

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint Nr. 342

**Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches
Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik**

Horst Hischer

Saarbrücken 2014

Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 342
submitted: January 21, 2014

Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
P.O. Box 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany
hischer@math.uni-sb.de

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

Fax: + 49 681 302 4443
e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: <http://www.math.uni-sb.de/>

Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik

In diesem Übersichtsbeitrag, einer mathematikdidaktischen Studie,¹ werden grundlegende Aspekte „Kleiner Welten“ erläutert, die als Untersuchungsgegenstand in der Informatik, in der Mathematischen Optimierung und in der Soziologie seit Beginn des letzten Jahrzehnts hinlänglich bekannt sind. Diese elementar gehaltene Darstellung etablierter Ergebnisse erfolgt mit Blick auf denkbare Anwendungen in der Mathematikdidaktik und dann auch im Mathematikunterricht und in der Pädagogik.

Das Kleine-Welt-Phänomen ist typisch für viele gewachsene und wachsende (auch soziale) große „Netzwerke“. Dieses Phänomen hat dazu beigetragen, wichtige Methoden der in den letzten knapp fünf Dezennien entstandenen Diskreten Mathematik zu entwickeln, die nicht nur von innermathematischer Interesse sind, sondern die zugleich wesentlich zur Entwicklung der aktuellen transdisziplinären „Netzwerktheorie“ beigetragen haben. Wichtige Impulse zu deren Etablierung gingen dabei von Anwendungsdisziplinen aus, z. B. von der Soziologie, aber auch von der Biologie und der Medizin. Insbesondere gelangen Ende der 1990er Jahre eine mathematische Modellierung und ein Verständnis mancher Phänomene mit Hilfe von Methoden der „Mean-Field Theory“ der Statistischen Physik. Die Netzwerktheorie ist damit ein Musterbeispiel für die Modellierung „realer“ Situationen.

In der Mathematik-Didaktik und in der Pädagogik wird das mögliche Potential der Netzwerktheorie für Forschung und Entwicklung im Sinne einer Präzisierung von „Vernetzung“ noch nicht expressis verbis erörtert, auch wenn diese Bezeichnung dort jeweils gerne verwendet wird. Und Kleine Welten bieten ferner über die damit zusammenhängende Graphentheorie für die inhaltliche Inszenierung des Mathematikunterrichts vielfältige – sowohl innermathematische als auch anwendungsbezogene – Möglichkeiten des Experimentierens und Reflektierens.

1 Kleine Welten – zwei Einstiegsbeispiele und ihre (Be-)Deutung

1.1 Das Kevin-Bacon-Orakel

Kevin **Bacon** ist ein amerikanischer Film- und Fernsehschauspieler, der früher nur Nebenrollen spielte und bis Ende der 1990er Jahre kaum bekannt war. Duncan J. Watts schreibt hierzu 1999 in der ersten Auflage seines Buches „Small Worlds“:²

For those who don't know him, Kevin Bacon is an actor best known for *not* being the star of many films.

Bacon war dann 1996 zu internationaler Bekanntheit gelangt, als im *Time Magazine* die Website „The Oracle of Bacon“ des Informatikers Brett Tjaden von der Universität Virginia als eine der „Top Ten“ ausgezeichnet wurde. Worum geht es dabei?



Abb. 1: Kevin Bacon

¹ Ausführliche Fassung eines am 28. 09. 2013 in der Universität des Saarlandes gehaltenen Vortrags bei der Tagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. mit dem Vortragstitel: „Kleine Welten“ – ein „diskretes Potential“ für Didaktik, Unterricht und Pädagogik? Zu dem Vortrag existiert ein Flash-Video der PowerPoint-Präsentation: <http://www.math.uni-sb.de/ag/hischer/vortraege/sb-2013-akmui/>

² [Watts 1999, 3]

Abb. 2 zeigt einen Ausschnitt aus dem „Zusammenarbeitsgraphen“ („collaboration graph“) von Filmschauspielerinnen und Filmschauspielern (künftig in Anlehnung an das englische „actors“ kurz „**Akteure**“ genannt) mit dem Titel: *A tiny portion of the movie-performer relationship graph*.³

Diese Akteure bilden die *Knoten* des Graphen. Zwischen zwei Akteuren verläuft genau dann eine *Kante*, wenn sie in einem Film gemeinsam mitgewirkt haben, wobei in Abb. 2 zusätzlich je *ein* solcher „vermittelnder“ Film eingetragen ist, der die betreffende erwähnte Kante markiert.

So hat Kevin Bacon beispielsweise mit Donald Sutherland „zusammengearbeitet“, weil beide (zumindest) in dem Film „Animal House“ mitgewirkt haben (vgl. Abb. 2). Entsprechend hat Donald Sutherland mit Nicole Kidman in dem Film „Cold Mountain“ zusammengearbeitet und so fort. Durch diese Kette von Ereignissen „unmittelbarer Zusammenarbeit“ ergibt sich schließlich eine „mittelbare Zusammenarbeit“ zwischen Kevin Bacon und Kate Winslet, die durch „4 Schritte“ in diesem Graphen gekennzeichnet ist. Wir erkennen aber auch einen anderen „Weg“ von Kevin Bacon zu Kate Winslet über Bill Paxton, der nur 2 Schritte umfasst: Abb. 3 zeigt einen Ausschnitt aus Abb. 2 als einen auf das Wesentliche reduzierten Untergraphen, der die „vermittelnden Filme“ nicht mehr explizit enthält.

Der „**Abstand**“ $d(A, B)$ zweier Knoten A und B ist graphentheoretisch die Länge *eines* kürzesten Weges (deren es mehrere geben kann) zwischen A und B . Für den Fall, dass zwischen A und B kein Weg existiert, ist wie üblich $d(A, B) := \infty$.

Die ständig aktualisierte Datenbank „*Internet Movie Data Base*“⁴ dient der Erfassung aller weltweit agierenden (lebenden und nicht mehr lebenden) Akteure und „ihrer“ Filme. Der aus all diesen Akteuren bestehende zeitabhängige „collaboration graph“ („**Akteurs-Graph**“) sei C_a .

Bezeichnung: Für alle $A \in C_a$ ist $d(A, \text{Bacon})$ die „**Baconzahl** von A “.

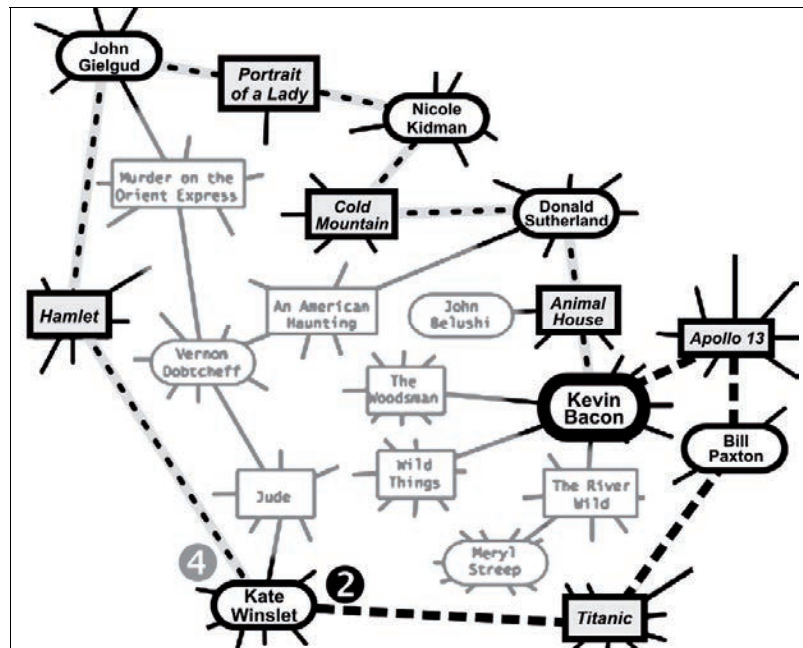


Abb. 2: Ausschnitt aus dem Zusammenarbeitsgraphen der Akteure

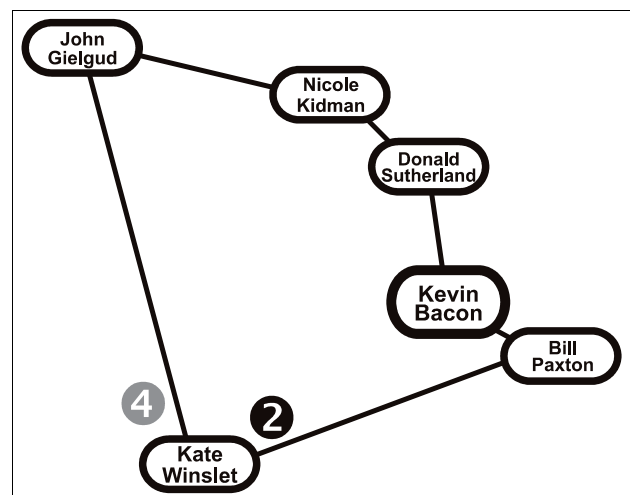


Abb. 3: Untergraph des Zusammenarbeitsgraphen aller Akteure in Reduktion von Abb. 2

³ Abbildung erstellt auf der Grundlage von <http://introcs.cs.princeton.edu/java/45graph/> (23. 11. 2013).

⁴ <http://www.imdb.com/> (25. 11. 2013)

So hat Kate Winslet die Bacon-Zahl 2, und Donald Sutherland hat die Bacon-Zahl 1. Diese Bacon-Zahlen beschreiben damit den „filmschauspielerischen Verwandtschaftsgrad“ eines Akteurs zu Kevin Bacon.

Das von Brett Tjaden entwickelte Web-Spiel „The Oracle of Bacon“ (s. o. und Abb. 4) basiert auf der *Internet Movie Data Base* und liefert bei Eingabe eines beliebigen (in der Datenbank erfassten) Akteurs dessen Bacon-Zahl.⁵ So findet man z. B. bei Heinrich George die Baconzahl 3 (Abb. 5). Zugleich werden sowohl vermittelnde Filme als auch „Zwischenakteure“ angegeben, und darüber hinaus können mittels der Taste „Find a different Link“ weitere Verbindungswege derselben Länge angefordert werden. Und man kann die Default-Eingabe „Kevin Bacon“ durch einen anderen Akteurs-Namen ersetzen und damit also den sog. *Zusammenarbeitsabstand* („**collaboration distance**“) von zwei Akteuren ermitteln.



Abb. 4: The Oracle of Bacon – <http://oracleofbacon.org/>

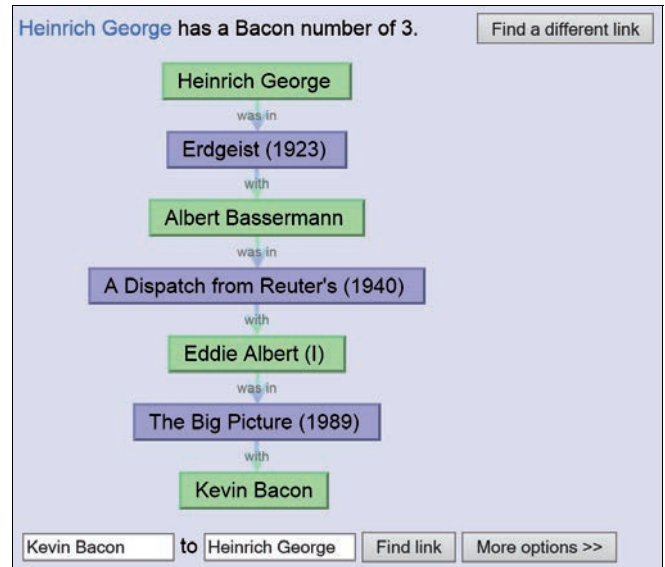


Abb. 5: Ergebnis bei Eingabe von „Heinrich George“

Es mag verwundern, dass Heinrich George in diesem Graphen nur „3 Schritte“ von Kevin Bacon „entfernt“ ist, jedoch findet man „meistens“ die Bacon-Zahl 3 – und das ist die eigentliche Überraschung! Insbesondere ist 8 *bisher* die größte endliche Bacon-Zahl, also gilt $d(A, \text{Bacon}) \in \{0, 1, \dots, 8, \infty\}$ für alle $A \in C_a$. Tabelle 1 zeigt die absoluten Häufigkeiten der Bacon-Zahlen, und Abb. 6 visualisiert deren bisherige zeitliche Entwicklung.

Bacon-Zahl	1999	2009	1.9.2013	25.11.2013
0	1	1	1	1
1	1.181	2.251	2.796	2.799
2	71.397	22.5506	311.207	313.045
3	124.975	719.767	1.059.651	1.078.865
4	25.665	178.784	266.847	276.680
5	1.787	12.205	21.222	22.296
6	196	1.040	2.157	2.361
7	22	165	226	251
8	2	17	28	24
mittlere Bacon-Zahl:	2,81	2,98	3,00	3,006
Datenbasis:	225.226	1.139.736	1.664.135	1.696.322

Tabelle 1: absolute Häufigkeiten der Bacon-Zahlen

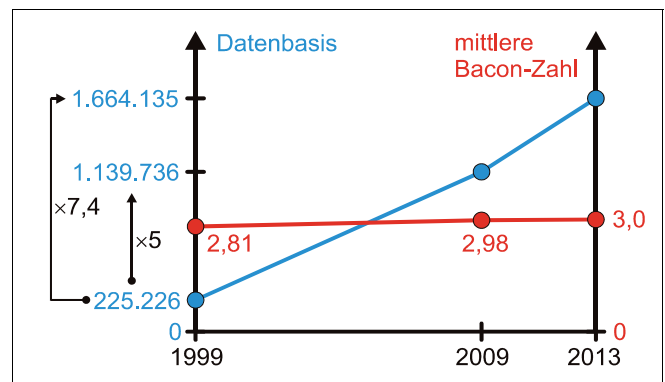


Abb. 6: zeitliche Entwicklung der Bacon-Zahlen

In den zehn Jahren von 1999 bis 2009 ist also die mittlere (endliche) Bacon-Zahl trotz Ver-
fünffachung der Datenbasis kaum größer geworden, und auch in den folgenden drei Jahren ist sie fast konstant geblieben. (Man möge nach Gründen dafür suchen, warum z. B. von September 2013 bis November 2013 die *absolute Häufigkeit* der Bacon-Zahl 8 sogar gesunken ist!)

⁵ <http://oracleofbacon.org/> (25. 11. 2013); das Kevin-Bacon-Orakel wird mittlerweile von Patrick Reynolds aktualisiert und zudem mit interessanten Recherchemöglichkeiten weiterentwickelt, vgl. <http://piki.org/patrick/> (25. 11. 2013).

Darüber hinaus zeigt Abb. 7 auf der Basis von Tabelle 1 die Verteilung der *relativen Häufigkeiten* der Bacon-Zahlen: Die drei Häufigkeitsverteilungen für die Jahre 2008 und 2013 sind nahezu identisch, und sie weichen gegenüber der Verteilung von 1999 (punktiert dargestellt) nur geringfügig ab.

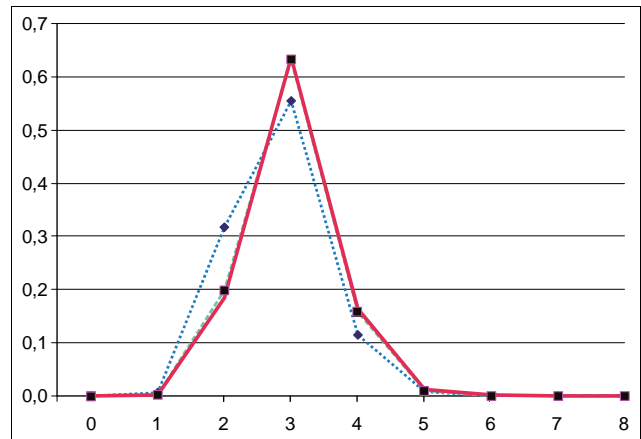


Abb. 7: relative Häufigkeit der Bacon-Zahlen aus Tabelle 1 (punktiert: 1999, Rest: 2009 und 2013)

1.2 Die Erdős-Zahl

1969 erschien in den „American Mathematical Monthly“ folgende aufschlussreiche Note von Casper **Goffman** mit dem Titel “And what is your Erdős Number?”: ⁶

The great mathematician Paul Erdős has written joint papers with many mathematicians. This fact may lend some interest to the notion of Erdős number which we are about to describe.

Let A and B be mathematicians, and let $A_i, i = 0, 1, \dots, n$, be mathematicians with $A_0 = A, A_n = B$, where A has written at least one joint paper with $A_{i+1}, i = 0, 1, \dots, n-1$. Then A_0, A_1, \dots, A_n is called a chain of length n joining A to B . The A -number of B , $v(A; B)$, is the shortest length of all chains joining A to B . If there are no chains joining A to B , then $v(A; B) = +\infty$. Moreover, $v(A; A) = 0$. Then $v(A; B) = v(B; A)$ and $v(A; B) + v(B; C) \geq v(A; C)$.

For the special case $A = \text{Erdős}$, we obtain the function $v(\text{Erdős}; \cdot)$ whose domain is the set of all mathematicians.

I was told several years ago that my Erdős number was 7. It has recently been lowered to 3. Last year I saw Erdős in London and was surprised to learn that he did not know that the function $v(\text{Erdős}; \cdot)$ was being considered. When I told him the good news that my Erdős number had just been lowered, he expressed regret that he had to leave London the same day. Otherwise, an ultimate lowering might have been accomplished.

Dies ist möglicherweise das erste Mal, dass eine Publikation über die Erdős-Zahl erschien, obwohl Goffman mitteilt, dass man ihm schon einige Jahre früher gesagt habe, dass seine Erdős-Zahl 7 sei. Dass sie 1968 auf 3 gesunken ist und noch weiter sinken könne, passt zu der Angabe in Tabelle 1, dass die Anzahl derer mit der Bacon-Zahl 8 innerhalb von zwei Monaten (bei gleichzeitiger Zunahme der Datenbasis!) gesunken ist. Und das wohl augenzwinkernde Bedauern von Erdős über seine Abreise aus London noch am selben Tage zeigt, dass Goffman damit die Chance verpasst hat, schnell noch die Erdős-Zahl 1 zu erreichen. ⁷



Abb. 8:
Pál Erdős

⁶ [Goffman 1969]; die Bezeichnung „Erdős-Zahl“ bezieht sich auf den großen ungarischen Mathematiker Pál Erdős (1913 – 1996), gesprochen „Errdösch“ mit langem „ö“ wie in „böse“; der korrekte ungarische Umlaut ist ö statt ö.

⁷ Goffman teilt nicht mit, ob er sich nur auf alle aktuell lebenden oder auch zusätzlich auf die nicht mehr lebenden Mathematikerinnen und Mathematiker bezieht (beides ist möglich). Was bedeutet das für die Erdős-Zahl jedes Einzelnen?

Zwei Jahre nach dieser Note von Goffman erschien mit Bezug darauf ein kurzer Artikel des bedeutenden Graphentheoretikers Frank **Harary**, bekannt durch sein grundlegendes Buch „Graph Theory“, das Goffman wohl nicht kannte:⁸

Goffman [...] discussed the distance between Erdős and other mathematicians in the collaboration graph, apparently without realizing he was using graph theoretic concepts. Using for convenience the notation and terminology of graph theory [...], we define this graph M as follows. The points of M are all the living mathematicians who have published at least one paper, either solo or jointly, in the Mathematical Reviews list of journals. Two points u and v of M are adjacent if and only if they have written a joint paper, which has already been published. In these terms, the Erdős number of u is precisely the distance in M between Erdős and u . If u and Erdős are in different connected components of M , then by convention the distance $d(\text{Erdős}, u) = \infty$. It is certainly reasonable to assume that the largest component in M is the one containing Erdős, since he apparently has more collaborators than any other one mathematician. However, it is not true that in every disconnected graph, a largest component contains a point of maximum degree.



Abb. 9:
Frank Harary

Die hier von Harary angesprochene graphentheoretische Terminologie sei angedeutet:

Ein *Graph* besteht aus *Knoten* und *Kanten*, wobei die Kanten des Graphen je zwei Knoten des Graphen *verbinden*. Je zwei verbundene Knoten sind *adjazent*, sie *inzidieren* mit der sie verbindenden Kante. *Einfache Graphen* („simple graphs“) haben keine Mehrfachkanten und keine Schlingen. Durchläuft man verschiedene Knoten über mit ihnen inzidierende Kanten, so bilden diese Kanten einen *Weg*. Die Knotenmenge eines *Untergraphen* U eines Graphen G ist eine Teilmenge der Knotenmenge von G , und die Kantenmenge von U besteht aus all den Kanten von G , die mit den Knoten von U inzidieren, während ein *Teilgraph* von G nicht all solche Kanten wie U enthalten muss. Genau dann ist ein Graph *zusammenhängend*, wenn zwischen je zwei Knoten ein Weg existiert. Eine *Komponente* eines Graphen G ist ein maximaler (d. h.: in G nicht vergrößerbarer) zusammenhängender Untergraph (deren es dann mehrere geben kann).

Nun liegt es nahe, in Analogie zum „Zusammenarbeitsgraphen der Akteure“ einen „Zusammenarbeitsgraphen der Mathematiker(inne)n“ zu betrachten. Tatsächlich wurde ein solcher schon lange vor dem erstgenannten betrachtet, und zwar findet man in dem von Frank Harary 1979 herausgegebenen Tagungsband „Topics in Graph Theory“ zu einer Tagung von 1977 in einem Beitrag von Tom Odde (einem Pseudonym von Ronald **Graham**) die Skizze eines Zusammenarbeitsgraphen:

Abb. 10⁹ zeigt einen (wenn auch sehr kleinen) *Teilgraphen* aus dem *Zusammenarbeitsgraphen* aller Mathematiker(inne)n, und dennoch weist er grundlegende Eigenschaften auf: Im Gegensatz zu der Beschreibung von Harary im letzten Zitat beschränkt er sich – wie der Zusammenarbeitsgraph der Akteure in 1.1 – nicht nur auf lebende Personen, wie man z. B. an „Gauss“ (ganz links oben in Abb. 10) sieht, und er besteht erkennbar aus mehreren *Komponenten*: Die Mitglieder der „inneren“ großen Komponente haben eine endliche Erdős-Zahl (so haben Ronald Graham und Frank Harary die Erdős-Zahl 1), und die Mitglieder der kleinen Komponente oben links und der beiden unten links haben alle die Erdős-Zahl ∞ . Allerdings fehlen hier „isolierte Personen“ (also solche, die keinen Publikationspartner haben).

⁸ [Harary 1969]; mit “notation and terminology of graph theory” (3. Zeile des nachfolgenden Zitats) bezieht sich Harary auf dieses Buch.

⁹ Dies ist eine nachträglich bearbeitete und farbig markierte Fassung der Originaldarstellung aus [Odde 1979].

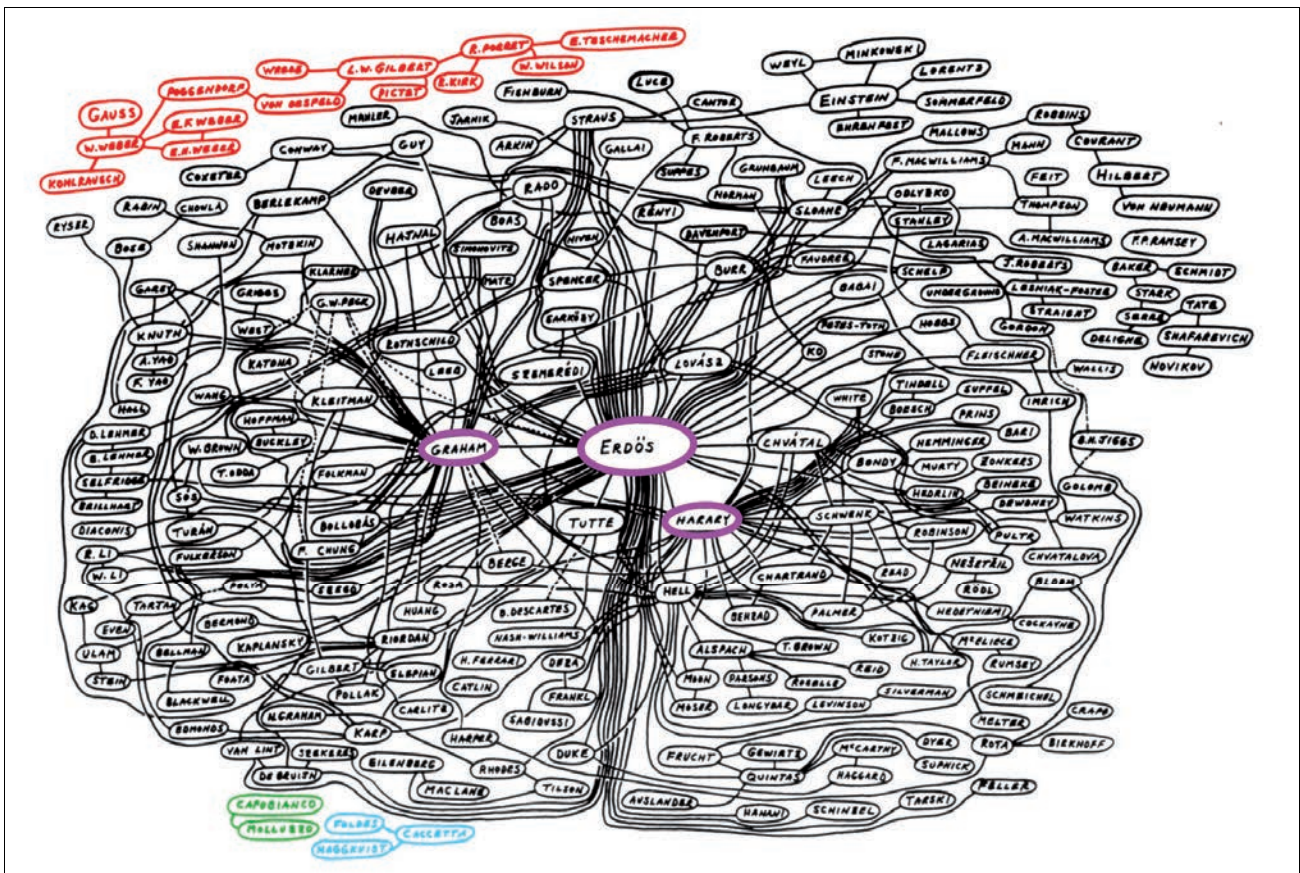


Abb. 10: Ausschnitt aus dem Zusammenarbeitsgraphen der Mathematiker(inne)n 1977 nach Tom Odda (alias Ronald Graham)

Es sei angemerkt, dass Ronald („Ron“) Graham (*1935) einer der maßgeblichen Architekten bei der Entwicklung der Diskreten Mathematik seit den 1970er und 1980er Jahren ist. Er lieferte u. a. wichtige Beiträge zur Entwicklung von Approximationsalgorithmen, etwa 1972 den „Graham Scan“ der Computer-Geometrie zur Ermittlung der konvexen Hülle einer endlichen Punktmenge. Er war lange Zeit Chef-Wissenschaftler bei den Bell Labs und organisierte dort den Umbau zu einem Zentrum für *Diskrete Mathematik* und *Theoretische Informatik*.



Abb. 11: Ronald Graham

Das Konzept der anschaulich begründeten „Erdős-Zahl“ weist strukturelle Ähnlichkeiten mit demjenigen der „Bacon-Zahl“ auf, und daher bietet sich mit Bezug auf obige Darstellung von Harary eine analoge graphentheoretische Kennzeichnung an, wobei Hararys Einschränkung „lebende“ (wie heute üblich) entfallen kann:

Dazu sei nun C_m der „**Mathematiker-Graph**“: der (zeitabhängige) „collaboration graph“ aller (weltweit!) sowohl lebenden als auch nicht mehr lebenden, jeweils publiziert habenden Mathematiker(inne)n, wie sie in der von der *American Mathematical Society* gepflegten „MathSciNet“ genannten Datenbank¹⁰ zusammen mit den Publikationen dieser „Mathematik-Autoren“ dokumentiert werden. Zwischen zwei Knoten von C_m (also diesen Autoren) verläuft daher genau dann eine Kante, wenn sie mindestens eine Publikation *gemeinsam* verfasst haben (wobei auch weitere Autoren beteiligt sein können!).

¹⁰ <http://www.ams.org/mathscinet/> (Diese Quelle ist nicht öffentlich nutzbar, wohl aber aus Hochschulnetzen heraus.)

Das führt dann in Analogie zur Bacon-Zahl zu folgender

Bezeichnung: Für alle $M \in C_m$ ist $d(M, \text{Erdős})$ die „**Erdős-Zahl** von M “.

Hierbei ist aus unterschiedlichen Gründen $d(M, \text{Erdős}) = \infty$ möglich (vgl. z. B. Abb. 10), auch bei denjenigen, die nur ohne Koautor publiziert haben.¹¹

Es ist nicht verwunderlich, dass es auch zur Erdős-Zahl ein mit einem Web-Browser zu benutzendes „Spiel“ gibt, und zwar auf einer öffentlich zugänglichen Seite des erwähnten MathSciNet (vgl. Abb. 12), mit dem jeder/jede die eigene Erdős-Zahl (oder die eines anderen Autors) ermitteln kann. Auch hier kann man – analog zur Berechnung der Bacon-Zahl – „Erdős“ durch einen anderen Namen ersetzen, um damit dann den „mathematischen Zusammenstandsabstand“ („**collaboration distance**“) von zwei beliebigen (in dieser Datenbank erfassten) Autoren zu ermitteln (wobei dieser Abstand ebenso wie die Bacon-Zahl ggf. ∞ ist). Wie beim Kevin-Bacon-Orakel findet man auch hier (überraschenderweise?) meist recht „kleine“ Erdős-Zahlen.



Abb. 12: Berechnung der Erdős-Zahl in www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html

Jerry **Grossman** von der Oakland University betreibt eine „Erdős Number Project“ genannte Website, die vor allem auf der Datenbank des MathSciNet beruht und viele sehr interessante Auswertungen bzw. Auswertungsmöglichkeiten bietet.¹² Eine Aktualisierung erfolgt etwa alle fünf Jahre, die letzte fand im Oktober 2010 statt, und die nächste ist für 2015 vorgesehen.¹³ Über MathSciNet hinaus berücksichtigt Grossman nach eigenen Angaben manuell auch andere Datenbanken wie etwa zbMATH oder ERAM.

Grossmans Website vermeldet für 2010 bei C_m rund 401.000 Knoten, 676.000 Kanten und eine aus 268.000 Knoten mit jeweils endlicher Erdős-Zahl bestehende große Komponente („giant component“). Dieser mit C_e bezeichnete Untergraph sei **Erdős-Graph** genannt. Ferner enthielt C_m rund 84.000 isolierte Knoten, also Autoren, die nur ohne Koautoren publiziert haben. Der Rest von knapp 50.000 Knoten zerfällt in mehrere Komponenten. Tabelle 2 zeigt die *absoluten Häufigkeiten* der Erdős-Zahlen im Jahre 2010, und Abb. 13 zeigt wie Abb. 7 die Verteilung der *relativen Häufigkeiten*.

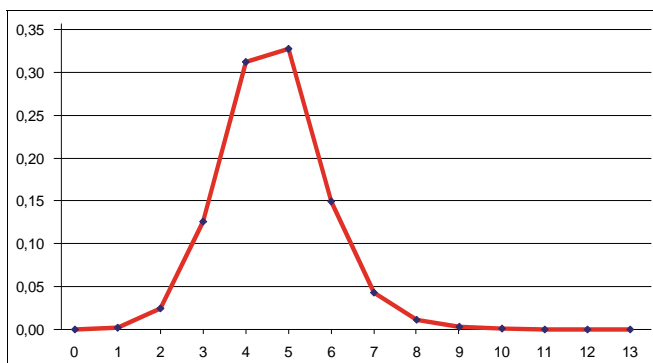


Abb. 13: relative Häufigkeiten der Erdős-Zahlen 2010

Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010
1	504
2	6593
3	33605
4	83642
5	87760
6	40014
7	11591
8	3146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5
mittlere Erdős-Zahl:	4,65
Datenbasis:	268.015

Tabelle 2:
Erdős-Zahlen 2010

¹¹ Solche Autoren kommen in Abb. 10 erkennbar nicht vor; man könnte sie ggf. definitorisch aus C_m ausschließen.

¹² <http://www.oakland.edu/enp/>

¹³ Alles im Stand der Erstellung dieses Beitrags vom Dezember 2013.

Qualitativ entspricht dies dem Befund bei den Bacon-Zahlen: So überrascht auch hier zunächst eine niedrige mittlere Erdős-Zahl zwischen 4 und 5 (in Übereinstimmung mit „Spiel-ergebnissen“ auf der Website von MathSciNet), und es verblüfft, dass in dieser Komponente die größte derzeit vorkommende Erdős-Zahl nur 13 ist: Die meisten (erfassten) Mathematiker(inne)n sind also in diesem Sinne maximal 13 (oder ∞ viele) Schritte von Erdős „entfernt“, und unter diesen ist die Mehrheit sogar nur 4 oder 5 Schritte von Erdős entfernt (s. o.).

1.3 Der Akteurs-Graph und der Erdős-Graph als „Kleine Welten“

Aus Tabelle 1 und Tabelle 2 kann man neben den mittleren Abständen zu Erdős bzw. zu Bacon und der jeweiligen Datenbasis auch den jeweils maximal möglichen Knotenabstand entnehmen, der im zwei-

2007: mittlere Erdős-Zahl: 4,65 Datenbasis: $n = 268.015$	2013: mittlere Bacon-Zahl: 3,01 Datenbasis: $n = 1.696.322$
Maximaler Knotenabstand im „Collaboration Graph“: 26 (möglicherweise geringer)	Maximaler Knotenabstand im „Collaboration Graph“: 16 (tatsächlich derzeit nur 15)

Abb. 14: Globaldaten von C_e und C_a im Vergleich (Nov. 2013)

ten Fall sogar niedriger als maximal möglich ist (Abb. 14). Der *maximale Knotenabstand* eines Graphen ist sein **Durchmesser**, der also in beiden Fällen *im Vergleich zur großen Datenbasis sehr klein* ist. Das hat zur Folge, dass jeweils auch der **mittlere Knotenabstand „relativ klein“** ist, nämlich notwendigerweise kleiner als der jeweilige maximale Knotenabstand.¹⁴ Das bedeutet per saldo eine „**schnelle Durchsuchbarkeit**“ der beiden Graphen.

Beides zusammen kennzeichnet diese Zusammenarbeitsgraphen als „**Kleine Welten**“. Watts schreibt zum „Kleine-Welt-Phänomen“ (im Englischen „small-world phenomenon“ genannt):¹⁵

The small-world phenomenon formalises the anecdotal notion that “you are only ever **six ‘degrees of separation’** away from anybody else on the planet.”

So war dieses Phänomen schon lange vorher unter der Bezeichnung „**Six degrees of separation**“ bekannt, und Watts erläutert das an der „alltäglichen“ Erfahrung: „wenn man etwa als völlig Fremder zu einer Party oder einer anderen Versammlung stößt und nach kurzer Unterhaltung feststellt, dass man mit einem anderen Teilnehmer einen gemeinsamen Bekannten hat – was man dann etwa kommentiert mit: „*Ach, wie ist die Welt doch klein!*“

Die Bezeichnung „small-world phenomenon“ wird dem Psychologen Stanley **Milgram** zugeschrieben. Das von ihm 1967 hierzu durchgeführte Experiment beschreiben die beiden Physiker Albert-László **Barabási** und Eric **Bonabeau** wie folgt:¹⁶

Stanley Milgram, Sozialpsychologe an der Harvard-Universität, schickte im Jahre 1967 Hunderte von Briefen an Menschen in Nebraska. Darin bat er sie, diese Nachricht an einen persönlichen Bekannten weiterzugeben, der sie wieder an einen Bekannten weiterreichen sollte, und so weiter, bis sie schließlich bei dem namentlich genannten Empfänger, einem Börsenmakler in Boston, eintreffen würde. Um die einzelnen Wege verfolgen zu können, bat er die Teilnehmer auch, ihm eine Postkarte zu schicken, sowie sie den Brief weitergeleitet hatten. Die Briefe, die schließlich ihren Bestimmungsort erreichten, hatten im Durchschnitt sechs Zwischenstationen durchlaufen – daher die populäre Vorstellung, dass zwei beliebige Personen nur sechs Stationen (»Händedrucke«) voneinander entfernt sind.¹⁷



Abb. 15:
Stanley Milgram

¹⁴ Siehe hierzu die in Tabelle 4 angegebenen konkreten Werte (S. 11).

¹⁵ [Watts 1999, 4]; Hervorhebung nicht im Original.

¹⁶ Aus [Barabási& Bonabeau 2004, 69]; Hervorhebungen nicht im Original.

Die „Mitwirkenden“ an diesem Versuch kannten also lediglich den *Namen des vorgesehenen Empfängers*.

Watts erwähnt das nach Milgram benannte Schauspiel „*Six Degrees of Separation*“ von John Guare (1990), das 1993 auch oscarreif durch MGM verfilmt wurde, und zitiert hier die Protagonistin Ouisa:¹⁸

Everybody on this planet is separated by only six other people. Six degrees of separation. Between us and everybody else on this planet. The president of the United States. A gondolier in Venice ... It's not just the big names. It's anyone.

Barabási und Bonabeau schränken aber sogleich ein, denn:¹⁹

Einen so weit reichenden Schluss gibt Milgrams Arbeit nicht her (die meisten der Briefe hatten den Endempfänger nie erreicht); gleichwohl finden sich Eigenschaften einer »Kleinen Welt« in anderen Netzen. So konnten wir zeigen, dass zwei beliebige chemische Stoffe in einer Zelle fast immer nur über drei Reaktionen miteinander verbunden sind. Im World Wide Web mit seinen mehr als drei Milliarden Dokumenten²⁰ liegen zwei Seiten typischerweise 19 Klicks auseinander.

„Kleine Welten“ sind bereits Übungsgegenstand im Informatikstudium. Abb. 16 zeigt dazu einen Ausschnitt aus einer Seite der Universität Princeton mit Beispielen für einen Programmierkurs in Java:²¹ Er-

wähnt werden hier diverse Graphen mit ihren Knoten (Vertices) und Kanten (Edges), die ggf. Eigenschaften Kleiner Welten aufweisen. Die bisher erörterten Beispiele des Akteurs-Graphen C_a und des Erdős-Graphen C_e rangieren hier unter „Social networks“. Die Vielfalt der Bereiche, aus denen diese Beispiele stammen, ist verblüffend: Wirtschaft, Technik, Ver-

GRAPH	VERTICES	EDGES
Communication	telephones, computers	fiber optic cable
Circuits	gates, registers, processors	wires
Mechanical	joints	rods, beams, springs
Hydraulic	reservoirs, pumping stations	pipelines
Financial	stocks, currency	transactions
Transportation	street intersections, airports	highways, air routes
Scheduling	tasks	precedence constraints
Software systems	functions	function calls
Internet	web pages	hyperlinks
Games	board positions	legal moves
Social networks	people, actors, terrorists	friendships, movie casts, associations
Protein interaction networks	proteins	protein-protein interactions
Genetic regulatory networks	genes	regulatory interactions
Neural networks	neurons	synapses
Infectious disease	people	infections
Electrical power grid	transmission stations	cable
Chemical compounds	molecules	chemical bonds

Abb.16: Beispiele Kleiner Welten aus einem Programmierkurs (Univ. Princeton)
kehr, Medizin, Biologie, Chemie, Physik, Soziologie, ...

¹⁷ Der letzte Satz des Zitats ist in sich inkonsistent, denn „sechs Zwischenstationen“ würde „sieben Stationen ... voneinander entfernt“ bedeuten und nicht sechs! Durch Vergleich mit Publikationen anderer Autoren zum selben Thema folgt, dass es wohl „fünf Zwischenstationen“ heißen muss. (Möglicherweise liegt hier ein Übersetzungsfehler der Redaktion vor.)

¹⁸ Aus [Watts 1999, 11]; Hervorhebung nicht im Original. Zu diesem Film gibt es auch einen Trailer in der *Internet Movie Database*: <http://www.imdb.com/video/screenplay/vi3416524057/> (28.11.2013)

¹⁹ [Barabási& Bonabeau 2004, 68]

²⁰ Im Stand von ca. Anfang 2004; nachfolgend geht es um „kürzeste Wege“.

²¹ Screenshot von <http://introc.cs.princeton.edu/java/45graph/> (wie Abb. 2, 23. 11. 2013).

1.4 Der Mathematiker-Graph und das Potenzgesetz („Power Law“)

Tabelle 2 und Abb. 13 zeigen Statistiken über die Erdős-Zahl, und zwar bezogen auf die absolute bzw. relative Häufigkeit der vorkommenden Erdős-Zahlen (hier und derzeit von 0 bis 13). Im letzten publizierten Stand von 2010 wurde für den Erdős-Graphen C_e ein Bestand von 268.000 Knoten vermeldet (s. o.). C_e ist eine sehr große Komponente im Mathematiker-Graphen C_m , der neben weiteren kleineren Komponenten (vgl. exemplarisch Abb. 10) auch rund 84.000 isolierte Knoten enthält, insgesamt enthält er rund 401.000 Knoten. Die o. g. Website von Grossman zum „Erdős Number Project“¹² enthält Tabelle 3 als weitere Statistik mit den absoluten Häufigkeiten der Knotengrade, wobei der Grad eines Knotens hier die Anzahl der Koautor(inn)en angibt.²²

Abb. 17 visualisiert diese Knoten-gradverteilung über dem Knoten-grad k durch absolute Häufigkeiten, wobei auch die 84.000 isolierten Knoten (Knoten-grad = 0) dargestellt sind.

Diese Kurve ruft Assoziationen an eine Hyperbel und damit an eine Potenzfunktion vom Typ $H(k) = c \cdot k^{-\lambda}$ hervor, so dass es nahe liegt, diese Vermutung an einer doppelt-logarithmischen Darstellung zu überprüfen, wie sie in Abb. 18 zu sehen ist.

Der mittlere Teil aus Abb. 18 ist in Abb. 19 vergrößert dargestellt und bestätigt hier die Vermutung, denn für diesen Teil gilt ersichtlich näherungsweise ein geradliniger Verlauf gemäß $\log(H(k)) \approx b - \gamma \cdot \log(k) = b + \log(k^{-\gamma})$, wobei b und γ Konstanten sind. Mit $c := e^b$ führt das zu der modellierenden Vermutung $H(k) = c \cdot k^{-\gamma}$, was Physiker als *Proportionalität* darstellen:

$$H(k) \sim k^{-\gamma} \text{ für große } k \text{ (genannt „Power Law“)}$$

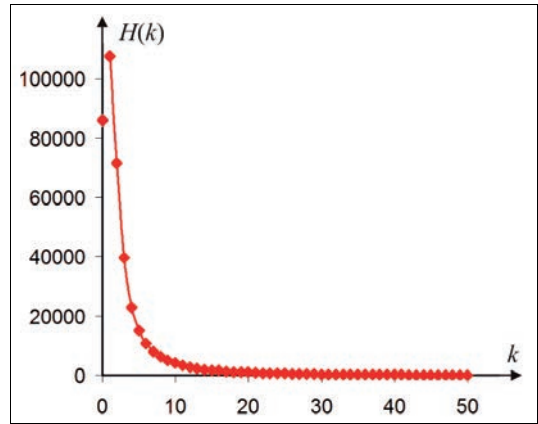


Abb. 17: Knoten-gradverteilung in C_m

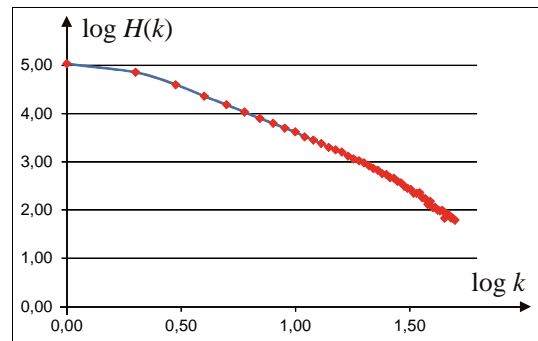


Abb. 18: Knoten-gradverteilung in doppelt-logarithmischer Darstellung

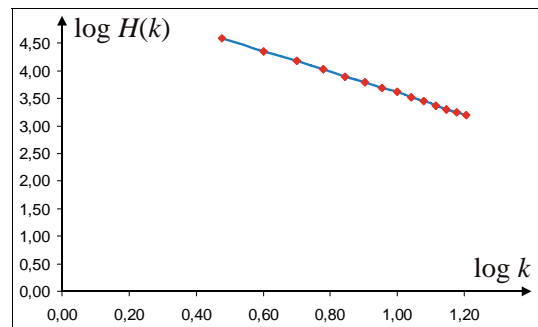


Abb. 19: Ausschnitt aus Abb. 18

0	83621
1	107647
2	71452
3	39574
4	22815
5	15205
6	10679
7	7917
8	6255
9	4959
10	4141
11	3283
12	2808
13	2368
14	1993
15	1756
16	1575
17	1311
18	1147
19	1046
20	945
21	825
22	720
23	665
24	563
25	541
26	468
27	460
28	390
29	364
30	311
31	279
32	264
33	222
34	221
35	227
36	177
37	172
38	130
39	150
40	111
41	113
42	99
43	95
44	98
45	67
46	83
47	79
48	68
49	67
50	61
51–60	399
61–70	189
71–80	103
81–90	57
91–100	35
101–150	60
151–200	10
201–504	5

Tabelle 3: Knoten-grad-Verteilung in C_m

²² Jerry Grossman hat mir gegenüber am 01. 12. 2013 bestätigt, dass er diese Tabelle bereits im Mai 2000 erstellt habe. Es ist aber hier letztlich nicht wichtig, von wann die Daten stammen, weil es nur um die in ihnen verborgene Struktur geht.

Dieses „**Potenzgesetz**“ der Knotengrad-Verteilung (“power-law degree distribution”) wurde hier am Beispiel des Mathematiker-Graphen C_m plausibel gemacht und als statistische Aussage über absolute Häufigkeiten formuliert. Üblicherweise formuliert man dieses Potenzgesetz für die *relativen Häufigkeiten*, und zwar als *Auftretenswahrscheinlichkeit* $p(k)$ der Knotengrade k in großen „Netzwerken“, $p(k) \sim k^{-\gamma}$, denn es hat sich durch vielfältige empirische Untersuchungen gezeigt, dass es typisch ist für viele „reale“, sich selbst organisierende Netzwerke.²³

In der grundlegenden, 51 Seiten umfassenden Arbeit [Albert & Barabási 2002, 49] liest man hierzu erläuternd:

Not all nodes in a network have the same number of edges (same *node degree*). The spread in the node degrees is characterized by a distribution function $P(k)$, which gives the probability that a randomly selected node has exactly k edges. [...] In particular, for a large number of networks, including the World Wide Web [...], the Internet [...], or metabolic networks [...], the degree distribution has a power-law tail [...].

Mit „power-law tail“ ist der rechte „Schwanz“ der Knotengrad-Verteilung gemeint, genauer: der in Abb. 19 zu sehende Ausschnitt.

Und dieselben Autoren schreiben in [Barabási & Albert 1999, 510]:

This result indicates that large networks self-organize into a scale-free state [...].

Doch was bedeutet es, dass „große Netzwerke“ sich in einem „skalenfreien Zustand selbst organisieren“? – Zunächst: „Selbst Organisieren“ ist intuitiv nachvollziehbar als „nicht von außen gesteuertes oder sogar *geregeltes* Entwickeln“ (des betreffenden Netzwerks). Und der in der Physik übliche Terminus „skalenfrei“, englisch „scale-free“ (beide Autoren sind Physiker), ist im deutschen Sprachraum besser „skaleninvariant“ zu nennen und meint Folgendes: Für die o. g. Wahrscheinlichkeitsfunktion p gilt $p(k) \sim k^{-\gamma}$, also $p(k) = c \cdot k^{-\gamma}$ mit einer Konstanten c . Führt man nun für die Rechtsachse eine „Skalentransformation“ der Gestalt $k \mapsto a \cdot k$ durch (Stauchung/Streckung), so ist $p^*(k) := p(a \cdot k) = a^{-\gamma} \cdot p(k)$ und damit also $p^*(k) \sim p(k)$. Es liegt somit (nur) eine *vertikale Stauchung* bzw. *Streckung* des Funktionsgraphen vor, was man in der Netzwerktheorie „**Skaleninvarianz**“ nennt.²⁴

Tabelle 4 zeigt für einige Graphen aus Abb. 16 die Werte von γ , dazu auch weitere Werte. Der „mittlere Knotenabstand“ wurde betr. C_a und C_m bereits auf S. 8 angesprochen:

Jeder *Akteur* (aus C_a) hat also durchschnittlich mit 113 Kolleg(inne)n zusammengearbeitet, bei *Mathematik-Autoren* (aus C_m) sind es hingegen nur rund 4 Kolleg(inne)n.

<i>Graph / Netzwerk</i>	<i>mittlerer Knotenabstand</i>	<i>mittlerer Knotengrad</i>	<i>Exponent γ (Power Law)</i>
Akteurs-Graph C_a	3,48	113,43	2,3
Mathematiker-Graph C_m	7,57	3,92	1,93
Internet	3,31	5,98	2,5
World Wide Web	11,27	5,55	2,1/2,4 (in/out)
Protein-Interaktionen	6,80	2,12	2,4

Tabelle 4: Einige Graphen mit ausgewählten „Netzwerkstatistiken“²⁵

²³ [Albert & Barabási 2002], [Barabási & Albert 1999], [Barabási & Bonabeau 2004], [Barabási 2009], [Newman & Strogatz & Watts 2001], [Newman 2010, 247 ff.].

²⁴ In der Mathematik nennt man solche Funktionen „homogen“, hingegen nennt man skaleninvariante Netze in der Physik aus einem anderen Grunde „inhomogen“, was hier nur Verwirrung stiften würde.

²⁵ Die Werte in Tabelle 4 stammen bis auf γ bei C_m aus [Newman 2010, 237], der für C_m aber keinen γ -Wert nennt. Seine Werte sind aktueller als die entsprechenden bei [Albert & Barabási 2002, 50 f.]. Jerry Grossman führt auf seiner Website¹² für γ den Wert 2,97 bei C_m an. Meine eigenen Berechnungen auf der Basis von Tabelle 3 und Abb. 18 ergaben 1,93. Ich habe ihm das am 01. 12. 2013 mitgeteilt, und er meinte, dass er damals möglicherweise eine andere Datenbasis zugrunde gelegt habe.

Erstaunen mag, dass „Internet“ und „World Wide Web“ (WWW) in Tabelle 4 getrennt und mit teils recht unterschiedlichen Werten aufgeführt werden.²⁵ Das liegt daran, dass im netzwerktheoretischen Kontext zwischen beiden streng zu unterscheiden ist: Das Internet ist ein materieller Graph, der aus Servern, Routern und Computern als Knoten und physikalischen (ungegerichteten) Datenleitungen als Kanten besteht. Das WWW ist aber ein virtueller, nicht materieller Graph, dessen Knoten Webseiten mit Hyperlinks als Kanten sind: Es ist aufgrund dieser „verweisenden“ Links im Gegensatz zum Internet ein gerichteter Graph („Digraph“ für „directed graph“), und folglich muss man bei jedem Knoten zwischen seinem „Eingangs-Grad“ (in-degree) und seinem „Ausgangs-Grad“ (out-degree) unterscheiden.²⁶ Abb. 20 symbolisiert diese Situation.²⁷

Die drei in Tabelle 4 gezeigten numerischen Werte zählen zu den sog. „**Netzwerkstatistiken**“, mit denen grundlegende Eigenschaften solcher Graphen numerisch erfasst werden. Sie messen den „**Vernetzungsgrad**“ *quantitativ*, es sind daher „**Vernetzungsgradmaße**“, und dazu gehören weitere wie beispielsweise der bereits auf S. 8 angesprochene **Durchmesser** und der **Clusterkoeffizient**, der auf S. 23 ff. kurz erläutert wird.²⁸

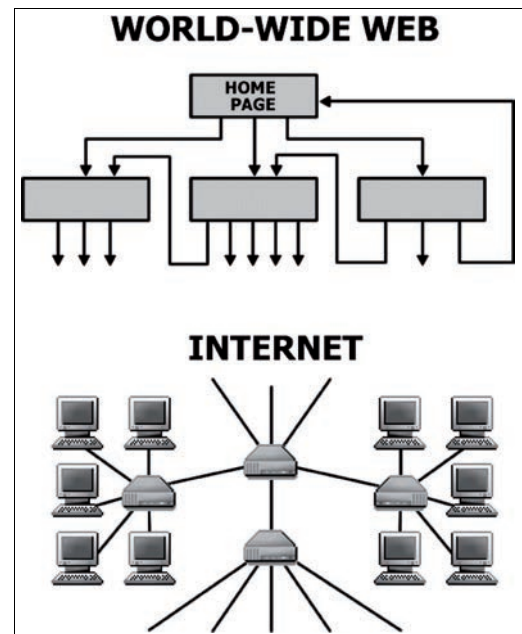


Abb. 20: zur Unterscheidung zwischen WWW und Internet

2 Netz, Netzwerke und Vernetzung

2.1 Vorbemerkungen

Die Termini „Netzwerke“, „Vernetzen“ und „Vernetzung“ gehen allesamt auf „Netz“ zurück und sind inflationär in die Alltagssprache eingezogen – leider auch teilweise undefiniert in manche Fachpublikationen. Im vorliegenden wissenschaftlichen Kontext ist jedoch eine angemessene Definition unumgänglich. Es ergibt sich hier aber das Dilemma, dass zu unterscheiden ist, ob man 1. eine Definition *innerhalb der Mathematik* sucht oder ob man 2. *mit Hilfe der Mathematik außermathematische* Phänomene oder Probleme zu beschreiben oder gar zu verstehen und zu lösen sucht („modellieren“). Im ersten Fall ist man bekanntlich erfreulich frei in der Sinnfestlegung (ein bedeutendes Kreativitätsmerkmal der Mathematik!), was für den zweiten Fall nur mit Einschränkungen angebracht und möglich ist, weil man die Intentionen der Anwender zu berücksichtigen hat.

Bei den „Kleinen Welten“ liegt der zweite Fall vor, und so ist einerseits zu prüfen, was diesbezüglich mit den oft üblichen Termini „Netzwerk“ und „Vernetzung“ bei den Anwender(inne)n gemeint ist, und andererseits ist zu klären, ob die Mathematik diese Termini bereits in bestimmten Kontexten verwendet und ob diese dann im pädagogisch-didaktischen Kontext von Nutzen sind:

²⁶ Damit kann man streng genommen nicht „im Internet surfen“, sondern nur im WWW.

²⁷ Entnommen aus [Albert & Barabási 2002, 51].

²⁸ Vgl. hierzu z. B. die ausführlichen Darstellungen in [Albert & Barabási 2002], [Hischer 2010] und [Newman 2010].

Da die vorliegenden skizzenhaften Betrachtungen vor allem mit Blick auf mögliche Anwendungen in der Mathematikdidaktik und der Pädagogik als unterrichtsbezogenen Fachwissenschaften entfaltet werden, sind insbesondere deren Anwendungskontexte zu berücksichtigen.

Ein aktuelles Werk zu „Netzwerken“ ist das 2010 erschienene 772 Seiten umfassende Buch „*Networks – An Introduction*“ des Physikers Mark **Newman**.²⁹ Gleich zu Beginn schreibt er:

A NETWORK is, in its simplest form, a collection of points joined together in pairs by lines. In the jargon of the field the points are referred to as *vertices* or *nodes* and the lines are referred to as *edges*. Many objects of interest in the physical, biological, and social sciences can be thought of as networks [...]

Unter „Netzwerk“ versteht Newman also einfach „Graph“ im Sinne der mathematischen Graphentheorie.³⁰ Möglicherweise will er damit den Anwendungsdisziplinen (an die sein Buch sich richtet) entgegenkommen und also deren Termini übernehmen, aber andererseits hat seine Sinnbelegung durchaus den Vorteil, dass die ggf. unterstellbare Doppeldeutigkeit von „Graph“ in der Mathematik (nämlich einerseits als „Funktionsgraph“ bzw. „Relationsgraph“ und andererseits als „Graph“ in der Graphentheorie) so vermieden wird.

In einer Arbeit von 1951 verwenden die Physiker **Solomonoff** und **Rapoport** die Bezeichnung „Netz“ für die von ihnen (vermutlich erstmals) untersuchten „Zufallsnetze“ wie folgt:³¹

Numerous problems in various branches of mathematical biology lead to the consideration of certain structures which we shall call “random nets”. Consider an aggregate of points, from each of which issues some number of outwardly directed lines (axones). Each axone terminates upon some point of the aggregate, and the probability that an axone from one point terminates on another point is the same for every pair of points in the aggregate. The resulting configuration constitutes a *random net*.

The existence of a *path* in a random net from a point *A* to a point *B* implies the possibility of tracing directed lines from *A* through any number of intermediate points, on which these lines terminate, to *B*.

⇒ „Netz“ wird hier wie „Netzwerk“ bei Newman nur als Synonym für „Graph“ im Sinne der Graphentheorie verwendet und bringt nichts Neues für außermathematische Anwendungen.

„Zufallsnetze“ wurden bekanntlich auch in einer wichtigen und oft zitierten Arbeit von Pál **Erdős** und Alfréd **Rényi**³² untersucht, aber dort taucht weder „Netz“ noch „Netzwerk“ auf, sondern nur „Graph“.

⇒ Es ist eine rein mathematische und nicht vordergründig auf Anwendungen gerichtete Arbeit.

Wenige Jahre nach der o. g. Abhandlung von Erdős und Rényi erschien von den Mathematikern Frank Harary und Robert Z. Norman und dem Psychologen Dorwin Cartwright das Buch „*Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*“.³³ In diesem Buch entfalten sie theoretische Grundlagen der Graphentheorie mit Blick auf die Verwendung in außermathematischen Anwendungssituationen, und sie schreiben im Vorwort u. a.:

In addition to organizing the known results of digraphs theory, we have endeavored to fill a few of the gaps in the existing mathematical literature. In this work, we have addressed ourselves primarily to structural phenomena of interest to social scientists. We believe, however, that the material will also be of value to those working with computers, programming, information retrieval, automata, linguists, cryptology, and electrical engineering.

²⁹ [Newman 2010]; Newman lehrt und forscht an der University of Michigan.

³⁰ Vgl. S. 5.

³¹ [Solomonoff & Rapoport 1951, 107]; „Axone“ sind „Kanten“ in (natürlichen) „neuronalen Netzen“.

³² [Erdős & Rényi 1959]

³³ [Harary & Norman & Cartwright 1965].

Gleich zu Beginn wird zwar in diesem Buch der Terminus “net” axiomatisch definiert, und zum Schluss gibt es sogar ein eigenes Kapitel über “Networks”. Mit “net” meinen sie aber lediglich einen innermathematischen *Hilfsbegriff* (und zwar im Sinne von „gerichteter Multigraph“), um dann darauf aufbauend „Relation“ und „Digraph“ (für “directed graph” als „gerichteter Graph“) zu definieren.

⇒ Damit führt aber „net“ zu keiner anwendungsbezogenen Klärung von „Netz“.

Ansonsten untersuchen die Autoren „Graphen“ nicht explizit und beschränken sich auf Digraphen (die jedoch Graphen implizit mit einschließen). Wesentlich ist für sie die Auffassung von „Netzwerk“ als *Relation mit bewerteten Kanten* (also als „bewerteter Graph“), passend zu folgender Auffassung:³⁴

Netzwerk, ein zusammenhängender, gerichteter Graph N mit genau einer Quelle, genau einer Senke und mit einer Kapazitätsfunktion.

Diese Deutung von „Netzwerk“ findet sich in der aktuellen Fachliteratur zur Diskreten Mathematik, und sie hat sich dort pragmatisch zwecks Modellierung eines „Flusses“ (z. B. von Wasser, Elektrizität, Daten, ...) durch ein (hier naiv zu verstehendes) System vom „Leitungsabschnitt“ entwickelt, die jeweils an „Knoten“ miteinander verbunden sind. Dazu eignet sich ein aus *Kanten* und *Knoten* aufgebauter Graph, der ggf. als *gerichtet* vorauszusetzen ist, um einen *einseitigen Transport* zu modellieren: Das bekannte *MaxFlow-MinCut-Theorem* von Ford und Fulkerson aus dem Jahre 1956 trifft dann eine wesentliche Aussage über den *maximalen Fluss* in Netzwerken.³⁵

⇒ Ob dieses „Netzwerk-Verständnis“ im pädagogisch-didaktischen Kontext hilfreich ist, sei dahingestellt.

In [Harary 1974, 182] wird „Netz“ im Sinne eines speziellen regulären Graphen definiert: Für $n \geq 3$ ist ein *n-Netz* ein kubischer Graph der *Taille* n mit möglichst kleiner Knotenanzahl.³⁶

Abb. 21 zeigt dazu exemplarisch links den *Petersen-Graph* (ein 5-Netz) und rechts den *Heawood-Graph* (ein 6-Netz).

⇒ Solche schönen und mathematisch interessanten Graphen sind jedoch wegen ihrer regelmäßigen Struktur für Anwendungen im pädagogisch-didaktischen Kontext bedeutungslos, so dass dieses „Netz-Verständnis“ hier nicht hilfreich ist.

Auch [Diestel 2000, 258 ff.] bietet in seinem aktuellen Standardwerk zur Graphentheorie eine interessante Definition von „Netz“ an, und zwar als „*Menge paarweise berührender zusammenhängender Eckenmengen*“.

⇒ Für solche „Netze“ ist aber ebenfalls keine Anwendungsmöglichkeit im pädagogisch-didaktischen Kontext erkennbar.

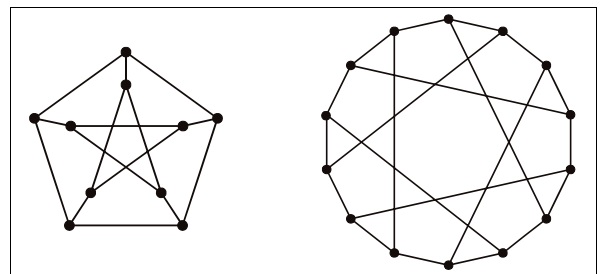


Abb. 21: Petersen-Graph und Heawood-Graph

³⁴ Aus [Lexikon der Mathematik 2000].

³⁵ Vgl. z. B. [Aigner 2004, 147 ff.], [Diestel 2000, 127 ff.] und insbesondere [West 2001, 176 ff.].

³⁶ In *regulären* Graphen haben alle Knoten denselben *Grad* (Grad eines Knotens = Anzahl der mit ihm inzidierenden Kanten). Hat dieser Grad den Wert 3, so ist der Graph *kubisch*. Die in Hararys Definition auftauchende *Taille* eines Graphen ist die kleinste Kantenanzahl aller seiner *Kreise*, also die Länge eines kürzesten Kreises, wobei ein *Kreis* ein geschlossener *Kantenzug* ist, bei dem jeder Knoten und jede Kante genau einmal auftritt. *Kreise* sind also stets *doppelpunktfrei* und auch *mehrfachkantenfrei*. Der *Umfang* eines Graphen ist die größte Kantenanzahl seiner *Kreise*.

2.2 Alltagssprachlicher Bedeutungsumfang von „Netz“

Um eine für den pädagogisch-didaktischen Kontext sinnvolle Definition von „Netz“ und „Netzwerk“ zu entwickeln, ist es hilfreich, der Vielfalt des Bedeutungsumfangs von „Netz“ in der Alltagssprache nachzuspüren. Das liefert eine große Aspektfülle, die sich beispielsweise wie folgt (nicht abschließend) zusammenfassen lässt:³⁷

- Ein *Netz* ... dient dem Fangen und Einfangen, aber auch dem Trennen — ... stellt Zusammengehörigkeit her — ... dient der Verbindung — ... gibt (als Geflecht) Menschen Sicherheit — ... schützt Menschen oder Dinge gegen äußere Angriffe bzw. Feinde — ... hält Menschen oder Dinge zusammen im Sinne von „Sammeln“ — ... verbindet Menschen, Dinge oder Begriffe — ... kann sowohl undurchdringlich als auch durchlässig sein — ... hat Maschen und Knoten — ... ist wegen der Maschen (für hinreichend kleine Objekte) nicht dicht — ... ist (im Gegensatz zu einem Gitter) flexibel und meist leicht — ... zeigt einerseits Zusammenhänge auf und — ... dient andererseits über das Verbinden dem Herstellen von Zusammenhängen — ... vermag „andere“ über seinen „Inhalt“ zu täuschen — ...

Diese Sammlung lässt sich zu folgendem Katalog abstrahierend weiter verdichten:

- Ein *Netz* ... dient einerseits dem *Aufzeigen* von *Verbindungen/Zusammenhängen*,
... dient andererseits dem *Herstellen* von *Verbindungen/Zusammenhängen*,
... kann zwar ein *Gefangensein* bewirken,
... kann aber zugleich *Sicherheit* bzw. *Schutz* bieten,
... enthält dennoch oft *Schlupflöcher*,
... vermag über seinen Inhalt zu *täuschen*.

Dieser Katalog zerfällt aus pädagogischer Sicht in *drei wesentlich unterschiedliche Blöcke*:

- Die *ersten beiden Eigenschaften* betreffen die **Bestandteile** eines Netzes (das sind im pädagogisch-didaktischen Kontext relevante Objekte wie etwa Begriffe, Ideen, Dinge, Lebewesen, ...), die man wie in der Graphentheorie *Knoten* nennen kann und die durch die oben angesprochenen *Verbindungen* bzw. *Zusammenhänge* als *Kanten* verbunden sind.
- Die *nächsten drei Eigenschaften* betreffen die **Benutzer** eines Netzes. Sie bilden wie in einem Gemüsenetz den „Inhalt“ eines Netzes, es sind also hier die mit den Bestandteilen umgehenden Benutzer (z. B. Schülerinnen und Schüler).
- Die *letzte Eigenschaft* (Täuschung über den Inhalt) betrifft die **Betrachter** eines Netzes (z. B. Lehrpersonen, die ihre Schülerinnen und Schüler beim Recherchieren im World Wide Web beobachten).

Eine vierte denkbare Gruppe der *Konstrukteure* eines Netzes scheint verzichtbar zu sein, denn diese können als *Betrachter* auftreten (etwa bei der Kontrolle des von ihnen oder anderen erschaffenen Netzes), aber auch als *Benutzer* (wie z. B. eine Spinne oder ein Servicetechniker), und auch die *Benutzer* eines Netzes können dieses verändern. Auch Veränderungen des Netzes durch externe *Störungen* („Perturbationen“) mögen hiermit (vorläufig) erfasst werden.

Aus pädagogischer Sicht ist ferner zu beachten: Wie bei einem Spinnennetz oder einem Fischernetz können die *Benutzer* „Opfer“ eines Netzes werden oder sein, wenn sie sich z. B. in den „Maschen des Netzes“ verfangen, etwa beim Surfen im WWW. So kann ein Netz für seine Benutzer (schicksalhaft) zum Gefängnis werden, aus dem es sich zu befreien gilt: *Menschliche Benutzer eines Netzes laufen damit Gefahr, zum Bestandteil dieses Netzes zu werden* – wenn sie etwa bei dessen Benutzung nicht hinreichend „emotionale Distanz“ wahren!

³⁷ Vgl. hierzu die ausführliche Analyse und Deutung in [Hischer 2010].

Und weiterhin können menschliche *Benutzer* eines Netzes zu *Betrachtern dieses Netzes* werden und umgekehrt, wobei das Netz diese (und ggf. andere) Gruppen (möglicherweise „durchlässig“) trennt. Die begriffliche *Unterscheidung zwischen Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern* eines Netzes ist also weder scharf noch absolut, sie ist relativ, meint eine *zweckbezogene Tendenz*, und es ist ein *Rollenwechsel* möglich.

2.3 „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext: axiomatisch orientierte Sicht

Im Zuge der Entwicklung einer „Definition“ von „Netz“ stellten sich *zwei strukturelle Entdeckungen* in Bezug auf *Netze im pädagogisch-didaktischen Kontext* heraus:³⁸

- (a) Es ist *unzureichend*, solche „Netze“ nur als Graphen anzusehen, deren Knoten die „Bestandteile“ sind, also z. B. Themen und Inhalte und ihre Beziehungen. Vielmehr sind auch diejenigen Objekte mit einzubeziehen, die mit diesen „Netzen“ umgehen: also die „Benutzer“ und die „Betrachter“.
- (b) Bei der Kennzeichnung solch strukturell erweiterter Netze sind *drei Aspektgruppen* zu berücksichtigen: *Zweck-Aspekte*, *Handlungs-Aspekte* und *Zustands-Aspekte*.

Diese beiden anfangs nicht vorhersehbaren Entdeckungen erweisen sich nachträglich als sachgerecht, denn:

- (a*) Im pädagogisch-didaktischen Kontext sind *Netze nur im Sinne von Graphen uninteressant*, auch wenn sie nur Unterrichtsinhalte betreffen sollten. Denn um deren *Entstehung* und *Veränderung* und den *Umgang* mit ihnen untersuchen zu können, bedarf es sowohl der *Bestandteile* als auch der *Benutzer* und der *Betrachter*.

(b*) *Erstens:*

Wenn es um Netze im pädagogisch-didaktischen Kontext geht, muss mit Bezug auf Bildungsziele stets geklärt werden, welchem *Zweck* solche Netze dienen sollen.

Zweitens: *Handlungen* sind für Pädagogik und Didaktik ohnehin essentiell.

Drittens: Dazu gehört stets auch eine *Änderung von Zuständen*.

Nun liegt es durchaus nahe, den hier „Netz“ genannten Begriff als *n-Tupel* $(B_1, B_2, B_3, R_1, R_2, \dots, O_1, O_2, \dots)$ zu definieren, bestehend aus den Trägermengen B_1 (Bestandteile), B_2 (Benutzer) und B_3 (Betrachter) – jeweils aufgefasst als Knotenmengen –, aus gewissen *binären Relationen* R_1, R_2, \dots und ggf. aus gewissen *Operationen* O_1, O_2, \dots – jeweils aufgefasst als (gerichtete bzw. ungerichtete) Kanten bezüglich dieser Knotenmengen – und all dies wie üblich in Verbindung mit *Verträglichkeitsaxiomen*, die das komplexe „Zusammenspiel“ regeln. Das kann aber in diesem Anfangsstadium nur ein Fernziel sein. Stattdessen soll hier eine „weiche“ axiomatisch orientierte *Beschreibung* von „Netz“ vorgestellt werden, um die mögliche Richtung einer weiteren Entwicklung aufzuzeigen.

Diese Beschreibung hat noch nicht den Status einer Definition, sie wird zunächst nur verbal mittels der drei o. g. Aspekt-Gruppen gegeben: Deren erste, betreffend den *Zweck* eines Netzes, zerfällt in drei „Teilaxiome“, und zwar bezüglich der drei Trägermengen der *Bestandteile*, der *Benutzer* und der *Betrachter*: Jeweils wird formuliert, worin der betreffende Zweck besteht, und zwar in der Form „*Ein Netz bewirkt*“ oder „*Ein Netz bewirkt ggf.*“. Mit dem Zusatz „*ggf.*“ wird dabei zum Ausdruck gebracht, dass im konkreten Einzelfall eines Netzes das mit diesem Zweck beschriebene Ereignis nur *möglich* ist, jedoch *nicht notwendig* eintreten *muss*.

³⁸ Vgl. wiederum die ausführliche Darstellung in [Hischer 2010].

Ein **Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext** ist eine strukturierte Zusammenfassung gedachter oder realer Objekte, die folgenden Aspekten genügt:³⁹

(1) **Zweck-Aspekte**

(1.1) **Verbindungen bzw. Zusammenhänge**

(betrifft die *Bestandteile* eines Netzes):

Ein Netz bewirkt das *Aufzeigen* bzw. das *Herstellen* von Verbindungen bzw. von Zusammenhängen zwischen gedachten bzw. realen Objekten.

(1.2) **Sammeln bzw. Zusammenhalten, aber auch Trennen**

(betrifft primär die *Benutzer* eines Netzes, aber auch die *Betrachter*):

Ein Netz bewirkt das *Einfangen* bzw. *Gefangenhalt*en bzw. die *Verpackung* seiner Benutzer, aber auch die Gewährung von *Sicherheit* bzw. *Schutz* für seine Benutzer, weiterhin auch die (einseitige oder zweiseitige) *Trennung* seiner Benutzer von seinen Betrachtern, ggf. auch der Benutzer(gruppen) unter sich.

(1.3) **Verschleierung**

(betrifft primär die *Betrachter* eines Netzes, aber auch die *Betrachter*):

Ein Netz bewirkt ggf. die *Beschönigung*, *Täuschung* oder *Verführung* seiner „Betrachter“ in Bezug auf die Wahrnehmung seiner Benutzer.

(2) **Handlungs-Aspekte**

(2.1) **„Vernetzen“** (betrifft die *Benutzer* und die *Betrachter* eines Netzes):

gedachte bzw. reale *Objekte als Knoten* eines neuen oder eines noch zu erweiternden Netzes *deuten* bzw. *dazu machen*.

(2.2) **„Vernetzt denken“**

(betrifft primär die *Benutzer* eines Netzes, aber auch die *Betrachter*):

vorhandene *Netze* bei Analysen, Planungen und Entwicklungen nutzen.

(2.3) **„Vernetzend denken“**

(betrifft primär die *Benutzer* eines Netzes, aber auch die *Betrachter*):

Objekte des (eigenen) Denkens bewusst vernetzen oder *als Knoten* eines vorhandenen Netzes *deuten* bzw. *entdecken*.

(3) **Zustands-Aspekte**

(3.1) **„Vernetzt sein“**

(betrifft primär die *Bestandteile* eines Netzes, dann aber auch die *Benutzer*):

Bestandteil (oder *Benutzer*) *eines Netzes sein*

(als *Knoten* mit entsprechenden Verbindungen).

(3.2) **„im Netz sein“**

(betrifft primär die *Benutzer* eines Netzes, dann aber auch die *Betrachter*):

Benutzer eines Netzes sein (z. B.: „ich bin drin“).

2.4 Netzgraphen, Netzwerke, Vernetzung und Verzweigung

Während ein materielles, „greifbares“ Netz mathematisch bei Bedarf oft als *Graph* beschreibbar ist, der aus Kanten und Knoten besteht, scheint dies nach dem hier vorliegenden Ansatz für ein „Netz“ im pädagogisch-didaktischen Kontext unpassend zu sein. Vielmehr liegen zunächst Assoziationen mit dem soziologischen „System“ nahe (bei dem ebenfalls die „Betrachter“ eine wichtige Rolle spielen). Dennoch benötigt man hier den dubiosen Systembegriff wohl nicht:

³⁹ Mit „real“ ist hier „nicht gedacht“ im Sinne von z. B. „materiell“ oder „physisch“ gemeint.

So bieten sich zur strukturellen Beschreibung der *Bestandteile* (den „Knoten“ mit ihren „Verbindungen“, genannt „Kanten“) sog. „einfache“ („mehrfachkantenfreie“) Graphen an, die man sich überlagert bzw. kombiniert denken kann, um auf diese Weise ggf. vorhandene Mehrfachkanten (bei „Multigraphen“) zu erfassen. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich dann bei Bedarf durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass etliche Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Kombination ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Das führt dazu, in einem ersten Schritt *spezielle einfache Graphen* für das *graphentheoretisch „Innerste“ der Netze* (nämlich für ihre *Bestandteile*) axiomatisch zu charakterisieren: Im *idealtypischen Fall* ist dies ein **Netzgraph** als endlicher, zusammenhängender Graph, bei dem jede Kante „Teil einer Masche“ ist, ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat.⁴⁰ In Netzgraphen gibt es dann *zwischen je zwei Knoten stets mindestens zwei verschiedene Wege*. Das sei kurz formal dargestellt, wobei wie üblich ein Graph (\mathbf{V}, \mathbf{E}) die Knotenmenge \mathbf{V} und die Kantenmenge \mathbf{E} hat.

Definition: Es sei (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ein Graph.

(\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist genau dann ein **Netzgraph**, wenn gilt:

- (NG1) (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist *endlich*.
- (NG2) (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist *zusammenhängend*.
- (NG3) Jede Kante aus (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist Teil einer *Masche*.⁴¹
- (NG4) Für alle Knoten P aus (\mathbf{V}, \mathbf{E}) gilt: $\text{Grad}(P) \geq 3$.

Satz: Es sei (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ein Netzgraph. Dann ist (NG3) äquivalent zu:

- (NG5) Zwischen je zwei Knoten gibt es stets verschiedene Wege.

Beweis:

Da ein Graph vorausgesetzt wird (nicht aber ein Multigraph, bei dem zwei Knoten mit mehreren Kanten inzidieren können), sind Maschen aus nur zwei Kanten nicht möglich, jede Masche besteht daher aus mindestens drei Kanten und (als Kreis) auch aus mindestens drei Knoten.

(1) Es sei (NG3) erfüllt.

k sei eine beliebige Kante. Sie ist Teil einer Masche. Man wähle zwei beliebige Knoten P_1, P_2 . Diese mögen zunächst nicht zu der Masche gehören (also „innerhalb“ oder „außerhalb“ liegen, vgl. Abb. 22). Q_1, Q_2 seien zwei beliebige verschiedene Knoten der Masche. Diese existieren, weil Maschen sogar mindestens drei Knoten enthalten. Wegen (NG2) existieren sowohl ein Weg⁴² von P_1 nach Q_1 als auch ein Weg von Q_2 nach P_2 , und in der Masche gibt es zwei verschiedene Wege von Q_1 nach Q_2 , weil sie auch mindestens drei Kanten enthält. Per saldo lassen sich daraus zwei unterschiedliche Wege von P_1 nach P_2 zusammensetzen. Sollte einer der beiden Knoten P_1, P_2 oder sollten sogar beide zur Masche gehören, so funktioniert das Verfahren entsprechend.

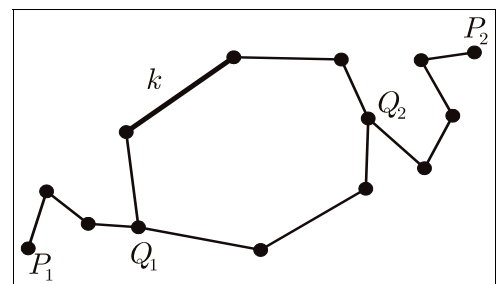


Abb. 22: Zum Beweis (NG3) \Rightarrow (NG5)

⁴⁰ Vgl. die Untersuchungen in [Hischer 2010].

⁴¹ Eine *Masche* ist ein *sehnenerfreier Kreis*.

⁴² Definition „Weg“ auf S. 5.

(2) Es sei (NG5) erfüllt.

Es sei wieder k eine beliebige Kante. Diese Kante möge mit den Knoten P und Q inzidieren (Abb. 23), also $k = PQ$,⁴³ wobei PQ bereits ein (trivialer) Weg von P nach Q ist. Nach Voraussetzung existiert auch ein weiterer, davon verschiedener Weg von P nach Q . Dieser Weg kann die Kante k nicht enthalten. Daher lässt er sich mit dem Weg PQ zu einem Kreis zusammensetzen (Abb. 23).

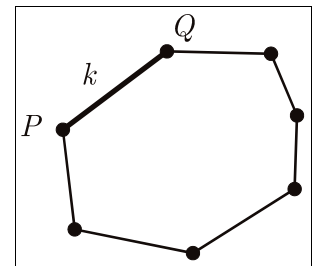


Abb. 23: Zum Beweis (NG5) \Rightarrow (NG3)

Dieser Kreis kann nur endlich viele Sehnen enthalten. Jede dieser Sehnen „zerlegt“ den Kreis in zwei „Teilkreise“, von denen genau einer die Kante k enthält. Diesen Kreis wähle man aus und behandle ihn wie zuvor. In endlich vielen Schritten erhält man schließlich einen sehnenfreien Kreis und damit eine Masche, so dass k Teil dieser Masche ist. ■

Man beachte, dass weder behauptet wird noch bewiesen wurde, dass (NG3) und (NG5) für sich genommen äquivalent sind, sondern dies gilt *nur unter der Voraussetzung*, dass ein Netzgraph vorliegt, das heißt: *Dann* darf (NG3) durch (NG5) ersetzt werden! Betrachten wir aber nun das aus (NG1), (NG2), (NG4) und (NG5) bestehende Axiomensystem, so ist dies nicht unabhängig, denn für jeden Graphen folgt (NG2) stets bereits aus (NG5):

Folgerung: Es sei (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ein Graph.

(\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist genau dann ein Netzgraph, wenn gilt:

(NG1) (\mathbf{V}, \mathbf{E}) ist endlich.

(NG4) Für alle $P \in \mathbf{V}$ gilt: $\text{Grad}(P) \geq 3$.

(NG5) Zwischen je zwei Knoten gibt es stets verschiedene Wege.

Diese Folgerung kann zugleich als *Alternativdefinition für „Netzgraph“* gelesen werden, wobei man bei Bedarf – in inhaltlicher Erweiterung der Definition – auf die Voraussetzung der Endlichkeit verzichten kann. Das Wesentliche eines Netzgraphen besteht daher in den folgenden beiden Eigenschaften:

- Existenz unterschiedlicher Wege zwischen je zwei beliebigen Knoten
- $\text{Grad}(P) \geq 3$ (für alle Knoten P)

Bezeichnungsvorschlag:

Ein **Netzwerk** ist ein endlicher, zusammenhängender,⁴⁴ maschenhaltiger⁴⁵ Graph.

„Netzwerk“ meint hier zunächst das strukturelle Insgesamt der *Bestandteile* bezüglich „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“, was die „Maschenhaltigkeit“ begründet, während „Netzwerk“ für Newman nur ein Graph ist, der in der Netzwerktheorie betrachtet wird (vgl. S. 13). Eine solche Identifikation von „Netzwerk“ und „Graph“ scheint in der „Netzwerktheorie“ (oft unausgesprochen) üblich zu sein. Der hier vorgeschlagenen Auffassung muss man nicht folgen. Hier ist aber jeder Netzgraph ein spezielles Netzwerk, wenn auch nicht umgekehrt.

Darüber hinaus sei bereits angemerkt, dass die Benutzer und die Betrachter jeweils „soziale Netzwerke“ bilden können, die aber nicht maschenhaltig sein müssen (vgl. Abschnitt 4.5).

⁴³ In üblicher Notation für die (in einfachen ungerichteten Graphen) eindeutige Kante zwischen zwei Knoten.

⁴⁴ Auf die Voraussetzung „zusammenhängend“ möge man ggf. verzichten, sie erscheint aber sinnvoll.

⁴⁵ Das soll bedeuten: Er besitzt mindestens eine Masche.

Abb. 24 veranschaulicht exemplarisch einige unterschiedliche Stadien bei schrittweiser Kanten-Reduktion eines anfangs vorliegenden Netzgraphen:

- (a) Netzgraph, ist ideal vernetzt;
- (b) kein Netzgraph, aber ein Netzwerk, jede Kante ist Teil einer Masche, ist noch recht gut vernetzt;
- (c) kein Netzgraph, ist noch ein Netzwerk, ist zusammenhängend, besitzt noch eine Masche, ist schlecht vernetzt;
- (d) besteht aus zwei Komponenten; obere Komponente ist noch ein Netzwerk, ist schlecht vernetzt; untere Komponente ist ein Baum, also kein Netzwerk, nicht vernetzt.

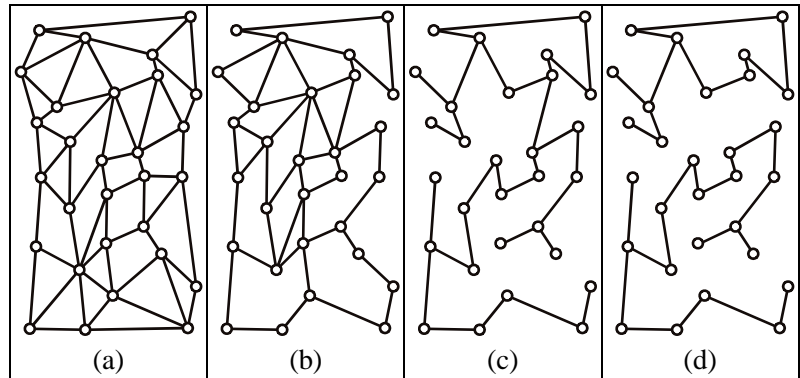


Abb. 24: schrittweise Reduktion eines Netzgraphen

Ein Netzgraph stellt gemäß dieser Auffassung den idealtypischen Fall einer „Vernetzung“ dar, weil jede Kante Teil einer Masche ist, und das bedeutet zugleich, dass je zwei Knoten durch *mindestens zwei verschiedene Wege verbunden* sind. Aber das ist in einem Baum gerade nicht der Fall, denn hier sind diese beiden (gleichwertigen!) All-Eigenschaften nicht erfüllt, genauer sogar: Ein *Baum besitzt sogar keine einzige Masche*, und das bedeutet, dass es keine zwei Knoten gibt, die auf verschiedenen Wegen miteinander verbunden sind!

„Netzgraph“ und „Baum“ sind in diesem Verständnis von „Vernetzung“ *graphentheoretische „Antipoden“*: Jeder Baum ist stets nicht vernetzt, er ist nur „verzweigt“, jeder Netzgraph ist hingegen definitionsgemäß stets „vernetzt“, wobei seine Vernetzung durch neue Kanten ggf. „verbessert“ werden kann, sofern er nicht schon vollständig ist, denn vollständige Graphen sind sogar *optimal vernetzt*. (Zwar könnte man auch in einem vollständigen Graphen weitere Kanten einfügen, aber dann liegt kein Graph mehr vor, sondern ein Multigraph.)

Zunächst sei damit Folgendes definitorisch vereinbart bzw. festgehalten:

- **Verbindung:** Zwei *Knoten* eines Graphen sind genau dann *verbunden*, wenn zwischen ihnen (*mindestens ein Weg*) existiert.⁴⁶
- **Verzweigung:** Ein zusammenhängender *Graph* ist genau dann *verzweigt*, wenn je zwei verschiedene Knoten durch *genau einen Weg* verbunden sind.
- **Starke Vernetzung:** Ein *Graph* ist genau dann *stark vernetzt*, wenn er ein Netzgraph ist.
- **Schwache Vernetzung:** Ein *zusammenhängender Graph* ist genau dann *schwach vernetzt*, wenn er weder verzweigt noch stark vernetzt ist.
- **Vernetzung:** Ein *Graph* ist genau dann *vernetzt*, wenn er entweder schwach vernetzt oder stark vernetzt ist.

Einige **wesentliche Folgerungen** lassen sich wie folgt formulieren:

- Jeder endliche, zusammenhängende Graph ist entweder verzweigt oder vernetzt, d. h.: Für zusammenhängende Graphen bezeichnen „verzweigt“ und „vernetzt“ **kontradiktorische Begriffe**.
- **Jeder Netzgraph** ist (stark) vernetzt, aber **nicht verzweigt**.
- **Jeder Baum** hingegen ist verzweigt, jedoch **nicht vernetzt**.⁴⁷

⁴⁶ Genau in *zusammenhängenden* Graphen sind also *je zwei Knoten verbunden*!

⁴⁷ Ist jede Komponente eines Graphen ein Baum, so ist dieser Graph ein **Wald**. Wälder sind daher im vorliegenden Verständnis nicht vernetzt.

Daraus lässt sich u. a. schließen:

- Wenn je zwei Knoten eines endlichen Graphen verbunden sind (wenn er also zusammenhängend ist), so ist er entweder verzweigt oder vernetzt, es liegt dann **entweder ein Baum oder ein vernetzter Graph** vor.

Konsequenzen mit Blick auf Didaktik und Pädagogik:

Folgende Eigenschaften sind typisch für eine **ideale Vernetzung**:

1. Jeder Knoten hat *einen* „Eingang“ („in-degree“) und mindestens *zwei* „Ausgänge“ („out-degree“).⁴⁸
2. Es gibt stets verschiedene Wege zu einem Ziel – und das ist kennzeichnend für „offenen Unterricht“.
3. Im Falle von „Kleiner-Welt-Vernetzung“ gibt es zudem zu jedem Ziel stets kurze Wege.

Die vorseitigen Kennzeichnungen von „Vernetzung“ sind **qualitative Vernetzungsgradmaße**. Daneben gibt es auch *quantitative Vernetzungsgradmaße*, z. B. den „mittleren Knotenabstand“ oder den „Durchmesser“.

3 Modellierung natürlich wachsender Netzwerke

3.1 Übersicht

„Natürliche“ Netzwerke entstehen i. d. R. nicht planmäßig, sondern unter stochastischen Bedingungen. Die ersten Untersuchungen solcher „Zufallsgraphen“ waren rein graphentheoretischer Natur. Bei dem auf Pál **Erdős** und Alfred **Rényi** (1959) zurückgehenden *ER-Modell* werden *vorhandene Knoten* zufallsbedingt durch Kanten verbunden. Dieses Modell konnte jedoch das Auftreten „Kleiner Welten“, wie man sie z. B. bei der *Erdős-Zahl* oder beim *Kevin-Bacon-Orakel* kennt, nicht erklären. Eine neue Phase in der mathematischen Modellierung „realer“ Netzwerke wurde durch das 1998 von **Watts** und **Strogatz** präsentierte *WS-Modell* eingeleitet: Hier werden *vorhandene Kanten* eines gegebenen regulären Graphen zufallsgesteuert nur „neu verdrahtet“. Damit konnte zwar das Entstehen „Kleiner Welten“ erklärt werden, nicht jedoch das Entstehen von „*Naben*“ in realen Netzwerken: Sehr wenige Knoten des Netzwerks weisen hier einen extrem hohen Grad auf (mit sehr vielen Verbindungen zu anderen Knoten). Daraufhin stellten **Barabási** und **Albert** 1999 alternativ ihr *BA-Modell* vor, das durch *dynamisches Wachstum* und *bevorzugendes Andocken* („rich get(s) richer“) gekennzeichnet ist, denn „reale“ Netzwerke wachsen oft durch Entstehung *sowohl* neuer Kanten *als auch* neuer Knoten. Diese Modelle werden nun kurz beschrieben und in Bezug auf „Kleine Welten“ verglichen.⁴⁹

3.2 Das „ER-Modell“ von Erdős und Rényi (1959)

Es liegt nahe, den mit „Netzwerk“ zusammenhängenden Themenkreis ganz in der Obhut der mathematischen Graphentheorie sehen zu wollen, einer Disziplin, deren Anfänge bereits im „Königsberger Brückenproblem“ (Leonhard Euler) liegen. Die Graphentheorie hat sich anfangs vor allem *regulären Graphen* gewidmet (also Graphen, bei denen alle Knoten denselben Grad haben), worauf Albert und Barabási in ihrer Übersichtsarbeit hinweisen:⁵⁰

⁴⁸ Vgl. S. 12.

⁴⁹ Siehe die ausführliche Beschreibung in [Hischer 2010] und [Newman 2010].

⁵⁰ [Albert & Barabási 2002, 48]; bei einem regulären Graphen haben alle Knoten denselben Grad.

Traditionally the study of complex networks has been the territory of graph theory. While graph theory initially focused on regular graphs, since the 1950s largescale networks with no apparent design principles have been described as random graphs, proposed as the simplest and most straightforward realization of a complex network. Random graphs were first studied by the Hungarian mathematicians Paul Erdős and Alfréd Rényi.



Abb. 25:
Alfred Rényi

„Zufallsgraphen“ bilden offensichtlich einen Kontrast zu regulären Graphen, und sie wurden in der Graphentheorie seit 1959 umfassend untersucht.⁵¹ So wird im *Erdős-Rényi-Modell* ein Zufallsgraph (V, E) dadurch erzeugt, dass bei n vorliegenden Knoten einer bereits gegebenen Knotenmenge V (also $|V| = n$) und gegebener Wahrscheinlichkeit p aus den maximal $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten eines vollständigen Graphen dieser Knotenanzahl rund $\binom{n}{2} \cdot p$ Kanten zufällig ausgewählt werden. Dieses „ER-Modell“ ist zwar mathematisch reizvoll und untersuchenswert, doch hat es sich bezüglich praktischer Anwendungen bei „realen großen Netzen“ als nicht durchgängig tauglich erwiesen, wie Albert und Barabási berichten:⁵²

This model has guided our thinking about complex networks for decades since its introduction. But the growing interest in complex systems has prompted many scientists to reconsider this modeling paradigm and ask a simple question: are the real networks behind such diverse complex systems as the cell or the Internet fundamentally random? Our intuition clearly indicates that complex systems must display some organizing principles, which should be at some level encoded in their topology. But if the topology of these networks indeed deviates from a random graph, we need to develop tools and measurements to capture in quantitative terms the underlying organizing principles.

Als Nachteil des ER-Modells zeigte sich später, dass das Kleine-Welt-Phänomen hiermit nicht erklärbar ist und dass es also schon deshalb für die Untersuchung großer natürlicher Netzwerke nicht taugt. Hinzu kommt, dass es zunächst mangels verfügbarer Datenbanken noch nicht an „realen“ Netzwerken testbar war, was erst seit den 1980er Jahren zunehmend möglich wurde. Seit Ende der 1990er Jahre kam es dann aber zu einer explodierenden Fülle von Untersuchungen und Veröffentlichungen bezüglich der *Abweichung der Topologie realer Netzwerke von derjenigen von Zufallsgraphen* im Sinne des ER-Modells: so in der mathematischen Optimierungstheorie und in der Informatik, dann theoriebildend und damit fundierend insbesondere in der Statistischen Physik (z. B. in der „Perkolationstheorie“ zur Erklärung von „Magnetismus“), und schließlich auch mit Blick auf weitere Anwendungsbereiche wie die Biologie und die Medizin. Insbesondere von der *Soziologie* gingen in den letzten Jahrzehnten *entscheidende Impulse* aus, und *mathematische Methoden* ermöglichten schließlich wesentliche formalisierende Fortschritte.

3.3 Das „WS-Modell“ von Watts und Strogatz (1998)

Duncan J. Watts und sein Doktorvater Steven H. Strogatz entwickelten ihr *Modell zur Simulation des Kleine-Welt-Phänomens*, das beispielsweise anhand von Abb. 27 in seiner einfachsten Form beschreibbar ist:⁵³



Abb. 26: Duncan J. Watts
und Steven H. Strogatz

⁵¹ Vgl. die Initialarbeit [Erdős & Rényi 1959].

⁵² [Albert & Barabási 2002, 48]; mit „random graph“ beziehen sie sich auf das Erdős-Rényi-Modell.

⁵³ Bilder aus [Watts & Strogatz 1998, 441]; „WS-Modell“ wird in [Watts 1999, 33 ff.] und [Watts 1999, 66 ff.] beschrieben.

Links ist hier ein aus 20 Knoten bestehender regulärer Graph G zu sehen, der ein „1-dimensionales Gitter“ darstellt und bei dem jeder Knoten genau 4 Nachbarn (also den „Grad“ 4) hat. Betrachtet man einen aus dieser „Nachbarschaft“ bestehenden *Untergraphen*, so ist erkennbar, dass dieser genau 3 Kanten enthält.

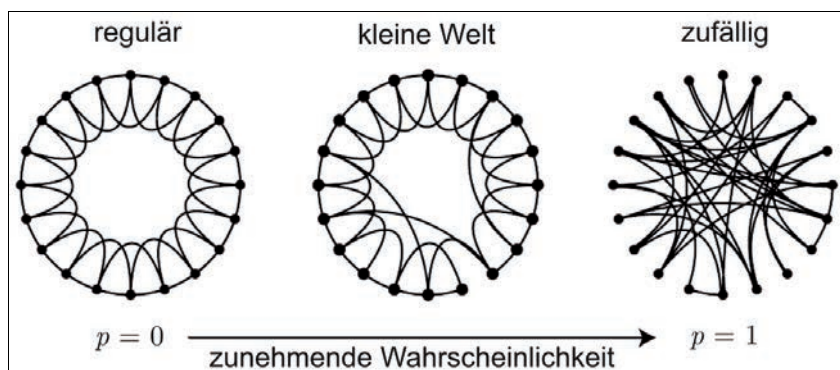


Abb. 27: WS-Modell: Simulation der Entstehung von „Small worlds“

Dieser aus 4 Knoten und 3 Kanten bestehende Untergraph bildet ein „Cluster“, dem noch 3 Kanten fehlen, um ein vollständiger Graph zu sein (er wäre dann ein Tetraeder). Diese 4 Knoten würden dann eine „Clique“ bilden. Der *Clusterkoeffizient* ist ein Maß für die „Cliquenhaftigkeit“ der Nachbarschaft eines Knotens. Er hat genau dann den Wert 1, wenn diese Nachbarschaft eine Clique (d. h.: ein vollständiger Untergraph) ist, und andernfalls ist er kleiner als 1. Der „globale Clusterkoeffizient“ eines Graphen ist der Mittelwert aller „lokalen“ Clusterkoeffizienten. Diese *Cliquenhaftigkeit* lässt sich wie folgt veranschaulichen: Die Knoten stehen z. B. für Menschen, und die Kanten zwischen ihnen symbolisieren die durch sie „verbundenen“ Personen als miteinander „bekannt“. Dann besteht die *Nachbarschaft* zu einer Person P aus *all ihren Bekannten*. Sollten nun auch all diese Bekannten von P untereinander paarweise bekannt sein, so bilden diese auch im Alltagsverständnis eine Clique, und der Clusterkoeffizient von P wäre 1.

Das WS-Modell basiert auf einem Algorithmus zur **Neuverdrahtung** („rewiring“) eines „Gittergraphen“, ⁵⁴ der bewirkt, dass in Abhängigkeit von einem gewählten Wahrscheinlichkeitswert $p \in [0;1]$ ein entsprechender Anteil aller vorhandenen Kanten durch neue, andere Kanten ersetzt wird. Abb. 27 zeigt für den Fall eines eindimensionalen Gitters (hier: ein regulärer Graph mit dem Grad 4) exemplarisch drei Stadien: ganz links das *Stadium größter Ordnung* (alle Kanten des regulären Graphen sind unverändert), und ganz rechts das *Stadium größter Unordnung* (alle Kanten wurden verändert). Dazwischen befindet sich ein *Übergangsstadium*, bei dem nur wenige Kanten verändert wurden. Bei dieser „Neuverdrahtung“ geht zwar die Regularität des Graphen verloren, jedoch bleibt der mittlere Knotengrad erhalten, weil die Knotenanzahl und die Kantenanzahl unverändert bleiben. Dieses Modell untersuchten Watts und Strogatz in Computersimulationen für unterschiedliche „Gitter“, Knotenanzahlen und Knotengrade:

Für jeden Wahrscheinlichkeitswert p lassen sie durch ihr Programm sowohl den *mittleren Knotenabstand* ⁵⁵ L als auch den *Clusterkoeffizienten* C berechnen. Da beide Werte von p abhängen, verwenden Sie die Bezeichnungen $C(p)$ bzw. $L(p)$. Hier liegen nun *Zufallsgraphen anderer Art* als im ER-Modell vor: Sie entstehen nicht durch stochastische Erzeugung neuer Kanten, sondern durch *Neuverdrahtung vorhandener Kanten!* Abb. 28 ⁵⁶ zeigt dazu die auf maximal 1 normierten Werte einer Simulationsreihe in halblogarithmischer Darstellung. Dadurch wird insbesondere der „Anfangsbereich“ (für kleine Werte von p) horizontal „logarithmisch gezoomt“! Stets ist $C(p)/C(0) \leq 1$, und bei $p = 0$ liegt optimale Clusterbildung vor. Bei $p = 1$ ist die Clusterbildung hingegen sehr gering, denn $C(p)$ ist hier nahezu 0 (siehe Abb. 28 rechts).

⁵⁴ In [Watts & Strogatz 1998, 440 f.] und [Watts 1999, 67] ausführlich dargestellt, vgl. auch [Watts 2004, 244 f.] und z. B. die Beschreibung unter: <http://backspaces.net/sun/PLaw/> (28. 11. 2013)

⁵⁵ Vgl. Tabelle 4 auf S. 11.

⁵⁶ Aus [Watts & Strogatz 1998, 441] leicht modifiziert entnommen.

Der *mittlere Knotenabstand* $L(p)$ und der *globale Clusterkoeffizient* $C(p)$ sind *quantitative Vernetzungsgradmaße*:⁵⁷ So bedeuten *höhere Werte von $L(p)$* *schlechtere Durchsuchbarkeit* des Graphen, weil der Weg zwischen zwei beliebigen Knoten „im Mittel“ länger ist als bei Graphen mit geringerem Wert von $L(p)$. In diesem Sinn sind dann die in Abb. 27 ausgewerteten „Zufallsgraphen“ bis etwa $p \approx 0,001$ als „*schlecht vernetzt*“ anzusehen, für größere Werte von p hingegen „*besser bis gut vernetzt*“. Hohe Werte von $C(p)$ zeigen andererseits an, dass es *viele cliquenhafte Cluster* gibt (also Nachbarschaften von Knoten, in denen eine hohe wechselseitige „Bekannschaft“ vorliegt) – sie signalisieren daher quantitativ, dass solche Graphen in diesem Sinne *relativ gut vernetzt* sind. Somit sind die in Abb. 28 ausgewerteten Zufallsgraphen von $p = 0$ bis hin zu etwa $p \approx 0,02$ als „*gut vernetzt*“ anzusehen, für größere Werte von p hingegen als „*schlechter bis sehr schlecht vernetzt*“.

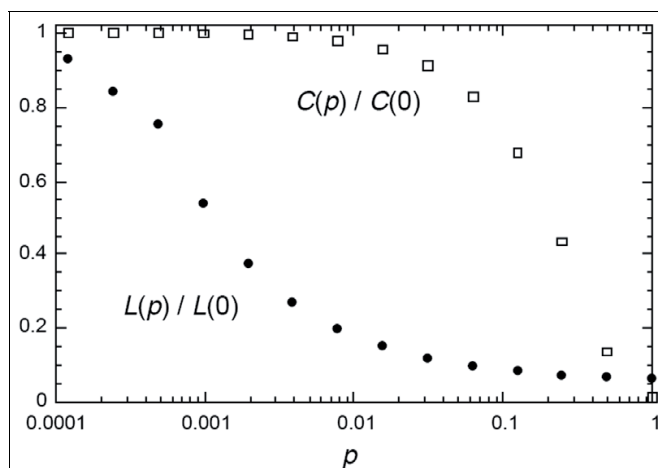


Abb. 28: Simulation des WS-Modells bei 20 Zufallsgraphen mit je 1000 Knoten und 5000 Kanten

Wie sind diese beiden Effekte zu erklären? Die „Neuverdrahtung“ der Kanten führt, ausgehend vom Zustand bei $p = 0$, zum Entstehen von „*Abkürzungen*“, wie sie im mittleren Bild von Abb. 27 zu sehen sind:

- *Mittlerer Knotenabstand*: Durch die „Neuverdrahtung“ bei wachsendem p nimmt nicht nur der Abstand der so direkt *neu verbundenen* Knoten drastisch ab, sondern auch der Abstand zwischen Knoten aus deren Nachbarschaften und den zugehörigen „*iterierten Nachbarschaften*“! $L(p)$ nimmt daher in der Nähe von $p = 0$ bei nur gering wachsendem p *sehr schnell* ab, wie in Abb. 28 zu sehen ist.
- *Clusterkoeffizient*: Diese Abkürzungen führen in der Nähe von $p = 0$ bei nur wenigen Nachbarschaften zum Verlust von internen Kanten, so dass hier insgesamt also zunächst ein nur sehr geringer Effekt bezüglich der Abnahme des Clusterkoeffizienten vorliegt (in Übereinstimmung mit Abb. 28).⁵⁸

Wendet man nun beide Vernetzungsgradmaße *gemeinsam* auf die hier untersuchten Zufallsgraphen an, so erkennt man einen *mittleren Bereich* für p (nämlich etwa von 0,002 bis 0,02), innerhalb dessen diese Graphen hinsichtlich beider Maße als (quantitativ) „*relativ gut vernetzt*“ anzusehen sind.

Und genau dieses *Auftreten eines gemeinsamen Bereiches* eines einerseits relativ geringen mittleren Knotenabstandes und eines relativ hohen Clusterkoeffizienten gilt nun seit [Watts & Strogatz 1998] als **Kennzeichen für das Vorliegen des Kleine-Welt-Phänomens**. Während also damit ursprünglich nur kleine mittlere Knotenabstände gemeint waren, geht es jetzt um die überraschende Beobachtung, dass bei Kleinen Welten in einem großen Bereich zwischen Ordnung und Zufälligkeit kleine mittlere Knotenabstände **gemeinsam** mit großer Cliquenhaftigkeit (und also mit einem hohen Clusterkoeffizienten) auftreten!

⁵⁷ Vgl. Tabelle 4 und S. 12.

⁵⁸ Das ergibt sich auch eindrucksvoll aus der numerischen Darstellung des Clusterkoeffizienten, worauf hier aus Umfangsgründen verzichtet werden muss (vgl. [Hischer 2010, 154 ff.]).

- Da jedoch das in Abschnitt 1.4 beschriebene Potenz-Gesetz mit dem WA-Modell nicht erklärt werden kann, ist diese Modellierung trotz ihres großen Fortschritts gegenüber dem ER-Modell auch noch nicht zufriedenstellend.

3.4 Das „BA-Modell“ von Barabási und Albert (1999)

Die Biologin und Physikerin Réka **Albert** und der Physiker Albert-László **Barabási** motivieren in ihrer umfangreichen Übersichtsarbeit die Begriffsbildung zum zuvor gerade angesprochenen „Clusterkoeffizienten“ mit Blick auf dessen soziologische Wurzeln:⁵⁹

A common property of social networks is that cliques form, representing circles of friends or acquaintances in which every member knows every other member. This inherent tendency to cluster is quantified by the clustering coefficient [...]



Abb. 29: Réka Albert und Albert-László Barabási

Sie suchen (ebenso wie Watts und Strogatz mit deren WS-Modell) nach einer geeigneten Modellierung großer, realer Netzwerke, die eine Erklärung des Kleine-Welt-Phänomens liefert, die aber – im Gegensatz zum WS-Modell – darüber hinaus auch eine Simulation des „Potenzgesetzes“ und damit eine Erklärung der „Skaleninvarianz“ (vgl. Abschnitt 1.4, S. 11 f.) möglich macht. Das von ihnen dazu gemeinsam mit Hawoong **Jeong** 1999 mit Hilfe von Methoden der physikalischen „Mean-Field Theory“ (mit der nur das Verhalten von Mittelwerten betrachtet wird) entwickelte „BA-Modell“ basiert auf einem *grundlegend anderen Ansatz* als beim ER-Modell und beim WS-Modell: Es geht *nicht* von einer *vorhandenen und unveränderten Knotenmenge* aus,

- die durch stochastische *Kantenerzeugung* zu einem „Zufallsgraphen“ zu erweitern ist (wie beim ER-Modell) oder
- bei der die *vorhandenen Kanten* stochastisch nur noch neu „zu verdrahten“ sind (wie beim WS-Modell).

Vielmehr liegt dem BA-Modell die realistische Annahme zugrunde, dass *Netzwerke* „nicht einfach vorhanden sind“, sondern dass sie *entstehen und wachsen*, indem *neue Kanten und neue Knoten hinzukommen*. Das heißt: *Netzwerke „wachsen dynamisch“*, indem neue Kanten an alten oder neuen Knoten gewissermaßen „*andocken*“. Genauer: Beim BA-Modell liegt *nicht nur* eine stochastische *Steuerung* der Netzwerkveränderung vor, *sondern sogar eine Regelung*, die allerdings *Zufallsgraphen ganz anderer Art* liefert: Und zwar wird unterstellt, dass *neue Kanten nicht gleichwahrscheinlich an den verfügbaren Knoten andocken*, sondern dass für dieses Andocken *rückkoppelnd* „reiche“ Knoten bevorzugt werden, die bereits mit herausragend mehr Kanten inzidieren. Dieser „unfaire“ bzw. „ungerechte“ Auswahl-Modus entspricht dem „Verhalten“ in natürlichen Prozessen, wie er schon im *Matthäus-Evangelium* beschrieben wird:⁶⁰

Denn wer da hat, dem wird gegeben werden, und er wird die Fülle haben;
wer aber nicht hat, dem wird auch, was er hat, genommen werden.

Der Wissenschaftssoziologe Robert K. **Merton** sprach deshalb 1968 mit Bezug auf das *Zitierverhalten* bei wissenschaftlichen Publikationen vom „**Matthäus-Effekt**“:⁶¹ Bekannte Autoren erscheinen oft „gläubwürdiger“ als andere und werden daher dann häufiger zitiert als weniger bekannte, was ihren Bekanntheitsgrad (zumindest zunächst) steigert!

⁵⁹ [Albert & Barabási 2002, 49]

⁶⁰ Matthäus-Evangelium 25, 29 (Textfassung aus einer Bibel-Ausgabe von 1914).

⁶¹ [Merton 1968]

Im Alltag beschreibt man den Matthäus-Effekt in Gestalt von „*Reiche werden immer reicher, und Arme werden immer ärmer*“, und in der einschlägigen Fachliteratur heißt es oft „*rich get richer*“ oder „*rich gets richer*“.⁶²

➤ Das **BA-Modell** basiert also auf folgenden **Grundannahmen**:

1. **dynamisches Wachstum** des Graphen bezüglich Knoten *und* Kanten („dynamic grow“)
2. **bevorzugendes Andocken** neuer Kanten an vorhandenen Knoten („preferential attachment“)

Abb. 30⁶³ veranschaulicht die beiden Grundannahmen exemplarisch: die *Simulation* eines solchen Prozesses *aus Wachstum und bevorzugendem Andocken*. Das entstehende Netzwerk enthält zum Schluss 20 Knoten. Zu Beginn liegen drei isolierte Knoten vor, zu denen sich sukzessive 17 weitere wie folgt hinzugesellen: In jedem Schritt wird *ein neuer Knoten* hinzugefügt, gefolgt von *jeweils zwei neuen Kanten*, die nach dem Prinzip des bevorzugenden Andockens (dem sog. **preferential attachment**) mit zwei vorhandenen Knoten inzidieren, die bereits „stärker“ gefragt sind.

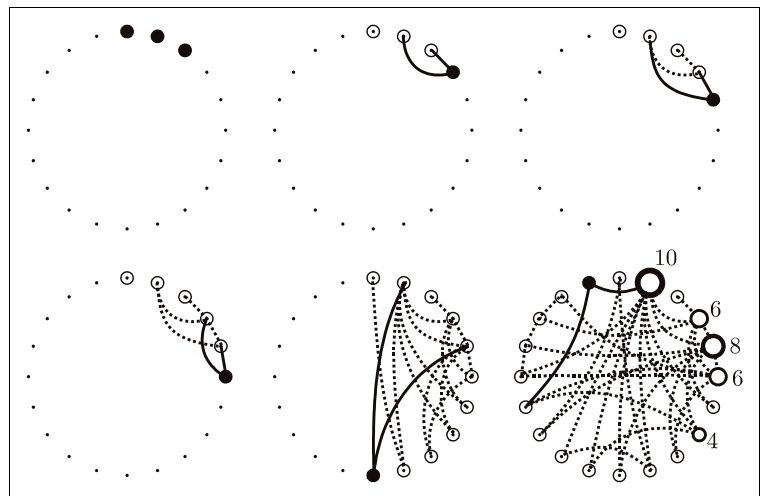


Abb. 30: exemplarische schrittweise Simulation der Netzwerkbildung gemäß BA-Modell

Insgesamt entstehen 34 Kanten, wobei sich unter den 20 Knoten einige „**Naben**“ (englisch: **hubs**) mit besonders hohem Knotengrad herausgebildet haben. Diese Naben sind vor allem bei den früh entstandenen Knoten zu finden, denn: Die neuen Knoten haben scheinbar nur geringe Chancen, zu Naben aufzusteigen („rich get richer“)⁶²!

Aber: Es werden nicht nur „reiche“ Knoten mit neuen Kanten verbunden, sondern auch „arme Schlucker“ wie etwa der „oberste“ Knoten. Die Erklärung ist einfach:

Im konkreten Beispiel von Abb. 30 wird bei jedem Schritt zu den schon vorhandenen n Knoten P_1, \dots, P_n zunächst *ein* weiterer neuer Knoten P_{n+1} hinzugefügt. Zu P_{n+1} sind dann *zwei* Knoten aus P_1, \dots, P_n als „Andock-Knoten“ auszuwählen, und zugleich werden *zwei* neue Kanten erzeugt, die mit diesen beiden Andock-Knoten und mit P_{n+1} inzidieren. Die Auswahl dieser beiden Knoten erfolgt gemäß dem „preferential attachment“ durch eine stochastische Modellierung, welche die „reicheren“ Knoten $P_i \in \{P_1, \dots, P_n\}$ durch einen linearen Ansatz⁶⁴ für die *Auswahlwahrscheinlichkeit* p_i wie folgt bevorzugt bedient, wobei $k_i := \text{Grad}(P_i)$ ist:⁶⁵

⁶² Erstmals [Merton 1968, 7], dann u. a. [Barabási & Albert & Jeong 1999, 181], [Adamic et al. 2001, 7], [Albert & Barabási 2002, 85], [Barabási 2009, 412] und [Newman 2010, 487]. „rich gets richer“ ist die auch zu findende Singularform.

⁶³ Eine eigene Darstellung auf der Basis von <http://backspaces.net/sun/PLaw/> (10. 12. 2013).

⁶⁴ Gemäß der „Mean-Field Theory“ der Statistischen Physik ist das ein „Mittelwert-Feld-Ansatz“, der nur die Mittelwerte der Knotengrade berücksichtigt, nicht aber irgendwelche „individuellen“ Eigenschaften der Knoten.

⁶⁵ [Barabási & Albert 1999, 511], [Barabási & Albert & Jeong 1999, 179].

Mit $K_n := \sum_{i=1}^n k_i$ wird $p_i := k_i/K_n$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gesetzt, also $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Im konkreten Beispiel aus Abb. 30 ist das zwar nicht möglich, weil hier $K_3 = 0$ ist, was sich aber leicht „heilen“ lässt, indem man z. B. $p_i := (k_i+1)/(K_n+n)$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ wählt, wobei dann für große n ersichtlich $p_i \approx k_i/K_n$ gilt, genauer: $p_i \simeq k_i/K_n$ (asymptotisch gleich).

Mit diesem Ansatz wird einer der n „alten“ Knoten $P_j \in \{P_1, \dots, P_n\}$ entsprechend der ihm in diesem Schritt zugeordneten Wahrscheinlichkeit p_j rückkoppelnd (regelnd) zum Andocken der neuen Kante ausgewählt. Durch modifiziertes „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird das auch für den zweiten auszuwählenden Knoten durchgeführt. Damit werden dann auch die „Ärmsten“ im weiteren Auswahlprozess für das Andocken neuer Kanten nicht völlig ausgeschlossen!

Konkret wird das BA-Modell für die Computersimulationen wie folgt ausgelegt:⁶⁶ Es wird von einer zur Startzeit $t_1 = 1$ vorhandenen Knotenanzahl ausgegangen, die mit m_1 bezeichnet sei (in Abb. 30 ist $m_1 = 3$). Zu diskreten Zeitpunkten $t \in \mathbb{N}^*$ kommt jeweils *genau ein* neuer Knoten hinzu, der mit *genau m* vorhandenen Knoten inzidiert, die, ähnlich wie oben beschrieben, stochastisch ausgewählt werden, wobei stets $m \leq m_1$ gilt und (unter vereinfachter Annahme) m konstant ist (in Abb. 30 ist $m = 2$). Die *mathematische Modellanalyse* liefert dann, dass unter diesen Voraussetzungen für die relative Häufigkeit $h(k)$ der Knotengradverteilung von k für große t in Übereinstimmung mit Abschnitt 1.4 exakt das *Potenzgesetz* $h(k) \sim k^{-3}$ gilt.⁶⁷

Abb. 31 zeigt eine weitere, ebenfalls einfache Simulation der Netzwerkentstehung nach dem BA-Modell.⁶⁸ Hier ist wieder $m_1 = 3$, aber $m = 1$. Barabási schreibt hierzu:⁶⁹

The simplest process that can produce scale-free topology was introduced a decade ago [...] and it is illustrated in the top two rows. Starting from three connected nodes (top left), in each image new node (shown as an empty circle) is added to the network. When deciding where to link, new nodes prefer to attach to the more connected nodes, process known as preferential attachment. Thanks to growth and preferential attachment, rich-gets-richer process is observed, which means that the highly connected nodes acquire more links than those that are less connected, leading to the natural emergence of few highly connected hubs. The node size, which was chosen to be proportional to the node’s degree, illustrates the natural emergence of hubs as the largest nodes.

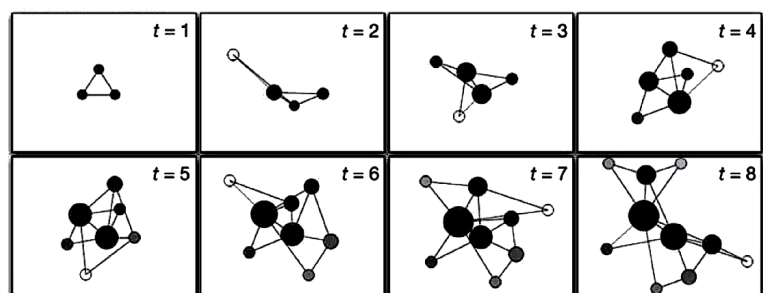


Abb. 31: ein weiteres Simulationsbeispiel zum BA-Modell

Barabási kontrastiert dieses auf dem BA-Modell beruhende *Simulationsergebnis* in Abb. 32 mit einem konkreten *statistischen Ergebnis*, nämlich einem „Zusammenarbeitsgraphen“ publizierender Physiker:⁶⁹

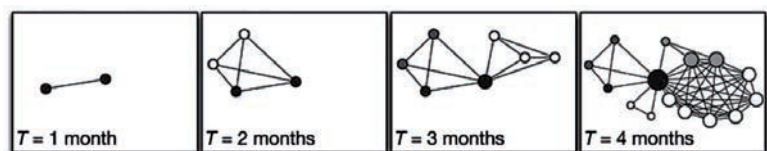


Abb. 32: Zusammenarbeitsgraph von Physikern als Statistik

⁶⁶ [Barabási & Albert 1999, 510], [Barabási & Albert & Jeong 1999, 179 f.].

⁶⁷ Nach [Barabási & Albert 1999, 511], [Barabási & Albert & Jeong 1999, 181] und [Albert & Jeong & Barabási 2000, 379], [Newman 2010, 500 ff.] gibt eine ausführliche Berechnung an. Man vergleiche dieses Ergebnis mit den einführenden exemplarischen Erörterungen auf S. 11 f.

⁶⁸ Aus [Barabási 2009, 412].

⁶⁹ A. a. O.

Illustration of the growth process in the co-authorship network of physicists. Each node corresponds to an individual author, and two nodes are connected if they coauthored a paper together. The four images show the network's growth at 1-month time intervals, indicating how the network expands in time, leading to the emergence of a clear hub. Once again, the node size was chosen to be proportional to the node's degree.

Das BA-Modell vermag also nicht nur die für viele natürliche Netzwerke typische Entstehung Kleiner Welten zu erklären, sondern auch das **Potenzgesetz** (die **Skaleninvarianz**) und die Entstehung von **Naben**.

➤ Die theoretische Analyse zeigt sogar: Ist nur *eine* der beiden *Grundannahmen* nicht erfüllt, dann liegt *keine Skaleninvarianz* vor! ⁷⁰ Damit ist das BA-Modell dem ER-Modell und dem WS-Modell wesentlich überlegen.

Das BA-Modell war zwar ein Durchbruch für das Verständnis der Prozesse bei der Netzwerkentstehung, aber [Newman 2010, 487 ff.] weist darauf hin, dass es dennoch beachtenswerte, weit frühere Vorgänger habe, obwohl Barabási und Albert „ihr“ Modell später unabhängig davon entdeckt hätten:

Derek J. de Solla **Price** publizierte 1965 in *SCIENCE* eine Arbeit über *“Networks of Scientific Papers”*, in der er den Prozess des wissenschaftlichen *Zitierens* mit Hilfe *gerichteter Netzwerke* beschrieb und an dem er empirisch bereits das Potenzgesetz der Knotengradverteilung entdeckt hatte! ⁷¹ Price wollte klären, weshalb hier diese ungewöhnliche Verteilungsfunktion auftritt und griff dazu auf eine Abhandlung aus dem Jahre 1955 von Herbert A. **Simon** mit dem Titel *“On a Class of Skew Distribution Functions”* in der Zeitschrift *BIOMETRIKA* zurück, in der dieser das Auftreten eines solchen Potenzgesetzes bei verschiedenen ökonomischen Datensätzen (ohne Betrachtung von „Netzwerken“) beschrieb, beispielsweise bei der Vermögensentwicklung in der Bevölkerung: ⁷²

Vermögende pflegen ihr Geld gewinnbringend anzulegen und somit eine Rendite zu erwirtschaften, die entsprechend (im Ansatz von Simon proportional) zu ihrer Investition steigt, womit das Prinzip *“rich-get-richer”* und damit der Matthäus-Effekt modelliert wird. Simon wies theoretisch nach, dass die Vermögensverteilung nach diesem Ansatz in Übereinstimmung mit den empirischen Daten tatsächlich einem *Potenzgesetz* folgt.

Newman ⁷² beschreibt die Modellierung durch Price ausführlich und zeigt, dass diese allgemeiner ist als die von Barabási und Albert, die wiederum als Spezialfall von Price's Modellierung erscheint. Zwar basiert das BA-Modell auf ungerichteten Graphen, jedoch lässt es sich leicht auf gerichtete Graphen anwenden. ⁷³ Bei gerichteten Graphen muss zwischen dem „Ausgangs-Grad“ (*“out-degree”*) eines Knotens und seinem „Eingangs-Grad“ (*“in-degree”*) unterschieden werden, was für Zitations-Netzwerke und z. B. das WWW unmittelbar einleuchtend ist: ⁷⁴ Die Anzahl der Verweise von einem WWW-Dokument auf andere muss nicht mit der Anzahl von anderen Dokumenten auf dieses übereinstimmen. Und bei Zitationsnetzwerken kommt die Zeitabhängigkeit des Erscheinens der Publikationen hinzu, denn nur in kuriosen Ausnahmesituationen kann es Verweise von „alten“ Publikationen auf neuere geben. Bei einer mathematischen Modellierung kann man solche „Ausreißer“ sogar strikt ausschließen. Das hat dann zur Folge, dass in Zitationsnetzwerken keine „durchlaufbaren Kreise“ existieren. (Solche Netzwerke bzw. Graphen heißen in der Graphentheorie „azyklisch“.)

⁷⁰ [Barabási & Albert & Jeong 1999, 182 ff.]

⁷¹ [Price 1965] und [Price 1976] mit Untersuchungen zum „citation index“ und Quellenangaben.

⁷² Ausführliche Beschreibung bei [Newman 2010, 486 ff.].

⁷³ Vgl. Abb. 29 – 31: In einem Zitationsnetzwerk verlaufen Kanten von neuen Knoten zu vorhandenen.

⁷⁴ Vgl. Abb. 20 und die zugehörige Kommentierung.

Der Modellierungsansatz von Price führt in Übereinstimmung mit empirischen Daten zu einer geschlossenen Lösung derart, dass sich bei der Zitation von Publikationen für die Knotengradverteilung $h(q)$ des „in-degree“ q ein Potenzgesetz der Gestalt $h(q) \sim q^{-\gamma}$ mit $\gamma > 2$, $\gamma \approx 3$ ergibt. Und für das BA-Modell (als Spezialfall aus dem Price-Modell) folgt auch hier wieder exakt $\gamma = 3$ (s. o.), wobei „in-degree“ und „out-degree“ dann übereinstimmen.

3.5 Ausfallverhalten von Netzwerken: Fehlertoleranz und Stabilität

Interessant ist in Abb. 32, dass bis auf die große „Nabe“ die anderen drei Physiker der ersten beiden Phasen am Ende keine Rolle mehr spielen und dass zwei spät hinzugekommene Knoten zu Naben werden. Wie kommt das?

Zunächst zeigt uns dieses Beispiel, dass auch das BA-Modell in seiner vorgestellten Form die „Realität“ formal noch nicht vollständig erfasst. Denn was geschieht in der Praxis, z. B. beim Zitieren von wissenschaftlichen Arbeiten? So wird eine „bahnbrechende Arbeit“ in aller Regel zunächst in vielen Nachfolgearbeiten anderer Autoren zitiert und wird damit zu einer Nabe. Der Zusammenarbeitsgraph wächst aber ständig weiter, und bald sind die wesentlichen Ideen der „Ursprungsarbeit“ zum Allgemeingut innerhalb der betreffenden wissenschaftlichen Community geworden, so dass diese Arbeit nicht mehr zitiert wird, sondern allenfalls (vor allem anfangs) noch mit bestimmten Namen in Verbindung gebracht wird. Solche Naben wachsen dann nicht mehr und können sogar von anderen, später entstandenen „überholt“ werden.

„Reale“ Netzwerke verändern sich aber nicht nur dadurch, dass neue Knoten hinzukommen, sondern auch wegfallen, so beispielsweise in den sog. „Freundschaftsnetzwerken“, ⁷⁵ wenn etwa Mitglieder ausscheiden oder sterben, ferner in den (natürlichen) „neuronalen Netzen“ des Gehirns, wenn Neuronen oder Axone ausfallen, oder in Netzwerken von Flugverbindungen, wenn einzelne Flughäfen geschlossen werden. Hierauf ist das BA-Modell vom Ansatz her nicht ausgelegt, um solche Prozesse zu beschreiben. Und es ist anzumerken, dass die für Simulationen bequeme und auch nützliche Voraussetzung, dass „ m konstant“ sei, ⁷⁶ eine nicht unerhebliche und nicht praxisgerechte Einschränkung ist.

Weiterhin können offenbar nicht nur einzelne *Knoten* wegfallen, sondern es können auch *Verbindungen* ohne Löschung von Knoten wegfallen, wenn etwa eine Freundschaft aufgekündigt oder eine Flughafenverbindung eingestellt wird. So sind alle bisher vorgestellten Netzwerk-Modelle in ihrer Genese zwar geeignet, um das Verständnis vom Aufbau und dem Funktionieren von Netzwerken zu vertiefen, jedoch müssen sie evtl. im konkreten Fall auf die jeweilige Situation angepasst bzw. weiter verändert werden.

Die Entstehungs- und Veränderungsprozesse „realer“ Netzwerke (der *Bestandteile* des Netzes) haben externe Ursachen, die im Konzept von „Netz“ ⁷⁷ als Störungen (Perturbationen ⁷⁸) vor allem auf die *Benutzer* oder die *Betrachter* zurückgehen und also denen zu „verdanken“ oder „anzulasten“ sind. Die *Auswirkungen* sind mit geeigneten Vernetzungsgradmaßen als sog. „Netzwerkstatistiken“ *messbar*. ⁷⁹ Und so entsteht die Frage, welche Einwirkungen ggf. zu einer *kritischen Veränderung* eines Netzwerks führen können, und zwar derart, dass ein wichtiges Vernetzungsgradmaß *wesentlich* in dem Sinne geändert wird, dass dieses Netzwerk *instabil* wird:

⁷⁵ Dies sind Beispiele für „soziale Netzwerke“, vgl. hierzu Abschnitt 4.5.

⁷⁶ Vgl. die Prozessbeschreibung auf der vorigen Seite.

⁷⁷ Vgl. Abschnitt 2.3.

⁷⁸ Vgl. S. 15; nach Maturana und Varela („Baum der Erkenntnis“) sind Perturbationen „wahrgenommene Störungen“.

⁷⁹ Vgl. Abschnitt 1.4.

In der Praxis auftretende wichtige Netzwerke sind beispielsweise *Energieversorgungsnetze* (*Knoten*: Kraftwerke und Umspannungsstationen; *Kanten*: Überlandleitungen und Leitungen zu den Verbrauchern), das *Internet* als *ungerichteter Graph* (*Knoten*: Router, Server, persönliche Endgeräte; *Kanten*: Datenleitungen unterschiedlichen Typs wie z. B. Kabel und Funk) und das *World Wide Web* (WWW) als *gerichteter Graph* (*Knoten*: Dokumente unterschiedlichen Typs; *gerichtete Kanten*: Verweise von einem Dokument auf ein anderes).

Mit Blick auf das einwandfreie Funktionieren solcher Netzwerke tauchen brisante Fragen auf wie z. B.: Welche und wie viele *Kanten* dürfen in einem Energieversorgungsnetz ausfallen, damit es noch „akzeptabel“ funktioniert? Und analog: Welche und wie viele *Knoten* dürfen in einem Energieversorgungsnetz ausfallen? Ganz entsprechend kann man diese Fragen für das Internet, das WWW und letztlich für jedes Netzwerk stellen! Anders gefragt: Gibt es in einem konkreten Netzwerk typische „Schwellen“, „jenseits“ derer es (in einem zu definierenden Sinn) *instabil* wird? Welche „*Fehlertoleranzen*“ haben konkrete Netzwerke?

Für „reale große Netzwerke“ – wie beispielsweise die oben genannten – können derartige Fragen nicht immer quantitativ untersucht werden, und schon gar nicht immer ohne weiteres empirisch-experimentell, weil die jeweiligen „Verbraucher“ künstlich herbeigerufene Netzwerkängel gewiss nicht begrüßen würden. Hier *sind* meist *Modelle* zur *Simulation* solcher „Schadenssituationen“ erforderlich. Die Physiker Réka Albert, Albert-László Barabási und Hawoong Jeong sind in diesem Sinne vorgegangen und haben ihren Simulationen zwei extrem unterschiedliche Netzwerkmodelle zugrunde gelegt, nämlich das ER-Modell und das BA-Modell.

Bei vollständigen Graphen (bei denen jeder Knoten mit jedem anderen durch genau eine Kante verbunden ist) ist zu erwarten, dass nach Löschung weniger zufällig ausgewählter Kanten im „Restgraphen“ jeder Knoten mit jedem anderen noch durch einen Weg verbunden ist, so dass dieser also weiterhin zusammenhängend ist. Solche Kanten sind dann im Sinn der Funktionalität eines Netzwerks „redundant“. In Netzgraphen ist Ähnliches zu erwarten, weil hier je zwei Knoten *zunächst* durch mindestens zwei Wege verbunden sind: Löschung „nicht zu vieler“ zufällig ausgewählter Kanten wird die „Funktionalität“ eines solchen Netzwerkes dann vermutlich noch nicht beeinträchtigen. Auch diese Kanten sind „redundant“.

Ein „reales großes“ (zusammenhängendes) Netzwerk wird aber nicht notwendig ein Netzgraph sein, geschweige denn ein vollständiger Graph. Dennoch kann es durchaus eine Kleine Welt darstellen, sodass zwei beliebige Knoten aufgrund hinreichend vieler zusätzlicher Direktverbindungen bzw. der Verfügbarkeit von Naben einen relativ geringen mittleren Knotenabstand aufweisen. Könnten dann diesbezüglich evtl. auch solche Kanten „redundant“ sein?

Die Simulationsergebnisse von [Albert & Jeong & Barabási 2000] zeigen nun, dass Zufallsnetzwerke, die mit dem ER-Modell beschreibbar sind *oder* die mit dem WS-Modell beschreibbar sind, nicht automatisch hinreichend fehlertolerant sind: Sie müssen darüber hinaus *skaleninvariant*⁸⁰ sein – und das trifft auf Netzwerke zu, die mit dem BA-Modell beschreibbar sind. So untersuchten die Autoren anhand der beiden unterschiedlichen Netzwerkmodelle für nicht skaleninvariante Netzwerke (nur beim ER-Modell) den Einfluss von lokalen Ausfällen („*errors and attacks*“) einzelner Bestandteile auf die Funktionalität der „Restnetzwerke“. Dabei betrachteten sie den **ursächlichen Ausfall einzelner Knoten** (der den Ausfall inzidierender Kanten nach sich zieht). Als *quantitatives Maß für die Vernetztheit* der jeweiligen Netzwerke, also als deren *Vernetzungsgradmaß*, legten sie den *mittleren Knotenabstand*⁸¹ zugrunde (den sie allerdings im Gegensatz zur graphentheoretischen Terminologie „Durchmesser“ nennen):

⁸⁰ Vgl. S. 11, ferner S. 28 zum Wegfall einer der beiden Grundannahmen beim BA-Modell.

⁸¹ Vgl. S. 8, 21, 24.

Ist \mathbf{G} das zu untersuchende Netzwerk mit $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ ⁸², so wird in der Simulation ein Anteil f (*fraction*) von zufällig ausgewählten Knoten aus \mathbf{V} entfernt, so dass ein Graph $\mathbf{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ mit $|\mathbf{V}'|/|\mathbf{V}| \approx f$ entsteht, und es wird die Abhängigkeit des mittleren Knotenabstands $L(\mathbf{G}')$ von f untersucht, also $f \mapsto L(\mathbf{G}')$ mit $L(\mathbf{G}') =: \ell(f)$. Dabei ist $\ell(0)$ der mittlere Knotenabstand $L(\mathbf{G})$ in \mathbf{G} .

Diese Abhängigkeit wird getrennt für die Fälle „zufälliger Ausfall von Knoten“ („**failure**“) und „gezielte Zerstörung von Knoten“ („**attack**“) betrachtet. Der erste Fall beschreibt das „Fehlerverhalten“ (Abb. 33), der zweite das „Angriffsverhalten“ (Abb. 34), und mit „**Ausfallverhalten**“ sei hier beides zusammen bezeichnet. In [Albert & Jeong & Barabási 2000, 379 f.] werden dann folgende Ergebnisse vorgestellt:

Den in Abb. 33 und Abb. 34 dargestellten *Simulationen*⁸³ legen die Autoren Netzwerke zugrunde, die jeweils aus 10.000 Knoten und 20.000 Kanten bestehen (und damit also den mittleren Knotengrad $\langle k \rangle = 4$ haben⁸⁴) und die als *Zufallsnetzwerke* entweder nach dem ER-Modell oder dem BA-Modell erzeugt worden sind. Es wird dann jeweils sowohl deren *Fehlerverhalten* als auch deren *Angriffsverhalten* untersucht.

Beim **Fehlerverhalten** (Abb. 33) ist zu erwarten, dass der Ausfall einzelner Knoten (und in der Folge davon auch einzelner Kanten) zwar nirgends zu einer Verkleinerung der Knotenabstände führt, wohl aber zu einer Vergrößerung des Abstandes einiger verbleibender Knoten und damit zu einer Vergrößerung des mittleren Knotenabstands $L(\mathbf{G}')$ gegenüber $L(\mathbf{G})$. Da diese Veränderung durch den Anteil f als Parameter verursacht wird, müsste der Funktionsgraph von $f \mapsto \ell(f)$ monoton steigen. Das ist beim ER-Modell im dargestellten Intervall $[0; 0,05]$ für f auch tatsächlich von Anfang an der Fall (der Verlauf ähnelt einem „linearen“ Anstieg), hingegen ist $\ell(f)$ in diesem Intervall beim BA-Modell nahezu konstant. Und so liefert die Simulation:

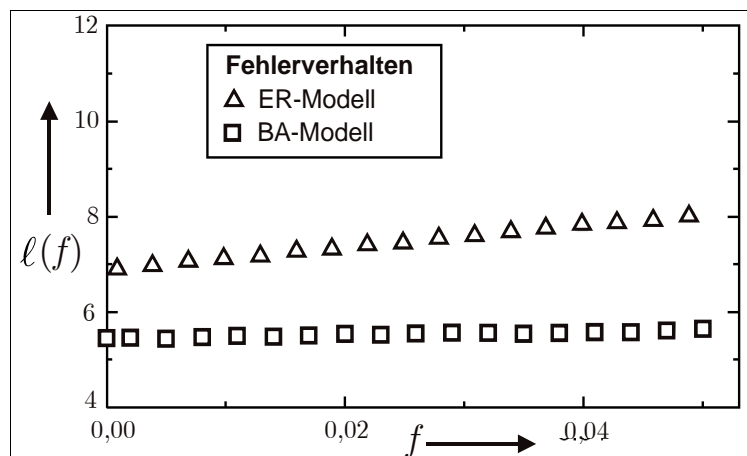


Abb. 33: Abhängigkeit des mittleren Knotenabstands $\ell(f)$ in Netzwerken beim ER-Modell und beim BA-Modell gegenüber dem stochastischen Ausfall eines prozentualen Anteils f aller Knoten

Werden bei Netzwerken, deren Entstehung auf dem BA-Modell beruht, bis zu etwa 5% zufällig ausgewählter Knoten entfernt, so scheint dies ohne Auswirkung auf die Funktionalität dieser Netzwerke zu sein, wenn als „Maß“ dafür der mittlere Knotenabstand genommen wird. Warum ist das so?

Die „stark verlinkten“ Naben werden im *Zufallsprozess* der Knotenlöschung gleichwahrscheinlich wie die „schwach verlinkten“ anderen ausgewählt, und falls es von den erstgenannten nur sehr wenige gibt, ist „anfangs“ (wie hier bei $f \leq 5\%$) noch keine Wirkung in Bezug auf eine Änderung des mittleren Knotenabstand feststellbar.

⁸² Vgl. S. 18.

⁸³ Abbildungen auf der Basis von [Albert & Jeong & Barabási 2000, 379] erstellt.

⁸⁴ $\langle k \rangle$ ist die in der Physik übliche Bezeichnung für den (arithmetischen) Mittelwert der mit k bezeichneten Größe.

Beim **Angriffsverhalten** (Abb. 34) wird man hingegen erwarten, dass im „Angriffsfall“ (also beim gezielten Löschen von stark verlinkten Knoten, die es ja im BA-Modell gibt) ein anderes Verhalten vorliegt:

So ist bei der Simulation des ER-Modells in Abb. 34 keine wesentliche Änderung gegenüber dem Fehlerverhalten in Abb. 33 erkennbar. Das ist plausibel, weil bei derartigen Zufallsnetzwerken alle Knoten nahezu denselben Grad haben. Hingegen bewirkt das gezielte Löschen von Naben beim BA-Modell von Anfang an eine geradezu dramatische Zunahme des mittleren Knotenabstands.

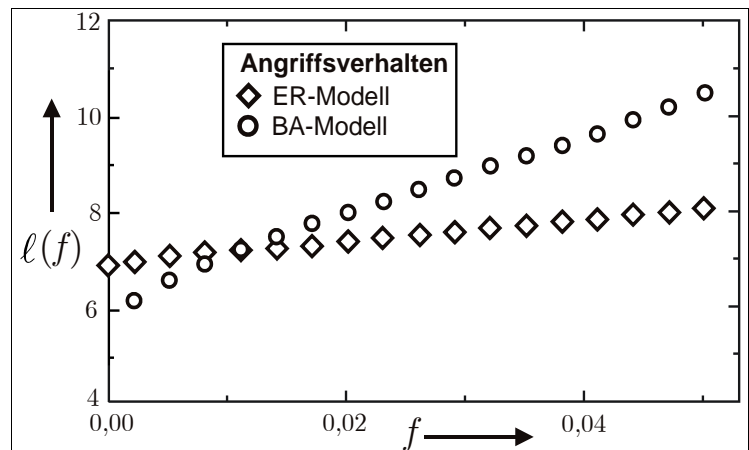


Abb. 34: Abhängigkeit des mittleren Knotenabstands $\ell(f)$ in Netzwerken beim ER-Modell und beim BA-Modell gegenüber dem gezielten Löschen von Naben (als einem prozentualen Anteil f aller Knoten)

Es stellt sich nun die Frage, inwieweit diese Simulationsergebnisse „reale Netzwerke“ korrekt betreffen. Auch ohne solche Schadenssituationen als „Netzwerkängel“ künstlich erzeugen zu müssen, konnten die Autoren dieses überprüfen, weil sie damals auf Daten des „*National Laboratory for Applied Network Research (NLANR) Project*“ zurückgreifen konnten.⁸⁶

Abb. 35⁸⁷ zeigt demgemäß in Analogie zu Abb. 33 und Abb. 34 statistische Auswertungen sowohl für das Internet (mit 6.209 Knoten und 12.200 Kanten, also $\langle k \rangle = 3,4$) als auch für das World Wide Web (mit 325.729 Knoten und 1.498.353 Kanten, also $\langle k \rangle = 4,59$), die beide eindrucksvoll bestätigen, dass das BA-Modell diese beiden recht unterschiedlichen Netzwerke adäquat simuliert:

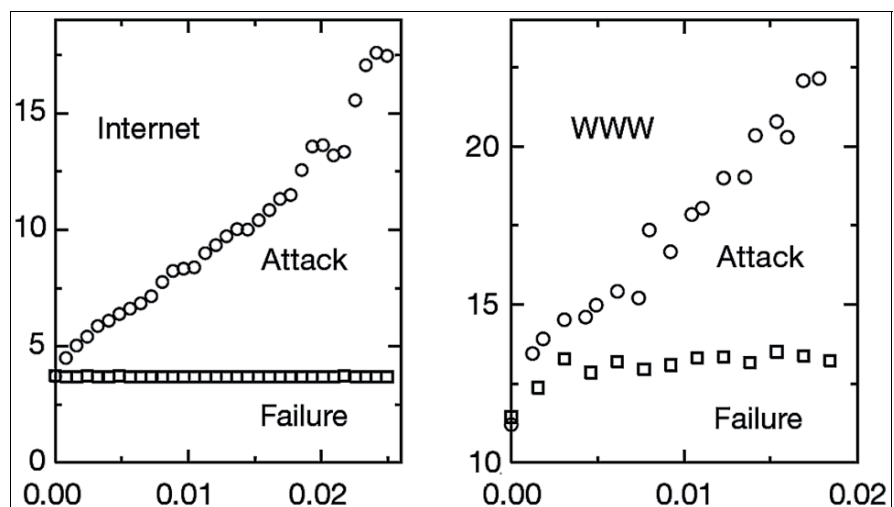


Abb. 35: Internet und World Wide Web: empirisch erhobenes Fehlerverhalten („failure“) und Angriffsverhalten („attack“)

⁸⁵ Allerdings ist anzumerken, dass man beim ER-Modell nicht von „Naben“ sprechen kann, die ohne das Prinzip „rich get richer“ gar nicht „vorgesehen“ sind, aber man kann ersatzweise Knoten mit höherem Knotengrad wählen. Vermutlich sind die Autoren bei ihren Simulationen so vorgegangen, sie machen aber dazu keine Angaben.

⁸⁶ Die in [Albert & Jeong & Barabási 2000] angegebene Adresse <http://moat.nlanr.net/ Routing/rawdata/> gilt mittlerweile nicht mehr, denn das NLANR wurde am 30. 06. 2006 geschlossen, und die Nachfolgeorganisation CAIDA hat ihren Service für nlanr.net im Mai 2009 eingestellt. Auch die am 29. 03. 2010 noch verfügbare Ersatzadresse <http://moat.nlanr.net> wird nicht mehr gepflegt, allerdings findet man dort Hinweise auf neue Archive. (11. 12. 2013)

⁸⁷ Aus [Albert & Jeong & Barabási 2000, 379].

Man beobachtet eine *geringe Anfälligkeit gegenüber stochastischen Ausfällen* einzelner Knoten, jedoch eine *dramatische Anfälligkeit gegenüber gezielten Angriffen auf Naben*. Netzwerke, deren Entstehung mit dem BA-Modell beschreibbar ist, sind daher *in hohem Maße verletzlich gegenüber gezielten Attacken*. Zugleich kann das z. B. pharmakologisch vorteilhaft bei der Bekämpfung von Erregern (die als Naben auftreten) genutzt werden:

[...] attack survivability: the diameter of these networks increases rapidly and they break into many isolated fragments when the most connected nodes are targeted. Such decreased attack survivability is useful for drug design, but it is less encouraging for communication systems, such as the Internet or the WWW. Although it is generally thought that attacks on networks with distributed resource management are less successful, our results indicate otherwise. The topological weaknesses of the current communication networks, rooted in their inhomogeneous connectivity distribution, seriously reduce their attack survivability. [...] ⁸⁸

3.6 Zusammenfassung

Das WS-Modell bietet gegenüber dem ER-Modell eine wesentliche Verbesserung der Simulationsmöglichkeit „realer“ Netzwerke und dessen Verständnis, weil damit das **Kleine-Welt-Phänomen** erklärbar wird. Es liefert aber noch keine Erklärung für die bei realen Netzwerken oft zu beobachtende **Skaleninvarianz** und das damit zusammenhängende **Potenzgesetz**. Jedoch wird beides vom BA-Modell geleistet, welches im Gegensatz sowohl zum ER-Modell als auch zum WS-Modell nicht von einer konstanten Knotenanzahl ausgeht, sondern vielmehr in speziell modellierender Weise ein **dynamisches Wachstum** realer Netzwerke bezüglich der Knotenanzahl *und* der Kantenanzahl berücksichtigt. Sogar der beim empirisch beobachteten Potenzgesetz auftretende Exponent γ wird in der theoretisch-analytischen Auswertung des BA-Modells in seiner Größenordnung bestätigt.

Als besonders erfolgreich muss bei diesem Modell der (auf Price zurückgehende) Ansatz des „**preferential attachment**“ gelten, mit dem das Prinzip des „rich get(s) richer“ und damit der „Matthäus-Effekt“ erfasst wird. Dieser Ansatz führt in den Simulationen des Modells zur Entstehung von **Naben**, die einerseits bei „realen“ Netzwerken tatsächlich auftreten und die andererseits zu einem besseren Verständnis des Kleine-Welt-Phänomens beitragen können. Und obwohl das BA-Modell im Ansatz das faktisch mögliche Schrumpfen von Netzwerken nicht explizit berücksichtigt, wird das in bestimmten Netzwerken auftretende **Ausfallverhalten** auch in Simulationen eindrucksvoll bestätigt.

Naben sind in gewissem Sinn „Mittelpunkte“ in ihrem zugehörigen Netzwerk, weil sie einen sehr kleinen mittleren Abstand zu den anderen Knoten aufweisen. Sie treten auch in den eingangs vorgestellten Zusammenarbeitsgraphen auf. So ist beispielsweise Kevin Bacon im Akteursgraphen eine Nabe, also ein „Mittelpunkt“ mit der Bacon-Zahl von aktuell etwa 3,00 als mittlerem Abstand zu den anderen Akteuren. Aber Patrick Reynolds teilt auf der von ihm gepflegten Website oracleofbacon.org mit, dass er im Stande von April 2013 insgesamt 369 Akteure gefunden habe, die ein „besserer Mittelpunkt“ als Bacon seien, beispielsweise Sean Connery mit dem mittleren Abstand 2,937 zu den anderen Akteuren (so gibt es also auch eine „Connery-Zahl“). All diese Akteure sind ebenfalls Naben in diesem Zusammenarbeitsgraphen. ⁸⁹ Auch der Erdős-Graph enthält Naben: In dem in Abb. 10 dargestellten Teilgraphen identifiziert man hier neben Erdős z. B. Graham, Harary und Straus (Mitte oben).

⁸⁸ [Albert & Jeong & Barabási 2000, 381]

⁸⁹ Diese Website enthält übrigens auch die Option „Center of the Hollywood Universe“, mit der man jeden Akteur auf seinen mittleren Abstand zu den anderen überprüfen kann.

4 Zum „diskreten Potential“ für Didaktik, Unterricht und Pädagogik

4.1 Vorbemerkung

Das Kleine-Welt-Phänomen wird in der Netzwerktheorie transdisziplinär untersucht und hat maßgeblich zu deren Entwicklung beigetragen, andererseits gehört es aus graphentheoretischer Sicht zur „Diskreten Mathematik“, die zu den Grundlagengebieten der Informatik gehört und sich zu einem „Brückengebiet“ zwischen Mathematik und Informatik entwickelt hat, wobei die Graphentheorie ursprünglich ein rein innermathematisches Gebiet war und nunmehr als Teil der Diskreten Mathematik wichtige außermathematische Anwendungsmöglichkeiten bietet.

Insofern soll in diesem Abschnitt angedeutet werden, dass sowohl das Kleine-Welt-Phänomen als auch das korrelierende graphentheoretische bzw. netzwerktheoretische Umfeld ein Potential einerseits für Anwendungen in der Didaktik der Mathematik als Unterrichtswissenschaft und andererseits darüber hinaus auch für inhaltliche Aspekte des Mathematikunterrichts und schließlich auch fachübergreifend für schulpädagogische Aspekte besitzt. Und weil all dies sich auf die Diskrete Mathematik stützt, sei es plakativ „diskretes Potential“ genannt.⁹⁰

4.2 Vernetzung, Kleine Welten und Mathematikdidaktik: Grundsätzliches

Aus fachübergreifender Sicht ist die Didaktik (früher „Allgemeine Didaktik“ genannt)

1. die *Wissenschaft vom Lehren und Lernen*,
2. die *Theorie und Wissenschaft vom Unterricht*,
3. die *Theorie der Bildungsinhalte*,
4. die *Theorie der Steuerung von Lernprozessen* und
5. die *Anwendung psychologischer Lehr- und Lerntheorien*.⁹¹

Die „Didaktik der Mathematik“ (kurz: Mathematikdidaktik) untersucht als „Fachdidaktik“ derartige Gegenstandsbereiche der Didaktik mit Blick auf die Gestaltung und Beobachtung des Mathematikunterrichts, und zwar innerhalb eines Gesamtkonzepts von Allgemeinbildung. Da in der aktuellen Mathematikdidaktik z. B. bezüglich der Unterrichtsinhalte oft und gerne von deren „Vernetzung“ und dann von einem „vernetzenden Unterricht“ gesprochen wird, soll angedeutet werden, welches „diskrete Potential“ eine sog. „Vernetzung“ entfalten kann, wenn das hier vorgeschlagene Konzept von „Netz“ und das Kleine-Welt-Phänomen herangezogen werden.

Geht man der Frage nach, was denn wohl einen „vernetzenden Unterricht“ ausmacht oder ausmachen soll, so entsteht sogleich die weitere Frage, wer oder was denn hier von wem und wie vernetzt werden soll. So wird man vielleicht geneigt sein, primär an Unterrichtsinhalte zu denken, die zu „vernetzen sind“ – aber soll nun diese Vernetzung von den Schülerinnen und Schülern oder von den Lehrpersonen oder von sonst jemandem vorgenommen werden – oder gar von allen mit je eigenen Aufgaben und Beiträgen?

Das führt zur *Struktur von „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“* mit den Trägermengen der *Bestandteile*, der *Benutzer* und der *Betrachter*. Dazu gehören die drei *Zweckaspekte*, die drei *Handlungsaspekte* und die beiden *Zustandsaspekte*.⁹² Dabei ist zu beachten, dass „Vernetzung“ durchaus *doppeldeutig* ist, weil darunter situativ sowohl ein *Produkt* (also ein *Zustand*, z. B. das *Vernetzt-Sein*) als auch ein *Prozess* (hier im Sinne einer *Handlung*, dem *Vernetzen*) zu verstehen ist.

⁹⁰ Vgl. das dieser Studie zugrundeliegende Vortragsthema lautete (vgl. Fußnote 1).

⁹¹ [Kron 2000, 43]

⁹² Vgl. S. 17.

„Vernetzender Unterricht“ meint dann das *Vernetzen* als Handlung bzw. als Prozess im Unterricht, an dessen Ende (oder dem einer Phase bzw. einer Etappe) eine Vernetzung von irgendetwas (im Sinne eines neuen Zustands bzw. Produkts) stehen soll. Das ist zunächst ein Zweck, möglicherweise aber auch ein *Unterrichtsziel*.

Der neue *Zustand* betrifft gemäß den beiden Zustandsaspekten sowohl das *Vernetzt-Sein* als auch das *Im-Netz-Sein*:

Das *Vernetzt-Sein* bezieht sich in einem ersten Ansatz auf die *Bestandteile* des Netzes, die als *Knoten* eines Netzwerks aufgefasst werden können, und das betrifft in vereinfachter Betrachtung gewiss auch *Unterrichtsinhalte*. Dazu gehören *Kanten* als strukturierende Verbindungen bzw. Beziehungen zwischen diesen Knoten. Mit diesem auf die *Bestandteile* des Netzes bezogenen *Vernetzt-Sein* wird bereits ein nahe liegendes bzw. vordergründiges Ziel eines „vernetzenden Unterrichts“ angesprochen.

Das *Im-Netz-Sein* bezieht sich hingegen primär auf die *Benutzer* des Netzes, womit zunächst und beispielsweise an die Schülerinnen und Schüler gedacht werden kann (im Sinne von „ich bin drin“): Sie sind die „Adressaten“ des Unterrichts als *lernende und zu bildende und sich selbst bildende Subjekte*. Damit wird möglicherweise nicht schon stets ein Unterrichtsziel angesprochen, jedoch kann hier zumindest eine unbeabsichtigte Nebenfolge vorliegen, und bei bewusster Berücksichtigung kann daraus durchaus auch ein weiteres Unterrichtsziel werden.

Diesen beiden Zuständen liegen jeweils *Handlungen* zugrunde, die mit den Handlungsaspekten „vernetzen“, „vernetzt denken“ und „vernetzend denken“ beschrieben sind. Hiermit sind zunächst Handlungen der *Benutzer* gemeint, deren Aufgabe oder eigenes Ziel es ist, im Sinne des Zweck-Aspekts (1.1) ⁹² *Zusammenhänge* zwischen den o. g. *Knoten* als *Verbindungen* zu erkennen bzw. zu entdecken bzw. diese eigenständig zu konstruieren.

Ein „vernetzender Unterricht“ kann sich damit aber nicht nur auf die *Bestandteile* beziehen, sondern es sind notwendig diejenigen zu berücksichtigen, die hier etwas vernetzen, und das sind zuvörderst die *Benutzer*, also die Schülerinnen und Schüler.

Hinzu kommen auch die *Betrachter*, also vor allem die Lehrpersonen, denen die Aufgabe der Inszenierung eines solchen „vernetzenden“ Unterrichts zufällt – und zugleich wird klar, dass diese *Betrachter* schon „vorher“ eine wichtige Rolle spielen, nämlich bei den oben angesprochenen Unterrichtszielen, die unter ihrer Anleitung im Rahmen der Zweckaspekte *entstehen*. ⁹³ Zwar werden die *Benutzer* schon mit dem *Im-Netz-Sein* und dem „vernetzenden Denken“ bzw. dem „schüleraktiven Zusammenhangsdenken“ angesprochen, jedoch fehlt noch die Betonung der *Zweck-Aspekte* (1.2) und (1.3): ⁹²

Der Zweck-Aspekt (1.2) ist insofern bedeutsam, weil er die *Lehrerinnen und Lehrer* auffordert, über die fachlichen Unterrichtsziele eines solchen „vernetzenden Unterrichts“ hinaus nicht nur auf die *geplanten* Folgen betreffend Haltungen und Einstellungen zu achten, sondern insbesondere auch auf die *unbeabsichtigten* Folgen, um diese pädagogisch berücksichtigen zu können.

Und der Zweck-Aspekt (1.3) ruft die *Lehrerinnen und Lehrer* dazu auf, sich nicht bezüglich der geplanten Wirkungen eines vernetzenden Unterrichts auf die Schülerinnen und Schüler täuschen zu lassen! ⁹⁴

⁹³ Hier wurde ganz bewusst „unter ihrer Anleitung ... entstehen“ formuliert: Würden die Lehrpersonen nämlich solche Ziele *setzen*, so wären es ja (nur) „*Lehrziele*“.

⁹⁴ Für die Untersuchung dieser beiden wichtigen Zweck-Aspekte (1.2) und (1.3) müssten geeignete Beobachtungs-, Handlungs- und Auswertungsinstrumentarien entwickelt und erprobt werden!

Solch ein „vernetzender Unterricht“ wäre *nicht nur unterrichtstechnisch bedeutsam* (bezüglich individueller „Vernetzung“ von z. B. Kenntnissen und Wissen in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler), sondern dieser Unterricht würde erst durch die Berücksichtigung der Zweck-Aspekte bezüglich der *Benutzer* (hier: den Schülerinnen und Schülern) und der *Betrachter* (hier: den Lehrpersonen) eine *eigentliche didaktische* (und auch pädagogische) *Dimension* erhalten. Zugleich wird deutlich, dass mit einem derartigen Verständnis von „Vernetzen“ im didaktisch-pädagogischen Kontext ein *sehr anspruchsvolles Konzept* einhergeht – und weiter: dass also das „Vernetzen“ im fachwissenschaftlichen Sprachgebrauch *nicht zu einer blumigen, vieldeutigen Floskel verkommen* darf! „Vernetzen“ bzw. „Vernetzung“ ist dann sehr viel mehr als nur ein „schüleraktives Zusammenhangsdenken“.

4.3 Kleine Welten, BA-Modell und „vernetzender Unterricht“

4.3.1 Grundsätzliches

Hier werden der Einfachheit halber – zunächst und exemplarisch – nur solche Netzwerke betrachtet, die strukturelle Zusammenhänge von *Unterrichtsinhalten* beschreiben, wobei diese Netzwerke dann die „Bestandteile“ eines „Netzes im pädagogisch-didaktischen Kontext“ betreffen,⁹⁵ also die Knoten eines Netzwerkes, und dazu gibt es gewisse Kanten.

Als *Knoten* kommen z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen* usw. infrage, aber es können auch zugehörige erhellende *Beispiele* unter Einschluss von *Übungsaufgaben* sein. *Kanten* können Beziehungen zwischen diesen Knoten sein: nicht nur *logische* im Sinne des Schließens und des Folgerns bzw. des Folgens, sondern z. B. auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrrens, Ratlosseins usw., die insgesamt zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung“ der Knoten beitragen (können). Diese Kanten können sowohl *gerichtet* sein (etwa beim „Schließen“) als auch *ungerichtet* (evtl. beim Vergleich inhaltlicher Aspekte).

Das „Vernetzen“ ist dann ein Prozess, bei dem aus bereits vorliegenden Knoten ein Netzwerk gebildet und erweitert wird – durch Einziehen neuer Kanten bei vorhandenen Knoten bzw. durch Einfügung neuer Knoten, gefolgt vom Einziehen weiterer Kanten. Zu Beginn eines solchen Prozesses müssen die ersten Knoten und Kanten noch kein Netzwerk im definierten Sinn bilden, auch kann der Graph zunächst nur „verzweigt“ sein (also ein Baum, evtl. nur eine lineare Kette). Doch mit der ersten auftretenden Masche liegt dann zumindest eine teilweise Vernetzung vor. Dieser „*Vernetzung*“ genannte Prozess kann ggf. auf die Entstehung eines Netzgraphen hinauslaufen. Aber auch ein „Schrumpfen“ ist möglich. Aufgrund der unterschiedlichen Kantentypen (gerichtet oder ungerichtet), können die Bestandteile ggf. in mehrere Graphen zerlegt gedacht werden, die sich überlagern.

Das soll und kann hier nicht weiter ausgeführt werden. Vielmehr bedürfen diese vagen Andeutungen einer Vertiefung an anderer Stelle: So werden Pädagogik und Didaktik nicht umhin kommen, beim theoretisch analysierenden und empirisch auswertenden Verstehen solcher Vernetzungsprozesse auch die aktuellen Erkenntnisse und Methoden der soziologischen Netzwerkanalyse mit einzubeziehen.

Hier soll es nur darum gehen, mögliche Konsequenzen aus dem beschriebenen BA-Modell der Netzwerkentstehung für die angedeuteten individuellen Vernetzungsprozesse der Unterrichtsinhalte (also den Bestandteilen) bei den Schülerinnen und Schülern (also den *Benutzern*) in einem *kognitiven Netzwerk* aufzuzeigen. Folgende *drei Eigenschaften*, die mit dem BA-Modell verbunden sind, erscheinen dabei in didaktischer Hinsicht beachtens- und bemerkenswert:

⁹⁵ Vgl. Abschnitt 2.3.

- Didaktisch beachtenswerte Eigenschaften des BA-Modells:
kleiner mittlerer Knotenabstand – Naben – Ausfallverhalten

Diese werden nachfolgend bezüglich denkbarer didaktischer Konsequenzen betrachtet:

4.3.2 kleiner mittlerer Knotenabstand

- **Kennzeichen:** Ein kleiner mittlerer Knotenabstand ist typisch für Kleine Welten, und er wird bereits durch das WS-Modell begründet. Er ist in dem Sinne „klein“, als dass er auch bei zunehmender Knotenanzahl des Netzwerks im Wesentlichen nicht wächst (wie z. B. bei der Erdős-Zahl oder beim Kevin-Bacon-Orakel).
- **Didaktischer Bezug:** Als *Knoten* eines kognitiven Netzwerks ist hier in mathematikdidaktischer Sicht u. a. an kognitive Elemente wie z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen, Beispiele, Sätze* usw. zu denken. Als *Kanten* kommen u. a. logische Elemente wie z. B. *Vermuten, Behaupten, Schließen, Folgern, Beweisen* usw. und schließlich auch affektive bzw. emotionale Elemente wie etwa *Entdecken, Erleben, Irren, Ratlossein* usw. und infrage (s. o.), auch *Strategien* sind möglicherweise Kanten.
- **Didaktische Konsequenz:** Um effektiv im jeweils subjektiven kognitiven „eigenen“ Netzwerk navigieren zu können, wird es vermutlich vorteilhaft sein, wenn hier „kurze Wege“ im Sinne eines kleinen mittleren Knotenabstands vorliegen. Hier wird zu untersuchen sein, ob und wie die Benutzer das von sich aus – gewissermaßen „automatisch“ und unbewusst – organisieren und wie der Unterricht seitens der Betrachter so angelegt und organisiert werden kann, dass die Entstehung Kleiner Welten „in den Köpfen der Benutzer“ gefördert werden kann.

4.3.3 Naben

- **Kennzeichen:** Naben sind typisch für viele „natürliche“, wachsende Netzwerke, und sie werden durch das BA-Modell begründet. Nur wenige Knoten mit herausragend hohem Knotengrad im Vergleich zum Rest der Knoten sind Naben. Naben ermöglichen das Auftreten eines extrem kleinen mittleren Knotenabstands, was zu „Kleinen Welten“ führt. Sie entwickeln sich beim natürlichen Wachstum eines Netzes durch „bevorzugendes Andocken“ (den „Matthäus-Effekt“).
- **Didaktischer Bezug:** Falls ein kognitives Netzwerk eine Kleine Welt darstellt und über Naben verfügt, so wird es ggf. möglich sein, zwischen je zwei Knoten dieses Netzwerks über nur wenige Kanten kognitive oder affektive Verbindungen herzustellen. Solche *Naben* können *Ankerpunkte des Wissens und Könnens* sein und möglicherweise zu einem erfolgreichen „schnellen“ Navigieren in dem kognitiven Netzwerk beitragen.
- **Didaktische Konsequenz:** Es wird zu untersuchen sein, wie einerseits einzelne Benutzer ggf. von sich aus welche Knoten als Naben herausbilden (können), wie aber andererseits der Unterricht seitens der Betrachter so angelegt und organisiert werden kann, dass die Entstehung von Naben hier gefördert werden kann. In der didaktischen Planung des Mathematikunterrichts – sowohl auf der Ebene der wissenschaftlichen Curriculumentwicklung als auch auf der Ebene der individuellen Unterrichtsplanung durch die Lehrpersonen – ist zu prüfen, welche *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen, Beispiele, Sätze* usw. sich als mögliche Naben im Sinne eines „Gerüsts eines Netzwerks von Bestandteilen“ anbieten, und bei der Evaluation – sowohl der wissenschaftlichen empirischen Überprüfung als auch der individuellen Nachbesinnung des Unterrichts – ist zu ergründen, welche Naben tatsächlich auftreten.

4.3.4 Ausfallverhalten

- **Kennzeichen:** Das Ausfallverhalten eines Netzwerks beschreibt, wie sich ein zufälliger Ausfall von Knoten oder Kanten („Fehlverhalten“) bzw. ein gezielter Angriff auf ggf. vorhandene Naben („Angriffsverhalten“) auswirkt.
- **Didaktischer Bezug:** Das Ausfallverhalten eines kognitiven Netzwerks bezieht sich auf die unter (1) exemplarisch angedeuteten Knoten und Kanten und auf die unter (2) angedeuteten Naben als Ankerpunkte des Wissens und Könnens.
- **Didaktische Konsequenz:** Es ist zu untersuchen, wie individuelle kognitive Netzwerke so ausgebildet werden können, dass sie stabil gegenüber Ausfällen von Knoten und Kanten sind. Es ist zu untersuchen, welche Knoten gewissermaßen als Naben (im Sinne eines o. g. „Gerüsts“) ausgebildet werden sollten und wie diese Ausfälle abgesichert werden können. Ein Prinzip könnte hier sein:

Wichtiges gegenüber Unwichtigem betonen und stärken – was ist wichtig?

4.4 Kleine Welten, Netzwerke: Anregungen für den Mathematikunterricht

Die bisherigen Darstellungen bieten eine Fülle von konkreten Möglichkeiten zur inhaltlichen Behandlung im Mathematikunterricht, die nachfolgend nur angedeutet werden sollen und keineswegs erschöpfend sind:

- **Experimentieren mit „kleinen“ endlichen Graphen**

Zunächst könnte es (noch ohne Blick auf Kleine Welten) zu einer Renaissance der Thematisierung endlicher Graphen im Unterricht kommen. Die bereits auf Euler zurückgehende Graphentheorie bietet schöne, anregende und teilweise elementar lösbare bzw. zumindest plausibel formulierbare Fragestellungen, die die *Mathematik* ohne vordergründiges Trachten nach Anwendbarkeit und Nützlichkeit zum freudigen *Spiel des Geistes* werden lassen können – und so auch der Talentförderung zu dienen vermögen. Graphentheorie ist aus dem Mathematikstudium leider oft nahezu verschwunden, und Graphen sind auch wie manch andere interessante Themen und Gebiete den „Bildungsreformen“ der letzten Zeit zum Opfer gefallen. Beides sollte nachdenklich stimmen.

- **Aneignung empirischen Wissens**

Graphen bieten aber auch mit Blick auf außermathematische Anwendungen eine Vielzahl von Möglichkeiten der Thematisierung und Behandlung im Unterricht:

- *Experimentieren im World Wide Web (WWW)*

Hier lassen sich vielfältige Erfahrungen im spielerischen Umgang mit „großen“ endlichen Graphen sammeln (Bacon-Zahl, Erdős-Zahl, ...).

- *Entdecken Kleiner Welten und deren plausible Begründung*

Das o. g. Experimentieren führt zur Entdeckung des Kleine-Welt-Phänomens, das über im WWW verfügbare Darstellungen plausibel erklärbar ist (z. B. Abb. 36 beim Erdős-Graphen).

- *Statistische Auswertung von im WWW verfügbaren großen Datenbanken (s. o.)*

Mittelwerte, zeitliche Entwicklungen mittels numerischer und graphischer Darstellung (Tabellenkalkulation), „Power Law“ (hier auch Logarithmus-Funktion und Vorteile logarithmischer Darstellungen), ...

- *Eigenschaften großer „Netzwerke“*

Naben, Ausfallverhalten (Information darüber, Erörterung, Bedeutung für Individuum und Gesellschaft), ...

- *Netzwerkstatistiken („Vernetzungsgradmaße“)*

mittlerer Knotenabstand, mittlerer Knotengrad, Durchmesser, Clusterkoeffizient, ...

- **Transfer dieses empirischen Wissens auf andere große „Netzwerke“**

Das betrifft: das Entdecken weiterer „realer“ Netzwerke, deren Erörterung bezüglich der gewonnenen Erfahrungen und Kenntnisse, die Entwicklung einer Vorstellung von „Netzwerk“.

Kommentierung zu Abb. 36:

Viele „natürlich“ entstehende Netzwerke, die das Kleine-Welt-Phänomen aufweisen, sind erstaunlich gut mit dem BA-Modell simulierbar. Elementare Prototypen einer „Kleinen Welt“ sind vor allem der Akteurs-Graph und der Erdős-Graph.

Abb. 36 zeigt einen aus 5534 Knoten und 8472 Kanten bestehenden Ausschnitt aus dem Erdős-Graphen.⁹⁶ Auf den ersten Blick scheint ein „Sterngraph“ vorzuliegen (also ein Baum) – dann wäre es aber keine „Kleine Welt“. Eine genauere Betrachtung dieser Darstellung lässt viele Querverbindungen erkennen, die das Kleine-Welt-Phänomen erst möglich machen und die damit eine anschauliche Begründung für die Wirkungsweise dieses Phänomens liefern.⁹⁷

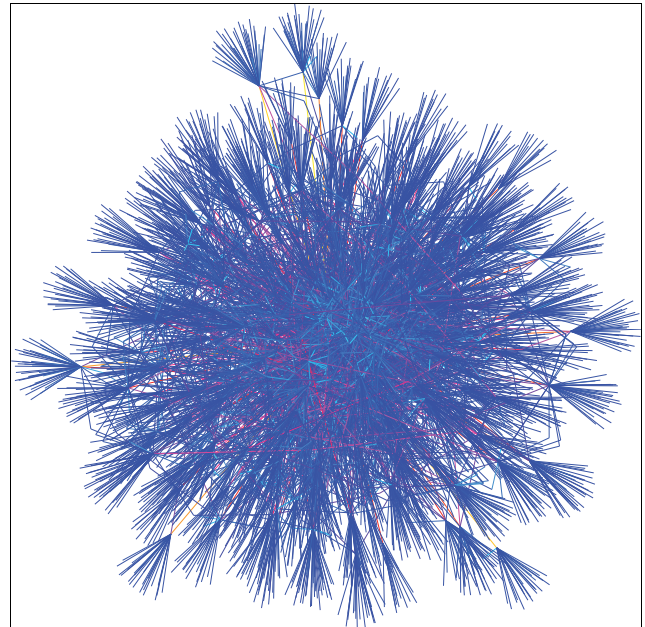


Abb. 36: Ausschnitt aus dem Erdős-Graphen.

4.5 Pädagogische Aspekte: soziale Netzwerke

In Abschnitt 2 wurde begründet, dass bei „Vernetzungen“ in Bezug auf Didaktik und Pädagogik drei unterschiedliche Objektmengen in ihrem komplexen Zusammenspiel zu beachten sind, die ein „Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext“ bilden: Bestandteile, Benutzer und Betrachter. Und in den Abschnitten 4.2 und 4.3 wurde darüber hinaus exemplarisch dargelegt, dass die Bestandteile für sich bereits eine Struktur bilden, die mit Hilfe (eines oder mehrerer) Graphen erfasst werden kann, wobei betont wurde, dass diese „Netzwerke“ nicht von selbst entstehen, sondern dass hieran sowohl die Benutzer (hier vor allem: die Schülerinnen und Schüler) als auch die Betrachter (hier vor allem: die Lehrerinnen und Lehrer) als wesentliche Personen (unter Einschluss von „Störungen“⁹⁸) handelnd beteiligt sind. Jedoch bilden sich in diesem „sozialen Prozess“ nicht nur in jedem Benutzer aus ihm selbst heraus kognitive und affektive Netzwerke der Bestandteile, sondern hierbei sind auch vielfältige Beziehungen der Benutzer unter sich, der Betrachter unter sich und zwischen den Benutzern und den Betrachtern usw. aktiv wirksam. Insgesamt kann diese sehr komplexe Struktur eines Netzes damit als „System“ im Sinne der Soziologie aufgefasst werden, wobei aber der recht dubiose Systembegriff nicht wirklich benötigt wird, wie etwa der Soziologe Boris Holzer betont:⁹⁹

⁹⁶ http://www2.research.att.com/~yifanhu/GALLERY/GRAPHS/GIF_SMALL/Pajek@Erdos02.html (31. 12. 2013). Abb. 36 ist eine farbinvertierte Version der Originalabbildung aus einer Sammlung der Universität von Florida zur Darstellung großer Graphen (oberer Link führt zu weiteren Graphen). Diese Darstellungen wurden algorithmisch mit Hilfe der „Adjazenz-Matrizen“ der jeweiligen Graphen erstellt.

⁹⁷ Lokales Zoomen der Originaldatei (einer Vektorgraphik, auch in der PDF-Version dieses Artikels) macht dies besonders deutlich, und es sind dann auch Naben erkennbar.

⁹⁸ Vgl. S. 15, 29.

⁹⁹ [Holzer 2008, 156]

Der hohe Allgemeinheitsgrad des Netzwerkbegriffs führt ihn in eine gewisse Konkurrenz zum Systembegriff: Kann man oder muss man deshalb sagen, der Netzwerkbegriff könnte den Systembegriff ersetzen? Oder ist umgekehrt die Rede von Netzwerken überflüssig? Sind Netzwerke vielleicht Systeme, vielleicht sogar ein eigenständiger Systemtypus neben Interaktion, Organisation und Gesellschaft? Oder gedeihen sie nur in den Zwischenräumen der Systeme und müssen deshalb als Inter-System-Beziehungen aufgefasst werden?

[...] Wie bereits angedeutet ist die Organisation sozialer *Komplexität* ein gemeinsamer Bezugspunkt von Netzwerken und sozialen Systemen. Beide beruhen auf der selektiven Verknüpfung von Elementen: Nicht jeder kann mit jedem reden, nicht jede Handlung auf alle anderen bezogen werden. In der Systemtheorie sind die zu verknüpfenden Elemente allerdings Kommunikationen, also Ereignisse, während wir bei sozialen Netzwerken an mehr oder weniger stabile Identitäten wie Personen oder Organisationen denken.

Den o. g. Aspekt der *Organisation sozialer Komplexität* greift Holzer an späterer Stelle nochmals separat auf, indem er darauf hinweist, dass Netzwerke einerseits *innerhalb von Systemen* entstehen, dass sie aber zugleich auch als *Bindeglieder zwischen Systemen* entstehen:¹⁰⁰

Netzwerke sind Formen sozialer Ordnungsbildung über reflexive Kontakte, die sich *innerhalb und zwischen* Systemen herausbilden.

Hiermit wird in anderer Form als oben betont, dass es – bezogen auf die hier vorgestellte Strukturierung von „Netz“ – auch zu Querbezügen zwischen den Benutzern unter sich, zwischen den Betrachtern unter sich, zwischen den Benutzern und den Betrachtern und schließlich sogar zwischen Benutzern, Betrachtern und Bestandteilen kommt – wobei jedem Benutzer gewiss „individuelle Bestandteile“ zukommen, die er bzw. sie aber mit den anderen Benutzern und auch den Betrachtern in unterschiedlichem Grad kommuniziert, was empirisch zu ergründen ist.

Dieses äußerst komplexe „System“ (also hier: „Netz“) bedarf einer pragmatischen Reduktion. Eine erste wichtige und zugleich noch gut überschaubare Struktur sind „soziale Netzwerke“, die nicht zu verwechseln sind mit dem einer „sozialen Absicherung“ dienenden „sozialen Netz“. [Newman 2010, 36] kennzeichnet diese wie folgt:

Soziale Netzwerke sind Netzwerke, deren Knoten für Personen oder für Gruppen von Personen stehen und deren Kanten soziale Interaktionen zwischen ihnen bedeuten wie z. B. Freundschaft.¹⁰¹

Solche Netzwerke sind graphentheoretisch als „**bipartite Graphen**“ beschreibbar, die man in der Soziologie untersucht und „**affiliation networks**“ („Verwandtschaftsnetzwerke“) nennt. Das sei hier mit Abb. 37 angedeutet:¹⁰²

Die Knotenmenge des im oberen Teil von Abb. 37 dargestellten Graphen besteht aus den 4 „Zahlen“ und den 11 „Buchstaben“ A bis K. Hier lässt sich nun eine Analogie zu dem Akteursgraphen aus Abb. 2 herstellen: Die Buchstaben stehen für Akteure und die Zahlen für Filme. Dann haben z. B. die beiden Akteure A und B in einem Film (hier: Nr. 1) zusammengewirkt, und B hat mit F in dem Film Nr. 2 zusammengewirkt, jedoch A nicht direkt mit F. Damit hat A von F den Abstand 2. Die gesamte Knotenmenge ist also in zwei disjunkte Teilmengen so zerlegbar, dass die Knoten innerhalb jeder dieser Teilmengen jeweils nicht adjazent sind.¹⁰³ Der obere Graph in Abb. 37 entspricht daher „strukturell“ dem Akteursgraphen in Abb. 2. Derart „zweigeteilte“ Graphen nennt man **bipartit**. Der untere Graph in Abb. 37 ist nun aus dem oberen bipartiten Graphen auf ähnliche Weise entstanden wie Abb. 3 aus Abb. 2: Zwei Akteure (Buchstaben) sind genau dann verbunden, wenn sie in einem Film gemeinsam agiert haben.

¹⁰⁰ [Holzer 2008, 162]

¹⁰¹ Übersetzung Hischer.

¹⁰² Graphik erstellt nach [Newman et al. 2001, 02618-2].

¹⁰³ Vgl. S. 5.

Dieser untere Graph in Abb. 37 ist eine **unipartite Projektion** des bipartiten Graphen, die vermittelnden Filme sind hier nicht mehr erkennbar, die Kanten stehen hier für „soziale Interaktionen“. ¹⁰⁴ Wie in Abb. 3 ist diese Projektion nicht umkehrbar, weil der unipartite Graph weniger Informationen enthält als der bipartite Graph. Sofort wird klar, dass z. B. jegliche „Zusammenarbeitsgraphen“ wie auch z. B. der Mathematiker-Graph aus Abb. 12 sich entweder zumindest als *unipartite Projektionen* eines bipartiten Graphen darstellen lassen oder ggf. sogar wie in Abb. 1 – bei expliziter Erfassung der „Zusammenarbeitskanten“ – bereits bipartite Graphen sind.

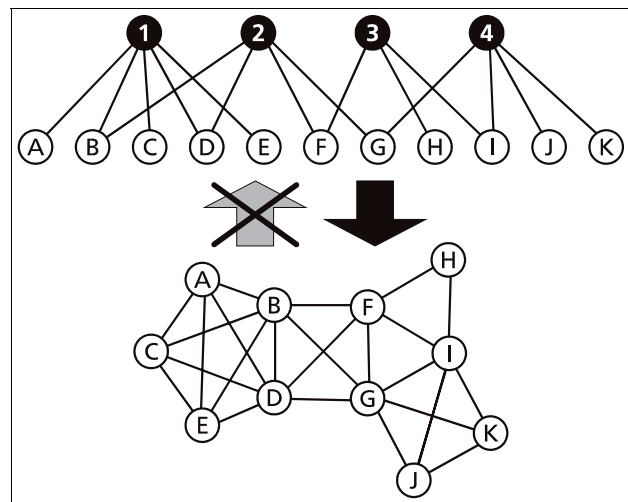


Abb. 37: bipartiter Graph und unipartite Projektion

Somit stellen bipartite Graphen ein Werkzeug dar, mit dem sich Teilstrukturen eines Netzes im pädagogisch-didaktischen Kontext als „affiliation networks“ bzw. „Verwandtschaftsnetzwerke“ (s. o.) und damit als „**soziale Netzwerke**“ erfassen lassen: Beispielsweise können im bipartiten Graphen aus Abb. 37 die oberen Knoten für Bestandteile (z. B. irgendwelche „Inhalte“) stehen und die unteren Knoten für Benutzer (z. B. Schülerinnen und Schüler), und die Kanten bedeuten konkrete Bezüge zwischen den Benutzern und den Inhalten, so dass damit gewisse Gemeinsamkeiten zwischen Teilmengen von Benutzern beschreibbar sind. Derselben Benutzermenge kann man offenbar unterschiedliche Bestandteilmengen gegenüberstellen und damit dann recht unterschiedliche soziale Netzwerke einer Benutzermenge bilden.

Hinzu kommen die Betrachter, für die Ähnliches gilt, und man kann dann entsprechend die graphentheoretische Struktur sogar zu „*tripartiten Graphen*“ erweitern: Beziehungen zwischen den Benutzern und gewissen Bestandteilen, Beziehungen zwischen den Betrachtern und denselben Bestandteilen und schließlich Beziehungen zwischen den Benutzern und den Betrachtern.

Diese Andeutungen mögen verdeutlichen, dass eine derartige graphentheoretisch orientierte Kennzeichnung sozialer Netzwerke im Prinzip ein reichhaltiges Werkzeug zur Erfassung kommunikativer und sozialer Strukturen im Unterricht darstellt, welches sich für Untersuchungen, Beschreibungen und Planungen im pädagogischen Rahmen anbietet. Entsprechende Methoden sind jedoch an anderer Stelle noch auszuarbeiten und zu erproben. Dabei ist zu prüfen und zu berücksichtigen, welche konkreten Werkzeuge in der Netzwerktheorie und insbesondere in der Soziologie bereits vorliegen, um (in ggf. modifizierter Form) darauf zurückgreifen bzw. darauf aufbauen zu können.

5 Literatur

- Adamic, Lada A. & Lukose, Rajan M & Puniyani, Amit R. & Huberman, Bernardo A. [2001]: Search in power-law networks. In: *Physical Review E*, **64**(2001), 046135, 1 – 8.
- Aigner, Martin [2004]: *Diskrete Mathematik*. Wiesbaden: Vieweg (5., überarbeitete, erweiterte Auflage).
- Albert, Réka & Jeong, Hawoong & Barabási, Albert-László [2000]: Error and attack tolerance of complex networks. In: *Nature* (2000)406, 378 – 382 (Ausgabe vom 27. Juli 2000).
- Albert, Réka & Barabási, Albert-László [2002]: Statistical mechanics of complex networks. In: *Reviews of Modern Physics*, **74**(2002)1, 47 – 97.

¹⁰⁴ Vgl. obiges Zitat von Newman bezüglich sozialer Netze.

- Barabási, Albert-László & Albert, Réka & Jeong, Hawoong [1999]: Mean-field theory for scale-free random networks. In: *Physica A*, **272**(1999)1–2, 173 – 187 (Ausgabe vom 1. Oktober 1999).
- Barabási, Albert-László & Albert, Réka [1999]: Emergence of scaling in random networks. In: *Science*, (1999) 286, 509 – 512.
- Barabási, Albert-László & Bonabeau, Eric [2004]: Skalenfreie Netze. In: *Spektrum der Wissenschaft*, Juli 2004, 62 – 69.
- Barabási, Albert-László [2009]: Scale-Free Networks: A Decade and Beyond. In: *Science*, Vol. 325, 24. Juli 2009, 412 – 413.
- Diestel, Reinhard [2000]: *Graphentheorie*. Berlin usw.: Springer (2. Auflage).
- Erdős, Pál & Rényi, Alfréd [1959]: On Random Graphs. In: *Publicationes Mathematicae*, **6**(1959), 290 – 297.
- Goffman, Casper: And what is your Erdős Number? In: *American Mathematical Monthly*, **6**(1969)7, 791.
- Harary, Frank & Norman, Robert Z. & Cartwright, Dorwin [1965]: *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*. New York / London / Sidney: John Wiley & Sons, Inc. 415 Seiten.
- Harary, Frank (Hrsg.) [1967]: *Graph Theory and Theoretical Physics*. London / New York: Academic Press. 358 Seiten.
- Harary, Frank [1969]: *Graph Theory*. Reading, Massachusetts: Addison Wesley. (Deutsche Fassung: Graphentheorie. München / Wien: Oldenbourg, 1974.)
- Harary, Frank (Hrsg.) [1979]: *Topics in Graph Theory*. New York: New York Academy of Sciences (Tagungsband). 208 Seiten.
- Hischer, Horst [2010]: *Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltaneignung*. Hildesheim: Franzbecker. 242 Seiten.
- Holzer, Boris [2008]: *Netzwerke und Systeme. Zum Verhältnis von Vernetzung und Differenzierung*. In: [Stegbauer 2008, 155 – 164].
- Kron, Friedrich W. [2000]: *Grundwissen Didaktik*. München / Basel: Ernst Reinhardt Verlag (3. aktualisierte Auflage; 1. Aufl. 1993).
- Lexikon der Mathematik [2000]: Mannheim/Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Merton, Robert K. [1968]: The Matthew Effect in Science. The reward and communication systems of science are considered. In: *Science*, **159**(1968)3810, 56 – 63.
- Newman, Mark E. J. & Strogatz, Steven H. & Watts, Duncan J. [2001]: Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. In: *Physical Review E*, **64**(2001), 026118, 1 – 17.
- Newman, Mark E. J. [2010]: *Networks. An Introduction*. Oxford: Oxford University Press. 772 Seiten.
- Odda, Tom [1979]: *On Properties of a Well-Known Graph, or, What is Your Ramsey Number?* In: [Harary 1979, 166 – 172].
- Price, Derek J. de Solla [1965]: Networks of Scientific Papers. In: *Science* **149**(1965)3683, 510 – 515.
- Price, Derek J. de Solla [1976]: A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. In: *Journal of the American Society for Information Science*. **27**(1976)5/6, 292 – 306.
- Simon, Herbert A. [1955]: On a Class of Skew Distribution Functions. In: *Biometrika* **42**(1955)425 – 440.
- Solomonoff, Ray & Rapoport, Anatol [1951]: Connectivity of Random Nets. In: *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **13**(1951), 107 – 116.
- Stegbauer, Christian (Hrsg.) [2008]: *Netzwerkanalyse und Netzwerktheorie. Ein neues Paradigma in den Sozialwissenschaften*. Reihe „Netzwerkforschung, Band 1“. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Watts, Duncan J. & Strogatz, Steven H. [1998]: Collective dynamics of ‘small-world’ networks. In: *Nature* (1998)393, 440 – 442 (Ausgabe vom 4. Juni 1998).
- Watts, Duncan J. [1999]: *Small Worlds – The Dynamics of Networks between Order and Randomness*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (8. Auflage 2004, zugleich 1. Auflage als Paperback, 262 Seiten). (Dieses Buch entstand im Anschluss an Watts’ Dissertation von 1997 über “The Structure and Dynamics of Small-World Systems”.)
- Watts, Duncan J. [2004]: The “New” Science of Networks. In: *Annual Review of Sociology*, **30**(2004), 243 – 270.
- West, Douglas Brent [2001]: *Graph Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall (2. Auflage).