel ist. Durch die Überlagerung von strukturellen und materiellen Effekten ist es dabei nicht immer möglich, zwischen unterschiedlichen Arten von inelastischem Verhalten (Plastizität, Viskoelastizität, Schädigung) zu unterscheiden.

Im Speziellen wird in dieser Arbeit das konstitutive Verhalten von Kabeln unter ebener Biegung untersucht, da die Biegung der Lastfall ist, bei dem in der Anwendung von Kabeln große räumliche Verschiebungen und Rotationen auftreten. Nach Entlastung zeigt sich in der Regel dann, dass der Ausgangszustand nicht mehr eingenommen wird. Damit ist zu erwarten, dass unter Biegung eine linear elastische Beschreibung des Deformationsverhaltens nicht ausreicht, um realistische Simulationen durchzuführen. Zur gezielten Untersuchung der Phänomenologie des Biegeverhaltens von Kabeln wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Versuchsstand zur reinen Biegung verwendet. Dieser wird in Unterkapitel 4.1.3 beschrieben und mit der klassischen Dreipunktbiegung verglichen. Er eignet sich besonders gut zur Untersuchung des konstitutiven Verhaltens von Kabeln, da die Größen des konstitutiven Gesetzes für die ebene Biegung, das Biegemoment M_B und die Biegekrümmung K_B , direkt gemessen werden können, ohne Annahmen treffen zu müssen. In Kapitel 3.2 werden die inelastischen Konstitutivgesetze vorgestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden. Dabei wird jeweils direkt die Formulierung des konstitutiven

Gesetzes in den Größen der ebenen Biegung angegeben.

In den Kapiteln 5.2 und 5.3 werden Ergebnisse der Biegeversuche an verschiedenen balkenartigen Proben – carbonfaserverstärkten Kunststoff-Stäben, Bowdenzügen und Kabeln – vorgestellt. Diese zeigen eindeutig die verschiedenen Charakteristika von unterschiedlichem konstitutiven Verhalten unter Biegung, welche besonders in der reinen Biegung einfach quantifiziert werden können.

Die Modellierung des inelastischen Biegeverhaltens des einfachen Kabels, das in Unterkapitel 5.3 gezeigt wird, ist Inhalt von Kapitel 6. Hierfür wird ein finites Balkenelement verwendet, das auf Basis der Cosseratbalkentheorie formuliert ist. Basierend auf den experimentellen Ergebnissen wird für dieses Balkenelement ein elastoplastisches Modell mit Verfestigung und ein Schädigungsmodell in den Schnittgrößen des Cosseratbalkens formuliert. Während es für die Simulation des ersten Belastungszyklus in der Dreipunktbiegung ausreicht, das elastoplastische Teilmodell mit Verfestigung zu verwenden, müssen die beiden Teilmodelle gekoppelt werden, um den Erstbelastungszyklus und die Folgezyklen des einfachen Kabels unter reiner Biegung simulieren zu können.

Ein weiterer Fokus dieser Arbeit liegt auf der gezielten Weiterentwicklung der experimentellen Durchführung von zyklischen Versuchen zur Trennung verschiedener inelastischer Effekte. In Unterkapitel 4.1.3 werden verschiedene Typen zyklischer Versuchsführung vorgestellt. Sie sind zum Einen speziell dazu geeignet, krümmungsabhängige Effekte der Mikro- und Mesostruktur auf der Ebene makroskopischer Experimente sichtbar zu machen. Zum Anderen lässt sich damit die Abhängigkeit des aktuellen Deformationsverhaltens von der Deformationshistorie untersuchen. Die Ergebnisse hierzu sind in Unterkapitel 5.3.2 zusammengefasst. Die Resultate hierzu sind besonders interessant, da sie das Verständnis der Vorgänge auf der Mikro- und Mesoebene fördern, die zu inelastischem konstitutiven Verhalten auf der Makroebene führen.

In realen Anwendungen von Kabeln treten häufig Belastungen auf, in denen verschiedene grundlegende Lastfälle miteinander koppeln. Diese sogenannten multiaxialen Belastungen wurden in dieser Arbeit mit Hilfe von verschiedenen multiaxialen Experimenten, die in Kapitel 4.2 beschrieben sind, untersucht. Es wurden sowohl Experimente mit großen räumlichen Deformationen durchgeführt, als auch die gezielte Kopplung von Zug und Torsion untersucht. Die Ergebnisse sind in Ka-

pitel 5.4 zusammengefasst und zeigen, dass das inelastische Verhalten von Kabeln, analog zum linear elastischen Verhalten, anisotrop ist. Zudem wird gezeigt, dass die inelastischen Eigenschaften von Kabeln zwar die räumlichen Deformationen nicht wesentlich beeinflussen, aber der Verlauf der Schnittgrößen stark von dem von elastischen Proben abweicht.

2

Stand der Forschung

Diese Arbeit befasst sich mit den mechanischen Eigenschaften von elektrisch leitenden Kabeln. Sie finden nicht nur in unserem Alltag und in der produzierenden Industrie Anwendung, sondern auch als Erdkabel oder Unterseeleitungen [81, 82]. Dabei steigt die Anzahl der Anwendungen, in denen zusätzlich zur elektrischen Leitfähigkeit die mechanischen Eigenschaften der Kabel von Bedeutung sind [5, 67, 68], wie in Industrierobotern oder bei beweglichen Teilen im Automobil [70]. Kabel zeichnen sich dadurch aus, dass sie im Vergleich zu anderen Bauteilen flexibel sind. Zudem ist ihre Geometrie durch ein hohes Aspektverhältnis gekennzeichnet. Für die computergestützte Entwicklung und Forschung gibt es bereits umfangreiche und mächtige Software, die die physikalisch korrekte Simulation von deformierbaren Festkörpern ermöglicht. Dadurch wird bereits ein großer Anteil des realen Prototypenbaus vermieden. Um weitere Ressourcen, Kosten und Zeit in der Entwicklung zu sparen, müssen flexible Bauteile ebenfalls in die digitalen Prototypen integrierbar sein [49]. Die Integration von flexiblen Bauteilen in Simulationsmodelle ist Teil der Forschung zu Mehrkörpersystemen [8, 71].

Lange, schlanke Bauteile können im Rahmen der Kontinuumsmechanik mit eindimensionalen Balkentheorien beschrieben werden [56, 83]. Der klassische schubstarre Euler-Bernoulli-Balken basiert auf der Annahme, dass Querschnitte, die vor der Deformation senkrecht zur Balkenachse standen, auch nach der Deformation senk-

recht auf der deformierten Balkenachse stehen und eben bleiben. Die schubweiche Erweiterung wird durch den Timoshenko-Balken beschrieben, welcher zusätzlich die Schubverformung des Balkens berücksichtigt. Beide Theorien basieren auf einer geometrisch linearen Kinematik und sind damit für die Beschreibung von großen räumlichen Verschiebungen und Rotationen, die bei der Anwendung von Kabeln auftreten, ungeeignet.

Die Cosseratbalkentheorie [2, 64, 72] stellt das Grundgerüst für physikalisch korrekte Modelle für flexible, schlanke Bauteile dar. Sie wird als *geometrisch exakte*, bzw. geometrisch nichtlineare, Theorie bezeichnet, da zunächst keine geometrischen Näherungen verwendet werden. Sie ist damit sehr gut geeignet, um das Deformationsverhalten von Kabeln im Raum zu beschreiben. Die am Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik Kaiserslautern und dem Fraunhofer-Chalmers-Centre in Göteborg entwickelte Software *IPS Cable Simulation* [37] beruht auf einer geometrisch exakten Balkenformulierung und ist geeignet, um in Echtzeit eine Vielzahl von industrierelevanten Kabelanwendungen zu simulieren [49, 51].

Für eine realitätsnahe Simulation des Deformationsverhaltens von flexiblen Bauteilen sind passende Konstitutivgesetze erforderlich. Im Allgemeinen wird dabei nach [31] zwischen elastischem, viskoelastischem, plastischem und viskoplastischem Materialverhalten unterschieden. Zudem können Schädigungseffekte mit geeigneten konstitutiven Modellen simuliert werden [36]. Die für diese Arbeit relevanten inelastischen konstitutiven Gesetze wurden im Rahmen kontinuumsmechanischer Modelle entwickelt und sind bereits umfangreich untersucht worden [30, 32, 36, 41]. Die Umsetzung elastoplastischer Gesetze in Algorithmen ist beispielsweise in [73] ausführlich beschrieben.

Im Rahmen der Cosseratbalkentheorie können die Konstitutivgesetze in den Schnittgrößen des Balkens und den zugehörigen objektiven Deformationsmaßen formuliert werden. In [7] und [50] wurden zum Beispiel konstitutive Modelle für viskoelastisches Verhalten formuliert. [27] und [54] formulieren elastoplastische Konstitutivgesetze für geometrisch exakte finite Balkenelemente.

Kabel bestehen nicht aus einem homogenen, isotropen Material sondern sind Bauteile aus verschiedenen Bestandteilen [61]. Deshalb ist für Kabel unterschiedliches Materialverhalten sowie ein überlagertes Deformationsverhalten, das aus Meso-

und Mikrostruktureffekten resultiert, zu erwarten. Für die Beschreibung der Deformationen von Kabeln sind drei Belastungen und deren Kombinationen von Relevanz: Dehnung entlang der Kabelachse, Biegung quer dazu und Torsion um die Kabelachse [51]. Das Verhalten von Kabeln ist bezüglich dieser Belastungsarten stark anisotrop und den drei Lastfällen können jeweils elastische Steifigkeiten zugeordnet werden, die als Modellparameter im Bereich kleiner Deformationen dienen. Im Rahmen der Seilmechanik gab es schon früh Ansätze, die Steifigkeiten von verdrehten oder verflochtenen Strukturen analytisch aus den Einzelsteifigkeiten der Bestandteile und der Geometrie der Struktur zu berechnen [14, 33, 44]. Die skizzierte Herangehensweise vernachlässigt allerdings meist Mesostruktureffekte, wie Reibung und Abgleiten zwischen den einzelnen Bestandteilen. Für die Modellierung großer Deformationen von Kabeln sind diese Effekte neben weiteren, wie Litzenbruch oder Ablösen der Ummantelung, jedoch bedeutend. Deshalb ist es für Kabel sinnvoller, die Steifigkeiten experimentell zu bestimmen. Im Rahmen dieser Arbeit werden dafür grundlegende Experimente aus der experimentellen Balkenmechanik verwendet [76]. In [80] ist eine Übersicht über die Experimente zur Bestimmung elastischer Kabelparameter gegeben. Diese Grundlagenexperimente werden des Weiteren dazu verwendet, das inelastische Verhalten von Kabeln mit Hilfe von zyklischen Experimenten zu untersuchen. Die detaillierte Untersuchung des konstitutiven Verhaltens von Kabeln hinsichtlich ratenunabhängiger, inelastischer Deformationen wird erstmals in der vorliegenden Arbeit durchgeführt. Angelehnt an [10, 52, 57] werden Experimente zur Untersuchung des Schädigungsverhaltens durchgeführt. In der Literatur finden sich ansonsten lediglich Experimente an Kabeln, die durchgeführt wurden um aus der Seilmechanik berechnete Kabelparameter zu validieren [60, 74].

Diese grundlegenden Experimente sind allerdings nicht ausreichend, um das Deformationsverhalten von Kabeln in Anwendungen vollständig zu untersuchen. Kabel werden oft mit einer Kombination aus mehreren Lastfällen belastet, z.B. Torsion und Biegung. Dabei können Effekte auftreten, die bei Belastung durch nur einen Lastfall nicht auftreten würden. Die physikalisch korrekte Modellierung des Deformationsverhaltens erfordert Modellparameter, die mit Hilfe von Experimenten bestimmt werden müssen. Es wurde bereits in [4, 13, 39, 65, 77] gezeigt, dass es notwendig ist, eine geeignete Datenbasis zur Parameteridentifikation zu verwenden. Konkret bedeutet dies, dass für die Simulation von multiaxialen Lastfällen Parameter in multiaxialen Experimenten bestimmt werden müssen. Im Rahmen dieser Arbeit werden multiaxiale Experimente durchgeführt, die an die Versuchs-

führung in [34] für Metalldrähte angelehnt ist. Weitere multiaxiale Experimente zur Untersuchung von mechanischen Eigenschaften von Kabeln sind nicht bekannt.

Kontinuumsmechanische Modelle müssen räumlich diskretisiert werden, um die Modellgleichungen in guter Näherung lösen zu können. Der gebräuchliche Ansatz der *Finite-Elemente-Methode* (FEM) [6, 43, 84] ist dazu geeignet, beliebig komplexe Bauteilgeometrien zu simulieren. Hierfür wird das Bauteil in eine endliche Anzahl an Teilgebieten zerlegt, die Lösung der Modellgleichungen für jedes dieser Elemente bestimmt und anschließend für die gesamte Lösung assembliert. Solche Modelle ermöglichen neben der Umsetzung beliebig komplexer Geometrien auch die Einbindung konstitutiver Gesetze zur Beschreibung des Materialverhaltens [25, 42, 58, 62]. Im Allgemeinen erfolgt die Diskretisierung in der FEM mit Volumenelementen, zum Beispiel Hexaedern oder Tetraedern. Für flache Strukturen ist es aber geschickter, Schalenelemente zur Diskretisierung zu verwenden [1], da so die Formulierungen für Ansatzfunktionen den auftretenden Deformationen angepasst werden können. Ein Beispiel dafür ist die Simulation von Sandwich-Strukturen bestehend aus verschiedenen Materialien [24]. Eine weitere Reduktion der Struktur kann für eindimensionale Kontinua durchgeführt werden. Die Verwendung von solchen finiten Balkenelementen [15, 35, 63, 75] basierend auf der geometrisch exakten Cosseratbalkentheorie ist weit verbreitet [8, 12, 38, 66]. In [11] wird die Finite-Elemente-Modellierung für die Simulation von flexiblen elastischen Balken formuliert. Düster et al. [22, 23] entwickelten für die Diskretisierung dünnwandiger Strukturen eine Familie anisotroper finiter Elemente hoher Ordnung. Da hierfür der Polynomgrad der Ansatzordnung erhöht wird, werden sie p -Elemente genannt. Der Ansatz für die Verschiebungen ist in dieser Formulierung anisotrop und damit gut geeignet, um das anisotrope Verhalten von Balken und Stäben abzubilden. In [21] wurde dieser Ansatz zur Simulation der Torsion von Kabeln verwendet und gezeigt, dass er gute Ergebnisse liefert. Ein weiterer Ansatz zur Diskretisierung von flexiblen Balken basiert auf der diskreten Differentialgeometrie von Kurven [48, 69]. Dieser Ansatz wird in *IPS Cable Simulation* verwendet.

Wiens vergleicht in [80] verschiedene Methoden zur Verlaufsmessung und -simulation der finiten räumlichen Deformationen von Kabeln. Die verschiedenen Simulationmethoden beruhen auf unterschiedlichen Diskretisierungen des Kabelmodells. Wiens stellt fest, dass die Materialkennwerte in den Simulationsmodellen einen entscheidenden Einfluss auf die Güte der Simulation haben, beschränkt

sich aber auf die Untersuchung der elastischen Materialkennwerte.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung des Verhaltens von Kabeln unter großen Biegedeformationen, da diese vorrangig in Anwendungen auftreten. Ziel dieser Arbeit ist es, das phänomenologische Verhalten von Kabeln unter Biegung mit Hilfe der Konstitutivgesetze für Cosseratbalken auf Ebene der Schnittgrößen abzubilden, ohne dabei die Struktureffekte auf Mikro- und Mesoebene getrennt voneinander zu simulieren. In [5] wurde eine Multiskalensimulation verwendet, um einen zyklischen Zugversuch an Kabeln, die aus bis zu 144 Strängen bestehen, zu simulieren. Dazu wird jeder Strang einzeln mit Hilfe nichtlinearer finiter Elemente simuliert und der Kontakt zwischen den Strängen berechnet. Dieser Ansatz liefert das auch in dieser Arbeit erwartete inelastische Verhalten, allerdings erfordert die Simulation eine große Anzahl an Parametern (Kontaktparameter, Materialparameter) und eine komplexe Prozedur, um die Ausgangslage der einzelnen Stränge im Leiter zu berechnen. In [60] wurde eine Methode vorgestellt, mit der die krümmungsabhängige Biegesteifigkeit von Kabeln aus verdrehten Drähten beruhend auf den Prinzipien der Seilmechanik berechnet werden kann. Eine mit der Biegekrümmung veränderliche Steifigkeit kann allerdings nicht alle Effekte abdecken, die bei der zyklischen Biegung von inelastischen Kabeln auftreten. Zudem werden in den hier zitierten Arbeiten sehr einfache Kabelstrukturen untersucht, in Anwendungen kennt die Komplexität von Kabelstrukturen aber keine Grenzen. Unser Ziel ist es, eine möglichst große Vielfalt an Kabeln mit einem geeigneten konstitutiven Modell abbilden zu können, für das für jedes Kabel lediglich unterschiedliche Modellparameter in einfachen Experimenten identifiziert werden und keine komplexen Multiskalensimulationen durchgeführt werden müssen.

3

Theoretische Grundlagen

3.1 Cosseratbalken

Die Kontinuumsmechanik stellt das Grundgerüst für die Beschreibung deformierbarer Körper unter der Einwirkung äußerer Kräfte dar [28, 31, 78]. Dabei wird ausschließlich die makroskopische Ebene des Körpers betrachtet und der mikrostrukturelle oder atomare Aufbau des Körpers vernachlässigt. Die Materie des Körpers wird als kontinuierlich über den Raum verteilt angenommen. Simulationsmethoden, die auf Basis der Physik z.B. zur Produktentwicklung oder naturwissenschaftlichen Forschung eingesetzt werden, beruhen auf den Grundlagen der Kontinuumsmechanik. Die Kontinuumsmechanik besteht grundsätzlich aus der Beschreibung der Kinematik, Bilanzgleichungen und konstitutiven Gesetzen.

Lange, schlanke Objekte, deren charakteristische Abmessung des Querschnitts sehr viel kleiner als die Länge ist ($d \ll L$), können als eindimensionale Kontinua beschrieben werden. Dies vereinfacht die allgemeine Formulierung der Kontinuumsmechanik und ist die Grundlage für Balkenmodelle. Die Cosseratbalkentheorie liefert ein geometrisch nicht-lineares – oder *geometrisch exaktes* – Modell, welches geeignet ist, die Deformationen von flexiblen, langen, schlanken Objekten zu beschreiben [2]. Geometrisch exakt bedeutet, dass die Rotationen exakt, also bei-

spielsweise ohne Näherung für kleine Winkel, behandelt werden. Die räumlichen Rotationen und Verschiebungen können hier groß werden, wobei die lokalen Deformationen klein bleiben.

Im Folgenden werden die geometrisch exakte Kinematik, die statischen Gleichgewichtsgleichungen und die Konstitutivgesetze des Cosseratbalkens erläutert.

3.1.1 Geometrisch exakte Kinematik

Die geometrisch exakte Kinematik des Cosseratbalkenmodells kann mit Hilfe der Konfigurationsvariablen einer Cosseratkurve beschrieben werden, wie sie in Abbildung 3.1 dargestellt sind. Die Kurve wird definiert durch eine Mittellinie $\mathbf{r}(s)$,

$$s \mapsto \mathbf{r}(s) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.1)$$

und ein orthonormales Koordinatensystem $\mathbf{R}(s)$ aus den Vektoren $\mathbf{a}^{(j)}(s)$,

$$s \mapsto \mathbf{R}(s) = \mathbf{a}^{(j)}(s) \otimes \mathbf{e}_j \in SO(3). \quad (3.2)$$

Beide werden durch den Kurvenparameter s parametrisiert [2]. Mit \mathbf{e}_j werden hier die Direktoren des feststehenden, globalen Koordinatensystems bezeichnet. Dadurch werden die Positionen der Querschnittszentren und die Orientierungen der Querschnitte definiert. Die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}(s)$ und $\mathbf{a}^{(2)}(s)$ spannen die lokale Querschnittsfläche auf und $\mathbf{a}^{(3)} = \mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}$ definiert die Normale auf die Querschnittsfläche. Üblicherweise wird der Kurvenparameter s gleichgesetzt mit der Bogenlänge der Kurve, sodass der Tangentenvektor der Kurve $\mathbf{t}(s) = \mathbf{r}'(s)$ Einheitslänge besitzt. Entspricht die Normale der Querschnittsfläche $\mathbf{a}^{(3)}$ dem Tangentenvektor $\mathbf{t}(s)$, so ist die Bernoullische Annahme erfüllt, die besagt, dass Querschnittsflächen orthogonal zur Mittellinie orientiert bleiben [26, 48].

Im Folgenden wird zwischen Größen unterschieden, die im globalen oder lokalen (materiellen) Koordinatensystem definiert werden. Die materiellen Größen können durch eine Vorwärtsrotation mittels \mathbf{R} in die räumlichen Größen überführt werden. Die Komponenten der räumlichen Größen im lokalen Koordinatensystem $(\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)})$ entsprechen dann den Komponenten der materiellen Größen im globalen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. In dieser Arbeit werden materielle Größen

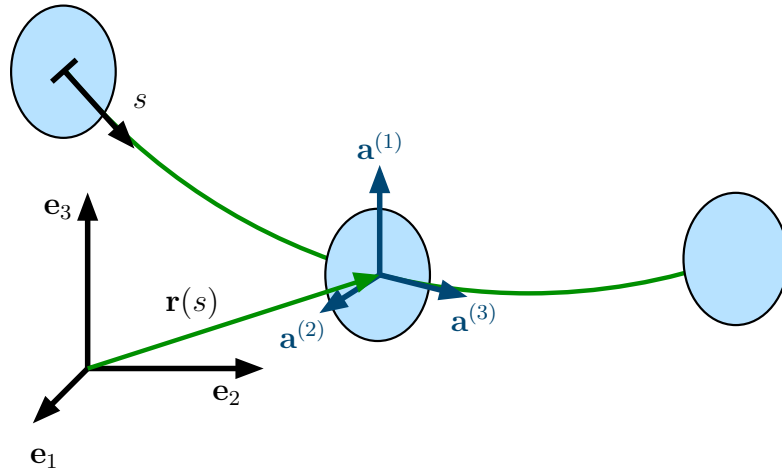


Abbildung 3.1: Definition der Konfigurationsvariablen des Cosseratbalkens.

mit Großbuchstaben und globale Größen mit Kleinbuchstaben benannt.

Basierend auf der geometrisch exakten Definition der Kinematik können objektive Deformationsmaße definiert werden. Die materiellen rotatorischen Deformationen \mathbf{K} und die materiellen translatorischen Deformationen $\mathbf{\Gamma}$ werden im lokalen Koordinatensystem definiert,

$$\begin{aligned} K^{(\alpha)} &:= \langle \mathbf{a}^{(\alpha)}, \mathbf{a}^{(3)} \times \partial_s \mathbf{a}^{(3)} \rangle; & \Gamma^{(\alpha)} &:= \langle \mathbf{a}^{(\alpha)}, \partial_s \mathbf{r} \rangle; & \alpha &= 1, 2 \\ K^{(3)} &:= \langle \mathbf{a}^{(2)}, \partial_s \mathbf{a}^{(1)} \rangle; & \Gamma^{(3)} &:= \langle \mathbf{a}^{(3)}, \partial_s \mathbf{r} \rangle - 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei mit $\langle \bullet, \bullet \rangle$ das Skalarprodukt zweier Vektoren dargestellt wird. Die Einträge im Vektor der translatorischen Deformationsmaße sind hier so definiert, dass $\Gamma^{(\alpha)}$ die transversalen Scherungen und $\Gamma^{(3)}$ die longitudinale Dehnung entlang der Balkenachse angeben. Die transversalen Scherungen berechnen sich jeweils als das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a}^{(\alpha)}$ mit dem Tangentenvektor und geben damit die Verkipfung des Querschnitts gegen die Tangente an. Sie sind im Allgemeinen sehr klein. Die Komponenten $K^{(\alpha)}$ stellen die Biegekrümmungen um die beiden Achsen $\mathbf{a}^{(\alpha)}$ und $K^{(3)}$ die Torsionskrümmung für Verdrehung um die Balkenlängsachse dar. Damit sind die Deformationsmaße für die für Balken relevanten Lastfälle uniaxialer Zug, Torsion um die Längsachse, Biegung und transversale Scherung definiert. Hierbei ist zu erwähnen, dass die transversalen Deformationen für Kabel vergleichsweise klein sind. Während die longitudinale Dehnung von Kabeln in uniaxialen Zugversuchen gemessen werden kann, ist auf Grund der schlanken Geometrie von Kabeln eine Messung der transversalen Scherungen nicht separiert möglich. Zudem sind Kabel entlang der Längsachse vergleichsweise steif, sodass die geringen Längsdehnungen zu nicht zu vernachlässigenden Zugkräften führen. Deshalb wer-

den in dieser Arbeit die Biegung, Torsion und Zug in Form von Grundlagen- und multiaxialen Experimenten durchgeführt, die transversale Scherung aber vernachlässigt.

In Kapitel 4.1.3 werden Biegeversuche in der Ebene vorgestellt, auf denen in dieser Arbeit ein Fokus liegt. Die Biegekrümmungen werden deshalb im Vektor $\mathbf{K}_B = (K^{(1)}, K^{(2)})^T$ mit der Länge

$$K_B = \|\mathbf{K}_B\| = \sqrt{(K^{(1)})^2 + (K^{(2)})^2}, \quad (3.4)$$

welche dem absoluten Betrag der Biegekrümmung in der Ebene entspricht, zusammengefasst.

3.1.2 Statische Gleichgewichtsgleichungen

Für Balkenmodelle ist es günstig, die Gleichgewichtsgleichungen basierend auf querschnittsintegrierten Spannungsgrößen, den Schnittgrößen, zu formulieren. Analog zu den Deformationsmaßen können die Schnittgrößen für translatorische, die Schnittkräfte \mathbf{F} , und rotatorische Deformationen, die Schnittmomente \mathbf{M} , unterschieden werden. Die Komponenten der Schnittkräfte sind die transversalen Scherkräfte $F^{(1,2)}$ und die Längskraft $F^{(3)}$, welche in Richtung der lokalen Querschnittsnormalen wirkt. Die Schnittmomente $M^{(1,2)}$ resultieren aus der Biegung um die Biegeachsen und $M^{(3)}$ wird durch die Torsion um die Balkenlängsachse verursacht. Das Biegemoment für die ebene Biegung wird äquivalent zur Biegekrümmung in dem Vektor $\mathbf{M}_B = (M^{(1)}, M^{(2)})^T$ zusammengefasst und der Wert des ebenen Biegemoments berechnet sich aus dem Betrag

$$M_B = \|\mathbf{M}_B\| = \sqrt{(M^{(1)})^2 + (M^{(2)})^2}. \quad (3.5)$$

Bisher wurden die materiellen Schnittgrößen eingeführt, die sich durch eine Vorwärtsrotation in die räumlichen Schnittgrößen umrechnen lassen,

$$\mathbf{f} = \mathbf{R}(s) \cdot \mathbf{F}; \quad \mathbf{m} = \mathbf{R}(s) \cdot \mathbf{M}. \quad (3.6)$$

Die statischen Gleichgewichtsgleichungen der Kräfte und Momente für Cosserat-

balken werden in den räumlichen Schnittgrößen formuliert und lauten

$$\begin{aligned}\partial_s \mathbf{f} + \mathbf{f}_{ext} &= \mathbf{0}, \\ \partial_s \mathbf{m} + \partial_s \mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{m}_{ext} &= \mathbf{0},\end{aligned}\tag{3.7}$$

wobei externe Kräfte und Momente mit dem Index $(\bullet)_{ext}$ versehen sind.

3.1.3 Konstitutivgesetze auf Basis von Schnittgrößen

Bis zu diesem Punkt ist die Beschreibung des deformierbaren Festkörpers unabhängig von seinen Materialeigenschaften. Die Konstitutivgesetze sind das Werkzeug, welches die Verknüpfung der Deformationen unter Einwirken äußerer Lasten mit den Schnittgrößen unter Einbeziehung von charakteristischen Verhaltensweisen herstellt [47]. Sie stellen eine idealisierte mathematische Beschreibung des realen Materialverhaltens dar. Dabei gilt das Prinzip der materiellen Objektivität, welches besagt, dass die Gültigkeit der Konstitutivgesetze unabhängig vom Bezugssystem sein muss. Des Weiteren soll materielle Symmetrie in den Konstitutivgesetzen widergespiegelt werden. Sie fordert, dass Größen unter symmetrieerhaltenden Transformationen erhalten bleiben.

Im Gegensatz zur dreidimensionalen Kontinuumsmechanik, in der Konstitutivgesetze auf Basis von Spannungstensoren formuliert werden, können Konstitutivgesetze für Cosseratbalken vektoriell auf Basis der Schnittgrößen formuliert werden [29, 50, 54]. Dafür eignen sich die materiellen Schnittgrößen und Deformationsmaße, da diese auch in den später beschriebenen Experimenten für flexible, balkenartige Proben leicht zugänglich sind. Im Allgemeinen hängen die Schnittkräfte \mathbf{F} und die Schnittmomente \mathbf{M} von den Deformationsmaßen $\mathbf{\Gamma}$ und \mathbf{K} ab,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{K}); \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{\Gamma}, \mathbf{K}).\tag{3.8}$$

Dabei kann Kopplung zwischen den translatorischen und rotatorischen Deformationsmaßen auftreten. In dieser Arbeit wird ein reduzierter Ansatz für die Konstitutivgesetze verwendet, der keine Kopplung zwischen translatorischen und rotatorischen Deformationen annimmt. Damit hängen die Schnittkräfte nur von den translatorischen und die Schnittmomente nur von den rotatorischen Deformationsmaßen ab,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{\Gamma}); \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{K}).\tag{3.9}$$

Hierbei handelt es sich um die Formulierung der Konstitutivgesetze für den Spezialfall, dass das geometrische Zentrum und das Scherzentrum des Querschnitts aufeinander liegen. Diese Annahme ist im Fall der isotropen Querschnitte von Kabeln zulässig.

Das experimentell beobachtete Deformationsverhalten von Körpern wird in phänomenologischen Konstitutivgesetzen abgebildet. Es werden keine molekularen oder atomistischen Prozesse betrachtet. Konstitutivgesetze werden im Allgemeinen auch Materialgesetze genannt. Diese Bezeichnung wird in dieser Arbeit bewusst nicht verwendet, da das konstitutive Verhalten auf makroskopischer Ebene des homogenisierten Kabelquerschnitts beschrieben wird und nicht auf Basis der Materialmodellierung der einzelnen Bestandteile eines Kabels.

In dieser Arbeit wird ausschließlich ratenunabhängiges konstitutives Verhalten untersucht. Dabei kann unterschieden werden, ob der Körper kein Gedächtnis, ein schwindendes oder perfektes Gedächtnis besitzt [31]. Elastisches Verhalten hat kein Gedächtnis, während viskoelastisches Verhalten einem schwindenden und ideal plastisches Verhalten einem perfekten Gedächtnis entspricht. Hierbei hängen die aktuellen Eigenschaften von der Deformationsgeschichte des Körpers ab.

3.2 Konstitutivgesetze

Im folgenden Kapitel werden verschiedene Konstitutivgesetze erläutert, die das Werkzeug für die Modellierung unterschiedlichen Bauteilverhaltens darstellen. Dabei wird jeweils zunächst die kontinuumsmechanische Formulierung aufgeführt und anschließend die Formulierung basierend auf den Schnittgrößen des Cosseratbalkens dargestellt. Zusätzlich wird die eindimensionale Formulierung der Konstitutivgesetze für die planare Biegung von Cosseratbalken dargestellt, welche für das Verständnis und die Auswertung der Biegeversuche in den Kapiteln 4.1.3 und 5.2 notwendig sind.

3.2.1 Lineare Elastizität

Die lineare Elastizität ist der am einfachsten zu beschreibende Fall konstitutiven Verhaltens. Im Dreidimensionalen ist hier der zweistufige Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ linear mit dem zweistufigen Verzerrungstensor \mathbf{E} verknüpft,

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbb{C}} : \mathbf{E}. \quad (3.10)$$

Mit $\overset{4}{\mathbb{C}}$ wird der vierstufige Steifigkeitstensor bezeichnet, welcher die Materialkonstanten enthält. Der Doppelpunkt symbolisiert die doppelte Überschiebung. Er besteht aus 81 Komponenten, die sich zu 21 unabhängigen Materialkonstanten im allgemeinen Fall reduzieren, da Spannungs- und Verzerrungstensor und damit auch der Steifigkeitstensor symmetrisch sind. Handelt es sich um isotropes, d.h. von der Richtung unabhängiges, Verhalten, reduzieren sich die unabhängigen Konstanten auf zwei. Meistens werden hier der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν oder der Schubmodul G angegeben, da sie im uniaxialen Zugversuch leicht zugänglich sind. Gleichung (3.10) stellt eine Verallgemeinerung des Federgesetzes dar und beschreibt ideal reversibles, ratenunabhängiges, lineares Verhalten.

Dieses Verhalten kann analog in den materiellen Größen des Cosseratbalkens in vektoriellen Gleichungen beschrieben werden,

$$\mathbf{F} = \mathbb{C}_{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{el}; \quad \mathbf{M} = \mathbb{C}_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{K}_{el}. \quad (3.11)$$

Dabei werden die elastischen Deformationsmaße mit dem Index $(\bullet)_{el}$ gekennzeichnet. Es wird keine Kopplung zwischen den Schnittkräften und -momenten angenommen. Deshalb können die konstitutiven Gesetze für die materiellen Kräfte und Momente separat formuliert und die elastischen Steifigkeitsmatrizen getrennt definiert werden. Zusätzlich wird angenommen, dass keine Kopplung zwischen Basislastfällen auftritt und die Steifigkeitsmatrizen reduzieren sich zu Diagonalmatrizen,

$$\mathbb{C}_{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} (GA)_1 & 0 & 0 \\ 0 & (GA)_2 & 0 \\ 0 & 0 & (EA)_Z \end{bmatrix}; \quad \mathbb{C}_{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} (EI)_1 & 0 & 0 \\ 0 & (EI)_2 & 0 \\ 0 & 0 & (GJ)_T \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Die Einträge dieser Matrizen stellen die elastischen Modellparameter, die Steifigkeiten dar. An deren Bezeichnung ist bereits zu erkennen, dass sie immer aus einer

Kombination aus *materiellen* (Elastizitätsmodul E , Schubmodul G) und *geometrischen* Parametern (Querschnittsfläche A , axiales Flächenträgheitsmoment für kreisförmige Querschnitte I und polares Flächenträgheitsmoment J) bestehen. Es soll hier noch einmal betont werden, dass in dieser Arbeit das makroskopische Verhalten der balkenähnlichen Proben untersucht werden soll. Deshalb ist es nicht sinnvoll, die materiellen und geometrischen Parameter des Querschnitts getrennt zu betrachten oder zu bestimmen und die Steifigkeiten als Ganzes werden als Modellparameter verwendet. Des Weiteren wird angenommen, dass die Querschnitte der untersuchten Proben kreisrund und isotrop sind. Deshalb gilt für die Biegesteifigkeiten $(EI)_1 = (EI)_2 = (EI)_B$ und für die transversalen Schersteifigkeiten $(GA)_1 = (GA)_2 = (GA)_S$. $(EA)_Z$ bezeichnet die Zugsteifigkeit und mit $(GJ)_T$ wird die Torsionssteifigkeit benannt.

Unter reiner, planarer Biegung, wie sie in Kapitel 4.1.3 beschrieben wird, ist es ausreichend, den Zusammenhang zwischen Biegemoment und Biegekrümmung zu betrachten. Das eindimensionale Konstitutivgesetz für linear elastische ebene Biegung reduziert sich dann zu der skalaren Gleichung

$$M_B = (EI)_B K_B. \quad (3.13)$$

3.2.2 Abschnittsweise definierte lineare Elastizität

Einen Spezialfall des linear elastischen konstitutiven Verhaltens stellt die abschnittsweise definierte lineare Elastizität dar. Das phänomenologische Verhalten ist ebenfalls reversibel und abschnittsweise linear, allerdings mit verschiedenen elastischen Steifigkeiten in verschiedenen Lastbereichen wie in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt. Dieses konstitutive Verhalten tritt zum Beispiel bei Bowdenzügen unter Biegung auf und wird in Kapitel 5.2.2 näher betrachtet. Das zugehörige skalare Konstitutivgesetz für die planare Biegung kann durch eine Fallunterscheidung formuliert werden,

$$M_B = \begin{cases} (EI)_{B,1} K_B & \text{für } |K_B| < K_{B,t} \\ M_{B,t} + (EI)_{B,2} (K_B - K_{B,t}) & \text{für } |K_B| \geq K_{B,t}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Dabei ist $(EI)_{B,1}$ der Proportionalitätsfaktor, der bis zu einem gewissen Krümmungsbetrag $K_{B,t}$ gilt. Bei diesem Schwellwert liegt das Biegemoment $M_{B,t}$ vor

und danach beträgt die Steigung $(EI)_{B,2}$.

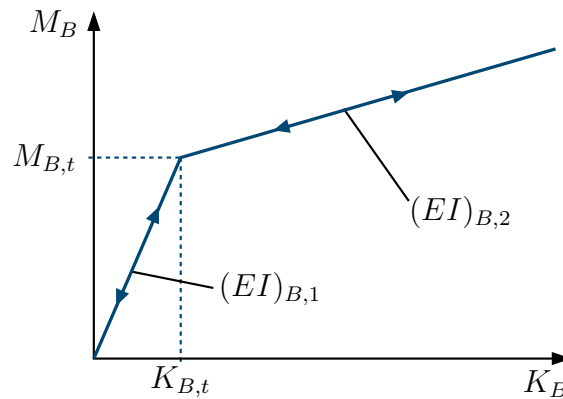


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung des abschnittsweise definierten linear elastischen Verhaltens unter Biegung.

3.2.3 Elastoplastizität

Das bisher beschriebene konstitutive Verhalten zeichnet sich dadurch aus, dass die Deformationen reversibel sind. Das heißt, dass nach einer Be- und darauffolgender Entlastung der ursprüngliche Zustand wieder erreicht wird. Für plastisches Verhalten ist es charakteristisch, dass Verformungen irreversibel sind. Plastizität zeichnet sich durch Energiedissipation aus und ist deshalb ein Beispiel für inelastisches Verhalten. Bei der Plastizität handelt es sich um ratenunabhängiges Verhalten, bei dem die Geschwindigkeit der Deformation keinen Einfluss auf den Belastungspfad hat. Zudem werden quasistatische Vorgänge betrachtet. Das bedeutet, dass die Vorgänge so langsam ablaufen, dass das Material instantan reagieren kann und Relaxationsprozesse oder Trägheitseffekte keine Rolle spielen.

Der zusammengesetzte Begriff Elastoplastizität drückt aus, dass zumeist am Anfang jeder Belastung bei kleinen Deformationen ein elastischer Bereich durchlaufen wird. Das plastische Verhalten setzt erst bei Überschreiten der *Fließgrenze* ein, ab der dissipative Vorgänge und irreversible Deformationen stattfinden. Ideal plastisches Verhalten ist schematisch in Abbildung 3.3 (*rechts*) dargestellt. Herleiten lässt sich das aus dem rheologischen Ersatzschaltbild in Abbildung 3.3 (*links*), welches die Reihenschaltung eines Coulombschen Reibelements mit einer elastischen Feder im eindimensionalen Fall darstellt [73].

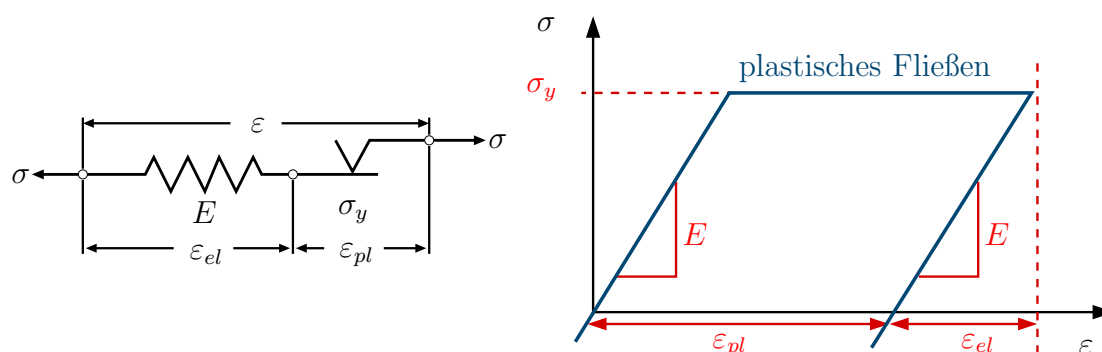


Abbildung 3.3: *Links*: Darstellung des eindimensionalen ratenunabhängigen rheologischen Ersatzschaltbildes für Elastoplastizität nach Simo und Hughes [73]. *Rechts*: Schematisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm für eindimensionale ideale Plastizität.

Anhand des Ersatzschaltbilds wird nun im Allgemeinen die konstitutive Modellierung für eindimensionale Elastoplastizität hergeleitet, um die für höherdimensionale Probleme notwendigen Formulierungen ergänzt und später auf die Größen des Cosseratbalkenmodells übertragen. In der Reihenschaltung kann die Gesamtdehnung ε , die unter Anlegen der Spannung σ auftritt, additiv zerlegt werden in einen elastischen Teil ε_{el} , der in der Feder wirkt und einen plastischen Teil ε_{pl} , der im Reibelement stattfindet. Die additive Zerlegung der Deformationsmaße ist nur zulässig, wenn kleine Deformationen auftreten. Ansonsten muss ein multiplikativer Split erfolgen. Die Voraussetzung kleiner Deformationen ist im Fall des Cosseratbalkens im Allgemeinen erfüllt, da auf Grund des hohen Aspektverhältnisses von Balken zwar räumlich große Deformationen auftreten, die lokalen Deformationen allerdings immer klein bleiben. Ausgehend von der eindimensionalen Variante des elastischen Konstitutivgesetzes (3.10),

$$\sigma = E \varepsilon_{el}, \quad (3.15)$$

kann unter Verwendung der additiven Zerlegung der Deformationen

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{pl}, \quad (3.16)$$

das elastoplastische Teilgesetz formuliert werden als

$$\sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_{pl}). \quad (3.17)$$

Die Abgrenzung des elastischen vom plastischen Bereich erfolgt durch die Einführung einer Fließbedingung. Sie beschreibt im Fall der idealen Plastizität, dass

die Spannung im elastoplastischen rheologischen Element die Fließgrenze σ_y nicht überschreiten darf. Für alle zulässigen Zustände muss gelten, dass σ kleiner oder gleich σ_y ist. Dies wird in der Fließbedingung f zusammengefasst,

$$f(\sigma) := |\sigma| - \sigma_y \leq 0. \quad (3.18)$$

Im vorliegenden eindimensionalen Fall liefert die Fließbedingung eine skalare Fließgrenze. Im zweidimensionalen Fall ist die Fließgrenze eine Kurve und im dreidimensionalen Fall eine Fläche. Es werden nun zwei Fälle unterschieden: Ist $f(\sigma) < 0$ erfüllt, ist die Antwort des Materials elastisch und instantan. Die plastischen Deformationen bleiben konstant und die zeitliche Ableitung der plastischen Deformation ist Null,

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \frac{d\varepsilon_{pl}}{dt} = 0. \quad (3.19)$$

Wenn $f(\sigma) = 0$ gilt und eine Belastungsbedingung erfüllt ist, findet plastisches Fließen statt und die plastischen Deformationen ändern sich, $\dot{\varepsilon}_{pl} \neq 0$.

Die Änderung der plastischen Deformationsmaße wird im allgemeinen höherdimensionalen Fall durch eine Evolutionsgleichung für den plastischen Verzerrungstensor \mathbf{E}_{pl} beschrieben, die Fließregel genannt wird. Sie kann mit Hilfe der Fließrate γ und eines Fließpotenzials $G(\boldsymbol{\sigma})$, das vom Spannungszustand abhängig ist, formuliert werden,

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl} = \frac{d\mathbf{E}_{pl}}{dt} = \gamma \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.20)$$

Entspricht das Fließpotenzial der Fließbedingung $f(\boldsymbol{\sigma})$, spricht man von assoziiertem Fließen. Im eindimensionalen Fall reduziert sich die Fließregel auf

$$\dot{\varepsilon}_{pl} = \gamma. \quad (3.21)$$

Die Ableitung

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.22)$$

gibt im höherdimensionalen Fall die Richtung des Fließens an. Im eindimensionalen Fall entspricht die Fließrichtung trivial der Richtung der Spannung. Die Fließrate kann im höherdimensionalen Fall aus der Konsistenzbedingung

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad (3.23)$$

welche gilt, wenn $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ erfüllt ist, berechnet werden. Anschaulich besagt diese, dass der Spannungszustand auf der Fließgrenze bleiben muss ($\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$), während plastisches Fließen auftritt ($f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$). Die notwendigen Bedingungen für den Fließvorgang können in den Kuhn-Tucker-Komplementaritätsbedingungen zusammengefasst werden [53],

$$\gamma \geq 0; \quad f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0; \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (3.24)$$

Ideale Elastoplastizität, wie sie bisher beschrieben wurde, bildet die Realität nur begrenzt ab, da sich hier bei Belastung die Fließgrenze nicht verändert. Um die Formulierung um eine Abhängigkeit der Fließgrenze von der Deformationshistorie abbilden zu können, wird die elastoplastische Formulierung um *Verfestigung* erweitert. Dabei wird zwischen isotroper Verfestigung, bei der sich die Fließgrenze in alle Dimensionen gleichmäßig ausdehnt, und kinematischer Verfestigung, bei der sich die Fließgrenze in eine Richtung verschiebt, unterschieden. Im Eindimensionalen lautet die Fließbedingung mit isotroper und kinematischer Verfestigung

$$f(\sigma, \beta, \alpha) := |\sigma - \beta| - [\sigma_y + H_i \alpha] \leq 0, \quad (3.25)$$

wobei β die interne kinematische Verfestigungsvariable, die *Rückspannung*, und α die interne isotrope Verfestigungsvariable ist. Mit H_i wird der isotrope Verfestigungsmodul bezeichnet. Für die internen Verfestigungsvariablen werden Evolutionsgleichungen aufgestellt, die im Allgemeinen von der Rate der plastischen Deformation abhängen,

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}(\dot{\epsilon}_{pl}), \quad (3.26)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\dot{\epsilon}_{pl}). \quad (3.27)$$

In Analogie zum additiven Split der Dehnungen in (3.15) und (3.16), können auch die Deformationsmaße des Cosseratbalkens in einen elastischen und plastischen Anteil aufgeteilt werden,

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_{el} + \boldsymbol{\Gamma}_{pl}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{el} + \mathbf{K}_{pl}. \quad (3.28)$$

Das elastoplastische Konstitutivgesetz formuliert in den Schnittgrößen lautet ana-

log zu (3.17),

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbb{C}_{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{el} = \mathbb{C}_{\mathbf{F}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma}_{pl}); \\ \mathbf{M} &= \mathbb{C}_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{K}_{el} = \mathbb{C}_{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{pl}).\end{aligned}\quad (3.29)$$

Unter Betrachtung planarer Biegung vereinfacht sich dieses Modell wieder zu der eindimensionalen Variante, die im skalaren Biegemoment M_B und der zugehörigen skalaren Krümmung K_B formuliert werden kann. Zusammengefasst lautet das elastoplastische Teilgesetz für die entkoppelte Biegung dann

$$\begin{aligned}M_B &= (EI)_B (K_B - K_{B,pl}), \\ f(M_B, \beta, \alpha) &:= |M_B - \beta| - [M_{B,y} + H_i \alpha] \leq 0, \\ \dot{K}_{B,pl} &= \gamma \frac{\partial G(M_B)}{\partial M_B}.\end{aligned}\quad (3.30)$$

Hierbei ist Gleichung (3.30)₃ zur Vollständigkeit für den höherdimensionalen Fall gegeben und reduziert sich im eindimensionalen zu

$$\dot{K}_{B,pl} = \gamma. \quad (3.31)$$

Dazu kommen die Evolutionsgleichungen für die internen Verfestigungsvariablen (3.26), (3.27) und die Kuhn-Tucker-Komplementaritäts-Bedingungen (3.24). Der aus diesem Modell theoretisch zu erwartende Verlauf des Biegemoments über die Biegekrümmung ist in Abbildung 3.4 (*links*) abgebildet. Die hier beschriebene Fließfunktion ist ein Kreis in der Ebene der Biegemomente $M^{(1)}$ und $M^{(2)}$, siehe Abbildung 3.4 (*rechts*).

3.2.4 Schädigungsmodelle

Elastoplastische Modelle zeichnen sich dadurch aus, dass bei Entlastung nach einer plastischen Belastung ein elastischer Bereich folgt, der durch die Parameter des elastischen Teilgesetzes beschrieben wird. Im Fall von linearer Elastizität folgt, wie in Abbildung 3.4 (*links*) dargestellt, ein linearer Bereich, der parallel zur initialen Belastung ist. Erfolgt die Entlastung allerdings mit einer geänderten, meist geringeren, Steigung, liegt typisches Schädigungsverhalten vor. Die Ursache dafür sind bei Vollmaterialien oft Risse, die unter Last entstehen und wachsen. Bei Kabeln

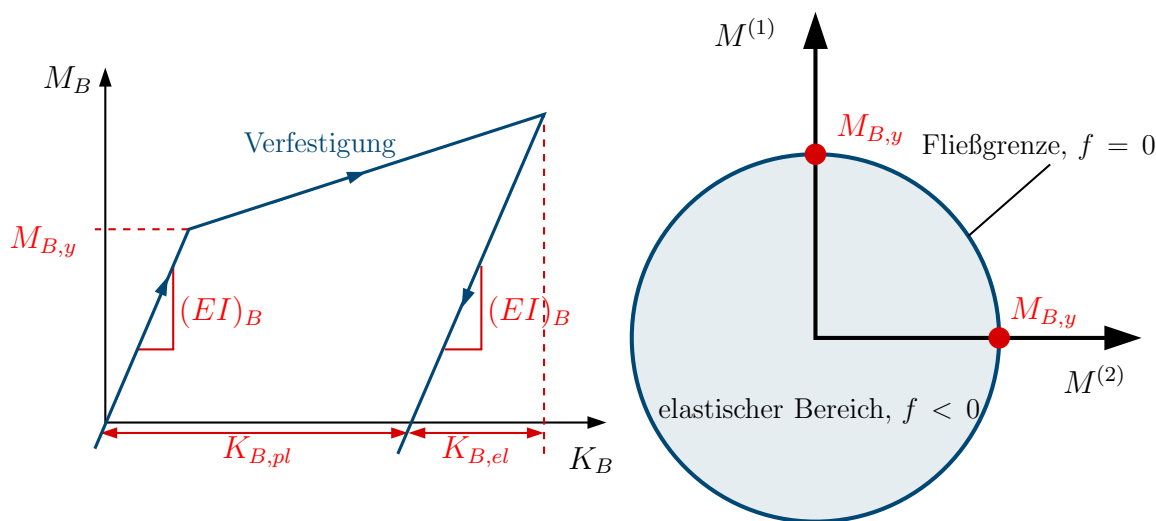


Abbildung 3.4: *Links:* Schematische Darstellung des Biegemoment-Biegekrümmungsverlaufs für die elastoplastische planare Biegung in den Größen des Cosseratbalkens. *Rechts:* Darstellung der Fließbedingung aus (3.30), welche einen Kreis in der Biegemomentenebene beschreibt, Dörlich et al. [18].

können unterschiedliche Effekte auftreten, die ein schädigungstypisches Verhalten unter Last verursachen, zum Beispiel Ablösen der Bestandteile, Risse in der Hülle oder Bruch der Einzelleiter. Kontinuumsmechanische Schädigungsmodelle [36, 45, 46] sind in der Lage, dieses Verhalten abzubilden.

Zur Modellierung von Schädigung muss eine interne Schädigungsvariable eingeführt werden. Im Konzept der effektiven Spannungen [40, 47] wird die Schädigungsvariable D auf Basis von geometrischen Überlegungen eingeführt,

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon. \quad (3.32)$$

Dabei wird angenommen, dass sich die effektive Fläche, auf die eine Kraft im Material wirkt, durch Rissbildung verringert und damit die effektive Spannung steigt. Im ungeschädigten Zustand wird $D = 0$ definiert.

Ein alternativer Ansatz zur Schädigungsmodellierung [36, 59] ist besser geeignet, um ein anisotropes Schädigungsmodell im Dreidimensionalen umzusetzen und führt die Nachgiebigkeit \mathbb{D} als Schädigungsvariable ein,

$$\mathbf{E} = \mathbb{D} : \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.33)$$

Im unbelasteten Zustand ist die Nachgiebigkeit die Inverse des Elastizitätstensors \mathbb{C} . Während der Elastizitätstensor konstant ist, entwickelt sich die Nachgiebigkeit unter schädigender Belastung. Diese Schädigungsformulierung wird in dieser Arbeit verwendet, weil sie im gleichen Rahmenwerk wie die Elastoplastizität umgesetzt werden kann. Wir betrachten zunächst die eindimensionale Formulierung mit der skalaren Schädigungsvariable D . Analog zur Fließbedingung wird ein Schädigungskriterium formuliert, welches den Beginn der Schädigung inklusive isotroper Schädigungsverfestigung definiert,

$$f_d(\sigma) := |\sigma| - (\sigma_d + q_d) \leq 0, \quad (3.34)$$

mit $q_d = H_d \alpha_d$. Der Index d kennzeichnet die Variablen und Parameter, die dem Schädigungsmodell zugeordnet werden. Dem *Prinzip der maximalen Dissipation* für das vorliegende Schädigungsmodell [36] folgend kann die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable und die internen Variable hergeleitet werden als

$$\dot{D} = \dot{\gamma}_d \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G(\sigma)}{\partial \sigma}, \quad (3.35)$$

$$\dot{\alpha}_d = \dot{\gamma}_d \frac{1}{\sigma} \frac{\partial G(\sigma, q_d)}{\partial q_d}. \quad (3.36)$$

Dabei bezeichnet $G(\sigma)$ ein Schädigungspotential, das dem Schädigungskriterium entsprechen kann. Die Be- und Entlastungsbedingungen werden erneut durch die Kuhn-Tucker-Komplementaritätsbedingungen definiert,

$$\gamma_d \geq 0; \quad f_d(\sigma) \leq 0; \quad \gamma_d f_d(\sigma) = 0. \quad (3.37)$$

Auch dieses Modell lässt sich für die ebene Biegung eines Cosseratbalkens formulieren,

$$\begin{aligned} M_B &= (EI)_B K_B, \\ f_d(M_B, \alpha) &:= |M_B| - [M_{B,d} + H_d \alpha_d] \leq 0, \\ \dot{D} &= \dot{\gamma}_d \frac{1}{M_B} \frac{\partial G(M_B)}{\partial M_B}, \\ \dot{\alpha}_d &= \dot{\gamma}_d \frac{1}{M_B} \frac{\partial G(M_B)}{\partial q_d}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

In Kapitel 6 wird ein dreidimensionales Modell für Cosseratbalken formuliert, wel-

ches in der Biegung die vorgestellte Formulierung für Elastoplastizität mit Schädigung koppelt, um das in Kapitel 5.3 dargestellte komplexe Verhalten von Kabeln abbilden zu können.

4

Experimentelle Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden die experimentellen Methoden zur Untersuchung von Kabeln vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurden. Da Kabel lange, schlanke Bauteile sind, kann ihr mechanisches Verhalten mit Experimenten für balkenartige Proben untersucht werden [19]. Zunächst werden in Abschnitt 4.1 Grundlagenexperimente erläutert, deren Randbedingungen und Auswertung für homogene Materialien hinlänglich bekannt sind. Hier werden diese Versuche verwendet, um die grundlegenden Deformationsmoden, die für Kabel relevant sind – uniaxialer Zug, Torsion um die Längsachse und planare Biegung – zu untersuchen. Ein neuartiges Versuchskonzept zur reinen Biegung von Kabeln wurde im Laufe dieser Arbeit entwickelt, umgesetzt und zur Messung des Deformationsverhaltens von Kabeln unter Biegung verwendet. Dieses wird in Abschnitt 4.1.3 beschrieben. Mit Hilfe einer geeigneten zyklischen Versuchsführung können die Grundlagenexperimente inelastisches Verhalten von Kabeln abbilden. Die spezifische Umsetzung wird bei jedem Versuchstyp erläutert.

Des Weiteren werden Experimente vorgestellt, die eine Untersuchung der Kopplung der Deformationsmoden erlauben. Verschiedene Varianten dieser multiaxialen Experimente werden in Abschnitt 4.2 beschrieben. Einige davon ermöglichen bei zyklischer Versuchsführung ebenfalls die Untersuchung der Kopplung von inelastischem Verhalten, während dies in anderen Versuchen nicht möglich ist.

4.1 Grundlagenexperimente an balkenartigen Strukturen

4.1.1 Uniaxialer Zugversuch

Der uniaxiale Zugversuch wird häufig verwendet, um die mechanischen Eigenschaften von homogenen Materialien zu ermitteln. Dabei können aus der Zugkurve, je nach Material, der E-Modul, die Streckgrenze, die Fließgrenze, die Gleichmaßdehnung, u.s.w. bestimmt werden. Kabel bestehen nicht aus einem homogenen Material, sondern sind inhomogene, anisotrope Bauteile. Dennoch kann der uniaxiale Zugversuch verwendet werden, um die Modellparameter für Konstitutivgesetze auf Basis der Cosseratbalken-Theorie zu berechnen, da die Konstitutivgesetze auf Basis der Schnittgrößen des Balkens und der Deformationsmaße formuliert werden, die im uniaxialen Zugversuch quasi direkt gemessen werden können. Die Randbedingungen sind in Abbildung 4.1 (links) dargestellt. Das Kabel wird an beiden Enden in seiner Längsachse eingespannt, wobei weitestgehend sichergestellt wird, dass der runde Querschnitt des Kabels nicht deformiert wird. Der Versuch wird verschiebungsgesteuert durchgeführt. Das heißt, das Kabel wird um den Maschinenweg Δl verlängert bis eine maximale Zugkraft F_Z erreicht ist. Diese Versuche werden in zyklischer Weise durchgeführt, um inelastische Charakteristika zu untersuchen. Im Falle des uniaxialen Zugversuchs bedeutet dies, dass die Probe nach Belastung entlastet wird, bis der Maschinenweg $\Delta l = 0$ erreicht ist und danach erneut belastet. Im Folgenden werden immer fünf solcher Zyklen durchgeführt, falls nichts anderes angegeben ist.

Zur Auswertung des uniaxialen Zugversuchs im Sinne der Cosseratbalken-Theorie wird die Zugkraft F_Z gegen den Maschinenweg Δl aufgetragen. Ein linearer Fit im Anfangsbereich der Kurve kann gemäß Abbildung 4.1 (rechts) verwendet werden, um die Modellparameter für das linear elastische Konstitutivgesetz zu ermitteln. Aus der Steigung des Anfangsbereichs der Zugkurve lässt sich dann die linear elastische Zugsteifigkeit $(EA)_Z$ nach

$$F_Z = (EA)_Z \frac{\Delta l}{l_0} \quad (4.1)$$

unter Verwendung der Ausgangslänge l_0 des Kabels berechnen. In Tabelle 4.1 sind

die Messgrößen und Berechnungsterme für die linear elastischen Steifigkeiten aus den hier vorgestellten Grundlagenversuchen zusammengefasst. Es ist hier zu erwähnen, dass die Zugsteifigkeit kein reiner Materialparameter ist, sondern ein Modellparameter, der materielle und geometrische Eigenschaften beinhaltet. Damit wird dem Umstand Rechnung getragen, dass Kabel keine homogenen isotropen Materialien, sondern Bauteile mit einem inhomogenen Querschnitt sind. Gleiches gilt für die Torsions- und Biegesteifigkeiten, deren Bestimmung in den folgenden Abschnitten erläutert wird.

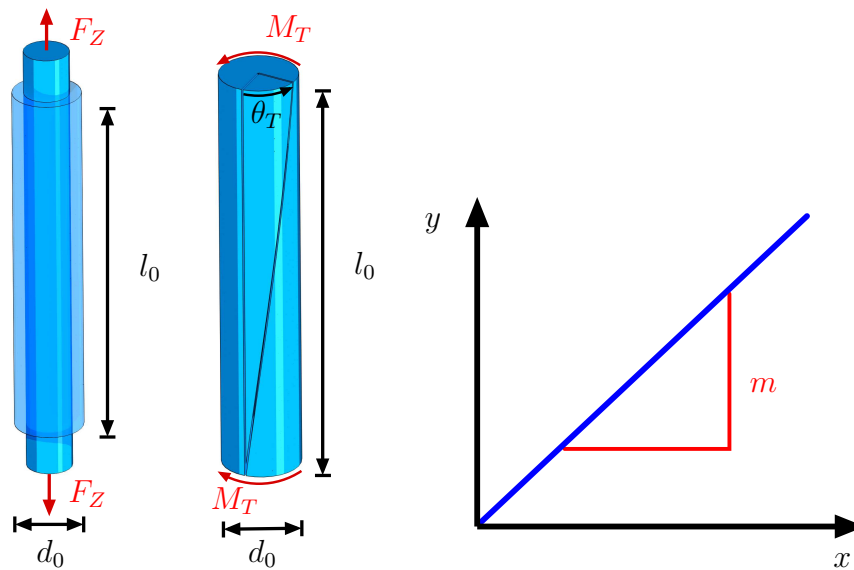


Abbildung 4.1: Schematische Darstellungen *Links*: der Randbedingungen des uniaxialen Zugversuchs, *Mitte*: der Randbedingungen des Torsionsversuchs, Dörlich et al. [18] und *Rechts*: des linearen Fits zur Bestimmung der linear elastischen Steifigkeiten nach Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1: Messgrößen y , x und Berechnungsterme m für die linear elastischen Steifigkeiten aus den Grundlagenexperimenten.

	y	x	m
<i>Uniaxialer Zug</i>	Zugkraft F_Z	Maschinenweg Δl	$\frac{(EA)_Z}{l_0}$
<i>Torsion</i>	Torsionsmoment M_T	Torsionswinkel θ_T	$\frac{(GJ)_T}{l_0}$
<i>3-Punktbiegung</i>	Stempelkraft F_B	Durchbiegung $w(z = l_0/2)$	$\frac{48 (EI)_B}{l_0^3}$
<i>Reine Biegung</i>	Biegemoment M_B	Biegekrümmung K_B	$(EI)_B$

4.1.2 Torsionsversuch

Beim Torsionsversuch werden, wie beim uniaxialen Zug, die Probenenden in der Längsachse des Kabels geklemmt. Die Randbedingungen sind in Abbildung 4.1 (*Mitte*) dargestellt. Eine Probenklemmung wird relativ zur anderen verschiebungsgesteuert um die Längsachse des Kabels rotiert bis ein maximaler Torsionswinkel θ_T erreicht ist. In der zyklischen Versuchsführung wird anschließend auf die Ausgangsposition $\theta_T = 0^\circ$ entlastet, was gegebenenfalls eine Belastung in die Umkehrrichtung erfordert, und erneut belastet. Hier werden ebenfalls fünf Zyklen durchgeführt, falls es nicht anders angegeben ist.

Im Torsionsversuch wird das Torsionsmoment M_T gemessen, welches notwendig ist, um die Verdrillung des Kabels zu erreichen. Um gemäß der linear elastischen Theorie eine elastische Torsionssteifigkeit $(GJ)_T$ zu bestimmen, wird das Torsionsmoment über dem Torsionswinkel aufgetragen. Die Berechnung erfolgt dann nach der Gleichung

$$M_T = (GJ)_T \frac{\theta_T}{l_0} \quad (4.2)$$

mit der Ausgangslänge des Kabels l_0 , siehe Abbildung 4.1 (*rechts*) und Tabelle 4.1. Die Torsionssteifigkeit beinhaltet ebenfalls materielle und geometrische Eigenschaften des Kabels und ist nicht als reiner Materialparameter zu verstehen.

4.1.3 Biegeversuche

Zur Bestimmung der Modellparameter und zur Charakterisierung des Deformationsverhaltens von Kabeln unter Biegung steht zum einen die klassische Dreipunktbiegung zur Verfügung. Zum anderen wurde im Rahmen dieser Arbeit ein neuartiger Versuchsstand aufgebaut und in Betrieb genommen, der die ebene reine Biegung von Kabeln erlaubt. Beide Konzepte werden im Folgenden beschrieben.

Dreipunktbiegung

Ein Dreipunktbiegeversuch ist vergleichsweise einfach umzusetzen. Es werden zwei Auflager benötigt, die im Abstand l_0 voneinander entfernt sind und auf die die Probe gelegt wird, siehe Abbildung 4.2 (*links*). Die Biegung der Probe wird realisiert, indem ein Stempel in der Mitte ($z = l_0/2$) auf die Probe drückt. Das Experiment wird verschiebungsgesteuert durchgeführt, d.h. bis eine gewisse Durchbiegung w der Probenmitte erfolgt ist. Die Kraft $F_B(z = l_0/2)$, wird in Abhängigkeit der Mittelpunktsdurchbiegung im Stempel gemessen.

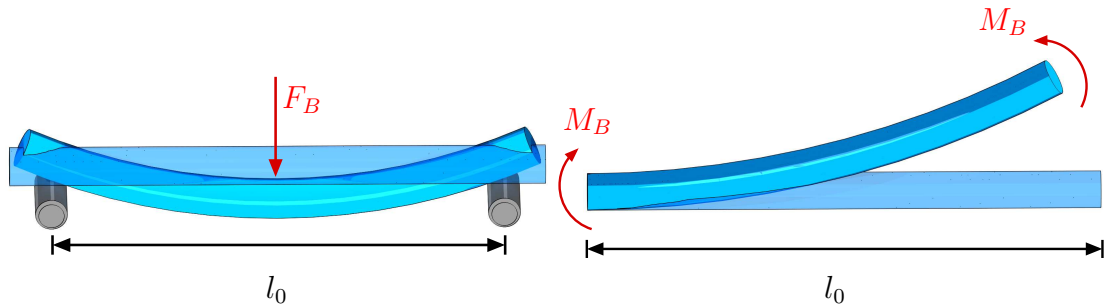


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Randbedingungen der in dieser Arbeit verwendeten Biegeversuche, Dörlich et al. [18]. *Links*: Dreipunktbiegung. *Rechts*: Reine Biegung.

Die Auswertung eines Dreipunktbiegeversuchs folgt den Euler-Bernoulli-Annahmen, welche davon ausgehen, dass die Balkenquerschnitte planar und senkrecht zur Längsachse des Balkens bleiben [76]. Zudem gilt die Auswertung nur für kleine Deformationen und ausreichend schlanke Balkenproben, deren Aspektverhältnis nicht über $1/10$ liegen sollte. Dann kann die Biegesteifigkeit $(EI)_B$ mit Hilfe eines linearen Fits im elastischen Bereich nach

$$F_B(z = \frac{l_0}{2}) = 48 (EI)_B \frac{w(z = \frac{l_0}{2})}{l_0^3} \quad (4.3)$$

berechnet werden. Diese Experimente werden ebenfalls, wenn nicht anders angegeben, in fünf aufeinanderfolgenden Zyklen durchgeführt, indem der Stempel nach Belastung wieder auf die Ausgangsposition gefahren wird. Dabei kann der Stempel in diesem Versuchsaufbau durch eine bleibende Verformung oder Trägheitseffekte in der Probe Kontakt zur Probe verlieren.

Reine Biegung

Die Umsetzung der reinen Biegung, das heißt eines Deformationszustandes, bei dem ausschließlich ein Biegemoment ohne Normal- oder Querkräfte auf das Kabel aufgebracht wird, ist deutlich anspruchsvoller als die der klassischen Dreipunktbiegung. Die theoretischen Randbedingungen sind in Abbildung 4.2 (*rechts*) dargestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Konzept umgesetzt und in Betrieb genommen, das in [9] konzipiert und konstruiert wurde. Es beruht darauf, dass der Zustand reiner Biegung, d.h. konstanter Krümmung entlang der Längsachse, der energetisch günstigste für das Kabel ist, wenn es störungsfrei gebogen wird.

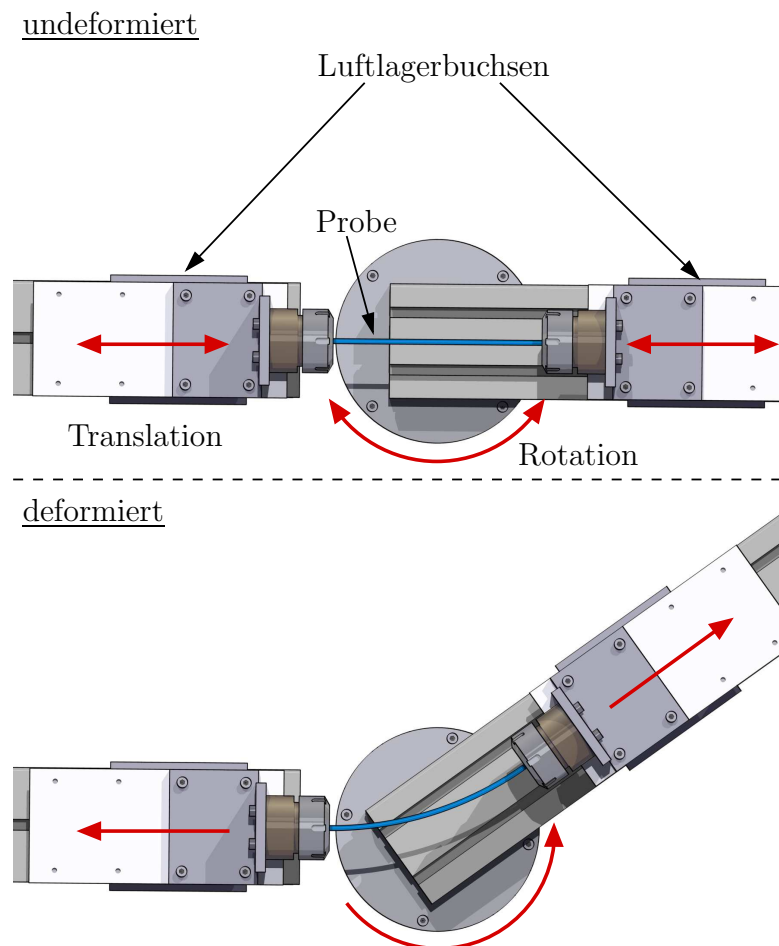


Abbildung 4.3: Draufsicht auf den Versuchsaufbau der reinen Biegung, Dörlich et al. [18]. Ein gerades Kabel wird auf den Schlitten eingespannt, welche auf nahezu reibungsfreien Luftlagerbuchsen montiert sind. Sie ermöglichen eine translatorische Bewegung der Probenenden, während die Biegung durch ein Schwenken des rechten Auslegers realisiert wird.

Eine Draufsicht des Versuchsaufbaus in undeformierter und deformierter Konfiguration ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Die Kabelenden werden in gerader Konfiguration in der Längsachse eingespannt. Die Einspannungen sind auf Schlitten angebracht, die sich mittels Luftlagerbuchsen nahezu reibungsfrei auf zwei Auslegern translatorisch bewegen können. Einer der beiden Ausleger (in der Abbildung links) ist feststehend, der andere ist auf einem Momentenlager angebracht und kann durch einen Motor geschwenkt werden. Dadurch wird die Biegung in der horizontalen Ebene auf die Probe aufgebracht. Die mittels Luftlagerbuchsen nahezu reibungsfreie Lagerung der Schlitten sorgt dafür, dass dabei keine Normalkräfte auf die Probenenden wirken. Wenn dieses System waagrecht ausgerichtet ist, d.h. die Schwerkraft keinen Einfluss auf die Schlitten hat, richtet es sich symmetrisch mit einer konstanten Biegekrümmung entlang der Längsachse des Kabels aus.

Die Messung der Schnittgrößen erfolgt in diesem Versuchsaufbau mit Hilfe zweier Sechssachsensoren, die beidseitig auf den Auslegern unterhalb der beweglichen Schlitten angebracht sind. Damit werden Kräfte in Richtung der Achsen des jeweiligen Sensorkoordinatensystems und Momente um diese Achsen gemessen. Die Sensoren sind symmetrisch angebracht, sodass die einzelnen Messgrößen auf beiden Seiten redundant gemessen werden. Da das Sensorkoordinatensystem $\{x, y, z\}$ und das Koordinatensystem im Probenende $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ an der Einspannung nicht übereinstimmen, ist eine Kalibrierung mit den Hebelarmen notwendig, um die im Sensor gemessenen Größen in die Schnittgrößen in den Kabelenden umrechnen zu können, siehe Abbildung 4.4. Zusätzlich ist hierbei zu beachten, dass der Hebelarm in y -Richtung s_y während des Experiments nicht konstant ist, da der Schlitten in diese Richtung beweglich ist,

$$s_y = s_{y,0} + \Delta s_y. \quad (4.4)$$

Die im Sensorkoordinatensystem gemessenen Momente werden im Folgenden mit M_x, M_y und M_z bezeichnet. Die Momente, die am Probenende wirken, werden \hat{M}_x, \hat{M}_y und \hat{M}_z genannt. Dabei ist \hat{M}_z das gesuchte Biegemoment, welches am Probenende wirkt. Im Sensor wird jedoch das Moment M_z um die z -Achse des Sensors gemessen, in das zusätzlich zum Biegemoment am Probenende Momente eingehen, die durch Kräfte in der x - y -Ebene verursacht werden,

$$M_z = \hat{M}_z + s_y F_x - s_x F_y. \quad (4.5)$$

Dabei ist s_x der Hebelarm in x -Richtung und konstant Null während des Experi-

ments, da die y - z -Ebenen von Sensor- und Probenendenkoordinatensystem gleich sind. Gleichung (4.5) vereinfacht sich also direkt zu

$$M_z = \hat{M}_z + s_y F_x. \quad (4.6)$$

Der während des Versuchs veränderliche Hebelarm s_y wird also zur Bestimmung des Biegemoments in der Probe benötigt und wird aus den weiteren Messsignalen des Sensors bestimmt. Dazu wird die Änderung des Kippmoments M_x verwendet, welches auf den Sensor wirkt,

$$M_x = \hat{M}_x + s_z F_y - s_y F_z. \quad (4.7)$$

Die Änderung von M_x ist

$$\Delta M_x = \Delta \hat{M}_x + \Delta s_z F_y + s_z \Delta F_y - \Delta s_y F_z - s_y \Delta F_z. \quad (4.8)$$

Da sich die Masse des Versuchsaufbaus während des Experiments nicht ändert, ist die Gewichtskraft F_z konstant und ΔF_z Null. Der Hebelarm s_z ist während des Experiments ebenfalls konstant. F_y ist in diesem Versuchsaufbau konstant Null, da die nahezu reibungsfreien Luftlagerbuchsen keine Krafteinleitung in den Sensor in y -Richtung zulassen. Weiterhin wird in sehr guter Näherung angenommen, dass die Änderung des gemessenen M_x während des Experiments ausschließlich durch die Verschiebung des Schlittens entsteht und damit ist $\Delta \hat{M}_x$ ebenfalls Null. Damit reduziert sich Gleichung (4.8) zu

$$\Delta M_x = -\Delta s_y F_z \quad (4.9)$$

und die Änderung des Hebelarms s_y kann gemäß Gleichung (4.4) mit

$$\Delta s_y = -\frac{\Delta M_x}{F_z} \quad (4.10)$$

berechnet werden. Damit kann das Biegemoment, das in der Probe wirkt aus Gleichung (4.6) mit den Sensorsignalen M_z und F_x bei bekannten Anfangszustand der Schlitten berechnet werden,

$$\hat{M}_z = M_z - F_x \cdot (s_{y,0} + \Delta s_y). \quad (4.11)$$

Folglich kann das Biegemoment in der Probe, welches im Folgenden M_B genannt wird, mit Hilfe dieses Versuchsaufbaus direkt gemessen werden.

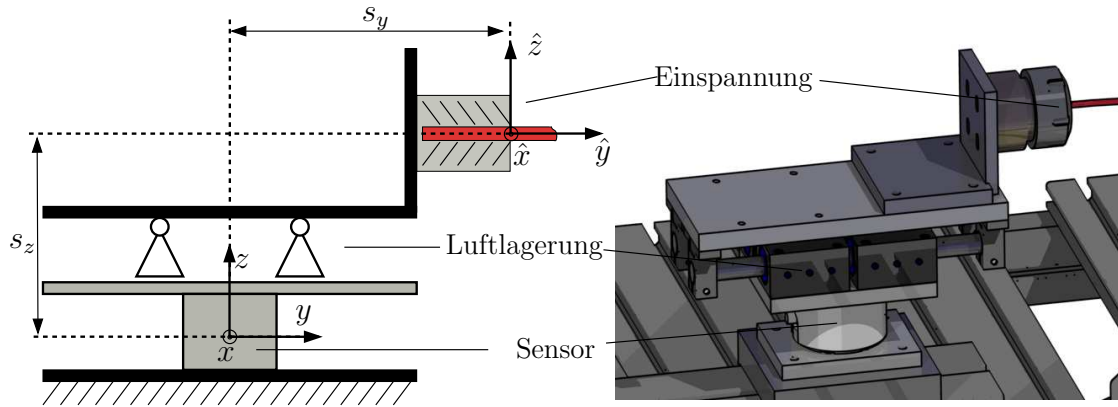


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus der reinen Biegung in Seitenansicht zur Illustration des Sensorkoordinatensystems und des Probenkoordinatensystems (*links*) und entsprechende Seitenansicht des Versuchsaufbaus (*rechts*).

Zur Bestimmung der Biegesteifigkeit aus diesem Versuchsaufbau wird die Biegekrümmung K_B benötigt, die über die Probenlänge ebenfalls konstant ist, sofern sich das System wie oben beschrieben ausrichtet. Dafür stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Zum einen kann die Biegekrümmung optisch mit Hilfe einer Kamera, die über dem Versuchsstand angebracht ist, ermittelt werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit, die Biegekrümmung direkt aus dem geometrischen Aufbau der Versuchsanordnung zu berechnen. Beide Herangehensweisen beruhen auf der Annahme, dass die Probe einen Kreisbogen formt, dessen Radius per Definition invers zur Biegekrümmung des Kreisbogens ist,

$$R = K_B^{-1}. \quad (4.12)$$

Für die optische Bestimmung der Biegekrümmung ist eine Kamera ausreichend, die von oben auf den Versuchsstand ausgerichtet ist, da es sich um ebene Biegung handelt und die Kontur der Probe mit Hilfe der Kantenerkennungsfunktion in der Software Vision Assistant[®] von National Instruments bestimmt wird. Die Kantenerkennungsfunktion passt mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate einen Kreis an die Kontur der Probe an, siehe Abbildung 4.5 (*links*), dessen Radius automatisch berechnet wird. Die geometrische Bestimmung des Biegeradius ist schematisch in Abbildung 4.5 (*rechts*) dargestellt. Zunächst stellen wir fest, dass der Winkel θ_M , um den der Motor den schwenkbaren Ausleger rotiert, dem Öffnungswinkel des Kreisbogens θ entspricht. Des Weiteren gilt für die Probenlänge

l_0 , die einen Kreisbogen darstellt

$$l_0 = R \frac{\theta \pi}{180^\circ}. \quad (4.13)$$

Damit lässt sich aus der Probenlänge und dem Motorwinkel direkt die Biegekrümmung berechnen,

$$K_B = \frac{\theta \pi}{180^\circ l_0}. \quad (4.14)$$

In Abbildung 4.6 sind Vergleiche der optisch und geometrisch ermittelten Biegeradien für die reine Biegung eines CFK-Stabs (*links*) und eines Kabels (*rechts*) dargestellt. Es ist festzustellen, dass beide Methoden qualitativ den gleichen Verlauf für den Biegeradius zeigen, der asymptotisch für hohe Krümmungen gegen Null und für eine nahezu gerade Konfiguration gegen Unendlich strebt. Allerdings fällt auf, dass für den vergleichsweise steifen CFK-Stab bei geringen Krümmungen keine Abweichungen von optisch ermitteltem und berechnetem Biegeradius zu erkennen sind, während solche Differenzen im Falle des weniger steifen Kabels auftreten. Diese Beobachtung spiegelt zum einen wider, dass die Kantenerkennung bei geringen Krümmungen stärker fehlerbehaftet ist, und zum anderen, dass die Kinematik des Versuchsaufbaus im Bereich kleiner Biegewinkel störungsanfälliger ist. Diese Feststellung muss bei der Interpretation der Versuchsergebnisse der reinen Biegung von Kabeln beachtet werden, da sie aussagt, dass die Ergebnisse bei geringen Krümmungen fehlerbehaftet sein können. Da die Bestimmung des Krümmungsradius aus der Geometrie des Versuchszustandes bei höheren Krümmungen von der Kantenerkennungssoftware bestätigt wird und dazu keine zusätzliche Kamera notwendig ist, wurde für alle weiteren Versuche die Krümmung aus der geometrischen Auswertung des Biegeradius bestimmt.

Die Biegesteifigkeit $(EI)_B$ kann nun direkt als Steigung des linear elastischen Bereichs der Auftragung von Biegemoment M_B gegen Biegekrümmung K_B berechnet werden, siehe Tabelle 4.1. Dieser Zusammenhang ist direkt gültig, ohne die Euler-Bernoulli-Annahmen verwenden zu müssen.

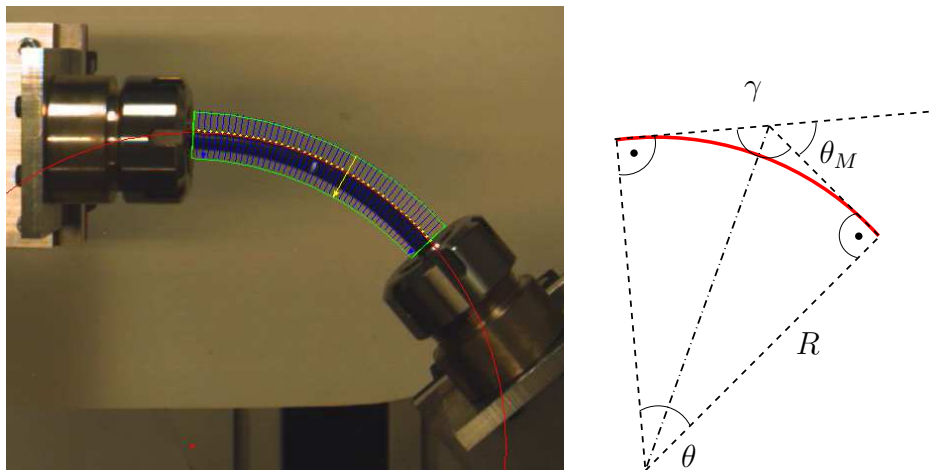


Abbildung 4.5: *Links*: Bestimmung des Krümmungsradius mittels optischer Kantenerkennung. *Rechts*: Schematische Darstellung der Berechnung mittels geometrischer Überlegungen.

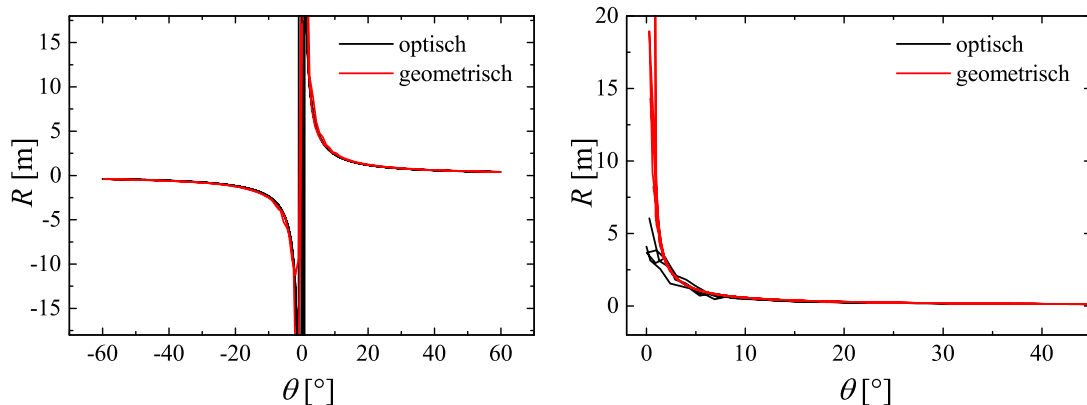


Abbildung 4.6: Vergleich der optisch und geometrisch ermittelten Biegeradien. *Links*: Reine Biegung an einem CFK-Stab mit zyklischer Belastung in positive und negative Richtung. *Rechts*: Zyklische reine Biegung an einem Kabel.

Zyklische Durchführung der Biegeexperimente

Mit Hilfe des vorgestellten Versuchsaufbaus ist es ebenfalls möglich, zyklische Versuche durchzuführen. In den folgenden Abschnitten werden unterschiedliche Varianten (Typ I, II und III) der zyklischen Versuchsführung vorgestellt und in Kapitel 5.2 die Ergebnisse für verschiedene balkenartige Proben und ausgewählte Kabel gezeigt und diskutiert.

Analog zur Dreipunktbiegung können auch in der reinen Biegung zyklische Versu-

che mit Belastung in eine Richtung bis zu einem maximalen Biegewinkel ($\theta_{B,max}$) und Entlastung auf die gerade Ausgangskonfiguration durchgeführt werden. θ_B entspricht dem in Abbildung 4.5 definierten Motorwinkel θ , wird aber im Folgenden anschaulich als Biegewinkel bezeichnet. Diese Experimente liefern bereits geöffnete Hysteresen, die auf inelastisches Verhalten hinweisen. Allerdings ist es nicht möglich, in diesen Experimenten das Verfestigungsverhalten, d.h. die Art der Gestaltänderung der Fließfläche, zu charakterisieren. Dazu ist es notwendig, die Belastung auch in die Gegenrichtung aufzubringen. Ein Zyklus in diesem Experiment beginnt ebenfalls in der geraden Ausgangskonfiguration, gefolgt von Belastung auf einen maximalen Biegewinkel ($+\theta_{B,max}$), Entlastung und Wiederbelastung auf den negativen maximalen Biegewinkel ($-\theta_{B,max}$) und erneute Entlastung auf $\theta_B = 0^\circ$. Das Ergebnis dieses Experiments wird in Unterkapitel 5.3 gezeigt.

Typ I: Zyklen mit konstanter Amplitude um unterschiedliche Biegewinkel

Des Weiteren werden mit Hilfe des Versuchsstandes Biegeversuche mit sich überlagernden Zyklen verschiedener Amplituden durchgeführt, um den Einfluss von Mikro- und Mesostruktureffekten auf das makroskopische Verhalten unter Biegung zu untersuchen [17]. Die Versuchsführung ist in Abbildung 4.7 (*links*) dargestellt. Während der globalen Belastung auf $\theta_{B,max}$ und Entlastung auf $\theta_B = 0^\circ$ werden auf diskreten Biegewinkelniveaus drei überlagerte Zyklen mit einer Amplitude von $\pm 10^\circ$ durchgeführt. Im Folgenden wird die Anzahl der globalen Zyklen mit N und die der überlagerten Zyklen mit n bezeichnet. In Abbildung 4.7 (*rechts*) ist zu sehen, dass der globale Zyklus mit überlagerten kleinen Zyklen in weiteren Experimenten dreimal hintereinander ausgeführt wurde ($n = 3, N = 3$). Analog zur hier am Beispiel der reinen Biegung dargestellten Versuchsführung werden Experimente von diesem Typ auch in der Dreipunktbiegung durchgeführt. Unterkapitel 5.3.2 wird die Ergebnisse dieser zyklischen Biegeexperimente vorstellen.

Typ II: Zyklen mit anwachsendem maximalen Biegewinkel

Eine weitere Variante der zyklischen Versuchsführung stellt die Entlastung auf die gerade Ausgangskonfiguration nach jedem Zyklus dar, wobei der maximale Biegewinkel in jedem Zyklus gesteigert wird, siehe Abbildung 4.8. Dieser Versuchsablauf ist an Experimente von Mullins angelehnt, die dazu dienen sollen, eine sinkende

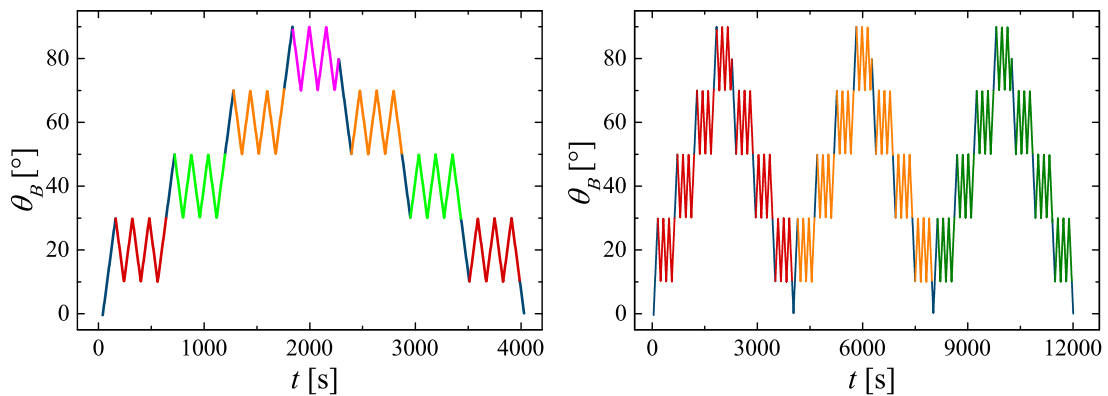


Abbildung 4.7: Biegewinkel-Zeit-Diagramme zur Darstellung der Versuchsabläufe der zyklischen Versuche mit konstanter Amplitude. *Links*: für $n = 3, N = 1$. *Rechts*: für $n = 3, N = 3$.

Steifigkeit während des ersten Zyklus bei partikelgefüllten Elastomeren zu untersuchen [10, 57, 52].

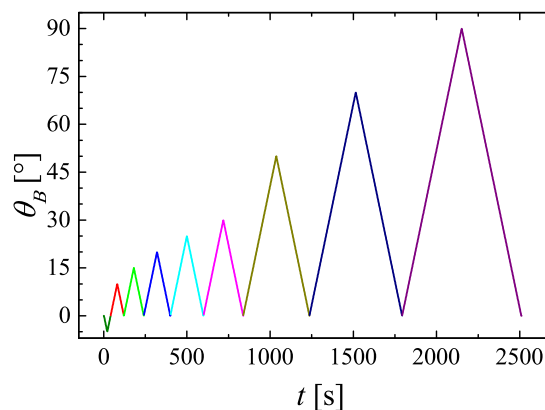


Abbildung 4.8: Biegewinkel-Zeit-Diagramme zur Darstellung der Versuchsabläufe der zyklischen Versuche des Typs II: Zyklen mit anwachsendem maximalen Biegewinkel.

Typ III: Varianten von Typ II in zyklischer Versuchsführung

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Versuchsführung kann variiert werden, indem entweder der globale Zyklus oder die überlagerten Zyklen wiederholt werden. Mit Variante IIIa) wird die Versuchsführung bezeichnet, die in Abbildung 4.9 (*links*) dargestellt ist und bei der gilt $n = 3, N = 1$. In Variante IIIb) gilt $n = 1, N = 3$ und sie ist in Abbildung 4.9 (*rechts*) dargestellt. Beide Varianten

liefern weitere Erkenntnisse, die das Verständnis der Auswirkung der Mikro- und Mesostruktureffekte auf das makroskopische Verhalten fördern.

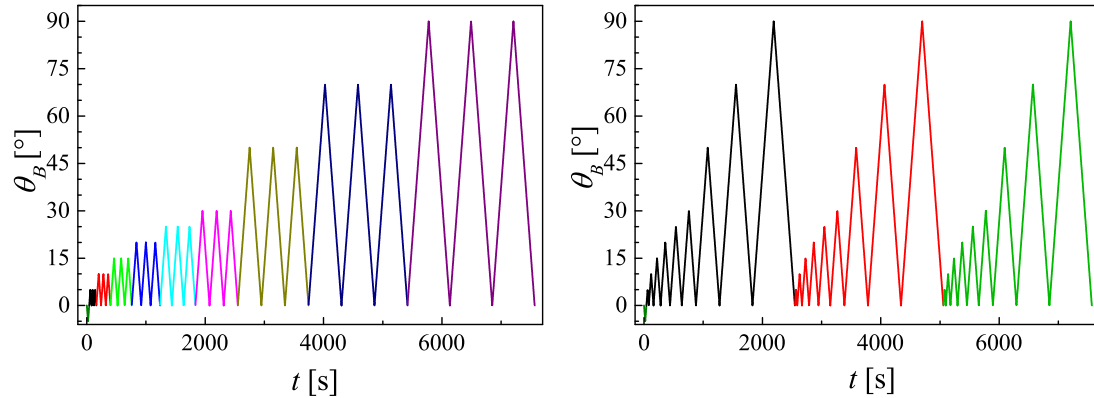


Abbildung 4.9: Biegewinkel-Zeit-Diagramme zur Darstellung der Versuchsabläufe der zyklischen Versuche des Typs III. *Links*: Variante $n = 3, N = 1$. *Rechts*: Variante $n = 1, N = 3$.

Vergleich der Biegeversuche

Die beiden vorgestellten Biegeversuche haben Vor- und Nachteile in verschiedenen Aspekten und ergänzen sich deshalb gut. Die Auswertung der Dreipunktbiegung nach Euler-Bernoulli besitzt, wie bereits erwähnt, nur Gültigkeit bei geringen Durchbiegungen. Solange die Probe bei einer großen Durchbiegung jedoch nicht durch die Auflager rutscht, können dennoch größere Deformationen aufgebracht werden. Dabei können auch inelastische Effekte, wie in Kapitel 5.1.3 gezeigt, beobachtet werden. Eine Quantifizierung der Effekte, zum Beispiel die Messung eines Fließpunktes im Rahmen der Cosseratbalken-Theorie, ist jedoch nicht ohne zusätzliche Informationen möglich. Der Versuchsaufbau der Dreipunktbiegung bedingt einen linearen Verlauf des Biegemoments und der Biegekrümmung von den Auflagern zur Probenmitte hin. Die lokal gemessene Stempelkraft und Durchbiegung in der Mitte stellen also lediglich integrale Größen dar, wobei für Konstitutivgesetze für Cosseratbalken die lokale Krümmung und das lokale Moment nötig sind. Dies kann nur umgangen werden, indem zusätzlich lokal die Krümmung in der Probenmitte, beispielsweise durch optische Deformationsmessungen, ermittelt wird. Der Aufwand überwiegt jedoch nicht den zu erwartenden Nutzen, zumal sich die reine Biegung sehr gut eignet, um das konstitutive Biegeverhalten von Kabeln zu

untersuchen.

Im Fall der reinen Biegung werden direkt die Schnittgrößen gemessen, die in das konstitutive Gesetz für die Biegung von Cosseratbalken eingehen, siehe Kapitel 3.2. Das ist möglich, da die Randbedingungen ein konstantes Biegemoment und eine konstante Biegekrümmung entlang der Probenachse liefern. Wie bereits im vorherigen Unterkapitel beschrieben, reicht es nun aus, eine globale Krümmung zu berechnen, die der lokalen entspricht, und das Biegemoment in den Kabelenden zu messen. Damit kann die in Experimenten beobachtete Phänomenologie direkt mit Hilfe der schnittgrößenbasierten Konstitutivgesetze umgesetzt werden. In diesem Experiment sind Störungen durch andere Deformationsmechanismen (Zug, Torsion, Querkräfte) zudem ausgeschlossen. Bei der Dreipunktbiegung ist dies durch die Lagerung nicht gegeben, da sie Normal- und Querkräfte in der Probe verursacht. Die Dreipunktbiegung liefert demnach einen Zustand, in dem Kopplung zwischen den grundlegenden Deformationsarten nicht auszuschließen ist. Eine in der Dreipunktbiegung ermittelte Biegesteifigkeit muss deshalb nicht zwangsläufig mit einer mittels reiner Biegung bestimmten übereinstimmen.

Während die Umsetzung der Dreipunktbiegung vergleichsweise einfach und wenig störungsanfällig ist, ist der Versuchsaufbau der reinen Biegung komplex und anfällig für Störungen speziell bei geringen Krümmungen. Das liegt darin begründet, dass bei geringer Krümmung der Probe äußere Kräfte, z.B. die Schwerkraft, einen Einfluss auf die Position der translatorisch beweglichen Schlitten haben können. Damit gibt es in der geraden Konfiguration keine eindeutige energetisch günstige Position der Schlitten und das System richtet sich nicht automatisch symmetrisch aus. Wird im Versuch dann eine Biegung aufgebracht, ist die energetisch günstigste Lage des Systems die symmetrische. Daraus resultiert häufig eine sprunghafte Bewegung der Schlitten im Anfangsbereich der Belastung, die Einfluss auf die Messgrößen hat. Davon können Effekte in diesem Bereich überlagert werden. Deshalb wird in der reinen Biegung vor den zyklischen Experimenten ein kurzes Einschwingen durchgeführt, bei dem auf $\pm\theta_{B,0}$ in beide Richtungen gebogen wird. Dies ist im Anfangsbereich der Darstellung der Versuchsabläufe in den Abbildungen 4.8 und 4.9 zu sehen. Der Betrag von $\theta_{B,0}$ hängt davon ab, wie steif das zu untersuchende Kabel ist. Es ist darauf zu achten, dass das Einschwingen noch im Bereich elastischer Deformationen stattfindet.

4.2 Multiaxiale Experimente an Kabeln

Die im vorherigen Kapitel vorgestellten Experimente sind gut dazu geeignet, grundlegende Phänomene zu untersuchen, die bei der Belastung von inelastischen Kabeln auftreten. Dabei werden im Fall des uniaxialen Zugs, der Torsion und der reinen Biegung keine gekoppelten Lastfälle betrachtet, sondern uniaxiales Verhalten im Sinne der Cosseratbalken-Theorie. Wie bereits erwähnt, muss lediglich bei der Dreipunktbiegung davon ausgegangen werden, dass verschiedene Lastfälle gleichzeitig auftreten. In realen Anwendung liegen jedoch selten Belastungssituationen vor, in denen nur ein Lastfall relevant ist. Ein Beispiel dafür ist ein Kabel, das, um angeschlossen zu werden, gebogen und tordiert werden muss. Aufgrund des strukturellen Aufbaus eines Kabels, bei dem zum Beispiel vortordierte, bzw. verdrehte Einzellitzen in einem Polymermantel vorliegen, ist zu erwarten, dass sich die verschiedenen Lastfälle gegenseitig beeinflussen. Es ist dann zum Beispiel möglich, dass die Torsion eine Änderung der Struktur (Ablösen der Litzen vom Mantel, Lösen der Verdrehung der Litzen, etc.) zur Folge hat, die eine Änderung der Biege- oder Zugsteifigkeit bewirkt. Diese Effekte sollen speziell im Hinblick auf Kopplung der inelastischen Eigenschaften in geeigneten Versuchen untersucht werden.

In Arbeiten von [4, 13, 39, 65, 77] wurde zudem bereits für homogene Materialien und dreidimensionale Modelle im Rahmen der Kontinuumsmechanik gezeigt, dass uniaxiale Experimente nicht als Basis für die Bedatung eines Konstitutivgesetzes ausreichen, dass für die Simulation multiaxialer Lastfälle dienen soll. Stattdessen muss ein multiaxiales Experiment durchgeführt werden. Idealerweise würde ein geeignetes multiaxiales Experiment mit zugehöriger Auswertung für Kabel den experimentellen Aufwand erheblich reduzieren, sofern daraus die Anpassung der Modellparameter für alle Lastarten erfolgen kann. Bisher werden bereits die linear elastischen Steifigkeiten aus drei verschiedenen Experimenten bestimmt. Bei inelastischen Konstitutivgesetzen für alle drei grundlegende Lastfälle und deren Kopplung vervielfacht sich der experimentelle Aufwand weiter.

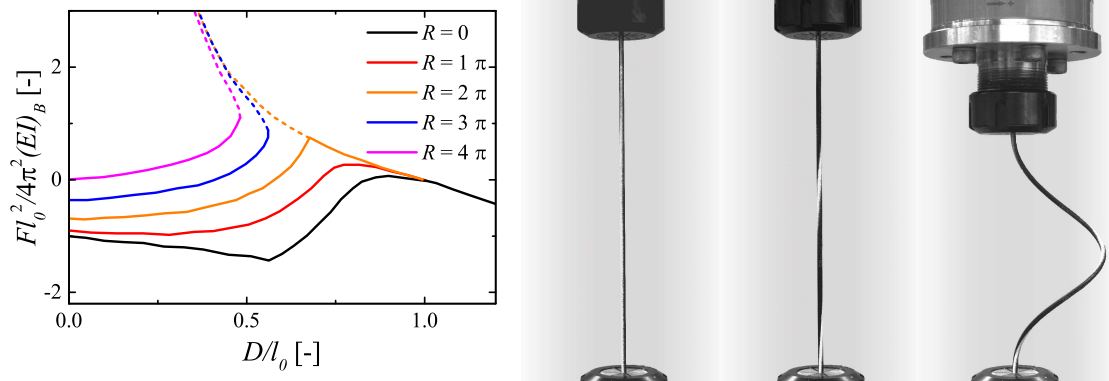


Abbildung 4.10: *Links*: Theoretischer Verlauf der normierten Axialkraft über die normierte Verschiebung für verschiedene Vortorsionen R im multiaxialen Experiment nach van der Heijden et al. [34]. *Rechts*: Sequenzieller Ablauf des multiaxialen Experiments, Dörlich et al. [19]. Eine an den Enden geklemmte gerade Probe wird um 4π um die Längsachse tordiert und anschließend um 60 mm gestaucht.

4.2.1 Räumliche Kombination aus Biegung, Torsion und Druck

Van der Heijden et al. [34] beschreiben multiaxiale Experimente an metallischen Drähten, deren Auswertung auf der Theorie elastischer Knickstäbe beruht und die eine räumliche Kinematik der Probe liefern. Die Kinematik und die resultierende Kombination der Deformationsarten ist ebenfalls relevant für anwendungsnahe Lastfälle von Kabeln [19]. Das Experiment ist zudem einfach umzusetzen, in dem eine vergleichsweise lange Kabelprobe, wie im Zug- oder Torsionsversuch, an den Enden geklemmt wird, siehe Abbildung 4.10 (*rechts*). Im nächsten Schritt wird das Kabel um ein Vielfaches von π vortordiert und abschließend um $\frac{D}{l_0}$ gestaucht. Dadurch nimmt die Kabelprobe eine räumliche Konfiguration ein, in der im Verlauf des Experiments Druckzustände, Biegung und Torsion vorliegen. Während des Experiments werden die Normalkraft F in Richtung der Längsachse und das Drehmoment um die Längsachse des Kabels gemessen. Van der Heijden et al. vergleichen ihre realen experimentellen Ergebnisse mit Simulationsexperimenten, die mit Hilfe eines undehnbaren Kirchhoffbalken-Modells unter Annahme linear elastischen Materialverhaltens durchgeführt wurden. Die Ergebnisse zeigen einen charakteristischen Verlauf, wenn die gemessene Axialkraft auf die Eulersche Knicklast normiert wird und gegen die relative Stauchung aufgetragen wird. Die Eulersche Knicklast beschreibt die kritische Kraft F_{krit} , bei der eine gerade, elastische Probe der Länge l_0 und Biegesteifigkeit $(EI)_B$ von einer eindimensionalen in eine ebene

Konfiguration springt

$$\frac{F_{krit} l_0^2}{4\pi^2 (EI)_B} = -1. \quad (4.15)$$

Zudem ist zu bemerken, dass diese Normierung dazu führt, dass die Ergebnisse von Experimenten an Proben mit verschiedenen Längen gleich sind. Der charakteristische Verlauf verändert sich für verschiedene Vortorsionen. Die theoretischen Ergebnisse nach van der Heijden et al. [34] für verschiedene Vielfache von π sind in Abbildung 4.10 (*links*) dargestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das vorgestellte Experiment an Koaxialkabelproben (Durchmesser 2,8 mm) mit zwei verschiedenen Probenlängen ($l_1 = 100$ mm, $l_2 = 180$ mm) für Vortorsionen von $R = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ und 4π durchgeführt [19]. Die Ergebnisse werden in Unterkapitel 5.4.1 vorgestellt und diskutiert.

4.2.2 Kombination von Zug und Torsion

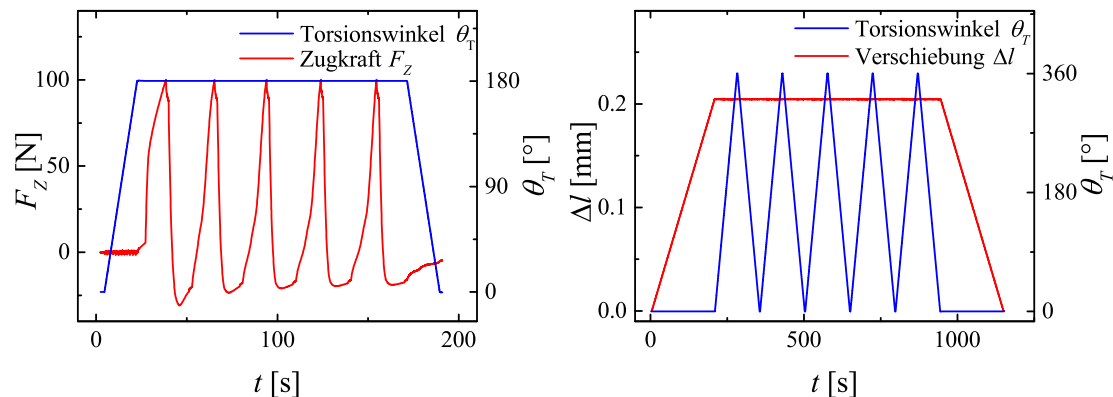


Abbildung 4.11: *Links*: Experimentelle Vorgehensweise bei der Durchführung der Zugversuche mit reiner Vortorsion. *Rechts*: Versuchsführung der Torsionsversuche mit Vorkonditionierung durch axiale Dehnung.

Um die Kopplung der inelastischen Eigenschaften gezielt untersuchen zu können, kann die oben beschriebene Versuchsanordnung verwendet werden, um die Lastfälle Zug und Torsion gleichzeitig aufzubringen. Dafür wird auf das Kabel eine Dehnung anstatt einer Stauchung aufgebracht [19]. Das resultiert zwar nicht in einer räumlichen Konfiguration, die alle drei Cosseratlastfälle abdeckt, aber damit kann gezielt eine Fließfläche in der Zugkraft-Torsionsmoment-Ebene erstellt

werden. Der Vorteil hier besteht darin, dass kein Einfluss von Knicklasten und instabilen Konfigurationen betrachtet werden muss. Zudem bleibt die Probengeometrie erhalten, sodass die Versuchsergebnisse vergleichsweise einfach auszuwerten und zu interpretieren sind. Zwei verschiedene Varianten der Zug-Torsionsversuche werden im Folgenden erläutert.

Zugversuche mit Vorkonditionierung durch normalkraftfreie Vortorsion

Zunächst werden zyklische uniaxiale Zugversuche durchgeführt, bei der die Kabelproben auf einen bestimmten Torsionswinkel vortordiert wurden, siehe Abbildung 4.11 (*links*). Dabei wird eine sogenannte reine Torsion aufgebracht, bei der die axiale Kraft auf das Kabel konstant bei 0 N gehalten wird. Dies ist auch in Abbildung 4.11 zu erkennen, da die Zugkraft erst bei Beginn des überlagerten zyklischen Zugversuches ansteigt. In diesem Experiment wurde ebenfalls das Koaxialkabel mit einem Durchmesser von 2,8 mm und Probenlängen von 30 mm verwendet. Die Vortorsionswinkel betragen 0° , 45° , 90° , 180° und 360° .

Torsionsversuche mit Vorkonditionierung durch axiale Dehnung

In Abbildung 4.11 (*rechts*) ist die Versuchsführung der zweiten Variante abgebildet. Dabei wird zunächst verschiebungsgesteuert eine Dehnung bis zu einer gewissen Maximalkraft aufgebracht und anschließend ein zyklischer Torsionsversuch durchgeführt. Es wurden Proben vom gleichen Koaxialkabel wie in den vorher beschriebenen Versuchen verwendet und die Einspannlängen betragen erneut 30 mm. Die maximalen Zugkräfte betragen 0 N, 20 N, 40 N, 60 N, 80 N und 100 N.

5

Ergebnisse und Diskussion der Experimente

5.1 Grundlagenexperimente an Kabeln

Im Folgenden werden die Ergebnisse der Grundlagenexperimente an einem Koaxialkabel vorgestellt und diskutiert [19]. Der Querschnitt des Koaxialkabels hat einen Durchmesser von 2,8 mm und ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Grundlagenexperimente wurden alle in zyklischer Versuchsführung mit 3 oder 5 Zyklen durchgeführt.

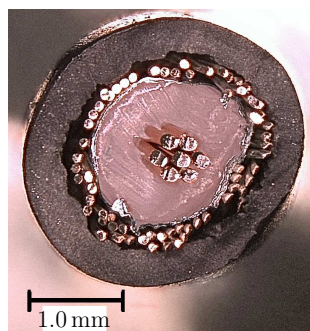


Abbildung 5.1: Querschnitt des Koaxialkabels, das in diesem Kapitel mit Hilfe der Grundlagen- und Multiaxialexperimente untersucht wird, Dörlich et al. [19]. Der Durchmesser beträgt 2,8 mm.

Die Probenlängen wurden in allen hier vorgestellten Experimenten nach folgenden Kriterien festgelegt: Sie sollen zum einen lang genug sein, damit ein hohes Aspektverhältnis vorliegt und ein Abklingen des Einflusses der Einspannung, bzw. Auflager gewährleistet werden kann (Prinzip von Saint-Venant [26]). Zum anderen soll der Messbereich des jeweils zur Verfügung stehenden Sensors sinnvoll ausgenutzt werden und dementsprechend wurden die Probenlängen im jeweiligen Experiment angepasst.

5.1.1 Uniaxialer Zugversuch

Die in Abschnitt 4.1.1 beschriebene Versuchführung wurde verwendet, um das Koaxialkabel unter uniaxialer Zugbelastung zu untersuchen. Dabei wurden unterschiedliche maximale Zugkräfte, $F_{max} = \{40 \text{ N}; 100 \text{ N}\}$, in zwei verschiedenen Experimenten verwendet, um die auftretenden inelastischen Effekte charakterisieren zu können. Das Resultat ist in einem Kraft-Verschiebungs-Diagramm in Abbildung 5.2 dargestellt.

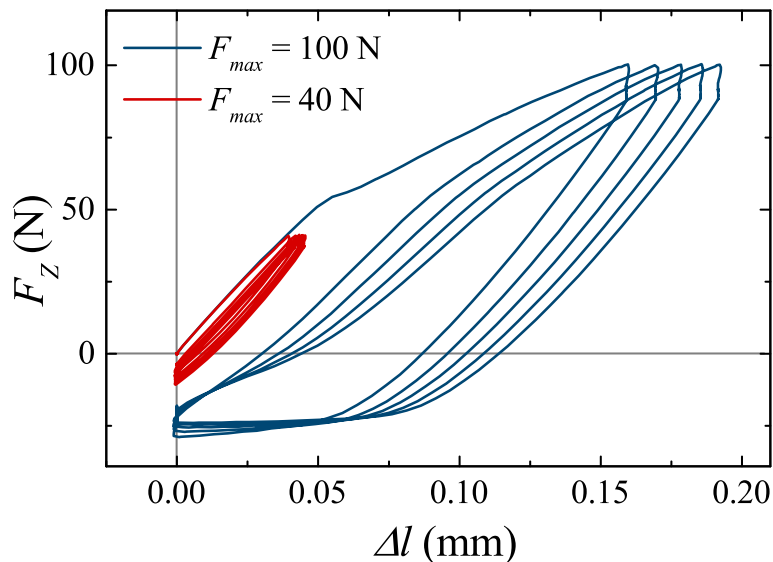


Abbildung 5.2: Experimentelles Ergebnis des uniaxialen Zugversuchs an einem Koaxialkabel mit unterschiedlichen maximalen Zugkräften $F_{max} = \{40 \text{ N}; 100 \text{ N}\}$.

Die blaue Kurve, die das Ergebnis des Experiments mit $F_{max} = 100 \text{ N}$ zeigt,

unterscheidet sich eindeutig von der roten Kurve ($F_{max} = 40 \text{ N}$). Ein deutlicher Knick bei einer Zugkraft von 54 N ist in der Erstbelastungskurve zu beobachten, der als Fließbeginn, der typisch für plastisches Verhalten ist, interpretiert werden kann. Danach schließt sich ein Bereich mit geänderter Steigung an, welcher als Fließbereich interpretiert werden kann. Nach Entlastung auf die Ausgangsposition $\Delta l = 0 \text{ mm}$ wird eine negative Kraft gemessen, da auf die gedehnte Probe nun eine Druckkraft aufgebracht werden muss, um die Ausgangsstellung der Maschine zu erreichen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass eine irreversible, inelastische Dehnung auf die Probe aufgebracht wurde. In den Entlastungspfaden ist zudem zu beobachten, dass die Druckkraft einen bestimmten Wert nicht überschreitet, sondern die Kraft bis zum Umkehrpunkt näherungsweise konstant bleibt. Dieser Kurvenverlauf entsteht durch ein Ausknicken der Kabelprobe bei Entlastung, wenn eine negative Kraft von ungefähr -25 N erreicht ist. Die Probe wird also nicht in eine gerade Ausgangskonfiguration entlastet, sondern knickt bei jeder Entlastung aus.

Die maximale Belastung von 40 N im zweiten Versuch wurde bewusst so gewählt, dass die vermutete Fließgrenze von 54 N nicht überschritten wird, um plastisches Verhalten zu vermeiden. Das Ergebnis entspricht den Erwartungen, da nun kein Knick in den Belastungskurven zu erkennen ist. Es scheint sich damit um ein zyklisches Experiment zu handeln, das im linear elastischen Bereich der Zugkurve abläuft. Dementsprechend ist auch kein Fließbereich mit geänderter Steigung zu beobachten und die Ausgangsposition $\Delta l = 0 \text{ mm}$ wird erreicht, ohne nennenswerte Druckkräfte aufbringen zu müssen.

Zudem gibt die Form der Hysteresekurven einen qualitativen Eindruck über die Art des Verhaltens. Die blaue Kurve zeigt eine geöffnete Hysterese, die typisch für inelastisches Verhalten ist. Dabei unterscheidet sich die Erstbelastungskurve deutlich von den Kurven der Folgezyklen. Im Übergang vom ersten Zyklus zu den Folgezyklen treten Effekte auf, die das Verhalten des Kabels unter Zugbelastung verändern. Der Erstbelastungszyklus beinhaltet einen definierten Knick, während in den Folgezyklen ein weniger definierter Übergangsbereich von einer größeren zu einer geringeren Steigung zu beobachten ist. Zudem nimmt die maximale gemessene Verschiebung bei der Maximalkraft von 100 N von Zyklus zu Zyklus zu. Hier ist zu vermuten, dass nicht nur im ersten Zyklus, sondern auch in den folgenden Zyklen inelastische Deformationen auftreten, die nicht reversibel sind und sich somit akkumulieren. Die rote Kurve ist im Gegensatz dazu nahezu geschlossen und typisch für elastisches Verhalten. Dabei ist anzumerken, dass geringe zeitabhängige

ge, viskose Effekte in diesem Fall dazu führen, dass das Resultat nicht rein linear elastisch ist und damit eine geringe Öffnung der Hysterese auftritt. Diese Effekte sind aber nicht überraschend, wenn der Querschnitt des Kabels bedacht wird, da einige als viskoelastisch anzunehmende Polymere Bestandteil dessen sind.

Aus den linear elastischen Bereichen dieser experimentellen Ergebnisse lässt sich die Zugsteifigkeit des Koaxialkabels bestimmen. Sie ist in Tabelle 5.1 aufgeführt.

5.1.2 Torsionsversuch

Das Koaxialkabel wurde unter Verwendung der in Abschnitt 4.1.2 erläuterten Versuchsführung unter Torsion untersucht. Die Probe der Länge 33 mm wurde bis zu einem maximalen Torsionswinkel $\theta_{T,max} = 360^\circ$ belastet. Das Ergebnis des Experiments ist als Auftragung des Torsionsmoments über den Torsionswinkel in Abbildung 5.3 dargestellt.

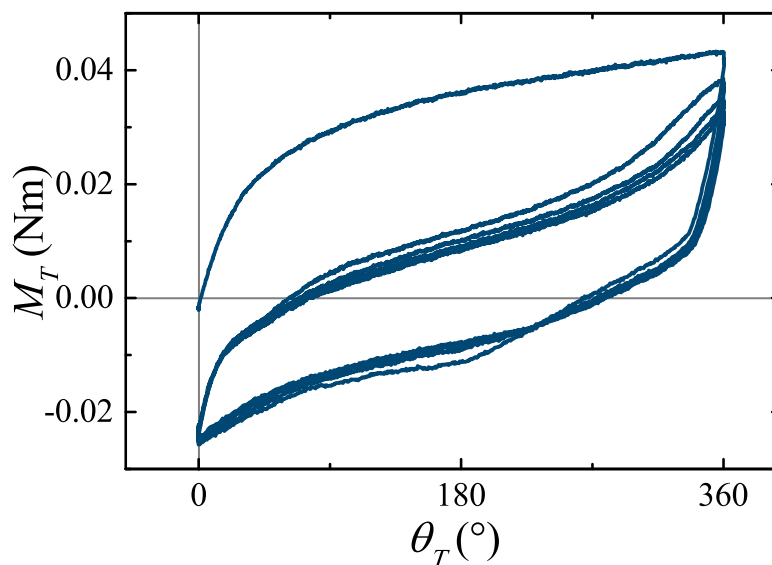


Abbildung 5.3: Ergebnis eines zyklischen Torsionsversuchs an einem Koaxialkabel mit einem maximalen Torsionswinkel $\theta_{T,max} = 360^\circ$.

Im Gegensatz zum Ergebnis des Zugversuches ist hier kein deutlicher Knick in der Belastungskurve zu erkennen. Lediglich ein fließender Übergang von einem steilen Anfangsbereich zu einem weniger steilen Abschnitt wird beobachtet. Der

steile Anfangsbereich wird als nahezu linear elastisch interpretiert und aus ihm wird nach (4.2) die Torsionssteifigkeit bestimmt, siehe Tabelle 5.1. Die Entlastung erfolgt nichtlinear bis zur Ausgangsposition bei $\theta_T = 0^\circ$. Dabei ist analog zum Zugversuch eine Last in die negative Richtung notwendig, um die Kabelprobe in die Ausgangsposition zu bringen. Das spricht dafür, dass auf das Kabel eine irreversible Torsionskrümmung aufgebracht wurde. Zudem tritt eine weit geöffnete Hysterese auf, die darauf schließen lässt, dass inelastisches Verhalten vorliegt. Der Kurvenverlauf entspricht nicht dem typischen elastoplastischen Verlauf, bei dem die Anfangssteigung bei Be- und Entlastung dieselbe Steigung aufweisen, wie in Kapitel 3.2.3 dargestellt wurde. Der Verlauf spricht eher dafür, dass in diesem Experiment verschiedene inelastische Effekte, wie Elastoplastizität oder Schädigung, überlagert auftreten. Hierbei ist zu bemerken, dass die in diesem Experiment maximale aufgebrauchte Verdrillung von $10,9^\circ/\text{mm}$ die Verdrillungen bei üblichen Anwendungen weit überschreitet. Große Verdrillungen werden folglich in industriellen Anwendungen von Kabeln vermieden, um frühzeitigen Ausfall der Kabel zu vermeiden.

5.1.3 Dreipunktbiegung

Die Dreipunktbiegung wurde gemäß der in Abschnitt 4.1.3 vorgestellten Randbedingungen und Prozeduren am Koaxialkabel durchgeführt. Die maximale Durchbiegung in der Mitte betrug $w_{max} = 6 \text{ mm}$ bei einem Auflagerabstand von 56 mm, die der Stempelschiebung Δs_B entspricht. Das experimentelle Ergebnis ist als Biegekraft-Verschiebungs-Diagramm in Abbildung 5.4 abgebildet.

Auch in der Dreipunktbiegung sind die unter uniaxialem Zug und unter Torsion beobachteten inelastischen Effekte sichtbar. Die Anfangssteigung in der Erstbelastungskurve ist steiler als der darauffolgende Bereich und wird zur Bestimmung der linear elastischen Biegesteifigkeit nach (4.3) verwendet, siehe Tabelle 5.1. Während der Entlastung verbleibt eine irreversible Biegekrümmung in der Probe, die im Versuchsergebnis dadurch zur Erscheinung tritt, dass bei Entlastung schon vor Erreichen der Ausgangsposition des Stempels die Kraft $F_B = 0 \text{ N}$ erreicht wird. Dies ist durch den Versuchsaufbau bedingt, da der Stempel, in dem die Biegekraft gemessen wird, den Kontakt zur Probe verliert. Die Probe kann nicht mehr in die gerade Ausgangslage gebracht werden. Dadurch erklärt sich der Offset in der Verschiebung von ca. $w = 3 \text{ mm}$ in den Folgezyklen.

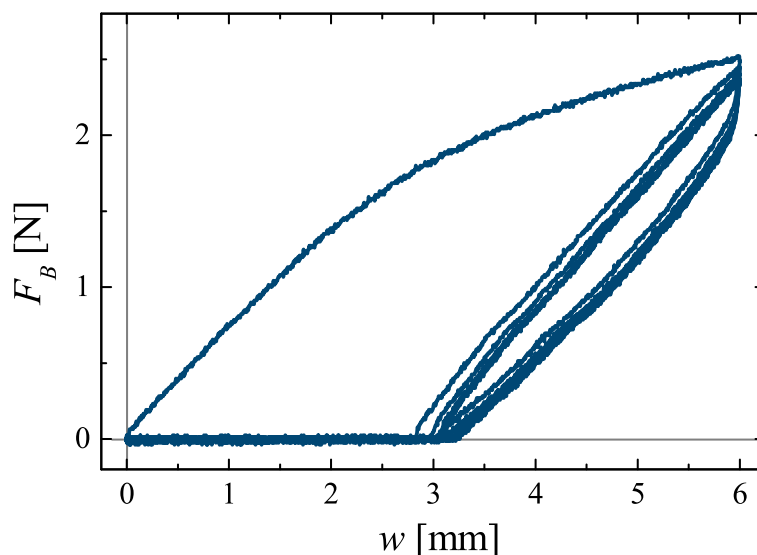


Abbildung 5.4: Ergebnis eines zyklischen Dreipunktbiegeversuchs an einem Koaxialkabel mit einer maximalen Durchbiegung $w_{max} = 6$ mm.

5.1.4 Diskussion der Grundlagenexperimente

Die Ergebnisse der Grundlagenexperimente ermöglichen die Berechnung der Steifigkeiten für die drei Lastfälle nach den Gleichungen, die in Tabelle 4.1 zusammengefasst sind. Die resultierenden Steifigkeiten sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Zudem wurde aus jeder Steifigkeit der Elastizitätsmodul mit Hilfe von

$$A = \pi r^2, \quad I = \frac{\pi}{4} r^4 = \frac{1}{2} J, \quad E \approx 3G,$$

berechnet und ebenfalls in der Tabelle gelistet.

Tabelle 5.1: In den Grundlagenexperimenten gemessene Steifigkeiten und daraus berechnete Elastizitätsmoduln.

		Zug	Torsion	Biegung
1. Zyklus	Steifigkeit	$2,020 \cdot 10^4$ N	$8,235 \cdot 10^{-4}$ Nm ²	$9,813 \cdot 10^{-4}$ Nm ²
	E-Modul	3280,5 MPa	409,4 MPa	325,8 MPa
Folgezyklen	Steifigkeit	$2,081 \cdot 10^4$ N	$1,078 \cdot 10^{-3}$ Nm ²	$1,898 \cdot 10^{-3}$ Nm ²
	E-Modul	3379,6 MPa	535,9 MPa	629,1 MPa

Hier wird unterschieden zwischen den Parametern des ersten Zyklus und der Fol-

gezyklen, da sich das Verhalten quantitativ nach der Erstbelastung in allen Experimenten ändert. Der Unterschied in den Steifigkeiten von erstem Zyklus und folgenden Zyklen ist der Beleg dafür, dass inelastisches Verhalten in allen drei Experimenten vorliegt. In der praktischen Anwendung bedeutet dies für alle drei grundlegenden Lastfälle, dass sich das Verhalten von Kabeln im undeformierten Zustand vom Verhalten im vordeformierten Zustand unterscheidet. Zur Simulation des elastischen Verhaltens von Kabeln, wie sie in IPS Cable Simulation möglich ist, werden die Steifigkeiten als Kabelparameter verwendet. Mit dem in Tabelle 5.1 gezeigten Unterschieden zwischen Verhalten im ersten und den folgenden Zyklen, stellt sich die Frage, welche Steifigkeit verwendet werden soll. Das hängt stark vom konkreten Fall ab, der betrachtet wird. Wenn die Montage eines undeformierten Kabelsegments simuliert werden soll, ist es sinnvoll, die Steifigkeiten des ersten Belastungszyklus zu verwenden. Soll ein bereits eingebautes und dadurch vordeformiertes Kabelsegment simuliert werden, ist die Verwendung der aus den Folgezyklen gemittelten Steifigkeiten zu empfehlen.

Die aus den jeweiligen Steifigkeiten berechneten Elastizitätsmoduln zeigen eine deutliche Anisotropie im Deformationsverhalten von Kabeln. Sie wird durch das hohe Aspektverhältnis von Kabellänge zu Durchmesser, den Schichtaufbau des Querschnitts und die Vorzugsrichtung in Richtung der Kabellängsachse verursacht. Dadurch wird das Verhalten von Kabeln unter Belastung in Kabellängsrichtung von anderen Effekten dominiert, als unter Belastung um die Querachsen (Biegung) oder Torsion um die Längsachse. In der Kabellängsachse liegen die Bestandteile des Kabels (metallischen Litzen, Isolationsschichten, Ummantelung) näherungsweise als Endlosfasern vor, wodurch unter Zugbelastung und unter Annahme einer perfekten Einspannung die Zugkraft direkt in alle Bestandteile eingeleitet werden kann. Unter Zug kann ein Kabel also als ein System vieler Zugstäbe betrachtet werden, die nahezu ideal parallel geschaltet sind. Das materielle Deformationsverhalten dieser Zugstäbe (elastoplastische Litzen, viskoelastische Hülle, etc.) dominiert das Verhalten des Kabels unter Zugbelastung. In der Querschnittsfläche des Kabels liegt hingegen ein näherungsweise konzentrisch angeordneter Schichtaufbau vor. Die einzelnen Bestandteile sind miteinander in den meisten Fällen nur locker verbunden oder verdreht. Unter Biegung oder Torsion können diese Schichten beispielsweise leicht aneinander abgleiten oder sich voneinander lösen. Kabel sind im Allgemeinen durch den Schichtaufbau des Querschnitts in Zusammenhang mit dem hohen Aspektverhältnis zudem biegeweich in Relation zu anderen Bauteilen mit hohem Aspektverhältnis (zum Beispiel Stahlträger oder Holzbalken). Biege- und

Torsionsdeformationen werden folglich durch die strukturellen Effekte dominiert, die auf der mesoskopischen Ebene des Querschnitts stattfinden. Dadurch ist der aus dem Zugversuch berechnete E-Modul um eine Größenordnung größer als die E-Moduln aus Biegung und Torsion. Während es bei homogenen, isotropen Materialien einfach möglich ist, das Materialverhalten durch einen uniaxialen Zugversuch und die Auswertung des Elastizitätsmoduls zu charakterisieren, ist das bei Kabeln nicht möglich. Aufbau und Geometrie der Kabel sind zudem dafür verantwortlich, dass eine Trennung der Materialparameter (E , G) von den Geometrieparametern (A , I , J) experimentell kaum möglich und nur wenig sinnvoll ist. Deshalb ist es für Kabel sinnvoll, die Steifigkeiten als Modellparameter zu verwenden und in den drei vorgestellten Experimenten separat zu bestimmen.

5.2 Konstitutives Verhalten von balkenartigen Proben unter Biegung

Im Folgenden werden die Ergebnisse von zyklischen Biegeversuchen an unterschiedlichen langen, schlanken Proben mit näherungsweise runden Querschnitten dargestellt und verglichen. Die Experimente verdeutlichen die Relevanz der konstitutiven Modellierung für balkenartige Proben, die zwar alle eine ähnliche Geometrie aufweisen (hohes Aspektverhältnis, runder Querschnitt) und dementsprechend alle mit dem Cosseratbalken-Modell modelliert werden können, sich in einfachen Biegeversuchen aber grundsätzlich unterschiedlich verhalten [18]. Zudem werden durch die Ergebnisse jeweils die Vor- und Nachteile der Dreipunktbiegung und der reinen Biegung sichtbar. Die Ergebnisse der Dreipunktbiegung werden in den Grafiken immer links, die der reinen Biegung immer rechts abgebildet, soweit nicht anders angegeben. Dieser Abschnitt beginnt mit Experimenten an CFK-Stäben (CFK: carbonfaserverstärkter Kunststoff), welche linear elastisches Verhalten zeigen. Einen Spezialfall unter den flexiblen Bauteilen stellen Bowdenzüge dar, die durch ihren strukturellen Aufbau seltenes krümmungsabhängiges linear elastisches Verhalten zeigen. In Abschnitt 5.3 werden Ergebnisse von Biegeversuchen an einem einfachen Kabel abgebildet, die inelastisches Verhalten, nämlich Elastoplastizität mit Schädigung zeigen. In Abschnitt 5.3.2 wird gezeigt, dass diese Experimente auf der Makroebene auch dazu in der Lage sind, Mikro- und Mesostruktureffekte sichtbar zu machen.

5.2.1 CFK-Stäbe: Lineare Elastizität

Abbildung 5.5 zeigt die Ergebnisse der CFK-Stäbe (Durchmesser $d = 3$ mm) unter Dreipunktbiegung (Probenlänge $l_0 = 170$ mm) und unter reiner Biegung (Probenlänge $l_0 = 410$ mm). Beide Experimente wurden in zyklischer Versuchsführung durchgeführt, wobei bei der reinen Biegung in positive und negative Richtung belastet wurde. Die Ergebnisse beider Experimente zeigen linear elastisches konstitutives Verhalten: Die Abhängigkeit der Messgrößen ist linear und in zyklischer Versuchsführung liegen Be- und Entlastungspfade aufeinander. Für diese Proben lassen sich eindeutig linear elastische Biegesteifigkeiten berechnen. Aus der Dreipunktbiegung ergibt sich nach Gleichung (4.3) ein Wert für die Biegesteifigkeit von $(EI)_{B,3PB} = 0,58 \text{ Nm}^2$ und im Fall der reinen Biegung direkt aus der Steigung $(EI)_{B,RB} = 0,4 \text{ Nm}^2$. Hierbei ist auffällig, dass die Biegesteifigkeit aus der Dreipunktbiegung um 45 % höher liegt, als die Biegesteifigkeit aus der reinen Biegung. Es ist anzunehmen, dass der Einfluss der Kräfteinleitung an den Auflagern und am Stempel und den damit einhergehenden Reib-, Quer- und Normalkräften in der Probe in der Dreipunktbiegung zu einer Überschätzung der Biegesteifigkeit führt. Zudem geht hier die gemessene Probenlänge in dritter Potenz in die Berechnung der Biegesteifigkeit ein und stellt damit eine nicht zu vernachlässigende Fehlerquelle bei der Berechnung der Biegesteifigkeit dar.

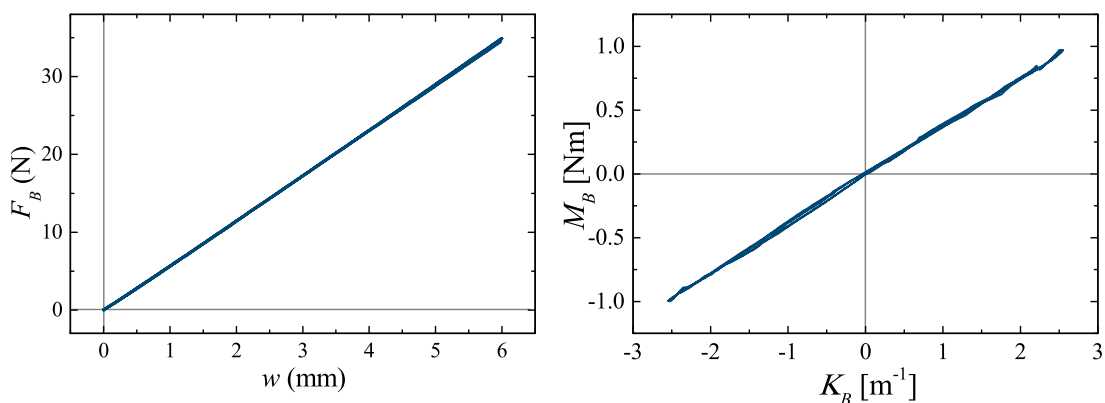


Abbildung 5.5: Experimentelle Ergebnisse der zyklischen Biegeexperimente an CFK-Stäben mit einem Durchmesser von 3 mm. *Links*: Dreipunktbiegung mit $w_{max} = 6$ mm. *Rechts*: Reine Biegung mit $\theta_{B,max} = \pm 60^\circ$.

5.2.2 Bowdenzüge: Abschnittsweise definierte lineare Elastizität

Bowdenzüge stellen eine spezielle Art von schlanken, flexiblen Bauteilen dar, die zur Übertragung von Zugkräften dienen. Sie werden beispielsweise in Fahrradbremsen oder Motorradkupplungen eingesetzt, um die Bremse oder Kupplung am Handgriff betätigen zu können. Ihr spezieller Aufbau – im einfachsten Fall ein Stahldraht, der durch eine drucksteife Hülle geführt wird – führt zu einem interessanten Verhalten unter Biegebelastung. Die Ergebnisse von Bowdenzügen mit einem Hüllendurchmesser von 7,8 mm und einem Durchmesser des innenliegenden Stahldrahts von 2,1 mm unter Dreipunktbiegung (Probenlänge $l_0 = 300$ mm) und reiner Biegung (Probenlänge $l_0 = 320$ mm) sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Beide Experimente liefern qualitativ ähnliche Ergebnisse, bei denen Be- und Entlastungspfade, abgesehen von geringen Abweichungen, aufeinander liegen. Das Verhalten ist also näherungsweise elastisch. Dennoch unterscheidet sich das Ergebnis deutlich vom linear elastischen Verhalten der CFK-Stäbe aus dem vorherigen Kapitel, da ab einer gewissen Durchbiegung bzw. Krümmung die Steifigkeit geringer ist als im Anfangsbereich der Kurven. Diese Beobachtungen motivieren eine abschnittsweise Definition der linear elastischen Steifigkeit. Das Verhalten lässt sich für die reine Biegung mittels des Konstitutivgesetzes für die Biegung in Gleichung (3.14) beschreiben, welches in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt wurde, siehe Unterkapitel 3.2.2. Die experimentell bestimmten Modellparameter sind der Schwellwert für die Krümmung $K_{B,t}$, welcher den Übergang von Biegesteifigkeit $(EI)_{B,1}$ bei niedrigen Krümmungen zu $(EI)_{B,2}$ bei höheren Krümmungen definiert, siehe Tabelle 5.2. Sie wurden zur Simulation eines Be- und Entlastungszyklus in der Dreipunktbiegung verwendet, dessen Ergebnis in Abbildung 5.6 *links* ergänzt ist. Die Simulation wurde in *IPS Cable Simulation* mit dem Konstitutivgesetz aus Gleichung (3.14) erstellt. Im Vergleich zwischen Simulation und Experiment wird deutlich, dass die Simulation ideal elastisches Verhalten abbildet, während im realen Experiment geringe inelastische Hystereseffekte auftreten und sich der erste Belastungszyklus von den folgenden Zyklen unterscheidet.

Tabelle 5.2: Experimentell bestimmte Parameter für das abschnittsweise definierte linear elastische Konstitutivgesetz.

Biegesteifigkeit $(EI)_{B,1}$	Biegesteifigkeit $(EI)_{B,2}$	Schwellwert $K_{B,t}$
1.40 Nm ²	0.19 Nm ²	0.18 m ⁻¹

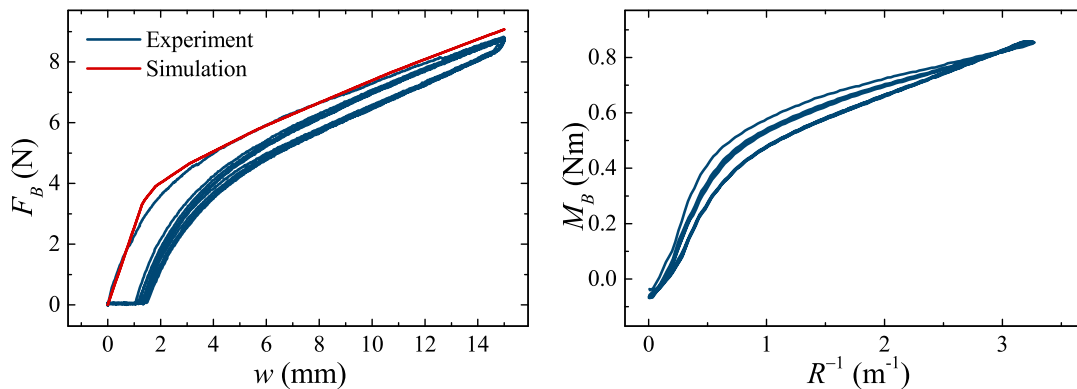


Abbildung 5.6: Zyklische Biegeexperimente an Bowdenzügen, die abschnittsweise definiertes linear elastisches Verhalten zeigen. *Links*: Dreipunktbiegung in Experiment und Simulation mit $w_{max} = 15$ mm. *Rechts*: Experimentelles Ergebnis der reinen Biegung mit $\theta_{B,max} = 60^\circ$.

5.3 Untersuchung des konstitutiven Verhaltens eines Kabels unter Biegung

Die folgenden Experimente wurden an einem Einzelleiter mit Durchmesser $d = 2,1$ mm, bestehend aus einem Kern aus Aluminium-Einzeldrähten und einer PVC-Hülle (PVC: Polyvinylchlorid), durchgeführt.

5.3.1 Grundlagenexperimente: zyklische Dreipunktbiegung und reine Biegung

Abbildung 5.7 zeigt die Ergebnisse des Einzelleiters unter Dreipunktbiegung (Probenlänge $l_0 = 56$ mm) und unter reiner Biegung (Probenlänge $l_0 = 50$ mm). Die Experimente wurden in zyklischer Versuchsführung mit Belastung auf eine maximale Durchbiegung w_{max} beziehungsweise einen maximalen Biegewinkel $\theta_{B,max}$ und Entlastung auf die Ausgangsposition durchgeführt. Auf der linken Seite der Abbildung ist das Ergebnis der Dreipunktbiegung für zwei verschiedene maximale Durchbiegungen abgebildet. Für $w_{max} = 2$ mm ist die Kraft-Durchbiegungs-Kurve annähernd linear elastisch. Das Verhalten für $w_{max} = 6$ mm ist dahingegen elas-

toplastisch, wie bereits in Abschnitt 5.1.3 für das Koaxialkabel beschrieben wurde.

In der reinen Biegung zeigt sich ebenfalls das bereits beschriebene inelastische Verhalten, wobei der erste Zyklus ein anderes Verhalten zeigt als die folgenden Zyklen, die eine statische Hysterese bilden. Im Gegensatz zur Dreipunktbiegung erfolgt die Entlastungskurve allerdings nicht auf einem Pfad, der annähernd parallel zur linear elastischen Belastung ist, sondern die Steigung ist geringer. Damit verhält sich das Kabel bei Entlastung weniger steif, als bei der elastischen Belastung und in der Ausgangslage (bei $K_B = 0 \text{ m}^{-1}$) wird kein bleibendes Biegemoment gemessen. Dieses konstitutive Verhalten ist typisch für stattfindende Schädigung. Worauf dieses konstitutive Verhalten zurückzuführen ist, wird genauer im Kapitel 5.3.2 untersucht.

Das Verhalten eines Kabels vom selben Typ zeigt hier unter Dreipunktbiegung und reiner Biegung unterschiedliche Effekte. Der Grund dafür ist, dass die Dreipunktbiegung nur im Bereich kleiner Krümmungen durchgeführt werden kann, um ein Durchrutschen der Probe auf den Auflagern zu verhindern und um die Auswertung unter den Euler-Bernoulli-Annahmen durchführen zu können, siehe Unterkapitel 4.1.3. Zudem variiert das Biegemoment in der Dreipunktbiegung entlang der Probenachse und hat sein Maximum in der Probenmitte. Dementsprechend werden während der Dreipunktbiegung die höchsten Krümmungen lokalisiert in der Probenmitte erreicht. Dadurch können sich Abschnitte der Probe bereits plastisch verformen, während andere noch elastisch sind. Im Gegensatz dazu liefert die reine Biegung konstante Biegekrümmungen entlang der Probe und erlaubt generell höhere Krümmungen, ohne dass die Versuchsführung oder -auswertung gefährdet ist, da sie keine Annahmen für kleine Winkel erfordert. Die beobachtete Schädigung tritt also erst bei höheren Krümmungen auf.

An dem zu untersuchenden Kabel wurde der Versuch der reinen Biegung zusätzlich mit zyklischer Biegung in positive und negative Belastungsrichtung durchgeführt. Das Ergebnis ist für eine Probe der Länge $l_0 = 40 \text{ mm}$ in Abbildung 5.8 dargestellt. Dieses Experiment dient der genaueren Untersuchung des Verfestigungsverhaltens. Es ist zu beobachten, dass sich bei dieser Art der zyklischen Belastung nur der Pfad der ersten Belastung aus der geraden Ausgangskonfiguration heraus (bei $K_B = 0 \text{ m}^{-1}$) von den restlichen Hysteresekurven unterscheidet. Sowohl die Belastungs- als auch die Entlastungspfade sind jeweils in positiver und negativer Belastungsrichtung annähernd parallel. Der Bereich, in dem die Probe wieder

eine gerade Konfiguration annimmt, fällt in diesem Experiment durch reproduzierbare Ausschläge des Biegemoments in positive Richtung auf. Diese sind darin begründet, dass nur eine geringe Biegeenergie vorhanden ist, die das System in eine definierte Gleichgewichtslage zwingt, das Gleichgewicht ist daher instabil für eine gerade Probe. Damit bewegen sich die luftgelagerten Schlitten und die Messung des Biegemoments wird gestört. Wird im weiteren Verlauf des Experiments die Biegung wieder erhöht, findet das System wieder in eine eindeutig definierte Gleichgewichtslage zurück.

In Kapitel 3.2.3 wurden die isotrope und die kinematische Verfestigung als grundsätzliche Arten der Verfestigung beschrieben. Die Ergebnisse der zyklischen Experimente an diesem Kabel lassen weder eine Einordnung in isotropes, noch in kinematisches Verfestigungsverhalten zu, da sich die vermuteten Fließgrenzen im Laufe der zyklischen Belastung nicht verschieben. Allerdings werden die plastischen Effekte durch Schädigungseffekte überlagert. Im folgenden Unterkapitel werden Ergebnisse von weitergehenden Untersuchungen gezeigt, die eine Interpretation der Biegeexperimente auf mikroskopischer Ebene ermöglichen.

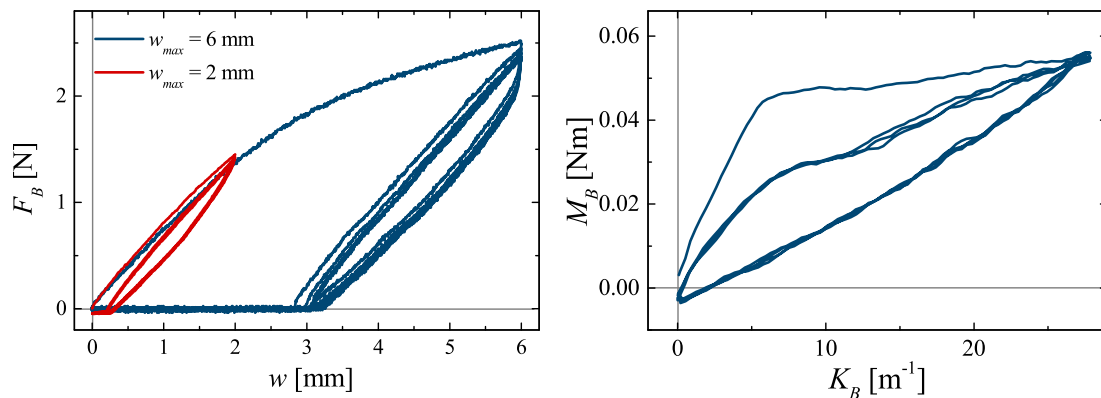


Abbildung 5.7: Experimentelle Ergebnisse der zyklischen Biegeexperimente an einem Einzelleiter mit $d = 2,1$ mm, die inelastisches Verhalten zeigen. *Links*: Dreipunktbiegung mit $w_{max} = 2$ bzw. 6 mm. *Rechts*: Reine Biegung mit $\theta_{B,max} = 80^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 50$ mm einer maximalen Biegekrümmung von $K_{B,max} = 27 \text{ m}^{-1}$.

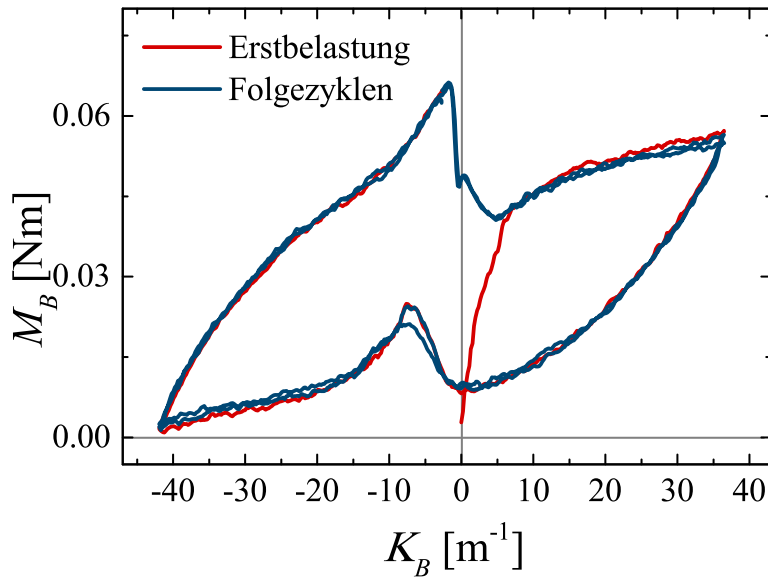


Abbildung 5.8: Experimentelles Ergebnis der zyklischen reinen Biegung in positive und negative Belastungsrichtung auf $\theta_{B,max} = \pm 90^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 40\text{ mm}$ einer maximalen Biegekrümmung von $K_{B,max} = \pm 39\text{ m}^{-1}$. Der Erstbelastungszyklus beginnend bei $\theta_B = 0^\circ$ ist in rot dargestellt, die beiden Folgezyklen in blau.

5.3.2 Untersuchung von Struktureffekten auf der Mikro- und der Mesoebene

Obwohl das zu untersuchende Kabel vergleichsweise einfach aufgebaut ist, besteht es aus sehr vielen einzelnen Bestandteilen: der äußeren PVC-Schicht und einer großen Anzahl dünner Aluminiumdrähte, die annähernd parallel, aber ungeordnet vorliegen. Dieser Aufbau lässt vermuten, dass unter Belastung Effekte auftreten, die durch Kontakt, Reibung oder Umlagerung der einzelnen Drähte oder durch Haftgleiteffekte und Ablösung zwischen Draht und Mantel entstehen. Bereits die im vorherigen Kapitel vorgestellten Ergebnisse der zyklischen Biegeexperimente lassen vermuten, dass sich diese Effekte auf Mikroebene systematisch auf das makroskopische Verhalten der Kabel unter Last auswirken. Dabei ist vorstellbar, dass während des ersten Belastungszyklus irreversible, plastische Verformungen auf der Mikroebene stattfinden, zu denen sowohl die Metallplastizität (Verfestigung) der Aluminiumdrähte selbst beiträgt als auch die irreversible Umlagerung der Drähte auf der Mesoebene. Gleichzeitig kann Schädigung auf Ebene der Mesostruktur auftreten, zum Beispiel durch Ablösen der Drähte vom Mantel, welche das Verhalten

weniger steif werden lässt.

Im Folgenden werden die Ergebnisse von Experimenten dargestellt, in denen diese Mikro- und Mesostruktureffekte durch geeignete zyklische Versuchsführung genauer beobachtet werden können. Die Versuchsführung des jeweiligen Experiments ist in Unterkapitel 4.1.3 aufgeführt.

Typ I: Zyklen mit konstanter Amplitude um unterschiedliche Biegewinkel

Ergebnisse von zyklischen Experimenten des Typs I am untersuchten Kabel, durchgeführt in der Dreipunktbiegung und in der reinen Biegung, sind in den Abbildungen 5.9 und 5.10 dargestellt. In der Dreipunktbiegung betrug die Probenlänge $l_0 = 56$ mm und in der reinen Biegung $l_0 = 40$ mm. Die Ergebnisse sind entsprechend der Diagramme zur Versuchsführung, Abbildung 4.7, (*links*) so eingefärbt, dass der globale Zyklus blau dargestellt wird und die überlagerten Zyklen um ein Belastungsniveau in jeweils einer anderen Farbe angezeigt werden. Durch einen Vergleich der blauen einhüllenden Kurven beider Diagramme mit den Ergebnissen der regulären zyklischen Biegeversuche in Abbildung 5.7 lässt sich feststellen, dass in diesem Experiment das grundlegende Verhalten während des ersten Belastungszyklus durch die überlagerten Zyklen nicht gestört wird.

Das Ergebnis der reinen Biegung gemäß dieser Versuchsführung liefert ein interessantes Ergebnis. Während die überlagerten Hysteresekurven um ein niedriges Krümmungsniveau geöffnet sind und damit auf inelastisches Verhalten schließen lassen, sind die Hysteresen bei höheren Krümmungen geschlossen und zeigen linear elastisches Verhalten. Bei Entlastung ist zu beobachten, dass dieses Verhalten reversibel ist. Dieses Phänomen lässt sich als Folge von mikro- und mesostrukturellen Abläufen in der Kabelprobe interpretieren, die vom Maß der Krümmung abhängen. Es ist anzunehmen, dass bei geringeren Biegekrümmungen inelastisches Verhalten zu beobachten ist, da hier die Aluminiumdrähte noch in vergleichsweise gerader Lage vorliegen und Spiel haben, aneinander vorbei zu gleiten. Es findet also Reibung im Kabel durch Umlagerungen von einzelnen Drähten in diesem Bereich statt, die die geöffneten Hysteresen verursachen können. Bei höheren Biegekrümmungen werden die Aluminiumdrähte durch die gebogene PVC-Hülle zusammengepresst. Dadurch ist die Bewegung der Aluminiumdrähte gegeneinander behindert und die Biegung muss durch lokale Druck- und Zugzustände realisiert werden. Da die lo-

kale Deformation im Kabel klein bleibt, liegen diese Zustände im linear elastischen Bereich der verwendeten Materialien und die makroskopischen Hysteresen zeigen linear elastisches Verhalten.

Die analoge Versuchsführung in der Dreipunktbiegung zeigt die Tendenz, dass die überlagerten Zyklen Hysteresekurven verursachen, die bei Belastung um ein höheres Niveau weiter geöffnet sind. In diesem Experiment nimmt das inelastische Verhalten mit steigender Biegekrümmung also zu, wobei die Zyklen um $w = 1$ mm beinahe linear elastisches Verhalten zeigen. Die Beobachtung lassen darauf schließen, dass mit steigender Biegung inelastische Effekte verstärkt auftreten. Dabei ist zu erwähnen, dass in diesem Experiment in der Mitte der Probe eine maximale Biegekrümmung von 10 m^{-1} auftritt und damit findet der Versuch in einem Bereich statt, in dem in der reinen Biegung auch geöffnete Hysteresen auftreten. Die zunehmende Inelastizität mit steigender Krümmung kann auf der Mesostrukturebene als zunehmende Reibung zwischen den Aluminiumdrähten interpretiert werden.

Wie in Abbildung 4.7 (*rechts*) dargestellt, wurden die zuletzt diskutierten Experimente zusätzlich in der Variante mit drei globalen Zyklen ($N = 3$) durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.11 und 5.12 dargestellt und die Farbe der Kurven entspricht erneut der Einfärbung im Diagramm der Versuchsführung. Die Einhüllende ist wieder in blau abgebildet und die überlagerten Zyklen eines globalen Zyklus sind jeweils in einer anderen Farbe gezeichnet. Im Vergleich mit den in Abbildung 5.7 dargestellten Ergebnissen ist auch für die folgenden Zyklen sichtbar, dass das globale Verhalten von den überlagerten Zyklen nicht beeinflusst wird. Die grundsätzliche Charakteristik der überlagerten Zyklen bleibt in beiden Experimenten in den folgenden globalen Zyklen bestehen. In der reinen Biegung verursachen in allen globalen Zyklen die überlagerten Zyklen um das niedrigste Krümmungsniveau geöffnete Hysteresen, bei höheren Krümmungen sind sie erneut geschlossen. Durch die bleibende plastische Verformung in der Dreipunktbiegung werden die Zyklen um das niedrigste Krümmungsniveau in den globalen Folgezyklen nicht sichtbar. Die überlagerten Zyklen bei höherer Durchbiegung zeigen aber sogar quantitativ das selbe Verhalten, wie im initialen Zyklus.

Die sowohl hier als auch in [17] vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass das Biegeverhalten von Kabeln stark vom Krümmungsbereich abhängt, in dem die zyklische Belastung aufgebracht wird. Zudem führt die hier verwendete Versuchsführung

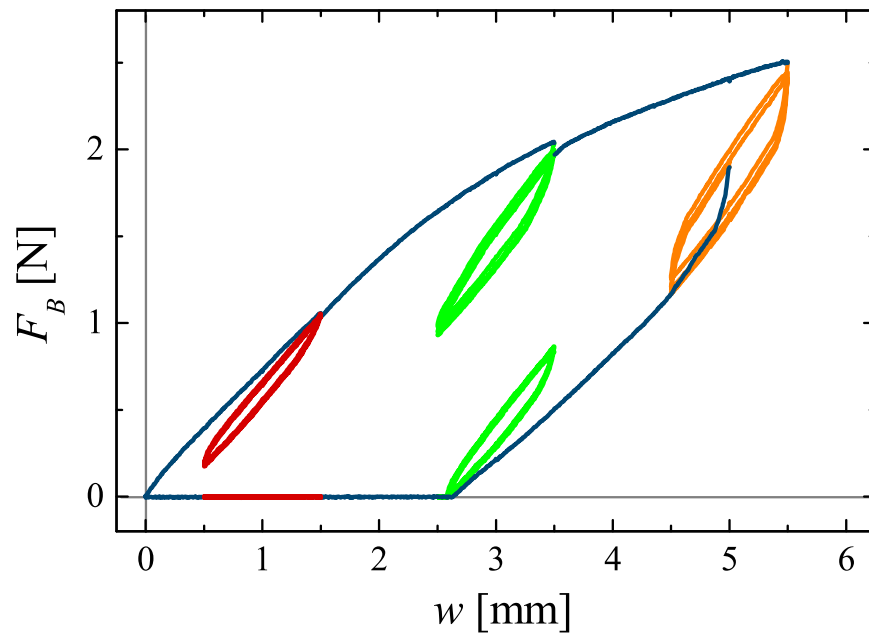


Abbildung 5.9: Ergebnis der zyklischen Dreipunktbiegung nach Versuchstyp I mit einer Amplitude von $\Delta w = \pm 0,5$ mm um diskrete Biege niveaus.

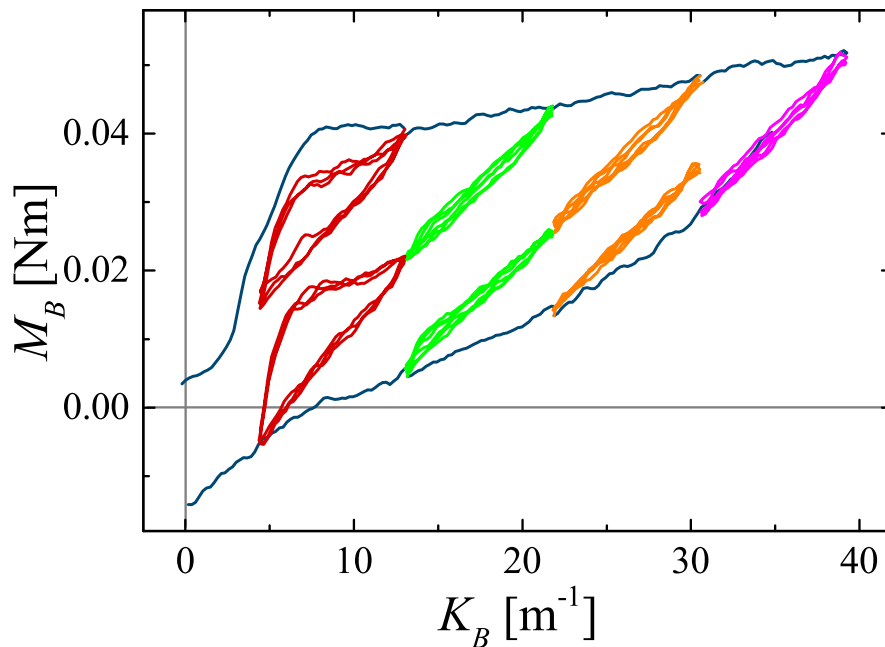


Abbildung 5.10: Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp I mit einer Amplitude von $\Delta\theta_B = \pm 10^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 40$ mm einer Amplitude in der Biegekrümmung von $\Delta K_B = \pm 4,2$ m⁻¹.

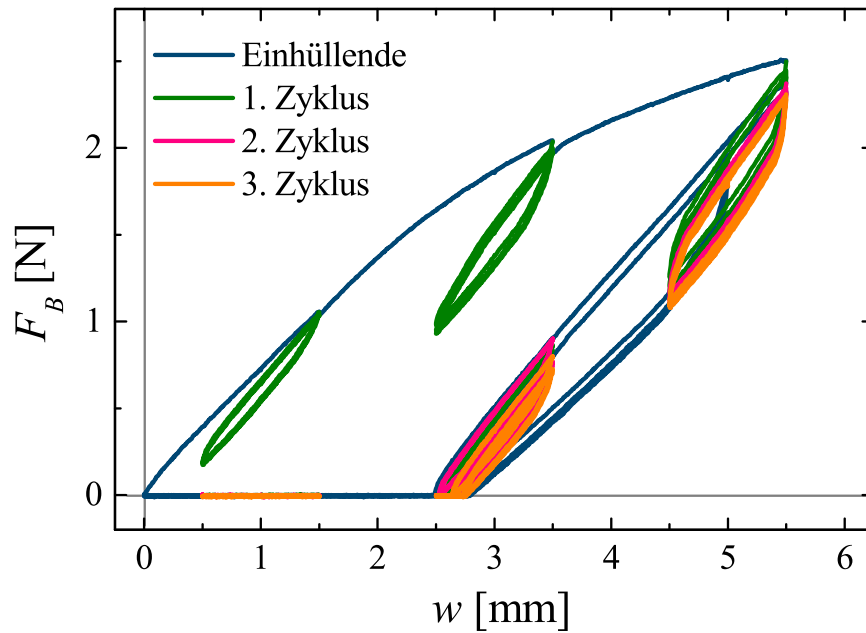


Abbildung 5.11: Ergebnis der zyklischen Dreipunktbiegung nach Versuchstyp I, $N = 3$, mit einer Amplitude von $\Delta w = \pm 0,5$ mm um diskrete Biege niveaus.

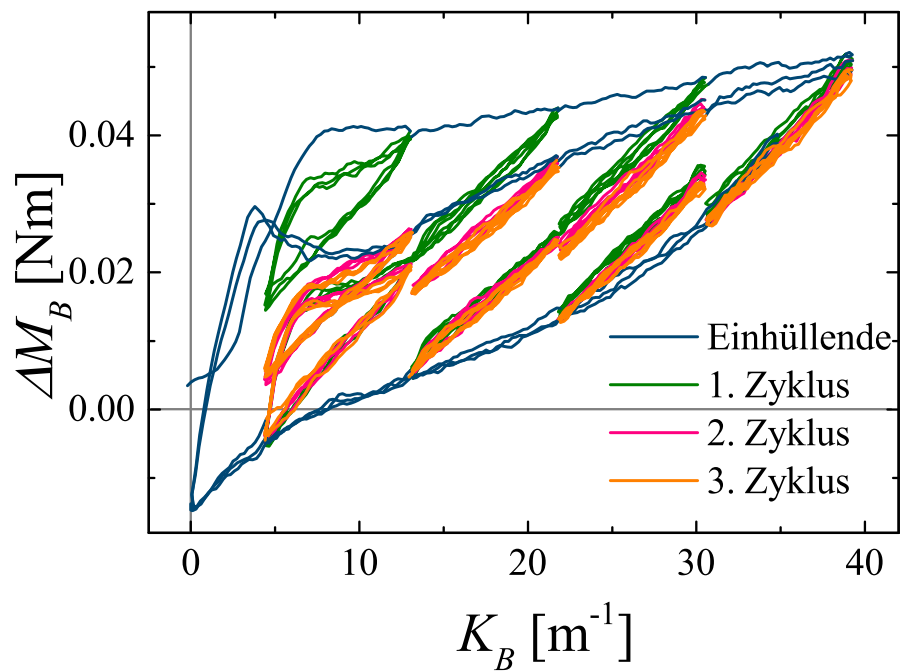


Abbildung 5.12: Ergebnisse der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp I, $N = 3$, mit einer Amplitude von $\Delta\theta_B = \pm 10^\circ$ um diskrete Biege niveaus. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 40$ mm einer Amplitude in der Biegekrümmung von $\Delta K_B = \pm 4,2$ m^{-1} .

zu der Annahme, dass abhängig von den Randbedingungen und der vorliegenden Krümmung die verschiedenen Deformationsmechanismen auf mikroskopischer und mesoskopischer Ebene das makroskopische Deformationsverhalten beeinflussen. Werden ausschließlich globale Zyklen ausgeführt, wie in Unterkapitel 5.3, werden die Vorgänge auf Ebene der Mikro- und Mesostruktur überlagert gemessen, beziehungsweise verschmiert. Diese Effekte der Mikro- und Mesostruktur in Kombination mit dem globalen Verhalten sind mit Konstitutivgesetzen auf Basis der Schnittgrößen der Cosseratbalken für Elastoplastizität und Schädigung nicht ohne weitere Kriterien abzubilden.

5.3.3 Weiterführende Untersuchung der Plastizität und Schädigung

Der bisher in allen Experimenten zu beobachtende Unterschied zwischen initialem Zyklus und folgenden Zyklen lässt vermuten, dass das Verhalten der Probe von der Deformationsgeschichte, konkret von der bisher maximal aufgetretenen Belastung abhängt. Im vorherigen Abschnitt wurde bereits motiviert, dass Effekte auf der Mikro- und Mesostrukturebene auftreten, die sich auf das makroskopische konstitutive Verhalten der Probe auswirken.

Im Folgenden wird die Entwicklung des globalen Verhaltens betrachtet, welches anhand der Versuche nach Typ II und III, siehe Unterkapitel 4.1.3, untersucht wurde.

Typ II: Zyklen mit anwachsendem maximalen Biegewinkel

In Abbildung 5.13 ist exemplarisch das Ergebnis für ein Kabel unter reiner Biegung nach Versuchstyp II abgebildet. Die einzelnen Zyklen sind jeweils anhand der in Abbildung 4.8 verwendeten Farben zu unterscheiden. Da sich die Zyklen im Anfangsbereich stark überlagern, ist in Abbildung 5.14 eine vergrößerte Darstellung der Zyklen bis zu einem maximalen Biegewinkel von $\theta_{B,max} = 30^\circ$ abgebildet. Betrachten wir dieses Diagramm, fällt auf, dass die ersten Zyklen ($\theta_{B,max} \leq 15^\circ$) weitestgehend linear elastisch verlaufen und nahezu geschlossene Hysteresen liefern. Im weiteren Verlauf öffnen sich die Hysteresen zunehmend mit steigendem maxima-

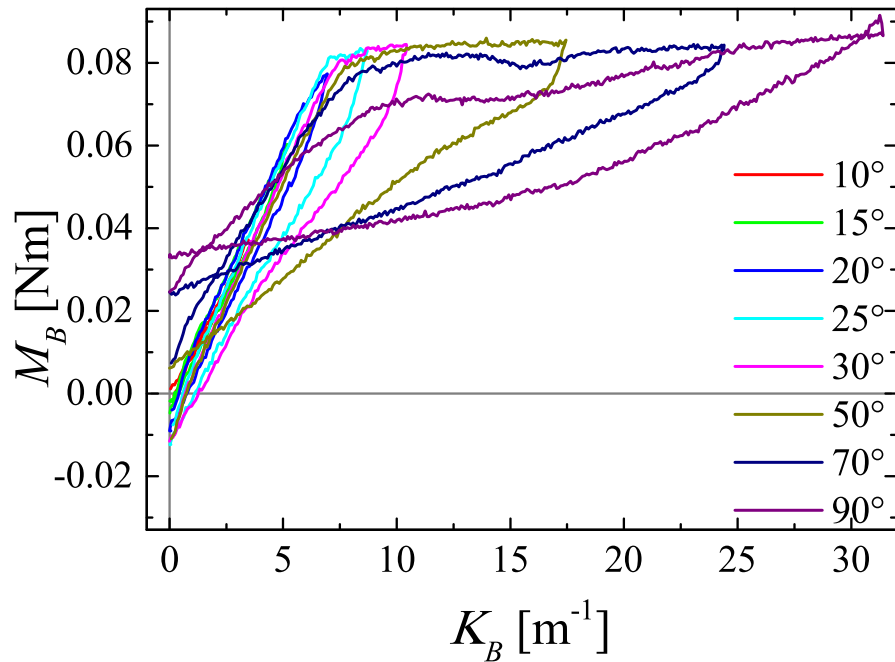


Abbildung 5.13: Vollständiges Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp II mit $\theta_{B,max} = 90^\circ \hat{=} K_B = 31,4 \text{ m}^{-1}$.

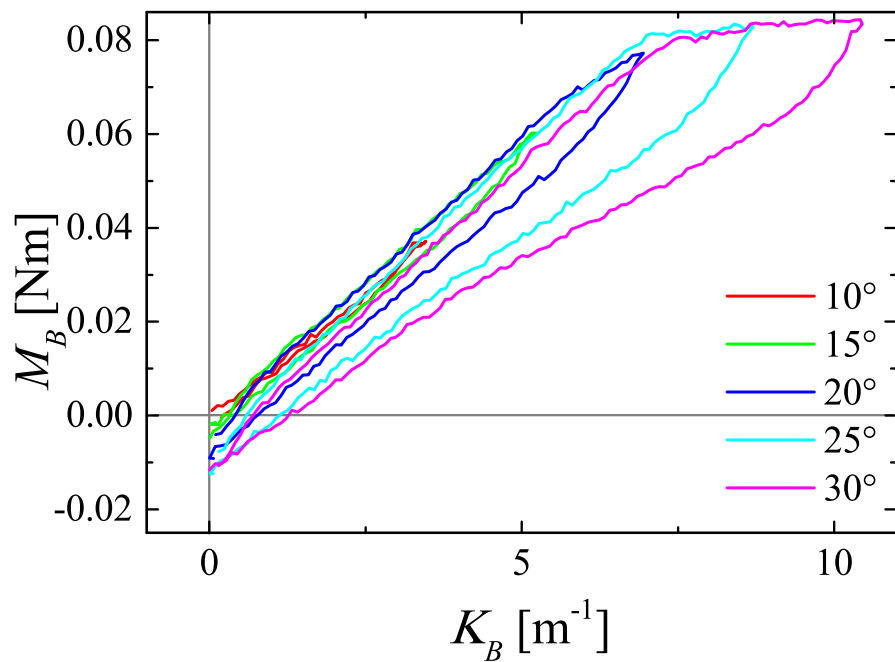


Abbildung 5.14: Vergrößerung des Anfangsbereichs aus Abbildung 5.13: Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp II mit $\theta_{B,max} = 30^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 50 \text{ mm}$ einer Biegekrümmung von $K_B = 10,5 \text{ m}^{-1}$.

len Biegewinkel. Für diese Probe ändert sich die Steigung der Belastungskurve bei einem Biegewinkel von ca. 20° , was ungefähr einer Krümmung von $K_B = 7 \text{ m}^{-1}$ entspricht. Die Zyklen mit $\theta_{B,max} \geq 25^\circ$ zeigen in diesem Bereich einen Knick und anschließend einen Bereich mit reproduzierbar verringerter Steigung. Erst nachdem ein Biegewinkel von 70° überschritten wurde, ist die Steigung bereits ab Beginn der Wiederbelastung geringer und der Knick weniger stark ausgeprägt. Während die Form des Zyklus mit $\theta_{B,max} = 70^\circ$ qualitativ gut mit dem jungfräulichen Zyklus aus Abbildung 5.7 (*rechts*) übereinstimmt, entspricht der Zyklus mit $\theta_{B,max} = 90^\circ$ der Form der Zyklen der statischen Hysterese. Die Entlastungspfade zeigen ebenfalls eine Veränderung der Form und Steigung mit zunehmendem maximalen Biegewinkel. Die Steigung der Entlastungspfade in den ersten, linear elastisch verlaufenden Zyklen mit $\theta_{B,max} \leq 15^\circ$ entspricht nahezu der Steigung während der Belastung. In den folgenden Zyklen sinkt die Steigung während der Entlastung stückweise ab. Dies ist ein Indikator für auftretende Schädigung.

Dieses Experiment liefert mehrere Erkenntnisse über die Entwicklung der inelastischen Eigenschaften während der Biegung des Kabels im ersten Belastungszyklus mit $\theta_{B,max} = 90^\circ$ aus Abbildung 5.7 (*rechts*). Das Verhalten ist bei geringen Krümmungen zunächst linear elastisch, bis eine gewisse Krümmung mit einem entsprechenden Biegemoment erreicht ist. Die sich anschließenden Zyklen zeigen einen Knick, der auf das Einsetzen von plastischen Deformationen hindeutet. Dazu überlagert tritt eine Erweichung des Biegeverhaltens auf, welche als Folge von auftretenden Schädigungseffekten interpretiert werden kann. Das konstitutive Verhalten des Kabels unter Biegung ist also stark abhängig von der bisher erfolgten maximalen Biegebelastung. Ein Überschreiten der bisher maximalen Belastung führt dabei zu einem Übergang von linear elastischem zu inelastischem Verhalten und zu einer Erweichung des Kabels, welche auf Vorgänge auf der Mikro- und Mesoebene zurückzuführen ist. Dabei kann in diesem Fall, bedingt durch den Aufbau des Kabels, nicht festgestellt werden, ob die beobachtete Schädigung durch Umlagerung der metallischen Litzen, Ablösen der Bestandteile voneinander oder andere Effekte verursacht wird.

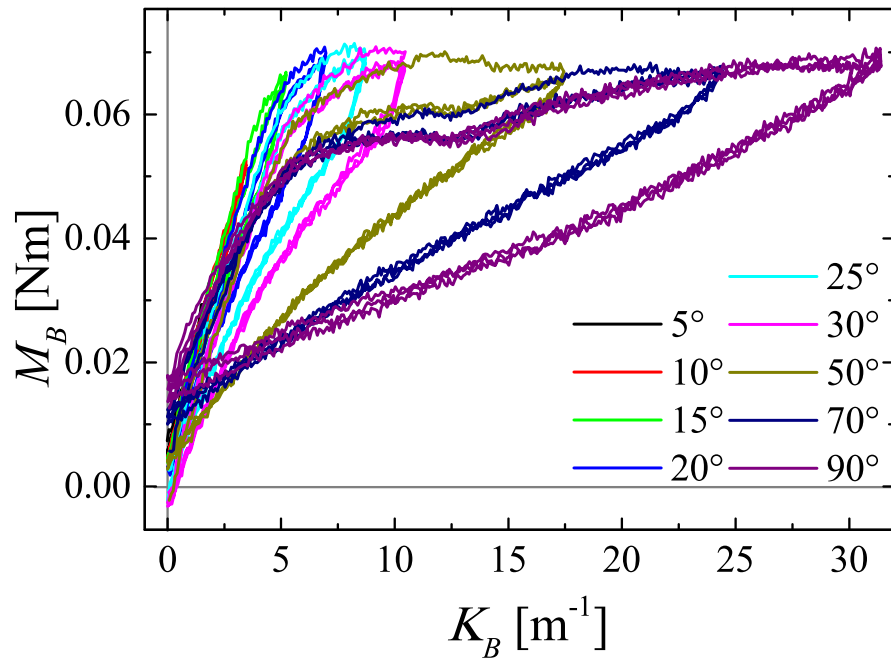


Abbildung 5.15: Vollständiges Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp IIIa mit $\theta_{B,max} = 90^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 50$ mm einer Biegekrümmung von $K_B = 31,4 \text{ m}^{-1}$.

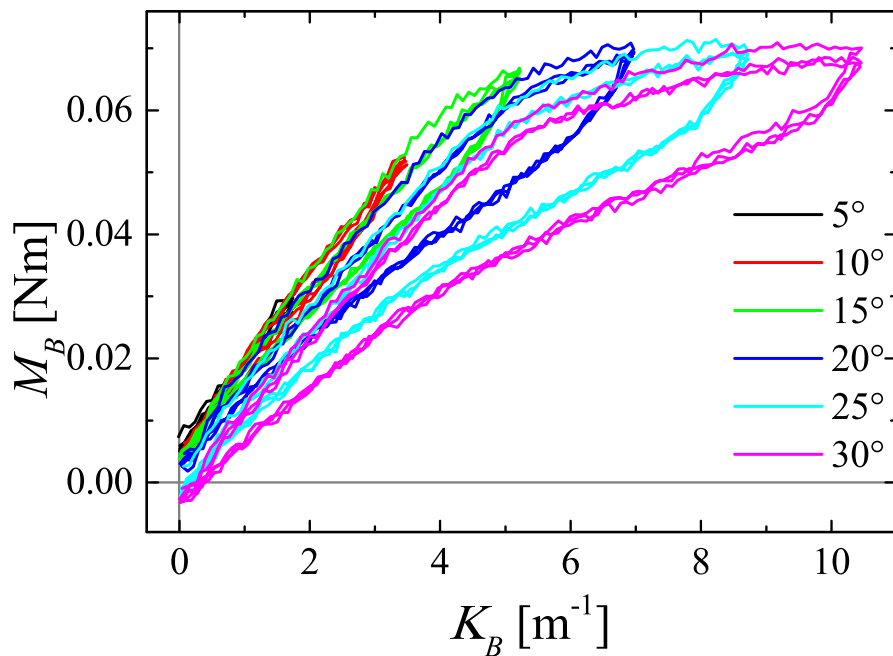


Abbildung 5.16: Vergrößerung des Anfangsbereichs aus Abbildung 5.15: Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp IIIa mit $\theta_{B,max} = 30^\circ$. Dies entspricht bei der Probenlänge $l_0 = 50$ mm einer Biegekrümmung von $K_B = 10,5 \text{ m}^{-1}$.

Typ III: Varianten von Typ II in zyklischer Versuchsführung

Die bisher vorgestellten Ergebnisse der zyklischen Experimente haben alle die Gemeinsamkeit, dass sich das Verhalten im ersten Belastungszyklus von den folgenden unterscheidet. Dies wird nun mit den in Abbildung 4.9 vorgestellten Varianten der zyklischen Versuchsführung in der reinen Biegung genauer untersucht.

Die Ergebnisse des Biegeversuches nach Typ IIIa sind in Abbildung 5.15 dargestellt, ergänzt durch die Vergrößerung der ersten Zyklen bis zu einem maximalen Biegewinkel von $\theta_{B,max} = 30^\circ$ in Abbildung 5.16. Hier wurden jeweils drei Zyklen mit einem maximalen Biegewinkel durchgeführt, bevor auf das nächste Lastniveau weiterbelastet wurde. In der vergrößerten Darstellung ist sichtbar, dass sich die ersten Zyklen, wie bereits vermutet, linear elastisch verhalten und auf diesen Lastniveaus kein Unterschied zwischen dem ersten und den folgenden Zyklen zu erkennen ist. Für die Probe ist das bis zu einem maximalen Biegewinkel von $\theta_{B,max} = 10^\circ$ zu beobachten. Im weiteren Verlauf findet auch für diese Probe ein Übergang zu inelastischem Verhalten mit gleichzeitiger Erweichung statt. Qualitativ wird der Verlauf aus Abbildung 5.13 in diesem Experiment also bestätigt. Es liefert des Weiteren die Erkenntnis, dass weitere Zyklen auf ein Lastniveau, das die bisherige maximale Krümmung nicht übersteigt, keinen Einfluss auf den weiteren Verlauf des Experiments hat. Auf allen Laststufen ist zu erkennen, dass sowohl die Entlastungs- als auch die Wiederbelastungspfade reproduzierbar sind, so lange die maximale bisherige Biegekrümmung nicht überschritten ist. Für die betrachtete Probe verändern sich die Belastungspfade nicht mehr, nachdem auf einen maximalen Biegewinkel von $\theta_{B,max} = 70^\circ$, entsprechend einer Krümmung von $K_B = 25 \text{ m}^{-1}$, belastet wurde. Lediglich ein Unterschied in den Entlastungspfaden ist danach noch ersichtlich, nachdem der maximale Biegewinkel von 90° erreicht wurde.

In Abbildung 5.17 sind die Ergebnisse des zyklischen Biegeversuchs nach Typ IIIb zusammengestellt. Dabei sind die $N = 3$ globalen Zyklen Abbildung 4.9 (*rechts*) entsprechend eingefärbt, um sie unterscheiden zu können. Der erneute Vergleich des Verlaufs der globalen Zyklen mit dem Ergebnis aus Abbildung 5.7 bestätigt, dass sich auch hier wieder der erste globale Zyklus von den folgenden grundlegend unterscheidet. Im Zyklus $N = 1$ zeigt sich wieder das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verhalten, welches stark abhängig ist von der maximalen bisher aufgetragenen Biegung. Die folgenden globalen Zyklen ($N = 2$ und $N = 3$) verlaufen

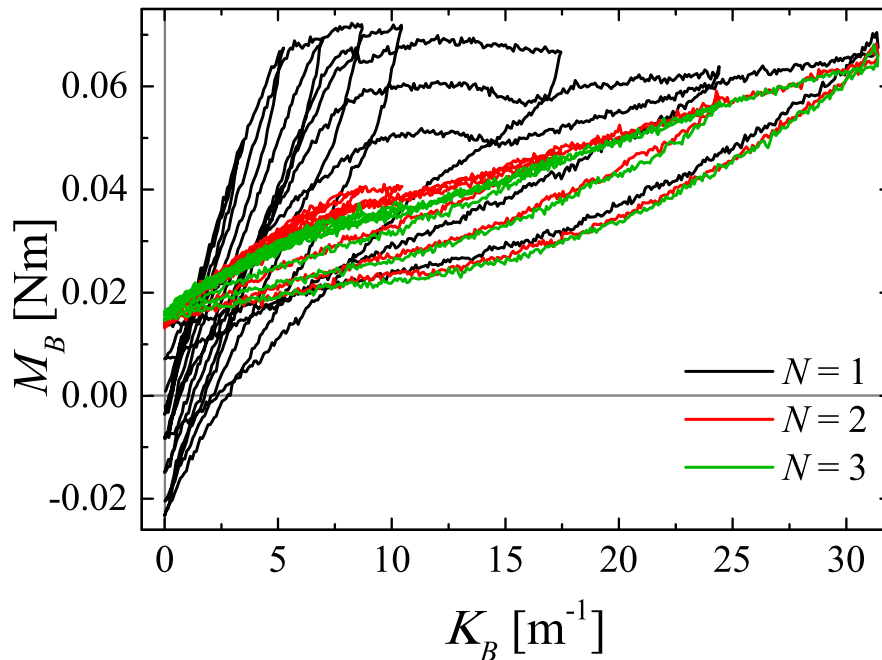


Abbildung 5.17: Vollständiges Ergebnis der zyklischen reinen Biegung nach Versuchstyp IIIb. Der erste globale Zyklus ist in schwarz dargestellt.

nahezu identisch, da hier der maximale Biegewinkel nicht weiter gesteigert wird. Ein Vergleich der Entwicklung des konstitutiven Verhaltens während des initialen globalen Zyklus ($N = 1$) und während des darauffolgenden Zyklus ($N = 2$) ist mit Hilfe der Abbildungen 5.18 und 5.19 möglich. Dabei fällt auf, dass das näherungsweise linear elastische Limit im initialen Zyklus bei einer geringeren Krümmung ($K_B = 3,5 \text{ m}^{-1}$) als im folgenden Zyklus ($K_B = 10 \text{ m}^{-1}$) erreicht ist. Des Weiteren scheint im zweiten globalen Zyklus keine Änderung der Belastungspfade aufzutreten, während die Entlastungspfade zwar geänderte Steigungen besitzen, aber immer in der Ausgangslage bei dem gleichen Wert für das Biegemoment enden. Diese Beobachtung lässt die Schlussfolgerung zu, dass keine irreversiblen Deformationen mehr passieren, nachdem der jungfräuliche Zyklus abgeschlossen wurde, sofern nicht auf ein höheres Lastniveau belastet wird. Reversible Deformationen finden im Gegensatz dazu reproduzierbar in jedem Zyklus statt und liefern die Erklärung dafür, dass die Hysteresen bei höherer Belastung auch immer weiter geöffnet sind.

Zyklen, die in Krümmungsbereichen stattfinden, in die vorher noch nicht belastet wurde, sind also hauptsächlich geprägt durch initiale, irreversible Deformationen. Dabei überlagern sich in den gezeigten Ergebnissen Verfestigung durch

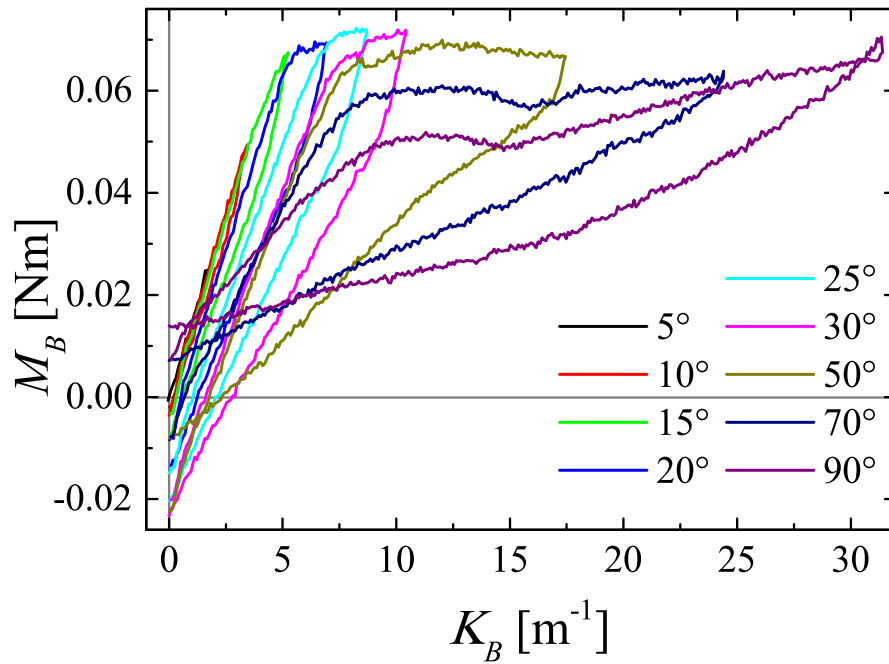


Abbildung 5.18: Separate Darstellung des globalen Zyklus $N = 1$ aus der reinen Biegung nach Versuchstyp IIIb, siehe Abbildung 5.17.

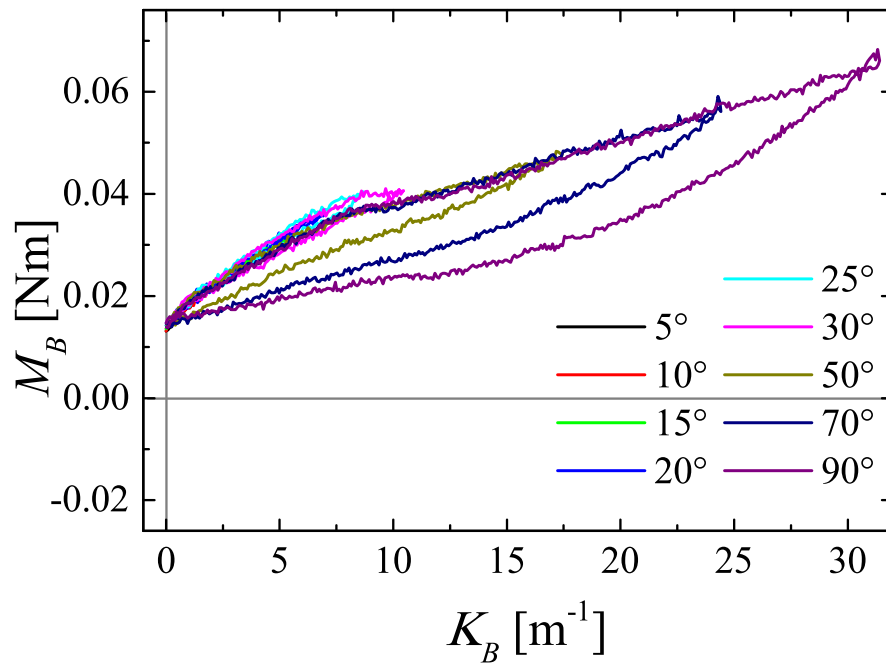


Abbildung 5.19: Separate Darstellung des globalen Zyklus $N = 2$ aus der reinen Biegung nach Versuchstyp IIIb, siehe Abbildung 5.17.

Elastoplastizität im niedrigeren Krümmungsbereich auf Ebene der Mikrostruktur und Erweichen durch Schädigungseffekte auf der Mesostrukturebene bei höheren

Krümmungen. Erfolgt die Biegung in einem Krümmungsbereich, in dem vorher schon eine Belastung aufgebracht wurde, zeigt sich das vorkonditionierte konstitutive Verhalten, welches durch reversible Deformationsprozesse geprägt ist.

Das hier beobachtete Verhalten eines Kabels unter Biegung, welches von der bisherigen maximalen Belastung abhängt, ist ein bei Elastomeren bekannter Effekt und wurde von Mullins für Gummi beschrieben [57]. Charakteristisch für den Mullins-Effekt ist eine irreversible Erweichung des Materials bei Belastung über die bisher maximal aufgebrachte Last hinaus und ein weiterhin stabiles Verhalten unter dieser Lastgrenze [10, 52]. Wird die bisher maximale Last in weiteren Lastzyklen erneut überschritten, tritt eine erneute Erweichung auf. Bei gefüllten Elastomeren wird dieser Effekt auf das initiale Ablösen der polymeren Matrix von Partikeln im Material zurückgeführt, welches zu der irreversiblen Erweichung führt. Für technisch relevante gefüllte Elastomere bedeutet dies, dass es vorteilhaft ist, das Material in einem vorkonditionierten Zustand einzusetzen, indem vor der eigentlichen Belastung eine höhere Last auf das Material aufgegeben wird. In der Modellierung kann dann der Erstbelastungszyklus zur Vorkonditionierung ignoriert werden und die Modellparameter ausschließlich an die Folgezyklen angepasst werden, die ein stabiles Verhalten zeigen. Eine analoge Erklärung kann zur Interpretation der vorliegenden Ergebnisse der reinen Biegung des Kabels angeführt werden. Es ist anzunehmen, dass die im Laufe des Erstbelastungszyklus auftretenden irreversiblen Erweichungen auf strukturelle Effekte auf der mesoskopischen Ebene, zum Beispiel Ablösen der Ummantelung von Litzen oder irreversible Umlagerung von Litzen, zurückzuführen ist. Analog zum Mullins-Effekt bleibt das Verhalten des Kabels anschließend stabil, solange die Belastung die maximale bisher aufgebrachte Biegekrümmung nicht übersteigt. Für die Anwendung von Kabeln und die Simulation von Kabeln unter Last ergibt sich daraus eine ähnliche Vorgehensweise wie für gefüllte Elastomere. Bei einer Erstbelastung eines Kabels in einem Bereich, in dem vorher noch keine Belastung aufgebracht wurde, muss mit einer initialen Erweichung gerechnet werden. Soll ein Kabel in der Anwendung wiederkehrenden Lasten in einem bestimmten Krümmungsbereich ausgesetzt werden, ist es vorteilhaft, das Kabel mit einer höheren Last vorzukonditionieren, um danach ein stabiles Deformationsverhalten zu erhalten.

Zusätzlich zur hier beschriebenen Analogie zum Mullins-Effekt wurde mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse in diesem Kapitel gezeigt, dass die makroskopische Deformation des Kabels das komplexe Produkt verschiedener reversibler und

irreversibler Deformationseffekte auf der Mesostrukturebene (Abgleiten und Reibung zwischen Bestandteilen) und der Mikrostrukturebene (Metallplastizität, lineare Elastizität) ist.

5.4 Multiaxiale Experimente an Kabeln

Die Ergebnisse der in Kapitel 4.2 beschriebenen multiaxialen Experimente am bereits mittels Grundlagenexperimenten untersuchten Koaxialkabel werden in den folgenden Unterkapiteln vorgestellt.

5.4.1 Räumliche Kombination aus Biegung, Torsion und Druck

Das in Unterkapitel 4.2.1 beschriebene Experiment, welches eine räumliche Konfiguration der Probe zur Folge hat, wurde an Koaxialkabeln verschiedener Probenlängen durchgeführt. Die Ergebnisse des Experiments an einer Probe der Länge $l_0 = 180$ mm für verschiedene Vortorsionen sind als normierte Axialkraft-Stauchungsdiagramme in Abbildung 5.20 abgebildet. Das Ergebnis unterscheidet sich grundsätzlich von den theoretischen Ergebnissen, die in Abbildung 4.10 dargestellt sind und für ein linear elastisches Material ermittelt wurden. Nach Gleichung (4.15) sollte für den Fall ohne Vortorsion die Normierung der Axialkraft auf die Biegesteifigkeit und Probenlänge den Wert -1 ergeben. Dies ist im realen Experiment an dem Koaxialkabel nicht zu beobachten. Die kritische Kraft, die für das Knicken der Probe notwendig ist, übersteigt den theoretischen Wert um das Zwanzigfache. Des Weiteren sinkt der Betrag der theoretischen kritischen Knicklast mit steigender Vortorsion. Im Experiment am Koaxialkabel wird das nicht bestätigt.

In Abbildung 5.21 ist der Vergleich zwischen Experimenten an Proben mit den Längen 100 mm und 180 mm dargestellt. Gemäß der Theorie sollten durch die Normierung die Ergebnisse unabhängig von der Probenlänge werden und die normierte Last für die jeweils gleiche Vortorsion bei verschiedenen Probenlängen gleiche Werte annehmen. Abbildung 5.21 zeigt exemplarisch für die Vortorsionen um 0π und 4π , dass auch dies im Experiment nicht abgebildet werden kann.

Diese Experimente liefern zwar realistische Konfigurationen der Kabel im dreidi-

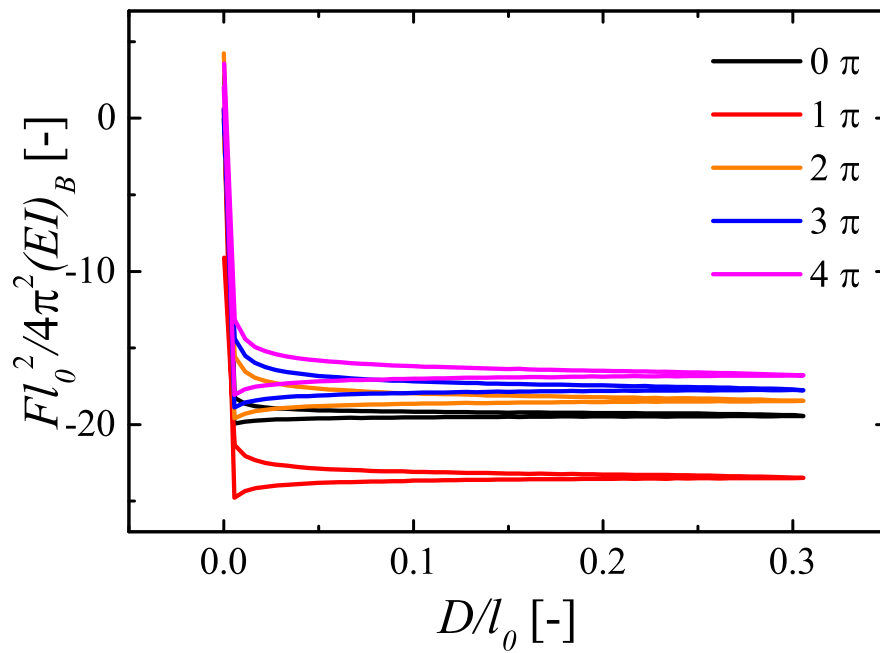


Abbildung 5.20: Ergebnis des multiaxialen Experiments nach van der Heijden et al. [34] an einem Koaxialkabel mit Probenlänge $l_0 = 180$ mm.

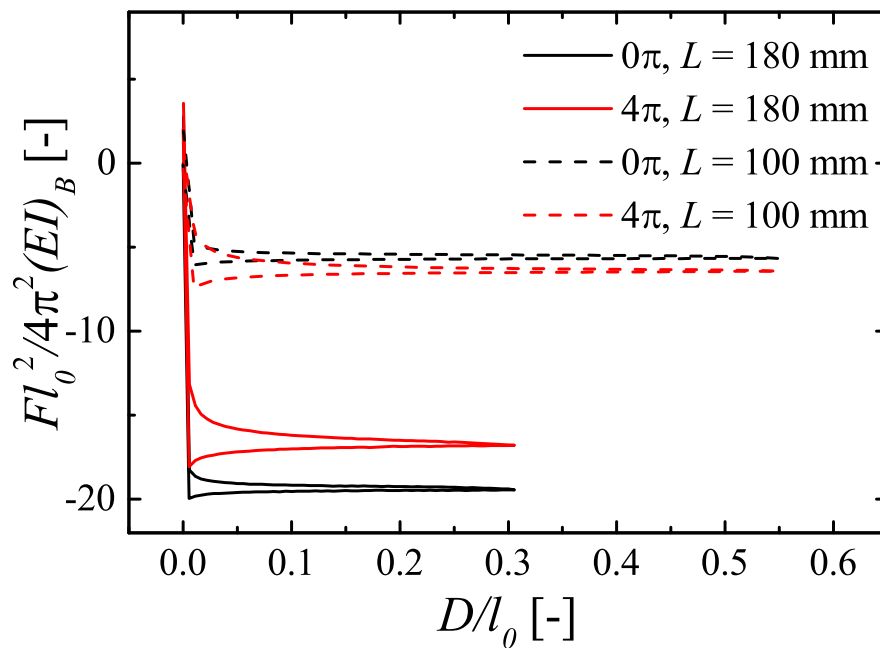


Abbildung 5.21: Vergleich der Ergebnisse des multiaxialen Experiments nach van der Heijden et al. [34] an Koaxialkabelproben der Längen $l_0 = 100$ mm und $l_0 = 180$ mm.

mensionalen Raum und aktivieren die drei grundlegenden Deformationsarten (Zug, bzw. Druck, Biegung und Torsion), allerdings ist ihre Interpretation für die zu untersuchenden inelastischen Kabel gemäß der Theorie für linear elastische Proben nicht durchführbar [19]. Die Kopplung zwischen Torsion und Biegung für Kabel kann in diesem Experiment nicht untersucht oder quantifiziert werden, da verschiedene Effekte, beispielsweise der instabile Übergang von der geraden Ausgangskonfiguration in die räumliche Konfiguration und inelastisches Verhalten, überlagert auftreten. Dieses Experiment zeigt im Vergleich mit den Ergebnissen für elastische Proben, wie sie in [34] dargestellt sind, dass inelastische Proben zwar qualitativ dieselben räumlichen Deformationen bei Belastung erfahren, die Schnittgrößenverläufe unterscheiden sich aber nicht nur quantitativ, sondern sogar qualitativ von den Ergebnissen für elastische Proben. In der Theorie für elastische Proben ohne Vortorsion (0π) sollte die gemessene Axialkraft bei Ausknicken der Probe der in Gleichung (4.15) definierten Eulerschen Knicklast entsprechen. Allerdings ist zu bemerken, dass diese Knicklast von der Biegesteifigkeit der Probe abhängt,

$$F_{krit} = -\frac{4\pi^2(EI)_B}{l_0^2}. \quad (5.1)$$

Diese Formel beruht auf der Annahme, dass der Knickstab isotropes Verhalten aufweist. Im Fall von elastischen Metalldrähten, wie sie in [34] untersucht wurden, ist diese Bedingung erfüllt. Im vorherigen Kapitel wurde allerdings bereits gezeigt, dass das Verhalten von Kabeln bezüglich der drei Lastfälle Zug, Torsion und Biegung anisotrop ist und die axiale Zugsteifigkeit um eine Größenordnung größer ist, als die Biege- und Torsionssteifigkeit. Folglich wird die an der Kabelprobe gemessene Axialkraft hier auf einen verhältnismäßig kleinen Wert normiert. Dieses Experiment kann in der Konsequenz nicht basierend auf der Theorie der Eulerschen Knicklast ausgewertet werden. Es kann somit lediglich zur Validierung von Berechnungsmodellen verwendet werden, in denen die Kopplung von Biegung, Torsion und axialen Kräften und inelastische Effekte bei großen räumlichen Verschiebungen berücksichtigt.

5.4.2 Kombination von Zug und Torsion

Zugversuche mit Vorkonditionierung durch normalkraftfreie Vortorsion

Abbildung 5.22 zeigt den Einfluss der in Kapitel 4.2.2 beschriebenen reinen Vortorsion auf das zyklische Verhalten des Koaxialkabels unter uniaxialem Zug. Zunächst betrachten wir die linke Seite des Diagramms ($\Delta l < 0$), die zeigt, dass während der normalkraftfreien Vortorsion der Abstand zwischen den geklemmten Probenenden geregelt wird, um eine Axialkraft von 0 N zu halten, da sich das Kabel durch die Verdrillung verkürzt. Durch die Vortorsion und die resultierende Verdrillung wird die Kabelprobe kleiner und somit muss der Abstand zwischen den Probenklemmen verringert werden, um die Axialkraft auf 0 N zu regeln. Bei steigender Vortorsion wird der Abstand der Klemmen entsprechend stärker nachgeregelt. Um die Ergebnisse für verschiedene Vortorsionen vergleichen zu können, wird die Verschiebung nach abgeschlossener Vortorsion wieder auf 0 mm gesetzt, sodass alle Zugkurven im Ursprung des Koordinatensystems beginnen. Anschließend wird der zyklische Zugversuch mit Maximalkraft $F_{max} = 100$ N durchgeführt.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass die normalkraftfreie Vortorsion einen Einfluss auf das elastische und inelastische Verhalten des Kabels unter Zug hat [16]. Um die Erstbelastungskurven für verschiedene Vortorsionswinkel besser vergleichen zu können, sind in Abbildung 5.23 nur die Erstbelastungskurven unter Zug, ohne die aus der Kraftregelung während der Vortorsion resultierende Verschiebung, dargestellt. Diese Abbildung zeigt, dass in der Erstbelastungskurve die Anfangssteigung, die zur Bestimmung der linear elastischen Zugsteifigkeit verwendet wird, mit steigender Vortorsion sinkt. Der absolute Wert der Fließgrenze scheint näherungsweise unabhängig von der Vortorsion zu sein. Im weiteren Verlauf der Erstbelastungskurve zeigt sich ebenfalls ein Absinken der Steigung im Fließbereich mit steigender Vortorsion. Damit ist anzunehmen, dass sich die Vortorsion auch auf die Verfestigung des Kabels auswirkt. Bei Betrachtung der Hysteresekurven ist auffallend, dass die Entlastungskurven weitestgehend unabhängig von der Vortorsion sind, da die Entlastungspfade nahezu parallel verlaufen. Eine größere Vortorsion hat allerdings zur Folge, dass die Hysteresekurven in den Folgezyklen größer werden. Der Zustand der statischen Hysterese bildet sich bei Vortorsionen größer 90° nicht mehr innerhalb der hier untersuchten fünf Zyklen aus. Die hier dargestellten Ergebnisse zeigen, dass steigende Vortorsion einen erweichenden Einfluss auf das Zugverhalten

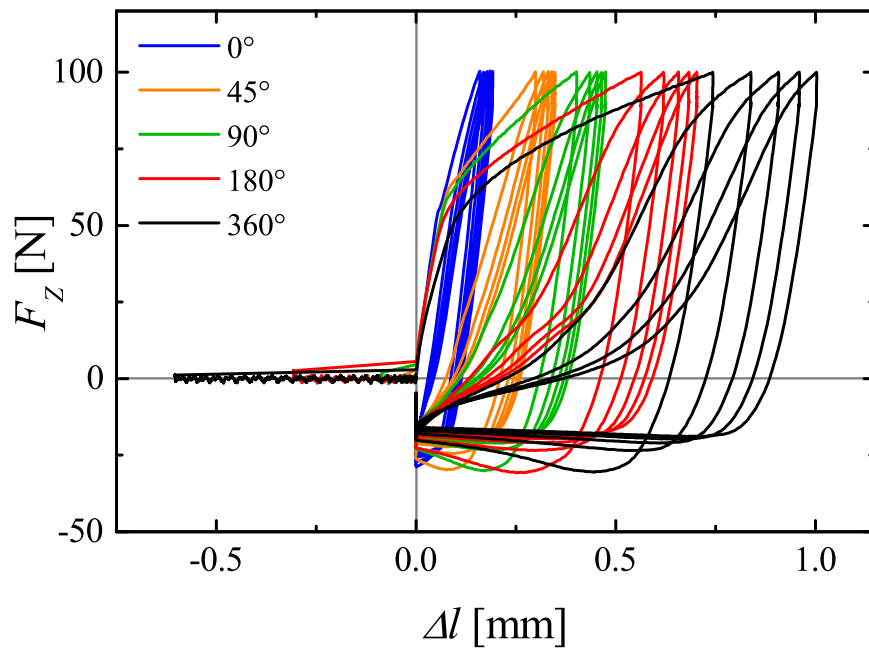


Abbildung 5.22: Ergebnis des Zugversuchs mit Vorkonditionierung durch normalkraftfreie Vortorsion mit verschiedenen Vortorsionswinkeln.

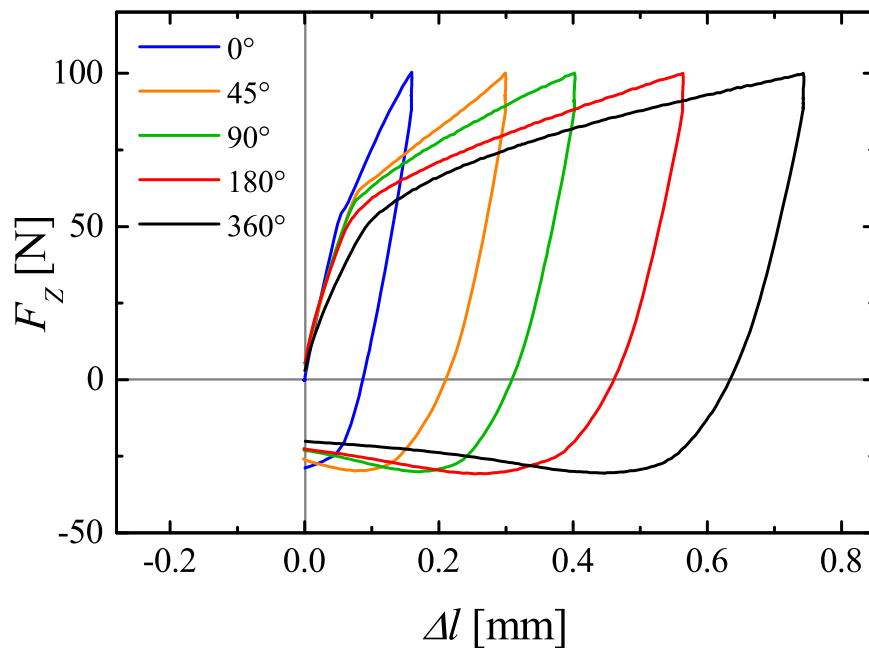


Abbildung 5.23: Darstellung der jeweiligen Erstbelastungszyklen aus Abbildung 5.22 nach Vorkonditionierung durch normalkraftfreie Vortorsion mit verschiedenen Vortorsionswinkeln.

des Kabels hat. Sowohl die elastische Anfangssteigung bis zur Fließgrenze, als auch die Verfestigung im Fließbereich sind bei stärkerer Vortorsion geringer. Dies ist ein Hinweis auf steigende Schädigung der Kabelstruktur, beispielsweise Ablösen des Mantels von den metallischen Litzen bei steigender Vortorsion, die das Verhalten des Kabels unter Zug beeinflusst. Diese Ergebnisse liefern die experimentelle Bestätigung dafür, dass große Torsionsdeformationen in der Anwendung von Kabeln vermieden werden sollten, da sie eine Schädigung der Kabelstruktur verursachen.

Torsionsversuche mit Vorkonditionierung durch axiale Dehnung

In Abbildung 5.24 ist der Verlauf des Torsionsmoments über dem Torsionswinkel für vorgedehnte Koaxialkabel dargestellt. Die Experimente wurden gemäß der Beschreibung in Kapitel 4.2.2 durchgeführt. Obwohl im vorherigen Experiment eine komplexe Abhängigkeit des Zugverhaltens von Vortorsion festgestellt werden konnte, zeigt sich in diesem Experiment keine Abhängigkeit des Torsionsverhaltens von der Vordehnung. Weder die Erstbelastungskurve, noch die folgenden Hystereseyklen werden durch die Vordehnung signifikant beeinflusst.

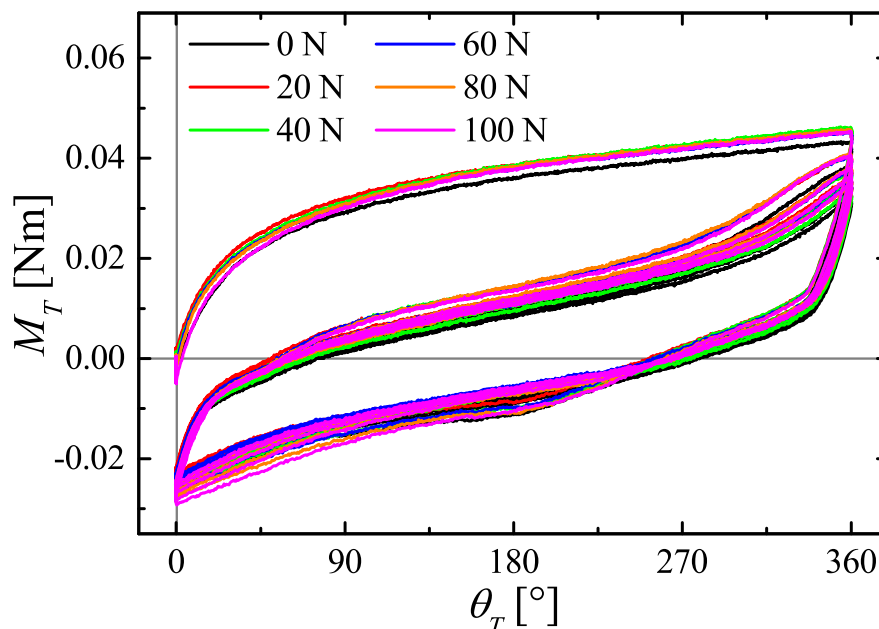


Abbildung 5.24: Ergebnis Torsionsversuch mit Vorkonditionierung durch axiale Dehnung.

5.4.3 Diskussion der multiaxialen Experimente an einem Koaxialkabel

Die Ergebnisse der drei vorgestellten multiaxialen Experimente zeigen, dass das Verhalten von inelastischen Kabeln unter gleichzeitig auftretenden verschiedenen Lastfällen komplex und von anisotropen Wechselwirkungen geprägt ist [19]. Das räumliche Experiment stellt dabei zwar ein anwendungsnahes Experiment dar, ist allerdings durch die Überlagerung von verschiedenen inelastischen Effekten und instabilem Verhalten nicht geeignet, um das multiaxiale Verhalten von Kabeln quantifizieren zu können. Dieses Experiment kann lediglich zur Verifikation von Konstitutivgesetzen mittels virtueller Experimente verwendet werden, wenn die Kopplung der elastischen und inelastischen Charakteristika der grundlegenden Cosseratlastfälle mittels anderer Experimente vollumfassend bestimmt wurde.

Die Kopplung von Zug und Torsion wurde in zwei Experimenten untersucht, deren Umsetzung einfach und deren Randbedingungen wohldefiniert sind. Diese Experimente ergeben, dass die elastischen und inelastischen Charakteristika des uniaxialen Zugs durch normalkraftfreie Vortorsion beeinflusst werden. Umgekehrt scheint keine Abhängigkeit des Torsionsverhaltens von der Vorkonditionierung durch axiale Vordehnung vorzuliegen.

6

Modellierung der Biegung eines einfachen Kabels

In diesem Kapitel soll das in Unterkapitel 5.3.1 dargestellte Deformationsverhalten des Einzelleiters unter ebener Biegung simuliert werden. Zunächst wird das finite Balkenelement vorgestellt, welches zur Durchführung der numerischen Experimente verwendet wurde. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Konstitutivgesetze zusammengefasst, die zur Simulation der Experimente verwendet wurden. Hier wird ausschließlich der erste Lastzyklus betrachtet, da hier bereits gut darzustellen ist, welchen Einfluss das konstitutive Modell auf die Güte der Simulation hat.

6.1 Ein finites Balkenelement auf Basis des Cosseratmodells

Die Simulationsexperimente werden mit einem geometrisch exakten finiten Balkenelement mit zwei Knoten durchgeführt [20], welches in Abbildung 6.1 schematisch dargestellt ist. Pro Element liegen zwölf Freiheitsgrade vor, da jeder Knoten drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade besitzt. Als Primärvariablen werden die inkrementellen Verschiebungen \mathbf{u} und die inkrementellen Rotationen

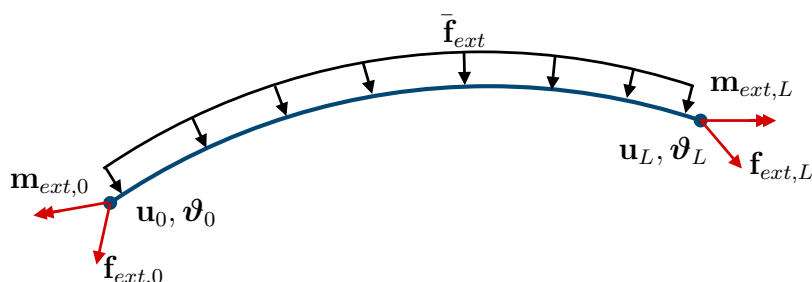


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des hier verwendeten finiten Balkenelements, welches auf einer geometrisch exakten Kinematik beruht.

verwendet. Die inkrementellen Rotationen werden hier mit dem Rotationsvektor ϑ parametrisiert. Seine Länge entspricht dem Winkel der Rotation und seine Richtung ist parallel zur Rotationsachse [3]. Der Rotationsvektor kann mit Hilfe der Rodrigues-Formel in die Rotationsmatrix \mathbf{R} , die dem begleitenden Dreibein des Cosseratbalken-Modells entspricht, überführt werden [11],

$$\mathbf{R}(\vartheta) = \mathbf{I} + \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \tilde{\vartheta} + \frac{1 - \cos \vartheta}{\vartheta^2} \tilde{\vartheta} \cdot \tilde{\vartheta},$$

unter Verwendung des Betrags des Rotationsvektors $\vartheta = \|\vartheta\|$ und der schiefsymmetrischen Matrix

$$\tilde{\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_3 & \vartheta_2 \\ \vartheta_3 & 0 & -\vartheta_1 \\ -\vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

die dem Rotationsvektor zugeordnet ist. Ausgehend vom generalisierten Prinzip der virtuellen Arbeit werden nach dem Konzept, das in [79] für gemischte Formulierungen dargestellt wurde, die Gleichungen für das finite Balkenelement hergeleitet. Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, dass die interne der externen virtuellen Arbeit im statischen Gleichgewicht entsprechen muss. Ausgehend von den statischen Gleichgewichtsgleichungen (3.7) in Abschnitt 3.1.2, welche in den räumlichen Schnittgrößen des Cosseratbalkens formuliert wurden, kann die schwache Form der Gleichgewichtsgleichungen nach [11] verwendet werden, um das Prinzip der virtuellen Arbeit für das in Abbildung 6.1 dargestellte Balkenelement zu formulieren,

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= \delta W_{ext} \\ \int_0^L (\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{\Gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{K}) ds &= \int_0^L (\bar{\mathbf{f}}_{ext} \cdot \delta \mathbf{r} + \bar{\mathbf{m}}_{ext} \cdot \delta \vartheta) ds \\ &+ \mathbf{f}_{ext,0} \cdot \delta \mathbf{r}(0) + \mathbf{m}_{ext,0} \cdot \delta \vartheta(0) \\ &+ \mathbf{f}_{ext,L} \cdot \delta \mathbf{r}(L) + \mathbf{m}_{ext,L} \cdot \delta \vartheta(L). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dabei wurden in der internen virtuellen Arbeit die räumlichen in die materiellen Schnittgrößen umgerechnet. Die Variationen der Deformationsmaße werden mit $\delta\mathbf{\Gamma}$ und $\delta\mathbf{K}$ bezeichnet. Mit $\bar{\mathbf{f}}_{ext}$ wird eine externe Linienkraft auf das Element bezeichnet und $\mathbf{f}_{ext,0}$, $\mathbf{f}_{ext,L}$, $\mathbf{m}_{ext,0}$ und $\mathbf{m}_{ext,L}$ sind die externen Kräfte und Momente, die auf die Knoten wirken, siehe Abbildung 6.1.

In der gemischten Formulierung sind die Deformationsmaße und die Schnittgrößen die Primärvariablen. Für das hier verwendete Balkenelement werden allerdings anstatt der Deformationsmaße die inkrementellen Verschiebungen $\mathbf{u}(s)$ und Rotationen $\boldsymbol{\vartheta}(s)$ zwischen den Zeitpunkten t_n und t_{n+1} linear interpoliert. Damit werden die Konfigurationsvariablen $\mathbf{r}(s)$ und $\mathbf{R}(s)$ zum Zeitpunkt t_{n+1} aus den Größen des vorherigen Zeitpunktes berechnet,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{n+1}(s) &= \mathbf{r}_n(s) + \mathbf{u}(s), \\ \mathbf{R}_{n+1}(s) &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\vartheta}(s)) \mathbf{R}_n(s), \\ \mathbf{u}(s) &= \left(1 - \frac{s}{L}\right) \mathbf{u}_0 + \frac{s}{L} \mathbf{u}_L, \\ \boldsymbol{\vartheta}(s) &= \left(1 - \frac{s}{L}\right) \boldsymbol{\vartheta}_0 + \frac{s}{L} \boldsymbol{\vartheta}_L, \\ \mathbf{u}' &= -\frac{1}{L} \mathbf{u}_0 + \frac{1}{L} \mathbf{u}_L, \\ \boldsymbol{\vartheta}' &= -\frac{1}{L} \boldsymbol{\vartheta}_0 + \frac{1}{L} \boldsymbol{\vartheta}_L.\end{aligned}$$

Im Weiteren werden die Ableitungen der inkrementellen Verschiebungen und Rotationen nach s , \mathbf{u}' und $\boldsymbol{\vartheta}'$, benötigt. Das Update der Deformationsmaße des Balkenelements wird mit Hilfe der inkrementellen Verschiebungen und Rotationen ausgedrückt,

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}_{n+1} &= \{0, 0, -1\}^T + \mathbf{R}_{n+1} \mathbf{r}'_{n+1} \\ \mathbf{K}_{n+1} &= \mathbf{K}_n + \mathbf{R}_{n+1}^T \mathbf{T}(\boldsymbol{\vartheta}) \boldsymbol{\vartheta}'.\end{aligned}$$

Dabei wird der Tangentenoperator

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{I} + \frac{\cos \vartheta - 1}{\vartheta^2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \left(1 - \frac{\sin \vartheta}{\vartheta}\right) \frac{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}}{\vartheta^2}$$

verwendet [11]. Unter Verwendung der Variationen der Deformationsmaße $\delta\mathbf{\Gamma}$ und $\delta\mathbf{K}$, für deren ausführliche Herleitung der Leser auf [11] verwiesen wird, wird nun

die virtuelle Arbeit diskretisiert. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{R}_{L/2} \mathbf{F}_{L/2} + \frac{L^-}{2} \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_{ext,0} = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{h}_2 = \mathbf{R}_{L/2} \mathbf{M}_{L/2} + \frac{L}{2} \mathbf{r}'_{L/2} \times \left(\mathbf{R}_{L/2} \mathbf{F}_{L/2} + \frac{L^-}{4} \mathbf{f}_{ext} \right) + \mathbf{m}_{ext,0} = \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{h}_3 = -\mathbf{R}_{L/2} \mathbf{F}_{L/2} + \frac{L^-}{2} \mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_{ext,L} = \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{h}_4 = -\mathbf{R}_{L/2} \mathbf{M}_{L/2} + \frac{L}{2} \mathbf{r}'_{L/2} \times \left(\mathbf{R}_{L/2} \mathbf{F}_{L/2} - \frac{L^-}{4} \mathbf{f}_{ext} \right) + \mathbf{m}_{ext,L} = \mathbf{0}. \quad (6.6)$$

Dabei sind $\mathbf{F}_{L/2}$ und $\mathbf{M}_{L/2}$ die materiellen Kraft- und Momentenvektoren an den Mittelpunkten des Elements.

Zur algorithmischen Umsetzung der Finite-Elemente-Methode ist es notwendig, dieses Gleichungssystem zu linearisieren. Zur konsistenten Linearisierung des Gleichungssystems werden die Variablen \mathbf{u}' , ϑ , \mathbf{r}' , $\mathbf{\Gamma}$, \mathbf{K} und die Rotationsmatrix $(\mathbf{R}\mathbf{v})$, die auf einen beliebigen Vektor \mathbf{v} angewendet wird, um die Mittelpunkte des Elements linearisiert. Das zu lösende Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{bmatrix} K_{1,u_0} & K_{1,\vartheta_0} & K_{1,u_L} & K_{1,\vartheta_L} \\ K_{2,u_0} & K_{2,\vartheta_0} & K_{2,u_L} & K_{2,\vartheta_L} \\ K_{3,u_0} & K_{3,\vartheta_0} & K_{3,u_L} & K_{3,\vartheta_L} \\ K_{4,u_0} & K_{4,\vartheta_0} & K_{4,u_L} & K_{4,\vartheta_L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta \vartheta_0 \\ \delta u_L \\ \delta \vartheta_L \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix}, \quad (6.7)$$

$$(6.8)$$

mit den Einträgen der Tangentensteifigkeitsmatrix $K_{i,x} = \frac{\partial h_i}{\partial x}$ ($i = 1, 2, 3, 4$; $x = u_0, \vartheta_0, u_L, \vartheta_L$).

6.2 Konstitutive Gesetze

In den folgenden Unterkapiteln werden die inelastischen Konstitutivgesetze aufgeführt, die zur Simulation des Biegeverhaltens des Einzelleiters verwendet wurden [20]. Da das finite Balkenelement aus dem vorherigen Kapitel ein dreidimensionales Element ist, werden die eindimensionalen Konstitutivgesetze, wie sie in den Kapiteln 3.2.3 und 3.2.4 für die planare Biegung von Cosseratbalken dargestellt wurden, in ein dreidimensionales Gerüst eingebettet. Dafür werden die Deforma-

tionsmaße $\mathbf{\Gamma}$ und \mathbf{K} im Vektor \mathbf{E} und die Schnittgrößen \mathbf{F} und \mathbf{M} im Vektor $\mathbf{\Sigma}$ zusammengefasst,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^{(1)} \\ \Gamma^{(2)} \\ \Gamma^{(3)} \\ K^{(1)} \\ K^{(2)} \\ K^{(3)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \\ M^{(1)} \\ M^{(2)} \\ M^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Die elastischen Steifigkeitsmatrizen werden ebenfalls zu einer 6×6 -Diagonalmatrix \mathbb{C}_{el} zusammengeführt.

Der Fokus der bisher gezeigten experimentellen Untersuchungen lag auf inelastischem Biegeverhalten, da hier in Anwendungen die größten räumlichen Verschiebungen auftreten. Es wurden in den Experimenten zwar ebenfalls inelastisches Verhalten unter Torsion und Zug beobachtet. Unter Torsion führen die für inelastisches Verhalten notwendigen Deformationen allerdings direkt zu einer Beeinträchtigung der Einsatzfähigkeit von Kabeln und werden deshalb weitestgehend vermieden. Inelastisches Verhalten unter Zug erfordert analog hohe Zugkräfte auf ein Kabel, die in der Praxis nur sehr selten vorkommen. In den experimentellen Untersuchungen wurde bisher die Kopplung zwischen Biegung und Torsion oder Zug vernachlässigt, da zunächst die bereits sehr komplexen inelastischen Effekte untersucht wurden. Zudem ist im Speziellen die Kombination von Biegung und Zug bei Kabeln nicht einfach zu realisieren, siehe Kapitel 7. Deshalb wird im Folgenden die Simulation an Experimente angepasst, bei denen das inelastische Verhalten ausschließlich anhand planerer Biegung untersucht wurde. Es wird nur das Biegeverhalten als inelastisch angenommen, alle anderen Deformationsmaße bleiben linear elastisch und die Kopplung mit anderen Deformationsarten wird auf Grund der nicht ausreichend experimentell untersuchten Phänomenologie vernachlässigt.

6.2.1 Ratenunabhängige Elastoplastizität

Das in Unterkapitel 3.2.3 in den Gleichungen 3.30 zusammengefasste elastoplastische konstitutive Modell für die ebene Biegung wird in ein dreidimensionales Kon-

stitutivgesetz überführt. Die additive Zerlegung der Deformationsmaße in einen elastischen und einen plastischen Anteil lautet

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{el} + \mathbf{E}_{pl} \quad (6.10)$$

und das elastische Konstitutivgesetz

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{el} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl}). \quad (6.11)$$

Die Fließbedingung wird im Dreidimensionalen formuliert als

$$f_{pl}(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha_{pl}) = 0 \quad (6.12)$$

mit der isotropen plastischen Verfestigungsvariable α_p . Assoziiertes Fließen und die plastische Verfestigung folgen den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{E}}_{pl} = \gamma_{pl} \frac{\partial f_{pl}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \quad (6.13)$$

$$\dot{\alpha}_{pl} = \gamma_{pl} \frac{\partial f_{pl}}{\partial \alpha_p}, \quad (6.14)$$

mit dem plastischen Multiplikator γ_p . Die Kuhn-Tucker-Komplementaritätsbedingungen, welche die Bedingungen für plastische oder elastische Belastungen geben, lauten

$$f_{pl} \leq 0, \quad \gamma_{pl} \geq 0, \quad \gamma_{pl} f_{pl} = 0, \quad \gamma_{pl} \dot{f}_{pl} = 0. \quad (6.15)$$

Basierend darauf wird der plastische Algorithmus nach [73] formuliert, indem die Kontinuumsgleichungen mittels implizitem Eulerverfahren bei t_{n+1} zeitlich diskretisiert werden. Aus dem vorherigen Zeitschritt sind die Größen $\mathbf{E}_{pl,n}$, $\gamma_{pl,n}$ und $\alpha_{pl,n}$ verfügbar, aus denen die aktualisierten Deformationsmaße \mathbf{E} berechnet wurden. Nun wird ein elastischer *trial*-Schritt durchgeführt, indem das elastische Konstitutivgesetz verwendet wird, um die Schnittgrößen $\boldsymbol{\Sigma}$ zu berechnen,

$$\boldsymbol{\Sigma}^{trial} = \mathbb{C}_{el} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl,n}). \quad (6.16)$$

Erfüllt dieser Schritt die Fließbedingung

$$f(\boldsymbol{\Sigma}^{trial}, \alpha_{pl,n}) \leq 0, \quad (6.17)$$

handelt es sich um einen elastischen Belastungsschritt und die *trial*-Größen entsprechen den tatsächlichen Größen des neuen Belastungsschritts,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^{trial}. \quad (6.18)$$

In diesem Fall erfolgt keine Änderung der plastischen Deformationen und der Verfestigungsvariablen,

$$\Delta\gamma_{pl} = 0; \quad \gamma_{pl,n+1} = \gamma_{pl,n}; \quad \alpha_{pl,n+1} = \alpha_{pl,n}. \quad (6.19)$$

Erfüllt der elastische *trial*-Schritt die Fließbedingung nicht, muss das plastische Gleichungssystem gelöst werden,

$$\mathbf{h}_5 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{pl,n} - \mathbb{C}_{el}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \Delta\gamma_{pl} \frac{\partial f_{pl}(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \alpha_{pl,n+1})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}} = \mathbf{0}, \quad (6.20)$$

$$h_6 = f(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \alpha_{pl,n+1}) = 0, \quad (6.21)$$

um die Größen $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ und $\Delta\gamma_{pl}$ berechnen zu können. $\mathbf{E}_{pl,n+1}$ und α_{n+1} werden mit Hilfe der Evolutionsgleichungen (6.13) und (6.14) berechnet.

Basierend auf den experimentellen Beobachtungen wurde hier eine Fließbedingung mit isotroper Verfestigung analog zu 3.30 unter Verwendung des planaren Biegemoments, wie in (3.5) definiert, formuliert

$$f_p(M_B, \alpha_{pl}) = M_B - [M_{B,y} + H_i \alpha_{pl}] \leq 0, \quad (6.22)$$

die einen Kreis in der Biegemomentenebene beschreibt, siehe Abbildung 3.4.

In Unterkapitel 5.3.1 wurde bereits anhand experimenteller Ergebnisse gezeigt, dass ein elastoplastisches konstitutives Modell ausreichen kann, um das Verhalten im ersten Zyklus unter Dreipunktbiegung abzubilden. Das Ergebnis der mit Hilfe des vorgestellten finiten Balkenelements und des elastoplastischen Konstitutivgesetzes durchgeführten Simulation ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Hierfür wurden die Modellparameter des konstitutiven Gesetzes mittels inverser Optimierungsmethoden bestimmt, die von Matlab[®] bereitgestellt werden [55]. Wie erwartet, bildet das elastoplastische Modell das in der Dreipunktbiegung beobachtete Verhalten bei Be- und Entlastung im ersten Zyklus bereits gut ab.

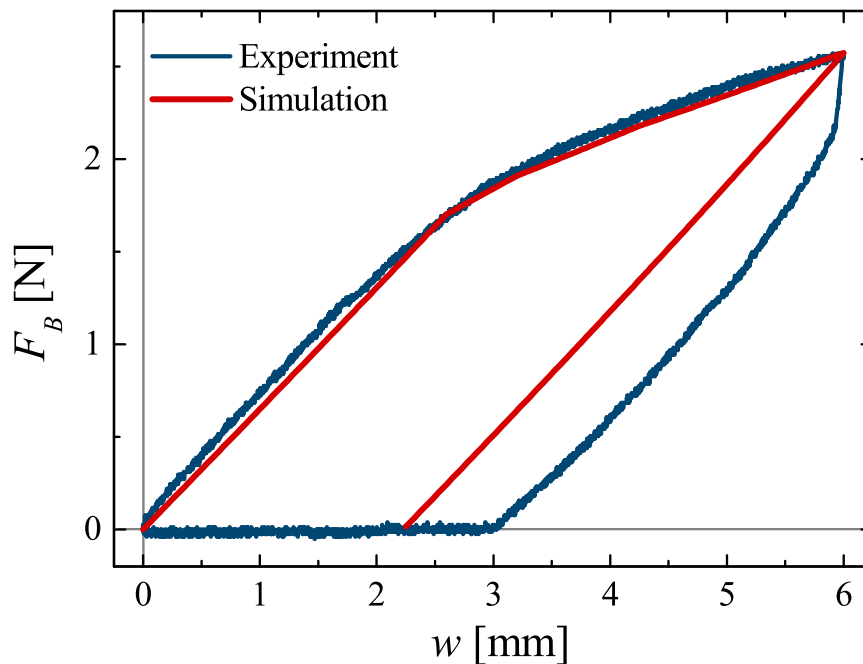


Abbildung 6.2: Vergleich der experimentellen und simulierten Dreipunktbiegung an einem Einzelleiter.

6.2.2 Schädigung

Wie bereits in Unterkapitel 5.3.1 im Vergleich der experimentellen Ergebnisse von Dreipunktbiegung und reiner Biegung deutlich wurde, ist nicht zu erwarten, dass ein elastoplastisches konstitutives Modell das Verhalten des Kabels bei größeren Biegekrümmungen abbilden kann. Um dies zu belegen, sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 die Ergebnisse der Simulation der reinen Biegung mit dem elastoplastischen Modell aus 6.2.1 mit dem experimentellen Ergebnis gegenübergestellt. Dabei ist in Abbildung 6.3 das Ergebnis der Simulation für den Modellparametersatz aus der Dreipunktbiegung aus Abbildung 6.2 dargestellt. Es ist offensichtlich, dass das Simulationsergebnis weder qualitativ, noch quantitativ das experimentelle Ergebnis widerspiegelt. In Abbildung 6.4 wurde die Anpassung der Modellparameter des elastoplastischen Modells an das Ergebnis der reinen Biegung durchgeführt. Nun stimmen zumindest die Belastungspfade aus Simulation und Experiment überein, die Entlastungspfade weichen jedoch erwartungsgemäß stark voneinander ab.

Um die geänderte Steigung in der Entlastung der zyklischen reinen Biegung in Simulationen abbilden zu können, wird eine Schädigungs-Teilmodell benötigt. Das

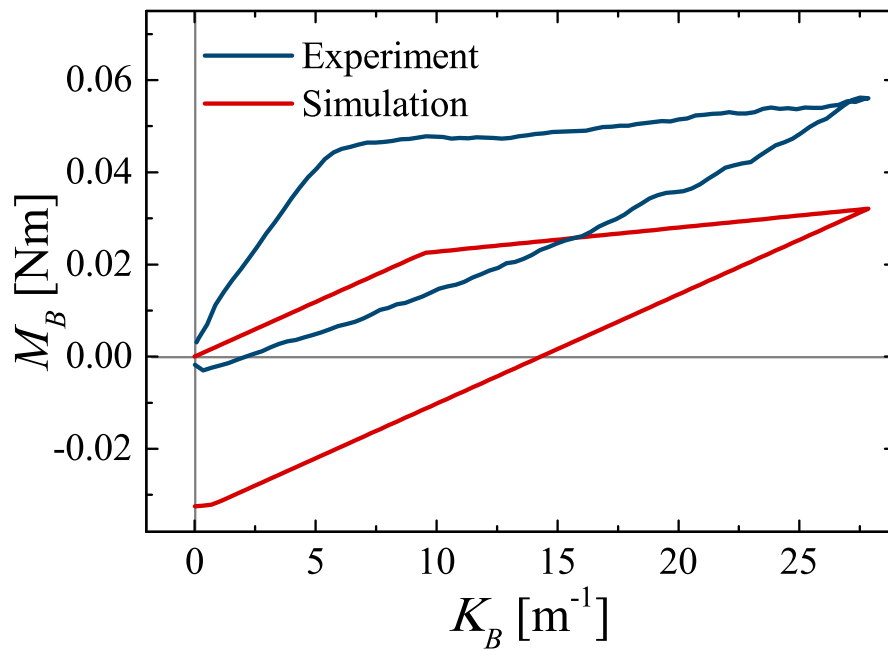


Abbildung 6.3: Vergleich der experimentellen und simulierten Versuchsergebnisse der reinen Biegung an einem Einzelleiter. Verwendung der Modellparameter, die an die Dreipunktbiegung angepasst wurden.

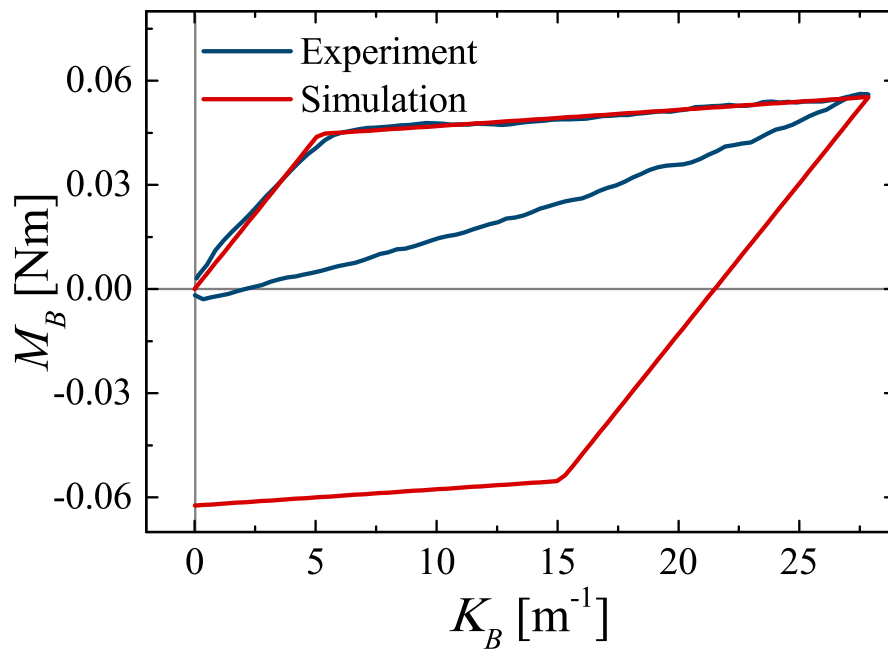


Abbildung 6.4: Vergleich der experimentellen und simulierten Versuchsergebnisse der reinen Biegung an einem Einzelleiter. Anpassung der Modellparameter an die vorliegenden experimentellen Ergebnisse der reinen Biegung.

in Unterkapitel 3.2.4 bereits für die ebene Biegung von Cosseratbalken vorgestellte alternative Schädigungsmodell nutzt als interne Schädigungsvariable die Nachgiebigkeit \mathbb{D} , welche im ungeschädigten Fall der Inversen der elastischen Steifigkeitsmatrix \mathbb{C}_{el} entspricht. Dieses Modell wird nun in ein analoges dreidimensionales Gerüst eingebettet, wie im vorherigen Kapitel bereits für die Elastoplastizität durchgeführt. Da die Struktur grundsätzlich gleich ist und bereits in Abschnitt 3.2.4 erläutert wurde, wird das Modell hier knapp zusammengefasst. Zur Formulierung des Schädigungsalgorithmus nach [36] werden erneut das elastische Konstitutivgesetz,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}_{el} \mathbf{E}, \quad (6.23)$$

das Schädigungskriterium

$$f_d(\boldsymbol{\Sigma}, \alpha_d) = 0, \quad (6.24)$$

die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen,

$$\dot{\mathbb{D}} = \gamma_d \frac{1}{\|\boldsymbol{\Sigma}\|} \frac{\partial f_d}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} \otimes \frac{\partial f_d}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \quad (6.25)$$

$$\dot{\alpha}_d = \gamma_d \frac{\partial f_d}{\partial \alpha_d}, \quad (6.26)$$

mit dem Schädigungsmultiplikator γ_d und die Kuhn-Tucker-Komplementaritätsbedingungen für die Schädigungsbelastung,

$$f_d \leq 0, \gamma_d \geq 0, \gamma_d f_d = 0, \gamma_d \dot{f}_d = 0, \quad (6.27)$$

benötigt.

Analog zum elastoplastischen Algorithmus wird die zeitliche Diskretisierung mit Hilfe eines impliziten Eulerverfahrens zum Zeitpunkt t_{n+1} durchgeführt. Aus dem vorherigen Zeitschritt sind nun die Größen \mathbb{D}_n und $\alpha_{d,n}$ und die aktualisierten Deformationsmaße \mathbf{E} vorhanden. Hier wird ebenfalls ein *trial*-Schritt durchgeführt, um die neuen Schnittgrößen versuchsweise mit den bisherigen Parametern des elastischen Gesetzes zu berechnen,

$$\boldsymbol{\Sigma}^{trial} = \mathbb{D}_n^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.28)$$

und mit Hilfe des Schädigungskriteriums

$$f_d(\boldsymbol{\Sigma}^{trial}, \alpha_{d,n}) \leq 0 \quad (6.29)$$

getestet, ob ein elastischer oder inelastischer Schritt vorliegt. Ist das Schädigungskriterium erfüllt, liegt ein elastischer Schritt vor und die *trial*-Größen werden weiterverwendet,

$$\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}^{trial}, \Delta\gamma_d = 0. \quad (6.30)$$

Andernfalls findet Schädigung statt und die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{h}_7 = \mathbf{E} - \mathbb{D}_{n+1}\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} - \Delta\gamma_d \frac{\partial f_d(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \alpha_{d,n+1})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (6.31)$$

$$h_8 = f_d(\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}, \alpha_{d,n+1}) = 0 \quad (6.32)$$

liefert $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ und $\Delta\gamma_d$. \mathbb{D}_{n+1} und $\alpha_{d,n+1}$ werden aus den Evolutionsgleichungen bestimmt.

Im Folgenden wurde ein Schädigungskriterium verwendet, das ebenfalls einen Kreis in der Biegemomentenebene, analog zur Fließbedingung (6.22) beschreibt,

$$f_d(M_B, \alpha_d) = M_B - [M_{B,d} + H_i\alpha_d] \leq 0. \quad (6.33)$$

6.2.3 Kopplung der Teilmodelle

Die beiden vorgestellten Modelle wurden unter der Annahme entwickelt, dass jeweils entweder Plastizität oder Schädigung in einem Schritt aktiv ist. Um die beiden Modelle miteinander zu koppeln, wird die Zusatzbedingung eingeführt, dass die Schnittgrößen in beiden Teilmodellen gleich groß sein müssen [36],

$$\boldsymbol{\Sigma}_{p,n+1} - \boldsymbol{\Sigma}_{d,n+1} = \mathbf{0}. \quad (6.34)$$

So können die Teilmodelle gleichzeitig berechnet werden. Dies entspricht einer Serienschaltung beider Modelle. Eine schematische Darstellung des gekoppelten elastoplastischen Modells mit Schädigung und isotroper Verfestigung für beide Teilmodelle ist in Abbildung 6.5 dargestellt.

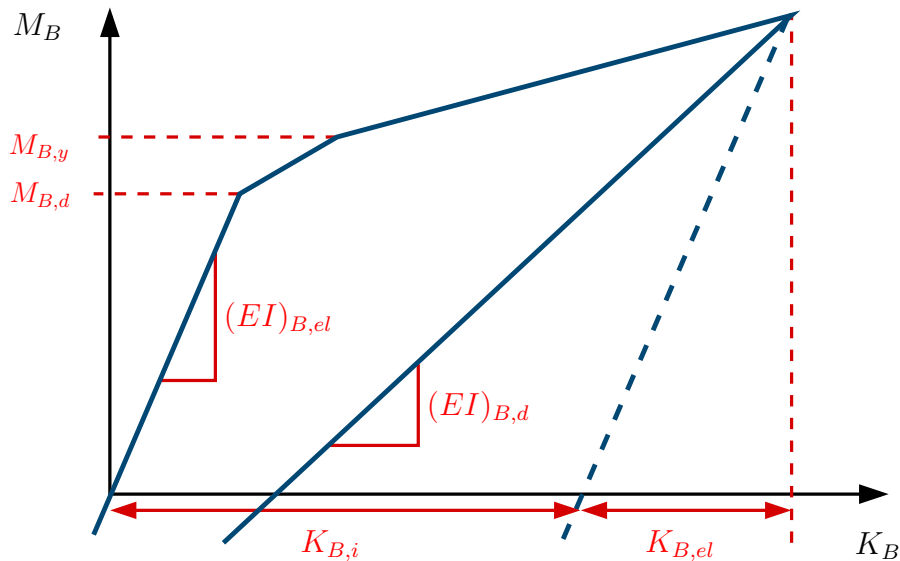


Abbildung 6.5: Schematische Darstellung der Biegemoment-Biegekrümmungskurve für das gekoppelte elastoplastische Modell mit Schädigung und isotroper Verfestigung bei Be- und Entlastung.

6.3 Parameteridentifikation und Ergebnisse

Für das vorgestellte gekoppelte Modell wird ein geeigneter Parametersatz benötigt, um die experimentellen Ergebnisse abbilden zu können. Wie bereits anhand der Ergebnisse der Grundlagenexperimente in Kapitel 5.3 gezeigt, ist es einfach möglich, die linear elastischen Parameter aus der Dreipunktbiegung oder der reinen Biegung zu bestimmen. Die inelastischen Parameter lassen sich allerdings nicht direkt ermitteln, insbesondere da in diesem Fall Schädigung und Plastizität überlagert auftreten. Optimierungsmethoden sind dazu geeignet, Modellparameter an einen (experimentellen) Datensatz anzupassen. Dabei wird die Differenz zwischen Messergebnis und Simulationsergebnis minimiert, indem der Parametersatz systematisch variiert wird. Dafür wurde in dieser Arbeit eine von Matlab[®] bereitgestellte Funktion zur Optimierung unter Nebenbedingungen (*fmincon*) verwendet [55].

Die Wahl einer geeigneten Datenbasis ist die Grundlage einer allgemeingültigen Parameteridentifikation. Wie bereits in [4, 13, 39, 65, 77] gezeigt wurde, muss die experimentelle Datenbasis die Lastfälle abdecken, die mit Hilfe des Modells simuliert werden sollen. Im Fall von Kabeln, die bereits im elastischen Bereich (siehe Unterkapitel 5.1.4, Tabelle 5.1), aber auch im inelastischen Bereich (siehe Unterkapitel 5.4.3) stark anisotropes Verhalten zeigen, ist eine geeignete Datenbasis umso

wichtiger. Hier ist es unmöglich, ein Modell und seine Parameter an einen einfachen uniaxialen Lastfall anzupassen und dieses Modell auf andere komplexere Lastfälle zu übertragen.

Im vorherigen Kapitel wurde bereits gezeigt, dass es nicht einmal einfach möglich ist, die elastische Biegesteifigkeit des elastoplastischen Teilmodells aus der Dreipunktbiegung auf die reine Biegung zu übertragen (siehe Abbildung 6.3). Das mit Hilfe der in der Dreipunktbiegung ermittelten Parameter simulierte Verhalten ist im linear elastischen Bereich viel weniger steif als in der reinen Biegung gemessen wurde. Auf den ersten Blick scheint dies überraschend, da in beiden Fällen planare Biegung durchgeführt wird und die Dreipunktbiegung lediglich bei kleineren Krümmungen stattfindet. Allerdings ist die reale Umsetzung der Lagerung in der Dreipunktbiegung fehleranfällig, insbesondere bei vergleichsweise biegeweichen Kabelproben. Bei steigenden Durchbiegungen kann das flexible Kabel auf den Auflagern durchrutschen, sodass sich die effektive Probenlänge während des Versuchs vergrößert. Da die Biegesteifigkeit in der dritten Potenz von der Probenlänge abhängt, hat schon ein geringes Durchrutschen während des Experiments einen großen Einfluss auf die Biegesteifigkeit und diese wird in der Dreipunktbiegung unterschätzt.

Des Weiteren liefert die Dreipunktbiegung keinen homogenen Biegezustand entlang der Probe. Wie bereits in Kapitel 5.3 beschrieben wurde, liegt bei der Dreipunktbiegung in der Probenmitte die höchste Biegekrümmung vor und sie nimmt zu den Probenenden hin linear ab. Damit treten in der Probenmitte bereits inelastische Effekte auf, während die Probenenden noch elastisch bleiben. Mit Hilfe der in der Dreipunktbiegung gemessenen Stempelkraft wird allerdings eine aus dem Verhalten der ganzen Probe resultierende Größe gemessen. Die Messgröße ist immer ein Resultat eines gemischten Zustandes entlang der Probe. Hier können der krümmungsabhängige Beginn des inelastischen Verhaltens und die inelastischen Parameter, wie sie für das konstitutive Modell für die Biegung verwendet werden, nicht zuverlässig identifiziert werden.

Die Parameter des gekoppelten Modells wurden an den ersten Zyklus der reinen Biegung angepasst. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Es verdeutlicht, dass es ausreichend ist, ein elastoplastisches Modell und ein Schädigungsmodell, jeweils mit isotroper Verfestigung, zu koppeln, um das Biegeverhalten eines Kabels bis hin zu großen Krümmungen im ersten Zyklus abzubilden.

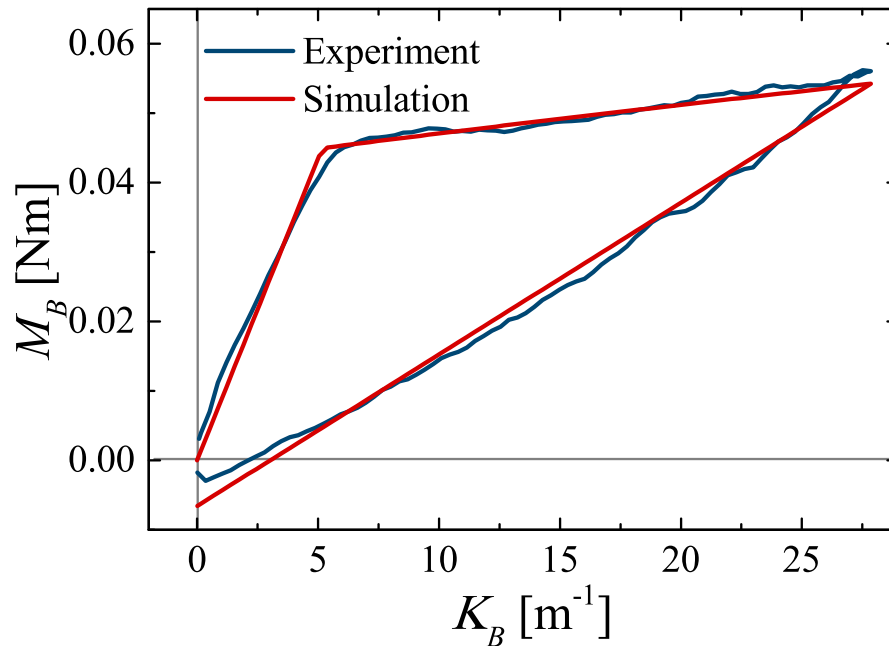


Abbildung 6.6: Vergleich der experimentellen und simulierten Ergebnisse der reinen Biegung an einem Einzelleiter. Es wurde das gekoppelte konstitutive Modell inklusive Elastoplastizität und Schädigung mit isotroper Verfestigung an die experimentellen Ergebnisse der reinen Biegung angepasst.

Das hier vorgestellte Modell ist jedoch noch nicht ausreichend, um die Folgezyklen und die in Unterkapitel 5.3.2 dargestellten Ergebnisse zyklischer Versuche abzubilden. Die erneute Änderung der elastischen Steifigkeit bei Wiederbelastung im Folgezyklus erfordert die Einführung der Abhängigkeit der Modellparameter von der bisher maximal aufgebrauchten Biegekrümmung. Qualitativ bleibt allerdings das Verhalten in den globalen Folgezyklen gleich, sodass ein elastoplastisches Modell, gekoppelt mit Schädigung auch ausreicht, um die Folgezyklen abzubilden. Lediglich die absoluten Werte der Modellparameter müssen an die Folgezyklen angepasst werden. Aktuelle Forschungsarbeiten beschäftigen sich mit der Entwicklung des inelastischen Verhaltens während des ersten Belastungszyklus, wie sie in den Abbildungen 5.13 und 5.18 zu sehen sind und den daraus resultierenden Parametern. Um dieses Verhalten abbilden zu können, muss eine Funktion eingeführt werden, die die Abhängigkeit der inelastischen Parameter von der Belastungshistorie beschreibt.

Für praktische Anwendungen, in denen der Erstbelastungszyklus irrelevant ist, da das Kabel bereits vor der Anwendung stärker belastet wurde, als es in der eigent-

lichen Anwendung der Fall sein wird, kann das hier vorgestellte gekoppelte Modell direkt an die Folgezyklen angepasst werden. Dies stellt eine praktikable Lösung für ein Kabel dar, das in der Anwendung in einem definierten Krümmungsbereich wiederholt gebogen wird, aber bereits beim Einbau stärker gekrümmt wird. Ein Anwendungsbeispiel dafür ist ein Kabel, das im PKW vom Fahrzeugdach in die Heckklappe geführt wird. Bei Öffnen und Schließen der Heckklappe wird das Kabel zwar wiederholt gebogen, aber diese Biegekrümmung, die bereits während der Montage aufgebracht wurde, wird während der Lebensdauer des Kabels nicht mehr überschritten.

Das in den Abbildungen 5.11 und 5.12 dargestellte Verhalten in den zyklischen Experimenten vom Typ I ist hingegen komplexer. Hier wurde gezeigt, dass sich das Verhalten des Kabels bei zyklischer Belastung um einen Arbeitspunkt herum qualitativ in verschiedenen Krümmungsbereichen unterscheidet. Während in niedrigen Krümmungsbereichen das Verhalten qualitativ zum hier vorgestellten elastoplastischen Modell mit Schädigung passt, ist das Verhalten bei höheren Krümmungen linear elastisch. Dieses Verhalten kann auch mit einer zusätzlichen Abhängigkeit von der Deformationsgeschichte noch nicht beschrieben werden. Die Bestimmung einer Formulierung des konstitutiven Modells, welches diesen Effekt abbildet, ist Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten.

7

Fazit und Ausblick

Im Fokus dieser Arbeit stand die umfangreiche Untersuchung des konstitutiven Verhaltens von inelastischen Kabeln. Dazu wurden an flexible, schlanke Bauteile angepasste Experimente durchgeführt, die experimentelle Vorgehensweise weiterentwickelt und passende konstitutive Gesetze formuliert.

Anhand der Grundlagenexperimente uniaxialer Zug, Torsion und Dreipunktbiegung wurde gezeigt, dass das Deformationsverhalten von Kabeln bereits im linear elastischen Bereich stark anisotrop ist. Kabel verhalten sich unter Zug steifer als unter Biegung oder Torsion. Die Grundlagenexperimente zeigen durch einfache zyklische Versuchsführung eine weitere grundlegende Charakteristik von Kabeln unter Last. Das Verhalten im ersten Zyklus unterscheidet sich vom Verhalten in den folgenden Zyklen, die eine statische Hysterese bilden.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit lag auf der Untersuchung des konstitutiven Verhaltens von Kabeln unter ebener Biegung. Speziell dafür eignet sich der Versuchsstand zur reinen Biegung sehr gut, da hier direkt die Größen gemessen werden, die in das konstitutive Gesetz für die ebene Biegung von Cosseratbalken eingehen. Der Vergleich von experimentellen Ergebnissen der Dreipunktbiegung mit Resultaten aus der reinen Biegung für unterschiedliche flexible, schlanke Proben zeigte, dass beide Experimente qualitativ das gleiche Deformationsverhalten zeigen. Die untersuch-

ten CFK-Stäbe verhielten sich linear elastisch, die Bowdenzüge abschnittsweise linear elastisch. Für ein einfaches Kabel unterscheidet sich allerdings das konstitutive Verhalten in Dreipunktbiegung und reiner Biegung deutlich. Während in der Dreipunktbiegung die beobachtete Phänomenologie für elastoplastisches Verhalten mit Verfestigung spricht, zeigt die reine Biegung ein Verhalten, in dem Elastoplastizität gekoppelt mit Schädigung auftritt. Das liegt daran, dass in der Dreipunktbiegung geringere Deformationen vorliegen, da die maximale Krümmung in der Probenmitte im Allgemeinen geringer ist, als die Krümmungen, die in der reinen Biegung aufgebracht werden. Zudem nimmt die Krümmung in der Dreipunktbiegung vom Probenende zur Mitte hin linear zu, sodass in der Kabelprobe über die Länge variierende Krümmungen vorliegen.

In Kapitel 6 wurden Simulationsexperimente mit Hilfe eines finiten Balkenelements durchgeführt, das auf der Cosseratbalken-Theorie beruht und für das konstitutive Gesetze auf Basis der Schnittgrößen formuliert wurden. Entsprechend der in den Biegeexperimenten an Kabeln beobachteten Phänomenologie wurde ein elastoplastisches Konstitutivgesetz mit Verfestigung verwendet, um die Dreipunktbiegung zu modellieren. Das lieferte für den ersten Lastzyklus ein gutes Ergebnis. Dieses Modell wurde auch verwendet, um die reine Biegung zu simulieren. Wie gemäß der experimentellen Ergebnisse zu erwarten war, reicht ein elastoplastisches Modell mit Verfestigung nicht aus, um den qualitativen Verlauf des Biegemoments in der reinen Biegung abzubilden. Die Erweichung, die im Entlastungspfad auftritt, muss mit Hilfe eines Schädigungsmodells modelliert werden. Dazu wurde das elastoplastische Teilmodell mit dem Schädigungsmodell gekoppelt. Der Vergleich zwischen Experiment und Simulation zeigt, dass dieses Modell nach geeigneter Parameteridentifikation dazu in der Lage ist, das inelastische Verhalten dieses Kabels unter reiner Biegung abzubilden.

Hier ist anzumerken, dass die Modellierung der Folgezyklen bisher noch nicht durchgeführt wurde. Umfangreiche experimentelle Ergebnisse mit einer an zyklische Experimente zur initialen Schädigung von Elastomeren [57] angelehnten Versuchsführung wurden aber hier bereits vorgestellt. Die zyklischen Experimente der Typen II und III haben gezeigt, dass es notwendig ist, das aktuelle Verhalten von der Deformationshistorie abhängig zu machen. Dabei bleibt das Verhalten in den Folgezyklen qualitativ gleich, die Modellparameter müssen sich aber ändern, um das weichere Verhalten abbilden zu können. Die experimentellen Resultate zeigten, dass die aktuellen Modellparameter abhängig sind von der maximalen bisher auf-

gebrachten Deformation, bzw. Krümmung. Dabei ist anzunehmen, dass bei Erstbelastung Schädigung auftritt. Jede weitere Belastung über die bisher maximale Belastung hinaus führt zu weiterer Schädigungsakkumulation und einer Änderung der Parameter. Bleibt die Belastung unterhalb der maximalen Belastung, ändern sich die Parameter nicht. Die Umsetzung dieses Verhaltens ist Gegenstand aktueller Arbeiten.

Von großem Interesse für das Verständnis der für die inelastischen Effekte ursächlichen Vorgänge ist das Ergebnis der zyklischen Versuche nach Typ I. Sie zeigen, dass das zyklische Biegeverhalten um einen Arbeitspunkt herum nicht konstant ist. Bei zyklischer Biegung mit einer geringen Amplitude um ein niedriges Krümmungsniveau, also eine annähernd gerade Konfiguration, zeigt sich inelastisches Verhalten. Es treten Effekte in der Mikrostruktur auf, wie Reibung zwischen einzelnen Metalldrähten oder Umlagerung von Bestandteilen, die dieses inelastische Verhalten verursachen. Werden die Zyklen um einen Arbeitspunkt bei höheren Krümmungen durchgeführt, ist das Verhalten linear elastisch mit einer geänderten Biegesteifigkeit. Hier wird durch die Biegung die Struktur des Kabels verändert, da die Biegung lokal durch Zug- und Druckzustände realisiert wird. Damit wirkt auf die Querschnitte eine radiale Kraft, die dazu führt, dass die einzelnen Komponenten zusammengepresst werden. Die Struktur des Kabels ändert sich und damit das konstitutive Verhalten. Das zyklische Verhalten um diesen Arbeitspunkt wird nun von den lokalen Deformationen der einzelnen Komponenten dominiert, die klein sind und damit linear elastisches Verhalten liefern. Konkret liegt die Vermutung nahe, dass bei hohen Vorkrümmungen das resultierende Biegemoment hauptsächlich durch lokale Dehnungen der elastomeren Hülle bestimmt wird.

In Kapitel 5.4 wurden die Ergebnisse multiaxialer Experimente an Kabeln vorgestellt. Die Experimente zur räumlichen Kombination aus Biegung, Torsion und Druck stellt zwar einen anwendungsnahen Lastfall dar, sind aber nicht zur gezielten Untersuchung des gekoppelten inelastischen Verhaltens von Kabeln geeignet. Zudem liefern diese Ergebnisse die Erkenntnis, dass linear elastische und inelastische Proben hier zwar zu derselben räumlichen Konfiguration führen, aber die Schnittgrößen einen bereits qualitativ anderen Verlauf zeigen. Es wurde in dieser Arbeit anhand der Experimente zur Kopplung von Zug und Torsion gezeigt, dass die Anisotropie der linear elastischen Eigenschaften ebenfalls in der Kopplung der inelastischen Eigenschaften auftritt. Dies ist allerdings nur ein kleiner Teil des komplexen multiaxialen Deformationsverhaltens von inelastischen Kabeln. Deshalb ist

es notwendig, in Zukunft die Kopplung aller drei grundlegenden Lastfälle zu untersuchen.

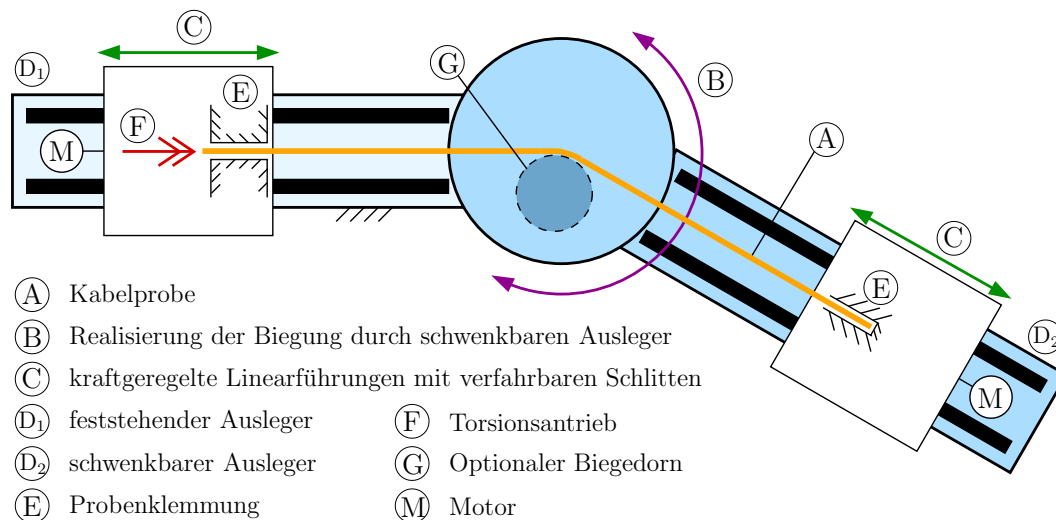


Abbildung 7.1: Prinzipskizze für einen Versuchsstand zur Untersuchung von Kabeln unter multi-axialen Lasten, in denen vielfältige Kombinationen aus Zug, Biegung und Torsion möglich sind. Optional kann ein Biegedorn angebracht werden, um Kontaktexperimente von Kabeln zu Festkörpern durchzuführen.

Dafür wird ein neues Versuchs-konzept benötigt, denn die Untersuchung der paarweisen Kopplung von Zug oder Torsion mit der Biegung lässt sich experimentell weniger einfach umsetzen, wobei diese Kombinationen in realen Anwendungen häufiger vorkommen und zu Schädigung führen. Die Kombination von Zug und Biegung, beziehungsweise Normalkräften und Biegemomenten, lässt sich allerdings nicht umsetzen, ohne lokal Kräfte einzuleiten. Ein Beispiel dafür ist die Dreipunktbiegung, bei der in den Auflagern Quer- und Normalkräfte lokal auf das Kabel wirken und die Stempelkraft lokal eingeleitet wird. In dieser Arbeit wurde bereits diskutiert, dass Dreipunktbiegung nicht geeignet ist, um das konstitutive Verhalten von flexiblen Kabelproben zu untersuchen. Eine Modifikation der reinen Biegung, wie sie in Unterkapitel 4.1.3 beschrieben wurde ist eine weitere mögliche Umsetzung der Kopplung von Biegung und Zug. In Abbildung 7.1 ist ein prinzipieller Versuchsaufbau zur Umsetzung der Biegung mit überlagerter Torsion und axialen Normalkräften skizziert. Dabei werden die Kabelenden auf Schlitten geklemmt, die auf geregelten Linearachsen angebracht werden. Damit die Probe tordiert werden kann, wird auf dem feststehenden Ausleger ein Torsionsantrieb mit einer rotierbaren Einspannung verwendet. Zur Realisierung der reinen Biegung werden die Normalkräfte zu Null geregelt. Dies ersetzt die näherungsweise

reibungsfreie Lagerung auf den Luftlagerbuchsen. Damit wird das Problem umgangen, dass der bisherige Versuchsstand eine undefinierte Lage im Bereich niedriger Krümmungen besitzt, die die Versuchsergebnisse teilweise beeinflusst. Des Weiteren ermöglicht diese Umsetzung die gezielte Regelung der Normalkräfte auf die Kabelprobe zur Kopplung von Zug, bzw. Druck mit Torsion oder Biegung. Zudem besteht die Option, einen Biegedorn einzubauen, um den das Kabel gebogen wird. Unterhalb des Biegedorns kann dazu ein entsprechender Sensor angebracht werden, mit dem die Messung der Kräfte in der Biegeebene und das Moment um die Achse senkrecht dazu möglich ist. Somit können Untersuchungen hinsichtlich des Verhaltens von Kabeln unter Kontakt und Reibung zu anderen Festkörpern durchgeführt werden. Diese Art von Experimenten sind Teil zukünftiger umfangreicher Arbeiten im Rahmen der Charakterisierung des mechanischen Verhaltens von Kabeln.

Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H. & V. A. EREMEYEV [2011]. *Shell-like structures: non-classical theories and applications*, volume 15. Springer Science & Business Media.
- [2] ANTMAN, S. S. [2005]. ‘Problems in nonlinear elasticity.’ *Nonlinear Problems of Elasticity*, pp. 513–584.
- [3] ARGYRIS, J. [1982]. ‘An excursion into large rotations.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **32**(1-3), pp. 85–155.
- [4] BAASER, H. & R. NOLL [2009]. ‘Simulation von Elastomerbauteilen: Materialmodelle und Versuche zur Parameterbestimmung.’
- [5] BAJAS, H., D. DURVILLE & A. DEVRED [2012]. ‘Finite element modelling of cable-in-conduit conductors.’ *Superconductor Science and Technology*, **25**(5), pp. 054019.
- [6] BATHE, K.-J. [2002]. *Finite-Elemente-Methoden*, volume 2. Springer Berlin.
- [7] BAUCHAU, O., Z. LAO & J. LINN [2015]. ‘Formulations of viscoelastic constitutive laws for beams in flexible multibody dynamics.’ In *ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. V006T10A032–V006T10A032. American Society of Mechanical Engineers.
- [8] BETSCH, P., P. STEINMANN, K. SCHWEIZERHOF & H. MATTHIES [2002]. *Computational methods for flexible multibody dynamics*. Univ., Lehrstuhl für Techn. Mechanik.
- [9] BLEISTEIN, T. [2013]. *Konzeption und Konstruktion eines Versuchsstands zur reinen Biegung mit überlagerter Torsion*. Bachelorarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Lehrstuhl für Technische Mechanik.
- [10] BUECHE, F. [1961]. ‘Mullins effect and rubber–filler interaction.’ *Journal of Applied Polymer Science*, **5**(15), pp. 271–281.
- [11] CARDONA, A. & M. GÉRADIN [2001]. *Flexible multibody dynamics: a finite element approach*. John Wiley.

- [12] ČEŠAREK, P., M. SAJE & D. ZUPAN [2012]. ‘Kinematically exact curved and twisted strain-based beam.’ *International Journal of Solids and Structures*, **49**(13), pp. 1802–1817.
- [13] CHEN, Z., T. SCHEFFER, H. SEIBERT & S. DIEBELS [2013]. ‘Macroindentation of a soft polymer: Identification of hyperelasticity and validation by uni/biaxial tensile tests.’ *Mechanics of Materials*, **64**, pp. 111–127.
- [14] COSTELLO, G. [1997]. *Theory of wire rope*. Springer Science & Business Media.
- [15] CRISFIELD, M. A. [1993]. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, volume 1. Wiley New York.
- [16] DÖRLICH, V., S. DIEBELS & J. LINN [2015]. ‘Investigation of elastoplastic effects of cables under large spatial deformation.’ *PAMM*, **15**(1), pp. 185–186.
- [17] DÖRLICH, V., J. LINN & S. DIEBELS [2017]. ‘Bending of Viscoplastic Cables.’ *PAMM*, **17**(1), pp. 293–294.
- [18] DÖRLICH, V., J. LINN & S. DIEBELS [2018]. *Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis: In Honor of Reinhold Kienzler*, chapter Flexible Beam-Like Structures - Experimental Investigation and Modeling of Cables, pp. 27–46. Springer.
- [19] DÖRLICH, V., J. LINN, T. SCHEFFER & S. DIEBELS [2016]. ‘Towards Viscoplastic Constitutive Models for Cosserat Rods.’ *Archive of Mechanical Engineering*, **63**, pp. 215–230.
- [20] DÖRLICH, V., P. ČEŠAREK, J. LINN & S. DIEBELS [2017]. ‘Experimental investigation and numerical modeling of resultant-based bending plasticity in cables.’ *Proc. ECCOMAS Them. Con. on Multib. Dyn., Prague*, **10**, pp. 37–46.
- [21] DRÜCKER, S. [2016]. *Elastoplastic simulation of cables using high-order finite elements*. Project work, Hamburg University of Technology.
- [22] DÜSTER, A., H. BRÖKER & E. RANK [2001]. ‘The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures.’ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **52**, pp. 673–703.
- [23] DÜSTER, A., E. RANK & B. SZABÓ [2017]. ‘The p-Version of the Finite Element and Finite Cell Methods.’ In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, edited by E. Stein, R. de Borst & T. J. R. Hughes, volume 2, pp. 1–35. John Wiley & Sons. ISBN 978-1-119-00379-3.
- [24] EISENTRÄGER, J., K. NAUMENKO, H. ALTENBACH & J. MEENEN [2015]. ‘A user-defined finite element for laminated glass panels and photovoltaic modules based on a layer-wise theory.’ *Composite Structures*, **133**, pp. 265–277.

- [25] FREUND, M., H. LORENZ, D. JUHRE, J. IHLEMANN & M. KLÜPPEL [2011]. ‘Finite element implementation of a microstructure-based model for filled elastomers.’ *International Journal of Plasticity*, **27**(6), pp. 902–919.
- [26] GROSS, D., W. HAUGER, J. SCHRÖDER & W. A. WALL [2017]. *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer-Verlag.
- [27] GRUTTMANN, F., R. SAUER & W. WAGNER [2000]. ‘Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour.’ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, pp. 1675–1702.
- [28] GURTIN, M. E. [1982]. *An introduction to continuum mechanics*, volume 158. Academic press.
- [29] HAN, S. & O. A. BAUCHAU [2017]. ‘Nonlinear, three-dimensional beam theory for dynamic analysis.’ *Multibody System Dynamics*, **41**(2), pp. 173–200.
- [30] HAUPT, P. [1977]. ‘Thermorheologisch einfache Stoffe.’ *Viskoelastizität und Plastizität: Thermomechanisch konsistente Materialgleichungen*, pp. 71–84.
- [31] HAUPT, P. [2013]. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer Science & Business Media.
- [32] HAUPT, P. & A. LION [1995]. ‘Experimental identification and mathematical modeling of viscoplastic material behavior.’ *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **7**(1), pp. 73–96.
- [33] HEARLE, J. [1969]. ‘8—On The Theory Of The Mechanics Of Twisted Yarns.’ *Journal of the Textile Institute*, **60**(3), pp. 95–101.
- [34] VAN DER HEIJDEN, G., S. NEUKIRCH, V. GOSS & J. THOMPSON [2003]. ‘Instability and self-contact phenomena in the writhing of clamped rods.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **45**(1), pp. 161–196.
- [35] IBRAHIMBEGOVIĆ, A. [1995]. ‘On finite element implementation of geometrically nonlinear reissner’s beam theory: three-dimensional curved beam elements.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **122**(1-2), pp. 11–26.
- [36] IBRAHIMBEGOVIC, A. [2009]. *Nonlinear solid mechanics: theoretical formulations and finite element solution methods*, volume 160. Springer Science & Business Media.
- [37] IPS CABLE SIMULATION [2020]. ‘<http://www.flexstructures.de/ips-cable-simulation>.’
- [38] JELENIĆ, G. & M. CRISFIELD [1999]. ‘Geometrically exact 3d beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **171**(1-2), pp. 141–171.

- [39] JOHLITZ, M. & S. DIEBELS [2011]. ‘Characterisation of a polymer using biaxial tension tests. Part I: Hyperelasticity.’ *Archive of Applied Mechanics*, **81**(10), pp. 1333–1349.
- [40] KACHANOV, L. [1958]. ‘Rupture time under creep conditions.’ *Izv. Akad. Nauk SSSR*, **8**, pp. 26–31.
- [41] KALISKE, M., L. NASDALA & H. ROTHERT [2001]. ‘On damage modelling for elastic and viscoelastic materials at large strain.’ *Computers & Structures*, **79**(22), pp. 2133–2141.
- [42] KHOEI, A. R. & R. W. LEWIS [1998]. ‘Finite element simulation for dynamic large elastoplastic deformation in metal powder forming.’ *Finite Elements in Analysis and Design*, **30**(4), pp. 335–352.
- [43] KLEIN, B. [2013]. *FEM: Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode*. Springer-Verlag.
- [44] KNAPP, R. [1979]. ‘Derivation of a new stiffness matrix for helically armoured cables considering tension and torsion.’ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**(4), pp. 515–529.
- [45] KRAJČINOVIC, D. [1996]. *Damage mechanics*, volume 41. Elsevier.
- [46] LEMAITRE, J. [1984]. ‘How to use damage mechanics.’ *Nuclear engineering and design*, **80**(2), pp. 233–245.
- [47] LEMAITRE, J. & J.-L. CHABOCHE [1994]. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press.
- [48] LINN, J. [2019]. ‘Discrete cosserat rod kinematics constructed on the basis of the difference geometry of framed curves—part i: Discrete cosserat curves on a staggered grid.’ *Journal of Elasticity*, pp. 1–60.
- [49] LINN, J. & K. DRESSLER [2017]. ‘Discrete cosserat rod models based on the difference geometry of framed curves for interactive simulation of flexible cables.’ In *Math for the Digital Factory*, pp. 289–319. Springer.
- [50] LINN, J., H. LANG & A. TUGANOV [2013]. ‘Geometrically exact cosserat rods with kelvin–voigt type viscous damping.’ *Mechanical Sciences*, **4**(1), pp. 79–96.
- [51] LINN, J., T. STEPHAN, J. CARLSSON & R. BOHLIN [2008]. ‘Fast simulation of quasistatic rod deformations for vr applications.’ In *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006*, pp. 247–253. Springer.
- [52] LION, A. [2000]. *Thermomechanik von Elastomeren: Experimente und Materialtheorie*. Habilitationsschrift, Institut für Mechanik, Universität Kassel.
- [53] LUENBERGER, D. G., Y. YE ET AL. [1984]. *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer.

- [54] MATA, P., S. OLLER & A. BARBAT [2007]. ‘Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **196**(45-48), pp. 4458–4478.
- [55] MATLAB [2016]. ‘The language of technical computing.’ *The MathWorks, Inc.* <http://www.mathworks.com>.
- [56] MERKEL, M. & A. ÖCHSNER [2015]. *Eindimensionale finite Elemente: ein Einstieg in die Methode*. Springer-Verlag.
- [57] MULLINS, L. [1969]. ‘Softening of rubber by deformation.’ *Rubber Chemistry and Technology*, **42**(1), pp. 339–362.
- [58] NETZ, T. & S. HARTMANN [2015]. ‘A monolithic finite element approach using high-order schemes in time and space applied to finite strain thermo-viscoelasticity.’ *Computers & Mathematics with Applications*, **70**(7), pp. 1457 – 1480.
- [59] ORTIZ, M. [1985]. ‘A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete.’ *Mechanics of materials*, **4**(1), pp. 67–93.
- [60] PAPAILIOU, K. [1997]. ‘On the bending stiffness of transmission line conductors.’ *IEEE Transactions on Power Delivery*, **12**(4), pp. 1576–1588.
- [61] PIVOVAROV, I. & O. VINOGRADOV [1985]. ‘The phenomenon of damping in stranded cables.’ *AIAA Paper-85-0660*.
- [62] RAGHUNATH, R. & D. JUHRE [2013]. ‘Finite element simulation of deformation behaviour of cellular rubber components.’ *Mechanics Research Communications*, **47**, pp. 32–38.
- [63] REDDY, J. [1997]. ‘On locking-free shear deformable beam finite elements.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **149**(1-4), pp. 113–132.
- [64] REISSNER, E. [1973]. ‘On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory.’ *Studies in applied mathematics*, **52**(2), pp. 87–95.
- [65] RIVLIN, R. & D. SAUNDERS [1951]. ‘Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber.’ *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **243**(865), pp. 251–288.
- [66] ROMERO, I. [2008]. ‘A comparison of finite elements for nonlinear beams: the absolute nodal coordinate and geometrically exact formulations.’ *Multibody System Dynamics*, **20**(1), pp. 51–68.
- [67] SÆVIK, S. [2011]. ‘Theoretical and experimental studies of stresses in flexible pipes.’ *Computers & Structures*, **89**(23), pp. 2273–2291.

- [68] SÆVIK, S. & S. BRUASETH [2005]. ‘Theoretical and experimental studies of the axisymmetric behaviour of complex umbilical cross-sections.’ *Applied Ocean Research*, **27**(2), pp. 97–106.
- [69] SAUER, R. [1970]. *Differenzgeometrie*. Springer.
- [70] SCHNEIDER, F., J. LINN, T. HERMANSSON & F. ANDERSSON [2017]. ‘Cable dynamics and fatigue analysis for digital mock-up in vehicle industry.’ In *Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2017*, pp. 763–769.
- [71] SIMEON, B. [2001]. ‘Numerical analysis of flexible multibody systems.’ *Multibody system dynamics*, **6**(4), pp. 305–325.
- [72] SIMO, J. C. [1985]. ‘A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **49**(1), pp. 55–70.
- [73] SIMO, J. C. & T. J. HUGHES [2006]. *Computational inelasticity*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- [74] SPAK, K., G. AGNES & D. INMAN [2014]. *Dynamics of Civil Structures*, volume 4, chapter Cable parameters for homogenous cable-beam models for space structures, pp. 7–18. Springer.
- [75] THOMAS, D., J. WILSON & R. WILSON [1973]. ‘Timoshenko beam finite elements.’ *Journal of Sound and Vibration*, **31**(3), pp. 315–330.
- [76] TIMOSHENKO, S. & J. M. GERE [1972]. *Mechanics of Materials*. Van Nostrand Reinhold Company, New York.
- [77] TRELOAR, L. [1975]. *The physics of rubber elasticity, 3rd edn*. Clarendon. Oxford.
- [78] TRUESDELL, C. & R. TOUPIN [1960]. ‘Principles of classical mechanics and field theory.’ *Handbuch der Physik*, **3**(1). Springer-Verlag.
- [79] ČEŠAREK, P., D. ZUPAN & J. LINN [2015]. ‘Conceptual and numerical aspects of the mixed variational formulation of geometrically exact beam models.’ In *Proceedings of the ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015*, pp. 66–76.
- [80] WIENSS, C. [2018]. *Simulation von Kabeln und Schläuchen. Anforderungen und Einflüsse*. Dissertation, Universität Koblenz-Landau.
- [81] WITZ, J. [1996]. ‘A case study in the cross-section analysis of flexible risers.’ *Marine Structures*, **9**(9), pp. 885–904.
- [82] WITZ, J. & Z. TAN [1995]. ‘Rotary bending of marine cables and umbilicals.’ *Engineering structures*, **17**(4), pp. 267–275.

- [83] WRIGGERS, P., U. NACKENHORST, S. BEUERMANN, H. SPIESS & S. LÖHNERT [2007]. *Technische Mechanik kompakt: Starrkörperstatik-Elastostatik-Kinetik*. Springer-Verlag.
- [84] ZIENKIEWICZ, O. C., R. L. TAYLOR, P. NITHIARASU & J. ZHU [1977]. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London.

Veröffentlichungen, Proceedings, Vorträge

A Veröffentlichungen & Proceedings

1. V. Dörlich, S. Diebels & J. Linn [2015]
Investigation of elastoplastic effects of cables under large spatial deformation
Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 15, 185–186.
2. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer & S. Diebels [2015]
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods
Proceedings ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics, 479–490.
3. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer & S. Diebels [2016]
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods
Archive of Mechanical Engineering 63(2), 215–230.
4. V. Dörlich, P. Češarek, J. Linn & S. Diebels [2017]
Experimental investigation and numerical modeling of resultant-based bending plasticity in cables
Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics, 39-48.
5. V. Dörlich, J. Linn & S. Diebels [2017]
Bending of Viscoplastic Cables
Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 17(1), 293–294.
6. V. Dörlich, J. Linn & S. Diebels [2018]
Flexible Beam-Like Structures - Experimental Investigation and Modeling of

Cables.

In: Altenbach H., Jablonski F., Müller W., Naumenko K., Schneider P. (eds) *Advances in Mechanics of Materials and Structural Analysis. Advanced Structured Materials*, vol 80. Springer, Cham.

B Vorträge

1. V. Dörlich, S. Diebels & J. Linn
Investigation of elastoplastic effects of cables under large spatial deformation
86th GAMM Annual Meeting 2015, Lecce.
2. V. Dörlich, T. Scheffer & S. Diebels
Experimental Investigation of Inelastic Cables and Hoses
IPS User Conference 2015, Deidesheim.
3. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer & S. Diebels
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods
ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015, Barcelona.
4. V. Dörlich, S. Diebels & J. Linn
Experimentelle Charakterisierung und Modellierung des plastischen Verhaltens von Kabeln
Mechanik-Kolloquium 2015, Kaiserslautern.
5. V. Dörlich, S. Diebels & J. Linn
Experimentelle Charakterisierung und Modellierung der Plastizität von Kabeln
8. Workshop Kontinuumsmechanik 2015, Cuxhaven.
6. V. Dörlich, J. Linn & S. Diebels
Investigation of finite deformations of multi-component cables
Euromech Colloquium 569 – Multiscale Modeling of Fibrous and Textile Materials 2016, Châtenay-Malabry Paris.

7. V. Dörlich, J. Linn & S. Diebels
Bending of viscoplastic cables
88th GAMM Annual Meeting 2017, Weimar.
8. V. Dörlich, F. Andersson & J. Linn
Piecewise linear elastic behavior of Bowden cables
3rd International IPS User Conference 2017, Speyer.
9. V. Dörlich, P. Češarek, J. Linn & S. Diebels
Experimental investigation and numerical modeling of resultant-based bending plasticity in cables
ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2017, Prague.
10. V. Dörlich, P. Češarek, J. Linn & S. Diebels
Investigation and modeling of the constitutive behavior of inelastic cables based on the sectional quantities of Cosserat rods
10. Workshop Kontinuumsmechanik 2017, Bad Tölz.
11. P. Češarek, V. Dörlich, J. Linn & S. Diebels
Modeling of inelastic bending of cables using constitutive laws for Cosserat rods
6th European Conference on Computational Mechanics 2018, Glasgow.