

Dissertationen aus der
Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

Zur Prognose des Value-at-Risk und Expected Shortfall mit zeitdiskreten Stochastic-Volatility-Modellen

Empirische Ergebnisse für
Finanzmarktzeitreihen

Valentin S. Dimitrov



universaar

Universitätsverlag des Saarlandes
Saarland University Press
Presses Universitaires de la Sarre

Valentin S. Dimitrov

**Zur Prognose des Value-at-Risk und
Expected Shortfall mit zeitdiskreten
Stochastic-Volatility-Modellen
Empirische Ergebnisse für Finanzmarktzeitreihen**



universaar

Universitätsverlag des Saarlandes
Saarland University Press
Presses Universitaires de la Sarre

D 291

© 2015 *universaar*
Universitätsverlag des Saarlandes
Saarland University Press
Presses Universitaires de la Sarre



Postfach 151150, 66041 Saarbrücken

ISBN 978-3-86223-194-2 gedruckte Ausgabe
ISBN 978-3-86223-195-9 Onlineausgabe
URN urn:nbn:de:bsz:291-universaar-1445

Zugl.: Saarbrücken, Univ., Diss., 2015

Projektbetreuung *universaar*: Susanne Alt

Satz: Valentin S. Dimitrov
Umschlaggestaltung: Julian Wichert

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VII
Tabellenverzeichnis	XIII
Abkürzungsverzeichnis	XXXIII
Symbolverzeichnis	XXXIX
1. Einleitung	1
2. Konzepte und Strukturen bei der Modellierung von Finanzmarktpreisen	11
2.1. Grundlegende Konzepte	11
2.2. Die Konzepte Value-at-Risk und Expected Shortfall	17
2.2.1. Value-at-Risk	17
2.2.2. Expected Shortfall	20
3. Univariate zeitdiskrete SV-Modelle: eine Übersicht und neue Spezifikationen	25
3.1. Statistische Eigenschaften des klassischen SV-Modells	30
3.2. Andere SV-Modelle	37
3.3. Vergleich zu GARCH-Modellen	44
4. Schätzung von SV-Modellen: eine Übersicht	49
4.1. Momentenmethode	50
4.2. Quasi-Maximum-Likelihood Methode	52
4.3. Simuliertes Maximum Likelihood/ Importance Sampling	53
4.4. Markov Chain Monte Carlo Methode	55
4.5. Schätzung durch zusätzliches Modell	56
4.6. WinBUGS und OpenBUGS- allgemeine Software für MCMC Schätzung mit Hilfe des Gibbs Sampler und ihre Anwendung zur Schätzung der Stochastic Volatility Modelle	57
4.6.1. DAG	58
4.6.2. Gibbs Sampler	65

4.6.3.	Slice Sampling	67
4.6.4.	Metropolis Algorithmus und Metropolis-Hastings Algorithmus	73
4.6.5.	Theoretische Eigenschaften des Bayes Schätzers	78
4.6.6.	Konvergenzdiagnostik und praktische Aspekte der MCMC Schätzung	78
5.	Anwendung der univariaten SV-Modelle in der Risikomes-	
	sung: Prognose des Value-at-Risk und Expected Shortfall	
	und Überprüfung durch Backtesting	81
5.1.	Prognose des Value-at-Risk und Expected Shortfall	81
5.1.1.	Prognose integriert in der MCMC-Schätzung (nur bei den SV Modellen)	81
5.1.2.	Prognose impliziert durch die Verteilung der Innovation in der Renditengleichung des Modells	81
5.1.3.	Prognose mittels Filtered Historical Simulation	82
5.1.4.	Prognose mittels Filtered Extreme Value Theory	83
5.2.	Backtesting von Value-at-Risk und Expected Shortfall	85
5.2.1.	LR_{PF} : Test für den Anteil der VaR-Überschreitungen	86
5.2.2.	$V_1, (V_2, V_3)$: Varianz der Anzahl der 250-(125-,500-)aggregierten VaR-Überschreitungen	87
5.2.3.	$LB_1, (LB_2, LB_3)$: Ljung-Box Test auf Unkorreliertheit der Anzahl der 250-(125-,500-)aggregierten VaR-Überschreitungen	89
5.2.4.	LR_{ind}, LR_{cc} : Unabhängigkeitstest und <i>conditional coverage</i> -Test für die VaR-Überschreitungen	89
5.2.5.	N111: Test für die Anzahl der Tupel von drei benachbarten VaR-Überschreitungen	91
5.2.6.	ES: Test für die Richtigkeit des Expected Shortfall	91
5.2.7.	Untersuchung der ganzen Prognoseverteilung mittels Anpassungstests	93
5.2.8.	Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen	94
5.3.	Daten	98
5.4.	Empirische Anwendung	101
5.4.1.	Modell 1, DJIA 10000 Renditen	102
5.4.2.	Modell 2, DJIA 10000 Renditen	120
5.4.3.	Modell 3, DJIA 5000 Renditen	132
5.4.4.	Modell 4, DJIA 10000 Renditen	150
5.4.5.	Modell 5, DJIA 10000 Renditen	162
5.4.6.	Modell 6, DJIA 10000 Renditen	181

5.4.7.	Modell 7 RV, SP500 2261 Renditen	193
5.4.8.	Modell 7 VIX, SP500 5079 Renditen	207
5.4.9.	Modell 8, SP500 2261 Renditen	221
5.4.10.	Modell 9, SP500 5579 Renditen	234
5.4.11.	Modell 10, DJIA 2500 Renditen	248
5.4.12.	Modell 11, DJIA 2500 Renditen	259
5.4.13.	SV Modell 3, DAX 5000 Daten	272
5.5.	Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse für die SV-Modelle	279
5.5.1.	DJIA und S&P 500	279
5.5.2.	Restliche Zeitreihen	294
5.6.	Simulationsstudie	298
5.6.1.	Modell 3 Stichprobenfenster 500	299
5.6.2.	Zusammenfassung der Ergebnisse der Simulationsstudie	308
6.	Zum Vergleich: Berechnen des Value-at-Risk und Expected Shortfall mit GARCH Modellen und Historical Simulation und Überprüfung durch Backtesting	311
6.1.	Dow Jones Aktienindex	312
6.1.1.	10000 Beobachtungen	312
6.1.2.	5000 Beobachtungen	317
6.1.3.	2500 Beobachtungen	322
6.2.	Standard and Poors S&P 500 Aktienindex	326
6.2.1.	5079 Beobachtungen	326
6.2.2.	2261 Beobachtungen	332
6.3.	DAX Aktienindex	337
6.4.	Zusammenfassung der Ergebnisse für die Modelle der GARCH-Familie	342
6.4.1.	DOW Jones	342
6.4.2.	Restliche Zeitreihen	347
6.5.	Simulationsstudie	351
6.6.	Historical Simulation	352
6.7.	Beste Vertreter einer Modellklasse (je Zeitreihe)	354
7.	Fazit und Ausblick	359
	Literaturverzeichnis	363
A.	OpenBugs Sampling Methoden	377
A.1.	SV Modell 2	377
A.2.	SV Modell 3	377

A.3. SV Modell 4	378
A.4. SV Modell 5	378
A.5. SV Modell 6	379
A.6. SV Modell 7	379
A.7. SV Modell 8	380
A.8. SV Modell 9	380
A.9. SV Modell 10	381
A.10. SV Modell 11	381

Abbildungsverzeichnis

4.1.	DAG-Darstellung des klassischen SV-Modells	59
4.2.	Das Heraustreten-Verfahren (stepping out) zur Bestimmung von I in OpenBUGS 3.2.1	69
4.3.	Das Heraustreten-Verfahren (stepping out) zur Bestimmung von I in OpenBUGS 3.2.2	70
4.4.	Das Schrumpf-Verfahren (shrinkage) zum Ziehen aus I in OpenBUGS	71
4.5.	Das Pegasus-Verfahren zum Finden einer Nullstelle von einer Funktion	72
5.1.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-MCMC, KL=20)	103
5.2.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-MCMC, KL=100)	103
5.3.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-A, KL=20)	114
5.4.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-A, KL=100)	114
5.5.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-B, KL=20)	117
5.6.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-B, KL=100)	117
5.7.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-MCMC, KL=20)	121
5.8.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-MCMC, KL=100)	121
5.9.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-NORM, KL=20)	128
5.10.	Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-NORM, KL=100)	128
5.11.	Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=20)	133

5.12. Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=100)	133
5.13. Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-A, KL=20)	143
5.14. Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-A, KL=100)	143
5.15. Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-B, KL=20)	146
5.16. Histogr. der transf. DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-B, KL=100)	146
5.17. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-MCMC, KL=20)	151
5.18. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-MCMC, KL=100)	152
5.19. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-NORM, KL=20)	158
5.20. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-NORM, KL=100)	158
5.21. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-MCMC, KL=20)	163
5.22. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-MCMC, KL=100)	163
5.23. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-A, KL=20)	174
5.24. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-A, KL=100)	174
5.25. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-B, KL=20)	177
5.26. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-B, KL=100)	177
5.27. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-MCMC, KL=20)	182
5.28. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-MCMC, KL=100)	183
5.29. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-NORM, KL=20)	189
5.30. Histogr. der transf. DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-NORM, KL=100)	189
5.31. Histogr. der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-MCMC, KL=20)	194

5.32. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-MCMC, KL=100)	195
5.33. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-NORM, KL=20)	201
5.34. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-NORM, KL=100)	201
5.35. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-MCMC, KL=20)	208
5.36. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-MCMC, KL=100)	209
5.37. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-NORM, KL=20)	215
5.38. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-NORM, KL=100)	215
5.39. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-MCMC, KL=20)	222
5.40. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-MCMC, KL=100)	223
5.41. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-NORM, KL=20)	229
5.42. Histogramm der transf. S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-NORM, KL=100)	229
5.43. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-MCMC, KL=20)	236
5.44. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-MCMC, KL=100)	236
5.45. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-NORM, KL=20)	243
5.46. Histogramm der transf. S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-NORM, KL=100)	243
5.47. Histogramm der transf. DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-MCMC, KL=20)	249
5.48. Histogramm der transf. DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-MCMC, KL=100)	250
5.49. Histogramm der transf. DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-t, KL=20)	256
5.50. Histogramm der transf. DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-t, KL=100)	256
5.51. Histogramm der transf. DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-MCMC, KL=20)	260

5.52. Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-MCMC, KL=100)	261
5.53. Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-t, KL=20)	266
5.54. Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-t, KL=100)	267
5.55. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=20)	272
5.56. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=100)	272
5.57. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, KL=20)	276
5.58. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, KL=100)	277
5.59. Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=20)	299
5.60. Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, KL=100)	299
5.61. Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, KL=20)	305
5.62. Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, KL=100)	305
6.1. Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	314
6.2. Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	315
6.3. Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	319
6.4. Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	319
6.5. Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	324
6.6. Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	324
6.7. Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	329
6.8. Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	329

6.9. Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	334
6.10. Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	334
6.11. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (APARCH.st.st, KL=20)	339
6.12. Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (APARCH.st.st, KL=100)	339

Tabellenverzeichnis

2.1. Zuschlagsfaktoren Backtesting	20
3.1. Modellrankings gemäß 3 Kriterien mit S&P 100 Index Renditen	44
3.2. Likelihood und Schwarz Kriterium für SV und ARCH Modelle.	46
3.3. Modellränge gemäß Prognosegüten	48
4.1. Sampling Methoden	64
4.2. Sampling Methoden im klassischen SV-Modell	65
4.3. SV-Modelle: Anzahl Iterationen, Burnin, Thinning	80
5.1. Zusammenfassende Statistiken zu den Zeitreihen	101
5.2. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 1 .	102
5.3. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC	104
5.4. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC	104
5.5. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC	105
5.6. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC	105
5.7. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100	106
5.8. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100	106
5.9. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-250	106
5.10. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100	107
5.11. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100	108
5.12. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100	108

5.13. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-250	109
5.14. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100	109
5.15. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-100k10	110
5.16. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25	110
5.17. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25	111
5.18. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25	111
5.19. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-100k10	112
5.20. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25	112
5.21. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25	113
5.22. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25	113
5.23. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A	115
5.24. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A	115
5.25. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A	116
5.26. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A	116
5.27. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B	118
5.28. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B	118
5.29. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B	119
5.30. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B	119
5.31. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 2	120
5.32. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC	122

5.33. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC	122
5.34. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC	123
5.35. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC	123
5.36. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-100	124
5.37. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-100	124
5.38. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-200	125
5.39. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-250	125
5.40. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-100k10	126
5.41. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-250k25	126
5.42. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-200k20	127
5.43. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-500k50	127
5.44. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM	129
5.45. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM	129
5.46. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM	130
5.47. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM	130
5.48. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1	131
5.49. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 2	131
5.50. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 5000, SV-Modell 3	132
5.51. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC	134
5.52. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC	134
5.53. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC	135

5.54. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC	135
5.55. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250	136
5.56. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250	136
5.57. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250	137
5.58. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250	137
5.59. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250	138
5.60. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250	138
5.61. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250	138
5.62. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250	139
5.63. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20	139
5.64. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20	140
5.65. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20	140
5.66. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-250k25	140
5.67. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20	141
5.68. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20	141
5.69. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20	142
5.70. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-250k25	142
5.71. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A	144
5.72. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A	144
5.73. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A	145

5.74. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A	145
5.75. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B	147
5.76. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B	147
5.77. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B	148
5.78. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B	148
5.79. VaR-Strafpunkte DJIA 5000, SV-Modell 1	149
5.80. VaR-Strafpunkte DJIA 5000, SV-Modell 3	149
5.81. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 4	150
5.82. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC	152
5.83. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC	153
5.84. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC	153
5.85. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC	153
5.86. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250	154
5.87. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250	154
5.88. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-100	155
5.89. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250	155
5.90. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-100k10	156
5.91. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-250k25	156
5.92. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-100k10	157
5.93. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-500k50	157
5.94. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM	159

5.95. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM	159
5.96. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM	160
5.97. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM	160
5.98. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1	161
5.99. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 4	161
5.100. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 5	162
5.101. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC	164
5.102. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC	164
5.103. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC	165
5.104. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC	165
5.105. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200	166
5.106. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-250	166
5.107. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200	167
5.108. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200	167
5.109. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-100	168
5.110. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250	168
5.111. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250	169
5.112. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250	169
5.113. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-300k30	170
5.114. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-400k40	170
5.115. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-250k25	171

5.116. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- FEVT-A-300k30	171
5.117. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- FEVT-B-100k10	172
5.118. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- FEVT-B-400k40	172
5.119. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- FEVT-B-100k10	173
5.120. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- FEVT-B-500k50	173
5.121. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-A	175
5.122. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-A	175
5.123. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-A	176
5.124. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-A	176
5.125. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-B	178
5.126. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-B	178
5.127. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-B	179
5.128. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5- t-B	179
5.129. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1	180
5.130. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 5	180
5.131. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 6	181
5.132. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6- MCMC	183
5.133. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6- MCMC	184
5.134. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6- MCMC	184
5.135. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6- MCMC	184
5.136. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6- FHS-100	185

5.137. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-250	185
5.138. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-200	186
5.139. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-250	186
5.140. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-100k10	187
5.141. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-250k25	187
5.142. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-200k20	188
5.143. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-200k20	188
5.144. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM	190
5.145. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM	190
5.146. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM	191
5.147. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM	191
5.148. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1	192
5.149. VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 6	192
5.150. Quantile der geschätzten Parameter, SP500 2261, SV-Modell 7RV	193
5.151. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC	195
5.152. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC	196
5.153. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC	196
5.154. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC	196
5.155. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-250	197
5.156. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-100	197
5.157. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-400	198

5.158. Backtesting ($VarR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-250	198
5.159. Backtesting ($VarR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-250k25	199
5.160. Backtesting ($VarR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-100k10	199
5.161. Backtesting ($VarR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-400k40	200
5.162. Backtesting ($VarR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-250k25	200
5.163. Backtesting ($VarR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM	202
5.164. Backtesting ($VarR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM	202
5.165. Backtesting ($VarR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM	203
5.166. Backtesting ($VarR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM	203
5.167. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-MCMC	204
5.168. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC	204
5.169. Ergebnisse SV-Modell S&P500 2261, 1-FHS	204
5.170. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS	205
5.171. Ergebnisse SV-Modell S&P500 2261, 1-FEVT	205
5.172. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT	205
5.173. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-NORM	206
5.174. Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM	206
5.175. Quantile der geschätzten Parameter, SP500 5079, SV-Modell 7VIX	207
5.176. Backtesting ($VarR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC	209
5.177. Backtesting ($VarR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC	210
5.178. Backtesting ($VarR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC	210
5.179. Backtesting ($VarR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC	211
5.180. Backtesting ($VarR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250	211
5.181. Backtesting ($VarR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250	212

5.182. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-200	212
5.183. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250	212
5.184. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-100	213
5.185. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-250	213
5.186. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-300	214
5.187. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-300	214
5.188. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM	216
5.189. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM	216
5.190. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM	217
5.191. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM	217
5.192. Ergebnisse SV-Modell S&P500 5079, 1-MCMC	218
5.193. Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC	218
5.194. Ergebnisse SV-Modell S&P500 5079, 1-FHS	218
5.195. Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS	219
5.196. Ergebnisse SV-Modell S&P500 5079, 1-FEVT	219
5.197. Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT	219
5.198. Ergebnisse SV-Modell S&P500 5079, 1-NORM	220
5.199. Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM	220
5.200. Strafpunkte S&P500 2261&5079, SV-Modelle 1,7	220
5.201. Quantile der geschätzten Parameter, SP500 2261, SV-Modell	8 221
5.202. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC	223
5.203. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC	224
5.204. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC	224
5.205. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC	224
5.206. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-250	225

5.207. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-100	225
5.208. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-400	226
5.209. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-500	226
5.210. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-100k10	227
5.211. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-100k10	227
5.212. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-500k50	228
5.213. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-500k50	228
5.214. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM	230
5.215. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM	230
5.216. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM	231
5.217. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM	231
5.218. VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 1	232
5.219. VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 3	232
5.220. VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 8	233
5.221. Strafpunkte S&P500 2261, SV-Modelle 1, 3, 8	233
5.222. Quantile der geschätzten Parameter, SP500 5079, SV-Modell 9	235
5.223. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC	237
5.224. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC	237
5.225. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC	238
5.226. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC	238
5.227. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-250	239
5.228. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-250	239

5.229. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-500	240
5.230. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-500	240
5.231. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-100k10	241
5.232. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-200k20	241
5.233. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-300k30	242
5.234. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-100k10	242
5.235. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM	244
5.236. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM	244
5.237. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM	245
5.238. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM	245
5.239. VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 1	246
5.240. VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 3	246
5.241. VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 9	246
5.242. Strafpunkte S&P500 5079, SV-Modelle 1, 3, 9	247
5.243. Strafpunkte S&P500 2261&5079, SV-Modelle 1,7	247
5.244. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 2500, SV-Modell 10	248
5.245. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- MCMC	250
5.246. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- MCMC	251
5.247. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- MCMC	251
5.248. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- MCMC	252
5.249. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- FHS-250	252
5.250. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- FHS-250	253
5.251. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10- FHS-250	253

5.252. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FHS-250	253
5.253. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-300k30	254
5.254. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-250k25	254
5.255. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-200k20	255
5.256. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-200k20	255
5.257. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t	257
5.258. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t	257
5.259. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t	257
5.260. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t	258
5.261. Quantile der geschätzten Parameter, DJ 2500, SV-Modell 11	259
5.262. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC	261
5.263. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC	262
5.264. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC	262
5.265. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC	262
5.266. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-500	263
5.267. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250	263
5.268. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250	264
5.269. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250	264
5.270. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-400k40	265
5.271. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-200k20	265
5.272. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-100k10	265
5.273. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-500k50	266
5.274. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t	267

5.275. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t	268
5.276. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t	268
5.277. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t	268
5.278. VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 1	269
5.279. VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 3	269
5.280. VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 10	270
5.281. VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 11	270
5.282. VaR-Strafpunkte, DJIA 2500, SV-Modelle 1, 3, 10 und 11	270
5.283. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC	273
5.284. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC	273
5.285. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC	274
5.286. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC	274
5.287. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-200	275
5.288. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-100	275
5.289. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-250	275
5.290. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-250	276
5.291. Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM	277
5.292. Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM	278
5.293. Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM	278
5.294. Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM	279
5.295. Ergebnisse SV-Modelle 0.05-Value-at-Risk	280
5.296. Ergebnisse SV-Modelle 0.05-Value-at-Risk (Teil 2)	281
5.297. Ergebnisse SV-Modelle 0.01-Value-at-Risk	282
5.298. Ergebnisse SV-Modelle 0.01-Value-at-Risk (Teil 2)	283
5.299. Ergebnisse SV-Modelle 0.95-Value-at-Risk	284
5.300. Ergebnisse SV-Modelle 0.95-Value-at-Risk (Teil 2)	285
5.301. Ergebnisse SV-Modelle 0.99-Value-at-Risk	286
5.302. Ergebnisse SV-Modelle 0.99-Value-at-Risk (Teil 2)	287

5.303. VaR Performance: Strafpunkte und Rang (Teil 1)	289
5.304. VaR Performance: Strafpunkte und Rang (Teil 2)	290
5.305. VaR Performance: Top 10 (11) (Dow Jones und S&P-500)	291
5.306. Ergebnisse SV Modelle ganze Prognoseverteilung (DJIA und SP500, Teil 1)	292
5.307. Ergebnisse SV Modelle ganze Prognoseverteilung (DJIA und SP500, Teil 2)	293
5.308. Ergebnisse SV-Modell 3 0.05-Value-at-Risk (andere Zeitreihen)	294
5.309. Ergebnisse SV-Modell 3 0.01-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen)	295
5.310. Ergebnisse SV-Modell 3 0.95-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen)	295
5.311. Ergebnisse SV-Modell 3 0.99-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen)	296
5.312. VaR Performance: Strafpunkte (restliche Zeitreihen)	296
5.313. Ergebnisse SV Modell 3 ganze Prognoseverteilung (restliche Zeitreihen)	297
5.314. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC	300
5.315. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC	300
5.316. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC	300
5.317. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC	301
5.318. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250	301
5.319. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250	302
5.320. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-100	302
5.321. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250	303
5.322. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-200k20	303
5.323. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-250k25	304
5.324. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-250k25	304

5.325. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-400k40	304
5.326. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM	306
5.327. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM	306
5.328. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM	307
5.329. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM	307
5.330. Ergebnisse Simulationsstudie 0.05-Value-at-Risk; Zeitfenster 500	308
5.331. Ergebnisse Simulationsstudie 0.05-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000	308
5.332. Ergebnisse Simulationsstudie 0.01-Value-at-Risk; Zeitfenster 500	308
5.333. Ergebnisse Simulationsstudie 0.01-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000	309
5.334. Ergebnisse Simulationsstudie 0.95-Value-at-Risk; Zeitfenster 500	309
5.335. Ergebnisse Simulationsstudie 0.95-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000	310
5.336. Ergebnisse Simulationsstudie 0.99-Value-at-Risk; Zeitfenster 500	310
5.337. Ergebnisse Simulationsstudie 0.99-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000	310
5.338. Ergebnisse SV Modelle, ganze Prognoseverteilung (Simulationsstudie)	310
5.339. VaR Performance ASV-Modell 3: Strafpunkte (Simulierte Daten))	310
6.1. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS250	312
6.2. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS400	313
6.3. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS300	313
6.4. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS400	314
6.5. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, APARCH.st.st	315

6.6. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, APARCH.st.st .	316
6.7. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, APARCH.st.st .	316
6.8. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, APARCH.st.st .	316
6.9. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS250	317
6.10. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS300	318
6.11. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS250	318
6.12. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS400	318
6.13. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, APARCH.st.st . .	320
6.14. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, APARCH.st.st . .	320
6.15. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, APARCH.st.st . .	321
6.16. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, APARCH.st.st . .	321
6.17. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS250	322
6.18. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS300	322
6.19. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS400	323
6.20. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS400	323
6.21. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, APARCH.st.st . .	325
6.22. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, APARCH.st.st . .	325
6.23. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, APARCH.st.st . .	326
6.24. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, APARCH.st.st . .	326
6.25. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS250	327
6.26. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS500	327
6.27. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS400	328
6.28. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS500	328
6.29. Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, APARCH.st.st	330
6.30. Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, APARCH.st.st	330
6.31. Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, APARCH.st.st	331
6.32. Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, APARCH.st.st	331

6.33. Backtesting	$(VaR^{0.05}, ES^{0.05})$,	S&P500	2261,
APARCH.st.FHS250 332		
6.34. Backtesting	$(VaR^{0.01}, ES^{0.01})$,	S&P500	2261,
APARCH.st.FHS500 332		
6.35. Backtesting	$(VaR^{0.95}, ES^{0.95})$,	S&P500	2261,
APARCH.st.FHS400 333		
6.36. Backtesting	$(VaR^{0.99}, ES^{0.99})$,	S&P500	2261,
APARCH.st.FHS300 333		
6.37. Backtesting	$(VaR^{0.05}, ES^{0.05})$,	S&P500	2261, APARCH.st.st
6.38. Backtesting	$(VaR^{0.01}, ES^{0.01})$,	S&P500	2261, APARCH.st.st
6.39. Backtesting	$(VaR^{0.95}, ES^{0.95})$,	S&P500	2261, APARCH.st.st
6.40. Backtesting	$(VaR^{0.99}, ES^{0.99})$,	S&P500	2261, APARCH.st.st
6.41. Backtesting	$(VaR^{0.05}, ES^{0.05})$,	DAX	5000,
APARCH.st.FHS300 337		
6.42. Backtesting	$(VaR^{0.01}, ES^{0.01})$,	DAX	5000,
APARCH.st.FHS300 337		
6.43. Backtesting	$(VaR^{0.95}, ES^{0.95})$,	DAX	5000,
APARCH.st.FHS250 338		
6.44. Backtesting	$(VaR^{0.99}, ES^{0.99})$,	DAX	5000,
APARCH.st.FHS500 338		
6.45. Backtesting	$(VaR^{0.05}, ES^{0.05})$,	DAX	5000, APARCH.st.st
6.46. Backtesting	$(VaR^{0.01}, ES^{0.01})$,	DAX	5000, APARCH.st.st
6.47. Backtesting	$(VaR^{0.95}, ES^{0.95})$,	DAX	5000, APARCH.st.st
6.48. Backtesting	$(VaR^{0.99}, ES^{0.99})$,	DAX	5000, APARCH.st.st
6.49. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.05-Value-at-Risk (Dow Jones, Zeitfenster 500) 342		
6.50. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.01-Value-at-Risk (Dow Jones, Zeitfenster 500) 343		
6.51. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.95-Value-at-Risk (Dow Jones, Zeitfenster 500) 343		
6.52. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.99-Value-at-Risk (Dow Jones, Zeitfenster 500) 344		
6.53. VaR Performance GARCH Modelle: Strafpunkte (Dow Jones)	345		
6.54. Ergebnisse GARCH-Modelle ganze Prognoseverteilung (Dow Jones) 346		
6.55. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.05-Value-at-Risk (andere Zeitreihen) 347		
6.56. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.01-Value-at-Risk (andere Zeitreihen) 347		

6.57. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.95-Value-at-Risk (andere Zeitreihen)	348
6.58. Ergebnisse GARCH-Modelle 0.99-Value-at-Risk (andere Zeitreihen)	348
6.59. VaR Performance GARCH Modelle: Strafpunkte (restliche Zeitreihen)	349
6.60. Ergebnisse GARCH-Modelle ganze Prognoseverteilung (andere Zeitreihen)	350
6.61. Ergebnisse APARCH Value-at-Risk (Simulationsstudie); Zeitfenster 500	351
6.62. Ergebnisse APARCH.st.st, ganze Prognoseverteilung (Simulationsstudie)	351
6.63. VaR Performance APARCH vs. ASV-Modell 3: Strafpunkte (Simulierte Daten))	352
6.64. Ergebnisse Historical Simulation 100	353
6.65. VaR Performance Historical Simulation: Strafpunkte	354
6.66. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Dow Jones)	355
6.67. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (S&P 500)	355
6.68. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (DAX)	356
6.69. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Boeing Aktie)	356
6.70. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Hewlett-Packard Aktie)	356
6.71. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Brent Oil)	357
6.72. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (GBP/USD Währungskurs)	357
6.73. Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (USD/JPY Währungskurs)	357
A.1. Sampling Methoden im SV-Modell 2	377
A.2. Sampling Methoden im SV-Modell 3	377
A.3. Sampling Methoden im SV-Modell 4	378
A.4. Sampling Methoden im SV-Modell 5	378
A.5. Sampling Methoden im SV-Modell 6	379
A.6. Sampling Methoden im SV-Modell 7	379
A.7. Sampling Methoden im SV-Modell 8	380
A.8. Sampling Methoden im SV-Modell 9	380
A.9. Sampling Methoden im SV-Modell 10	381
A.10. Sampling Methoden im SV-Modell 11	381

Abkürzungsverzeichnis

ACF, acf	. . .	Autokorrelationsfunktion
ACVF	. . .	Autocovariance Function
AGIS	Accelerated Gaussian Importance Sampler
AP.nrm	. . .	APARCH(1,1)-Modell mit normalverteilter Innovation
AP.st	APARCH(1,1)-Modell mit schiefer t-verteilter Innovation
AP.t	APARCH(1,1)-Modell mit Student-t-verteilter Innovation
APARCH	. .	Asymmetric Power ARCH
AR	Autoregressive
ARCH	. . .	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
ARIMA	. .	Autoregressive Integrated Moving Average
ARMA	. . .	Autoregressive Moving Average
ARS	Adaptive Rejection Sampling
ASV	Asymmetric Stochastic Volatility
ASVRVC	. .	ASV-Model with Corrected Realized Volatility
Aufl.	Auflage
BA	Börsenkürzel Boeing Aktie
BDS	Brock-Dechert-Scheinkman
BIC	Bayesian Information Criterion
Bloos	Blood-Out-Of-a-Stone
BO	Börsenkürzel Brent Oil Europe

BSV	Basis Stochastic-Volatility-Modell
BT	Bootstrapping-Test zum Testen der Richtigkeit des ES
BUGS	Bayesian inference Using Gibbs Sampling
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
CAC	Cotation Assistée en Continu (Französischer Aktienindex)
CAD	Canadian Dollar
CBOE	Chicago Board Options Exchange
cc	Conditional Coverage
CD	Compact Disc
CEO	Chief Executive Officer
CHARMA	Conditional Heteroscedastic Autoregressive Moving Average
CRD	Capital Requirements Directive
CRSP	Center for Research in Security Prices
DAG	Directed Acyclic Graph
DAX	Deutscher Aktienindex
DIC	Deviation Information Criterion
DJ	Dow Jones
DJDS	Dow Jones Zeitreihe mit Quelle Datastream
DJIA	Dow Jones Industrial Average
ECF	Empirical Characteristic Function
EG	Europäische Gemeinschaft
EGARCH	Exponential GARCH
EIA	United States Energy Information Administration

EMM	Effiziente Momentenmethode
ES	Expected Shortfall
ESA	Standardisierte ES-Abweichungen
et al.	und andere
EU	Europäische Union
EVT	Extreme Value Theory
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average
Fed	Federal Reserve
FEVT	Filtered Extreme Value Theory
FHS	Filtered Historical Simulation
FTSE	Financial Times Stock Exchange
G11.nrm	GARCH(1,1)-Modell mit normalverteilter Innovation
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
GBP	British Pound
GE	Geldeinheiten
GED	Generalized Exponential Distribution
ggf.	gegebenenfalls
GJR	Glosten, Jagannathan und Runkle
GMM	Generalized Method of Moments
GPV	Ganze Prognoseverteilung
HPQ	Börsenkürzel Hewlett-Packard Aktie
Hrsg.	Herausgeber
HS	Historical Simulation

IG	Inverse-Gamma
IGARCH	. . .	Integrated GARCH
IID	Independent and Identically Distributed
ind	Independence
inkl.	inklusive
JPY	Japanischer Yen
KL	Anzahl Klassen für Histogramm/ Anpassungstest
KSC	Kim-Shephard-Chib
KWG	Kreditwesengesetz
LB	Ljung Box
LINEX	. . .	Linear Exponential (Loss Function)
LR	Likelihood Ratio
MA	Moving Average
MAE	Mean Absolute Error
MCMC	. . .	Markov Chain Monte Carlo
MixGED	. . .	Mixed Generalized Exponential Distribution
MixN	Mixed Normal
MM	Momentenmethode
MSE	Mean Squared Error
n.a.	nicht verfügbar
NA	nicht verfügbar
NASDAQ	. . .	National Association of Securities Dealers Automated Quotations
Nr.	Nummer

NYSE	New York Stock Exchange
Petrobras	. . .	Petroleo Brasileiro
PF	Proportion-of-Failures
Prof.	Professor
QML	Quasi Maximum Likelihood
RC	Regulatory Capital
RCA	Random Coefficient Autoregressive
RMSE	Root Mean Square Error
RV	Realized Volatility
S.	Seite
S&P	Standard and Poor's
SASVtt	Asymmetric Stochastic Volatility (bivariate Skewed t)
SC	Scwarz (Information) Criterion
SCAM	Single Component Adaptive Metropolis
SEM	Simulated Expectation Maximization
SIM	Simulation
SML	Simulated Maximum Likelihood
SMM	Simulierte Momentenmethode
SRC	Specific Risk Charge
SSRN	Social Science Research Network
SV	Stochastic Volatility
SVA	Shareholder Value Added
SVM	Stochastic-Volatility-in-Mean

TOPIX	Tokyo Stock Price Index
TSRV	Two-Scale Realized Volatility
tSV	Stochastic Volatility mit Student-t-verteilter Innovation
TT	t-Test zum Testen der Richtigkeit des ES
u.a.	unter anderem
UK	United Kingdom
US	United States
USA	United States of America
USD	United States Dollar
VaR	Value-at-Risk
vgl.	vergleiche
VIX	Chicago Board Options Exchange- Volatility Index
Vol.	Volume
vs.	versus
z.B.	zum Beispiel
ZF	(Schätzungs-) Zeitfenster

Symbolverzeichnis

$\mathbb{1}$	Indikatorfunktion
\setminus	Differenz zweier Mengen
\perp	Unabhängig
∞	Unendlich
\xrightarrow{d}	Konvergenz in Verteilung
\Leftrightarrow	Äquivalenz
$\#$	Mächtigkeit, Anzahl der Elemente
\sim	Genügt der Verteilung
\cup	Vereinigung zweier Mengen
α_i	a_{t-i} -Koeffizient der GARCH-Volatilitätsgleichung
β_i	σ_{t-i} -Koeffizient der GARCH-Volatilitätsgleichung
\mathcal{B}^d	Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}^d
$\Delta(t, k, T)$	Preisänderung von $t + (k - 1)T$ bis $t + kT$
dvd_t	Dividende zur Zeit t
E	Zustandsraum eines stochastischen Prozesses
$E125$	Anzahl der VaR-Überschreitungen für 125-tägige Perioden.
$E250$	Anzahl der VaR-Überschreitungen für 250-tägige Perioden.
$E500$	Anzahl der VaR-Überschreitungen für 500-tägige Perioden.
ϵ	Störterm
ε	Störterm

$ES_{F,C}$. . .	Full Current Expected Shortfall
$ES_{R,C}$. . .	Reduced Current Expected Shortfall
$ES_{R,S}$. . .	Reduced Stressed Expected Shortfall
$ES_{t+h t}^p$. . .	ES zum Niveau p der Rendite von t bis $t + h$ zur Zeit t
$\widehat{ES}_{t+h t}^p$. . .	Prognose von $ES_{t+h t}^p$
η_t	Störterm der SV-Volatilitätsgleichung
$E(X)$. . .	Erwartungswert der Variable X
$\exp(x)$. . .	Exponentialfunktion an der Stelle x
$E(X Y)$. . .	Bedingter Erwartungswert von X gegeben Y
\mathbb{F}	Filtration $\{\mathcal{F}_t t \in \mathcal{T}\}$
\mathcal{F}	Ereignisraum
\mathcal{F}_t	Information zum Zeitpunkt t
$\hat{F}_{t t-1}$. . .	Prognoseverteilung der Zeit- t -Rendite mit Info von Zeit $t-1$
γ	Absolutglied der SV-Volatilitätsgleichung
H	Anzahl Simulationen bei der SMM
h_t	Logarithmierte Varianz σ_t^2
$IG(a, b)$. . .	Inverse-Gamma Verteilung mit Parametern a und b
$\inf A$	Infimum der Menge A
I_t	Indikator-Reihe der VaR-Überschreitungen
LR_{cc}	Conditional-Coverage Likelihood-Ratio Test
LR_{ind}	Independence Likelihood-Ratio Test
LR_{PF}	Proportion-of-Failures Likelihood-Ratio Test
$\min A$	Minimum der Menge A
$i \bmod p$	Rest der Division i durch p

μ	Absolutglied der Renditengleichung
μ_t	Bedingter Erwartungswert der Renditengleichung
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen inkl. 0
$n1$	Anzahl der VaR-Überschreitungen
$n.burnin$	Anzahl der Burn-in Iterationen
$NID(\mu, \sigma^2)$	Unabhängig $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt
$n.iter$	Anzahl Iterationen
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
N_t	Nominalwert des Portfolios zur Zeit t
$n.thin$	Thinning Parameter
ν	Freiheitsgrade-Parameter der Student-t-Verteilung
Ω	Menge der Umweltzustände
ω	Absolutglied der GARCH-Volatilitätsgleichung
P	Wahrscheinlichkeitsmaß
p_0	Zielniveau des Value-at-Risk
ϕ	Autoregressiver Koeffizient der SV-Volatilitätsgleichung
\prod	Produkt
P_t	Preis zur Zeit t
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^d	Menge der d -Tupel reeller Zahlen
ρ	Korrelationskoeffizient bei den ASV-Modellen
\mathbb{R}_+	Menge der positiven reellen Zahlen
r_t	Stetige Rendite zur Zeit t

R_t	Diskrete Rendite zur Zeit t
RV_t	Realisierte Volatilität zur Zeit t
Σ	Menge der Varianzen $\{\sigma_t^2\}_{t=1}^T$
σ_η^2	Varianz des Störterms η_t
$\sigma(\eta_s, s \leq t)$	Vom stochastischen Prozess $(\eta_s)_{s \leq t}$ erzeugte σ -Algebra
σ_t	Volatilität zur Zeit t
Σ_{XX}	Varianz-Kovarianz-Matrix des Vektors X
spl_t	Splitverhältnis zur Zeit t
Σ	Summe
$\sup A$	Supremum der Menge A
T	Ende des Betrachtungszeitraums
θ	Parametervektor im SV-Modell
\mathcal{T}	Zeitindex
$t(\nu)$	Student-t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden
$\text{Unif}(a, b)$	Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b)
V	Menge aller stochastischen Knoten im DAG
$VaR_{t+h t}^p$	VaR zum Niveau p der Rendite von t bis $t+h$ zur Zeit t
$\widehat{VaR}_{t+h t}^p$	Prognose von $VaR_{t+h t}^p$
VaR_t^p	Kurz für $VaR_{t t-1}^p$
\widehat{VaR}_t^p	Kurz für $\widehat{VaR}_{t t-1}^p$
$V \setminus v$	Menge aller stochastischen Knoten im DAG außer v
VIX_t	VIX-Index zur Zeit t
v	Ein stochastischer Knoten im DAG
W_T	Gewichtungsmatrix bei der GMM Methode

X_t Stochastischer Prozess
 Y Menge der Renditen $\{r_t\}_{t=1}^T$
 \mathbb{Z} Menge der ganzen Zahlen
 z_t Standardisierte Residuen

1. Einleitung

Diese Dissertation lässt sich im Bereich der ökonometrischen Analyse von Finanzmarktzeitreihen eingliedern. Finanzmarktzeitreihen sind z.B. Rohstoffpreise, Aktienindizes, Kurse einzelner Aktien, Zinsen, Währungskurse, Anleihenpreise, Futurespreise und andere Derivatpreise gemessen an bestimmten (regelmäßigen) Zeitintervallen wie z.B. einem Handelstag oder einer Handelswoche. Die Preise auf Finanzmärkten sind stochastischer Natur (nach dem jetzigen Wissensstand der Menschheit unvorhersagbar) und so bietet sich die Entwicklung stochastischer Modelle zu ihrer Beschreibung an. Die Zeitreihenanalyse von Finanzmarktzeitreihen ist ein relativ neues Forschungsgebiet, besonders stark entwickelt in den letzten 40 Jahren. In den 80er Jahren des 20ten Jahrhunderts war es immer noch schwierig, an lange Finanzmarktzeitreihen heranzukommen und es war auch schwierig, eventuelle neue Modelle empirisch zu überprüfen, da die Rechnerkapazität damals noch gering war¹. Heutzutage sind lange Finanzmarktzeitreihen leicht zugänglich, es gibt auch die Möglichkeit, Hochfrequenzdaten (mit Zeitintervallen von wenigen Minuten oder auch die komplette Geschichte der Transaktionen) zu analysieren. Historisch gesehen war die erste Anwendung der Zeitreihenanalyse in Gebieten wie Ingenieurwesen und Naturwissenschaften². Einige der frühen Arbeiten im Bereich der Analyse von Finanzmarktpreisen entwickeln die sogenannte Random-Walk Hypothese für die Finanzmarktpreise. Die Preise bilden dann einen Random Walk:

$$P_t = \mu + P_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2) \quad (1.1)$$

Bachelier (1900) wird oft als erster Beitrag mit Verwendung des Random Walks zur Beschreibung der Finanzmarktpreise angesehen, allerdings argumentiert Jovanovic (2006, S. 191), dass Regnault (1863) eigentlich der erste war. Bei Bachelier (1900) handelt es sich um einen arithmetischen Random Walk wie in 1.1 mit $\mu = 0$. Eine Alternative haben Osborne (1959) und Samuelson (1965) eingeführt³, bei der die logarithmierten Preise als

¹Vgl. Taylor (2008, S. XV).

²Vgl. Andersen et al. (2009, S. 1).

³Samuelson hat die geometrische Brownsche Bewegung in seinen Vorlesungen viel früher eingeführt: vgl. Samuelson (1965, S. 13).

Random Walk modelliert werden, und somit die Preise als geometrischer Random Walk. Dies hat Vorteile, da bei der früheren Modellierung als arithmetischer Random Walk negative Preise entstehen können. Eine Übersicht der frühen Werke zum Random Walk Modell geben Cootner (1964)⁴ und Granger und Morgenstern (1970, S. 76). Erste empirische Arbeiten im Bereich der Finanzmarktanalyse sind Working (1934), Cowles (1933), Cowles (1944) und Cowles und Jones (1937). Diese Arbeiten fokussieren auf die Prognostizierbarkeit der zukünftigen Preisänderungen auf Finanzmärkten und kommen zum Schluss, dass die Preisänderungen nicht prognostizierbar sind⁵. Kendall (1953) macht eine weitere einflussreiche Studie, in der er feststellt, dass wöchentliche Preisänderungen einer Vielfalt von Finanzmarktpreisen unprognostizierbar sowohl durch vergangene Preisänderungen der untersuchten Zeitreihe als auch durch Preisänderungen anderer Finanzmarktzeitreihen sind⁶. Alle diese Ergebnisse unterstützen die Random-Walk-Hypothese. Neue empirische Befunde wie in Mandelbrot (1963) geben erste Anzeichen, dass ein Random Walk in der bisherigen Form (mit unabhängig identisch normalverteilten Preisänderungen) nicht angemessen ist. Mandelbrot (1963) stellt u.a. fest, dass Preisänderungen leptokurtisch sind (was mit einer Normalverteilung nicht vereinbar ist) und dass auf kleine (im Betrag) Preisänderungen normalerweise kleine folgen und auf große absolute Preisänderungen tendenziell wieder große folgen⁷ (was der Unabhängigkeitsannahme für die Zuwächse im Random Walk Modell widerspricht). Als Antwort auf das erste Problem wurden die stabilen Pareto Verteilungen zur Modellierung der Preisänderungen eingeführt, die haben jedoch eine unendliche Varianz und erklären weiterhin nicht das Volatilitätsclustering. Eine wichtige Entwicklung im Bereich der Zeitreihenanalyse ist Box und Jenkins (1976), die die Klasse der ARIMA-Modelle einführen. Laut der Wold'schen Zerlegung⁸ hat jede rein stochastische schwach stationäre Zeitreihe eine unendliche moving-average ($MA(\infty)$) Darstellung⁹. Jedes unendliche MA Modell kann mit beliebiger Genauigkeit durch ein ARMA Modell mit endlichen AR- und MA-Lags approximiert werden. Eine Zeitreihe x_t ist schwach stationär, wenn die ersten zwei Momente konstant bei Zeitverschiebung bleiben, d.h. wenn $E(x_t) = \mu$ konstant ist, und die Autokovarianzfunktion $\gamma_l = cov(x_t, x_{t-l})$ eine Funktion ist, die nur vom

⁴Cootner (1964) umfasst auch eine englische Übersetzung von Bachelier (1900).

⁵Lediglich finden Cowles und Jones (1937) positive Korrelation zwischen aufeinander folgenden Preisänderungen, die aber später von Cowles (1960) und Working (1960) wegen einer nicht angemessenen Durchschnittsbildung als unechte Korrelation entlarvt wird.

⁶Vgl. Mills (1993, S. 1).

⁷Später als Volatilitätsclustering bekannt.

⁸Vgl. Wold (1938).

⁹Vgl. Clements und Hendry (1998, S. 15).

Lag l abhängig ist. Die Finanzmarktpreise sind nicht stationär, sie können durch passende Transformation jedoch stationär gemacht werden¹⁰. Eine solche Transformation, die sich in der Ökonometrie der Finanzmärkte etabliert hat, ist die Renditenbildung. Es gibt viele Möglichkeiten zur Renditenbildung, hier werden nur zwei erwähnt: die diskrete Rendite $R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ und die stetige (log-) Rendite $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$, wobei P_t die Zeitreihe der Preise ist¹¹. Die Renditenbildung hat unter anderem zwei Vorteile¹²: die Renditen sind skalenfreie Zusammenfassung der Investitionsmöglichkeit und sie sind leichter modelliert wegen ihrer vorteilhaften statistischen Eigenschaften wie Stationarität und Ergodizität. In den letzten 50 Jahren wurden viele stilisierte Fakten über die Renditen dokumentiert. Bezogen auf die stetigen Tagesrenditen sind folgende stilisierte Fakten zu erwähnen¹³:

1. **Fat Tails** Die (unbedingte) Verteilung der Renditen für Intervalle von einer Stunde bis zu einigen Wochen hat fat tails und ist leptokurtisch.
2. **Keine Autokorrelation** Autokorrelationen der Renditen sind oft nicht signifikant (bei manchen Zeitreihen treten manchmal Autokorrelationen zu den kleinen Lags auf), mit Ausnahme der ganz kurzen Intervalle (ca. 10 Minuten), bei denen Mikrostruktureffekte eine Rolle spielen.
3. **Asymmetrie** Die (unbedingten) Verteilungen von Aktienrenditen haben schwerere linke Tails als rechte Tails. Verteilungen der Währungskurse sind symmetrischer. Tägliche Änderungen in Credit Spreads haben schwerere rechte Tails.
4. **Normalverteilung bei Aggregation** Bei Erhöhung des Zeitintervalls der Renditenmessung nähert sich die Renditenverteilung mehr an die Normalverteilung, insbesondere ist sie nicht mehr leptokurtisch.
5. **Volatilitätsclustering** Auf betragsmäßig große Renditen (sowohl positiv als auch negativ) folgen (tendenziell) wieder betragsmäßig große Renditen, und auf betragsmäßig kleine Renditen folgen (tendenziell) wieder betragsmäßig kleine Renditen. Während die Renditen selbst oft nicht autokorreliert sind, zeigen quadrierte oder absolute Renditen eine positive Autokorrelation auf.

¹⁰Vgl. Clements und Hendry (1998, S. 15).

¹¹Bei Wertpapieren mit Dividenden müssen auch die Dividenden entsprechend berücksichtigt werden.

¹²Vgl. Campbell et al. (1997, S.9).

¹³Vgl. Cont (2010, S. 1777-1782) mit den Literaturangaben darin und Francq und Zakoian (2010, S. 7-10).

6. **Bedingte Fat Tails** Die standardisierten Residuen von GARCH Modellen angewandt auf die Renditen haben immer noch fat tails.
7. **Langsam abklingende Autokorrelation der absoluten Renditen** Die Autokorrelationsfunktion von absoluten Renditen klingt langsam ab als Funktion des Zeit-Lags.
8. **Leverage Effekt** Die Volatilität erhöht sich tendenziell wenn der Preis fällt; genauer: die Volatilitätsänderungen sind negativ korreliert mit (vergangenen) Renditen.
9. **Korrelation zwischen Handelsvolumen und Volatilität** Das Handelsvolumen in einer Periode ist positiv korreliert mit der Volatilität (z.B. Realisierte Volatilität) für diese Periode.
10. **Asymmetrie in den Zeitskalen** Volatilitätsmaße berechnet für größere Zeitintervalle können Volatilitätsmaße von darauffolgenden kleineren Intervallen vorhersagen. Dagegen haben Volatilitätsindikatoren kleinerer Intervalle keine Vorhersagekraft für zukünftige Volatilität größerer Intervalle.
11. **Saisonalität** Einige Kalender-Effekte wie der Wochentag oder die Nähe von Feiertagen können signifikant die Renditen und/oder die Volatilität beeinflussen. Innerhalb eines Tages zeigt die Volatilität ebenfalls typische Muster auf.

Die ARIMA-Modelle von Box und Jenkins sind nicht angemessen zur Modellierung der Renditen wenn die Renditen nicht autokorreliert sind¹⁴. Es besteht jedoch eine Abhängigkeit über die lineare Abhängigkeit hinaus, wie der fünfte stilisierte Fakt zeigt. Die frühere (Gaußsche) Random-Walk-Hypothese bezogen auf die logarithmierten Preise¹⁵ mündet in eine unabhängig identische (Gauß-) Verteilung für die stetigen Renditen. Die Normalverteilung ist allerdings nicht angemessen wegen des ersten stilisierten Fakts, und die Unabhängigkeit ist nicht angemessen wegen des Volatilitätsclustering. Beim Versuch, ein passendes Modell für die Renditen zu finden, sind das ARCH-Modell von Engle (1982) und das allgemeinere GARCH-Modell von Bollerslev (1986) entstanden. Das GARCH-Modell besitzt die Volatilitätsclustering-Eigenschaft und impliziert eine leptokurtische unbedingte Renditenverteilung selbst bei

¹⁴Vgl. den zweiten stilisierten Fakt.

¹⁵Vgl. Samuelson (1965).

normalverteilten Innovationen in 1.2¹⁶. Die GARCH-Modelle sind Volatilitätsmodelle: sie versuchen, die Entwicklung der bedingten Renditenstandardabweichung (Volatilität) explizit zu modellieren, damit das resultierende Modell die Volatilitätsclustering-Eigenschaft aufweist. Die GARCH-Modelle, wie auch viele neuere Renditenmodelle, haben die folgende Ausgangsgleichung:

$$r_t = \mu_t + a_t, a_t = \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim IID(0, 1) \quad (1.2)$$

Dabei ist σ_t eine nicht-negative Folge von Zufallsvariablen. μ_t ist der bedingte Erwartungswert von r_t gegeben die Information bis zum Zeitpunkt $t - 1$. Das ARMA(p,q)-Modell entspricht einer Modellierung von μ_t als¹⁷:

$$\mu_t = \psi_0 + \sum_{i=1}^p \psi_i r_{t-i} - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i} \quad (1.3)$$

Der Prozess σ_t wird Volatilitätsprozess genannt¹⁸. Gegeben σ_t , ist die Varianz von r_t gleich σ_t^2 . Für die dynamische Modellierung von σ_t gibt es in der Literatur viele Möglichkeiten. Wenn $\mu_t = 0$ und σ_t konstant ist, dann sind r_t unabhängig identisch verteilt und der logarithmierte Preis folgt einem (arithmetischen) Random Walk. Beim GARCH(p,q)-Modell gilt die folgende Gleichung¹⁹ für σ_t^2 :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (1.4)$$

Im Jahr der Entdeckung der ARCH-Modelle hat Taylor (1982) unabhängig von Engle (1982) eine andere dynamische Entwicklung von σ_t^2 vorgeschlagen, bei der die Volatilität keine deterministische Funktion von vergangenen Werten von a_t und σ_t darstellt- das Stochastic Volatility Modell²⁰. Bei diesem Modell wird σ_t^2 wie folgt modelliert:

$$\ln(\sigma_t^2) = \gamma + \phi(\ln(\sigma_{t-1}^2) - \gamma) + \eta_t \quad (1.5)$$

¹⁶Vgl. Francq und Zakoian (2010, S. 48).

¹⁷Vgl. Tsay (2002, S. 82).

¹⁸Vgl. Andersen et al. (2009, S.3).

¹⁹Vgl. Francq und Zakoian (2010, S. 19) und Bollerslev (1986). Andersen et al. (2009, S. 3) und Tsay (2002, s. 93) haben die Reihenfolge von p und q gerade umgekehrt.

²⁰Oft wird falsch Taylor (1986) als erste Einführung der Stochastic Volatility Modelle zitiert.

η_t für alle t ist unabhängig identisch verteilt mit Erwartungswert 0 und ist unabhängig von ϵ_t für alle t . Andere erwähnenswerte²¹ zeitdiskrete Volatilitätsmodelle sind das Conditional Heteroscedastic Autoregressive Moving Average (CHARMA) Modell von Tsay (1987) oder das Random Coefficient Autoregressive (RCA) Modell von Nicholls und Quinn (1982). Die Mainstream-Richtungen in denen sich die zeitdiskreten Volatilitätsmodelle jedoch entwickelten, sind die GARCH Modelle und die Stochastic-Volatility-Modelle: seit ihrer Einführung haben die Modelle der GARCH-Familie und die Modelle der Stochastic-Volatility Familie enormes Interesse seitens der Finanzmarktteilnehmer und der Akademiker erlebt. Anfangs waren die Stochastic-Volatility-Modelle nicht so populär wie die GARCH Modelle, da die SV-Modelle durch die konventionelle Maximum Likelihood Methode im allgemeinen (bei $\phi \neq 0$) nicht geschätzt werden können, da die Likelihoodfunktion analytisch nicht explizit verfügbar ist wegen der latenten Natur der Volatilität σ_t . Andere Methoden wie die Momentenmethode oder die Quasi Maximum Likelihood Methode wurden vorgeschlagen, die jedoch nicht sehr effizient sind. Neuere, effizientere Methoden wurden eingeführt wie die Markov Chain Monte Carlo Methoden²² oder die Simulated Maximum Likelihood-Methode²³. Die Entwicklung dieser effizienten Methoden sowie die Erhöhung der Rechnerkapazität in den letzten Jahrzehnten haben die Stochastic-Volatility-Modelle zugänglicher gemacht und dazu geführt, dass sie an Bedeutung gewonnen haben. Oft wird festgestellt, dass Stochastic-Volatility-Modelle bessere Anpassung an die empirische Daten anbieten als GARCH-ähnliche Modelle²⁴, die Studien bezüglich der out-of-sample Prognosefähigkeit der zeitdiskreten SV Modelle sind jedoch wenig und nicht einheitlich in ihren Schlussfolgerungen, insbesondere bei den Value-at-Risk und Expected Shortfall Prognosen.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, diese Lücke zum Teil auszufüllen, speziell mit einer Beurteilung der out-of-sample Prognosefähigkeit der Stochastic-Volatility Modelle, insbesondere bei der effizienten Ermittlung des Value-at-Risk und Expected Shortfall, zweier Eigenschaften der Prognose-Randverteilung der zukünftigen Rendite. Neben den Value-at-Risk und Expected Shortfall-Prognosen kann man durch den Ansatz der SV-Modelle eine Prognose der ganzen Randverteilung der zukünftigen Rendite machen und auswerten, der Value-at-Risk stellt nur einen Aspekt davon dar. Neben einer umfassenden Erfassung der existierenden SV-Modelle und deren Anwendung

²¹Vgl. Tsay (2002, S. 107-110).

²²Vgl. Jacquier et al. (1994).

²³Vgl. Andersen et al. (2009, S. 322-326).

²⁴Vgl. Kapitel 3.3 dieser Arbeit.

wird versucht, eigene Modellerweiterungen zu entwickeln, die eine effizientere Ermittlung der Risikomaße ermöglichen. Es wird versucht, in der Modellspezifikation ein Hochfrequenz-Maß wie RV (Realized Volatility) (oder auch die implizite Volatilität VIX) zu integrieren, oder eine Schiefe in der t-Verteilung existierender SV-Modelle einzubauen. Die Arbeit gibt auch eine Übersicht über die Schätzungsverfahren für Stochastic-Volatility-Modelle, insbesondere die Markov Chain Monte Carlo Methode und die MCMC-Software WinBUGS/OpenBUGS. Es gibt sonst wenige, nicht vollständige Beiträge in der Literatur zu den in WinBUGS/OpenBUGS benutzten MCMC-Sampling-Methoden. Es werden auch asymmetrische GARCH Modelle eingesetzt und deren Risikomaß-Prognoseleistung wird mit derjenigen der Modelle der stochastischen Volatilität verglichen. Als Datengrundlage werden in dieser Arbeit zahlreiche Finanzmarktzeitreihen verwendet, z.B. Tagesrenditen von Aktienindizes (Dow-Jones, S&P-500, DAX), Einzelaktien (Boeing, Hewlett-Packard), Rohstoffen (Brent Oil Europe) und Währungskursen (GBP/USD, USD/JPY). Stichprobengrößen sind von 2261 bis hin zu 10000 tägliche Beobachtungen. Zu beachten ist, dass die größeren Stichprobengrößen auch größere Ansprüche an die Ergebnisse auferlegen.

Erwähnenswerte Beiträge in der Literatur, die zeitdiskrete Stochastic-Volatility-Modelle zur Value-at-Risk-Berechnung anwenden, sind Sadorsky (2005), Galdi und Pereira (2007), Tesarova (2012) und Xu und Wirjanto (2013). Alle diese Beiträge behandeln nur wenige Stochastic-Volatility-Modelle, benutzen fürs Backtesting nur einen kleinen Teil der Tests in dieser Dissertation und haben eine weniger vielfältige Auswahl an Finanzmarktzeitreihen sowie kürzere Zeitreihen.

Sadorsky (2005) untersucht 2 SV-Modelle, 3 Backtesting Tests (in der Notation dieser Arbeit sind dies die LR_{PF} , LR_{ind} und LR_{cc} -Tests) und 4 Futures-Zeitreihen: S&P 500, 10-jährige Government Bonds, Crude Oil und den Währungskurs USD/CAD (US/Kanadische Dollar) mit jeweils ca. 5000 Beobachtungen. Sadorsky (2005) kommt zum Schluss, dass beide SV-Modelle vom LR_{PF} -Test verworfen werden.

Galdi und Pereira (2007) untersuchen ein SV-Modell, ein GARCH Modell, und den EWMA-Ansatz von RiskMetrics angewandt auf 2729 Petrobras-Tagesrenditen (vom Energie-Konzern Petroleo Brasileiro aus Brasilien). Sie kommen zum Schluss, dass der EWMA Ansatz von RiskMetrics nicht schlechter ist als die anderen zwei Modelle, zum Teil sogar besser. Zu Backtesting-Zwecken wurde lediglich der Ampelansatz von Basel herangezogen (siehe

Tabelle 2.1 weiter im Text), was in dieser Dissertation dem LR_{PF} -Test entspricht²⁵.

Tesarova (2012) untersucht ein SV-Modell (SV-Modell 5 in dieser Dissertation) und das GARCH(1,1)-Modell. Die von Tesarova (2012) verwendeten Zeitreihen sind die Aktienindizes S&P 500, NASDAQ Composite, CAC, DAX und FTSE und beinhalten jeweils ca. 1000 Tagesrenditen. Zu Backtesting-Zwecken werden die LR_{PF} (eingesetzt von Kupiec (1995)) und die LR_{ind} und LR_{cc} -Tests (eingesetzt von Christoffersen (1998)), sowie Untersuchungen der ganzen Prognoseverteilung durchgeführt. Es werden die 0.01, 0.05 und 0.10-Value-at-Risk ermittelt. Tesarova (2012) kommt zum Schluss, dass das SV-Modell besser ist als das GARCH (1,1) Modell für die verwendeten Zeitreihen. Ein Vergleich der Tabellen 5.303 (Modell 5-MCMC) und 6.53 (Modell G11.nrm.nrm) zeigt eine Summe von 14 Strafpunkten für den 0.05/0.01-VaR des 5-MCMC Modells und 16 Strafpunkten für den 0.05/0.01-VaR des GARCH(1,1)-Modells. Dies bedeutet, dass die Ergebnisse von Tesarova (2012) auch in dieser Arbeit bestätigt werden, hier für die Dow-Jones 10000-Reihe.

Xu und Wirjanto (2013) führen ein neues Stochastic Volatility Modell ein (mit Mixture-of-Normal-verteilter Innovation der Renditengleichung), für das sie gute Value-at-Risk Ergebnisse für S&P 500 und CRSP berichten²⁶.

Keine der erwähnten Arbeiten macht eine Expected-Shortfall-Prognose mithilfe der SV-Modelle. Die vorliegende Dissertation ist eine viel größere Studie als die erwähnten Arbeiten. Sie umfasst 11 SV-Hauptmodelle mit 63 Varianten, 4 GARCH-Hauptmodelle mit 11 Varianten, 10 Value-at-Risk Tests, Untersuchungen der ganzen Prognoseverteilungen, 2 Expected-Shortfall Tests und verwendet eine Vielfalt an Zeitreihen mit zum Teil 12000 täglichen Beobachtungen²⁷.

Die wichtigste Motivation der Arbeit liegt in der großen praktischen Relevanz der Risikomessung eines (Gesamt-)Portfolios. Die berechneten Kennzahlen wie Value-at-Risk und Expected Shortfall sind sowohl für interne Zwecke in Finanzinstitutionen²⁸ (inkl. als Information an die Aktionäre), als auch für die Aufsichtsbehörden wichtig. Intern können die Kennzahlen passiv für das Reporting an das Generalmanagement dienen, defensiv zur Festsetzung der Händler-Limits oder Business-Unit-Limits. Diese Kennzahlen können auch für das aktive Risikomanagement von Nutzen sein: bei der Kapitalallokation zwischen Händlern, Business-Units oder Produkten,

²⁵Genau genommen bestraft der LR_{PF} -Test sowohl zu viele, als auch zu wenige VaR-Überschreitungen, während der Ampelansatz nur zu viele Überschreitungen bestraft.

²⁶Online ist zur Zeit des Schreibens nur ein Abstract des Artikels verfügbar (bei SSRN).

²⁷Nicht alle SV-Modelle werden auf alle Zeitreihen angewandt.

²⁸In Nichtfinanz-Institutionen wird manchmal der Cash-Flow-at-Risk berechnet; Value-at-Risk könnte auch für Asset Manager relevant sein, wie z.B. Verwalter von Pensionsfonds.

bei der risikogerechten Evaluierung der Performance der Händler/Business Units/Produkte und entsprechende risikogerechte Berechnung der Boni (was die Anreize zum übermäßigen Übernehmen von Risiken korrigiert), bei Berechnen des Marginaleffekts einer zusätzlichen Position auf das Gesamtrisiko oder auf das Shareholder Value Added (SVA) -als Entscheidungshilfe für oder gegen die Aufnahme der Position. Der ermittelte Value-at-Risk des Gesamtportfolios ist auch für die Aufsichtsbehörden relevant. So verlangt z.B. die Basel II Regelung, dass jedes Finanzinstitut täglich den 10-tägigen (für die nächsten 10 Handelstage) 99% - Value-at-Risk zu ermitteln und der Aufsichtsbehörde mitzuteilen hat.²⁹ Diese VaR-Kennzahl wird zur Berechnung der Kapitalanforderung an das Finanzinstitut herangezogen³⁰. Zu unterscheiden ist die Risikomessung vom (aktiven) Risikomanagement³¹. Für die Risikomessung eines Gesamtportfolios sind primär univariate ökonometrische Methoden relevant, wogegen für das aktive Risikomanagement (mit dynamischer Bestimmung der optimalen Asset-Gewichte, VaR-Minimierung, Sensitivitätsanalyse oder die Festsetzung von Handelsbeschränkungen für die einzelnen Händler) eher die multivariate Betrachtung Relevanz hat.³²

An der Stelle sollte man die Kritik des Philosophen (zugleich Mathematiker, Stochastiker und Händler) Nassim N. Taleb³³ beachten. Erstens, der Begriff *Risikomessung* könnte irreführend sein, da die Risikomessung eher eine Prognose unter Ungewissheit darstellt, als eine tatsächliche Messung (wie die Messung der Seitenlänge eines Tisches). Gerade in den Finanzmärkten herrscht Ungewissheit, wir kennen die wahren Wahrscheinlichkeiten nicht. Die Stichprobe (aus der Vergangenheit) zeigt nicht leicht die Verteilungseigenschaften. Zum Beispiel ist in der in dieser Arbeit verwendeten Zeitreihe der 12000 Dow-Jones Tagesrenditen die Stichproben-Exzess-Kurtosis 37.47, von der 80 Prozent von nur einer einzigen Beobachtung beigesteuert werden. Wenn man diesen Tag von der Stichprobe wegnimmt, sinkt die Exzess Kurtosis auf 7.9 . Zweitens, und damit verbunden, erlaubt uns die Annahme eines Modells eine Prognoseverteilung samt Quantilen zu berechnen, aber die wahre, Metaverteilung (und Metamodell) bleibt für uns unbekannt. Dies bedeutet, dass der Weg zur Anwendung verschiedener Modelle offen steht, wir können jedoch die Prognosegüte der verschiedenen Modelle vergleichen und ggf. ein Modell im Sinne von Karl

²⁹Beim aufsichtsrechtlich vorgeschriebenen Backtesting wird allerdings eine 1-tägige Haltedauer zugrunde gelegt.

³⁰In Zukunft wird der Value-at-Risk durch den Expected Shortfall ersetzt, siehe Abschnitt 2.2.2.

³¹Vgl. Andersen et al. (2007, S. 513-514).

³²Eine Ausnahme ist das Verfahren von Manganelli (2004), das univariate Methoden auch beim aktiven Risikomanagement anwendet.

³³Vgl. Taleb (2010).

Popper falsifizieren³⁴. Genau das macht diese Arbeit mit Schwerpunkt in den Stochastic-Volatility-Modellen und speziellen GARCH-Modellen³⁵.

Die vorliegende Arbeit hat folgenden Aufbau: Im nächsten Kapitel 2 werden einige grundlegende Konzepte wie z.B. Stochastischer Prozess eingeführt, in Kapitel 3 werden die verschiedenen SV-Modelle eingeführt (ein Modell wurde von mir entwickelt) mit einer ausführlichen theoretischen Betrachtung des klassischen SV-Modells, Kapitel 4 ist den Schätzungsmethoden gewidmet, mit Schwerpunkt auf der Markov-Chain-Monte-Carlo Methode und der Open Source Software OpenBUGS, die auf MCMC Schätzungen spezialisiert ist. Kapitel 5 stellt eine ausführliche empirische Untersuchung der Prognosegüte aller SV-Modellen aus Kapitel 3 dar in Hinblick auf die VaR- und ES-Prognosen. Als Daten werden Aktienindizes, einzelne Aktien, Rohstoffpreise und Wechselkurse herangezogen, sowie SV-generierte Simulationsdaten. Kapitel 6 enthält eine empirische Untersuchung der Güte der GARCH Modellen sowie der Historischen Simulation. Kapitel 7 fasst zusammen.

³⁴Vgl. Popper (2007).

³⁵Taleb (2010) befürwortet die sogenannten Fraktal-Verteilungen zur Beschreibung der Finanzmarktpreisen, gibt selbst jedoch zu, dass eine Prognose/Schätzung damit zur Zeit schwierig gar unmöglich ist.

2. Konzepte und Strukturen bei der Modellierung von Finanzmarktpreisen

2.1. Grundlegende Konzepte

Als erstes wird angenommen, dass die Unsicherheit auf Finanzmärkten sinnvoll als Zufall im Kontext eines Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, \mathcal{F}, P) interpretiert werden kann. Dabei ist Ω die Menge aller möglichen Umweltzustände (der wahre Umweltzustand ist unbekannt). \mathcal{F} ist eine σ -Algebra von Teilmengen von Ω , die alle Ereignisse zusammenfasst, für die man in der Lage ist, Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das jedem Ereignis aus \mathcal{F} eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

Sei \mathcal{T} der Zeitindex. Es wird weiterhin der Informationsfluss (auch Filtration genannt) $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t | t \in \mathcal{T}\}$ modelliert, wobei $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ die σ -Algebra aller Ereignisse darstellt, für die zum Zeitpunkt t bestimmt werden kann, ob sie eingetreten sind oder nicht. Es wird davon ausgegangen, dass die alte Information nicht vergessen wird, es gilt dann $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \subset \mathcal{F}$ für $t_1 < t_2$. Es wird angenommen, dass der Preis X_t eines Finanzmarktproduktes zum Zeitpunkt t beobachtbar ist, d.h. X_t ist \mathcal{F}_t -messbar. Es wird angenommen, dass X_t ($t \in \mathcal{T}$) Zufallsvariablen über den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sind, dann ist $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess über (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definition 2.1 (Stochastischer Prozess³⁶) *Stochastischer Prozess heißt jede Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , die Werte in einer Menge E annehmen. Man nennt \mathcal{T} die Indexmenge und E den Zustandsraum des stochastischen Prozesses. Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die durch $t \mapsto X_t(\omega)$ definierte Abbildung von \mathcal{T} in E ein Pfad des Prozesses. Für Zwecke der vorliegenden Arbeit wird \mathcal{T} als Zeitindex aufgefasst und ist demnach eine Teilmenge von \mathbb{R} . Ist \mathcal{T} abzählbar heißt der Prozess zeitdiskret³⁷, sonst zeitstetig³⁸.*

Auf (Ω, \mathcal{F}, P) können verschiedene stochastische Prozesse definiert werden. In dieser Arbeit werden zeitdiskrete Stochastic Volatility- und GARCH-Prozesse betrachtet, die die zeitigen Tagesrenditen modellieren sollen³⁹. Die

³⁶Modifiziert entnommen von Bhattacharya und Waymire (1990, S. 1) und Bauer (1978, S. 345).

³⁷Meist wird $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ oder $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0$ angenommen.

³⁸Beispielsweise $\mathcal{T} = \mathbb{R}_+$ oder $\mathcal{T} = [0, 1]$.

³⁹Hier ist der Zustandsraum $E = \mathbb{R}$ und der Zeitindex $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

werden sukzessive definiert: die Verteilung von X_{t+1} wird durch die Vergangenheit des Prozesses X_1, X_2, \dots, X_t festgelegt.

Grund für die Freiheit (oder Notwendigkeit) zur Wahl eines Modells ist die auf Finanzmärkten herrschende Ungewissheit. Abzugrenzen ist diese Situation (*Ungewissheit*) von der Situation des *Risikos*, bei der die Wahrscheinlichkeiten für Mengen aus Pfaden objektiv sind- entweder durch a-priori Berechnungen oder durch Messung von Häufigkeiten bei wiederholbaren Experimenten⁴⁰. Historisch ist die Wahrscheinlichkeitstheorie zunächst als Antwort auf die Bedürfnisse der Glücksspieler entstanden⁴¹ und ein Glücksspiel hat feste Regeln und Wiederholbarkeit, die bei den Finanzmärkten fehlen: Die Spekulation auf Finanzmärkten kann man nicht einfach wie ein größeres Roulettespiel ansehen, da sich z.B. die Finanzmarktumweltbedingungen dynamisch ändern und immer neuere, bis jetzt nicht berücksichtigte Risikoquellen erscheinen, so dass nur eine einzige Instanz einer Finanzmarktvariable zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtbar ist.

Definition 2.2. Verteilungsfunktion eines stochastischen Prozesses⁴² Die endlich-dimensionale gemeinsame Verteilungsfunktion eines stochastischen Prozesses X_t mit Indexmenge T und Zustandsraum \mathbb{R}^d wird definiert durch:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

mit $t_1, \dots, t_k \in T$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ wobei der Vergleich $X_{t_i} \leq x_i$ komponentenweise geschieht.

Satz 2.3 (Bedingte Verteilung von Y gegeben X bei $(X', Y)'$ multivariat normal⁴³)

$$\text{Falls } \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_X \\ \boldsymbol{\mu}_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{XX} & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_{YY} \end{pmatrix} \right)$$

dann gilt

$$\mathbf{Y} | \mathbf{X} = \mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}_Y + \boldsymbol{\Sigma}_{YX} \boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X), \boldsymbol{\Sigma}_{YY} - \boldsymbol{\Sigma}_{YX} \boldsymbol{\Sigma}_{XX}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{XY})$$

Definition 2.4 (Schiefe multivariate t-Verteilung⁴⁴)

Seien $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ Vektoren in \mathbb{R}^d , $\boldsymbol{\Sigma}$ eine $d \times d$ positiv definite Matrix und $\nu > 2$.

Dann heißt $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + W\boldsymbol{\gamma} + \sqrt{W}\mathbf{Z}$ schiefe multivariat t-Verteilt.

Dabei ist $\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ unabhängig von $W \sim IG(\nu/2, \nu/2)$.

⁴⁰Vgl. Knight (1965, S. 233).

⁴¹Vgl. Shiryaev (1988, S. 16).

⁴²Vgl. Franke et al. (2001, S. 142).

⁴³Modifiziert entnommen von Mardia et al. (1979, S. 63).

⁴⁴Modifiziert entnommen von Hu und Kercheval (2008, S. 59). Die resultierende schiefe t-Verteilung entspricht der Definition einer schiefen t-Verteilung in McNeil et al. (2005, S. 80).

Definition 2.5 (Standard-Brownsche Bewegung)⁴⁵ Eine Standard-Brownsche Bewegung mit Anfang in x ist ein stochastischer Prozess W stetiger Zeit auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , für den gilt:

- a) $W_0 = x$ P -fast sicher
- b) die Pfade $s \mapsto W_s$ sind P -fast sicher stetig
- c) für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ unabhängig normalverteilt und es gilt $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$

Definition 2.6 (Brownsche Brücke mit Anfang und Ende in 0 von Länge 1)⁴⁶

Sei W_t eine Brownsche Bewegung. Dann heißt der Prozess $B_t = (W_t | W_0 = 0, W_1 = 0), 0 \leq t \leq 1$ Brownsche Brücke von 0 zu 0 von Länge 1.

Die Brownsche Brücke ist also eine Brownsche Bewegung deren Anfang und Ende festgelegt sind.

Definition 2.7 (strenge/strikte Stationarität)⁴⁷ Diese Definition bezieht sich nur auf Prozesse diskreter Zeit mit Indexmenge $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) heißt streng/strikt stationär wenn für beliebige $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ und alle $n, s \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+s, \dots, t_n+s}(x_1, \dots, x_n)$$

Definition 2.8 (schwache Stationarität)⁴⁸ Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ auf (Ω, \mathcal{F}, P) heißt schwach stationär wenn

1. $E(X_t) = \mu$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ und
2. $cov(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma_\tau$ für alle $t, \tau \in \mathbb{Z}$

erfüllt sind.

Definition 2.9 ((Borel-)messbare Funktion)⁴⁹ Seien $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ und $(\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}^{d'})$ zwei Borelsche Messräume mit Dimensionen $d \in \mathbb{N}$ und $d' \in \mathbb{N}$ und sei $T : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d'}$ eine Abbildung von \mathbb{R}^d in $\mathbb{R}^{d'}$. T heißt $\mathcal{B}^d - \mathcal{B}^{d'}$ -messbar (oder Borel-messbar), wenn gilt $T^{-1}(A') \in \mathcal{B}^d$ für alle $A' \in \mathcal{B}^{d'}$.

⁴⁵Vgl. Borodin und Salminen (2002, S. 51) und Shreve (2004, S. 94).

⁴⁶Vgl. Glasserman (2004, S. 83).

⁴⁷Vgl. Franke et al. (2001, S. 144).

⁴⁸Vgl. Franke et al. (2001, S. 143) und Rinne und Specht (2002, S. 161).

⁴⁹Vgl. Bauer (1992, S. 41).

Satz 2.10 (stetige Abbildungen sind Borel-Messbar)⁵⁰ Jede stetige Abbildung $T : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^{d'}$ mit $d, d' \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{B}^d - \mathcal{B}^{d'}$ -messbar

Einen Beweis findet man in Bauer (1992, S. 41).

Satz 2.11 (Erhalten der strengen Stationarität durch messbare Funktionen) Sei $X_t \in \mathbb{R}^n$ ein streng stationärer Prozess und $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^m$ -messbare Funktion. Dann ist $f(X_t) \in \mathbb{R}^m$ auch streng stationär.

Beweis: Seien $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{B}^m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & P(f(X_{t_1}) \in A_1, \dots, f(X_{t_k}) \in A_k) = \\ & P(X_{t_1} \in f^{-1}(A_1), \dots, X_{t_k} \in f^{-1}(A_k)) = \\ & (\text{X streng stationär}) = P(X_{t_1+\tau} \in f^{-1}(A_1), \dots, X_{t_k+\tau} \in f^{-1}(A_k)) = \\ & P(f(X_{t_1+\tau}) \in A_1, \dots, f(X_{t_k+\tau}) \in A_k). \quad (2.1) \end{aligned}$$

Definition 2.12 (Unabhängige stochastische Prozesse)⁵¹ Zwei stochastische Prozesse $(X_t)_{t \in T}$ und $(Y_t)_{t \in T}$ heißen unabhängig, wenn für alle $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ die Zufallsvektoren $[X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}]'$ und $[Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}]'$ voneinander unabhängig sind.

Satz 2.13 (Zusammensetzung unabhängiger strikt stationärer Prozesse) Seien $(X_t) \in \mathbb{R}^n$ und $Y_t \in \mathbb{R}^m$ streng stationäre unabhängige Prozesse mit Indexmenge T . Dann ist der Prozess $Z = (X', Y')' \in \mathbb{R}^{n+m}$ auch streng stationär.

Beweis: Seien $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ und $c_{t_1}, \dots, c_{t_k} \in \mathbb{R}^{n+m}$. $c_{t_i} \in \mathbb{R}^{n+m}$ kann in $(a'_{t_i}, b'_{t_i})'$ mit $a_{t_i} \in \mathbb{R}^n$ und $b_{t_i} \in \mathbb{R}^m$ zerlegt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} & F_{t_1, t_2, \dots, t_k}^Z(c_{t_1}, c_{t_2}, \dots, c_{t_k}) = P(Z_{t_1} \leq c_{t_1}, \dots, Z_{t_k} \leq c_{t_k}) = \\ & P(X_{t_1} \leq a_{t_1}, \dots, X_{t_k} \leq a_{t_k}, Y_{t_1} \leq b_{t_1}, \dots, Y_{t_k} \leq b_{t_k}) = \\ & (\text{X, Y unabhängig}) = \\ & P(X_{t_1} \leq a_{t_1}, \dots, X_{t_k} \leq a_{t_k}) P(Y_{t_1} \leq b_{t_1}, \dots, Y_{t_k} \leq b_{t_k}) = \\ & (\text{X, Y streng stationär}) = \\ & P(X_{t_1+\tau} \leq a_{t_1}, \dots, X_{t_k+\tau} \leq a_{t_k}) P(Y_{t_1+\tau} \leq b_{t_1}, \dots, Y_{t_k+\tau} \leq b_{t_k}) = \\ & P(X_{t_1+\tau} \leq a_{t_1}, \dots, X_{t_k+\tau} \leq a_{t_k}, Y_{t_1+\tau} \leq b_{t_1}, \dots, Y_{t_k+\tau} \leq b_{t_k}) = \\ & P((X'_{t_1+\tau}, Y'_{t_1+\tau})' \leq (a'_{t_1}, b'_{t_1})', \dots, (X'_{t_k+\tau}, Y'_{t_k+\tau})' \leq (a'_{t_k}, b'_{t_k})') = \\ & P(Z_{t_1+\tau} \leq c_{t_1}, \dots, Z_{t_k+\tau} \leq c_{t_k}) = \\ & F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_k+\tau}^Z(c_{t_1}, c_{t_2}, \dots, c_{t_k}) \quad (2.2) \end{aligned}$$

⁵⁰Vgl. Bauer (1992, S. 41).

⁵¹Vgl. Jazwinski (1970, S. 70).

Folgerung 2.14 (Produkt unabhängiger strikt stationärer Prozesse wieder strikt stationär) Seien $(X_t) \in \mathbb{R}$ und $Y_t \in \mathbb{R}$ streng stationäre Prozesse. Dann ist der Prozess $Z_t = X_t Y_t \in \mathbb{R}$ auch streng stationär.

Beweis: Gemäß Satz 2.13 ist der Prozess $(X_t, Y_t)' \in \mathbb{R}^2$ strikt stationär und gemäß Satz 2.11 ist der Prozess $f(X_t, Y_t) = X_t Y_t$ auch strikt stationär, da nach Satz 2.10 die stetige Funktion $f(x, y) = xy$ Borel-messbar ist.

Definition 2.15 Mittelwert-Ergodizität⁵² Ein schwach stationärer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ mit $E(X_t) = \mu$ heißt mittelwertergodisch, falls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(\bar{X}_n - \mu)^2\} = 0$$

$$\text{mit } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Satz 2.16 (Ergodizität)⁵³ Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ein Prozess mit:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(X_t) = \mu \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov}(\bar{X}_n, X_n) = 0. \text{ Dann gilt:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{(\bar{X}_n - \mu)^2\} = 0$$

Einen Beweis findet man in Fuller (1976, S. 231).

Definition 2.17 (Weißes Rauschen)⁵⁴ Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in T}$ mit $X_t \in \mathbb{R}$ heißt weißes Rauschen, wenn

1. $E(X_t) = 0$ für alle $t \in T$
2. $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$ für alle $t \in T$
3. $\text{cov}(X_t, X_s) = 0$ für alle $t, s \in T$ mit $t \neq s$

erfüllt sind. Falls darüber hinaus X_t und X_s unabhängig sind für alle $t, s \in T$ mit $t \neq s$, heißt der Prozess unabhängiges Weißes Rauschen.

Definition 2.18 (Random Walk)⁵⁵ Falls $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ein weißes Rauschen ist, dann heißt der stochastische Prozess $X_t \in \mathbb{R}$ mit Indexmenge \mathbb{Z} für den gilt:

$$X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ mit einer Konstante } c$$

Random Walk mit Drift, falls $c \neq 0$ und Random Walk ohne Drift falls $c = 0$

⁵²Vgl. Fuller (1976, S. 230).

⁵³Vgl. Fuller (1976, S. 231).

⁵⁴Vgl. Franke et al. (2001, S. 144).

⁵⁵Vgl. Franke et al. (2001, S. 145).

Definition 2.19 $\text{GARCH}(p,q)$, $\text{IGARCH}(p,q)$ ⁵⁶ Ein stochastischer Prozess $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Zustandsraum \mathbb{R} heißt ein $\text{GARCH}(p,q)$ -Prozess⁵⁷, falls er in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

wobei ε_t unabhängig identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz

1, und außerdem gilt $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ und $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$. Falls

$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ heißt der Prozess $\text{IGARCH}(p,q)$ ⁵⁸.

Bemerkung: Das GARCH Modell wurde von Bollerslev (1986) eingeführt. Die stetigen Renditen r_t werden üblicherweise als $r_t = \mu_t + a_t$ modelliert mit $\mu_t = E(r_t | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots)$. Eine Schätzung des Parametervektors θ erfolgt dann durch Maximum Likelihood Schätzung bei vorliegenden r_1, r_2, \dots, r_T unter Verwendung der zu maximierenden Likelihoodfunktion

$$L(\theta) = f(r_T | \theta, r_{T-1}, \dots, r_1) f(r_{T-1} | \theta, r_{T-2}, \dots, r_1) \dots f(r_2 | \theta, r_1) f(r_1 | \theta).$$

Die bedingten Dichten $f(r_t | \theta, r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1)$ sind bekannt, vorausgesetzt dass die Verteilung der Innovation ε_t bekannt ist. So gilt z.B. für $\varepsilon_t \sim N(0, 1)$:

$r_t | \theta, r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1 \sim N(\mu_t(\theta), \sigma_t^2)$, so dass

$$f(r_t | \theta, r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t(\theta))^2}{2\sigma_t^2}\right). \sigma_t^2 \text{ wird iterativ}$$

durch die Varianzgleichung in der Definition des $\text{GARCH}(p,q)$ -Prozesses bestimmt. Bei dieser iterativen Berechnung sind die $\sigma_1^2, \dots, \sigma_s^2$ (mit $s = \max(p, q)$) zunächst nicht wohl definiert. Das Paket fGarch der Software R löst

dieses Problem, indem $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_s^2 = \omega + \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j\right) (\bar{r}^2 - (\bar{r})^2)$

gesetzt wird.⁵⁹

Definition 2.20 $\text{APARCH}(p,q)$ ⁶⁰ Ein stochastischer Prozess $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ mit Zustandsraum \mathbb{R} heißt ein $\text{APARCH}(p,q)$ -Prozess⁶¹, falls:

⁵⁶Vgl. Tsay (2002, S. 93) und Francq und Zakoian (2010, S. 38). Die Reihenfolge der Ordnung des GARCH-Modells unterscheidet sich in diesen beiden Quellen- was für die eine $\text{GARCH}(p,q)$ ist, ist für die andere $\text{GARCH}(q,p)$. Ich folge dem Mainstream, das die Ordnung wie Bollerslev (1986) definiert.

⁵⁷Die Abkürzung GARCH kommt von Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

⁵⁸Die Abkürzung IGARCH kommt von Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

⁵⁹Vgl. Würtz et al. (2006, S. 15-16).

⁶⁰Vgl. Francq und Zakoian (2010, S. 256).

⁶¹Die Abkürzung APARCH kommt von Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroscedasticity.

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|a_{t-i}| - \varsigma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

wobei ε_t unabhängig identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, und außerdem gilt $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ und $|\varsigma_i| < 1$.

Das APARCH Modell wurde von Ding et al. (1993) eingeführt. Für $\delta = 2$ ergibt sich das GJR-Modell von Glosten et al. (1993). Die Schätzung für $\delta = 2$ erfolgt im R-Paket fGarch wie beim GARCH(p,q)-Modell.

2.2. Die Konzepte Value-at-Risk und Expected Shortfall

2.2.1. Value-at-Risk

Der Value-at-Risk fasst das Risiko eines Portfolios in einer Zahl zusammen. Es ist der maximale Verlust des Portfolios, der für eine vorgegebene Haltdauer mit einer vorgegebener Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Der Verlust ist normalerweise in Geld (z.B. Euro oder US Dollar) gemessen und ist üblicherweise als positive Zahl ermittelt. Man könnte den Value-at-Risk jedoch auch als prozentuale Veränderung und somit dimensionslos definieren - als Quantil der Renditen-Prognoseverteilung. Die Transformation in einen Geldbetrag erfolgt dann durch Multiplikation mit dem Nominalwert (in Geldeinheiten) der Position.

Definition 2.21 (h-Tages-Value-at-Risk zum Überschreitungsniveau p ⁶²).

Der h -Tages-Value-at-Risk (zum Zeitpunkt t) der Rendite eines Portfolios ist das p -Quantil der bedingten Renditeverteilung:

$VaR_{t+h|t}^p = Q_p(r_{t+h,t} | \mathcal{F}_t) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P(r_{t+h,t} \leq x | \mathcal{F}_t) \geq p\}$, wobei \mathcal{F}_t die Information bis zum Zeitpunkt t bezeichnet und $r_{t+h,t}$ die diskrete oder stetige Rendite für die Periode t bis $t + h$.⁶³

Diese Definition weicht von der vorherrschenden Definition in zwei Weisen ab. Erstens, hat der hier definierte Value-at-Risk das umgekehrte Vorzeichen, was lediglich negative statt positiver Werte des Value-at-Risk zu den gängigen Überschreitungsniveaus von $p = 0.01$ oder $p = 0.05$ impliziert, mit sonst dem selben Betrag. Überschreitung des Value-at-Risk findet statt,

⁶²Modifiziert entnommen von Kuester et al. (2006). Hier wird das Vorzeichen des Value-at-Risk anders definiert. p ist eine Wahrscheinlichkeit, die normalerweise 0.05 nicht überschreitet. Übliche Werte für p sind z.B. 0.01 und 0.05.

⁶³In dieser Dissertation wird meistens die **prozentuale** stetige Rendite ($r_t = 100(\ln P_t - \ln P_{t-1})$) dem Value-at-Risk zugrunde gelegt, es sei denn es ist explizit anders gesagt.

wenn $r_{t+h,t} < VaR_{t+h|t}^p$. Zweitens wird der Value-at-Risk normalerweise als das $(1-p)$ -Quantil der Verlustverteilung (also der negativen Rendite) definiert (der Value-at-Risk hat dann das Niveau von $1-p$, z.B. 0.95 oder 0.99), was bei stetigen Verteilungen äquivalent mit der obigen Definition ist, bei diskreten jedoch nicht. Der somit definierte Value-at-Risk ist ein Quantil der theoretischen Renditenverteilung, die allerdings nicht bekannt ist. Die durch ein Modell ermittelte Prognose des Value-at-Risk wird mit $\widehat{VaR}_{t+h|t}^p$ bezeichnet.

Eine gute Darstellung der frühen Geschichte des Value-at-Risk findet man in Holton (2003, S. 18)⁶⁴. Laut Holton (2003) war der Value-at-Risk eine Methode, die vor deren Veröffentlichung in RiskMetrics in Oktober 1994 hauptsächlich vereinzelt im Risikomanagement in Finanzinstitutionen bekannt war. So hat z.B. JP Morgan in den späten 1980-er Jahren ein unternehmensweites VaR-System entwickelt. Unter anderem wurde der 1-Tages-0.05-Value-at-Risk ermittelt. Zwischen 1990 und 1994, unter CEO Dennis Weatherstone, wurde der Value-at-Risk des Unternehmensportfolios täglich in einem 4:15-Bericht (also um 16:15 Uhr) an den CEO übermittelt. Einer der Architekten der neuen Kennzahl war der JP-Morgan Angestellte Till Guldemann, der in 1993 eine Vorstellung des Value-at-Risk organisiert hat, mit dem Ergebnis, dass viele Kunden interessiert wurden und das neue System erwerben wollten⁶⁵. Als Antwort hat Guldemann ein Team gebildet, das eine neue Dienstleistung kreiert hat: RiskMetrics, die im Oktober 1994 der Öffentlichkeit präsentiert wurde. Die Dienstleistung war anfangs kostenlos und diente der Popularisierung der neuen Methode. In den darauffolgenden Jahren hat sich die neue Risikokennzahl enorm verbreitet und wurde 1996 vom Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht in Basel (1996) als empfohlene Regelung für die Banken eingeführt, die später (1998) in Deutschland im Kreditwesengesetz (KWG) und dem präzisierenden Grundsatz I Ausdruck gefunden hat. Dort wurden die Eigenkapitalanforderungen an die Unternehmen in Abhängigkeit vom Value-at-Risk geregelt. Mit dem Grundsatz I vom 1. Oktober 1998 wurde den Kreditinstituten erlaubt, zur Eigenkapitalbestimmung auch interne Risiko-steuerungsmodelle zu verwenden. Im Juni 2004 wurde die sogenannte Basel II Vereinbarung verabschiedet, die die Eigenkapitalvorschriften für die Kreditinstitute regelt. Laut EU-Richtlinien 2006/48/EG und 2006/49/EG sollen diese Basel II Regelungen für alle Kredit- und Finanzdienstleistungsinstitute in EU ab 1. Januar 2007 bindend sein. Am 1. Januar 2007 trat in Deutschland die Solvabilitätsverordnung (SolvV) in Kraft und löste Grundsatz I über das

⁶⁴Vgl. auch Jorion (1997), der die Notwendigkeit vom Risikomanagement und Value-at-Risk durch die spektakulären Verluste einiger Unternehmen wie Daiwa, Barings, Metallgesellschaft, untermauert.

⁶⁵Vgl. Holton (2003, S. 18-19).

Mindesteigenkapital ab. Als Antwort auf die Finanzkrise von 2007-2008 hat der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht am 16.12.2010 sein neues Regelwerk (Basel III) veröffentlicht. In EU-Recht wurde dies durch EU-Richtlinie 2013/36/EU und EU-Verordnung 575/2013 implementiert und die Richtlinien 2006/48/EG und 2006/49/EG wurden dadurch aufgehoben. In Deutschland wurden diese Richtlinien durch das sogenannte CRD IV-Umsetzungsgesetz umgesetzt, das zum 1. Januar 2014 in Kraft tritt. Die Solvabilitätsverordnung wurde ab 1. Januar 2014 ebenfalls enorm geändert. Unter Basel II war die Anforderung an die Eigenkapitalunterlegung lediglich durch Value-at-Risk definiert. Die Formel für die Eigenkapitalanforderung fürs Marktrisiko war⁶⁶:

$$RC_t = \max\{(-1) \cdot N_{t-1} \widehat{VaR}_{(t-1)+10|t-1}^{0.01}, (-1) \cdot m_c \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} N_{t-i} \widehat{VaR}_{t-i+10|t-i}^{0.01}\} + SRC_t.$$

Dabei bezeichnet N_{t-i} den Portfoliowert in Geldeinheiten am Tag $t - i$, $\widehat{VaR}_{(t-1)+10|t-1}^{0.01}$ den Value-at-Risk der **diskreten** Rendite des Portfolios und RC_t das aufsichtsrechtlich vorgeschriebene Mindestkapital (Regulatory Capital). SRC_t ist eine zusätzliche Specific Risk Charge, die sich aus Ausfall- und Ereignisrisiken ergibt. In Basel III wurde zur Formel noch ein Term addiert, der dem sogenannten gestressten Value-at-Risk⁶⁷ entspricht: Value-at-Risk, berechnet unter 12 Monaten gestressten Bedingungen, wie z.B. während der Finanzkrise 2007/2008. Die neue Formel lautet⁶⁸:

$$RC_t = \max\{(-1) \cdot N_{t-1} \widehat{VaR}_{(t-1)+10|t-1}^{0.01}, (-1) \cdot m_c \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} N_{t-i} \widehat{VaR}_{t-i+10|t-i}^{0.01}\} + \max\{(-1) \cdot N_{t-1} \widehat{sVaR}_{(t-1)+10|t-1}^{0.01}, (-1) \cdot m_s \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} N_{t-i} \widehat{sVaR}_{t-i+10|t-i}^{0.01}\} + SRC_t$$

Dabei ist \widehat{sVaR} der Value-at-Risk (der **diskreten** Rendite) berechnet bei angenommenen Stressbedingungen. Die Berechnung von sVaR muss mindestens wöchentlich sein und falls die Berechnung nicht täglich ist, wird die Anzahl der Summanden im zweiten Term verringert und es wird durch deren Anzahl (und nicht durch 60) dividiert- im zweiten Term werden alle sVaR's von den vergangenen 60 Tagen Ausdruck finden.

⁶⁶ Vgl. SolvV §314 in der Fassung gültig bis 31.12.2013.

⁶⁷ Genaugenommen wird das Hinzufügen des gestressten VaR als eine Basel 2.5-Regelung bekannt.

⁶⁸ Vgl. Verordnung (EU) 575/2013 Artikel 364.

m_c und m_s ergeben sich als Summe von der Zahl 3 mit einem Zuschlagsfaktor zwischen 0 und 1, der sich beim Vergleich von $\widehat{VaR}_{t-1|t-2}^{0.01}$, $\widehat{VaR}_{t-2|t-3}^{0.01}$, \dots , $\widehat{VaR}_{t-250|t-251}^{0.01}$ mit den tatsächlichen Ein-Tages-Renditen $r_{t-1,t-2}, r_{t-2,t-3}, \dots, r_{t-250,t-251}$ ergibt. Der Zuschlagsfaktor errechnet sich gemäß folgender Tabelle:

Anzahl Überschreitungen	Zuschlagsfaktor	Zone
weniger als 5	0	grün
5	0.40	gelb
6	0.50	gelb
7	0.65	gelb
8	0.75	gelb
9	0.85	gelb
10 oder mehr	1	rot

Tabelle 2.1.: Zuschlagsfaktoren Backtesting; Quelle: Verordnung (EU) 575/2013 Artikel 366, Tabelle 1

2.2.2. Expected Shortfall

Der Value-at-Risk gibt keine Antwort auf die Frage, wie hoch im Schnitt der Verlust ist im Falle einer Überschreitung. Außerdem steht der Value-at-Risk unter Kritik, da er nicht sub-additiv ist⁶⁹ und somit ein nicht-kohärentes Risikomaß im Sinne von Artzner et al. (1997) und Artzner et al. (1999). Als Antwort auf diese Fragen wurde von Acerbi und Tasche (2002) und Rockafellar und Uryasev (2002) der Expected Shortfall in seiner modernen Form vorgeschlagen⁷⁰.

Definition 2.22 (Expected Shortfall)⁷¹ *Der Expected Shortfall der diskreten oder stetigen Rendite eines Portfolios ist definiert durch*

$$ES_{t+h|t}^p = \frac{1}{p} \int_0^p VaR_{t+h|t}^u du$$

Es sollte angemerkt werden, dass der hier definierte Expected Shortfall das umgekehrte Vorzeichen hat als die gängige Definition in der Literatur. Somit

⁶⁹Der Value-at-Risk eines Portfolios aus zwei Teilen könnte betragsmäßig größer als die Summe der Value-at-Risk-Beträge der Teile sein.

⁷⁰Cont (2010, S. 630) erwähnt frühere Beiträge (Anfang der 1990-er) zu Konzepten, ähnlich zum Expected Shortfall, wie z.B. der Average Shortfall in Rappoport (1993).

⁷¹Vgl. Cont (2010, S. 631) und McNeil et al. (2005, S. 44).

sind in dieser Arbeit sowohl der Value-at-Risk als auch der Expected Shortfall in der Regel negativ. Falls die Verteilung der Rendite $r_{t+h,t}$ stetig ist, gilt:

$$ES_{t+h|t}^p = E_t(r_{t+h,t} | r_{t+h,t} < VaR_{t+h|t}^p),$$

wobei der Erwartungswert unter der Information bis zum Zeitpunkt t berechnet wird. Falls die Verteilung der Rendite nicht stetig ist, gilt⁷²:

$$ES_{t+h|t}^p = \frac{1}{p} (E_t(r_{t+h,t} \mathbb{1}_{r_{t+h,t} \leq VaR_{t+h|t}^p}) - VaR_{t+h|t}^p (P(r_{t+h,t} \leq VaR_{t+h|t}^p | \mathcal{F}_t) - p)) \quad (2.3)$$

Da auch hier die bedingte Verteilung der Rendite nicht bekannt ist, wird der Expected Shortfall durch Modelle prognostiziert und die Prognose wird mit $\widehat{ES}_{t+h|t}^p$ bezeichnet. Eine gute Übersicht der Regelungen Basel 2, Basel 2.5 und Basel 3 in Hinsicht auf den Value-at-Risk und Expected Shortfall gibt Prof. James Ming Chen von der juristischen Fakultät der University of Michigan in Chen (2013). Wie bereits erwähnt, sieht Basel 2 die Berechnung des konventionellen VaR vor, Basel 2.5 führt den gestressten VaR ein, und Basel 3 ist anscheinend bereit, den Value-at-Risk durch den Expected Shortfall zu ersetzen. Am 31.01.2011 hat der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht eine Studie der akademischen Literatur zur Risikomessung veröffentlicht- Basel (2011). Dort wird die Nichtkohärentheit des VaR bemängelt⁷³. Der Expected Shortfall ist in dieser Studie gelobt aus drei Gründen: Erstens, der Expected Shortfall berücksichtigt das Ausmaß der Verluste über dem VaR-Niveau. Zweitens, der Expected Shortfall ist kohärent. Drittens, das Konzept Expected Shortfall mindert das Problem der (oft nicht objektiven) Wahl des Überschreitungsniveaus von VaR und eventuelles Basieren von Management-Entscheidungen darauf⁷⁴. Investitionsentscheidungen basierend auf VaR können in manchen Fällen zu einer größerer Allokation in risikobehafteten Aktiva führen und somit zu größeren Verlusten im Verlustfall⁷⁵. Wylie et al. (2010) zeigen jedoch, dass dies auch bei Hedging unter beidem ES und VaR passieren könnte⁷⁶. Basel (2011, S. 21-23) äußert sich auch zum Thema Backtesting von Expected Shortfall und bemängelt die größere Komplexität des ES-Backtesting und dessen niedrigere Teststärke (englisch: power). Als Ausweg für aufsichtsrechtliche Zwecke wird eine ES-Berechnung kombiniert mit einem VaR-Backtesting diskutiert⁷⁷.

⁷²Vgl. Cont (2010, S. 631).

⁷³Vgl. Basel (2011, S. 20).

⁷⁴Vgl. Basel (2011, S. 20).

⁷⁵Vgl. Basel (2011, Remark 1) und Basak und Shapiro (2001).

⁷⁶Vgl. Basel (2011, Remark 3).

⁷⁷Vgl. Basel (2011, S. 21-22).

Wenn das VaR-Backtesting die Korrektheit des VaR verwirft, dann ist auch der Expected Shortfall falsch. Wenn dagegen das VaR-Backtesting die Korrektheit des VaR nicht verwirft, ist dies nicht ausreichend für die ES-Korrektheit. Der Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht hat auch 2 konsultative Dokumente veröffentlicht: Basel (2012) und Basel (2013), in denen die Aussicht auf Ersetzen des VaR durch den Expected Shortfall für aufsichtsrechtliche Zwecke näher heranrückt. Das zweite Dokument (Basel (2013)) ist zum Zeitpunkt meines Schreibens offen für Kommentare- noch bis 31.01.2014. Es ist zu erwarten, dass in absehbarer Zukunft die in Basel (2013) vorgeschlagenen Änderungen als neues Regelwerk implementiert werden. Was die Eigenkapitalunterlegung für Marktrisiko betrifft, sieht das zweite konsultative Dokument das Ersetzen des VaR durch den ES und die Beseitigung der gleichzeitigen Berechnung unter aktuellen und gestressten Bedingungen vor⁷⁸. Es wird vielmehr nur der gestresste Expected Shortfall bleiben, und das zum Niveau 0.025 ($ES_{t+10|t}^{0.025}$). Die neue Formel lautet⁷⁹:

$$ES = ES_{R,S} \frac{ES_{F,C}}{ES_{R,C}} \quad (2.4)$$

Dabei steht F für full, R für reduced, S für stressed, C für current. Die Idee ist, eine reduzierte Auswahl von Risikofaktoren zuzulassen (die aber zur Erklärung von mindestens 75% der ES-Variation beitragen) und ein schlimmstes Szenario aus der Vergangenheit für diese Faktoren zugrunde zu legen- dadurch entsteht $ES_{R,S}$. $ES_{F,C}$ und $ES_{R,C}$ sind die normalen ES (unter aktuellen Marktbedingungen) entsprechend in der vollen Form und in der reduzierten Form.

In Anlehnung an das Beispiel in Sinn (2011, S. 119)⁸⁰ gebe ich hier ein Beispiel für die Überlegenheit des Expected Shortfall für aufsichtsrechtliche Zwecke.

Sinn (2011) sieht in der Haftungsbeschränkung der Aktionäre der Banken einen Grund für die Entstehung von künstlicher Risikovorliebe bei Investitionsentscheidungen, er nennt diese Vorliebe die Bloos-Regel⁸¹. Sinn (2011, S. 115) gibt die Eigenkapitalquoten und die brutto Eigenkapitalrendite (vor Steuern) der fünf größten Investmentbanken in USA (inkl. Lehman Brothers) fürs Jahr 2006. Alle angegebenen Eigenkapitalquoten⁸² liegen zwischen 3.2%

⁷⁸ Vgl. Basel (2013, S. 18-19).

⁷⁹ Vgl. Basel (2013, S. 19).

⁸⁰ Das Beispiel dort beschränkt sich auf Verdeutlichung der sogenannten Bloos-Regel, ich ändere die Zahlen und erweitere um die Berechnung von Value-at-Risk und Expected Shortfall.

⁸¹ Diese Bezeichnung kommt von *Blood-Out-Of-a-Stone*.

⁸² Eigenkapital geteilt durch die Bilanzsumme.

und 4.6%, alle angegebenen brutto-Eigenkapitalrenditen zwischen 25.1% und 40.7%.

Beispiel 2.23 (Bloos-Regel, Value-at-Risk vs. Expected Shortfall⁸³)

Angenommen eine Bank verfügt über 5 Geldeinheiten (GE) Eigenkapital und 95 Geldeinheiten Fremdkapital. Das Fremdkapital wird mit 5% für die Periode von t bis $(t+h)$ verzinst- am Ende der Periode schuldet dann die Bank den Gläubigern $95 \cdot 1.05$ GE. Angenommen die Bank hat 2 alternative Anlagemöglichkeiten: Anlage 1 wirft sichere 5% Rendite ab.⁸⁴ Anlage 2 wirft eine Rendite von 5.9536% mit Wahrscheinlichkeit 0.991 ab und verliert alles (Rendite von -100%) mit einer geringen Wahrscheinlichkeit 0.009. Beide Geldanlagen haben somit eine erwartete Rendite von 5%, mit dem Unterschied, dass die Anlage 2 riskant ist. Es wird angenommen, dass die Bank ihr ganzes Kapital von 100 GE investieren möchte. Ein risikoaverser Anleger würde die sichere Anlage bevorzugen, da sie die geringere Variation bei derselben erwarteten Rendite hat. Paradoxiere Weise werden die Aktionäre die Anlage 2 bevorzugen, da sie eine höhere Eigenkapitalrendite verspricht. Die Eigenkapitalrendite der Anlagemöglichkeit 1 ist 5% und die Eigenkapitalrendite der Anlagemöglichkeit 2 ist 22.955%. Der $VaR_{t+h|t}^{0.01} = 5.9536\%$ ist positiv, die Bank muss dann aufsichtsrechtlich keine Mindestkapitalunterlegung nach Basel II aufweisen. Mit dem neuen Vorschlag des Basel III zur Einführung des Expected Shortfall muss dagegen Eigenkapital von mindestens $-ES_{t+h|t}^{0.025} = 32.19$ GE vorliegen⁸⁵, damit 100 GE in Anlage 2 investiert werden können. Dies ist weit mehr als die 5 GE Eigenkapital, die die Bank zur Verfügung hat. Die Bank kann mit dem Eigenkapital von 5 GE lediglich $5/0.3219 = 15.53$ GE in der riskanten Anlage 2 investieren.

Bemerkung: Der Gewinn bei Anlage 2 ergibt sich wegen der Haftungsbeschränkung als

$0.991(100 \cdot 1.059536 - 95 \cdot 1.05) + 0.009 \cdot 0 = 6.14777$. dies Entspricht einer Eigenkapitalrendite von $6.14777/5 - 1 = 22.955\%$. Der Gewinn bei Anlage

⁸³Sowohl der Value-at-Risk als auch der Expected Shortfall basieren auf der diskreten Rendite in diesem Beispiel.

⁸⁴Diese Anlage wird jedoch nicht als allgemein zugängliche risikofreie Anlage verstanden, sonst hätten die Gläubiger der Bank erst nicht an die Bank Geld geliehen, sondern in die risikofreie Anlage investiert. Vielmehr sollte Anlage 1 als ausschließlich für die Bank zugänglich gedacht werden.

⁸⁵Hier wird von Stressbedingungen abgesehen.

1 ist $100 \cdot 1.05 - 95 \cdot 1.05 = 5 \cdot 1.05$ was einer Eigenkapitalrendite von 5% entspricht. Der $ES_{t+h|t}^{0.025}$ berechnet sich gemäß Gleichung 2.3:

$$\begin{aligned} ES_{t+h|t}^{0.025} &= \\ \frac{1}{0.025} [(0.991 \cdot 5.9536 + 0.009 \cdot (-100)) - 5.9536(1 - 0.025)] &= \\ &= -32.19 \quad (2.5) \end{aligned}$$

Das Beispiel hat gezeigt, dass die Gläubiger der Bank besser geschützt sind unter dem neuen Vorschlag von Basel III.

3. Univariate zeitdiskrete SV-Modelle: eine Übersicht und neue Spezifikationen

Als erster Beitrag zur Stochastic-Volatility Literatur gilt Clark (1973). Clark (1973) hatte als Ziel, eine Alternative zu den stabilen Paretoverteilungen (bei der Modellierung von Preisänderungen) von Mandelbrot (1963) vorzuschlagen, der seinerseits die Brownsche Bewegung zur Beschreibung des Preisprozesses in Bachelier (1900) kritisch unter die Lupe nimmt. Wenn die Preise X_t einer (arithmetischen) Brownschen Bewegung (wie in Bachelier (1900)) folgen, dann sind sukzessive Preisänderungen der Form $\Delta(t, k, T) = X(t + kT) - X(t + (k - 1)T)$, $k = 1, 2, \dots$, unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz proportional zum Zeitintervall T ⁸⁶. Die Normalität der Preisänderungen widerspricht den Fakten⁸⁷. Mandelbrot (1963, S. 394) schreibt:

„Despite the fundamental importance of Bachelier’s process, which has come to be called “Brownian motion,” it is now obvious that it does not account for the abundant data accumulated since 1900 by empirical economists, simply because the empirical distributions of price changes are usually too “peaked” to be relative to samples from Gaussian population “

Mandelbrot (1963) schlägt zur Modellierung der Log-Preisänderungen (d.h. $\ln(X_{t+1}) - \ln(X_t)$) die stabilen Pareto-Verteilungen vor. Die sind leptokurtisch wie die empirischen Log-Preisänderungen und haben die laut Mandelbrot erwünschte Stabilitätseigenschaft: eine gewichtete Summe $aX_1 + bX_2$ zweier unabhängig identisch wie X verteilten Variablen gehört wieder zur selben Verteilungsfamilie (die Summe hat dieselbe Verteilung wie $cX + d$ für irgendwelche Konstanten c und d). Diese Eigenschaft der Verteilung von X wird auch Stabilität oder Invarianz unter Addition oder einfach Stabilität genannt. Außerdem erscheinen die stabilen Pareto-Verteilungen als einzige mögliche Grenzverteilung von einer passend skalierten Summe von unabhängig identisch verteilten Variablen⁸⁸. Insbesondere ist diese Grenzverteilung genau dann

⁸⁶Vgl. Mandelbrot (1963, S. 394).

⁸⁷Vgl. Stilisierten Fakt 1: Fat Tails.

⁸⁸Vgl. Mandelbrot (1963, S. 400).

die Normalverteilung, wenn die Summanden eine endliche Varianz aufweisen⁸⁹. Der klassische zentrale Grenzwertsatz besagt:

Satz 3.1 (klassischer Zentraler Grenzwertsatz⁹⁰) Seien U_1, U_2, \dots unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert

μ und endlicher Varianz σ^2 . Dann konvergiert $\frac{\sum_{j=1}^n U_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ gegen $N(0,1)$ in Verteilung.

Mandelbrot (1963, S. 418) hat neben den *Fat Tails* noch einen stilisierten Fakt⁹¹ erwähnt:

„...large [price-] changes tend to be followed by large changes-of either sign-and small changes tend to be followed by small changes...“

und gibt selber zu, dass die von ihm vorgeschlagene Modellierung der log-Preisänderungen als unabhängig stabil Pareto-verteilt diesem Fakt keine Rechnung trägt. Außerdem, wenn die Tages-Log-Preisänderungen als unabhängig stabil Pareto mit unendlicher Varianz modelliert werden, dann sind die über mehrere Tage aggregierten Log-Preisänderungen ebenso stabil Pareto verteilt mit dem selben Parameter und mit einer unendlichen Varianz. Das widerspricht dem stilisierten Fakt Normalverteilung bei Aggregation.

Clark (1973) bietet eine Alternative zu Mandelbrot (1963) an, indem er die sukzessiven Preisänderungen als unabhängige normal-lognormale Mischungen mit endlicher Varianz modelliert. Somit resultiert die Normalverteilung natürlich als Grenzverteilung bei Aggregation mehrerer sukzessiver Preisänderungen⁹². Das ist im Einklang mit dem stilisierten Fakt *Normalverteilung bei Aggregation*. Die Idee von Clark (1973) ist, die Preise (ausgehend von einem Prozess $X(t)$) als einen subordinierten Prozess $X(T(t))$ zu modellieren. Somit erreicht er unabhängige leptokurtische Preisänderungen mit endlicher Varianz, wie aus dem folgenden Satz ersichtlich wird.

Satz 3.2 (subordinierter Prozess⁹³) Seien $X(t)$ und $T(t)$ Prozesse mit stationären unabhängigen Zuwächsen, d.h.

1. $X(t_{k+1}) - X(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) sind unabhängig für jede endliche Menge von Zeitpunkten $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ und analog für $T(t)$.
2. $X(s+t) - X(s)$ ist abhängig von t aber nicht von s für alle s . Analog für $T(t)$.

⁸⁹Dass bei endlichen Varianzen die Normalverteilung als Grenzverteilung resultiert, ist im klassischen Zentralen Grenzwertsatz zusammengefasst- vgl. z.B. Bhattacharya und Waymire (1990, S. 652).

⁹⁰Vgl. Bhattacharya und Waymire (1990, S. 652).

⁹¹Vgl. stilisierten Fakt *Volatilitätsclustering* im Kapitel 1.

⁹²Das folgt unmittelbar aus dem klassischen zentralen Grenzwertsatz.

⁹³Vgl. Clark (1973, S. 139-140), Theorem 4, Corollary 4.1 und die Beweise dazu.

Seien die Zuwächse von $X(t)$ mit einer Verteilung mit Erwartungswert 0 und endlicher Varianz σ^2 , d.h. $E[X(s+1) - X(s)] = 0$ für alle s ; und $E[(X(s+1) - X(s))^2] = \sigma^2$ für alle s . Seien die Zuwächse $T(s+1) - T(s)$ mit einer positiven Verteilung mit Erwartungswert α und unabhängig von den Zuwächsen von $X(t)$, d.h. $E[T(s+1) - T(s)] = \alpha$ und $T(s+t) - T(s) \geq 0$ für $t > 0$. Dann hat der subordinierte Prozess $X(T(t))$ stationär unabhängige Zuwächse $\Delta X(T(t)) = X(T(t+1)) - X(T(t))$ mit Erwartungswert 0 und Varianz $\alpha\sigma^2$. Wenn zusätzlich angenommen wird, dass $\Delta X(t)$ normalverteilt ist und $\Delta T(t)$ eine endliche Varianz hat, dann hat $\Delta X(T(t))$ eine Kurtosis von $3\left[\frac{\alpha^2 + \text{var}(\Delta T(t))}{\alpha^2}\right]$.

Mit dem subordinierten Prozess erreicht Clark (1973) die erwünschte fat-tails Eigenschaft der Preisänderungen, ohne dabei auf eine Verteilung mit unendlicher Varianz zurückzugreifen. Die Kurtosis des subordinierten Prozess kann bei konstant gehaltenem α mit $\text{var}(\Delta T(t))$ wachsen. $\sigma\sqrt{\Delta T(t)}$ kann man als die (stochastische) Volatilität betrachten, was aus der in Clark (1973, S. 140) bewiesenen Gleichung $\text{var}(\Delta X(T(t))|\Delta T(t) = \nu) = \nu\sigma^2$ ersichtlich wird. Satz 3.2 ist allgemein, Clark (1973) schlägt jedoch bei der Modellierung der Änderungen von Baumwollpreisen konkrete Verteilungsfamilien für die Zuwächse $\Delta X(t)$ und $\Delta T(t)$ vor. Er schlägt vor, $\Delta X(t)$ als $N(0, \sigma_2^2)$ zu modellieren und $\Delta T(t)$ als Log-Normal(μ, σ_1^2). Dann gilt $\alpha = E[T(s+1) - T(s)] = E(\Delta T(t)) = e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}}$ und $\text{var}(\Delta T(t)) = e^{2\mu + \sigma_1^2}(e^{\sigma_1^2} - 1)$; die (unbedingte) Varianz von $\Delta X(T(t))$ ist dann laut Satz 3.2 $\alpha\sigma^2 = \sigma_2^2 e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}}$. Die Kurtosis von $\Delta X(T(t))$ ist dann

$$\begin{aligned} \text{kurtosis}(\Delta X(T(t))) &= 3\left[\frac{\alpha^2 + \text{var}(\Delta T(t))}{\alpha^2}\right] = \\ &= 3\left(\frac{(e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}})^2 + e^{2\mu + \sigma_1^2}(e^{\sigma_1^2} - 1)}{(e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}})^2}\right) = 3e^{\sigma_1^2}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Diese Kurtosis ist bei positivem σ_1^2 größer als 3; je größer σ_1^2 , die Variabilität des $\ln(\Delta(T(t)))$ -Prozesses, desto größer die Kurtosis von $\Delta X(T(t))$. Wie Clark (1973, S. 142) bemerkt, falls man $\mu + \sigma_1^2/2$ konstant hält, aber σ_1^2 erhöht, dann bleibt $\text{var}(\Delta X(T(t)))$ konstant, während die $\text{kurtosis}(\Delta X(T(t)))$ wächst. Dies bedeutet, dass die vorgeschlagene Modellierung das Potenzial hat, die in der Realität beobachteten leptokurtischen Preisänderungen abzubilden. Außerdem erlaubt die endliche Varianz der Log-Preisänderungen, den zentralen Grenzwertsatz anzuwenden und somit erscheint die Normalverteilung als natürliche Grenzverteilung bei Aggregation (Addition) mehrerer

Log-Preisänderungen, was im Einklang mit dem stilisierten Fakt *Normalverteilung bei Aggregation* ist. Clark (1973) zeigt durch Likelihood-Analyse, dass das von ihm vorgeschlagene Modell dem Mandelbrot (1963)-Modell überlegen ist bei der Beschreibung von Baumwoll-Futures-Preisen⁹⁴. Clark (1973) betrachtet $T(t)$ teilweise als eine Funktion von beobachtbaren Variablen wie das Handelsvolumen, teilweise als latent⁹⁵. Die Modellierung als Funktion von beobachtbaren Variablen wird z.B. in Tauchen und Pitts (1983), Andersen (1994), Andersen (1996) und Ané und Geman (2000) weiter verfolgt. Die Mainstream SV-Literatur hat die andere Abzweigung befolgt- die Modellierung von $T(t)$ als latente Variable⁹⁶. Das Clark (1973) Modell läuft auf Modellierung der Log-Preisänderungen als eine normalverteilte Variable mit zufälliger Varianz ($\Delta T(t)\sigma^2$) hinaus. Dabei wird die zufällige Varianz als lognormal-verteilt angenommen. Bereits Press (1967) und Praetz (1972) modellieren die Preisänderungen als normalverteilt mit zufälliger Varianz, diese Varianz ist jedoch bei Press (1967) Poissonverteilt und bei Praetz (1972) invers-gamma-verteilt. Gemeinsam für Press (1967), Praetz (1972) und Clark (1973) ist die Modellierung sukzessiver Preisänderungen als unabhängig, was im Widerspruch mit dem stilisierten Fakt *Volatilitätsclustering* ist. Diese Lücke wird von der späteren Arbeit von Taylor (1982) gefüllt, sowie von einer nicht sehr oft zitierten (und unpublizierten) Arbeit von Rosenberg (1972)⁹⁷. Die Arbeit von Taylor (1982) läuft auf die Modellierung sukzessiver T -Zuwächse $\Delta T(t)$ in Clark (1973) als autokorreliert, anstatt als unabhängig, hinaus. Das Ergebnis sind unkorrelierte, aber abhängige sukzessive Log-Preisänderungen, deren (unbedingte) Verteilung leptokurtisch ist. Somit erfüllt das Modell noch einen der stilisierten Fakten, nämlich das *Volatilitätsclustering*. Genau genommen bleibt das Erhalten der *Normalverteilung bei Aggregation* noch zu erforschen, da der klassische zentrale Grenzwertsatz wegen der Abhängigkeit der Summanden nicht direkt anwendbar ist. Das von Taylor (1982) vorgeschlagene Modell für die stetigen Renditen (oder log-Preisänderungen) $r_t = \ln X_t - \ln X_{t-1}$ lautet:

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t \quad (3.2)$$

wobei μ der unbedingte Erwartungswert von r_t ist, $\ln\sigma_t$ als ein AR(1) Prozess modelliert wird und ϵ_t als ein ARMA(1,1)-Prozess mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Dieses Modell unterscheidet sich vom klassischen SV-Modell,

⁹⁴Vertreter der Modellierung der Renditen mit Pareto-stabilen Verteilungen wie Taleb (2010) führen solche Ergebnisse auf die Begrenzung der Analyse auf ruhige Zeiten (ohne große Preisänderungen) zurück.

⁹⁵Vgl. Shephard (2005, S. 4).

⁹⁶Vgl. Shephard (2005, S. 4).

⁹⁷Vgl. Shephard (2005, S.6).

eingeführt von Taylor (1986), das ϵ_t als unabhängig identisch normalverteilt modelliert:

Definition 3.1 (klassisches (auch Basis-) Stochastic-Volatility-Modell: Modell 1) Seien $r_t = 100(\ln X_t - \ln X_{t-1})$ die (prozentualen) stetigen Renditen. Das klassische SV-Modell lautet:

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.3)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \gamma + \phi(\ln(\sigma_{t-1}^2) - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.4)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Für $\mu = 0, \phi = 0$ resultiert das von Clark (1973) vorgeschlagene lognormalnormale Modell. Das klassische SV-Modell erlaubt nun bei $\phi > 0$ den stilisierten Fakt *Volatilitätsclustering* zu erfassen. Zu beachten ist auch die Arbeit Rosenberg (1972)⁹⁸, wo der Prozess σ_t^2 in 3.3 ebenfalls als teilweise prognostizierbar modelliert wird. Rosenberg (1972) schlägt an verschiedenen Stellen seiner Arbeit verschiedene Spezifikationen für σ_t^2 vor⁹⁹. Zum Beispiel als Funktion von exogenen positiven erklärenden Variablen $x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{Kt}$:

$$\sigma_t^2 = x_{1t}^{b_1} x_{2t}^{b_2} \dots x_{Kt}^{b_K} e^{u_t}, u_t \sim IID(0, \sigma_u^2) \quad (3.5)$$

oder

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^K x_{it} b_i + u_t, u_t \sim IID(0, \sigma_u^2) \quad (3.6)$$

oder

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^K x_{it} b_i + \sum_{s=1}^S w_s \sigma_{t-s}^2 + \sum_{r=1}^R \omega_r (r_t - \mu)^2 + u_t \quad (3.7)$$

Die letzte Gleichung kann als stochastischer Vorgänger eines GARCH(S,R)-Modells angesehen werden. Im folgenden Abschnitt werden einige statistische Eigenschaften des klassischen SV-Modells betrachtet.

⁹⁸Rosenberg (1972) wird von Taylor (2005, S. 267) an erster Stelle bei den ersten SV-Arbeiten aufgelistet-zusammen mit Clark (1973), Taylor (1982) und Tauchen und Pitts (1983).

⁹⁹Vgl. Rosenberg (1972, S. 91, S. 94).

3.1. Statistische Eigenschaften des klassischen SV-Modells

Zunächst ein paar Bemerkungen über den Begriff *Stochastic Volatility*. Die übliche Vorgehensweise in der Literatur (Vgl. z.B. Handbook of Financial Time Series -Andersen et al. (2009, S. 256) und Taylor (2005, S. 268)) ist, die Größe σ_t in Gleichung 3.3 als *die Volatilität* zu bezeichnen. Im SV-Modell ist die Volatilität, bedingt auf die Information \mathcal{F}_{t-1} , stochastisch: $\text{var}(\sigma_t|\mathcal{F}_{t-1}) > 0$ im Gegensatz zu den GARCH-Modellen wo $\text{var}(\sigma_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$. Zu beachten ist, dass die Volatilität in einem GARCH Modell eine Bedeutung als bedingte Standardabweichung der Renditen hat (bedingt auf \mathcal{F}_{t-1}) wogegen diese Bedeutung bei den SV-Modellen fehlt. Einige Autoren wie z.B. Francq und Zakoian (2010) versuchen dem Term σ_t in Gleichung 3.3 künstlich solche Bedeutung zu verleihen, indem sie in \mathcal{F}_{t-1} auch η_t aufnehmen (etwa $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(\eta_s, s \leq t)$). Bei dieser Vorgehensweise ist allerdings σ_t nicht mehr stochastisch bedingt auf diese \mathcal{F}_{t-1} und dann müsste man, wenn man das Modell als *Stochastic Volatility* bezeichnen will, eine zweite σ -Algebra \mathcal{F}_{t-1} wählen, bezüglich der σ_t stochastisch ist¹⁰⁰. Somit wäre σ_t bedingte Standardabweichung bezüglich einer σ -Algebra und stochastisch bezüglich einer anderen. Nun werden einige Eigenschaften der bedingten Verteilung von r_t bezüglich der Information $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(r_s, s \leq t-1)$ berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned} E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= \mu + E(\sigma_t \epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= \mu + E(E(\sigma_t \epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} \cup \sigma(\eta_s, s \leq t))|\mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= \mu + E(\sigma_t E(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} \cup \sigma(\eta_s, s \leq t))|\mathcal{F}_{t-1}) = \\ &= \mu + E(\sigma_t \cdot 0|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu \quad (3.8) \end{aligned}$$

Dabei wurde der Satz der iterierten Erwartungen benutzt. Aus $E(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mu$ folgt $E(r_t - \mu|\mathcal{F}_{t-1}) = 0$; nun folgt aus der \mathcal{F}_t -Messbarkeit von $r_t - \mu$, dass die Überschussrendite $r_t - \mu$ eine Martingaldifferenz bezüglich \mathcal{F}_t ist.

Im Folgenden werden einige Eigenschaften der unbedingten Verteilung von r_t hergeleitet. Sei $h_t = \ln(\sigma_t^2)$. Aus 3.4 folgt nun, dass h_t einem Gaußschen AR(1)-Prozess folgt:

$$h_t = \gamma - \phi\gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.9)$$

¹⁰⁰Etwa $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma(\epsilon_s, s \leq t-1)$.

Aus der klassischen ARMA-Theorie folgt nun, dass h_t normalverteilt, und für $|\phi| < 1$ auch streng und schwach stationär ist¹⁰¹. Den unbedingten Erwartungswert von h_t findet man aus 3.9 unter Erwartungswertbildung der beiden Seiten und anschließende Ausnutzung von $E(h_t) = E(h_{t-1})$:

$$\begin{aligned} E(h_t) &= \gamma(1 - \phi) + \phi E(h_{t-1}) + 0 \Rightarrow E(h_t) = \gamma(1 - \phi) + \phi E(h_t) \Rightarrow \\ &E(h_t) = \gamma. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aus der Unabhängigkeit der $\eta_s, s < t$ und η_t folgt die Unabhängigkeit von h_{t-1} und η_t . Dann folgt aus 3.9 unter Ausnutzung der Stationarität von h_t :

$$\begin{aligned} \text{Var}(h_t) &= \text{Var}(\gamma - \phi\gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t) = \phi^2 \text{Var}(h_{t-1}) + \text{Var}(\eta_t) \\ &\Rightarrow \text{Var}(h_t) = \phi^2 \text{Var}(h_t) + \sigma_\eta^2 \Rightarrow \text{Var}(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Somit ergibt sich für die unbedingte Verteilung von h_t :

$$h_t \sim N\left(\gamma, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right) \quad (3.12)$$

Aus der Stationarität von h_t folgt nun nach Satz **2.11** die Stationarität von $\sigma_t^2 = e^{h_t}$ und $\sigma_t = e^{h_t/2}$, da $f(x) = e^x$ und $f(x) = e^{x/2}$ stetige und somit messbare Funktionen sind. Aus 3.12 folgt, dass $\sigma_t^2 = e^{h_t} \sim \text{LogN}\left(\gamma, \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right)$ mit $E(\sigma_t^2) = e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}}$ und $\text{Var}(\sigma_t^2) = (e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1)e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}}$. Allgemeiner gilt $\sigma_t^{2s} = e^{sh_t} \sim \text{LogN}\left(s\gamma, s^2 \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right)$ woraus folgt¹⁰²

$$E(\sigma_t^{2s}) = e^{s\gamma + \frac{s^2 \sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}} \text{ und } \text{Var}(\sigma_t^{2s}) = (e^{\frac{s^2 \sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1)e^{2s\gamma + \frac{s^2 \sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}}. \quad (3.13)$$

Aus der Stationarität von $X = \sigma_t$ und $Y = \epsilon_t$ sowie aus deren Unabhängigkeit folgt nach Satz **2.11** die strenge Stationarität von $r_t = \mu + XY$, da $f((X, Y)^T) = \mu + XY$ eine stetige und somit messbare Funktion ist (nach Satz **2.10**). Aus 3.3 und der Unabhängigkeit von σ_t und ϵ_t folgt

¹⁰¹Vgl. Box und Jenkins (1976, S. 53) für die strenge Stationarität. Aus der strengen Stationarität folgt auch die Kovarianzstationarität, da das zweite Moment von h_t endlich ist- siehe Gleichung 3.11.

¹⁰²Vgl. Johnson et al. (1994, S. 211-212).

$$E(r_t) = E(\mu + \sigma_t \epsilon_t) = \mu + E(\sigma_t \epsilon_t) = \mu + E(\sigma_t)E(\epsilon_t) = \mu + E(\sigma_t) \cdot 0 = \mu \quad (3.14)$$

Da ϵ_t standardnormalverteilt ist, gilt¹⁰³

$$E(\epsilon_t^k) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist} \\ (k-1)!!, & \text{wenn } k \text{ gerade ist} \end{cases} \quad (3.15)$$

Dabei wird mit der doppelten Fakultät $n!!$ das Produkt aller ungeraden natürlichen Zahlen bis n bezeichnet.

Über das k -te zentrale Moment von r_t gilt dann unter Benutzung von 3.15 und 3.13 mit $s = k/2$:

$$\begin{aligned} E((r_t - \mu)^k) &= E((\sigma_t \epsilon_t)^k) = E(\sigma_t^k)E(\epsilon_t^k) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{wenn } k \text{ ungerade ist} \\ (k-1)!! e^{\frac{k}{2}\gamma + \frac{(\frac{k}{2})^2 \sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}}, & \text{wenn } k \text{ gerade ist} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nun kann man mithilfe von 3.16 die Varianz und die Kurtosis von r_t berechnen:

$$Var(r_t) = E((r_t - \mu)^2) = e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \quad (3.17)$$

$$Kurtosis(r_t) = \frac{E((r_t - \mu)^4)}{[E((r_t - \mu)^2)]^2} = \frac{3e^{2\gamma + \frac{2\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}}}{e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}}} = 3e^{\frac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}} \quad (3.18)$$

Bei $\phi = 0$ ergibt sich aus 3.18 die Kurtosisformel aus Gleichung 3.1. Das klassische Stochastic-Volatility Model hat nun eine zusätzliche Quelle (neben dem Parameter σ_η) von Extra-Kurtosis, nämlich bei Erhöhung des Volatilitätspersistenzparameters ϕ (ohne dabei $|\phi| < 1$ zu verletzen). Es ist auch ersichtlich, dass die Kurtosis bei $|\phi| < 1$ existiert, d.h. diese für Stationarität

¹⁰³Vgl. Johnson et al. (1994, S. 88).

ausreichende Bedingung reicht auch für die Existenz der Kurtosis aus. Dies gilt im Unterschied zum GARCH(1,1)-Modell, wo $\alpha + \beta < 1$ ausreichend für die schwache Stationarität der Renditen, jedoch nicht für die Existenz der Kurtosis ist (da muss zusätzlich $(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2(\kappa_\epsilon - 1) < 1$ gelten¹⁰⁴).

Mithilfe von 3.16 für $k=3$ ergibt sich:

$$skewness(r_t) = \frac{E((r_t - \mu)^3)}{[E((r_t - \mu)^2)]^{3/2}} = 0 \quad (3.19)$$

Die Schiefe der Renditen im klassischen SV-Modell ist 0. Etwas mehr, die unbedingte Verteilung der Renditen ist symmetrisch um den Mittelwert μ ¹⁰⁵. Dies folgt von der Unabhängigkeit von σ_t und ϵ_t und der Symmetrie der Innovation ϵ_t in Gleichung 3.3. Nun wird die ACVF von r_t hergeleitet. Mit $s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} cov(r_t, r_{t-s}) &= E[(r_t - E(r_t))(r_{t-s} - E(r_{t-s}))] = E(\sigma_t \epsilon_t \sigma_{t-s} \epsilon_{t-s}) = \\ &= E(\sigma_t \sigma_{t-s}) E(\epsilon_t) E(\epsilon_{t-s}) = 0 \quad (3.20) \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Renditen nicht autokorreliert sind im klassischen SV-Modell.

Nun werden die ACVF und anschließend die ACF der r_t^2 -Zeitreihe hergeleitet. Es gilt zunächst:

$$E(r_t^2) = Var(r_t) + [E(r_t)]^2 = \mu^2 + e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \quad (3.21)$$

¹⁰⁴Vgl. Carnero et al. (2004), Gleichung (2).

¹⁰⁵Vgl. Taylor (2005, S. 280).

Dies führt zu

$$\begin{aligned}
\text{cov}(r_t^2, r_{t-s}^2) &= E[(r_t^2 - E(r_t^2)][r_{t-s}^2 - E(r_{t-s}^2)]) = \\
&E([(μ + σ_t ε_t)^2 - μ^2 - e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}}][(\mu + \sigma_{t-s} \epsilon_{t-s})^2 - \mu^2 - e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}}]) = \\
&E[(2\mu\sigma_t \epsilon_t + \sigma_t^2 \epsilon_t^2 - e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}})(2\mu\sigma_{t-s} \epsilon_{t-s} + \sigma_{t-s}^2 \epsilon_{t-s}^2 - e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}})] = \\
&E(4\mu^2 \sigma_t \epsilon_t \sigma_{t-s} \epsilon_{t-s} + 2\mu\sigma_t \epsilon_t \sigma_{t-s}^2 \epsilon_{t-s}^2 - 2\mu\sigma_t \epsilon_t e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} + \\
&2\mu\sigma_t^2 \epsilon_t^2 \sigma_{t-s} \epsilon_{t-s} + \sigma_t^2 \epsilon_t^2 \sigma_{t-s}^2 \epsilon_{t-s}^2 - \sigma_t^2 \epsilon_t^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \\
&- 2\mu e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \sigma_{t-s} \epsilon_{t-s} - e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \sigma_{t-s}^2 \epsilon_{t-s}^2 + e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}}) = \\
&E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2 \epsilon_t^2 \epsilon_{t-s}^2 - \sigma_t^2 \epsilon_t^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} - \sigma_{t-s}^2 \epsilon_{t-s}^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} + e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}}) = \\
&E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2) - e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} - e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} + e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} = \\
&E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2) - e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Es bleibt, $E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2) = E(e^{h_t + h_{t-s}})$ zu bestimmen. s-malige iterative Anwendung von 3.9 liefert:

$$h_t = \gamma + \phi^s (h_{t-s} - \gamma) + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \eta_{t-i} \quad (3.23)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2) &= E(e^{h_t + h_{t-s}}) = E(e^{h_{t-s}} e^{\gamma + \phi^s (h_{t-s} - \gamma) + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \eta_{t-i}}) = \\
&E(e^{h_{t-s} (1 + \phi^s)} e^{\gamma - \phi^s \gamma + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \eta_{t-i}}) = \\
&E(e^{h_{t-s} (1 + \phi^s)}) E(e^{\gamma - \phi^s \gamma + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \eta_{t-i}}) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Da $h_{t-s}(1 + \phi^s) \sim N((1 + \phi^s)\gamma, (1 + \phi^s)^2 \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2})$ und

$\gamma - \phi^s\gamma + \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \eta_{t-i} \sim N(\gamma - \phi^s\gamma, \sum_{i=0}^{s-1} \phi^{2i} \sigma_\eta^2) = N(\gamma - \phi^s\gamma, \frac{1 - \phi^{2s}}{1 - \phi^2} \sigma_\eta^2)$ folgt nun als Fortsetzung von 3.24:

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2 \sigma_{t-s}^2) &= \\ \exp((1 + \phi^s)\gamma + \frac{1}{2}(1 + \phi^s)^2 \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}) \exp(\gamma(1 - \phi^s) + \frac{1}{2} \frac{1 - \phi^{2s}}{1 - \phi^2} \sigma_\eta^2) &= \\ e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}(1 + \phi^s)} & \quad (3.25) \end{aligned}$$

Einsetzen in 3.22 liefert:

$$\text{cov}(r_t^2, r_{t-s}^2) = e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}(1 + \phi^s)} - e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} = e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} (e^{\phi^s \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1) \quad (3.26)$$

Somit ist die ACVF der Zeitreihe r_t^2 berechnet. Um die ACF zu berechnen, wird $\text{Var}(r_t^2)$ gebraucht. Es gilt $\text{Var}(r_t^2) = E(r_t^4) - [E(r_t^2)]^2$. Dabei wurde $E(r_t^2)$ in Gleichung 3.21 angegeben. Es bleibt $E(r_t^4)$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} E(r_t^4) &= E[(\mu + \sigma_t \epsilon_t)^4] = E(\mu^4 + 4\mu^3 \sigma_t \epsilon_t + 6\mu^2 \sigma_t^2 \epsilon_t^2 + 4\mu \sigma_t^3 \epsilon_t^3 + \sigma_t^4 \epsilon_t^4) = \\ \mu^4 + 6\mu^2 E(\sigma_t^2) + 3E(\sigma_t^4) &= \mu^4 + 6\mu^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}} + 3e^{2\gamma + \frac{2\sigma_\eta^2}{(1 - \phi^2)}} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(r_t^2) &= E(r_t^4) - [E(r_t^2)]^2 = \mu^4 + 6\mu^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}} + 3e^{2\gamma + \frac{2\sigma_\eta^2}{(1 - \phi^2)}} \\ &- (\mu^2 + e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}})^2 = \\ &4\mu^2 e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}} + e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{(1 - \phi^2)}} (3e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nun ergibt sich aus Gleichungen 3.28 und 3.26

$$\text{korr}(r_t^2, r_{t-s}^2) = \frac{e^{\phi^s \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1}{4\mu^2 e^{-\gamma - \frac{\sigma_\eta^2}{2(1 - \phi^2)}} + 3e^{\frac{\sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}} - 1} \quad (3.29)$$

Somit ist auch die ACF der Zeitreihe r_t^2 im klassischen SV-Modell berechnet.

Carnero et al. (2004) zeigen, dass das klassische SV-Modell mit $\mu = 0$ flexibler ist als ein GARCH(1,1) Modell mit normalverteilten Innovationen, insbesondere bei Erfassung der (hohen) Kurtosis der Renditen, der Persistenz der Volatilität sowie der (niedrigen) ersten Autokorrelation der quadrierten Renditen. Um das GARCH(1,1)-Modell flexibler zu machen, müsste man die Innovationen mit einer fat-tail Verteilung modellieren. Insbesondere vergleichen Carnero et al. (2004) in einer Simulationsstudie das klassische SV-Modell mit einem Gaußschen GARCH(1,1) Modell. Carnero et al. (2004) erzeugen jeweils 1000 Zeitreihen vom Umfang 5000 mit dem klassischen SV-Modell mit verschiedenen alternativen Parameterwerten (bei allen Spezifikationen ist $\mu = 0$). Anschließend schätzen sie ein Gaußsches GARCH(1,1)-Modell auf den simulierten Reihen und berechnen Volatilitätpersistenz, Kurtosis der Renditen sowie erste Autokorrelation der durch das GARCH-Modell implizierten quadrierten Renditen. Es stellt sich heraus¹⁰⁶, dass die vom GARCH-Modell implizierte Autokorrelation erster Ordnung stets größer ist als die wahre Autokorrelation (die sich aus Gleichung 3.29 für $s = 1$ ergibt anhand der bekannten wahren SV-Parameter). Außerdem fallen die GARCH(1,1) Schätzungen bei größeren Werten der wahren Kurtosis (ab 7) größtenteils außerhalb des Bereichs, in dem das GARCH Modell eine endliche Kurtosis besitzt, und so oft die Kurtosis endlich ist, ist sie größer beim geschätzten GARCH-Modell als beim erzeugenden SV-Modell. So ergibt sich z.B. bei den (empirisch plausiblen) Werten von $\phi = 0.9856$ und $\sigma_\eta^2 = 0.0344$ die wahre Kurtosis als 7 (aus Gleichung 3.18) und die wahre erste Autokorrelation der quadrierten Renditen als 0.2529 (aus Gleichung 3.29 mit $\mu = 0$ und $s = 1$). Es werden 1000 Zeitreihen vom Umfang 5000 mit diesem SV-Modell generiert und jede wird individuell mit einem GARCH(1,1)-Modell geschätzt. In allen 1000 Fällen fallen die geschätzten GARCH-Koeffizienten in den Bereich in dem die Kurtosis nicht existiert.

Eine weitere Eigenschaft des klassischen SV-Modells ist die Ergodizität der Renditen. Die Reihe σ_t ist ergodisch und somit auch $r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t$ ¹⁰⁷. Andersen et al. (2009, S. 264) beweisen $\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow{d} N(0, E(\sigma^2))$ mit $X_t = r_t - \mu$ und $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$. Der Beweis geht auf den Zentralen Grenzwertsatz für eine stationär ergodische Martingaldifferenz-Reihe mit endlicher Varianz zurück¹⁰⁸. Das bedeutet, dass die mehrperiodigen Renditen im SV-Modell bei wachsender Periodenlänge gegen die Normalverteilung konvergieren. Dies ist im Einklang

¹⁰⁶Vgl. Carnero et al. (2004), Tabelle 2.

¹⁰⁷Vgl. Andersen et al. (2009, S. 257).

¹⁰⁸Vgl. Billingsley (1961, S. 788).

mit den stilisierten Fakten in der Einführung dieser Arbeit. Nun kann man feststellen, dass das klassische SV-Modell mit vier der stilisierten Fakten vereinbar ist: *Fat Tails, keine Autokorrelation, Volatilitätsclustering und Normalverteilung bei Aggregation*. Andere stilisierte Fakten wie Asymmetrie, bedingte Fat-Tails, Langsam abklingende Korrelation der absoluten Renditen, Leverage Effekt, Korrelation zwischen Handelsvolumen und Volatilität und Saisonalität sind vom klassischen SV-Modell nicht berücksichtigt. Es müssen Erweiterungen des Modells gebildet werden, um auch diese stilisierten Fakten zu erfassen.

3.2. Andere SV-Modelle

Eine sehr gute Übersicht vieler SV-Modelle mit Literaturangaben findet man in Hautsch und Ou (2008).¹⁰⁹ Darüber hinaus werden in dieser Dissertation allerdings weitere, zum Teil neu entwickelte SV-Modelle untersucht.

Definition 3.2 (SV-Modell mit AR(2) Log-Volatilität: Modell 2)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \quad (3.30)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \psi(h_{t-2} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.31)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s

Dieses Modell wurde in Berg et al. (2004) verwendet.

Definition 3.3 (Asymmetrisches Stochastic-Volatility-Modell: Modell 3)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.32)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.33)$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_{t+1} \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Dieses Modell wurde in dieser Form von Harvey und Shephard (1996) verwendet und mit korrelierten ϵ_t und η_t von Sandmann und Koopman (1998) und Jacquier et al. (2004). Yu (2005) untersucht beide Formen und kommt

¹⁰⁹Manche der Literaturangaben dort wurden nach Überprüfung von mir übernommen.

zum Schluss, dass das Modell sowohl aus theoretischer als auch aus empirischer Sicht besser ist in der Variante von Modell 3 und Harvey und Shephard (1996). Dieses Modell lässt Leverage zu (bei negativen Werten des Parameters ρ). Meyer und Yu (2000, S. 208) geben eine Umschreibung des Modells 3 (mit Hilfe des Satzes 2.3), die als Input für WinBUGS/OpenBUGS dienen kann. Hier die modifizierte Darstellung (es fehlt das Absolutglied in der Renditengleichung in Meyer und Yu (2000))

$$h_{t+1}|h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma), \sigma_\eta^2) \quad (3.34)$$

$$r_t|h_{t+1}, h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N\left(\mu + \frac{\rho}{\sigma_\eta} \exp(h_t/2)(h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma)), \exp(h_t)(1 - \rho^2)\right) \quad (3.35)$$

Definition 3.4 (Stochastic-Volatility-Modell mit Sprüngen: Modell 4)

$$r_t = \mu + s_t q_t + \exp(h_t/2) \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.36)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.37)$$

mit $q_t \sim B(1, \kappa)$, $\ln(1 + s_t) \sim N(-\delta^2/2, \delta^2)$ und ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s

Modell 4 wurde in Chib et al. (2002) untersucht.

Definition 3.5 (Stochastic-Volatility-Modell mit Student-t-Innovation: Modell 5)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2) \epsilon_t, \epsilon_t \sim t(\nu) \quad (3.38)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.39)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Modell 5 wurde in Liesenfeld und Jung (2000) und Chib et al. (2002) untersucht. ϵ_t wird als *scale mixture* modelliert: $\epsilon_t = \sqrt{\lambda_t} \varepsilon_t$ mit $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ und $\lambda_t \sim IG(\nu/2, \nu/2)$.

Definition 3.6 (Stochastic-Volatility-in-mean-Modell: Modell 6)

$$r_t = \mu + d \exp(h_t/2) + \exp(h_t/2) \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.40)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.41)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Modell 6 ist verwendet unter anderem in Koopman und Uspensky (2000), jedoch wird dort auch zusätzlich ein autoregressiver Term in der Renditengleichung betrachtet. In diesem Fall finden Koopman und Uspensky (2000), dass der Parameter d nicht signifikant negativ ist für alle untersuchten Daten (Financial Times All Share (UK), Standard & Poors Composite (US) und Topix Index (Japan)).

Definition 3.7 (Stochastic-Volatility-Modell mit VIX oder RV Regressor in der Varianzgleichung: Modell 7)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2) \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (3.42)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \lambda x_{t-1} + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.43)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s . $x_{t-1} = \ln(10000 \cdot RV_{t-1})$ oder $x_{t-1} = \ln(VIX_{t-1})$

Dabei bezeichnet RV die Realized Volatility, berechnet durch Hochfrequenzdaten als Schätzung der (ex-post) Tagesvolatilität (mehr dazu im Abschnitt 5.3). Der CBOE¹¹⁰-Volatility-Index (VIX) wird täglich anhand der impliziten Volatilität von S&P-500-Optionen berechnet und ist eine Schätzung für die erwartete Volatilität des S&P-500-Index für die nächsten 30 Tagen. Modell 7 mit VIX ist eine modifizierte Version vom SVX Modell in Hol und Koopman (2000) und Modell 9 in Berg et al. (2004). Hol und Koopman (2000) haben auch das SVX^+ -Modell betrachtet, mit modifizierter Varianzgleichung und haben bessere Out-of-Sample Prognosegüte (bei Prognose der zukünftigen

¹¹⁰CBOE bezeichnet die Optionsbörse Chicago Board Options Exchange.

Volatilität des S&P 100 Index) des SVX^+ -Modells als beim Modell 1 festgestellt. Die Realized Volatility wird mit $10000 = 100^2$ multipliziert, da die Renditen r_t in Prozent angegeben werden und RV nicht. Die Aufnahme der $\ln(10000 \cdot RV)$ oder $\ln(VIX)$ in der Varianzgleichung ermöglicht eine Erhöhung der nächsten Varianz, selbst dann wenn die Höhe der vergangenen Renditen noch nicht auf eine höhere Varianz hindeutet. Dies könnte passieren, wenn der Preis große Intradages-Schwankungen aufweist mit Eröffnungs- und Schlusskursen nah aneinander (dann wird jedoch die RV höher sein). Auch der VIX könnte Indizien für höhere zukünftige Volatilität liefern. Das Modell 7 wurde mit S&P-500-Index-Daten geschätzt, weil sich der VIX Index auf den S&P-500-Index bezieht (als implizite Volatilität von Index-Optionen).

Definition 3.8 (Asymmetrisches Stochastic-Volatility-Realized-Volatility (ASV-RV) Modell: Modell 8)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (3.44)$$

$$\ln(10000RV_t) = \xi + h_t + u_t \quad (3.45)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \eta_t, \quad (3.46)$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho\sigma_\eta \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ \rho\sigma_\eta & 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Modell 8 wurde von Takahashi et al. (2009) entwickelt. Der Leverage Effekt wird wie im Modell 3 durch ρ gesteuert. Durch die simultane Schätzung gehen die Beobachtungen von RV_t in die Schätzung von h_t mit ein. Die Umschreibung als Input für WinBUGS lautet:

$$h_{t+1}|h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma), \sigma_\eta^2) \quad (3.47)$$

$$\ln(RV_t)|h_t, \sigma_u^2, \xi \sim N(\xi + h_t, \sigma_u^2) \quad (3.48)$$

$$r_t | h_{t+1}, h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N\left(\mu + \frac{\rho}{\sigma_\eta} \exp(h_t/2)(h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma)), \exp(h_t)(1 - \rho^2)\right) \quad (3.49)$$

Definition 3.9 (Asymmetrisches Stochastic-Volatility-VIX (ASV-VIX) Modell: Modell 9)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (3.50)$$

$$\ln VIX_t = \xi + \psi h_t + u_t \quad (3.51)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \eta_t, \quad (3.52)$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho\sigma_\eta \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ \rho\sigma_\eta & 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}\right)$$

Modell 9 ist ein leicht modifiziertes Modell 8 unter Verwendung des VIX-Index anstatt der Realized Volatility. Wegen unterschiedlicher Skalierung von VIX und RV wurde der Parameter ψ eingeführt. Die Umschreibung als Input für WinBUGS lautet:

$$h_{t+1} | h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma), \sigma_\eta^2) \quad (3.53)$$

$$\ln(VIX_t) | h_t, \sigma_u^2, \xi, \psi \sim N(\xi + \psi h_t, \sigma_u^2) \quad (3.54)$$

$$r_t | h_{t+1}, h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \sim N\left(\mu + \frac{\rho}{\sigma_\eta} \exp(h_t/2)(h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma)), \exp(h_t)(1 - \rho^2)\right) \quad (3.55)$$

Definition 3.10 (Asymmetrisches Stochastic-Volatility-Modell nach Choy et al. (2008); Modell 10)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (3.56)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \sigma_\eta \eta_t, \quad (3.57)$$

mit $\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
und $\lambda_t \sim \text{Inverse-Gamma}(\nu/2, \nu/2)$

Wie in der Definitionsüberschrift erwähnt, wurde dieses Modell von Choy et al. (2008) eingeführt. Die Innovationen sind hier bivariat t-Verteilt (die t-Verteilung wird als *scale mixture* von Normalverteilungen modelliert). Die Umschreibung als Input für WinBUGS kann man in Wang et al. (2011, S. 855) finden:

$$\begin{aligned} r_t | h_{t+1}, h_t, \mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta, \rho, \nu, \lambda_t &\sim \\ N\left(\mu + \frac{\rho}{\sigma_\eta} \exp(h_t/2) (h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma)), \right. & \\ \left. \lambda_t \exp(h_t)(1 - \rho^2)\right) & \quad (3.58) \end{aligned}$$

$$h_{t+1} | h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta, \nu, \lambda_t \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma), \lambda_t \sigma_\eta^2) \quad (3.59)$$

$$h_1 | \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, \nu, \lambda_0 \sim N\left(\gamma, \frac{\lambda_0 \sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right) \quad (3.60)$$

$$\lambda_t \sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.61)$$

Definition 3.11 (Asymmetrisches Stochastic-Volatility-Modell mit schiefer bivariater t-Verteilung: Modell 11)

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (3.62)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \sigma_\eta \eta_t, \quad (3.63)$$

mit $\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} \lambda_t \gamma_1 \\ \lambda_t \gamma_2 \end{pmatrix}, \lambda_t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
und $\lambda_t \sim \text{Inverse-Gamma}(\nu/2, \nu/2)$

Modell 11 in dieser Form habe ich in der Literatur noch nicht gefunden. Nakajima und Omori (2012) haben ein Stochastic Volatility Modell mit Leverage und schiefer t-Verteilung für ϵ_t , während Modell 11 eine bivariate schiefe t-Verteilung für ϵ_t und η_t hat (siehe Definition 2.4). Die Umschreibung für Input in WinBUGS (nach Verwendung des Satzes 2.3) lautet:

$$r_t | h_{t+1}, h_t, \mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta, \rho, \nu, \lambda_t \sim N(\mu + \exp(h_t/2) \left[\lambda_t \gamma_1 + \frac{\rho}{\sigma_\eta} (h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma)) - \lambda_t \gamma_2 \right], \lambda_t \exp(h_t)(1 - \rho^2)) \quad (3.64)$$

$$h_{t+1} | h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta, \nu, \lambda_t \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma), \lambda_t \sigma_\eta^2) \quad (3.65)$$

$$h_1 | \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, \nu, \lambda_0 \sim N\left(\gamma + \frac{\sigma_\eta \lambda_0 \gamma_2}{1 - \phi}, \frac{\lambda_0 \sigma_\eta^2}{1 - \phi^2}\right) \quad (3.66)$$

$$\lambda_t \sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad (3.67)$$

Berg et al. (2004) haben eine empirische Untersuchung der Modelle 1,2,3,4,5 und 7 ohne Absolutglied (im Folgenden 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 7*) in der Renditengleichung angewandt auf die Mittelwert-korrigierten (demeaned)

täglichen stetigen Renditen des S&P 100 Index vom Januar 1993 bis Dezember 1998. Sie haben 3 Modellauswahlkriterien angewandt: das Chib Marginal Likelihood Kriterium, das harmonische Mittel und das DIC (Deviance Information Criterion)¹¹¹. Dabei haben sie folgende Rankings der Modelle erhalten:

Modell	Chib Marginal Likelihood	Harmonisches Mittel	DIC
1*	5	7	7
1	7	6	6
2*	6	5	5
3*	4	3	3
4*	1	4	1
5*	2	1	4
7*-VIX	3	2	2

Tabelle 3.1.: Modellrankings gemäß 3 Kriterien mit S&P 100 Index Renditen. Quelle: Berg et al. (2004), Table 5

Es handelt sich bei diesen Rankings um eine In-Sample-Güte, die Modelle wurden nach Anpassung an die Daten geordnet. In der vorliegenden Dissertation geht es vielmehr um Out-of-Sample Prognosegüte der Modelle bezüglich der Value-at-Risk und Expected-Shortfall Prognosen.

3.3. Vergleich zu GARCH-Modellen

Hsieh (1991) zeigt, dass ARCH/GARCH/EGARCH Modelle unfähig sind, die ganze nichtlineare Abhängigkeit der Finanzzeitreihen zu erfassen. Anhand Daten für Renditen von 11 Aktienindices untersucht er die standardisierten Residuen $z_t = \frac{r_t - \mu}{\hat{\sigma}_t}$ (impliziert durch ein EGARCH¹¹² Modell) auf IID (unabhängig identisch verteilt) mit Hilfe der Brock-Dechert-Scheinkman (BDS) Teststatistik. Das Bündel von BDS Teststatistiken verwirft die IID-Hypothese. Für die täglichen S&P Renditen lehnen alle 4 BDS Teststatistiken die Nullhypothese ab. Wenn dagegen eine stochastische Störgröße in die Volatilitätsgleichung eingeführt ist (also stochastische Volatilität), zeigt Hsieh, dass die standardisierten Residuen (impliziert durch das SV-Modell) die Nullhypothese auf IID nicht ablehnen. Dies zeigt, dass SV-Modellen fähiger sind, die nichtlineare Abhängigkeit der Renditen zu erfassen.

¹¹¹Vgl. Berg et al. (2004, S. 109-111).

¹¹²Vgl. Francq und Zakoian (2010, S. 246) für Definition eines EGARCH Modells (Exponential GARCH).

Jacquier et al. (1994) betrachten die theoretischen Autokorrelationsfunktionen von einem GARCH(1,1) und einem SV-Basismodell, wobei die Modellparameter zuerst geschätzt werden anhand der Renditen eines Portfolios von NYSE Aktien (vom untersten Dezil nach Marktkapitalisierung). Sie stellen diese ACF und die empirische ACF der quadrierten Residuen in einem Diagramm dar und zeigen, dass die ACF, impliziert durch das SV-Modell, viel näher an der empirischen ACF liegt als die GARCH-ACF. Das GARCH-Modell impliziert viel größere Werte für die ACF vor allem bei den kleinen Lags mit maximaler Differenz für Lag 1.

Carnero et al. (2001) vergleichen das Basismodell mit stochastischer Volatilität mit GARCH-Modellen und zeigen, daß das SV-Modell flexibler ist als GARCH, d.h. fähiger ist, Zeitreihen mit den in der Realität beobachteten Eigenschaften zu erzeugen. Diese Eigenschaften (beobachtet in Hochfrequenzdaten) sind: hohe Kurtosis, kleine Autokorrelation vom Lag 1 der Zeitreihe der quadrierten Renditen und langsames Abklingen der Autokorrelation für höhere Lags derselben Zeitreihe. Carnero et al. (2001) argumentieren wie folgt:

Exzess-Kurtosis kann auf die folgenden Weisen erklärt werden:

(i) Fat Tails der Verteilung vom Weißen Rauschen ε_t

(ii) Bedingte Heteroskedastizität. Es gilt $E(r_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1) = E(\sigma_t^2 | r_{t-1}, r_{t-2}, \dots, r_1)$ und die Kurtosis von r_t hängt von der dynamischen Entwicklung der bedingten Varianz ab.

(iii) Unerwartete Komponente der Volatilität, die unabhängig von der Vergangenheit ist.

GARCH Modelle lassen (i) und (ii) als Quellen von hoher Exzess-Kurtosis zu, SV Modelle schöpfen auch (iii) aus.

Zur Erinnerung, das GARCH(1,1)-Modell besagt: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$.

Carnero et al. (2001) zeigen, dass das SV-Basismodell fähig ist, Zeitreihen mit höherer Kurtosis und niedrigerer (als das GARCH-Modell) Autokorrelation erster Ordnung der quadrierten Renditen zu generieren mit einer breiteren zulässigen Spanne für den Persistenz-Parameter ϕ . Das GARCH(1,1) Modell kann nur dann Renditen mit höherer Kurtosis und niedrigerer Autokorrelation zum Lag 1 der quadrierten Renditen generieren, wenn die Persistenz hoch ist ($\alpha_1 + \beta_1$ nah an 1). Dies kann die Tatsache erklären, dass wenn in der Praxis ein GARCH (1,1) Modell benutzt wird, man eine leptokurtische Verteilung für ε_t annehmen muss. Bei dem SV-Basismodell kann man auch die Normalverteilung für ε_t annehmen.

Danielsson (1994) betrachten eine modifizierte Version des SV-Basismodells:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \sqrt{1 - \rho^2}u_t, u_t \sim N(0, 1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \gamma_1 y_{t-1} + \gamma_2 |y_{t-1}| + \delta \ln \sigma_{t-1}^2 + \nu \eta_t, \eta_t \sim N(0, 1)$$

Dabei fehlt der $+\sqrt{1 - \rho^2}u_t$ -Term in Danielsson (1994), er wurde hier sinn- gemäß eingefügt¹¹³. Danielsson (1994) schätzt dieses Modell anhand 2022 täglicher Beobachtungen des S&P 500 Index für die Jahre 1980 bis 1987. Er benutzt die Methode Simulated Maximum Likelihood (SML), die später in dieser Arbeit erklärt wird, um die Parameter des SV-Modells zu schätzen. Er schätzt anhand derselben Daten auch ein ARCH(5)¹¹⁴, GARCH(2,1), IG-ARCH(1,1) und EGARCH(2,1) Modell. Die optimale Ordnung wurde anhand des Schwarz-Kriteriums ermittelt:

$$SC = -2\ln(\text{Maximum Likelihood}) + (\ln T)(\text{Anzahl der Parameter}).$$

Das SV-Modell wurde für $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ geschätzt. Die Unterschiede zu einem SV-Basismodell sind das fehlende Absolutglied in der Renditengleichung sowie die Autokorreliertheit der Innovationen in der Renditengleichung (der Parameter ρ ist 0 im SV-Basismodell).

Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse zusammen:

	SVM	ARCH(5)	GARCH(2,1)	IGARCH(1,1)	EGARCH(2,1)
Log-Lik	-2890,07	-2943,63	-2927,27	-2944,66	-2915,59
Schwarz	5810,59	5932,93	5884,98	5904,55	5869,24

Tabelle 3.2.: Likelihood und Schwarz Kriterium für SV und ARCH Modelle. Quelle: Danielsson (1994)

Die beste Anpassung unter den ARCH-Modellen ergibt sich beim EGARCH Modell, das SV Modell hat aber einen Log-Likelihood Wert, der um 25,5 größer ist und dies bei einem Parameter weniger für das SV-Modell (das SV Modell hat 4 Parameter und das EGARCH Modell 5). Dies zeigt die Überlegenheit des SV-Modells im Vergleich zu den ARCH-Modellen.

Kim et al. (1998) benutzen ein SV-Basismodell mit unkorrelierten Gaußschen Störgrößen um Währungszeitreihen zu analysieren. Sie vergleichen die Anpassung des SV Modells mit der Anpassung von einem Gaußschen GARCH Modell und einem t-GARCH Modell. Das SV Modell wird durch eine Markov Chain Monte Carlo Methode geschätzt, die GARCH Modelle standardmäßig durch die Maximum Likelihood Methode. Die Anpassung wird

¹¹³Es ist wahrscheinlich ein Druckfehler im Artikel Danielsson (1994).

¹¹⁴Vgl. Tsay (2002, S. 83) für Definition eines ARCH Prozesses.

anhand des Likelihood Ratio Tests verglichen. Da es sich hier nicht um ineinander geschachtelte Modelle handelt, hat die Likelihood-Ratio Teststatistik keine Standardverteilung. Kim et al. (1998) schätzen die Verteilungen des Likelihood Quotienten unter verschiedenen Nullhypothesen durch Simulation. Das Ergebnis ist, dass die Likelihood-Ratios eine Evidenz gegen das Gaußsche GARCH Modell präsentieren und einen kleinen Vorzug für das t-GARCH Modell im Vergleich zu dem SV Modell, das aber weniger Parameter hat.

Nicht nur bei der Anpassung an empirische Daten ist das SV-Modell besser als GARCH-Modelle. Auch bei Volatilitätsprognosen ist das SV-Modell überlegen. Yu (2002) untersucht neun verschiedene Modellspezifikationen zwecks Volatilitätsprognose und benutzt tägliche Daten für 18 Jahre vom neuseeländischen Aktienmarkt. Die Modelle für die monatlichen bedingten Varianzen sind wie folgt: Random Walk, Historical Average, Moving Average, einfache Regression, Exponential smoothing, Exponentially-weighted moving average (EWMA), ARCH, GARCH, SV. Yu (2002) benutzt die ersten 14 Jahre für die Parameterschätzung und ermittelt die einperiodige Prognose für die monatliche Volatilität für die nächsten 48 Monate (die Modellparameter werden laufend geschätzt) anhand jedes der neun Modelle. Die Prognosegüte wird anhand von 4 Maßen¹¹⁵ ermittelt: root mean square error (RMSE), mean absolute error (MAE), die Theil-U Statistik und die LINEX-loss Funktion. Diese Größen werden wie folgt definiert:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2}; \quad MAE = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I |\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2|;$$

$$Theil - U = \frac{\sum_{i=1}^I (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)^2}{\sum_{i=1}^I (\sigma_{i-1}^2 - \sigma_i^2)^2}$$

$$LINEX = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I [\exp(-a(\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2)) + a(\hat{\sigma}_i^2 - \sigma_i^2) - 1] \quad \text{für } a = -20, -10, 10, 20$$

Die folgende Tabelle gibt die Ränge der neun Modelle bezüglich einiger Maßgrößen- das Modell¹¹⁶ mit der größten Genauigkeit (also mit kleinem Wert der Maßgröße) hat den Rang 1.

¹¹⁵Dabei wird σ_i^2 als Summe der quadrierten Tagesrenditen im entsprechenden Monat berechnet.

¹¹⁶Das BIC-Kriterium (Bayesian Information Criterion) wurde benutzt, um die Ordnung der ARCH- und GARCH-Modelle zu bestimmen.

	RMSE	MAE	Theil-U	LINEX $\alpha=10$
Random Walk	11	6	11	11
Hist. average	3	7	3	3
MA(5)	5	3	5	5
MA(10)	8	11	8	8
Regression	10	5	10	10
EWMA(5)	6	4	6	6
EWMA(10)	9	12	9	9
Exp.smooth	7	1	7	7
ARCH	12	10	12	12
GARCH(1,1)	4	9	4	4
GARCH(3,2)	2	8	2	2
SV	1	2	1	1

Tabelle 3.3.: Modellränge gemäß Prognosegütern Quelle: Yu (2002)

4. Schätzung von SV-Modellen: eine Übersicht

Die Stochastic Volatility Modelle waren zunächst (im Unterschied zu den GARCH Modellen) nicht leicht zugänglich, weil die Schätzung der Parameter im Allgemeinen durch die Maximum Likelihoodmethode nicht handhabbar ist. Die Likelihoodfunktion lässt sich nicht analytisch bestimmen. Dies ist eine Folge der Nichtbeobachtbarkeit der Volatilität. Die Schwierigkeit wird anhand einer Modifikation des klassischen SV-Modells demonstriert (hier ist $\mu = 0$, vgl. 3.3 und $\omega = \gamma - \phi\gamma$, vgl. 3.4)¹¹⁷.

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t, \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\eta^2)$$

$$\text{Sei } \theta = (\omega, \phi, \sigma_\eta, \sigma_0), \Sigma = \{\sigma_t^2\}_{t=1}^T, Y = \{r_t\}_{t=1}^T$$

Im Folgenden wird versucht, die Likelihoodfunktion $f(Y|\theta)$ zu konstruieren. Zuerst leiten wir $f(Y, \Sigma|\theta)$ her. Es gilt $f(Y, \Sigma|\theta) = f(Y|\Sigma, \theta)f(\Sigma|\theta)$. Da $r_t|\Sigma, \theta \sim N(0, \sigma_t^2)$ folgt:

$$f(Y|\Sigma, \theta) = \prod_{t=1}^T \left[\frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \right].$$

Es gilt $x = \ln \sigma_t^2 \sim N(\omega + \phi \ln \sigma_{t-1}^2, \sigma_\eta^2)$. x hat die Dichte der Normalverteilung f_x . Es wird die Dichte von $z = \sigma_t^2 = e^x$ gesucht. Laut der Formel für Transformation von Dichten $f_z(z) = f_x(\ln z) \left| \frac{d}{dz} \ln z \right| = \frac{f_x(\ln z)}{z} = \frac{f_x(\ln \sigma_t^2)}{\sigma_t^2}$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} f(\Sigma|\theta) &= f_z(\sigma_1^2|\theta) f_z(\sigma_2^2|\sigma_1^2, \theta) \dots f_z(\sigma_T^2|\sigma_{T-1}^2, \sigma_{T-2}^2, \dots, \sigma_1^2, \theta) = \\ &= \prod_{t=1}^T \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2 \sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\eta^2} (\ln \sigma_t^2 - \omega - \phi \ln \sigma_{t-1}^2)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die gemeinsame Dichte $f(Y, \Sigma|\theta) = f(Y|\Sigma, \theta)f(\Sigma|\theta)$ hat dann eine explizite Form. Da nur Y beobachtbar ist und Σ nicht, müssen wir $f(Y|\theta)$ als eine Randdichte bestimmen, indem wir aus der gemeinsamen Dichte Σ herausintegrieren:

$$f(Y|\theta) = \int_{\mathbb{R}_+^T} f(Y, \Sigma|\theta) d\Sigma$$

Wenn $\phi = 0$ kann das letzte Integral als Produkt von T eindimensionalen Integralen geschrieben werden:

¹¹⁷Vgl. Danielsson (1994).

$$f(Y|\theta) = \prod_{t=1}^T \int_{\mathbb{R}_+} f(r_t, \sigma_t^2) d\sigma_t^2$$

In diesem Fall können konventionelle numerische Methoden eingesetzt werden, um $f(Y|\theta)$ zu erhalten. Wenn aber $\phi \neq 0$, muss man ein T -dimensionales Integral berechnen, was mit konventionellen numerischen Methoden nicht möglich ist. Die Stichprobengröße T ist im Prinzip im Bereich der Hunderte oder Tausende. Eine analytische Lösung gibt es im Allgemeinen nicht. Fazit, es gibt weder eine analytische noch eine konventionelle numerische Lösung für die Likelihoodfunktion und eine konventionelle Maximum Likelihood Schätzung ist nicht möglich. Diese Tatsache hat lange Zeit die praktische Anwendung von SV-Modellen erschwert. Im Laufe der Zeit wurden alternative Methoden zur Schätzung der SV-Modelle vorgeschlagen, dieses Kapitel gibt eine Übersicht. Allgemein lassen sich die Methoden in zwei Gruppen unterteilen: direkt auf statistischen Eigenschaften von r_t basierende Methoden und auf der linearen *state-space*-Form des Modells basierende Methoden. Zu der ersten Gruppe gehören vier Klassen von Methoden: (i) Schätzung basierend auf der Momentenmethode, (ii) Schätzer basierend auf dem Maximum Likelihood Prinzip, (iii) Bayesianische Markov Chain Monte Carlo Methoden und (iv) Schätzer basierend auf einem zusätzlichen Modell. Die Beschreibung folgt dem Artikel von Broto und Ruiz (2002) und zum Teil dem Kapitel "Statistical Inference" in Ghysels et al. (1996). Literaturhinweise für die verschiedenen Methoden können diesen beiden Artikeln entnommen werden.

4.1. Momentenmethode

Die Hauptidee ist, die Konvergenz der Stichprobenmomente zu ihren theoretischen unbedingten Erwartungswerten zu benutzen. Zum Beispiel, wenn das SV-Basismodell betrachtet wird, können folgende Gleichungen¹¹⁸ benutzt werden, um sukzessive μ , $\frac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}$, γ und ϕ zu bestimmen.

$$E(r_t) = \mu \tag{4.1}$$

$$kurtosis(r_t) = 3e^{\frac{\sigma_\eta^2}{(1-\phi^2)}} \tag{4.2}$$

¹¹⁸Vgl. Gleichungen 3.14, 3.18, 3.17 und 3.26.

$$\text{var}(r_t) = e^{\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{2(1-\phi^2)}} \quad (4.3)$$

$$\text{cov}(r_t^2, r_{t-1}^2) = e^{2\gamma + \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} (e^{\phi \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}} - 1) \quad (4.4)$$

Dies war ein Beispiel der einfachsten Momentenmethode¹¹⁹.

Allgemein berechnet man m Momente. Sei β der Parametervektor, T die Stichprobengröße und bezeichne $g_T(\beta)$ den $m \times 1$ Vektor von Differenzen zwischen Stichprobenmomenten und deren theoretischen Erwartungswerten. Der verallgemeinerte Momentenmethode-Schätzer (GMM) wird berechnet durch Minimieren einer Kriteriumfunktion:

$\hat{\beta}_T = \arg \min_{\beta} g_T(\beta)' W_T g_T(\beta)$, wobei W_T eine $m \times m$ Gewichtungsmatrix ist, die der Wichtigkeit der Momente entspricht.

Falls es keine analytischen Ausdrücke für die theoretischen Momente gibt, kann man stattdessen simulierte Momente einsetzen: durch Verwendung des Modells werden für einen bestimmten Wert β der Parameter H Simulationen $\{r_1^i(\beta), \dots, r_T^i(\beta)\}_{i=1}^H$ durchgeführt und die entsprechenden Momente als arithmetische Mittel der Stichprobenmomente in den H Stichproben berechnet. Diese Methode wird simulierte Momentenmethode (SMM) genannt.

Die Momentenmethode ist relativ einfach, verbirgt jedoch einige Unklarheiten. Die Momentenanzahl und die explizite Wahl von Momenten ist dem Benutzer überlassen. Ein Problem ist auch das Berechnen der Gewichtungsmatrix W_T , da verschiedene Optionen in der Praxis zur Verfügung stehen.

Die Momentenmethode ist bei endlichen Stichproben sehr ineffizient. Jacquier et al. (1994) zeigen, dass dies hauptsächlich auf die Tatsache zurückzuführen ist, dass das empirische ϕ nah an 1 ist und Konvergenz zu den theoretischen Momenten sehr langsam ist. Die SMM Methode ist noch ineffizienter als die GMM Methode, da hier durch die Simulation eine zusätzliche Fehlerquelle da ist (besonders bei kleinen Werten von H).

Ein weiterer Nachteil der Momentenmethode ist, dass sie keine Schätzung der Volatilitäten liefert. Andere Methoden wie der Kalman Filter müssen daher eingesetzt werden.

¹¹⁹Vgl. Ghysels et al. (1996).

4.2. Quasi-Maximum-Likelihood Methode

Diese Methode basiert auf der linearisierten Form des modifizierten klassischen SV-Modells geschrieben ohne Absolutglied μ in der Renditengleichung 3.3:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (4.5)$$

wobei $y_t = r_t - \bar{r}$. Die Varianzgleichung 3.4 wird mit $\omega = \gamma - \phi\gamma$ modifiziert:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t, \eta_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma_\eta^2) \quad (4.6)$$

Wenn man Gleichung 4.5 quadriert und logarithmiert und wenn man $h_t = \ln \sigma_t^2$ setzt, erhält man die folgende lineare *state space* Form

$$\ln y_t^2 = h_t + \ln \varepsilon_t^2 = -1.27 + h_t + \xi_t, \text{ mit } E(\xi_t) = 0, \text{ Var}(\xi_t) = \frac{\pi^2}{2}$$

$$h_t = \omega + \phi h_{t-1} + \eta_t$$

Es wird angenommen dass $\xi_t \sim N(0, \frac{\pi^2}{2})$, um den Kalman Filter¹²⁰ anwenden zu können. Die tatsächliche Verteilung von $\xi_t = \ln \varepsilon_t^2 + 1,27$ ist nicht Normal sondern schief und leptokurtisch.

Der Kalman Filter geht wie folgt vor¹²¹:

a) Anfangswerte

$$\hat{h}_{1|0} = 0; \Sigma_{1|0} = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}$$

b) sequentielle Aktualisierung:

$$\hat{h}_{t|t} = \hat{h}_{t|t-1} + \Sigma_{t|t-1} \left(\Sigma_{t|t-1} + \frac{\pi^2}{2} \right)^{-1} (\ln y_t^2 + 1.27 - \frac{\omega}{1-\phi} - \hat{h}_{t|t-1})$$

$$\Sigma_{t|t} = \Sigma_{t|t-1} - \Sigma_{t|t-1} \left(\Sigma_{t|t-1} + \frac{\pi^2}{2} \right)^{-1} \Sigma_{t|t-1}$$

$$\hat{h}_{t+1|t} = \phi \hat{h}_{t|t-1} + \phi \left(1 + \frac{\pi^2}{2\Sigma_{t|t-1}} \right)^{-1} (\ln y_t^2 + 1.27 - \frac{\omega}{1-\phi} - \hat{h}_{t|t-1})$$

$$\Sigma_{t+1|t} = \phi^2 \Sigma_{t|t-1} + \sigma_\eta^2$$

Der Kalman Filter liefert den bedingten Erwartungswert $E(\ln y_t^2 | y_1, y_2, \dots, y_{t-1}) = -1.27 + \frac{\omega}{1-\phi} + \hat{h}_{t|t-1}$ sowie die bedingte Varianz $\text{Var}(\ln y_t^2 | y_1, y_2, \dots, y_{t-1}) = \Sigma_{t|t-1} + \frac{\pi^2}{2}$

Anhand dieser Werte wird die Quasi-Likelihood-Funktion gebildet:

¹²⁰Vgl. Hamilton (1994, S. 377-381).

¹²¹Vgl. Yu (2002), Anhang.

$$\ln L(\phi, \omega, \sigma_\eta^2) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\Sigma_{t|t-1} + \frac{\pi^2}{2}) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{(\ln y_t^2 + 1.27 - \frac{\omega}{1-\phi} - \widehat{h}_{t|t-1})^2}{\Sigma_{t|t-1} + \frac{\pi^2}{2}}$$

Diese Funktion wird maximiert.

Die QML Prozedur ist ineffizient, da die Methode nicht auf der exakten Likelihood Funktion basiert: die $\ln \varepsilon_t^2$ -Verteilung wird durch die Normalverteilung approximiert. Der negative Effekt dieser Approximation wird stärker wenn σ_η^2 klein ist, was auch der Fall ist bei empirischen Untersuchungen¹²². Jacquier et al. (1994) zeigen, dass bei endlichen Stichproben, kleinem σ_η^2 und ϕ nah an 1, die QML stark ineffizient ist.

Einer der neueren Beiträge im Bereich von QML ist Alizadeh et al. (2002), die ein anderes Volatilitätsmaß benutzen, nämlich den *Range* - die Differenz zwischen dem Logarithmus des größten Preises und dem Logarithmus des niedrigsten Preises innerhalb des Beobachtungsintervalls (z.B. innerhalb des Tages). Sie zeigen für empirische Finanzmarktzeitreihen, dass die Verteilung des log-Range wesentlich besser mit einer Normalverteilung approximiert wird als die Verteilung der quadrierten Renditen. Dadurch wird die QML Methode in Verbindung mit dem log-Range effizienter. Außerdem argumentieren die Autoren, dass der Range ein besseres Volatilitätsmaß ist als die quadrierten Renditen, da an Tagen mit vielen Preissteigerungen und Preissenkungen die Rendite nah an 0 sein kann und somit die eigentliche Intradages - Volatilität unterschätzt wird.

4.3. Simuliertes Maximum Likelihood/ Importance Sampling

Für Literaturhinweise siehe Broto und Ruiz (2002). Hier wird kurz auf die SML Methode eingegangen auf der Basis des Artikels von Danielsson (1994)¹²³. Wie schon erwähnt wurde, besteht das Hauptproblem der Maximum Likelihood Methode in der Nichtbeobachtbarkeit der Volatilität. Falls $\Sigma = \{\sigma_t^2\}_{t=1}^T$, beobachtbar wäre, könnte man den Maximum Likelihood Schätzer als $\widehat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta} f(Y, \Sigma|\theta)$ berechnen. Da aber Σ nicht beobachtbar ist, muss Σ aus der gemeinsamen Dichte herausintegriert werden, damit man die Randdichte $f(Y|\theta)$ erhält. Sei $\Lambda = (\ln \sigma_1^2, \ln \sigma_2^2, \dots, \ln \sigma_T^2)' = (h_1, \dots, h_T)'$. Man muss dann das T -dimensionale Integral $f(Y|\theta) = \int_{\mathbb{R}^T} f(Y, \Lambda|\theta) d\Lambda = \int_{\mathbb{R}^T} f(Y|\Lambda, \theta) f(\Lambda|\theta) d\Lambda$ berechnen, was durch vorhandene konventionelle numerische Methoden unerreichbar ist wenn $\phi \neq 0$. Es wird deshalb auf

¹²²Vgl. Broto und Ruiz (2002).

¹²³Vgl. auch Andersen et al. (2009, S. 322-326).

Simulation zurückgegriffen. Die einfachste *brute-force* Monte Carlo Integration besteht im Folgenden: Erstens, N -mal Λ generieren von der Verteilung $f(\Lambda|\theta)$ von Λ unter gegebenen Parametern θ . Dies kann sequentiell erfolgen: zuerst wird h_0 von der stationären unbedingten Verteilung von h_t generiert und dann wird h_t von $f(h_t|h_{t-1}, \theta)$ für $t = 1, 2, \dots, T$ generiert. Somit erhält man einen Wert des Vektors $\Lambda = (h_1, \dots, h_T)'$. Dies wird N -mal wiederholt. Ergebnis sind N Vektoren $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$. Eine Schätzung für die Likelihood Funktion ist dann $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(Y|\Lambda_i, \theta)$. Dies wird für verschiedene Werte von θ wiederholt bis man das Maximum der Likelihood Funktion erreicht hat.

Diese *brute force* Monte Carlo Simulation ist ineffizient, die Varianz des Schätzers wird praktisch unendlich wenn T viel größer ist als 200. Was haben wir bei der *brute-force* Monte Carlo Simulation gemacht? Λ wurde von der *importance sampling* Funktion

$$\mu_0(\Lambda|\theta) = \prod_{t=1}^T f(h_t|\theta, h_{t-1})f(h_0|\theta) \quad N\text{-mal gezogen, in die remainder}$$

Funktion $\psi_0(\Lambda, \theta) = \prod_{t=1}^T f(r_t|\theta, h_t)$ eingesetzt und anschließend wurde

das arithmetische Mittel $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_0(\Lambda_i, \theta)$ berechnet. Somit haben wir eine Schätzung für $\int_{\mathbb{R}^T} f(Y, \Lambda|\theta)d\Lambda = \int_{\mathbb{R}^T} \psi_0(\Lambda, \theta)\mu_0(\Lambda|\theta)d\Lambda$ bekommen.

Die Wahl der Funktionsform von $\mu_0(\Lambda|\theta)$ und $\psi_0(\Lambda, \theta)$ ist allerdings nicht bindend. Danielsson und Richard (1993) schlagen eine Verbesserung vor, die unter dem Namen AGIS bekannt ist (Accelerated Gaussian Importance Sampler). Die Idee ist die Form der Funktionen zu ändern, indem wir $\mu_0(\Lambda|\theta)$ mit einer varianzverringenden Funktion $\xi(\Lambda, \theta, Q)$ multiplizieren und $\psi_0(\Lambda, \theta)$ entsprechend durch $\xi(\Lambda, \theta, Q)$ dividieren. Damit $\mu(\Lambda|\theta)$ weiterhin eine Dichte bleibt, muss $\mu_0(\Lambda|\theta)\xi(\Lambda, \theta, Q)$ durch eine Integrationskonstante $\kappa(\theta, Q) = \int \mu_0(\Lambda|\theta)\xi(\Lambda, \theta, Q)d\Lambda$ dividiert werden und $\frac{\psi_0(\Lambda, \theta)}{\xi(\Lambda, \theta, Q)}$ mit dieser Konstante multipliziert werden. Die neue *importance sampling* Funktion¹²⁴ ist $\mu(\Lambda|\theta) = \frac{\mu_0(\Lambda|\theta)\xi(\Lambda, \theta, Q)}{\kappa(\theta, Q)}$ und die neue *remainder* Funktion¹²⁵ ist $\psi(\Lambda, \theta) = \frac{\psi_0(\Lambda, \theta)\kappa(\theta, Q)}{\xi(\Lambda, \theta, Q)}$. Dabei ist $Q = \{Q_1, \dots, Q_T\}$ eine Menge von zusätzlichen Parametern. $\xi(\Lambda, \theta, Q)$ und Q werden so gewählt, dass die Monte Carlo Stichprobenvarianz von $\psi(\Lambda, \theta)$ unter $\mu(\Lambda|\theta)$ minimal ist. AGIS führt zu erheblicher Varianzreduktion.

¹²⁴Auch *importance density* genannt.

¹²⁵Auch *importance weight* genannt.

Danielsson und Richard (1993) und Danielsson (1994) analysieren die Eigenschaften des SML-Schätzers bei endlichen Stichprobengrößen und vergleichen sie mit der Momentenmethode, der Quasi-Maximum-Likelihood Methode und der MCMC Methode (betrachtet weiter im Text). Sie kommen zu dem Schluss, dass SML viel effizienter ist als MM und QML und bei Vergleich des RMSE ähnlich zu der MCMC Methode ist.

Liesenfeld und Jung (2000) schlagen eine Lösung des Smoothing Problems vor (d.h. Lösung zur Berechnung der latenten Volatilitäten). Danielsson (1998) betrachtet eine multivariate Erweiterung der SML-Methode.

4.4. Markov Chain Monte Carlo Methode

Die MCMC Methode im Kontext von SV-Modellen wurde zuerst von Jacquier et al. (1994) vorgeschlagen und hat sich seitdem als die beste Methode im Sinne maximaler Effizienz der Schätzer etabliert. Jacquier et al. (1994) haben mittels Simulationen (Daten wurden durch ein SV-Modell generiert) festgestellt: der RMSE des MCMC Schätzers liegt zwischen einem Drittel und der Hälfte des RMSE der GMM (generalized method of moments) und QML (quasi-maximum-likelihood) Schätzer¹²⁶. Die MCMC Methode liefert Schätzer sowohl für die Parameter als auch für die nicht-beobachtbare Volatilität (Smoothing), und das ohne zusätzlichen Aufwand, einfach als Nebenprodukt der MCMC Schätzung. Bei der *in-sample* Schätzung der Volatilität (*smoothing*) ist die MCMC Methode auch extrem effizient- es ist bemerkenswert, dass das RMSE des MCMC-Schätzers um 1-13 % kleiner ist als das RMSE des Kalman Filters, gespeist mit den wahren Parametern¹²⁷!

Es gibt zwei grundsätzliche Vorgehensweisen beim statistischen Rückschluss: die klassische Schule, die auf dem Maximum-Likelihood Prinzip basiert und die Bayesianische Schule. Die klassische Vorgehensweise besteht darin, die Parameter durch Maximieren der Likelihoodfunktion zu schätzen und anschließend das Modell mit den geschätzten Parametern zum statistischen Rückschluss heranzuziehen. Die andere Vorgehensweise ist die Bayesianische, die *prior beliefs* (Anfangsvorstellungen über die Verteilung) über die Parameter und Daten kombiniert, um *posterior* (nachträgliche) Verteilungen zu erhalten, auf denen dann der statistische Rückschluss basiert. Die *posterior* Verteilungen sind bedingte Verteilungen: sie sind Verteilungen der Parameter unter den beobachteten Daten und dem eingesetzten Modell¹²⁸.

¹²⁶Vgl. Jacquier et al. (1994), Tabelle 9.

¹²⁷Vgl. Jacquier et al. (1994), Tabelle 10.

¹²⁸Vgl. Tsay (2002, S. 399).

Die Markov Chain Monte Carlo Methoden gehören zu der Bayesianischen Schule. Welche ist die Grundidee dieser Methoden? Gesucht wird die Verteilung $P(\theta|Y)$, wobei θ der Parametervektor und Y die Daten darstellt. Falls es möglich wäre, Werte unabhängig und identisch aus dieser Verteilung zu generieren, könnten wir viele Eigenschaften (z.B. Erwartungswerte) der Verteilung $P(\theta|Y)$ abschätzen. In den meisten Fällen ist dies unmöglich. Die Idee der Markov Chain Simulation ist einen Markov Prozess $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ zu generieren, der zu einer stationären (Rand-) Verteilung führt, die gerade mit der interessierenden Verteilung $P(\theta|Y)$ übereinstimmt. Ein Markov Prozess $\{\Phi_t\}$ ($\Phi_t \in \Theta$) ist gegeben, wenn $P(\Phi_h|\Phi_t, \Phi_{t-1}, \dots) = P(\Phi_h|\Phi_t)$, $h > t$.¹²⁹ Die Funktion $P_t(\theta, h, A) = P(\Phi_h \in A|\Phi_t = \theta)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion, wobei $A \subset \Theta$. Wenn die Übergangswahrscheinlichkeit nur von $h - t$, aber nicht von t abhängt, und die Randverteilung $P(\Phi_t)$ nicht von t abhängt, dann hat der Prozess eine stationäre Verteilung¹³⁰. Die Methoden, auf diese Art durch Markov Chain Simulation abhängige Realisationen der Verteilung $P(\theta|Y)$ zu erhalten, heißen MCMC Methoden. Näheres zur MCMC Methode wird im Abschnitt zur Software WinBUGS/OpenBUGS erläutert.

4.5. Schätzung durch zusätzliches Modell

Die Hauptidee der Methoden in dieser Kategorie ist ein einfach zu schätzendes Modell zu wählen, um ein einfach zu simulierendes Modell zu schätzen. Es gibt zwei Hauptmethoden in dieser Gruppe: der indirekte Rückschluss von Gouriéroux et al. (1993) und die Effiziente Momentenmethode von Gallant und Tauchen (1996).

Bei dem indirekten Rückschluss¹³¹ wird zuerst ein zusätzliches Modell gewählt, das einfach zu schätzen ist. Dies kann ein GARCH Modell mit Parametervektor β sein. Das Ziel ist, ein SV Modell mit Parametervektor θ zu schätzen. Als erstes wird β anhand der beobachteten Daten Y geschätzt, z.B. durch die Maximum Likelihood Methode:

$$\hat{\beta} = \arg \max_{\beta} L(Y|\beta)$$

Als nächstes wird derselbe Parametervektor β anhand von simulierten Daten geschätzt. Die Datensätze $Y_1(\theta), \dots, Y_H(\theta)$ werden von dem SV-Modell mit Parameter θ generiert. Die Schätzung von β ist dann:

¹²⁹Vgl. Tsay (2002, S. 395).

¹³⁰Vgl. Tsay (2002, S. 396).

¹³¹Vgl. Ghysels et al. (1996, S. 174).

$$\hat{\beta}_H(\theta) = \arg \max_{\beta} \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H L(Y_i(\theta)|\beta)$$

Der nächste Schritt ist θ zu variieren, bis die gewichtete quadratische Differenz zwischen $\hat{\beta}_H(\theta)$ und $\hat{\beta}$ minimal wird:

$$\hat{\theta}_H = \arg \min_{\theta} (\hat{\beta} - \hat{\beta}_H(\theta))' W (\hat{\beta} - \hat{\beta}_H(\theta))$$

Dabei ist W eine Gewichtungsmatrix. Die Effiziente Momentenmethode (EMM) ist ähnlich, auf sie wird hier nicht näher eingegangen.

Gourieroux et al. (1993) zeigen, dass die Indirekte Rückschluss- und EMM-Schätzer asymptotisch äquivalent sind. Beide Schätzer sind konsistent und asymptotisch Normal. Es wurde außerdem gezeigt, dass die geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix des EMM-Schätzers sich der Varianz-Kovarianzmatrix eines ML-Schätzers annähert¹³².

Durch Monte Carlo Simulation haben Andersen et al. (1999) gezeigt, dass die zwei Methoden in dieser Gruppe besser sind als die GMM Methode, allerdings schlechter als die MCMC Methode. Die Indirekte Rückschluss Methode und EMM liefern keine Schätzung für die Volatilitäten und andere Methoden müssen dafür eingesetzt werden.

Neben den erwähnten Schätzungsmethoden gibt es auch andere. Hier werden sie nur erwähnt. Zu dieser Kategorie gehören die Simulated Expectation Maximization (SEM) Methode, Kim, Shephard und Chib (1998) (KSC) Methode und die Empirical Characteristic Function (ECF) Methode¹³³

4.6. WinBUGS und OpenBUGS- allgemeine Software für MCMC Schätzung mit Hilfe des Gibbs Sampler und ihre Anwendung zur Schätzung der Stochastic Volatility Modelle

WinBUGS und seine Open-Source Version OpenBUGS sind allgemeine statistische Software zur Durchführung bayesianischer Schätzung von Modellen mittels Markov Chain Monte Carlo Methoden. BUGS steht für *Bayesian inference Using Gibbs Sampling*. Die Wahl fiel auf WinBUGS/OpenBUGS wegen der Flexibilität bei der Modellierung. In WinBUGS kann man leicht neue Modelle beschreiben und schätzen. Als ersten Versuch habe ich die Schätzung des klassischen SV-Modells selber mit C++ programmiert unter Verwendung der Scythe Statistical Library¹³⁴. Diese Vorgehensweise hat zwei Nachteile:

¹³²Vgl. Broto und Ruiz (2002, S. 13) für Literaturhinweise.

¹³³Vgl. Broto und Ruiz (2002), Abschnitt 2.2.2 für Literaturhinweise.

¹³⁴<http://scythe.wustl.edu>

erstens muss man bei jeder kleinen Änderung des Modells erheblich neu programmieren. Zweitens war der erste Prototyp meines C++ Programms 110 Mal langsamer als WinBUGS und eine erhebliche Verbesserung des Codes war erwünscht. Meyer und Yu (2000, S. 205) erwähnen eine andere Alternative zu WinBUGS, nämlich das SVPack der Ox Software¹³⁵. Das SVPack ist spezialisiert auf das klassische SV-Modell, aktualisiert den ganzen Vektor der latenten Volatilitäten wie in Kim et al. (1998) und ist 28 Mal schneller als WinBUGS, das jede Volatilität h_t im Rahmen vom Gibbs Sampling einzeln aktualisiert. Der Nachteil des SVPacks ist der erhebliche Aufwand, um den Code neu zu schreiben für jedes zu untersuchende SV-Modell. In dieser Hinsicht ist WinBUGS/OpenBUGS universeller und flexibler. Für die Suche nach einem guten Modell ist WinBUGS/OpenBUGS geeigneter, sobald solches Modell gefunden wurde, kann man an verbesserte Programmierung denken. Da das Ziel dieser Dissertation eher in einem Vergleich verschiedener Modelle im Hinblick auf die effiziente Value-at-Risk Berechnung liegt, bietet sich das flexiblere WinBUGS an, wo die Modelle leicht zu definieren sind. Zu diesem Schluss kommen auch Meyer und Yu (2000, S. 206). Der erste Schritt bei WinBUGS/OpenBUGS ist die Modelldarstellung, die intern in der Form eines DAG (*Directed Acyclic Graph*) erfolgt.¹³⁶

4.6.1. DAG

Ein DAG ist ein gerichteter azyklischer Graph, also ein Graph, dessen Knoten mit gerichteten Kanten (Pfeilen) verbunden sind, so dass keine Zyklen dabei entstehen¹³⁷. Stochastische Knoten werden im DAG wie eine Ellipse dargestellt, deterministische Knoten (wie z.B. deterministische Regressoren) werden als Rechtecke angezeigt. Schleifen (z.B. $t = 1, 2, \dots, T$) werden als aufgestapelte Tafeln dargestellt. Jede Kante im Graphen hat einen Elternknoten und einen Kindknoten. Im Folgenden wird für das klassische SV-Modell (Gleichungen 3.3 und 3.4) die DAG-Darstellung angezeigt¹³⁸. Dabei ist $h_t = \ln \sigma_t^2$.

¹³⁵Vgl. Doornik (1996), Kim et al. (1998).

¹³⁶Das Modell wird in textueller Form angegeben, wird jedoch intern als ein Graph dargestellt.

¹³⁷Vgl. Lunn et al. (2000, S. 326-327).

¹³⁸Vgl. Meyer und Yu (2000, S. 201)-Abbildung 1.

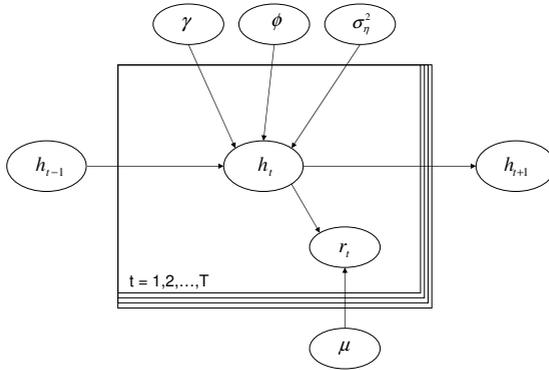


Abbildung 4.1.: DAG-Darstellung des klassischen SV-Modells

Die Elternknoten für einen Knoten v werden als $parents[v]$ bezeichnet. Mit $non-descendants[v]$ werden alle Knoten bezeichnet, nach denen kein Pfad (in Richtung der Pfeile) mit Anfang in v führt. Ein DAG unterstellt eine Reihe von (bedingen) Unabhängigkeitsannahmen. Es gilt nämlich ¹³⁹

$$v \perp\!\!\!\perp non-descendants[v] | parents[v] \tag{4.7}$$

Dabei bedeutet $\perp\!\!\!\perp$ unabhängig. Für den DAG aus Abbildung 4.1 bedeutet dies z.B. dass

$$h_t \perp\!\!\!\perp h_{t-2}, h_{t-3}, \dots, h_0 | h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2 \tag{4.8}$$

d.h. die Kenntnis von $h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2$ reicht aus, um die Verteilung von h_t zu bestimmen und h_t ist darüber hinaus nicht mehr von $h_{t-2}, h_{t-3}, \dots, h_0$ abhängig.¹⁴⁰

¹³⁹Vgl. Lunn et al. (2000, S. 327).

¹⁴⁰Meyer und Yu (2000, S. 201) behaupten, dass auch $h_t \perp\!\!\!\perp r_j, j \neq t | h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2$ wogegen in Wirklichkeit $h_t \perp\!\!\!\perp r_j, j < t | h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2$ gilt.

Sei V die Menge aller stochastischen Knoten. Dann gilt für die gemeinsame Dichte aller Knoten¹⁴¹:

$$p(V) = \prod_{v \in V} p(v | \text{parents}[v]) \quad (4.9)$$

Diese Formel kann man wegen der Unabhängigkeit 4.7 durch sukzessives Bedingen begründen. Für das klassische SV-Modell ergibt sich wegen¹⁴²

$$p(\mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, h_0, h_1, h_2, \dots, h_T) = p(\mu)p(\gamma)p(\phi)p(\sigma_\eta^2)p(h_0|\gamma, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^T p(h_t|h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2) \quad (4.10)$$

und

$$p(r_1, r_2, \dots, r_T | \mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, h_0, h_1, h_2, \dots, h_T) = \prod_{t=1}^T p(r_t | h_t, \mu) \quad (4.11)$$

folgende Formel für $p(V)$:

$$\begin{aligned} p(V) &= p(\mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, h_0, h_1, h_2, \dots, h_T, r_1, r_2, \dots, r_T) = \\ &= p(\mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, h_0, \dots, h_T) p(r_1, \dots, r_T | \mu, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2, h_0, \dots, h_T) = \\ &= p(\mu)p(\gamma)p(\phi)p(\sigma_\eta^2)p(h_0|\gamma, \phi, \sigma_\eta^2) \prod_{t=1}^T p(h_t|h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{t=1}^T p(r_t|h_t, \mu) \quad (4.12) \end{aligned}$$

Dabei sind $p(\mu)$, $p(\gamma)$, $p(\phi)$ und $p(\sigma_\eta^2)$ die entsprechenden Prior-Dichten. Sei $V \setminus v$ die Menge aller stochastischer Knoten außer v . Dann heißt die bedingte Posterior-Dichte $p(v|V \setminus v)$ *full conditional* posterior Dichte. Diese Dichten spielen beim Gibbs Sampler (siehe gleich genannten Abschnitt) eine entscheidende Rolle. Es gilt $p(v|V \setminus v) = \frac{p(V)}{p(V \setminus v)}$ und da $p(V \setminus v)$ von v nicht abhängt, $p(v|V \setminus v) \propto p(V)$ ¹⁴³. $p(v|V \setminus v)$ ist spezieller proportional zu dem Produkt aller Terme von $p(V)$ (siehe 4.9), die v beinhalten, und das sind die Terme, in

¹⁴¹Vgl. Lunn et al. (2000, S. 327).

¹⁴²Vgl. Meyer und Yu (2000, S. 200-201).

¹⁴³ \propto bedeutet proportional zu.

denen v entweder in der Rolle von einem Kindknoten oder in der Rolle von einem Elternknoten auftaucht. Somit ergibt sich¹⁴⁴

$$p(v|V \setminus v) \propto p(v|\text{parents}[v]) \prod_{w \in \text{children}[v]} p(w|\text{parents}[w]) \quad (4.13)$$

wobei $\text{children}[v]$ die Menge aller Kindknoten von v bezeichnet. Die sogenannten *full conditionals* definiert (bis auf eine Konstante) durch Formel 4.13 werden im Gibbs Sampling eingesetzt, z.B. vom ARS- (Adaptive Rejection Sampling), Slice-Sampling oder Metropolis Sampling. Bevor dies geschieht, wird allerdings noch geprüft, ob die Verteilung von $v|V \setminus v$ zu einer bekannten Familie gehört und falls das der Fall ist, wird von dieser Familie im Gibbs Verfahren generiert. Priors von v die zu solcher bekannten Form der $v|V \setminus v$ aus der gleichen Verteilungsfamilie führen, heißen *conjugate priors* (im Bezug auf das Sampling Modell 3.3 für r_t). Eine Aufstellung der *conjugate priors* in WinBUGS/OpenBUGS gibt Tabelle 3 in Spiegelhalter et al. (1996, S. 21). Das Konzept *conjugate prior* wird im Folgenden am Beispiel des Parameters μ des klassischen SV-Modells verdeutlicht¹⁴⁵. Falls nämlich die Prior Verteilung $p(\mu)$ von $v = \mu$ Normal ist mit Erwartungswert μ_0 und Varianz σ_0^2 , dann ist die Posterior Verteilung von $\mu|V \setminus \mu$ auch Normal (Erwartungswert und Varianz werden hergeleitet). Es gilt

$$p(\mu|V \setminus \mu) = \frac{p(V)}{p(V \setminus \mu)} = \frac{p(V)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(V) d\mu} = \frac{p(\mu) \prod_{t=1}^T p(r_t|h_t, \mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mu) \prod_{t=1}^T p(r_t|h_t, \mu) d\mu} \quad (4.14)$$

wobei $p(V)$ durch 4.12 gegeben ist und alle Terme in $p(V)$, die μ nicht beinhalten, sich wegekürzen, weil sie sowohl im Zähler als auch im Nenner auftauchen. Aus Formel 3.3 folgt $r_t|\mu, h_t \sim N(\mu, e^{h_t}) = N(\mu, \sigma_t^2)$. Somit gilt

$$p(r_t|h_t, \mu) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}} \quad (4.15)$$

¹⁴⁴Vgl. Lunn et al. (2000, S. 327), Gleichung (2).

¹⁴⁵Ein anderes Beispiel ist der Parameter σ_η^2 -falls man eine Inverse-Gamma Prior Verteilung für diesen Parameter wählt, dann ist bei passender Modellierung von h_0 die full-conditional Posterior-Verteilung $\sigma_\eta^2|V \setminus \sigma_\eta^2$ eine wohldefinierte Inverse-Gamma-Verteilung.

Da die Prior Verteilung von μ $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ist, gilt

$$p(\mu) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (4.16)$$

Aus 4.15, 4.16 und 4.14 folgt nun

$$\begin{aligned} p(\mu|V \setminus \mu) &= \frac{p(\mu) \prod_{t=1}^T p(r_t|h_t, \mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} p(\mu) \prod_{t=1}^T p(r_t|h_t, \mu) d\mu} = \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}}}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}} d\mu} = \\ &= \frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{T+1} \sigma_0 \prod_{t=1}^T \sigma_t} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{T+1} \sigma_0 \prod_{t=1}^T \sigma_t} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}\right) d\mu} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{t=1}^T \frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma_t^2}\right) d\mu} = \\ &= \frac{\exp(a\mu^2 + b\mu + c)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(a\mu^2 + b\mu + c) d\mu} = \frac{\exp(a\mu^2 + b\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(a\mu^2 + b\mu) d\mu} \quad (4.17) \end{aligned}$$

mit $a = -(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{2\sigma_t^2})$, $b = \frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{r_t}{\sigma_t^2}$. Im Folgenden wird bewiesen, dass der letzte Ausdruck in 4.17 $\frac{\exp(a\mu^2 + b\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(a\mu^2 + b\mu) d\mu}$ für $a < 0$ die Dichte einer

Normalverteilung ist mit Erwartungswert $-\frac{b}{2a}$ und Varianz $-\frac{1}{2a}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \exp(a\mu^2 + b\mu) &= \exp(a(\mu^2 + \frac{b}{a}\mu)) = \exp\left(a\left(\left(\mu + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \exp\left(a\left(\mu + \frac{b}{2a}\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right) \exp\left(-\frac{(\mu - \frac{-b}{2a})^2}{2\frac{1}{2a}}\right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Eingesetzt in 4.17 ergibt sich

$$p(\mu|V\setminus\mu) = \frac{\exp(-\frac{b^2}{4a}) \exp\left(-\frac{(\mu - \frac{-b}{2a})^2}{2\frac{1}{2a}}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{b^2}{4a}) \exp\left(-\frac{(\mu - \frac{-b}{2a})^2}{2\frac{1}{2a}}\right) d\mu} = \frac{\exp\left(-\frac{(\mu - \frac{-b}{2a})^2}{2\frac{1}{2a}}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\mu - \frac{-b}{2a})^2}{2\frac{1}{2a}}\right) d\mu} \quad (4.19)$$

was für $a < 0$ eindeutig die Dichte einer $N(\frac{-b}{2a}, \frac{1}{2a})$ -Verteilung ist. Aus $a = -(\frac{1}{2\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{2\sigma_t^2})$, $b = \frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{r_t}{\sigma_t^2}$ folgt nun

$$p(\mu|V\setminus\mu) = \text{Dichte von } N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{r_t}{\sigma_t^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t^2}}; \frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sigma_t^2}}\right) \quad (4.20)$$

Somit ist die *conjugacy* des normalen Priors von μ (bezüglich der Normalverteilungsannahme für r_t) bewiesen und μ könnte im Gibbs-Verfahren von 4.20 gezogen werden. Der Parameter μ hat in allen betrachteten SV-Modelle einen *conjugate Prior* bezüglich der normalen bedingten Verteilung von r_t (selbst in SV-Modellen 5, 10 und 11- dort wird die Student-t-Verteilung mit Hilfe einer Normalverteilung gebildet).

Wie bereits erwähnt, wird für jeden Parameter mit stetiger *full conditional* Posterior-Verteilung zuerst die *conjugacy* geprüft und falls keine vorhanden ist, werden weitere Verfahren versucht. Die folgende Tabelle gibt Übersicht über

die möglichen Verfahren, wobei jedes weitere Verfahren nur dann angewandt wird, wenn kein vorheriges angemessen ist.

Zielverteilung	Sampling-Methode
Diskret	Invertierung der Verteilungsfunktion
Closed Form (conjugate)	Direkte Ziehung mit Standard-Algorithmen
Log-Konkav	ARS (Gilks und Wild (1992), Wild und Gilks (1993))
Beschränkter Träger	Slice Sampling (Neal (1997), Neal (2003))
Unbeschränkter Träger	Metropolis-Hastings (Metropolis et al. (1953), Hastings (1970))

Tabelle 4.1.: Sampling Methoden in WinBugs. Jede Methode wird nur dann angewendet, wenn keine vorherige angemessen ist. Modifiziert entnommen von: Lunn et al. (2000, S. 328), Tabelle 1

Die Quelle dieser Tabelle ist Lunn et al. (2000), und WinBUGS/OpenBUGS haben sich seit 2000 entwickelt. So wurde z.B. in der aktuellen Version von OpenBugs 3.2.2 (auch: 3.2.1) die Adaptive Rejection Sampling Methode (ARS) für log-konkave Verteilungen abgeschaltet, an deren Stelle werden entweder das Slice Sampling oder die Metropolis Methode benutzt¹⁴⁶. Die letzten drei Methoden aus Tabelle 4.1 verlassen sich auf die *full conditional* Posterior-Verteilung definiert bis auf eine Proportionalitätskonstante in 4.13. Dies wird am Beispiel des stochastischen Knoten h_t im klassischen SV-Modell verdeutlicht. Aus 4.13 folgt

$$p(h_t|V \setminus h_t) \propto p(h_t|h_{t-1}, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2)p(h_{t+1}|h_t, \gamma, \phi, \sigma_\eta^2)p(r_t|h_t, \mu) \quad (4.21)$$

Aus 3.3 und 3.4 mit $h_t = \ln \sigma_t^2$ folgt $h_t \sim N(\gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma); \sigma_\eta^2)$, $h_{t+1} \sim N(\gamma + \phi(h_t - \gamma); \sigma_\eta^2)$ und $r_t \sim N(\mu, \exp(h_t))$, also die drei Terme in 4.21 sind wohldefinierte Gauß-Dichten. Daraus folgt:

$$p(h_t|V \setminus h_t) \propto \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(h_t - \gamma - \phi(h_{t-1} - \gamma))^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \times \\ \frac{1}{\sigma_\eta \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(h_{t+1} - \gamma - \phi(h_t - \gamma))^2}{2\sigma_\eta^2}\right) \times \\ \frac{1}{\exp(h_t/2)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\exp(h_t)}\right) \quad (4.22)$$

Die zweite Ableitung des Logarithmus dieser Funktion beträgt $-\frac{1}{\sigma_\eta^2} - \frac{\phi^2}{\sigma_\eta^2} - \frac{(r_t - \mu)^2}{2\exp(h_t)}$ und ist negativ. Die Funktion auf der rechten Seite von 4.22 ist dann

¹⁴⁶Eine neuere vergleichbare Tabelle wie 4.1 habe ich in der Literatur nicht gefunden.

log-konkav und wurde in früheren Versionen von WinBUGS/OpenBugs durch die Adaptive Rejection Sampling Methode behandelt, jetzt stehen das Slice Sampling und der eindimensionale Metropolis Algorithmus zur Verfügung, je nachdem ob h_t als eine auf einem Intervall gestutzte Variable modelliert wird. Wird die Variable gestutzt, wird das Slice Sampling benutzt, da der Träger beschränkt ist. Anderenfalls ist der Träger die ganze reelle Gerade, und es wird der eindimensionale Metropolis Algorithmus angewandt (speziell SCAM: Single Component Adaptive Metropolis). Die folgende Tabelle gibt Übersicht der MCMC Verfahren, benutzt von OpenBUGS 3.2.1 für die Parameter des klassischen Stochastic-Volatility Modells:

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
σ_η^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	conjugate Inverse-Gamma
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Single Component Adaptive Metropolis

Tabelle 4.2.: Sampling Methoden im klassischen SV-Modell.

Im Anhang werden auch die Sampling Methoden zu den anderen SV-Modellen aufgestellt.

4.6.2. Gibbs Sampler

Die populärste MCMC Methode ist der Gibbs Sampler. Erste Referenz¹⁴⁷ zu dieser Methode ist Geman und Geman (1984). Die Methode wurde von den Gebrüdern Geman *Gibbs Sampler* genannt, nach dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs (1839-1903). Der Physiker Gibbs war der Vater der statistischen Mechanik und Geman und Geman (1984) machen Analogien zwischen dem Bildaufbau und einem statistisch-mechanischen System. Geman und Geman (1984)'s Ziel ist es, Bilder zu rekonstruieren und die genannte Analogie betrachtet die Pixels des Bildes wie Atome (mit ihren Zuständen) in einem Gittersystem. Das Konzept von Geman und Geman (1984) wurde weiterentwickelt von Tanner und Wong (1987) und Gelfand und Smith (1990).

Das Ziel der Gibbs Methode ist (mehrdimensionale) Zufallsvariablen aus der Posteriori Verteilung $P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d | Y, M)$ zu ziehen, wobei $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ d Blocks von Parametern sind, Y die Daten und M das unterstellte Modell sind¹⁴⁸. Diese Aufgabe wird in d Aufgaben niedrigerer Dimension zerlegt,

¹⁴⁷Vgl. Gelman et al. (2004, S. 308-309).

¹⁴⁸Vgl. Gelman et al. (2004, S. 287).

es wird eine Markov Kette θ_j^t , ($t = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, d$) gebildet, deren stationäre Verteilung die Zielverteilung ist. Zunächst werden Startwerte für $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ von d sogenannten *prior*-Verteilungen gezogen. Diese Verteilungen werden normalerweise mit großer Varianz gewählt (und somit möglichst uninformativ), damit sie einen geringeren Einfluss auf die spätere Markov-Kette haben. Danach wird iteriert. Die Idee ist, bei jeder Iteration t nach einer vorher festgelegten Reihenfolge die Variablen $\theta_j^t, j = 1, 2, \dots, d$ zu generieren von den sogenannten full-conditionals $p(\theta_j | V \setminus \theta_j) = p(\theta_j | \theta_{-j}^{t-1}, Y, M)$. So wird z.B. θ_j^t von der bedingten Verteilung $p(\theta_j | V \setminus \theta_j) = p(\theta_j | \theta_{-j}^{t-1}, Y, M)$ generiert, wobei der Vektor θ_{-j} alle Parameter umfasst ohne θ_j . Wir müssen die genaue Form dieser bedingten Verteilungen nicht unbedingt kennen, es genügt die Möglichkeit, Zufallszahlen von jeder Verteilung zu ziehen. Insbesondere können diese Verteilungen bis auf eine Normierungskonstante bekannt sein. Wie an diese Verteilungen heranzukommen ist, wurde im Abschnitt DAG erklärt. Somit entstehen bei jeder Iteration d neue Werte. Diese Markov Kette konvergiert unter schwachen Regularitätsbedingungen zur Zielverteilung. Die etablierte Referenz zur Konvergenz der Gibbs Methode sowie der Metropolis-Hastings Methode zur richtigen Verteilung ist Tierney (1994). In der Praxis wird die Anzahl der Iterationen n groß genug gewählt und die ersten m Iterationen (*burn-ins*) werden ignoriert. Das stellt sicher, dass der Einfluss der Startwerte des Algorithmus sowie der angenommenen Prior Verteilungen verschwindend gering wird und die Kette zur Zielverteilung konvergiert hat. Die Tupel $(\theta_1^{m+1}, \theta_2^{m+1}, \dots, \theta_d^{m+1}), \dots, (\theta_1^n, \theta_2^n, \dots, \theta_d^n)$ werden zur Schätzung von $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ herangezogen. Punktschätzer und Varianz (bei eindimensionalen $\theta_i, i = 1, \dots, d$) sind¹⁴⁹ : $\hat{\theta}_i = \frac{1}{n-m} \sum_{t=m+1}^n \theta_i^t$, $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-m-1} \sum_{t=m+1}^n (\theta_i^t - \hat{\theta}_i)^2, i = 1, \dots, d$

Wichtig ist, dass der Gibbs Sampler konvergiert hat. Die Theorie sagt nur, dass Konvergenz da ist wenn die Anzahl n der Iterationen groß genug ist, macht aber keine Aussagen um die Wahl von n zu steuern.¹⁵⁰ Es sind Methoden entwickelt worden, die überprüfen, ob der Markov Prozess konvergiert hat¹⁵¹.

Außer der Gibbs-Sampler Methode gibt es auch andere MCMC Algorithmen wie der Metropolis Algorithmus, Metropolis-Hastings Algorithmus, Griddy Gibbs. Kombinationen von Algorithmen sind auch möglich.

¹⁴⁹Vgl. Tsay (2002, S. 398).

¹⁵⁰Vgl. Tsay (2002, S. 399).

¹⁵¹Vgl. Carlin und Louis (2000) für Methoden zur Überprüfung der Konvergenz.

4.6.3. Slice Sampling

Das Slice Sampling ist eine MCMC Methode, die auf Neal (1997) und Neal (2003) zurückzuführen ist. Sie wird von OpenBUGS im Rahmen vom Gibbs Sampling dann angewandt, wenn die stetige Zielverteilung $p(v|V \setminus v)$ nicht conjugate ist und der Träger beschränkt ist. Wie bereits erwähnt, muss $p(v|V \setminus v)$ nicht direkt vorliegen, es reicht die Kenntnis einer Funktion $f(v)$, zu der die Dichte $p(v|V \setminus v)$ proportional ist:

$$p(v|V \setminus v) \propto f(v) \quad (4.23)$$

Im Folgenden wird die Methode beschrieben, basierend auf Neal (2003, S. 710-716) und dem Quellcode von OpenBUGS 3.2.1 und 3.2.2. Das Ziel der Methode ist, eine Markov Kette zu bilden, die in Verteilung gegen $p(v|V \setminus v)$ konvergiert. Die Idee ist, eine Zusatzvariable s einzuführen und dann (v, s) gleichverteilt auf dem zweidimensionalen Bereich unter der $f(v)$ -Kurve zu ziehen. Die x -Koordinaten der somit gezogenen Punkte bilden die gewünschte Markov Kette. Formal wird gleichverteilt vom Bereich $\{(v, s) : 0 < y < f(v)\}$ gezogen, so dass die gemeinsame Dichte von (v, s) gleich

$$p(v, s) = \begin{cases} 1/Z & \text{falls } 0 < s < f(v) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist mit $Z = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) dv$.

Damit ist die Randdichte von v gleich

$$\int_0^{f(v)} (1/Z) ds = f(v)/Z = p(v|V \setminus v) \quad (4.24)$$

was erwünscht war.

Generieren von (v, s) direkt von der gewünschten Gleichverteilung könnte schwierig sein, deshalb wird eine zweidimensionale Markov Kette gebildet, deren stationäre Verteilung die gewünschte Gleichverteilung ist. Zu diesem Zweck werden in einem kleineren MCMC-Verfahren sukzessive nacheinander v, s, v, s, \dots gezogen. Angenommen der letzte v -Wert ist v_0 , dann wird der nächste v -Wert v_1 wie folgt gezogen¹⁵²:

¹⁵²Vgl. Neal (2003, S. 712).

1. Ziehe eine Zufallszahl s aus der eindimensionalen Gleichverteilung $\text{Unif}(0; f(v_0))$. Damit wird das horizontale Slice (auf Deutsch Schnitt) $S = \{v : s < f(v)\}$ definiert.
2. Finde ein Intervall $I = (L, R)$, das das ganze Slice oder viel davon¹⁵³ beinhaltet.
3. Ziehe den neuen Punkt v_1 aus dem Intervall I so dass v_1 auch in S liegt

Zum Schritt 2: Das Finden vom Intervall I erfolgt in OpenBUGS nach dem *stepping-out* (auf Deutsch Heraustreten) Algorithmus, bei dem zuerst eine Schätzung w der typischen Länge eines Slice vorliegen sollte. OpenBUGS bestimmt w als das Doppelte des Durchschnitt der Sprünge $|v_1 - v_0|$ aus den letzten 25 Aktualisierungen von v : für unimodale Verteilungen laufend und für andere Verteilungen nur in einer sogenannten Adaptionphase (aktuell bei 500 Iterationen). Der *stepping-out* Algorithmus positioniert zunächst zufällig ein Intervall mit Länge w , das v_0 beinhaltet. Falls beide Enden von diesem Intervall außerhalb des Slice liegen, ist dies das gesuchte Intervall I ¹⁵⁴. Falls nicht, wird dieses Intervall solange um w auf beiden Seiten verlängert, bis entweder beide Enden außerhalb des Slice liegen oder eine vorher festgelegte Anzahl an Verlängerungen erreicht wurde (aktuell 100000). Falls das resultierende Intervall aus dem beschränkten Träger der Zielverteilung herausragt, wird es entsprechend verkürzt. Das somit erhaltene Intervall ist I aus Schritt 2. Formal wird in OpenBUGS 3.2.1 der folgende Algorithmus angewandt:

¹⁵³Siehe weiter im Text.

¹⁵⁴Falls I aus dem beschränkten Träger der Zielverteilung herausragt, wird es entsprechend verkürzt.

<p>Eingabe:</p> <p>$(LB, UB) =$ Grenzen des Trägers der Zielverteilung</p> <p>$f =$ Funktion proportional zur Zieldichte</p> <p>$v_0 =$ Der aktuelle Wert</p> <p>$s =$ Das vertikale Niveau</p> <p>$w =$ Schätzung für die typische Länge vom Slice</p> <p>$M =$ Maximale Anzahl von Verlängerungen (insgesamt)</p> <p>Ausgabe:</p> <p>$I = (L, R) =$ Das gefundene Intervall</p>	<p>$U \sim Unif(0,1)$</p> <p>$L \leftarrow v_0 - w * U$</p> <p>$R \leftarrow L + w$</p> <p>$V \sim Unif(0,1)$</p> <p>$J \leftarrow \lfloor (M + 1) * V \rfloor$</p> <p>$K \leftarrow M - J$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>solange $J > 0$ und $s < f(L)$</p> <p>wiederhole: $L \leftarrow L - w$</p> <p style="text-align: right;">$J \leftarrow J - 1$</p> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>solange $K > 0$ und $s < f(R)$</p> <p>wiederhole: $R \leftarrow R + w$</p> <p style="text-align: right;">$K \leftarrow K - 1$</p> </div> <p>$L \leftarrow LB$ falls $L < LB$</p> <p>$R \leftarrow UB$ falls $R > UB$</p>
--	---

Abbildung 4.2.: Das Heraustreten-Verfahren (stepping out) zur Bestimmung von I in OpenBUGS 3.2.1. $J \sim Unif(0, 1, \dots, M)$ ist die maximale Anzahl der Links-Verlängerungen, K ist die maximale Anzahl der Rechts-Verlängerungen. Modifiziert entnommen aus Neal (2003, S. 715)

In OpenBUGS 3.2.2 wird der Algorithmus leicht modifiziert. Die Maximale Anzahl von Verlängerungen auf einer Seite ist nicht mehr stochastisch sondern direkt gleich einer festgelegten natürlichen Zahl M (aktuell 100000). Der Algorithmus sieht so aus:

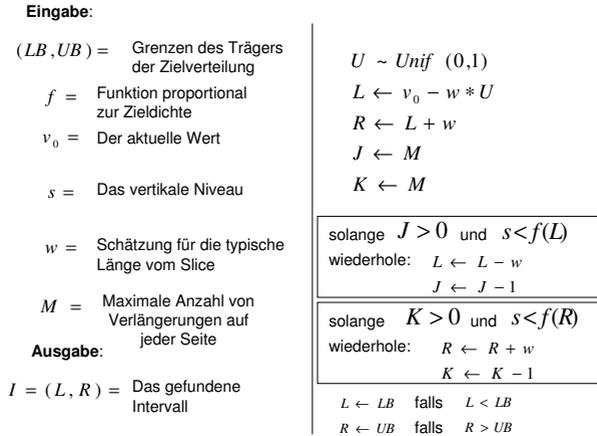


Abbildung 4.3.: Das Heraustreten-Verfahren (stepping out) zur Bestimmung von I in OpenBUGS 3.2.2. Modifiziert entnommen aus Neal (2003, S. 715)

Zum Schritt 3: Sobald ein Intervall $I = (L, R)$ gefunden wurde, wird im Schritt 3 eine Zahl aus diesem Intervall gezogen. Dies geschieht durch den Schrumpf-Algorithmus (*shrinkage procedure*): Anfangs wird im vollen Intervall (L, R) eine gleichverteilte Zufallsvariable gezogen und falls die nicht im Slice liegt, wird diese Zufallszahl als neue linke oder rechte Grenze gewählt (so dass v_0 wieder im Intervall bleibt) und somit wird das Intervall geschrumpft. Anschließend wird gleichverteilt vom neuen geschrumpften Intervall gezogen und so weiter bis ein Punkt v_1 im Slice gefunden wurde. Der Algorithmus wird im Folgenden dargestellt:

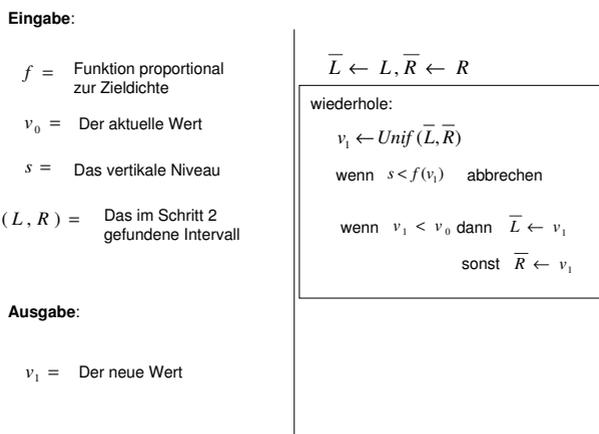


Abbildung 4.4.: Das Schrumpf-Verfahren (*shrinkage*) zum Ziehen aus I in OpenBUGS. Modifiziert entnommen aus Neal (2003, S. 716)

Der Beweis für die Korrektheit der geschilderten Algorithmen wird in Neal (2003, S. 717-721) dargestellt.

Overrelaxation

Neal (2003, S. 726-729) schlägt die sogenannte *Overrelaxation* vor, um die Konvergenz des MCMC-Algorithmus zu beschleunigen. Anstatt den neuen Punkt im Schritt 3 unabhängig vom aktuellen Punkt zu wählen, wird bei diesem dritten Schritt der neue Punkt v_1 symmetrisch zur Mitte des Intervalls auf

der anderen Seite des Slice gewählt. Dazu werden zunächst die beiden Enden des Intervalls $I = (L, R)$ (gefunden im Schritt 2) genauer bestimmt, um näher an der Grenze des Slice zu sein. Neal (2003, S. 728) schlägt dazu Bisektion vor, indem sequentiell $w/2, w/4, w/8, \dots$ zum linken Ende addiert wird (und vom rechten subtrahiert wird), wobei die Addition (Subtraktion) dann akzeptiert wird, wenn das entsprechende Ende des Intervalls außerhalb des Slice bleibt. Nach a solchen Schritten wird jedes Ende des somit ermittelten Intervalls (\hat{L}, \hat{R}) in einer Distanz kleiner als $2^{-a}w$ vom Slice entfernt sein. OpenBugs benutzt zur genaueren Lokalisierung der Enden stattdessen den modifizierten Sekantenalgorithmus (siehe z.B. Hermann (2006, S. 192)), der schneller ist. Der modifizierte Sekantenalgorithmus heißt Pegasus-Methode¹⁵⁵ und wird folgendermaßen angewandt¹⁵⁶:

Eingabe: x_1, x_2 mit $g(x_1)g(x_2) < 0$	$g_1 = g(x_1), g_2 = g(x_2)$ Solange $ x_2 - x_1 > \varepsilon_x$ und $ g_z > \varepsilon_g$ wiederhole: $z = x_1 - g_1 \frac{x_2 - x_1}{g_2 - g_1}$ $g_z = g(z)$ falls: $g_z g_2 < 0$ $x_1 = x_2, g_1 = g_2, x_2 = z, g_2 = g_z$ sonst: $x_1 = x_1, g_1 = \frac{g_1 g_2}{g_2 + g_1}, x_2 = z, g_2 = g_z$
Ausgabe: Näherung für die Nullstelle von $g(x)$ Jede Zahl im Intervall: $(\min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2))$	

Abbildung 4.5.: Das Pegasus-Verfahren zum Finden einer Nullstelle von einer Funktion

Dabei setzt OpenBUGS für die Toleranzkonstanten: $\varepsilon_x = 10^{-8}$ und $\varepsilon_g = 10^{-20}$. Die Funktion deren Nullstelle gesucht wird ist $g(x) = f(x) - s$.

¹⁵⁵Eingeführt von Dowell und Jarratt (1972).

¹⁵⁶Vgl. Dowell und Jarratt (1972, S. 503).

Nachdem ein genaueres Intervall (\hat{L}, \hat{R}) gefunden wurde, wird der neue Punkt v_1 symmetrisch zur Mitte des Intervalls gewählt.

$$v_1 = \frac{\hat{L} + \hat{R}}{2} - \left(v_0 - \frac{\hat{L} + \hat{R}}{2} \right) = \hat{L} + \hat{R} - v_0 \quad (4.25)$$

Anschließend wird v_1 akzeptiert, falls v_1 im Intervall vom Schritt 2 (L, R) liegt¹⁵⁷ und falls v_1 im Slice liegt (d.h. falls $f(v_1) < s$).¹⁵⁸ Falls v_1 verworfen wird, wird $v_1 := v_0$ gesetzt. Um die Ergodizität der Markov Kette nicht zu verletzen, schlägt Neal (2003, S. 729) vor, dass nicht alle MCMC-Iterationen overrelaxed sind. Aktuell macht OpenBUGS 3 aus 4 Schritten unter Overrelaxation und 1 Schritt normal (nach dem Algorithmus in Abbildung 4.4). OpenBUGS 3.2.1 wendet Overrelaxation nur für unimodale Funktionen f an und OpenBUGS 3.2.2. für alle Funktionen.

4.6.4. Metropolis Algorithmus und Metropolis-Hastings Algorithmus

Metropolis Algorithmus

Dieser Algorithmus ist auf Metropolis et al. (1953) zurückzuführen. Der Algorithmus ist multivariat und allgemeiner als der Gibbs-Sampler, jedoch wird in dieser Arbeit nur der eindimensionale Metropolis-Algorithmus gebraucht und zwar integriert in einem Gibbs-Algorithmus (sogenanntes *Metropolis within Gibbs*). Der Metropolis Algorithmus wird vor allem dann vom Nutzen, wenn die eine (oder mehrere) der bedingten Verteilungen im Gibbs-Algorithmus nicht einer bekannten Verteilungsfamilie angehört, diese Verteilung stetig ist mit uneingeschränktem Träger und wenn die Dichte dieser Verteilung bis auf eine Normierungskonstante bekannt ist. Angenommen es wird der Parameter θ_i gesucht und die Dichte $p(\theta_i | \theta_{-i}, Y)$ bis auf eine Normierungskonstante bekannt ist: $p(\theta_i | \theta_{-i}, Y) \propto f(\theta_i | Y)$, wo $f(\cdot)$ eine bekannte Funktion ist (nicht unbedingt Dichte). Dann sieht der Metropolis Algorithmus folgende Schritte vor¹⁵⁹:

¹⁵⁷Falls die Funktion f multimodal ist, könnte leicht passieren, dass v_0 außerhalb (\hat{L}, \hat{R}) bleibt und v_1 dann außerhalb (L, R) gerät. Bei unimodalen Verteilungen könnte dies nicht passieren.

¹⁵⁸Falls die Enden nicht sehr präzise gefunden wurden, kann auch bei unimodalen Verteilungen passieren, dass v_1 außerhalb des Slice liegt. Die OpenBUGS Sekantenmethode gewährleistet allerdings eine sehr hohe Präzision.

¹⁵⁹Vgl. Gelman et al. (2004, S. 289-290).

1. Generiere Startwert θ_i^0 mit $f(\theta_i^0|Y) > 0$ von einer prior-Verteilung $p_0(\theta_i)$ ¹⁶⁰
2. Wiederhole für $t = 1, 2, \dots$ ¹⁶¹
 - a) Generiere Vorschlag θ_i^* von einer sogenannten Sprung-Verteilung (Jump Verteilung) mit Dichte $J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1})$. Diese Verteilung muss symmetrisch sein, so dass $J_t(\theta_a|\theta_b) = J_t(\theta_b|\theta_a)$
 - b) Berechne $q = \frac{f(\theta_i^*|Y)}{f(\theta_i^{t-1}|Y)} = \frac{p(\theta_i^*|\theta_{-i}, Y)}{p(\theta_i^{t-1}|\theta_{-i}, Y)}$
 - c) Generiere eine gleichverteilte Zufallszahl $U \sim U(0, 1)$
 - d) Setze

$$\theta_i^t = \begin{cases} \theta_i^* & \text{falls } U \leq \min(q, 1) \\ \theta_i^{t-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Als Ergebnis liefert dieser Algorithmus die Markov Kette $\theta_i^1, \theta_i^2, \dots$, deren stationäre Verteilung $p(\theta_i|\theta_{-i}, Y)$ ist. Dabei könnte θ_i sowohl Skalar als auch ein Parametervektor sein. Als Teil des Gibbs Sampler wird sich $f(\theta_i|Y)$ bei jeder Gibbs-Iteration ändern, weil θ_{-i} sich ändern wird. Chib und Greenberg (1995, S. 332) beweisen, dass der *block-at-a-time* Metropolis-Algorithmus weiterhin in die richtige gemeinsame Verteilung aller blocks mündet. Dies bedeutet insbesondere, dass wenn $BL_1 = \theta_i, BL_2 = \theta_{-i}$ und beide BL_1 und BL_2 mit Metropolis-Algorithmen sequentiell aus den einzelnen *full conditionals* generiert werden, dann haben $\theta^t = (BL_1, BL_2)^t, t = 1, 2, \dots$ die richtige gemeinsame stationäre Verteilung $p(\theta|Y)$ ¹⁶².

Gelman et al. (2004, S. 290-291) haben den Beweis der Richtigkeit des Metropolis-Algorithmus kurz skizziert.¹⁶³ Dieser Beweis beruht auf die Markov-Ketten-Theorie entwickelt in Tierney (1994): Der erste Teil des Beweises zeigt, dass die aus dem Metropolis-Algorithmus generierte Kette eine Markov-Kette ist mit einer eindeutigen stationären Verteilung und der zweite Teil hält fest, dass diese eindeutige stationäre Verteilung gerade die richtige ist.

¹⁶⁰Beim *Metropolis-within-Gibbs* wird θ_i^0 von der vorherigen Gibbs-Iteration genommen

¹⁶¹in diesem Abschnitt ist t nicht die Zeit, sondern ein Zähler für den wiederholten Schritt des Metropolis Verfahrens. Beim *Metropolis-within-Gibbs* wird nur ein Metropolis Schritt $t = 1$ zu jeder Gibbs Iteration gemacht.

¹⁶² $\theta = (\theta_i, \theta_{-i})$ ist der Vektor aller Parameter.

¹⁶³Siehe auch Chib und Greenberg (1995, S. 328-329).

Der erste Teil ist dann erfüllt, wenn die Markov-Kette irreduzibel, aperiodisch und positiv Harris-rekurrent ist¹⁶⁴, was erfüllt ist für die Sprung-Verteilung $J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1})$ die von WinBUGS/OpenBUGS benutzt wird, nämlich eine Normalverteilung mit Erwartungswert θ_i^{t-1} . Sei $\pi^*(\cdot)$ die Zielverteilung für die Markov-Kette. Die Markov Kette heißt π^* -irreduzibel, wenn für alle Mengen A mit $\pi^*(A) > 0$ und alle mögliche Zustände x gilt: $Pr(\Phi_i \in A|\Phi_0 = x) > 0$. Tierney (1994, S. 1711-1712) definiert die Begriffe *Harris-rekurrent* und *positiv Harris-rekurrent*. Z.B., wenn der Zustandsraum der Kette eine abzählbare Menge ist, dann heißt die Markov Kette rekurrent, wenn, ausgehend von jedem Zustand, die Wahrscheinlichkeit, dass die Kette nach endlicher Anzahl von Schritten in diesen Zustand zurückkehrt, 1 ist. Eine Markov Kette mit abzählbarem Zustandsraum ist aperiodisch, wenn die Kette zurück zum Anfangszustand in einer irregulären Anzahl von Schritten zurückkehren kann, d.h. wenn keine natürliche Zahl $k \geq 2$ existiert, die ein gemeinsamer Teiler aller n ist, für die $Pr(\Phi_n = s|\Phi_0 = s) > 0$. Bei überabzählbaren Zustandsräumen wird Aperiodizität folgendermaßen definiert¹⁶⁵: Eine Markov Kette heißt aperiodisch, wenn es keine Zerlegung $(D_0, D_1, \dots, D_{p-1})$ des Zustandsraums Ω gibt ($p \geq 2$), für die gilt $Pr(\Phi_i \in D_{i \bmod p}|\Phi_0 \in D_0) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dabei bezeichnet $i \bmod p$ den Rest der Division i geteilt durch p .

Der zweite Teil des Beweises stellt die Richtigkeit der eindeutigen stationären Verteilung fest und wird von Gelman et al. (2004, S. 291) übernommen: Sei θ_i^{t-1} eine $p(\theta_i|\theta_{-i}, Y)$ -verteilte Variable. Es wird bewiesen, dass auch θ_i^t diese Verteilung hat. Zu diesem Zweck wird bewiesen, dass die gemeinsame Dichte von θ_i^{t-1} und θ_i^t symmetrisch in diesen zwei Variablen ist. Daraus folgt sofort, dass die Randdichten von θ_i^{t-1} und θ_i^t übereinstimmen. Es wird also bewiesen, dass $p(\theta_i^{t-1} = \theta_a, \theta_i^t = \theta_b) = p(\theta_i^{t-1} = \theta_b, \theta_i^t = \theta_a)$ für jedes Wertepaar θ_a und θ_b . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $p(\theta_b|Y) \geq p(\theta_a|Y)$. Dann gilt

$$p(\theta_i^{t-1} = \theta_a, \theta_i^t = \theta_b) = p(\theta_a|Y)J_t(\theta_b|\theta_a), \quad (4.26)$$

¹⁶⁴Vgl. auch Chib (2001, S. 3578-3579.) in Handbook of Econometrics- Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann konvergieren Stichprobenmittel der Markov-Kette zum richtigen Erwartungswert

¹⁶⁵Vgl. Chib (2001, S. 3578).

weil $q \geq 1$ und die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $\min(q, 1) = 1$ ist für $\theta_i^t = \theta_b$. Beim Übergang von θ_b zu θ_a muss auch die Akzeptanzwahrscheinlichkeit $q = \frac{p(\theta_i^*|Y)}{p(\theta_i^{t-1}|Y)} = \frac{p(\theta_a|Y)}{p(\theta_b|Y)} \leq 1$ berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} p(\theta_i^{t-1} = \theta_b, \theta_i^t = \theta_a) &= p(\theta_b|Y)J_t(\theta_a|\theta_b)q = \\ p(\theta_b|Y)J_t(\theta_a|\theta_b)\frac{p(\theta_a|Y)}{p(\theta_b|Y)} &= \\ p(\theta_a|Y)J_t(\theta_a|\theta_b) &= p(\theta_a|Y)J_t(\theta_b|\theta_a) \quad (4.27) \end{aligned}$$

weil J_t eine symmetrische Dichte ist ($J_t(\theta_a|\theta_b) = J_t(\theta_b|\theta_a)$, siehe Schritt 2a des Metropolis Algorithmus).

Aus Gleichungen 4.26 und 4.27 wird ersichtlich, dass $p(\theta_i^{t-1} = \theta_a, \theta_i^t = \theta_b) = p(\theta_i^{t-1} = \theta_b, \theta_i^t = \theta_a)$, was erwünscht war.

Wie bereits erwähnt, benutzt WinBUGS/OpenBUGS als $J_t(\theta^*|\theta_i^{t-1})$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert θ_i^{t-1} , deshalb heißt der Algorithmus auch *current point Metropolis*. Die Varianz dieser Normalverteilung wird dynamisch im Laufe der MCMC-Iterationen angepasst, damit insgesamt eine durchschnittliche Akzeptanzrate von ca. 0.44 entsteht¹⁶⁶. Wenn diese Varianz zu klein ist, dann bewegt sich die Markov Kette nur langsam durch den Zustandsraum und es wird langsamer eine Konvergenz zur Zielverteilung erreicht. Wird dagegen diese Varianz zu groß gewählt, sinkt die Akzeptanzrate, da es wahrscheinlicher wird, dass der Vorschlag θ_i^* in einen Bereich niedriger Dichte fällt, dann wird q klein und es wird öfters verworfen. In diesem Fall bleibt die Kette an einer Stelle öfters und es wird wieder langsamer Konvergenz zur Zielverteilung erreicht. Die benutzte Methode wird SCAM (Single Component Adaptive Metropolis) Algorithmus genannt¹⁶⁷. Der Algorithmus ist der bereits eingeführte Metropolis Algorithmus mit $J_t(\theta^*|\theta^{t-1}) = N(\theta_i^{t-1}, v_t)$. Dabei wird v_t sukzessiv bestimmt:

$$v_t = \begin{cases} v_0 & \text{für } t \leq t_0 \\ s^2 \text{Var}(\theta_i^0, \theta_i^1, \dots, \theta_i^{t-1}) + \zeta & \text{für } t > t_0 \end{cases}$$

¹⁶⁶Die Akzeptanzrate ist der Anteil der Metropolis-Iterationen bei denen der entsprechende Vorschlag akzeptiert wurde.

¹⁶⁷Vgl. Haario et al. (2005, S. 266).

Dabei¹⁶⁸ wird $s = 2.4$ so gewählt, dass eine durchschnittliche Akzeptanzrate von ca. 0.5 entsteht¹⁶⁹. $\zeta = 0.0001$ ist eine positive Konstante, die sicherstellt, dass v_t nicht zu Null schrumpft. Roberts und Rosenthal (2006, S. 11) setzen $v_0 = 25$ und $t_0 = 10$.

Metropolis-Hastings Algorithmus

Dieser Algorithmus wird nur aus Gründen der Vollständigkeit gegeben (WinBUGS/OpenBUGS benutzen zur Schätzung einen eindimensionalen Metropolis-Algorithmus), er ist eine Verallgemeinerung des Metropolis-Algorithmus und ist entwickelt von Hastings (1970). Bei diesem Algorithmus wird nicht mehr Symmetrie von $J_t(\cdot)$ verlangt. Der Algorithmus geht wie folgt vor¹⁷⁰:

1. Generiere Startwert θ_i^0 mit $f(\theta_i^0|Y) > 0$ von einer prior-Verteilung $p_0(\theta_i)$
2. Wiederhole für $t = 1, 2, \dots$
 - a) Generiere Vorschlag θ_i^* von einer sogenannten Sprung-Verteilung (Jump Verteilung) mit Dichte $J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1})$.
 - b) Berechne $q_{MH} = \frac{f(\theta_i^*|Y) J_t(\theta_i^{t-1}|\theta_i^*)}{f(\theta_i^{t-1}|Y) J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1})} = \frac{p(\theta_i^*|\theta_{-i}, Y) J_t(\theta_i^{t-1}|\theta_i^*)}{p(\theta_i^{t-1}|\theta_{-i}, Y) J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1})}$
falls
 $f(\theta_i^{t-1}|Y)J_t(\theta_i^*|\theta_i^{t-1}) > 0$, sonst setze $q_{MH} = 1$.
 - c) Generiere eine gleichverteilte Zufallszahl $U \sim U(0, 1)$
 - d) Setze

$$\theta_i^t = \begin{cases} \theta_i^* & \text{falls } U \leq \min(q_{MH}, 1) \\ \theta_i^{t-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf den Beweis der Richtigkeit des Algorithmus wird nicht eingegangen, da dieser Algorithmus bei keinem der geschätzten Modelle angewandt wurde.

¹⁶⁸ $Var(\theta_i^0, \theta_i^1, \dots, \theta_i^{t-1})$ ist die Stichprobenvarianz von $\theta_i^0, \theta_i^1, \dots, \theta_i^{t-1}$. Die wird mit s^2 skaliert, Haario et al. (2005, S. 266) haben mit s skaliert, was in Wirklichkeit s^2 sein sollte, den Fehler haben z.B. Roberts und Rosenthal (2006, S. 11) bemerkt. Die BUGS-Software hat es richtig mit s^2 implementiert.

¹⁶⁹Vgl. Gelman et al. (1996).

¹⁷⁰Vgl. Gelman et al. (2004, S. 291).

4.6.5. Theoretische Eigenschaften des Bayes Schätzers

Der Bayes-Punktschätzer $E(\theta|X)$ (der Erwartungswert der Posterior-Verteilung) für einen Parameter θ bei Daten X hat einige erwünschte Eigenschaften. Zum einen minimiert er die Quadratische Loss-Funktion $(d - \theta)^2$ wobei d einen beliebigen Punktschätzer bezeichnet. Genau genommen minimiert der Bayes Punktschätzer $E((d - \theta)^2|X = x)$ (Erwartungswert bezüglich der Posterior-Verteilung von θ), falls dieses Minimum existiert¹⁷¹. Auch $E((d - \theta)^2)$ wird minimiert, wenn die gemeinsame Verteilung von X und θ verwendet wird. Das bedeutet, dass der Bayes Punktschätzer den minimalen Mean Squared Error (MSE) von allen Punktschätzern hat. Wenn man darüber hinaus den (unbekannten) wahren Parameter mit θ_0 bezeichnet, hat der Bayes-Schätzer asymptotisch alle von der Maximum-Likelihood-Schätzung bekannten asymptotischen Eigenschaften¹⁷².

4.6.6. Konvergenzdiagnostik und praktische Aspekte der MCMC Schätzung

Im Anhang werden die verwendeten Sampling Methoden für alle SV-Modelle aufgelistet. Dabei sind auch die angenommenen Priors ersichtlich. Bei den MCMC Methoden stellt sich die Frage nach der Konvergenz der Markov Kette zur stationären Verteilung. Ursprünglich habe ich eine burn-in Phase von 10000 Iterationen und eine darauffolgende von 10000 gewählt. Dann habe ich den MCMC-Output nach Konvergenz zur stationären Verteilung untersucht und festgestellt, dass für manche Parameter Konvergenz nicht erreicht wurde. Dies bedeutet, dass mehr Iterationen notwendig sind. Um dieses Problem und etwaige Autokorreliertheit der MCMC-Werte zu vermeiden, habe ich die Anzahl der Iterationen erhöht und gleichzeitig sogenanntes Thinning durchgeführt. Beim Thinning werden nur jede k -te Iteration nach der burn-in Phase gespeichert und für den MCMC- Output benutzt. Ich wähle (nach Experimentieren mit verschiedenen Werten von k) $k = 20$. Gleichzeitig erhöhe ich die Anzahl der Iterationen. So ist z.B. fürs Basis-SV-Modell die burn-in Phase mit $2000 \times 20 = 40000$ Iterationen und die anschließende MCMC-Phase mit $5000 \times 20 = 100000$ Iterationen. Auf diese Weise wurde Konvergenz nach zwei Kriterien erreicht: Heidelberger und Welch-Konvergenz-Kriterium und Geweke-Konvergenzkriterium. In der statistischen Software R sind diese beide Kriterien mit den Befehlen *heidel.diag* und *geweke.diag* vom Paket *coda* abrufbar. Das Paket *coda* ist spezialisiert auf Output-Analyse und Diagnostik für Markov-Chain-Monte-Carlo Simulationen. Die Heidelberger und

¹⁷¹Vgl. Lehmann (1983, S. 239).

¹⁷²Vgl. Gelman et al. (2004, S. 107) und Lehmann (1983, S. 457).

Welch-Diagnostik¹⁷³ überprüft die Nullhypothese, dass die nach dem Thinning gespeicherten 5000 Daten aus den 100000 MCMC Iterationen aus einer stationären Verteilung kommen. Dazu wird die Cramer-von Mises Teststatistik benutzt¹⁷⁴. Seien die gespeicherten Werte M_1, M_2, \dots, M_n (im SV-Basis-Modell $n = 5000$). Seien $S_0 = 0, S_k = \sum_{t=1}^k M_t, \bar{M} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n M_t$ Sei weiterhin $B_k = (S_k - k\bar{M}) / \sqrt{n \cdot sp(0)}$, wobei $sp(0)$ eine Schätzung für die Spektraldichte (der stationären Verteilung unter der Nullhypothese) zur Frequenz 0 ist, auf die hier nicht näher eingegangen wird¹⁷⁵. Die Cramer-von Mises Teststatistik ist $CVM = \sum_{k=1}^n B_k^2$. Deren asymptotische Verteilung ist die Verteilung von $\int_0^1 B(t)^2 dt$ wobei $B(t), 0 \leq t \leq 1$ eine Brownsche Brücke ist. Darauf basiert die Entscheidung des Cramer-von Mises Tests. Falls die Nullhypothese abgelehnt wird, werden nacheinander die ersten 10%, 20%, 30%, 40% und 50% der Stichprobe entfernt bis die Nullhypothese angenommen wurde oder 50% der Stichprobe entfernt wurde.

Der Geweke-Konvergenz-Test überprüft auch die Nullhypothese, dass die MCMC-Kette M_1, M_2, \dots, M_n aus einer stationären Verteilung kommt. Die Idee ist, die Mittelwerte in einer Portion vom Anfang und einer Portion vom Ende der Stichprobe zu vergleichen. Dazu ist der Befehl *geweke.diag* im R-Paket *coda* zuständig. Dort sind beide Anteile einstellbar, ich wähle beide als 0.5, d.h. es werden die Mittelwerte in der ersten und zweiten Hälfte der Stichprobe verglichen. Seien $\overline{M^A}$ und $\overline{M^B}$ die beiden Stichprobenmittel in den beiden Gruppen (die Stichprobengrößen sind n_A und n_B). Seien weiterhin $sp^A(0)$ und $sp^B(0)$ Schätzer für die Spektraldichte zur Frequenz 0 zu den beiden Stichproben (abzurufen durch die R-*coda*-Funktion *spectrum0()*). Dann ist¹⁷⁶ die Geweke-Teststatistik:

$$G = \frac{\overline{M^A} - \overline{M^B}}{\sqrt{\frac{sp^A(0)}{n_A} + \frac{sp^B(0)}{n_B}}} \sim N(0, 1) \quad (4.28)$$

Standardnormalverteilt, wenn die Reihe M stationär ist.

Für die Modelle wurden folgende Anzahl von Iterationen, Burn-in-Phase und Thinning-Parameter (für jeden zu prognostizierenden Tag) verwendet:

¹⁷³Vgl. Heidelberger und Welch (1983).

¹⁷⁴Vgl. Heidelberger und Welch (1983, S. 1113-1114).

¹⁷⁵Vgl. Box und Jenkins (1976, S. 41).

¹⁷⁶Vgl. Geweke (1992, Abschnitt 3.2).

SV-Modell	Zeitreihe	Iterationen	davon Burn-in	Thinning
1	DJIA 10000	140000	40000	20
2	DJIA 10000	170000	70000	20
3	DJIA 5000	160000	60000	20
4	DJIA 10000	150000	50000	20
5	DJIA 10000	230000	130000	20
6	DJIA 10000	140000	40000	20
7RV	SP 2261	140000	40000	20
7VIX	SP 5079	160000	60000	20
8	SP 2261	100000	50000	10
9	SP 5079	160000	60000	20
10	DJIA 2500	140000	40000	20
11	DJIA 2500	120000	20000	20
3	DAX 5000	140000	40000	20
3	BA 5000	140000	40000	20
3	HPQ 4691	140000	40000	20
3	BO 5000	160000	60000	20
3	GBPUSD 5000	160000	60000	20
3	USDJPY 5000	140000	40000	20

Tabelle 4.3.: SV-Modelle: Anzahl Iterationen, Burnin, Thinning

So sehen die Schätzungen für jeden einzelnen Tag aus. Die Prognose vom Value-at-Risk und Expected Shortfall für jeden Tag verwendet für die Schätzung jeweils ein glättendes Zeitfenster von (meistens) 500 Renditen. Die Zahl 500 wurde groß genug gewählt um stabile Schätzungen zu gewährleisten ohne dabei zu lang zu sein, damit etwaige Strukturbrüche in den Parametern rechtzeitig aufgefangen werden können. Wenn nichts anderes explizit erwähnt wird, wird ein Zeitfenster von 500 benutzt. Bei manchen Modellen (z.B. Modell 3) wurde zum Vergleich auch mit anderen Zeitfenstern gerechnet (1000 oder 2000, siehe Abschnitt 5.5).

OpenBugs wird von der Software R durch das Paket R2OpenBugs gesteuert. R instruiert OpenBugs die Schätzung durchzuführen, dann kommen die Ergebnisse zurück zu R und werden ausgewertet. Der Within-R Aufruf von OpenBUGS sieht im Modell 1 z.B. so aus:

```
sv.sim=bugs(data, inits=NULL, parameters.to.save=parameters, model.file=
"BasicSV.txt", OpenBUGS.pgm="C:/Program Files (x86)/OpenBUGS/
OpenBUGS321/OpenBUGS.exe", n.chains=1, n.iter=7000, n.burnin=2000,
n.thin=20, codaPkg=TRUE)
```

5. Anwendung der univariaten SV-Modelle in der Risikomessung: Prognose des Value-at-Risk und Expected Shortfall und Überprüfung durch Backtesting

5.1. Prognose des Value-at-Risk und Expected Shortfall

5.1.1. Prognose integriert in der MCMC-Schätzung (nur bei den SV Modellen)

Innerhalb der MCMC-Schätzung wird bei jeder Iteration ein Wert für die neue, zu prognostizierende Rendite gezogen. Die somit gebildeten 5000 Werte (angenommen es werden 5000 Iterationen nach der burn-in Phase und Thinning gespeichert¹⁷⁷) sind Grundlage zur Bestimmung vom Value-at-Risk und Expected-Shortfall der neuen Rendite. Dies sind die empirischen VaR und ES der 5000 Werte.

5.1.2. Prognose impliziert durch die Verteilung der Innovation in der Renditengleichung des Modells

Hier wird der Value-at-Risk und Expected Shortfall des Innovationsterms gebildet (der Verteilungsannahme des Modells entsprechend) und durch das entsprechende location-scale-Modell in VaR und ES der nächsten Rendite transformiert.

$$\widehat{VaR}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1} Q_p(\epsilon) \quad (5.1)$$

und

$$\widehat{ES}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1} ES_p(\epsilon) \quad (5.2)$$

¹⁷⁷Es werden also z.B. (bei Thinning-Parameter=20) 100000 Iterationen nach burn-in durchgeführt, und jede zwanzigste wird behalten.

Dabei wird $\widehat{\sigma}_{t+1}$ bei den SV-Modellen entweder als $\exp(\widehat{h_{t+1}}/2)$ (bei Modellen 10 und 11 wird $\widehat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2)\sqrt{\widehat{\lambda}_t}$ gesetzt) oder als Standardabweichung der durch MCMC-simulierten nächsten Rendite berechnet. Die zweite Standardabweichung ist generell größer als die erste und führt zu konservativeren Value-at-Risk und Expected-Shortfall-Prognosen. Die zweite Methode berücksichtigt die Parameterunsicherheit aller Parameter (z.B. des Absolutglieds in der Renditengleichung). Bei manchen SV-Modellen werden beide Methoden angewandt, bei manchen nur die konservativere. Außerdem ist $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \widehat{s}_t\widehat{q}_t$ bei SV-Modell 4, $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \widehat{d}\exp(\widehat{h_t}/2)$ bei SV-Modell 6, $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \lambda_t\gamma_1\widehat{\sigma}_t$ bei SV-Modell 11 und $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu}$ bei allen restlichen Modellen (inkl. APARCH).

5.1.3. Prognose mittels Filtered Historical Simulation

Die Filtered Historical Simulation kombiniert eine parametrische (SV oder GARCH) mit einer nichtparametrischen (Historical Simulation) Methode und ist inzwischen in der Literatur als sehr erfolgreich zur Schätzung des Value-at-Risk etabliert: siehe z.B. Barone-Adesi et al. (1999), Barone-Adesi et al. (2002) und Pritsker (2001) sowie ein Übersichtsartikel zu den VaR-Methoden: Kuester et al. (2006). Die Filtered Historical Simulation geht wie folgt vor. Zunächst wird ein parametrisches Modell (der GARCH oder SV-Familie) für die Renditen geschätzt. Anschließend werden die standardisierten Residuen gebildet $z_t = \frac{r_t - \widehat{\mu}_t}{\widehat{\sigma}_t}$, wobei $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \widehat{s}_t\widehat{q}_t$ bei SV-Modell 4, $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \widehat{d}\exp(\widehat{h_t}/2)$ bei SV-Modell 6, $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu} + \lambda_t\gamma_1\widehat{\sigma}_t$ bei SV-Modell 11 und $\widehat{\mu}_t = \widehat{\mu}$ bei allen restlichen Modellen (inkl. APARCH). Bei den SV-Modellen gilt $\widehat{\sigma}_t = \exp(\widehat{h_t}/2)$, mit Ausnahme vom Modellen 10 und 11, wo $\widehat{\sigma}_t = \exp(\widehat{h_t}/2)\sqrt{\widehat{\lambda}_t}$. Bei der FHS-K werden die letzten K standardisierten Residuen gebildet: $z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-K+1}$. Sei F_z die (diskrete) empirische Verteilungsfunktion dieser standardisierten Residuen und Z_t eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_{z_t} . Die Verteilung der nächsten Rendite r_{t+1} wird durch die Verteilung von $\widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1}Z_t$ approximiert. Zur Berechnung des VaR zum Niveau p wird das empirische p -Quantil $Q_p^{FHS-K} = Q_p(z_t, z_{t-1}, \dots, z_{t-K+1})$ herangezogen¹⁷⁸. Die Value-at-Risk Prognose ist dann

$$\widehat{VaR}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1}Q_p^{FHS-K} \quad (5.3)$$

¹⁷⁸Die Software R hat 9 Typen von empirischen Quantilen, ich verwende den Typ 3, der einen konservativeren Value-at-Risk bewirkt als das sonst übliche empirische Quantil vom Typ 2. Vgl. Hyndmann und Fan (1996, S. 362), Definitionen 2 und 3.

Dabei wird $\widehat{\sigma}_{t+1}$ bei den SV-Modellen entweder als $\exp(\widehat{h}_{t+1}/2)$ oder als Standardabweichung der durch MCMC-simulierten nächsten Rendite berechnet. Die zweite Standardabweichung ist generell größer als die erste und führt zu konservativeren Value-at-Risk und Expected-Shortfall-Prognosen. Die zweite Methode berücksichtigt die Parameterunsicherheit aller Parameter (z.B. des Absolutglieds in der Renditengleichung). Bei manchen SV-Modellen werden beide Methoden angewandt, bei manchen nur die konservativere. Analog wird der Expected Shortfall als Mittelwert über die standardisierten Residuen, die kleiner sind als Q_p^K , gebildet: mit $ES_p^{FHS-K}(\epsilon) = \frac{1}{\#\{i \in [t-K+1, t]: z_i < Q_p^{FHS-K}\}} \sum_{i \in [t-K+1, t]: z_i < Q_p^{FHS-K}} z_i$ wird

$$\widehat{ES}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1} ES_p^{FHS-K}(\epsilon) \quad (5.4)$$

berechnet.

5.1.4. Prognose mittels Filtered Extreme Value Theory

Zunächst werden die Daten durch ein parametrisches Modell gefiltert wie bei der Filtered Historical Simulation. Es wird ein GARCH oder SV Modell geschätzt und es werden die letzten T standardisierten Residuen gebildet: $z_t = \frac{r_t - \widehat{\mu}_t}{\widehat{\sigma}_t}$ ($\widehat{\mu}_t$ wurde bereits in Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 definiert). Anschließend werden VaR und ES durch die folgenden Gleichungen gebildet.

$$\widehat{VaR}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1} Q_p^{EVT-T} \quad (5.5)$$

$$\widehat{ES}_{t+1|t}^p = \widehat{\mu}_{t+1} + \widehat{\sigma}_{t+1} ES_p^{EVT-T}(\epsilon) \quad (5.6)$$

Dabei wurden die zwei Methoden zur Bildung von $\widehat{\sigma}_{t+1}$ in Abschnitten 5.1.2 und 5.1.3 beschrieben. Der Unterschied zu der FHS Methode liegt in der Berechnung von Q_p^{EVT-T} und $ES_p^{EVT-T}(\epsilon)$. Grundlage sind wieder die letzten T standardisierten Residuen, es werden jedoch nicht das empirische Quantil und der entsprechende empirische ES genommen. Es wird vielmehr die Extreme-Value-Theorie benutzt, um auf Schätzungen für Q_p^{EVT-T} und $ES_p^{EVT-T}(\epsilon)$ zu kommen.

Die Ausführungen folgen Kuester et al. (2006, S. 60-63) und McNeil und Frey (2000). Die Extreme-Value-Theorie fokussiert auf die Min- oder Max-Statistiken einer Stichprobe und modelliert nur die Enden der Verteilung. Sei $\{ZZ_t\}_{t=1}^T$ eine Zeitreihe von unabhängig identisch verteilten Variablen und

$M_T = \max(ZZ_1, ZZ_2, \dots, ZZ_T)$. Falls Konstanten $c_T > 0$ und $d_T \in \mathbb{R}$ und Verteilungsfunktion H existieren, für die:

$$\frac{M_T - d_T}{c_T} \xrightarrow{d} H \quad (5.7)$$

gilt, dann sollte H für ein ξ die folgende Form haben¹⁷⁹:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\} & \text{falls } \xi \neq 0 \text{ und } 1 + \xi x > 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{falls } \xi = 0 \end{cases}$$

H_ξ ist die Extremwert-Verteilung (Generalized Extreme Value Distribution). Dies bedeutet, dass unabhängig von der ursprünglichen Verteilung der ZZ_i , deren Stichproben-Maximum eine Extremwert-Grenzverteilung hat, falls solche Grenzverteilung existiert.

Seien $Y = ZZ - u$ die Überschüsse einer Zufallsvariable ZZ über eine Schranke u vom äußersten rechten Ende der Verteilung von ZZ und die Verteilungsfunktion der Überschüsse sei

$$F_u(y) = P(ZZ - u \leq y | ZZ > u) \quad (5.8)$$

für $0 \leq y \leq zz_0 - u$, wobei zz_0 den endlichen oder unendlichen rechten Endpunkt der Verteilung von ZZ bezeichnet. Die Überschüsse über die Schranke u haben eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung (Generalized Pareto Distribution) als Grenzverteilung:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi y}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{falls } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\beta}) & \text{falls } \xi = 0 \end{cases}$$

mit einem Skalierungsparameter $\beta > 0$ und Träger $y \geq 0$ falls $\xi \geq 0$ und $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ falls $\xi < 0$.

Für eine breite Klasse von Verteilungsfunktionen von ZZ kann man nämlich eine positive messbare Funktion $\beta(u)$ finden¹⁸⁰, für die

$$\lim_{u \rightarrow zz_0} \sup_{0 \leq y \leq zz_0 - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0 \quad (5.9)$$

gilt.

¹⁷⁹Vgl. Kuester et al. (2006, S. 61).

¹⁸⁰Vgl. McNeil und Frey (2000, S. 281).

Sei $zz_{(1)} \geq zz_{(2)} \geq \dots \geq zz_{(T-1)} \geq zz_{(T)}$ die absteigend geordnete Reihe der Beobachtungen zz_1, \dots, zz_T . Für $u = zz_{(k+1)}$ zeigen Kuester et al. (2006, S. 62) und McNeil und Frey (2000, S. 282)¹⁸¹, dass das q -Quantil (z.B. $q = 0.95$ oder $q = 0.99$) der ZZ -Verteilung durch folgenden Ausdruck geschätzt werden kann:

$$\hat{z}z_q = zz_{(k+1)} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-q}{k/T} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (5.10)$$

wobei $\hat{\beta}$ und $\hat{\xi}$ die Maximum Likelihood Schätzer bei einer Anpassung der Überschüsse

$zz_{(1)} - u, zz_{(2)} - u, \dots, zz_{(k)} - u$ mit einer $G_{\xi, \beta}$ -Verteilung sind.

McNeil und Frey (2000, S. 292) zeigen außerdem, dass für $\xi < 1$:

$$\hat{E}(ZZ|ZZ > zz_q) = \hat{z}z_q \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}zz_{(k+1)}}{(1-\hat{\xi})\hat{z}z_q} \right) \quad (5.11)$$

gegeben ist.

Da man bei der Risikomessung am linken Ende der Z -Verteilung interessiert ist, wird die Extreme Value Theory auf die negativen standardisierten Residuen $ZZ_t = -Z_t, t = 1, \dots, T$ angewandt. $Q_p^{EVT-T} = -\hat{z}z_q$ laut Gleichung 5.10¹⁸² und $ES_p^{EVT-T}(\epsilon) = -\hat{E}(ZZ|ZZ > zz_q)$ laut Gleichung 5.11 mit $q = 1 - p$.

Somit ist die Value-at-Risk und Expected Shortfall-Bestimmung durch Filtered Extreme Value Theory komplett beschrieben.

5.2. Backtesting von Value-at-Risk und Expected Shortfall

Durch den Vergleich der Value-at-Risk oder Expected-Shortfall Prognosen mit den tatsächlich eingetretenen Renditen oder Portfolio-Wertänderungen lässt sich die qualitative und quantitative Prognosegüte des Risiko-Modells abschätzen. Verfahren, die berechnete Werte im Nachhinein mit tatsächlich eingetroffenen Werten vergleichen, um die Güte des Modells zu überprüfen,

¹⁸¹Ich folge diesen beiden Artikeln auch bei der Wahl von k . Bei einer Stichprobengröße von $T=1000$ wählen diese Artikel $k=100$. Bei anderen Stichprobengrößen (z.B. $T=100,200,250,300,400,500$) wähle ich $k=T/10$.

¹⁸²Mit $q = 1 - p$.

heißen Backtesting-Verfahren¹⁸³. Backtesting ist bei Verwendung von internen Modellen für die Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung aufsichtsrechtlich vorgeschrieben. Für aufsichtsrechtliche Zwecke werden die 1-tägigen Value-at-Risk-Prognosen zum Niveau 0.99 (also Überschreitungsniveau von 0.01) für die vergangenen 250 Handelstage fürs Backtesting herangezogen¹⁸⁴. In der vorliegenden Dissertation werden längere Zeitperioden verwendet (bis zu 10000 Tage) sowie VaR-Überschreitungsniveaus von 0.05 und 0.01 sowohl für den long als auch für den short Portfoliobestand. Die in dieser Dissertation betrachteten Value-at-Risk Backtesting-Verfahren basieren auf der Ausreißer-Indikator-Sequenz (ja/nein). Außerdem werden Verfahren zur Überprüfung der Richtigkeit der ganzen Prognoseverteilung angewandt. Und zum Schluss wird ein t-Test oder Bootstrapping Test zur Überprüfung des Expected Shortfall angewandt.

Zum Backtesting werden verschiedene Tests angewandt, die im Folgenden dargestellt werden. Zum Teil handelt es sich dabei um Tests, die hier erstmals vorgeschlagen und angewandt werden.

5.2.1. LR_{PF} : Test für den Anteil der VaR-Überschreitungen

Dies ist ein von Kupiec (1995) vorgeschlagener Test, basierend auf dem Anteil der VaR-Überschreitungen (*proportion of failures*, PF-Test). Die Hypothesen sind $H_0 : p = p_0$ gegen $H_1 : p \neq p_0$. Seien I_t , $t = 1, \dots, n$ Indikatorvariablen, wobei $I_t = 1$, wenn $r_t < \widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0}$ (Ausnahme) und $I_t = 0$ wenn $r_t \geq \widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0}$. Es wird $I_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, p_0)$ gegen $I_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, p)$ mit $p \neq p_0$ getestet. Seien i_1, \dots, i_n die Realisierungen der Indikatorvariablen. Sei $n1 = \sum_{j=1}^n i_j$, d.h. $n1$ ist die Anzahl der VaR-Überschreitungen in der Stichprobe von n Beobachtungen. Es gilt $Pr(I_1 = i_1, \dots, I_n = i_n, p) = Pr(I_1 = i_1)Pr(I_2 = i_2) \dots Pr(I_n = i_n) = p^{n1}(1-p)^{n-n1}$. Die Likelihoodfunktion ist dann $L(p) = p^{n1}(1-p)^{n-n1}$. Die Log-Likelihoodfunktion ist $\ln L(p) = n1 \ln p + (n - n1) \ln(1 - p)$. Die erste Ableitung der Log-Likelihoodfunktion ist $\frac{n1}{p} - \frac{n-n1}{1-p} = \frac{n1-np}{p(1-p)}$. Diese Ableitung ist 0 für $\tilde{p} = \frac{n1}{n}$. Die zweite Ableitung der Log-Likelihoodfunktion ist $-\frac{n1}{p^2} - \frac{n-n1}{(1-p)^2} < 0$, also \tilde{p} ist ein Maximum. Es seien $\Omega = [0, 1]$ und $\Omega_0 = \{p_0\}$. Der Likelihood-Quotient lautet:

¹⁸³Definition nach Eller und Deutsch (1998, S. 238).

¹⁸⁴Vgl. Solvabilitätsverordnung (SolvV bis 31.12.2013 §318); Verordnung (EU) 575/2013 Artikel 366. Zur Bestimmung der Eigenkapitalunterlegung wird noch der 10-tägige VaR herangezogen (SolvV bis 31.12.2013 §314, sowie Verordnung (EU) 575/2013 Artikel 364).

$$\lambda(I_1, \dots, I_n) = \frac{\sup_{p \in \Omega_0} L(p)}{\sup_{p \in \Omega} L(p)} = \frac{p_0^{n1} (1-p_0)^{n-n1}}{\bar{p}^{n1} (1-\bar{p})^{n-n1}} = \frac{p_0^{n1} (1-p_0)^{n-n1}}{(\frac{n1}{n})^{n1} (1-\frac{n1}{n})^{n-n1}}$$
. Die Teststatistik $LR_{PF} = -2\lambda(I_1, \dots, I_n) = -2 \ln[p_0^{n1} (1-p_0)^{n-n1}] + 2 \ln[(\frac{n1}{n})^{n1} (1-\frac{n1}{n})^{n-n1}]$ ist dann unter H_0 asymptotisch $\chi^2(1)$ -verteilt¹⁸⁵. In Christoffersen und Pelletier (2002), Tabelle 1, findet man die kritischen Werte von LR_{PF} für (einige) endliche Stichprobengrößen.

5.2.2. V1,(V2,V3): Varianz der Anzahl der 250-(125-,500-)aggregierten VaR-Überschreitungen

Für aufsichtsrechtliche Zwecke ist ein Backtesting für die letzten 250 Handelstage vorgeschrieben. Deshalb ist das Verhalten der Anzahl E_{250} der VaR-Überschreitungen für 250 Handelstage interessant. Der LR_{PF} -Test mag richtigen Anteil der Überschreitungen über 40 Jahre messen, jedoch sollten die Anzahl der Überschreitungen in den einzelnen Jahren nicht zu viel oder nicht zu wenig streuen. Was zu viel bzw. zu wenig ist, wird durch die Nullhypothese eines richtigen Value-at-Risk bestimmt. Unter dieser Hypothese sind die Indikatorvariablen $I_t \stackrel{iid}{\sim} B(1, p)$, woraus folgt, dass die Anzahl der jährlichen Überschreitungen $B(250, p)$ verteilt ist. Dies bedeutet eine Streuung von $250p(1-p)$, d.h. für $p = 0.05$ ist $\text{var}(E_{250})=11.875$. Wenn die Abweichung der beobachteten Streuung von $250p(1-p)$ zu groß ist, muss die Nullhypothese eines richtigen Value-at-Risk trotz richtigen Anteils der Überschreitungen verworfen werden. Was zu groß ist, wird durch einmalige Simulation der Verteilung des Varianzschätzers unter der Nullhypothese und Ermitteln von einem p-Wert unter Verwendung der Realisierung des Varianzschätzers bestimmt (die Realisierung wird mit der einmalig simulierten Verteilung unter der Nullhypothese verglichen). Falls J die Anzahl der Jahre in der Zeitreihe der Renditen ist, werden 100000 Stichproben von Umfang J (jede Stichprobe wird durch J-maliges Ziehen von der $B(250, p)$ -Verteilung generiert) generiert. In jeder Stichprobe wird die Streuung ermittelt, somit entstehen 100000 realisierte Streuungen, die eine Basis für die Bestimmung des p-Werts liefern. Dazu wird die Abweichung der tatsächlichen Varianz von der theoretischen $250p(1-p)$ bestimmt und es wird der Anteil der generierten Varianzen mit einer Abweichung, die größer gleich der beobachteten Abweichung ist, festgehalten. Dieser Anteil ist der p-Wert des Tests V1 für die Richtigkeit des VaR. Ganz analog wird der Test V2 für die halbjährige (125 Handelstage) und der Test V3 für die zweijährige (500 Handelstage) Anzahl der

¹⁸⁵Vgl. Büning und Trenkler (1994, S. 36).

Überschreitungen durchgeführt (Die Anzahl wird mit E125 bzw. E500 bezeichnet¹⁸⁶). Die Generierung von Simulationsdaten geschieht nur einmal für jede Stichprobengröße, die in Frage kommt (10000, 5000, 2500, 2261, 5079 usw.). Diese Werte werden in Dateien gespeichert und zur Berechnung der p -Werte herangezogen. Die Erwartungswerte der Varianzen unter der Nullhypothese und $p = 0.05$ sind $E(Var(E125)) = 5.9375$ und $E(Var(E500)) = 23.75$. Die Tests V1, V2 und V3 sind, wie auch der LR_{cc} -Test, eine Kombination zwischen einem Test für *unconditional coverage*, d.h. für Richtigkeit des Niveaus (p_0), und einem Unabhängigkeitstest. Nichtsdestotrotz wird auf die 3 Tests als Varianzentests verwiesen, und auf die LB1, LB2, LB3, LR_{ind} und N111 Tests als Unabhängigkeitstests, damit wird **reine** Unabhängigkeitstests gemeint. Im Unterschied zu den LR_{ind} - und LR_{cc} -Tests wird von den V1, V2, V3-Tests auch eine Abhängigkeit zwischen mehreren Tagen aufgedeckt, während die LR_{ind} und LR_{cc} -Tests auf eine Abhängigkeit zwischen benachbarten Tagen zielen. Das bedeutet, die Varianzentests haben eine spezifische Rolle, die nicht mit dem LR_{ind} oder LR_{PF} Test gleichzusetzen ist (wie die ersten Tabellen im Abschnitt 5.5 bestätigen- hier gibt es Fälle, z.B. beim Modell 5 und dem 0.01-VaR, wo V1, V2 und V3 zur Ablehnung der Nullhypothese führen, und beide LR_{ind} und LR_{PF} zur Annahme). Die Tests V1, V2 und V3 sind sehr wichtig, um falsche Value-at-Risk-Methoden abzufangen, bei denen der Anteil der Überschreitungen stimmt, die aber einen Value-at-Risk berechnen, der sich wenig über die Zeit ändert. Ich habe den extremsten Fall untersucht, nämlich, einen konstanten ex-post Value-at-Risk auf VaR-Niveau p über die ganze Stichprobe, der jedoch den richtigen Anteil der Überschreitungen bewirkt. Dies ist einfach das p -Quantil der (ex-post) empirischen Renditenverteilung. So ergibt sich bei der Dow-Jones-10000-Stichprobe ein 0.05-Quantil von -1.621867 . Der Anteil der VaR-Überschreitungen eines einheitlichen VaR von -1.621867 ist 0.0499 bei Soll-Erwartungswert 0.05, auf den ersten Blick ein sehr gutes Ergebnis (das ist auch nicht verwunderlich, da der ermittelte VaR das empirische 0.05-Quantil ist). Die Varianzen zu den 250, 125 und 500-geclusterten VaR-Überschreitungen sind jedoch extrem hoch: 126.77, 44.72 und 398.68 bei Soll-Erwartungswerten 11.875, 5.9375 und 23.75. Dies ist eine Folge davon, dass dieser konstante VaR nicht der am Markt bestehenden Volatilität angepasst ist. Es ist ein VaR erwünscht, der mehr mit der Veränderung der Renditenvolatilität über die Zeit variiert.

¹⁸⁶E kommt von *exceedances*.

5.2.3. LB1,(LB2,LB3): Ljung-Box Test auf Unkorreliertheit der Anzahl der 250-(125-,500-)aggregierten VaR-Überschreitungen

Die im vorherigen Abschnitt bestimmte Reihe der Anzahl der jährlichen VaR-Überschreitungen muss nicht nur eine passende Varianz haben, sie muss unter der Nullhypothese unabhängig, darf also nicht autokorreliert sein. Für die Autokorreliertheit wird der Ljung-Box-Test für die ersten 5 Lags angewandt. Seien E_1, E_2, \dots, E_J die Anzahlen der Überschreitungen in den einzelnen J Jahren. Es wird zunächst die Autokorrelation zu den Lags 1,2,3,4 und 5 ermittelt¹⁸⁷:

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^J (e_t - \bar{e})(e_{t-l} - \bar{e})}{\sum_{t=1}^J (e_t - \bar{e})^2} \quad (5.12)$$

Die Ljung-Box Teststatistik zum Lag 5 lautet dann¹⁸⁸

$$Q(5) = J(J+2) \sum_{l=1}^5 \frac{\hat{\rho}_l^2}{J-l}. \text{ Sie ist asymptotisch } \chi^2(5)\text{-verteilt.}$$

Analog wird im Falle der halbjährigen (Test LB2) bzw. zweijährigen (Test LB3) VaR-Überschreitungen vorgegangen.

5.2.4. LR_{ind}, LR_{cc} : Unabhängigkeitstest und conditional-coverage-Test für die VaR-Überschreitungen

Diese beiden Tests wurden von Christoffersen (1998) entwickelt. Christoffersen (1998) untersucht die bedingte Effizienz von Intervallprognosen (die VaR-Prognose ist so eine Prognose). Im Folgenden werden seine Definitionen und Bezeichnungen angepasst dargestellt. Ausgangspunkt sind die Tupel $\{\widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0}, r_t\}_{t=1, \dots, n}$. Zunächst werden die Indikatorvariablen $I_t, t = 1, \dots, n$ wie im Abschnitt 5.2.1 definiert:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{wenn } r_t < \widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0} \text{ VaR-Überschreitung/Ausnahme/Ausreißer} \\ 0 & \text{wenn } r_t \geq \widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0} \end{cases}$$

Eine Reihe von VaR-Prognosen $\{\widehat{VaR}_{t|t-1}^{p_0}\}_{t=1,2, \dots, n}$ nennt man effizient bezüglich der Informationsmenge Ψ_{t-1} , wenn $E(I_t | \Psi_{t-1}) = p_0$ für $t = 1, \dots, n$. Christoffersen (1998) untersucht zuerst den Fall, wenn $\Psi_{t-1} = \{I_{t-1}, I_{t-2}, \dots, I_1\}$. Er beweist, dass in diesem Fall Testen für bedingte Effizienz ($E(I_t | \Psi_{t-1}) = p_0$ für $t = 1, \dots, n$) äquivalent zum Testen ist,

¹⁸⁷Vgl. Tsay (2002, S. 24).

¹⁸⁸Vgl. Tsay (2002, S. 25).

ob I_1, I_2, \dots, I_n unabhängig identisch Bernoulli-verteilt mit Parameter p_0 sind. Tatsächlich, von $E(I_t | \Psi_{t-1}) = p_0$ für $t = 1, \dots, n$ folgt $Pr(I_t = 1 | I_{t-1}, \dots, I_1) = E(I_t | \Psi_{t-1}) = p_0$, unabhängig von I_{t-1}, \dots, I_1 . Dies bedeutet beides: Unabhängigkeit und Bernoulli-Verteilung mit Parameter p_0 für I_t . Umgekehrt, wenn $I_t \stackrel{iid}{\sim} B(1, p_0)$, folgt $E(I_t | \Psi_{t-1}) = 0 \cdot Pr(I_t = 0 | I_{t-1}, \dots, I_1) + 1 \cdot Pr(I_t = 1 | I_{t-1}, \dots, I_1) = 0 + p_0 = p_0$. Im Folgenden wird die Hypothese $H_0 : I_t \stackrel{iid}{\sim} B(1, p_0), t = 1, \dots, n$ anhand der Realisierungen von I_t getestet (zunächst wird lediglich die Unabhängigkeit untersucht). Christoffersen (1998) untersucht die Unabhängigkeit von I_t . Er nimmt an, dass $\{I_t\}_{t=1, \dots, n}$ eine binäre Markov Kette mit der folgenden Übergangsmatrix ist:

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{pmatrix}, \text{ wobei } \pi_{ij} = Pr(I_t = j | I_{t-1} = i). \text{ Die Likelihoodfunktion ohne Berücksichtigung der ersten Beobachtung lautet:}$$

$L(\Pi_1; I_1, I_2, \dots, I_n) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}$ wobei n_{ij} die Anzahl der Tupel $(I_{t-1}, I_t) = (i, j)$ für $t = 2, \dots, n$ bezeichnet¹⁸⁹. Durch Ableitung der log-Likelihoodfunktion berechnet man den ML-Schätzer: $\hat{\Pi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{n_{00}}{n_{00}+n_{01}} & \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}} \\ \frac{n_{10}}{n_{10}+n_{11}} & \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}} \end{pmatrix}$.

Bei Unabhängigkeit lautet die Übergangsmatrix: $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 - \pi_2 & \pi_2 \\ 1 - \pi_2 & \pi_2 \end{pmatrix}$, da $\pi_{01} = \pi_{11}$. Die Likelihoodfunktion unter Unabhängigkeit lautet: $L(\Pi_2; I_1, I_2, \dots, I_n) = (1 - \pi_2)^{n_{00}+n_{10}} \pi_2^{n_{01}+n_{11}}$. Der ML-Schätzer unter der Nullhypothese (Unabhängigkeit) ist $\hat{\pi}_2 = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{10}+n_{01}+n_{11}}$. Die Teststatistik des Likelihood-Quotienten-Unabhängigkeitstests ist also:

$LR_{ind} = -2 \left[\ln L(\hat{\Pi}_2; I_1, I_2, \dots, I_n) - \ln L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_n) \right]$. Sie ist asymptotisch $\chi^2(1)$ -verteilt.

Die Tests LR_{PF} und LR_{ind} können zusammen zur Überprüfung der Hypothese $I_t \stackrel{iid}{\sim} B(1, p_0)$ benutzt werden. Christoffersen (1998) schlägt jedoch einen dritten Test vor, der diese beiden Tests kombiniert:

$$LR_{cc} = -2 \left[\ln L(p_0; I_1, I_2, \dots, I_n) - \ln L(\hat{\Pi}_1; I_1, I_2, \dots, I_n) \right]$$

mit $L(p_0; I_1, I_2, \dots, I_n) = (1 - p_0)^{n_{00}+n_{10}} p_0^{n_{01}+n_{11}}$. Diese Teststatistik ist unter der Nullhypothese ($I_t \stackrel{iid}{\sim} B(1, p_0)$) asymptotisch $\chi^2(2)$ verteilt.

Wenn man beim LR_{PF} -Test die erste Beobachtung nicht berücksichtigt, gilt: $LR_{cc} = LR_{PF} + LR_{ind}$. Christoffersen und Pelletier (2002), Tabelle 1, geben die kritischen Werte für den LR_{cc} -Test für (einige) endliche Stichprobengrößen an.

¹⁸⁹Es gilt $n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11} = n - 1$.

5.2.5. N111: Test für die Anzahl der Tupel von drei benachbarten VaR-Überschreitungen

Dies ist ein weiterer Unabhängigkeitstest für die Indikatorreihe I_1, I_2, \dots, I_n der VaR-Überschreitungen. Die VaR-Überschreitungen sollen nicht zu oft in Clustern auftreten. Was zu oft ist wird durch Simulation unter der Nullhypothese von $B(1, p)$ -verteilten Variablen bestimmt- es wird 1000000 mal je eine Stichprobe von n $B(1, p)$ -verteilten Variablen gezogen und in jeder Stichprobe wird die Anzahl der Cluster mit 3 benachbarten VaR-Überschreitungen ermittelt. Somit entstehen 1000000 Zahlen, es werden deren empirische 0.025 und 0.975-Quantile bestimmt und als Grenzen des 0.95-Schwankungsintervalls für die tatsächlich beobachtete Anzahl der Dreier-Cluster benutzt. So ergibt sich z.B. für $n=10000$ und $p=0.05$ das Schwankungsintervall $[0;4]$.

5.2.6. ES: Test für die Richtigkeit des Expected Shortfall

Der Test für die Richtigkeit des Expected Shortfall basiert darauf, dass die standardisierten ES-Abweichungen: $ES A_t := \frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^p)}{\hat{\sigma}_{t|t-1}}$ in den Tagen mit VaR-Überschreitung (unter der Nullhypothese einer richtigen Prognoseverteilung $\widehat{F}_{t|t-1} = F_{t|t-1}$ für $t = 1, \dots, T$ und eines richtigen Expected Shortfall $\widehat{ES}_{t|t-1}^p = ES_{t|t-1}^p$ für $t = 1, \dots, T$) unabhängig identisch mit Erwartungswert 0 verteilt sind. Es wird anschließend ein Zero-Mean Test angewandt, entweder der t-Test (TT) oder ein Bootstrapping-Test (BT) nach Efron und Tibshirani (1994, S. 224)¹⁹⁰. Bei Richtigkeit der Prognose mittels der Innovation gilt:

$$r_t | \mathcal{F}_{t-1} = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t \epsilon_t.$$

Es gilt außerdem:

$$\widehat{ES}_{t|t-1}^p = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t ES_p(\epsilon). \text{ Dadurch ergibt sich:}$$

$$\frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^p)}{\hat{\sigma}_{t|t-1}} = \epsilon_t - ES_p(\epsilon), \text{ was offensichtlich unabhängig identisch ver-}$$

teilt ist mit bedingtem Erwartungswert 0 bei Bedingen auf $r_t < \widehat{VaR}_{t|t-1}^p = \hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t Q_p(\epsilon) \Leftrightarrow \epsilon_t < Q_p(\epsilon)$, wobei ϵ_t der im Modell angenommenen Verteilung folgt.

Bei Richtigkeit der FHS-Prognose erhält man analog¹⁹¹:

$$ES A_t = \frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^p)}{\hat{\sigma}_{t|t-1}} = Z_t - ES_p^{FHS-K}, \text{ wobei die } Z_t \text{ näherungsweise}$$

¹⁹⁰Die Idee für die Anwendung dieses Tests stammt von McNeil et al. (2005, S. 163). Einen anderen Test findet man in Kerkhof und Melenberg (2004).

¹⁹¹ Z_t wird wie im Abschnitt 5.1.3 definiert: eine diskrete Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion gleich der empirischen Verteilungsfunktion der K zurückliegenden standardisierten Residuen $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-K}$.

identisch verteilt sind. Damit sind die Abweichungen ESA_t näherungsweise identisch mit bedingtem Erwartungswert 0 bei Bedingungen auf $r_t < \widehat{VaR}_{t|t-1}^p = \widehat{\mu}_t + \widehat{\sigma}_t Q_p^{FHS-K} \Leftrightarrow Z < Q_p^{FHS-K}$. Analog ist auch bei Richtigkeit der FEVT-Prognose der Ausdruck $\frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^p)}{\widehat{\sigma}_{t|t-1}}$ identisch verteilt mit bedingtem Erwartungswert 0.

Durch das Überlappen von den jeweils K letzten ϵ_i 's entstehen bei der FHS oder FEVT-Methode Abhängigkeiten. Der t-Test und der Bootstrapping-Test werden auch in dieser Situation angewandt. Da für diese Tests nur die ES-Abweichungen bei VaR-Überschreitung betrachtet werden, wird die Abhängigkeit der standardisierten ES-Abweichungen geschwächt, da die VaR-Überschreitungen in der Regel in größeren Abständen (Sollsituation: durchschnittlich einmal in 20 oder 100 Tagen) stattfinden. Welche Natur hat die Abhängigkeit der standardisierten ES-Abweichungen? Es könnte von einer positiven Kovarianz von standardisierten ES-Abweichungen mit überlappenden FHS-Zeitfenstern ausgegangen werden: intuitiv, wenn ein großer positiver Ausreißer ϵ_i zu verzeichnen ist, dann wird die Verteilung von Z_t dadurch nach rechts verschoben bis der Ausreißer aus der Stichprobe verschwindet (der $-ES_p^{FHS-K}(\epsilon)$ -Term ändert sich in der Regel nicht durch positive Ausreißer, da sie nicht unter den kleinsten 5% (1%) des FHS-Zeitfenster sind). Bei negativen Ausreißern ist zunächst nicht klar, ob tendenziell Z_t oder ES_p stärker fällt. Eine Simulation mit $\epsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ hat jedoch bestätigt, dass standardisierte ES-Abweichungen mit überlappenden FHS-Zeitfenstern positiv korreliert sind, mit Verringerung der Korrelation bei einer Vergrößerung des Abstands zwischen den ES-Abweichungen. So hat sich die Korrelation bei benachbarten ES-Abweichungen (z.B. Korrelation 0.0534 bei $K = 100$ und $p = 0.05$; 0.0229 bei $K = 300$, $p = 0.05$; 0.0758 bei $K = 300$, $p = 0.01$; 0.0119 bei $K = 500$, $p = 0.05$; 0.0421 bei $K = 500$, $p = 0.01$) auf 0 beim Abstand K reduziert.

Allgemein führt die Anwendung eines t-Tests auf positiv korrelierte Stichprobenvariablen dazu, dass der in der Teststatistik verwendete Schätzer für die Varianz des Stichprobenmittels nach unten verzerrt ist, so dass die t-Statistik dem Betrag nach zu groß ausfällt und somit die Nullhypothese zu oft verworfen wird, wenn H_0 gilt. Wenn also der t-Test bei der Anwendung auf die standardisierten ES-Abweichungen zur Annahme der Nullhypothesen führt, kann eine etwaige positive Korrelation der ES-Abweichungen sicher nicht die Ursache sein.

Verwerfungen der Nullhypothese sind dagegen bei FHS und FEVT mit Vorsicht zu genießen.

Ungeachtet der geringfügigen Abhängigkeiten, die im Fall der FHS und FEVT vorliegen können, wird (ggf. näherungsweise) für beide Tests von einer einfachen Stichprobe ZE_1, \dots, ZE_n zu einer Zufallsvariable ZE_0 ausgegangen und es wird die Nullhypothese $E(ZE_0) = 0$ überprüft.

Der übliche t-Test hat die Teststatistik $t = \frac{ZE_0}{S_{ZE_0}} \sqrt{n}$ ¹⁹², die unter der Nullhypothese approximativ $t(n-1)$ -verteilt ist.

Der Bootstrapping-Test nach Efron und Tibshirani (1994, S. 224) geht wie folgt vor: Zunächst wird die Stichprobe um den Mittelwert bereinigt, d.h. es wird der Mittelwert abgezogen: $ZE_i^1 = ZE_i - Z\bar{E}_0$. Anschließend werden von der Stichprobe ZE_i^1 100000 neue Stichproben je Umfang n (mit Zurücklegen) gezogen. In jeder Stichprobe wird die t-Teststatistik gebildet, somit entstehen 100000 Zahlen. Es wird der Anteil dieser Zahlen kleiner gleich $-|t|$ oder größer gleich $|t|$ ermittelt, wobei t die t-Teststatistik der ursprünglichen Stichprobe bezeichnet. Dieser Anteil ist der p-Wert des Bootstrap-Tests.

Bei der in der MCMC-Schätzung integrierten Prognose werden die beiden Tests (t-Test und Bootstrapping-Test) analog auf die standardisierten ES-Abweichungen angewandt, obwohl in diesem Fall (auch näherungsweise) keine analytische Begründung für die Unabhängigkeit oder die identische Verteilung der standardisierten ES-Abweichungen gegeben ist. In diesem Fall könnte so argumentiert werden: Falls als Nullhypothese $\widehat{ES}_{t|t-1}^p = ES_{t|t-1}^p$ und $\widehat{VaR}_{t|t-1}^p = VaR_{t|t-1}^p$ gelten, dann gilt:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^\alpha)}{\widehat{\sigma}_{t|t-1}} \mid r_t < VaR_t\right) &= E\left(\frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1}^\alpha)}{E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1})} \mid r_t < VaR_t\right) = \\ &= \frac{1}{E(E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}))} E(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1} | r_t < VaR_t) = \frac{1}{E(E(\sigma_t | \mathcal{F}_{t-1}))} (E(r_t | r_t < VaR_t) - \widehat{ES}_{t|t-1}) = 0. \end{aligned}$$

Der bedingte Erwartungswert sollte dann unter der Nullhypothese 0 sein.

5.2.7. Untersuchung der ganzen Prognoseverteilung mittels Anpassungstests

Die Untersuchung der ganzen Prognoseverteilung basiert auf Diebold et al. (1998) und Crnkovic und Drachman (1996). Sei $\hat{F}_{t|t-1}$ die Prognoseverteilung von r_t gegeben die Information bis zum Zeitpunkt $t-1$. Das Verfahren von Crnkovic und Drachman (1996) und Diebold et al. (1998) überprüft die Hypothese $\hat{F}_{t|t-1} = F_{t|t-1}$ für $t = 1, \dots, n$ anhand der Stichprobenrealisationen $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Crnkovic und Drachman (1996) nehmen an, dass $F_{t|t-1}$ für

¹⁹²Dabei bezeichnet $S_{ZE_0}^2$ die Stichprobenvarianz von ZE_1, \dots, ZE_n .

$t = 1, \dots, n$ stetig sind¹⁹³. Es werden keine weiteren Annahmen bezüglich der Gestalt der Verteilungsfunktionen $F_{t|t-1}$ gemacht. Es wird insbesondere nicht verlangt, dass $F_{t|t-1} = F$ für $t = 1, \dots, n$. Das stellt auf den ersten Blick ein Problem dar: zu jeder Verteilungsfunktion $F_{t|t-1}$ wird eine einzige Beobachtung r_t entgegengestellt. Die Idee von Crnkovic und Drachman (1996) ist, die Rosenblatt-Transformation¹⁹⁴ durchzuführen, um die einzelnen Beobachtungen aggregieren zu können. Die Rosenblatt-Transformation geht wie folgt vor: mit Hilfe der geschätzten Verteilungsfunktion $\hat{F}_{t|t-1}$ transformiert man die Beobachtung r_t in $u_t = \hat{F}_{t|t-1}(r_t)$. Es lässt sich zeigen, dass die Zufallsvariablen U_t , $t = 1, \dots, n$ unabhängig identisch gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind, wenn $\hat{F}_{t|t-1} \equiv F_{t|t-1}$ für $t = 1, \dots, n$. Im Folgenden wird die Gleichverteilung bewiesen. $Pr(F_{t|t-1}(r_t) \leq z)$ ist offensichtlich gleich 0, wenn $z < 0$ und gleich 1 wenn $z > 1$, da $F_{t|t-1}(r_t) \in [0, 1]$. Für $z \in [0, 1]$ gilt $Pr(F_{t|t-1}(r_t) \leq z | \mathcal{F}_{t-1}) = Pr(r_t \leq F_{t|t-1}^{-1}(z) | \mathcal{F}_{t-1}) = F_{t|t-1}(F_{t|t-1}^{-1}(z)) = z$. Crnkovic und Drachman (1996) untersuchen die Hypothese $U_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, 1)$ und zwar separat die Unabhängigkeit und die Gleichverteilung. Für die Unabhängigkeit verwenden sie den BDS-Test (Brock-Dechert-Scheinkman¹⁹⁵) und für Testen der Gleichverteilung wird der Kuipers-Test verwendet. Diebold et al. (1998) bevorzugen eine visuelle Darstellung durch ein Histogramm der Realisierungen u_t mit Angabe der Konfidenzintervallgrenzen zum Niveau 0.95 für die Balkenhöhe. Beim 20-Balken-Diagramm sollte durchschnittlich ein Balken die 0.95-Konfidenzintervallgrenzen durchbrechen, und beim 100-Balken-Diagramm 5 Balken. In der vorliegenden Arbeit wird die visuelle Darstellung kombiniert mit einem χ^2 -Anpassungstest auf Gleichverteilung verwendet. Der χ^2 -Anpassungstest klassiert zunächst die u_t -Realisationen in 20 oder 100 gleich breite Klassen (Breite 0.05 oder 0.01). Die absolute Häufigkeit unter der Nullhypothese ist bei den Stichprobengrößen von mindestens 2000 in jeder Klasse größer 5, also ist die Näherung für die Verteilung der Teststatistik an die $\chi^2(20 - 1)$ oder $\chi^2(100 - 1)$ angemessen.

5.2.8. Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen

Zum Zusammenfassen der Backtesting-Ergebnisse habe ich folgende Tabelle entwickelt, in der jeweils ein Punkt in ein Feld eingetragen wird, wenn der entsprechende Test die Nullhypothese eines richtigen VaR- oder ES-Modells annimmt:

¹⁹³Das Verfahren wird für die FHS-Prognose nicht benutzt, da dort die Prognoseverteilung eigentlich diskret ist.

¹⁹⁴Vgl. Rosenblatt (1952).

¹⁹⁵Für Details sei auf Brock et al. (1996) verwiesen.

Daten	Modell	ZF	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
...										
...										

Dabei bezeichnen

- ZF Das glättende, zur Schätzung herangezogene Zeitfenster, üblicherweise 500. Näheres dazu wurde im Abschnitt 4.6.6 geschildert.
- LR_{PF} Likelihood Test zur Korrektheit des Anteils der VaR-Überschreitungen (Sollwerte für den Anteil 0.05 und 0.01). Sei I_t die binäre ÜberschreitungsvARIABLE (ja/nein). LR_{PF} und LR_{ind} überprüfen die Hypothese unabhängig Bernoulli-verteilter $I_t, I_t \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, 0.05)$: LR_{PF} überprüft $H_0 : I_t \sim B(1, 0.05)$ gegen $H_1 : I_t \sim B(1, p)$ mit $p \neq 0.05$. Quelle :Christoffersen (1998). Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.1 geschildert.
- V1: Ein Test zur Korrektheit der folgenden Varianz: von der binären Reihenfolge der VaR-Überschreitungen jeweils Cluster zu 250 (1 Handelsjahr) bilden und die Anzahl E250 der jährlichen Überschreitungen in jedem Cluster bilden. Anschließend die Varianz der resultierenden Reihe bilden. Soll-Erwartungswert bei $p = 0.05$: 11.875 (das ist die Varianz der B(250,0.05)-Verteilung). Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.2 geschildert.
- V2: Ein Test zur Korrektheit der folgenden Varianz: von der binären Reihenfolge der VaR-Überschreitungen jeweils Cluster zu 125 (ein halbes Handelsjahr) bilden und die Anzahl E125 der halbjährlichen Überschreitungen in jedem Cluster bilden. Anschließend die Varianz der resultierenden Reihe bilden. Soll-Erwartungswert bei $p = 0.05$: 5.9375 (das ist die Varianz der B(125,0.05)-Verteilung). Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.2 geschildert.
- V3: Ein Test zur Korrektheit der folgenden Varianz: : von der binären Reihenfolge der VaR-Überschreitungen jeweils Cluster zu 500 (2 Handelsjahre) bilden und die Anzahl E500 der zweijährigen Überschreitungen in jedem Cluster bilden. Anschließend die Varianz der resultierenden Reihe bilden. Soll-Erwartungswert bei $p = 0.05$: 23.75 (das ist die Varianz der B(500,0.05)-Verteilung). Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.2 geschildert.

- LB1: Konstruktion wie bei V1, nur wird hier die Unabhängigkeit der 250-geclusterten Reihe gemessen mittels eines Ljung Box Tests zum Lag 5. Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.3 geschildert.
- LB2: Konstruktion wie bei V2, nur wird hier die Unabhängigkeit der 125-geclusterten Reihe gemessen mittels eines Ljung Box Tests zum Lag 5. Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.3 geschildert.
- LB3: Konstruktion wie bei V3, nur wird hier die Unabhängigkeit der 500-geclusterten Reihe gemessen mittels eines Ljung Box Tests zum Lag 5. Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.3 geschildert.
- LR_{ind} : Unabhängigkeitstest für die binäre Reihe der VaR-Überschreitungen (Quelle Christoffersen (1998)). Sei I_t die binäre Folge der Überschreitungen (ja/nein). LR_{PF} und LR_{ind} überprüfen die Hypothese $I_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, 0.05)$: LR_{ind} überprüft die Unabhängigkeit in der iid-Aussage. Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.4 geschildert.
- N111: Ein weiterer Unabhängigkeitstest :In der binären Folge der VaR-Überschreitungen (ja/nein) die Anzahl der benachbarten 111-Kombinationen zählen. Sollwert: 1.25, Test basiert auf Simulation. Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.5 geschildert.
- ES: Ein Test für die Richtigkeit des Expected Shortfall: Basiert auf Bootstrapping und testet die Nullhypothese von einem Zero-Mean der ES-Überschreitungen-Reihe. (Unverzerrtheit der ES-Prognose) Die Idee für diesen Test stammt von McNeil et al. (2005, S. 163). Näheres dazu wurde im Abschnitt 5.2.6 geschildert.

Weiter wird eine Ergebnis-Tabelle mit ausführlicheren Informationen angegeben.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$...
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$...;...
Var(E250);V1;LB1;acf	...;...;...;...
Var(E125);V2;LB2;acf	...;...;...;...
Var(E500);V3;LB3;acf	...;...;...;...
$LR_{ind}; LR_{cc}$...;...
n111;95%-Intervall H_0	...;...
mean(VaR) [%]	...
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	...;...;...;...

Dabei bezeichnet $\text{Var}(E250), \text{Var}(E125), \text{Var}(E500)$ die Varianzen bei Tests V1, V2 und V3. Soll-Erwartungswerte für die drei Varianzen sind $N \cdot 0.05 \cdot (1 - 0.05)$ mit $N=250, 125, 500$ für den 0.05/0.95-VaR und $N \cdot 0.01 \cdot (1 - 0.01)$ mit $N=250, 125, 500$ für den 0.01/0.99-VaR. Das wären 11.875, 5.9375 und 23.75 für die 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für 0.01/0.99-VaR. Neben diesen Varianzen werden die entsprechenden p-Werte (gewonnen durch Simulation) dargestellt. Generell wird bei Angabe eines Tests in der Tabelle der entsprechende p-Wert angegeben. Neben diesen Varianzen und p-Werte stehen die p-Werte aus Tests LB1, LB2 und LB3 sowie die signifikant von Null verschiedenen Lags der Autokorrelationsfunktion. (Lags mit signifikant negativer Autokorrelation werden in Klammern angezeigt.) In der nächsten Zeile stehen die p-Werte der LR_{ind} und LR_{cc} -Tests. n_{111} ist die Anzahl der benachbarten 111-Tupel in der binären Folge der Überschreitungen. Es wird hier auch das Schwankungsintervall für diese Anzahl unter der Nullhypothese von unabhängig identisch $B(1, p)$ -verteilten Elementen der binären Folge angegeben. Unter $\text{mean}(\text{VaR})$ wird der Mittelwert der VaR-Prognosen angezeigt. Die Angabe ist in Prozent, da bereits die Renditen als prozentuale Renditen berechnet werden. $\text{mean}(\text{VaR})$ sollte (alles andere gleich) betragsmäßig möglichst klein sein, damit die Eigenkapitalunterlegung des betreffenden Kreditinstituts möglichst gering ausfällt. In der letzten Zeile $\text{mean}(\text{ESA}), \text{sd}(\text{ESA})$ wird Folgendes angezeigt: Für die Tage mit VaR-Überschreitung ($r_t < \widehat{VaR}_{t|t-1}$) wird der realisierte Shortfall-Bias berechnet und durch die geschätzte Tages-Standardabweichung standardisiert: $ESA = \frac{(r_t - \widehat{ES}_{t|t-1})}{\widehat{\sigma}_{\varepsilon|t-1}}$. Es wäre interessant die Standardabweichung der gestutzten Standardnormalverteilung (gestutzt auf dem Intervall $(-\infty, z_\alpha)$) für $\alpha = 0.01, 0.05$ zu berechnen. Eine Verwendung der Formel in Johnson und Kotz (1970, S. 83) liefert $\text{Var}(\varepsilon | \varepsilon < z_\alpha) = \text{Var}(\varepsilon | \varepsilon > z_{1-\alpha}) = 1 - \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha} (z_\alpha + \frac{\phi(z_\alpha)}{\alpha})$. Damit erhält man ein $\text{sd}(\text{ESA})$ von 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$. Anschließend werden die p-Werte des t-Tests (TT) und des Bootstrapping Tests (BT) angezeigt.

Eine weitere Tabelle fasst die Backtesting-Ergebnisse der Untersuchung der ganzen Verteilung (siehe Abschnitt 5.2.7) zusammen:

Daten	Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
...
...

Dabei wird bei angenommener Nullhypothese in ein Feld ein Punkt eingetragen (oder es wird der p-Wert angegeben). Die Idee stammt von Diebold et

al. (1998), sie bevorzugen eine visuelle Darstellung (die wird in der vorliegenden Arbeit auch angezeigt), räumen jedoch die Möglichkeit auch für formale Tests ein. Solch ein Test ist z.B. der Anpassungstest, der in dieser Dissertation angewandt wird.

5.3. Daten

Im Abschnitt zur empirischen Anwendung und im nächsten Kapitel werden folgende Daten aus den Finanzmärkten verwendet:

1. Dow Jones Industrial Average Index (USA) 12000 tägliche Renditen für die Periode 26.02.1964-25.10.2011. Quelle der Tages-Schlusskurse: Datastream im Februar-März 2012.
2. Dow Jones Industrial Average Index (USA) 5500 tägliche Renditen für die Periode 03.01.1990-25.10.2011: Teilmenge der Zeitreihe 1.
3. Dow Jones Industrial Average Index (USA) 3000 tägliche Renditen für die Periode 23.11.1999-25.10.2011: Teilmenge der Zeitreihen 1 und 2.
4. Standard and Poors 500 Index (USA) : Hochfrequenz-Intratagesdaten (1 Minute- Frequenz) für 2762 Tage für die Periode 11.11.1997-07.11.2008 ohne die Tagen 26.11.1997, 05.01.1998, 12.10.1998 und 14.1.1999 (da die entsprechenden Tage nicht enthalten wurden). Quelle: Datatrading. Aus den Daten wurden die täglichen Renditen sowie die Realized-Volatility für die enthaltenen Tage berechnet.
5. Standard and Poors 500 Index (USA): Tagesrenditen für 5579 Tage für die Periode 03.01.1990-23.02.2012. Quelle der Tages-Schlusskurse: Datastream im Februar-März 2012.
6. CBOE Volatility Index (VIX): Tageswerte für 5580 Tage für die Periode 02.01.1990-23.02.2012. Quelle: Datastream im Februar-März 2012.
7. DAX Index (Deutschland): Tagesrenditen für 5908 Tage für die Periode 02.11.1988-21.03.2012; Quelle der Tages-Schlusskurse: Datastream im März 2012.
8. Boeing - Einzelaktie (BA) (USA): Tagesrenditen für 5500 Tage für die Periode 03.01.1990-25.10.2011; Quelle der Tages-Schlusskurse: Datastream im Juli 2012. Quelle der Dividenden/Splits-Information: Homepage von Boeing

9. Hewlett Packard - Einzelaktie (HPQ) (USA): Tagesrenditen für 5191 Tage für die Periode 24.12.1991-30.07.2012; Quelle der Tages-Schlusskurse: Datastream im Juli 2012. Quelle der Dividenden/Splits-Information: Homepage von Hewlett Packard
10. Brent Oil Europe -Rohstoff (BO) Tagesrenditen für 5500 Tage für die Periode 22.02.1990-25.10.2011; Quelle der Tages-Schlusskurse: Homepage von EIA U.S. Energy Information Administration.
11. GBP/USD Währungskurs Tagesrenditen für 5500 Tage für die Periode 14.12.1989-25.10.2011; Quelle: Federal Reserve Board Öffentliche Internet Seite.
12. USD/JPY Währungskurs Tagesrenditen für 5500 Tage für die Periode 14.12.1989-25.10.2011; Quelle: Federal Reserve Board Öffentliche Internet Seite.

Die (prozentualen) Tagesrenditen werden durch die Formel $r_t = 100(\ln(P_t) - \ln(P_{t-1}))$ berechnet, wobei P_t den Tagesschlusskurs des Tages t bezeichnet. Für 2 der Zeitreihen (HPQ und BA) werden die angepassten Schlusskurse berechnet, bereinigt um Splits und Dividenden. Seien die (historischen, nicht bereinigten) Schlusskurse P_1, P_2, \dots, P_n und seien $dvd_{t_1}, dvd_{t_2}, \dots, dvd_{t_d}$ die (nicht-Split-bereinigten) Dividenden mit Ex-Daten¹⁹⁶ $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_d \leq n$ und $spl_{t_1^*}, spl_{t_2^*}, \dots, spl_{t_s^*}$ die Splitverhältnisse¹⁹⁷ für die Splits an Tagen $1 \leq t_1^* < t_2^* < \dots < t_s^* \leq n$. Dann wird ein Split-Ratio sr folgendermaßen gebildet: Zunächst wird $sr[n] = 1$ gesetzt und dann wird (für $i = n-1, n-2, \dots, 1$) $sr[i] = sr[i+1]$ gesetzt solange am Tag $i+1$ kein Split da war und $sr[i] = sr[i+1] \cdot spl_{i+1}$ falls am Tag $i+1$ ein Split war. Anschließend wird ein Dividenden-Ratio dr folgendermaßen berechnet: es wird $dr[n] = 1$ gesetzt und dann (für $i = n-1, n-2, \dots, 1$) $dr[i] = dr[i+1]$ gesetzt solange am Tag $i+1$ kein Ex-Datum einer Dividende da war und $dr[i] = dr[i+1] \cdot (1 - \frac{dvd_{i+1}}{P_i})$ falls der Tag $i+1$ ein Dividenden-Ex-Datum war. Anschließend werden die bereinigten Schlusskurse $P_1^b, P_2^b, \dots, P_n^b$ nach der Formel $P_i^b = P_i \cdot sr[i] \cdot dr[i]$ berechnet¹⁹⁸.

Die Realized-Volatility Zeitreihe aus den Daten im Punkt 4 wurde durch den Two-Scale-Realized-Volatility (TSRV) Schätzer von Zhang et al. (2005)

¹⁹⁶Das Ex-Datum einer Dividende ist das erste Datum, an dem die Aktie ohne Anrecht auf die Dividende verkauft wird.

¹⁹⁷Falls z.B. aus einer alten Aktie zwei neue entstehen, beträgt das Splitverhältnis 0.5.

¹⁹⁸Der beschriebene Algorithmus wurde leicht modifiziert, da die Schlusskurse vom Datastream bereits Split-bereinigt kommen (jedoch nicht Dividenden-bereinigt).

berechnet. Dieser Schätzer hat Vorteile gegenüber dem traditionellen RV-Schätzer. Er hat keinen Microstructure-Noise-Bias (z.B. wegen bid-ask-Spreads)¹⁹⁹, der problematisch ist bei der traditionellen Realized Volatility²⁰⁰. Der übliche Ausweg bei Realized Volatility ist eine niedrigere Frequenz zu benutzen, z.B. 5 Minuten anstatt 1 Minute oder weniger. Der TSRV Schätzer konvergiert bei geeigneten Annahmen zur Quadratischen Variation und hat das Potenzial, mehr Daten (zu höheren Frequenzen) zu verwenden.

Der übliche Schätzer für die tägliche Quadratische Variation des Preisprozesses P_0 bis P_T ist²⁰¹ :

$$RV = \sum_{i=1}^{[T/\Delta]} (\ln P_{i\Delta} - \ln P_{(i-1)\Delta})^2$$

wobei $\Delta < T$ ein Zeitintervall ist mit den zu dieser Frequenz entsprechenden Preisen

$P_{0\Delta}, P_{1\Delta}, \dots, P_{[T/\Delta]\Delta}$, dabei ist $[\cdot]$ die Gauß-Klammer.

TSRV berechnet zunächst auch die RV anhand der vollen Zerlegung $P_{0\Delta}, P_{1\Delta}, \dots, P_{[T/\Delta]\Delta}$, bildet aber darüber hinaus K Teilstichproben: Stichprobe 0 $P_{0\Delta}, P_{K\Delta}, P_{2K\Delta} \dots, P_{[T/(K\Delta)]K\Delta}$ mit (Teil-)Realized Volatility RV^0 ,

Stichprobe 1 $P_{1\Delta}, P_{(K+1)\Delta}, P_{(2K+1)\Delta} \dots, P_{([(T-\Delta)/(K\Delta)]K+1)\Delta}$ mit entsprechender RV^1

usw. bis Stichprobe $K - 1$ mit entsprechender RV^{K-1} . Man berechnet TSRV dann durch folgende Formel²⁰²:

$$TSRV = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} RV^i - \frac{n-K+1}{Kn} RV, \text{ wobei } n = [T/\Delta].$$

Ich verwende für jeden Tag ein Intervall von $\Delta = 1 \text{ Minute}$ und eine Zerlegung in $K = 5$ Teilstichproben (vorgeschlagen in Takahashi et al. (2009)). Da als P_0 der Eröffnungskurs des Börsen-Tages genommen wird, wird durch TSRV (und RV) die Volatilität der vorangehenden Nicht-Handelszeiten (*non-trading hours*) nicht berücksichtigt.

Die folgende Tabelle zeigt deskriptive Statistiken zu den verwendeten Zeitreihen an.

¹⁹⁹Vgl. Takahashi et al. (2009, S. 2407).

²⁰⁰Vgl. Zhang et al. (2005, S. 1405).

²⁰¹Vgl. Cont (2010, S. 1495).

²⁰²Vgl. Zhang et al. (2005, S. 1396,1400).

Zeitreihe	Größe	Mittelwert	St.Abw.	Schiefe	Kurtosis	Min	Max
DJIA Renditen	12000	0.02237	1.0418	-1.2901	40.46632	-25.632	10.508
DJIA Renditen	5500	0.02594	1.1255	-0.15914	11.02283	-8.2	10.508
DJIA Renditen	3000	0.001805	1.2872	-0.04998	10.2298	-8.201	10.508
S&P 500 Renditen	2761	0.0002816	1.2731	-0.09674	10.9622	-9.4695	10.9572
S&P 500 Renditen	5579	0.02388	1.1833	-0.2308	11.4206	-9.4695	10.9572
VIX Index	5580	20.5598	8.252	1.9469	9.7506	9.31	80.86
DAX Renditen	5908	0.02853	1.4745	-0.2579	8.9294	-13.71	10.797
BA Renditen	5500	0.02811	1.9964	-0.3345	9.472	-19.389	14.378
HPQ Renditen	5191	0.02977	2.4991	-0.2267	10.1955	-22.348	18.99
BO Renditen	5500	0.0318	2.4076	-0.7316	17.8215	-36.121	18.13
GBP/USD Renditen	5500	5.58e-05	0.6128	-0.2962	7.2391	-4.966	4.435
USD/JPY Renditen	5500	-0.01167	0.6989	-0.5129	7.3252	-5.63	3.24

Tabelle 5.1.: Zusammenfassende Statistiken zu den Zeitreihen

5.4. Empirische Anwendung

Zunächst werden die detaillierten Ergebnisse dargestellt. Die kann man sich bei besonderem Interesse für ein bestimmtes SV-Modell ansehen. Alternativ kann der Leser sich auch entscheiden, direkt zum zusammenfassenden Abschnitt 5.5 dieses Kapitels überzuspringen. Die Ergebnisse werden bei jedem Modell gleich aufgebaut. Es werden zunächst die Ergebnisse aus der MCMC Simulation dargestellt, dann aus der Filtered Historical Simulation, dann aus der Filtered Extreme Value Theory und am Schluss die Ergebnisse mittels der Innovation-Prognose (alle diese Methoden wurden in den vier Unterabschnitten des Abschnitts 5.1 beschrieben). Unterhalb jeder Methode (außer FEVT, da hier nur die extremen Quantile geschätzt werden und nicht die ganze Prognoseverteilung) werden zunächst die Grafiken zur Richtigkeit der ganzen Prognoseverteilung angezeigt (bzw. der Gleichverteilung der Rosenblatt-transformierten Renditen; siehe Abschnitt 5.2.7). Anschließend werden je 4 Tabellen dargestellt- 005,001,095 und 099. Der Inhalt der Tabellen wurde in Abschnitt 5.2.8 erklärt. Die 005 und 001-Tabellen entsprechen dem 0.05 und 0.01-VaR/ES. Die Tabellen zu 095 und 099 beziehen sich auf das Risiko der Short-Position, sie zeigen die Ergebnisse des 0.05 und 0.01-VaR und ES der **negativen** nächsten Rendite an; bei einer stetigen Verteilung entsprechen diese den 0.95 und 0.99-Quantilen der Renditen-Prognoseverteilung. Es ist also zu beachten, dass diese Ergebnisse im Folgenden 0.95 und 0.99-VaR/ES genannt werden, obwohl streng genommen (bei einer diskreten Verteilung) dies die 0.05 und 0.01 VaR/ES der short-Position sind.

5.4.1. Modell 1, DJIA 10000 Renditen

Modell 1 wurde in Definition 3.1 eingeführt: Seien $r_t = 100(\ln X_t - \ln X_{t-1})$ die stetigen Renditen. Das klassische SV-Modell lautet:

$$r_t = \mu + \sigma_t \epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.13)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \gamma + \phi(\ln(\sigma_{t-1}^2) - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.14)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Das Modell wurde 10000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 10000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.01237667	0.04548223	0.08295009
γ	-0.6332673	-0.3081221	0.1326466
σ_η^2	0.02332372	0.02977217	0.04419985
ϕ	0.9063062	0.9462857	0.9668822

Tabelle 5.2.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 1

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

Die Erstellung der 2 Grafiken 5.1 und 5.2 wurde in Abschnitt 5.2.7 beschrieben. Die p-Werte zeigen an, ob die Nullhypothese der Gleichverteilung angemessen ist. Da die beiden p-Werte kleiner als 0.05 sind, wird die Nullhypothese verworfen, d.h. die durch Modell 1-MCMC generierte Prognoseverteilung ist nicht korrekt.

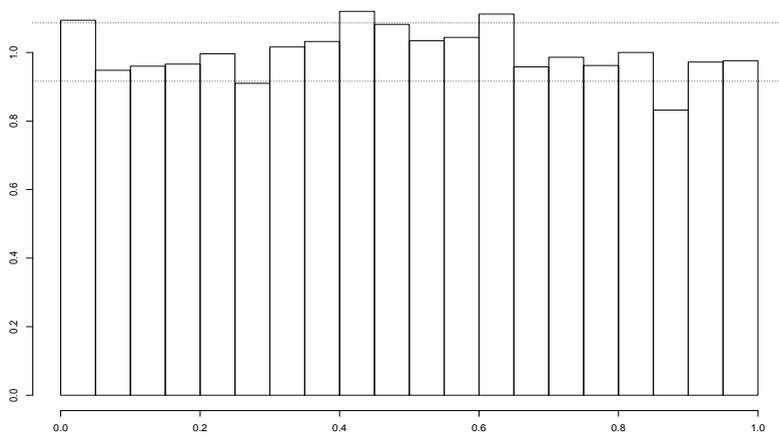


Abbildung 5.1.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert:0.0003916

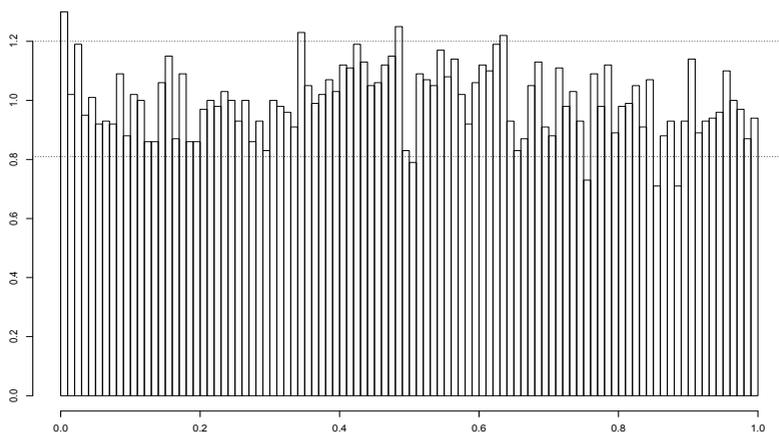


Abbildung 5.2.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert:0.005912

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	550
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.055; 0.0239
Var(E250);V1;LB1;acf	32.96; 0; 0.0166; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	11.40; 0; 0.004964; 1 (9,10)
Var(E500);V3;LB3;acf	82.58; 0; 0.3802; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0317; 0.00771
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.5542
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.125; 0.9323 ; 0.001778473; 0.00926

Tabelle 5.3.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC, ZF=500

Es ist ersichtlich, dass auch das 0.05-Quantil einzeln nicht korrekt durchs Modell 1-MCMC ermittelt wurde. Es sind zu viele VaR-Überschreitungen, die Varianzen der 250 (125,500) geclusterten Überschreitungen sind auch zu hoch. Von 9 VaR-Tests wird bei nur 2 die Nullhypothese angenommen. Auch der ES-Test verwirft die Nullhypothese. Es könnte dann davon ausgegangen werden, dass das Modell 1-MCMC bei der Dow Jones 10000 Stichprobe nicht korrekte VaR/ES liefert.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	133
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0133; 0.00159
Var(E250);V1;LB1;acf	7.76; 0; 0.0485; (5), 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.60; 0.00002; 0.00378; 1, 2, (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	23.397; 0; 0.2241; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3928; 0.00474
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.3638
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.339; 1.4354 ; 0.00739; 0.04111

Tabelle 5.4.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC, ZF=500

Ähnlich wie beim 0.05-VaR/ES ist auch die Richtigkeit des 0.01-VaR/ES des 1-MCMC Modells (bei diesem Datensatz) zu verwerfen.

Im Unterschied zu den 0.05/0.01 VaR/ES sind die 0.95-Ergebnisse (entsprechend dem 0.05-VaR/ES der negativen Renditen) ganz zufriedenstellend. Von allen Tests wird nur bei einem die Nullhypothese zum Signifikanzniveau 0.05 verworfen. Auch die Richtigkeit des Expected Shortfall kann nicht verworfen werden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	488
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0488; 0.5805
Var(E250);V1;LB1;acf	12.83; 0.7270; 0.3676; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.67; 0.44757; 0.7725; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	42.042; 0.0207; 0.6864; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5365; 0.70997
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6492
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0252; 0.5134 ; 0.2784; 0.28078

Tabelle 5.5.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	94
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0094; 0.5424
Var(E250);V1;LB1;acf	3.46; 0.09765; 0.9104; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.67; 0.05746; 0.5374; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.48; 0.11096; 0.6316; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3029; 0.4888
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4595
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.01853; 0.58598 ; 0.7598; 0.75756

Tabelle 5.6.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-MCMC, ZF=500

Auch die 0.99-Ergebnisse sind sehr gut- hier wird bei allen Tests die Nullhypothese (zum Signifikanzniveau 0.05) nicht verworfen. Die besseren Ergebnisse bei 0.95 und 0.99 im Vergleich zu 0.05 und 0.01 könnten darauf hinweisen, dass eine gewisse Asymmetrie in der Prognoseverteilung (eventuell linksschief) erwünscht wäre, damit auch die 0.05/0.01-Ergebnisse so gut wie die 0.95/0.99-Ergebnisse werden. Deshalb wurde Modell 11 von mir entwickelt mit schiefer t-Verteilung in der Renditen- und Volatilitätsgleichung.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (FHS-A)}$$

Hier wird die Standardabweichung aus der durch MCMC simulierten Prognoserendite verwendet²⁰³.

²⁰³Vgl. Abschnitt 5.1.3.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	550
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.055; 0.02386
Var(E250);V1;LB1;acf	14.96; 0.252; 0.1397; (5) 7
Var(E125);V2;LB2;acf	6.16; 0.8179; 0.3521; -
Var(E500);V3;LB3;acf	26.47; 0.7269; 0.7218; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0485; 0.0111
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.548559
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.258; 0.9298 ; 1.72e-10; 0

Tabelle 5.7.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	163
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0163; 6.5e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	5.76; 0.00009; 0.2736; -
Var(E125);V2;LB2;acf	2.82; 0; 0.6572; (9)
Var(E500);V3;LB3;acf	14.03; 0.00013; 0.7463; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0723; 9.6e-09
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.307109
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.; n.a.

Tabelle 5.8.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	481
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0481; 0.3804
Var(E250);V1;LB1;acf	13.56; 0.5358; 0.5629; -
Var(E125);V2;LB2;acf	6.42; 0.6185; 0.4856; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	31.63; 0.2966; 0.5688; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4838; 0.5337
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.656285
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.133; 0.5189 ; 3.2e-08; 0

Tabelle 5.9.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	138
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0138; 0.000305
Var(E250);V1;LB1;acf	2.97; 0.4099; 0.8072; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.62; 0.0899; 0.498; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.09; 0.491; 0.5905; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1784; 0.000593
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.325301
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.;

Tabelle 5.10.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-A-100, ZF=500

Die 0.05/0.01-FHS-A-100-Ergebnisse sind besser als beim 1-MCMC, sie lassen jedoch zu wünschen übrig. So verwerfen bei 0.05-FHS-A-100 gerade solche wichtigen Tests wie LR_{PF} (proportion-of-failures), LR_{ind} (Unabhängigkeit) und ES die Nullhypothese. Beim 0.01 VaR/ES werden zusätzlich die Varianzen zu hoch, um mit der Binomialverteilung vereinbar zu sein. Die 0.95/0.99-Ergebnisse sind wieder besser, jedoch wird hier bei 0.99-VaR beim LR_{PF} -Test die Nullhypothese verworfen, es sind zu viele VaR-Überschreitungen da. Anzumerken sind die NA-Angaben beim FHS-A-100-ES Test bei 0.01/0.99. Dies liegt daran, dass beim FHS-A-100-0.01/0.99-VaR der kleinste Wert von den 100 standardisierten Residuen für den VaR verwendet wird und es gibt keine Informationen über den (darüber hinausgehenden) Expected Shortfall.

c) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FHS-B)}$$

Hier wird für die Festlegung der Standardabweichung in der FHS Methode die Volatilität h_{t+1} verwendet²⁰⁴.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	589
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0589; 6.98e-05
Var(E250);V1;LB1;acf	15.59; 0.16515; 0.0206; (2,5) 7
Var(E125);V2;LB2;acf	6.74; 0.40519; 0.2541; (4)
Var(E500);V3;LB3;acf	24.47; 0.9259; 0.7831; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.14695; 1.27e-04
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.504362
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.28; 0.9358 ; 1.2e-12; 0

Tabelle 5.11.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	186
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0186; 1.15e-14
Var(E250);V1;LB1;acf	6.79; 0; 0.2089; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.08; 0; 0.8932; (9)
Var(E500);V3;LB3;acf	17.59; 0; 0.6686; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0872; 2.62e-14
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.241218
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a. ;

Tabelle 5.12.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100, ZF=500

Das Gesagte über die FHS im vorherigen Abschnitt gilt auch hier für alle Tabellen mit der einzigen Ausnahme dass die Nullhypothese des LR_{ind} -Tests beim 0.05-VaR angenommen wird. Die Anzahl der VaR-Überschreitungen wächst im Vergleich zum vorherigen Abschnitt, wo sie bereits zu hoch war.

²⁰⁴Vgl. Abschnitt 5.1.3.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	530
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.053; 0.1726
Var(E250);V1;LB1;acf	14.14; 0.40372; 0.5162; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.89; 0.32167; 0.4329; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	32.47; 0.24624; 0.3901; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8267; 0.3840
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.61231
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1448; 0.5304 ; 6.82e-10; 0

Tabelle 5.13.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	150
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0150; 2.88e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	2.76; 0.63831; 0.8569; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.60; 0.10914; 0.633; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.53; 0.72977; 0.599; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2847; 9.89e-06
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.26357
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a. ;

Tabelle 5.14.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FHS-B-100, ZF=500

d) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (FEVT-A)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	528
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0528; 0.2028
Var(E250);V1;LB1;acf	12.47; 0.8283; 0.2715; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.76; 0.8558; 0.8556; –
Var(E500);V3;LB3;acf	26.36; 0.7371; 0.9209; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.08095; 0.09663
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.580377
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2974; 0.954 ; 2.66e-12; 0

Tabelle 5.15.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	210
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.021; 0
Var(E250);V1;LB1;acf	5.94; 0.00005; 0.0498; (5) 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.79; 0; 0.7589; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.32; 0.0003; 0.4371; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2445; 0
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.098451
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4499; 1.239 ; 3.58e-07; 0.00118

Tabelle 5.16.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25, ZF=500

In diesem Abschnitt wird bei allen ES-Tests die Nullhypothese verworfen. Beim 0.05-VaR wird bei allen Tests die Nullhypothese nicht verworfen. Beim 0.01-VaR werden nur die (reinen) Unabhängigkeitstests bestanden, jedoch nicht die LR_{PF} und die Varianzen-Tests. Der Anteil der Überschreitungen ist hier größer als 0.02 bei dem Sollwert von 0.01. Auch die Varianzen der Überschreitungsanzahl über längere Perioden sind zu hoch. Bei allen VaR-Tests zum 0.95-VaR kann die Nullhypothese der Richtigkeit des VaR nicht verworfen werden. Der 0.99-VaR hat zu viele Überschreitungen und zu hohe Varianzen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	506
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0506; 0.7835
Var(E250);V1;LB1;acf	13.77; 0.4858; 0.289; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.37; 0.6552; 0.1791; (3) 9,16
Var(E500);V3;LB3;acf	27.59; 0.6212; 0.5554; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8992; 0.9547
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.624773
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1459; 0.5124 ; 3.46e-10; 0

Tabelle 5.17.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	158
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0158; 7.67e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	5.02; 0.00085; 0.1828; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.48; 0.00005; 0.3601; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.25; 0.1479; 0.8852; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3731; 3.57e-07
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.179786
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.3257; 0.527 ; 9.67e-13; 0

Tabelle 5.18.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-A-250k25, ZF=500

e) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FEVT-B)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	566
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0566; 0.00299
Var(E250);V1;LB1;acf	13.67; 0.5095; 0.3757; -
Var(E125);V2;LB2;acf	6.09; 0.87146; 0.9065; -
Var(E500);V3;LB3;acf	26.75; 0.7; 0.9683; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.07349; 0.002443
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.53536
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3217; 0.9565 ; 7.1e-15; 0

Tabelle 5.19.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	235
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0235; 0
Var(E250);V1;LB1;acf	6.42; 0.00003; 0.0514; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	2.89; 0; 0.8085; (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	15.67; 0.00004; 0.8422; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1634; 0
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.038947
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4581; 1.2151 ; 2.38e-08; 0.00034

Tabelle 5.20.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25, ZF=500

Das im vorherigen Abschnitt Gesagte gilt auch hier mit 2 Ausnahmen: Bei dem LR_{PF} -Test für den 0.05- und 0.95-VaR werden die Nullhypothesen verworfen. Generell wird die Anzahl der Überschreitungen deutlich höher.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	552
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0552; 0.0188
Var(E250);V1;LB1;acf	14.32; 0.3656; 0.3845; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.8; 0.3709; 0.3444; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	33.52; 0.1918; 0.5371; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.776; 0.0606
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.581692
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1601; 0.5258 ; 2.67e-12; 0

Tabelle 5.21.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	180
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.018; 4.88e-13
Var(E250);V1;LB1;acf	5.44; 0.00022; 0.4908; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.92; 0; 0.4543; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.63; 0.02858; 0.9386; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.6782; 4.1e-12
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.121658
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.3362; 0.5377 ; 1.42e-14; 0

Tabelle 5.22.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-FEVT-B-250k25, ZF=500

f) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und
 $\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$ (NORM-A)

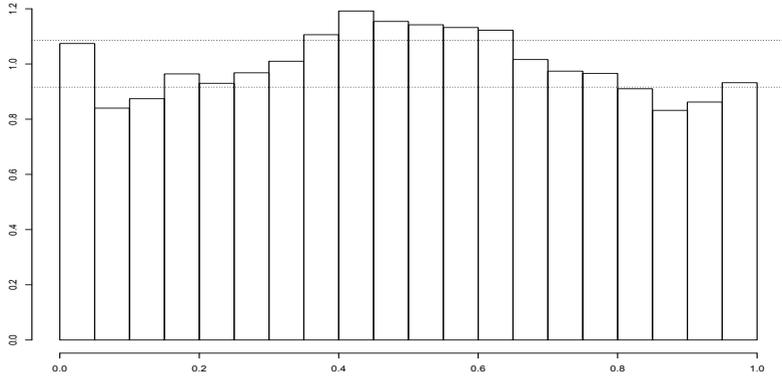


Abbildung 5.3.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500, KL=20); p-Wert=1.11e-16

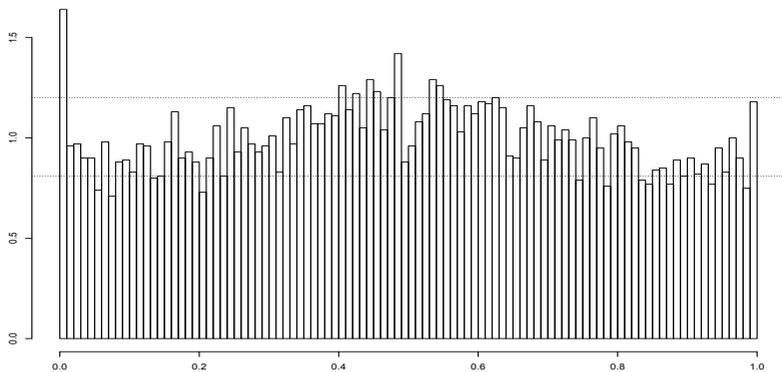


Abbildung 5.4.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500, KL=100); p-Wert=1.11e-16

Beide Abbildungen zeigen die Unangemessenheit der Prognoseverteilung. Auch die p-Werte deuten auf Verwerfung der Richtigkeit der Prognoseverteilung zum Signifikanzniveau 0.05.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	537
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0537; 0.0933
Var(E250);V1;LB1;acf	32.97; 0; 0.02622(5)
Var(E125);V2;LB2;acf	11.07; 0.00002; 0.004502; 1 (9, 10)
Var(E500);V3;LB3;acf	85.29; 0; 0.4445; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.08408; 0.05477
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.569186
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.224; 0.9372 ; 4.75e-08; 0.00012

Tabelle 5.23.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	164
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 3.89e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	8.76; 0; 0.07714; (5) 10
Var(E125);V2;LB2;acf	3.03; 0; 0.03572; 2 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	24.06; 0; 0.174; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.448; 2.2e-08
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.239168
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4616; 1.337 ; 0.0000178; 0.00569

Tabelle 5.24.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500

Alle ES-Tests verwerfen die Richtigkeit des ES in diesem Abschnitt. Von den 0.05-VaR-Tests wird die Nullhypothese nur beim LR_{PF} -Test und einigen der (reinen) Unabhängigkeitstests angenommen. Die Varianzen der Überschreitungszahlen sind zu hoch. Die Ergebnisse des 0.01-VaR sind ähnlich, mit der Ausnahme der verworfenen Nullhypothese beim LR_{PF} -Test. Der Anteil der VaR-Überschreitungen und die Varianzen der Überschreitungszahlen sind zu hoch. Beim 0.95-VaR-Niveau wird bei einem Varianzen-Test und beim 0.99-VaR-Niveau bei allen 3 Varianzentests die Nullhypothese verworfen, bei den restlichen VaR-Tests zu diesen beiden Niveaus kann die Nullhypothese nicht verworfen werden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	466
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0466; 0.1147
Var(E250);V1;LB1;acf	12.49; 0.8222; 0.287; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.83; 0.3533; 0.6747; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	41.27; 0.0247; 0.5804; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3897; 0.1998
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.66495
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0746; 0.5098 ; 0.001677; 0.00266

Tabelle 5.25.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	118
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0118; 0.0786
Var(E250);V1;LB1;acf	4.36; 0.00579; 0.5394; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.05; 0.00205; 0.3584; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10.2; 0.00644; 0.5334; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6245; 0.1885
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.334932
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.155; 0.5509 ; 0.00277; 0.0092

Tabelle 5.26.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-A, ZF=500

g) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (NORM-B)}$$

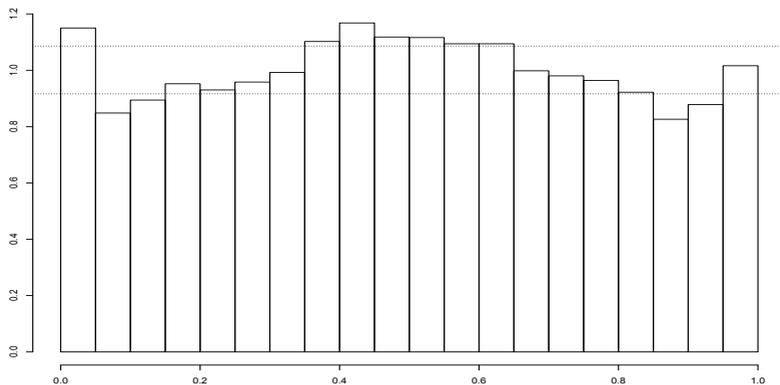


Abbildung 5.5.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500, KL=20); p-Wert=3.02e-13

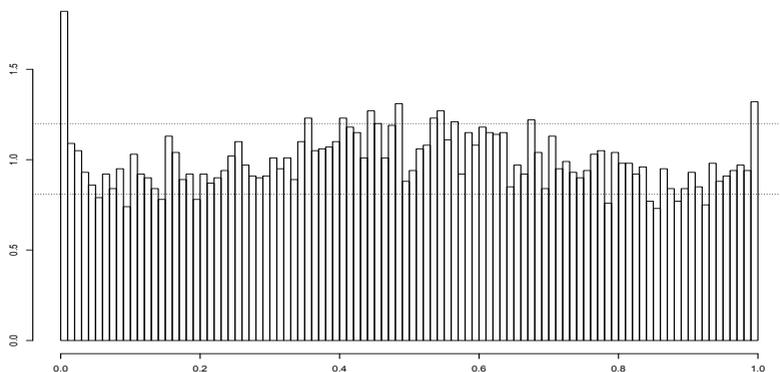


Abbildung 5.6.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500, KL=100); p-Wert=5.55e-16

Beide Abbildungen zeigen die Unangemessenheit der Prognoseverteilung als Ganzes. Insbesondere sind in den beiden extremen Enden der Verteilung zu viele Beobachtungen da, was auf die Notwendigkeit einer leptokurtischen Verteilung hindeutet.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	575
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0575; 0.000767
Var(E250);V1;LB1;acf	34.14; 0; 0.02409; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	12.00; 0; 0.01962; 1 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	86.72; 0; 0.5332; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.05344; 0.0005352
n111;95%-Intervall H_0	5; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.524715
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2484; 0.94154 ; 5.09e-10; 1e-05

Tabelle 5.27.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	182
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0182; 1.43e-13
Var(E250);V1;LB1;acf	10.87; 0; 0.05953; (5) 10
Var(E125);V2;LB2;acf	3.87; 0; 0.05906; –
Var(E500);V3;LB3;acf	31.04; 0; 0.1772; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3789; 9.109e-13
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.176272
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4721; 1.3155 ; 2.74e-06; 0.00213

Tabelle 5.28.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500

In diesem Abschnitt sind die Ergebnisse ganz ähnlich wie im vorherigen, mit 2 Ausnahmen: die Proportion-of-Failures Tests haben die Nullhypothese auch bei 0.05 und 0.99-VaR verworfen und zweitens, der N111-Test beim 0.05-VaR hat die Nullhypothese verworfen. Auch hier sieht man durch die Verwendung von $\exp(\widehat{h_{t+1}}/2)$ anstatt $sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$ eine deutliche Erhöhung der Anzahl der VaR-Überschreitungen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	508
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0508; 0.7143
Var(E250);V1;LB1;acf	13.55; 0.538; 0.4276; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.81; 0.36465; 0.6702; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	45.41; 0.01048; 0.8347; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4188; 0.6739
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.62048
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.09088; 0.521 ; 9.6e-05; 0.00034

Tabelle 5.29.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	132
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0132; 0.00217
Var(E250);V1;LB1;acf	4.52; 0.00375; 0.5072; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.13; 0.00111; 0.6935; –
Var(E500);V3;LB3;acf	9.83; 0.00941; 0.7145; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8468; 0.00891
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.272
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1758; 0.5567 ; 0.000408; 0.00274

Tabelle 5.30.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 1-NORM-B, ZF=500

h) Zusammenfassung SV-Modell 1

Insgesamt lässt sich bei Modell 1 festhalten, dass die beste Methode bei 0.05-VaR die FEVT-A-Methode war, bei 0.95 und 0.99 die MCMC Methode (hier war sogar der Expected Shortfall richtig) und beim 0.01-VaR keine der Methoden annehmbar ist.

5.4.2. Modell 2, DJIA 10000 Renditen

Modell 2 wurde in Definition 3.2 eingeführt.

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(0, 1) \quad (5.15)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \psi(h_{t-2} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.16)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s

Dieses Modell unterscheidet sich vom Modell 1 durch den zusätzlichen zweiten autoregressiven Term in der Volatilitätsgleichung.

Das Modell wurde 10000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 10000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.01193279	0.04487097	0.08118108
γ	-0.6547098	-0.3078262	0.1049261
σ_η^2	0.02894227	0.04214024	0.06898579
ϕ	0.4208988	0.5565538	0.6854117
ψ	0.09592966	0.28623126	0.42693765

Tabelle 5.31.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 2

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

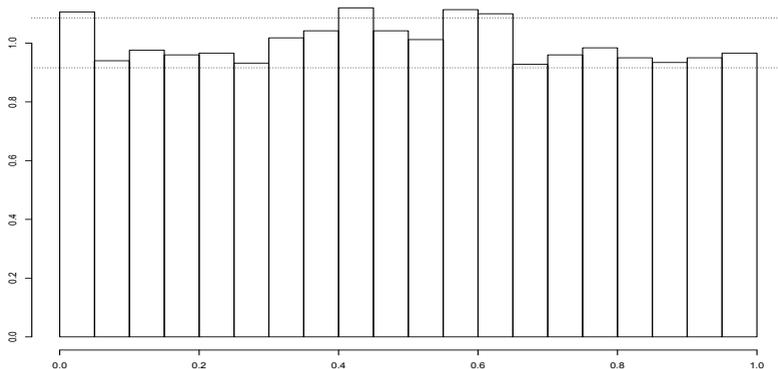
a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

Abbildung 5.7.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert: 0.002513

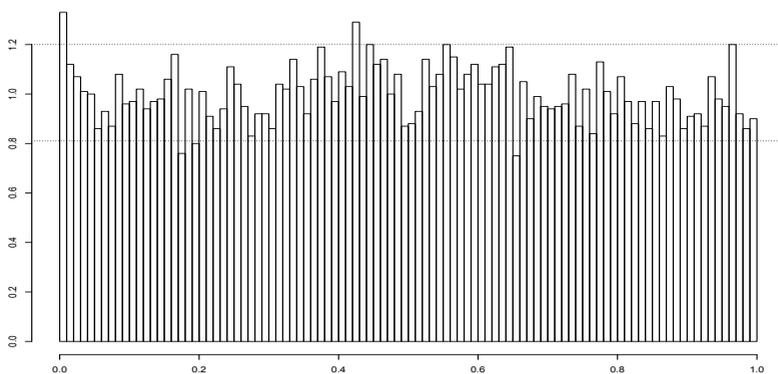


Abbildung 5.8.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert 0.04233

Die Chi-Quadrat-Anpassungstests zu den beiden Klassierungen verwerfen die Nullhypothese der Richtigkeit der Prognoseverteilung (als Ganzes) durch Modell 2-MCMC (bei 100 Klassen wird nur knapp zum Signifikanzniveau 0.05 verworfen). Ersichtlich ist die Notwendigkeit einer Prognoseverteilung mit dickerem linken Ende, damit sich im ersten Cluster nicht so viele Beobachtungen häufen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	554
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0554; 0.0148
Var(E250);V1;LB1;acf	33.21; 0; 0.0347; (5),10
Var(E125);V2;LB2;acf	12.07; 0; 0.0926; 1, (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	83.27; 0; 0.4807; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0596; 0.008656
n111;95%-Intervall H_0	4; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.557
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1341; 0.9392 ; 0.0008292; 0.0061

Tabelle 5.32.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	134
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0134; 0.0012
Var(E250);V1;LB1;acf	6.8; 0; 0.1878; (5), 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.58; 0; 0.2712; –
Var(E500);V3;LB3;acf	20.12; 0; 0.189; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0458; 0.0006932
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.3754
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3506; 1.4322 ; 0.0053; 0.0371

Tabelle 5.33.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC, ZF=500

Die Ergebnisse bei Modell 2-MCMC sind schlecht bei 0.05/0.01-VaR/ES und sehr gut bei 0.95/0.99-VaR/ES. Beim 0.05/0.01-VaR/ES führen außer einigen der Unabhängigkeitstests alle Tests zur Ablehnung. Das spricht deutlich für eine Verwerfung des Modells 2-MCMC im Bezug auf die Prognose des 0.05/0.01-VaR/ES. Die VaR-Überschreitungen sind zu hoch, die Varianzen auch. Der Expected Shortfall wird deutlich (ins Negative) überschritten. Beim 0.95/0.99-VaR/ES führen dagegen alle Tests zur Annahme der Nullhypothese (inkl. der ES-Tests) außer dem N111-Test beim 0.95-VaR. Die

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	483
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0483; 0.4329
Var(E250);V1;LB1;acf	11.81; 0.9832; 0.2506; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.04; 0.9185; 0.6262; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	36.13; 0.0961; 0.3666; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4351; 0.5432
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	5; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6526
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0194; 0.5323 ; 0.4242; 0.4268

Tabelle 5.34.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	90
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.009; 0.3066
Var(E250);V1;LB1;acf	3.06; 0.3236; 0.6009; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.6; 0.1057; 0.6881; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	6.05; 0.5073; 0.6533; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2603; 0.315
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4689
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.082; 0.6266 ; 0.2178; 0.2254

Tabelle 5.35.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-MCMC, ZF=500

Asymmetrie in den Ergebnissen der unteren und oberen Quantile deutet darauf hin, dass eine Asymmetrie in der Prognoseverteilung (etwa Linksschiefe) wünschenswert sein könnte. Solche Asymmetrie wird in das von mir vorgeschlagene Modell 11 eingebaut, und zwar indirekt durch eine Mischung von Inverse Gamma und Standardnormalverteilung. Eine direkte Modellierung einer schiefen Verteilung war in WinBUGS/OpenBUGS nicht möglich wegen der fehlenden Dichtefunktion zu einer solchen Verteilung.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	560
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.056; 0.0069
Var(E250);V1;LB1;acf	15.85; 0.1374; 0.0286; (5), 7
Var(E125);V2;LB2;acf	6.84; 0.3503; 0.5326; 6
Var(E500);V3;LB3;acf	28; 0.5823; 0.2392; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.0147; 0.001314
n111;95%-Intervall H_0	4; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.541
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2796; 0.9401 ; 5.71e-12; 0

Tabelle 5.36.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	176
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0176; 5.29e-12
Var(E250);V1;LB1;acf	7.22; 0; 0.1448; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.28; 0; 0.8744; –
Var(E500);V3;LB3;acf	17.43; 0; 0.7714; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.0174; 2.74e-12
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2857
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a. ; ; n.a. ;

Tabelle 5.37.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-100, ZF=500

Bei den 0.01/0.99 VaR/ES-Ergebnisse führen nur einige der Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese, dagegen sind zu viele Überschreitungen zu verzeichnen und zu hohe Varianzen der kumulierten Überschreitungszahlen. Die Ergebnisse für den 0.05- VaR/ES sind etwas besser, aber immer noch führen wichtige Tests wie LR_{PF} , LR_{ind} und ES zur Ablehnung der Nullhypothese. Die 0.95-VaR Ergebnisse sind sehr gut (alle VaR-Tests führen zur Annahme der Nullhypothese) hier lässt nur der ES-Test zu wünschen übrig. Der Expected Shortfall ist überall nicht korrekt, mit einer betragsmäßigen durchschnittlichen Überschreitung (weiter ins Negative beim 0.05-ES und weiter ins Positive beim 0.95/0.99-ES).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	508
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0508; 0.7143
Var(E250);V1;LB1;acf	12.83; 0.7267; 0.4435; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.43; 0.6083; 0.3675; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	24.88; 0.8834; 0.8319; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8062; 0.9067
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6325
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1477; 0.5366 ; 1.15e-09; 0

Tabelle 5.38.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	134
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0134; 0.0012
Var(E250);V1;LB1;acf	3.82; 0.0287; 0.469; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.27; 0.0003; 0.2933; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.91; 0.065; 0.848; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0026; 5.5e-05
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3033
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2689; 0.588 ; 4.80e-07; 2e-05

Tabelle 5.39.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FHS-250, ZF=500

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	540
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.054; 0.0698
Var(E250);V1;LB1;acf	14.82; 0.2744; 0.187; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	6.49; 0.566; 0.859; –
Var(E500);V3;LB3;acf	25.05; 0.8652; 0.7325; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0176; 0.0115
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	4; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.5729
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3186; 0.9635 ; 7.68e-14; 0

Tabelle 5.40.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	219
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0219; 0
Var(E250);V1;LB1;acf	7.49; 0; 0.1757; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	3.31; 0; 0.8333; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.37; 0; 0.8142; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0014; 0
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	2; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.0854
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4693; 1.2374 ; 6.02e-08; 0.00044

Tabelle 5.41.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-250k25, ZF=500

Bei Modell 2-FEVT führen alle ES-Tests zur Ablehnung der Nullhypothese. Der vom Modell 2-FEVT ermittelte Expected Shortfall hat im Schnitt betragsmäßig die ÜberschreitungsgroÙe unterschätzt, sowohl im negativen als auch im positiven Bereich. Beim VaR gibt es gemischte Ergebnisse: Beim 0.05-VaR führen alle Tests zur Annahme der Richtigkeit des VaR außer LR_{ind} . Beim 0.01-VaR führen nur die 3 Ljung-Box-Tests zur Annahme der Unkorreliertheit der Überschreitungen. Beim 0.95-VaR führen alle Tests zur Annahme der Nullhypothese der Richtigkeit vom VaR außer dem zweiten Ljung-Box-Test. Beim 0.99-VaR führen nur die Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese, die restlichen Ergebnisse sind schlecht.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	520
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.052; 0.3618
Var(E250);V1;LB1;acf	11.44; 0.8736; 0.2694; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.95; 0.9898; 0.0481; (3)
Var(E500);V3;LB3;acf	24.84; 0.8869; 0.3963; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.8468; 0.6462
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6279
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1588; 0.5292 ; 2.18e-11; 0

Tabelle 5.42.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	161
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0161; 1.78e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	4.54; 0.0036; 0.7166; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.57; 0; 0.811; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10.16; 0.0067; 0.9461; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.1764; 5.15e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.1803
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2945; 0.5637 ; 4.90e-10; 0

Tabelle 5.43.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-FEVT-500k50, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und
 $\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$

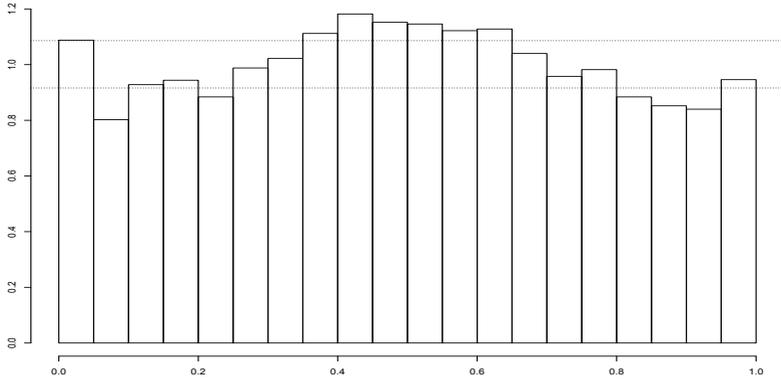


Abbildung 5.9.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-NORM, ZF=500, KL=20) (p-Wert: 0)

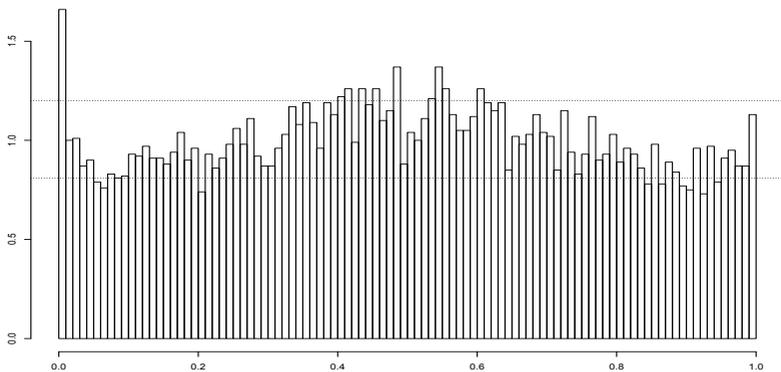


Abbildung 5.10.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 2-NORM, ZF=500, KL=100) (p-Wert: 5.55e-16)

Die Abbildungen und die Anpassungstests zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilung als Ganzes verworfen werden muss. Die Normalverteilung klingt auf der linken Flanke zu schnell ab, und es häufen sich zu viele Beobachtungen im jeweils ersten Cluster. Auf der rechten Seite dagegen scheint die Normalverteilung bei diesem Modell 2-NORM angemessen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	544
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0544; 0.0464
Var(E250);V1;LB1;acf	30.81; 0; 0.0465; (5),10
Var(E125);V2;LB2;acf	11.43; 0; 0.1683; 1, (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	79.22; 0; 0.5961; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0536; 0.0212
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.574
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2312; 0.9482 ; 2.12e-08; 0

Tabelle 5.44.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	166
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0166; 1.37e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	9.72; 0; 0.0949; (5),10
Var(E125);V2;LB2;acf	3.34; 0; 0.06; (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	28.75; 0; 0.3079; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0844; 2.4e-09
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2457
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4792; 1.3513 ; 9.57e-06; 0.0038

Tabelle 5.45.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM, ZF=500

Auch hier beim Modell 2-NORM führen alle ES-Tests zur Ablehnung der Nullhypothesen. Der Expected Shortfall wird wieder betragsmäßig unterschätzt. Die VaR-Ergebnisse sind wieder gemischt: beim 0.05-VaR führen nur die Unabhängigkeitstests, außer dem ersten Ljung-Box-Test, zur Annahme der Nullhypothese. Beim 0.01-VaR führen auch außer dem N111-Test nur die Unabhängigkeitstests zur Annahme. Beim 0.95-VaR haben alle VaR-Tests die Nullhypothese angenommen außer dem V3 und N111-Test. Beim 0.99-VaR haben alle Tests die Nullhypothese angenommen, außer den Varianz-Tests, bei

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	473
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0473; 0.2114
Var(E250);V1;LB1;acf	11.99; 0.9665; 0.265; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.18; 0.8008; 0.6148; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	39.08; 0.0424; 0.748; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3188; 0.2795
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	5; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6683
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0739; 0.5294 ; 0.0025; 0.0038

Tabelle 5.46.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	113
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0113; 0.2006
Var(E250);V1;LB1;acf	3.74; 0.0376; 0.4646; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.04; 0.0023; 0.7299; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	8.45; 0.0346; 0.6779; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1881; 0.1852
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.34
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2078; 0.5929 ; 0.0003064; 0.003

Tabelle 5.47.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 2-NORM, ZF=500

denen die Varianzen zu hoch sind. Die Varianzen sind bei allen VaR-Niveaus außer beim 0.95-VaR-Niveau zu hoch.

e) Zusammenfassung Modell 2

Um eine Vergleichbarkeit der Modelle im Bezug auf den Value-at-Risk zu gewährleisten, wird ein Strafpunkte-System eingeführt²⁰⁵. Die Strafpunkte werden etwas subjektiv vergeben, nach der von mir geschätzten Wichtigkeit der Tests. Der wichtigste Test ist meines Erachtens der LR_{PF} -Test, der überprüft ob der Anteil der VaR-Überschreitungen korrekt ist. Deshalb gewichte ich eine Verwerfung dieses Tests mit 3 Strafpunkten. Die Varianzen-Tests V1, V2 und V3 sind ebenfalls sehr wichtig, da diese Tests die richtige Anpassung des Value-at-Risk an die zeitvariierende Volatilität überprüfen. Für aufsichtsrechtliche Zwecke ist die jährliche Anzahl der VaR-Überschreitungen relevant und

²⁰⁵Vgl. Abschnitt 5.5 vor Tabelle 5.303.

es ist wichtig, dass diese Anzahl nicht zu viel streut, sonst wird in manchen Jahren der Value-at-Risk-Ansatz von der Aufsichtsbehörde verworfen. Deshalb vergebe ich jeweils 2 Strafpunkte für jede Verletzung von V1, V2 oder V3. Verwerfung eines Unabhängigkeitstests LB1, LB2, LB3, LR_{ind} oder N111 wird mit je 1 Punkt bestraft. Eine Verletzung des LR_{cc} -Test wird nicht bestraft, weil er implizit durch LR_{PF} und LR_{ind} bereits berücksichtigt wurde.

Die folgenden 2 Tabellen²⁰⁶ zeigen die Strafpunkte aufgeschlüsselt nach VaR-Niveau, Modell und VaR-Methode. Da im Modell 2 nur die A-Variante der FHS-, FEVT- und NORM-Methoden untersucht wurde, werden hier auch nur die A-Varianten des Modells 1 dargestellt.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	12	11	2	0	25
FHS	4	9	0	3	16
FEVT	0	10	0	7	17
NORM	8	10	2	6	26

Tabelle 5.48.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	11	1	0	22
FHS	5	11	0	10	26
FEVT	1	11	1	9	22
NORM	10	10	3	6	29

Tabelle 5.49.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 2: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Ein Vergleich der Gesamt-Strafpunkte für die 4 Methoden zeigt für Modell 2 (im Vergleich zu Modell 1) eine kleine Verbesserung bei der MCMC Methode und eine Verschlechterung bei den anderen 3 Methoden.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass der zweite autoregressive Term in der Volatilitätsgleichung wenig gebracht hat.

²⁰⁶Vgl. Tabelle 5.303 im Abschnitt 5.5.

5.4.3. Modell 3, DJIA 5000 Renditen

Modell 3 wurde in Definition 3.3 eingeführt. Das Modell lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.17)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.18)$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_{t+1} \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Im Unterschied zum Modell 1 werden hier ϵ_t und η_{t+1} als korreliert modelliert (Korrelationskoeffizient ρ). Somit wird (bei $\rho < 0$) der sogenannte Leverage Effekt modelliert.

Das Modell wurde 5000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 5000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.001032809	0.033865588	0.065903497
γ	-0.9263418	-0.3256038	0.2142868
σ_η^2	0.021447164	0.030067636	0.046975024
ϕ	0.9231245	0.9513235	0.9778947
ρ	-0.78237211	-0.69251788	-0.51370016

Tabelle 5.50.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 5000, SV-Modell 3

Der Parameterschätzer für ρ ist negativ in 99.96% aller 5000 Schätzungen, im Einklang mit dem Leverage-Effekt. Bei den restlichen 2 Schätzungen ist der realisierte Schätzer für ρ gleich 0.00141 bzw. 0.01459.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

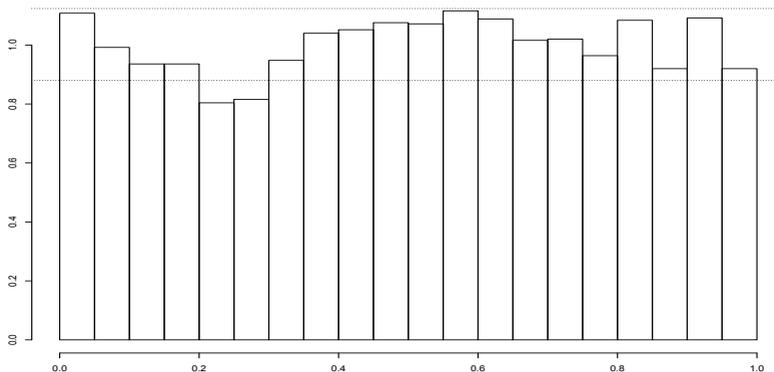
a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

Abbildung 5.11.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.002892

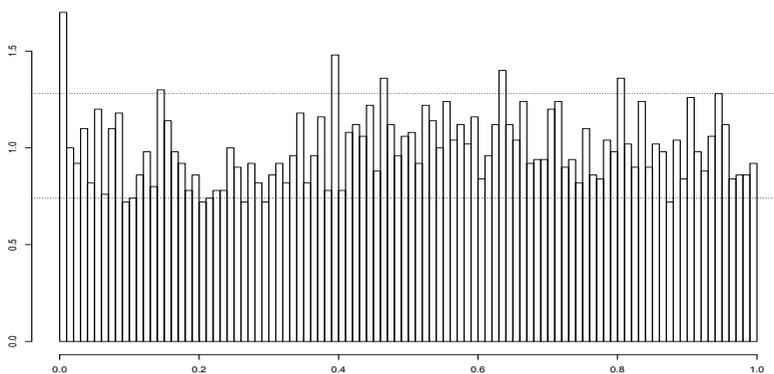


Abbildung 5.12.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=5.62e-06

Die Anpassungstests verwerfen die Richtigkeit der Prognoseverteilungen. Die Abbildungen deuten darauf hin, dass die Form des linken Teils der Prognoseverteilung nicht in Ordnung zu sein scheint. Diese Verteilung klingt zu schnell auf der linken Seite ab, so dass viele transformierte Beobachtungen im ersten Cluster landen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	277
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0554; 0.0848
Var(E250);V1;LB1;acf	29.71; 0.00052; 0.172; –
Var(E125);V2;LB2;acf	10.94; 0.00153; 0.3052; –
Var(E500);V3;LB3;acf	76.68; 0.00061; 0.08156; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.6494; 0.2031
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.58314
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.18297; 0.7001 ; 0.00001921; 0.00926

Tabelle 5.51.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	86
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0172; 3.46e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	8.64; 0.00003; 0.3539; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.797; 0.00043; 0.1362; –
Var(E500);V3;LB3;acf	27.6; 0.00001; 0.3822; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.679; 0.00001913
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.35374
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2485; 0.7629 ; 0.0033294; 0.01078

Tabelle 5.52.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Hier wird die Richtigkeit des Expected Shortfall nur bei 0.95-Var/ES angenommen. Der 0.05/ 0.01-ES wird wieder betragsmäßig unterschätzt, allerdings (anders als bei den vorher betrachteten Modellen) wird der 0.99-ES betragsmäßig überschätzt (und der 0.95-ES ist in Ordnung). Nun zum Value-at-Risk. Auf dem 0.05-VaR-Niveau führen alle VaR-Tests zur Annahme der Nullhypothese außer den Varianzen-Tests V1,V2 und V3. Für den 0.01-VaR wird nur die Unabhängigkeit bestätigt, der Anteil der VaR-Überschreitungen und die Varianzen der Überschreitungen sind zu hoch. Zu den VaR-Niveaus 0.95/0.99 führen alle VaR-Tests zur Annahme der Nullhypothese.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	230
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.046; 0.1886
Var(E250);V1;LB1;acf	13.21; 0.73076; 0.02484; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.37; 0.68042; 0.6256; –
Var(E500);V3;LB3;acf	37.78; 0.18194; 0.2733; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.221; 0.2001
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.64583
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.05035; 0.3889 ; 0.05076; 0.05209

Tabelle 5.53.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	46
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0092; 0.5644
Var(E250);V1;LB1;acf	1.379; 0.1828; 0.1738; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.05; 0.56185; 0.6193; 8
Var(E500);V3;LB3;acf	4.04; 0.70057; 0.7165; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3553; 0.553
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.418167
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1986; 0.28322 ; 0.00002063; 0.00055

Tabelle 5.54.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (FHS-A)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	263
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0526; 0.4027
Var(E250);V1;LB1;acf	12.98; 0.7768; 0.9072; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.097; 0.1114; 0.6046; –
Var(E500);V3;LB3;acf	25.1; 0.9039; 0.2773; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2501; 0.3627
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.641745
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2052; 0.6885 ; 2.29e-06; 2e-05

Tabelle 5.55.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	70
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.014; 0.00734
Var(E250);V1;LB1;acf	3.95; 0.07411; 0.2026; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.42; 0.57993; 0.4631; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.67; 0.09185; 0.6622; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1585; 0.01014
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.467988
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.118; 0.9783 ; 0.3163; 0.32094

Tabelle 5.56.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250, ZF=500

Bei dieser Variante vom Modell 3-FHS wird der Expected Shortfall nur zum 0.01-ES Niveau angenommen. Bei den restlichen Niveaus wird der Expected Shortfall betragsmäßig unterschätzt- die tatsächlichen Ergebnisse waren extremer als der berechnete Expected Shortfall. Beim Value-at-Risk erzielt diese Variante des 3-FHS-Modells exzellente Ergebnisse- da werden alle VaR-Tests zu allen VaR-Niveaus angenommen außer den 0.01-VaR- LR_{PF} - und 0.01-VaR- LR_{cc} -Tests. Zu beachten ist, dass beim 0.01-VaR der Anteil der Überschreitungen 0.014 bei einem Sollwert von 0.01 ist, die Nullhypothese wird nur wegen des großen Stichprobenumfangs (5000) verworfen. Falls in einem Jahr $0.014 \cdot 250 = 3.5$ Überschreitungen auftauchen, ist das laut dem

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	255
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.051; 0.7464
Var(E250);V1;LB1;acf	12.72; 0.83; 0.6954; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.29; 0.8002; 0.7351; –
Var(E500);V3;LB3;acf	41.83; 0.082; 0.6965; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.1176; 0.2786
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.591625
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0812; 0.4142 ; 0.001953; 0.00254

Tabelle 5.57.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	63
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0126; 0.07573
Var(E250);V1;LB1;acf	1.92; 0.50631; 0.9858; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.64; 0.20056; 0.2208; 8
Var(E500);V3;LB3;acf	3.34; 0.48727; 0.6226; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.2047; 0.0922
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.294797
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1437; 0.3675 ; 0.00287; 0.00408

Tabelle 5.58.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-A-250, ZF=500

Baseler-Ampel-Konzept in der grünen Zone (Vgl. Tabelle 2.1) und man muss aufsichtsrechtlich gar keine Maßnahmen ergreifen. Nur haben wir hier in der Stichprobe nicht ein Jahr, sondern 20 Jahre.

c) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FHS-B)}$$

Der Expected Shortfall wird nur beim Niveau 0.01 angenommen. Die VaR-Ergebnisse sind schlechter als bei der ersten 3-FHS-Variante. Der Anteil der Überschreitungen wächst bei allen VaR-Niveaus. Beim 0.05-VaR-Niveau bleiben die Ergebnisse sehr gut, hier führen alle VaR-Tests zur Annahme der Nullhypothese. Beim 0.01-VaR führen die LR_{PF} , LR_{cc} V1 und V3-Tests zur Ablehnung, beim 0.95-VaR-Niveau führt der LR_{ind} -Test zur Ablehnung.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	275
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.055; 0.11013
Var(E250);V1;LB1;acf	14.19; 0.54994; 0.7807; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.16; 0.10147; 0.6257; –
Var(E500);V3;LB3;acf	28.28; 0.68939; 0.285; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1986; 0.1215
$n111; 95\%-Intervall H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.609291
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2242; 0.7024 ; 2.46e-07; 0.00001

Tabelle 5.59.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	76
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0152; 0.000598
Var(E250);V1;LB1;acf	4.59; 0.02047; 0.2673; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.73; 0.12099; 0.725; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10.93; 0.023; 0.6702; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1256; 0.0008511
$n111; 95\%-Intervall H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.419792
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1314; 0.9846 ; 0.2482; 0.2508

Tabelle 5.60.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	271
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0542; 0.1786
Var(E250);V1;LB1;acf	12.26; 0.92199; 0.6926; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.46; 0.72707; 0.8028; –
Var(E500);V3;LB3;acf	39.88; 0.12043; 0.562; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0451; 0.05414
$n111; 95\%-Intervall H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.561722
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0923; 0.431 ; 0.0004944; 0.00087

Tabelle 5.61.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	68
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0136; 0.0153
Var(E250);V1;LB1;acf	2.36; 0.88496; 0.9026; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.7; 0.14174; 0.2311; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.4; 0.82318; 0.8129; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1708; 0.0206
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.251357
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1731; 0.3813 ; 0.000378; 0.00096

Tabelle 5.62.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FHS-B-250, ZF=500

Beim 0.99-VaR-Niveau führen die LR_{PF} und LR_{cc} -Tests zur Ablehnung der Nullhypothese. Die besseren Ergebnisse der ersten FHS-Variante haben dazu geführt, dass ich bei den meisten SV-Modellen nur diese Variante erforscht habe. Schon diese A-Variante führt zu einer erhöhte Anzahl der Überschreitungen. Die B-Variante führt zu einer noch größeren Anzahl der Überschreitungen und wird nur zur Verschlechterung der Ergebnisse führen.

d) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$ (FEVT-A)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	269
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0538; 0.223
Var(E250);V1;LB1;acf	14.37; 0.5172; 0.8269; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.28; 0.3238; 0.5127; –
Var(E500);V3;LB3;acf	30.1; 0.572; 0.2716; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3436; 0.3027
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.630611
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2281; 0.6845 ; 1.05e-07; 1e-05

Tabelle 5.63.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20, ZF=500

Hier wird die Richtigkeit des Expected Shortfall bei allen Niveaus verworfen. Beim Value-at-Risk führen alle Tests zu den 0.05/0.95-VaR zur Annahme

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	94
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0188; 2.49e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	4.33; 0.0332; 0.3462; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.87; 0.0491; 0.2585; –
Var(E500);V3;LB3;acf	14.71; 0.00275; 0.497; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8614; 1.75e-07
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.281617
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3835; 0.8133 ; 1.49e-05; 0.00031

Tabelle 5.64.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	259
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0518; 0.5614
Var(E250);V1;LB1;acf	10.05; 0.64; 0.5949; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.28; 0.6331; 0.1524; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	35.88; 0.2559; 0.3835; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3047; 0.4979
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.59412
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1201; 0.4081 ; 3.58e-06; 1e-05

Tabelle 5.65.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	82
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 0.0000313
Var(E250);V1;LB1;acf	3.46; 0.2338; 0.9397; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.84; 0.0588; 0.8975; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.51; 0.2563; 0.9887; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.09816; 4.35e-05
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.121246
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2064; 0.3491 ; 7.86e-07; 2e-05

Tabelle 5.66.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-A-250k25, ZF=500

der Nullhypothese. Die 0.01/0.99-VaR Ergebnisse sind schlechter- beim 0.01-VaR führen nur die Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese während beim 0.99-VaR der LR_{PF} - und der LR_{cc} -Test zur Ablehnung führen. Alle Tests werden mit einem Signifikanzniveau von 0.05 durchgeführt.

e) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$$\widehat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FEVT-B)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	282
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0564; 0.0417
Var(E250);V1;LB1;acf	15.67; 0.31995; 0.8105; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.51; 0.05906; 0.5343; –
Var(E500);V3;LB3;acf	32.18; 0.44285; 0.2186; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4149; 0.08955
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.59844
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.243; 0.7008 ; 1.57e-08; 0

Tabelle 5.67.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	98
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0196; 1.64e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	4.94; 0.01141; 0.2794; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.15; 0.0117; 0.226; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.62; 0.00086; 0.5487; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.954; 1.26e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.236863
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4279; 0.8137 ; 1.08e-06; 6e-05

Tabelle 5.68.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20, ZF=500

Hier sind die Ergebnisse qualitativ ähnlich zum vorherigen Abschnitt, mit einer einzigen Ausnahme: der LR_{PF} -Test beim 0.05-VaR führt hier zur Ablehnung der Nullhypothese. Die Anzahl der VaR-Überschreitungen ist hier bei allen VaR-Niveaus höher.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	277
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0554; 0.0848
Var(E250);V1;LB1;acf	11.08; 0.83866; 0.7529; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.71; 0.86736; 0.2533; –
Var(E500);V3;LB3;acf	39.12; 0.14003; 0.7086; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1251; 0.06947
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.564304
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1296; 0.4234 ; 6.55e-07; 0

Tabelle 5.69.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	89
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0178; 5.89e-07
Var(E250);V1;LB1;acf	3.31; 0.32089; 0.9759; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.97; 0.02799; 0.8036; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.99; 0.37564; 0.8903; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.07245; 7.57e-07
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.081216
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2321; 0.364 ; 4e-08; 2e-05

Tabelle 5.70.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-FEVT-B-250k25, ZF=500

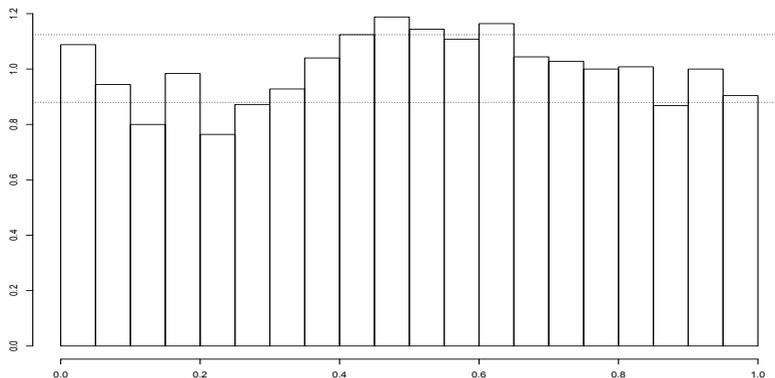
f) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und
 $\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$ (NORM-A)

Abbildung 5.13.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500, KL=20); p-Wert=2.51e-07

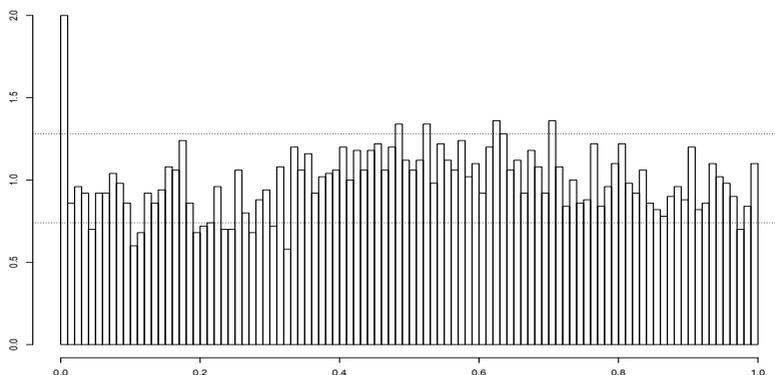


Abbildung 5.14.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500, KL=100); p-Wert=2.33e-09

Bei beiden Klassierungen wird die Richtigkeit der Prognoseverteilung als Ganzes verworfen. Es fällt die Überschreitung im untersten Perzentil der transformierten Renditeverteilung auf.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	272
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0544; 0.159
Var(E250);V1;LB1;acf	28.99; 0.00065; 0.2384; –
Var(E125);V2;LB2;acf	10.57; 0.00267; 0.2764; –
Var(E500);V3;LB3;acf	75.07; 0.00077; 0.1569; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5434; 0.3069
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.594497
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2557; 0.6958 ; 4.52e-09; 0

Tabelle 5.71.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	100
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.02; 3.95e-10
Var(E250);V1;LB1;acf	11.16; 0; 0.2287; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.85; 0; 0.07827; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	34; 0; 0.4412; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5009; 2.51e-09
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.267898
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3328; 0.7287 ; 1.43e-05; 0.00078

Tabelle 5.72.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall zu den oberen Niveaus 0.95/0.99 angenommen und zu den unteren 0.05/0.01 verworfen. Dies deutet erneut darauf hin, dass die Normalverteilungsannahme vor allem für das untere Ende der Verteilung nicht angemessen ist. Darauf deuten auch die VaR-Ergebnisse hin. Bei den oberen Niveaus 0.95/0.99 führen alle VaR-Tests zur Annahme der Nullhypothese, während im unteren Bereich die Ergebnisse deutlich schlechter sind. Hier führen die V1, V2 und V3 Tests zur Ablehnung beim 0.05/0.01-VaR und darüber hinaus der LR_{PF} -Test beim 0.01-VaR.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	226
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0452; 0.1137
Var(E250);V1;LB1;acf	13.38; 0.7009; 0.01072; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.52; 0.7623; 0.3213; –
Var(E500);V3;LB3;acf	40.93; 0.0979; 0.2783; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.0597; 0.0489
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.656141
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0179; 0.3882 ; 0.4888; 0.4899

Tabelle 5.73.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	55
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.011; 0.4843
Var(E250);V1;LB1;acf	1.57; 0.2772; 0.07087; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.27; 0.9229; 0.16; 8
Var(E500);V3;LB3;acf	4.06; 0.713; 0.6658; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.2686; 0.4242
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.329542
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0277; 0.2936 ; 0.4865; 0.48599

Tabelle 5.74.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-A, ZF=500

g) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und
 $\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2)$ **(NORM-B)**

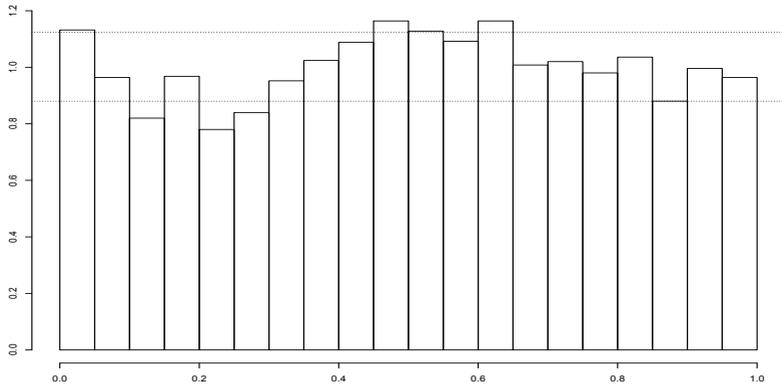


Abbildung 5.15.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500, KL=20); p-Wert=7.11e-06

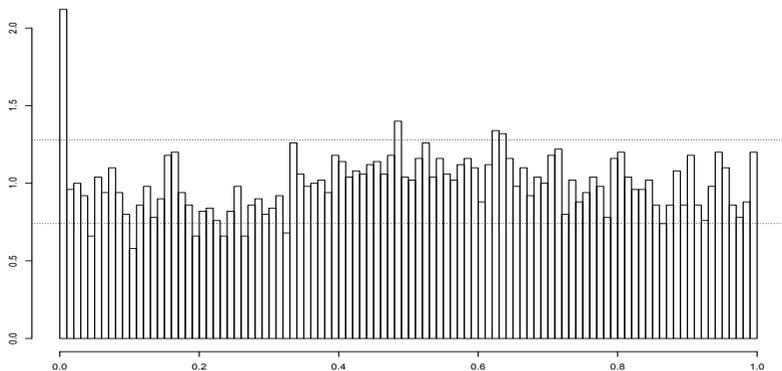


Abbildung 5.16.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500, KL=100); p-Wert=8.37e-09

Die Angaben über die Abbildungen des letzten Abschnittes treffen auch hier voll zu, mit der Anmerkung, dass hier der erste Cluster bereits im 20-Balken Diagramm überfüllt ist. Dies kommt durch die kleinere Varianz der Prognoseverteilungen in diesem im Vergleich zum letzten Abschnitt²⁰⁷

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	283
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0566; 0.0358
Var(E250);V1;LB1;acf	35.29; 0.00003; 0.1661; –
Var(E125);V2;LB2;acf	12.12; 0.00022; 0.1056; –
Var(E500);V3;LB3;acf	90.23; 0.00006; 0.1336; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5959; 0.09532
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.563204
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2777; 0.7089 ; 2.18e-10; 0

Tabelle 5.75.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	106
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0212; 4.4e-12
Var(E250);V1;LB1;acf	12.54; 0; 0.08563; 1
Var(E125);V2;LB2;acf	4.34; 0; 0.01603; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	40.49; 0; 0.3959; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6251; 3.42e-11
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.22364
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3579; 0.7367 ; 2.29e-06; 0.00016

Tabelle 5.76.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500

Hier sind die Ergebnisse ganz ähnlich wie im letzten Abschnitt mit 2 Ausnahmen: hier führen auch der LR_{PF} -Test beim 0.05-VaR und der LB2-Test beim 0.01-VaR zur Ablehnung der Nullhypothese. Es ist anzumerken, dass bei der B-Variante die Prognosevarianz ($\hat{\sigma}_{t+1}^2$) kleiner ist als bei der A-Variante, und das schlägt sich in betragsmäßig kleineren Werten für mean(VaR) nieder.

²⁰⁷Die Varianz $\hat{\sigma}_{t+1}$ ist bei der B-Variante tendenziell kleiner als bei der A-Variante. Die Varianz der A-Variante berücksichtigt zusätzlich die MCMC-Variabilität des Absolutgliedparameters der Renditengleichung.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	241
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0482; 0.5569
Var(E250);V1;LB1;acf	11.10; 0.84415; 0.1019; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.79; 0.40055; 0.7097; –
Var(E500);V3;LB3;acf	32.54; 0.42423; 0.362; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2396; 0.4223
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.624848
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0306; 0.4035 ; 0.24016; 0.24175

Tabelle 5.77.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	60
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.012; 0.1682
Var(E250);V1;LB1;acf	2.21; 0.75612; 0.1614; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.54; 0.34193; 0.541; 8
Var(E500);V3;LB3;acf	5.33; 0.88409; 0.747; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2273; 0.1863
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.285284
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.001822; 0.3117 ; 0.964; 0.9638

Tabelle 5.78.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, SV-Modell 3-NORM-B, ZF=500

e) Zusammenfassung Modell 3

Die folgenden 2 Tabellen zeigen die Strafpunkte²⁰⁸ aufgeschlüsselt nach Modell (1 oder 3), VaR-Niveau (0.05, 0.01, 0.95 oder 0.99) und VaR-Methode. Um eine Vergleichbarkeit Modell 1 vs. Modell 3 zu gewährleisten wird hier auch für Modell 1 die kleinere Stichprobe von 5000 DJIA Renditen untersucht.

Zusammenfassend ist eine Verbesserung der Ergebnisse im Modell 3 im Vergleich zum Modell 1 zu beobachten. Die Berücksichtigung eines Leverage-Effekts und die damit verbundene asymmetrische Reaktion der Renditeverteilung führt offenbar zu einer Verbesserung der Ergebnisse.

²⁰⁸Auf Nachfrage kann der Autor die Ergebnisse jedes einzelnen der 9 Tests (Annahme oder Ablehnung) zuzüglich des ES-Tests zur Verfügung stellen.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	9	5	1	25
FHS-A	0	7	0	0	7
FHS-B	5	9	0	0	14
FEVT-A	3	9	0	5	17
FEVT-B	5	9	0	5	19
NORM-A	11	9	4	1	25
NORM-B	9	9	0	1	19

Tabelle 5.79.: VaR-Strafpunkte DJIA 5000, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	6	9	0	0	15
FHS-A	0	3	0	0	3
FHS-B	0	7	1	3	11
FEVT-A	0	9	0	3	12
FEVT-B	3	9	0	5	17
NORM-A	6	9	0	0	15
NORM-B	9	10	0	0	19

Tabelle 5.80.: VaR-Strafpunkte DJIA 5000, SV-Modell 3: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

5.4.4. Modell 4, DJIA 10000 Renditen

Modell 4 wurde in Definition 3.4 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + s_t q_t + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.19)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.20)$$

mit $q_t \sim B(1, \kappa)$, $\ln(1 + s_t) \sim N(-\delta^2/2, \delta^2)$ und ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s

Der einzige Unterschied zum Modell 1 ist der $s_t q_t$ -Term in der Renditengleichung, also ein zufälliger Jump in Höhe von s_t (mit Erwartungswert 0), der mit einer Wahrscheinlichkeit von κ eintritt. Das Modell wurde 10000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 10000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.01263047	0.04550887	0.08277342
γ	-0.6824591	-0.3153161	0.1261498
σ_η^2	0.02338360	0.02963347	0.04431326
ϕ	0.9071056	0.9474943	0.9671294
κ	0.4942519	0.5111439	0.5286260
δ	0.06672832	0.07225804	0.07808161

Tabelle 5.81.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 4

Die Tabelle zeigt, dass κ in 50 % der Schätzungen zwischen 0.4943 und 0.5286 liegt. Die kleinste Schätzung für κ (in der Tabelle nicht angezeigt) ist 0.4138, die größte 0.9040. In der Literatur werden kleinere Werte für κ berichtet²⁰⁹. Das liegt daran, dass in der Literatur der Parameter μ meistens weggelassen wird (oder wird als Null angenommen). Wenn man den Parameter μ vom Modell weglässt, sinken auch hier die geschätzten Werte für κ erheblich und entsprechen in etwa den Werten in der Literatur.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für

²⁰⁹Vgl. Hautsch und Ou (2008, S. 5), wo Werte zwischen 0.00368 und 0.0176 für $\hat{\kappa}$ berichtet werden.

$\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

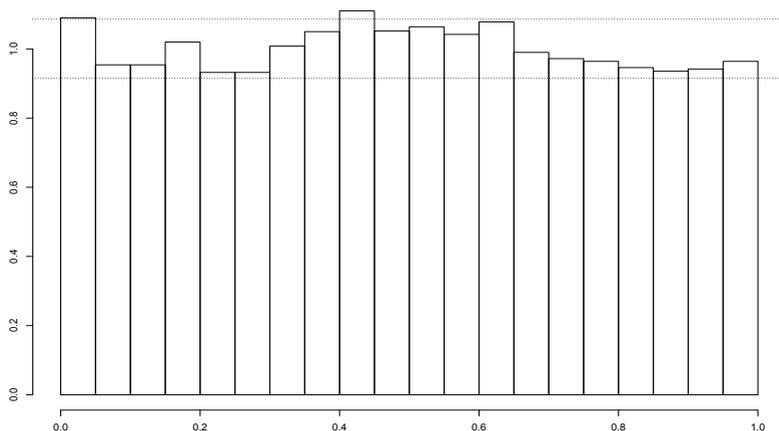


Abbildung 5.17.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.02692

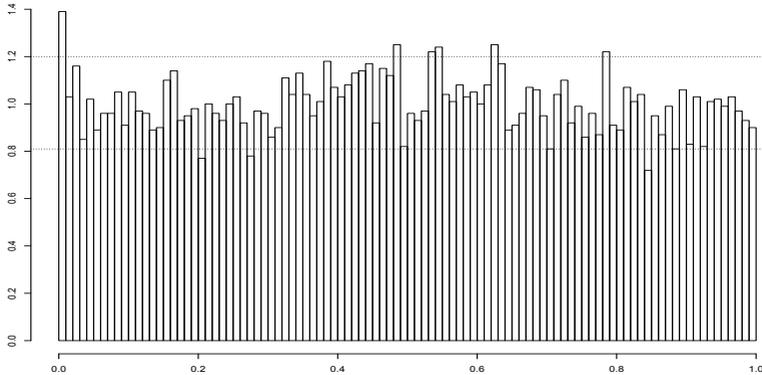


Abbildung 5.18.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.007812

Für beide Klassierungen wird die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	546
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0546; 0.03742
Var(E250);V1;LB1;acf	29.67; 0.000002; 0.05124; (5),10
Var(E125);V2;LB2;acf	10.25; 0.00011; 0.01767; 1 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	70.33; 0.00002; 0.4181; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0877; 0.0266
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.55113
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1389; 0.92605 ; 0.000493; 0.00414

Tabelle 5.82.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf den oberen Niveaus 0.95/0.99 angenommen und auf Niveaus 0.05/0.01 verworfen. Beim Value-at-Risk führen bei 0.01/0.05-VaR nur die Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese, mit Ausnahme des LB2-Tests. Die Ergebnisse der oberen VaR-Niveaus 0.95/0.99 sind deutlich besser- hier führen - außer dem V3-Test beim 0.95-VaR - alle Tests zur Annahme der Nullhypothese.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	141
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0141; 0.000104
Var(E250);V1;LB1;acf	7.49; 0; 0.1719; 1,10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.56; 0.00002; 0.02492; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	22.16; 0; 0.3293; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4979; 0.0004243
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.3592
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.32; 1.3642 ; 0.00608; 0.03401

Tabelle 5.83.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	482
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0482; 0.4062
Var(E250);V1;LB1;acf	15.48; 0.179; 0.451; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.27; 0.16415; 0.4246; –
Var(E500);V3;LB3;acf	49.36; 0.00431; 0.9922; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9591; 0.7086
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.64935
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.01947; 0.50948 ; 0.4019; 0.40084

Tabelle 5.84.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	90
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.009; 0.3066
Var(E250);V1;LB1;acf	3.06; 0.32738; 0.5012; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.53; 0.19549; 0.6444; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.74; 0.6365; 0.7121; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8372; 0.5812
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.46082
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.03957; 0.58085 ; 0.519755; 0.52564

Tabelle 5.85.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-MCMC, ZF=500

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	556
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0556; 0.01153
Var(E250);V1;LB1;acf	16.14; 0.11; 0.2082; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.36; 0.13834; 0.7559; –
Var(E500);V3;LB3;acf	23.75; 1; 0.2503; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1911; 0.01741
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.53658
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.268; 0.9117 ; 1.15e-11; 0

Tabelle 5.86.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	167
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0167; 8.09e-10
Var(E250);V1;LB1;acf	5.02; 0.00085; 0.5684; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.64; 0.00001; 0.9481; –
Var(E500);V3;LB3;acf	12.87; 0.00049; 0.4229; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6132; 5.58e-09
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.23933
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3735; 1.3526 ; 0.00047; 0.0105

Tabelle 5.87.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall bei allen Niveaus verworfen. Die Value-at-Risk Ergebnisse sind gemischt. Auf den 0.01/0.99-VaR-Niveaus führen nur die (reinen) Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese. Auf dem 0.05-VaR-Niveau führen alle VaR-Tests zur Annahme außer den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests. Auf dem 0.95-VaR-Niveau führen - außer dem LB2-Test- alle VaR-Tests zur Annahme der Nullhypothese.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	511
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0511; 0.61498
Var(E250);V1;LB1;acf	12.897; 0.7084; 0.4261; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.25; 0.4777; 0.01568; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	24.997; 0.8715; 0.9138; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6588; 0.7984
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.64714
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1408; 0.5296 ; 3.52e-09; 0

Tabelle 5.88.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	142
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0142; 0.0000717
Var(E250);V1;LB1;acf	4.66; 0.00248; 0.1998; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.76; 0; 0.2058; 3
Var(E500);V3;LB3;acf	12.09; 0.00101; 0.5886; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2103; 0.0001714
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.28711
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2802; 0.5482 ; 1.01e-08; 0

Tabelle 5.89.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FHS-250, ZF=500

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	530
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0530; 0.1726
Var(E250); V1; LB1; acf	11.88; 0.99858; 0.2497; (5)
Var(E125); V2; LB2; acf	5.55; 0.6886; 0.6586; –
Var(E500); V3; LB3; acf	22.79; 0.90114; 0.7515; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0596; 0.0667
n111; 95%-Intervall H_0	1; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.574362
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3131; 0.9318 ; 5.22e-14; 0

Tabelle 5.90.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	212
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0212; 0
Var(E250); V1; LB1; acf	5.34; 0.00026; 0.02047; (5) 10
Var(E125); V2; LB2; acf	2.74; 0; 0.729; (10)
Var(E500); V3; LB3; acf	12.99; 0.00047; 0.2384; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4894; 0
n111; 95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.093312
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4703; 1.2061 ; 4.49e-08; 0.00053

Tabelle 5.91.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-250k25, ZF=500

Hier führen alle Expected Shortfall Tests zur Ablehnung der Nullhypothese. Die Value-at-Risk Ergebnisse sind sehr gut auf den 0.05/0.95-VaR-Niveaus und schlecht auf den 0.01/0.99-VaR-Niveaus. Es werden nämlich alle VaR-Tests beim 0.05/0.95-VaR angenommen. Beim 0.01/0.99-VaR führen nur die (reinen) Unabhängigkeitstests zur Annahme der Nullhypothese. Dies deutet darauf hin, dass die Anwendung der Filtered Extreme Value Theory bei Annäherung an die Enden der Prognoseverteilung ungenauer wird.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	480
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.048; 0.3557
Var(E250);V1;LB1;acf	14.1; 0.4118; 0.306; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.13; 0.8419; 0.05817; –
Var(E500);V3;LB3;acf	29.26; 0.472; 0.5414; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8184; 0.6371
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.68789
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2020; 0.5198 ; 2.22e-16; 0

Tabelle 5.92.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	166
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0166; 1.37e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	4.9; 0.00124; 0.5867; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.75; 0; 0.9471; –
Var(E500);V3;LB3;acf	11.69; 0.00145; 0.9773; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8828; 1.052e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.17037
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.289; 0.5148 ; 1.68e-11; 0

Tabelle 5.93.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-FEVT-500k50, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

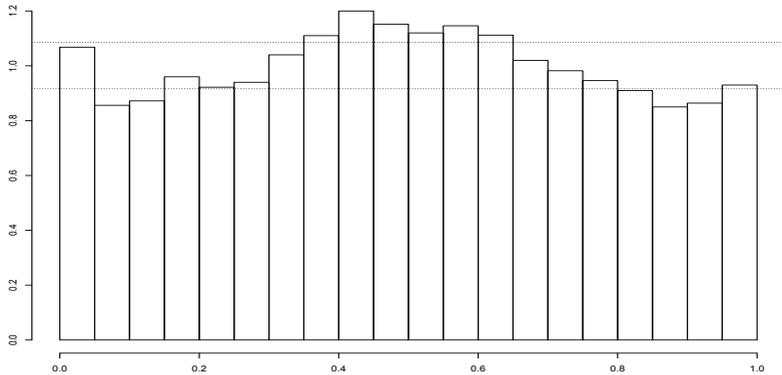


Abbildung 5.19.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=3.33e-16

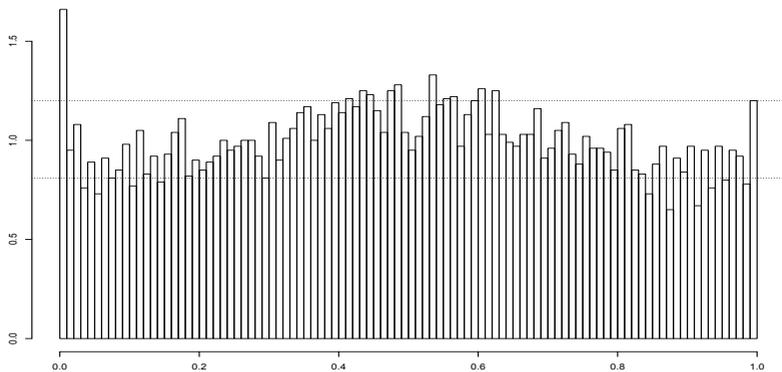


Abbildung 5.20.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 4-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=3.33e-16

Die beiden Abbildungen sowie die klare Ablehnung beim Anpassungstest zeigen, dass die Prognoseverteilungen als Ganzes nicht angemessen sind. Wie durch Simulationen mit verschiedenen Renditeverteilungen festgestellt wurde, kann man aus dem Balkendiagramm schließen, dass die tatsächlichen Renditeverteilungen etwas kleinere Varianz haben sollten, jedoch leptokurtisch sein sollten.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	534
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0534; 0.1227
Var(E250);V1;LB1;acf	30.85; 0; 0.02747; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	10.58; 0.00004; 0.003889; 1 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	74.43; 0; 0.355; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.10698; 0.08255
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.56835
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2359; 0.9297 ; 7.88e-09; 0.00001

Tabelle 5.94.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	166
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0166; 1.37e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	8.69; 0; 0.1834; (5) 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.96; 0; 0.07544; –
Var(E500);V3;LB3;acf	24.54; 0; 0.1583; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4745; 8.24e-09
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2379
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4652; 1.3048 ; 8.6e-06; 0.00348

Tabelle 5.95.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf allen ES-Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird nur bei den LR_{PF} , LR_{ind} , LR_{cc} , LB3 und N111 Tests angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.95-VaR wird bei allen VaR-Tests angenommen außer dem V3-Test. Der 0.99-VaR wird bei allen VaR-Tests angenommen außer den Varianzen-Tests V1, V2 und V3.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	465
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0465; 0.1043
Var(E250);V1;LB1;acf	15.11; 0.228657; 0.4328; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.22; 0.18104; 0.5449; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	49.57; 0.00411; 0.8656; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8875; 0.2657
$n11; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.66389
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.08175; 0.5075 ; 0.000562; 0.0012

Tabelle 5.96.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	120
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.012; 0.0513
Var(E250);V1;LB1;acf	3.95; 0.01898; 0.4351; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2; 0.00308; 0.6343; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.53; 0.03147; 0.47; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6553; 0.1353
$n11; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.33348
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.15239; 0.5419 ; 0.00257; 0.00788

Tabelle 5.97.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 4-NORM, ZF=500

e) Zusammenfassung Modell 4

Die folgenden 2 Tabellen²¹⁰ zeigen die Strafpunkte aufgeschlüsselt nach VaR-Niveau, Modell und VaR-Methode. Da im Modell 4 nur die A-Variante der FHS-, FEVT- und NORM-Methoden untersucht wurde, werden hier auch nur die A-Varianten des Modells 1 dargestellt.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	12	11	2	0	25
FHS	4	9	0	3	16
FEVT	0	10	0	7	17
NORM	8	10	2	6	26

Tabelle 5.98.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	10	2	0	22
FHS	3	9	1	9	22
FEVT	0	9	0	9	18
NORM	8	9	2	6	25

Tabelle 5.99.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 4: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Ein Vergleich der Tabellen zeigt qualitativ ähnliche Ergebnisse bei beiden Modellen, mit kleiner Verbesserung bei den MCMC/NORM Methoden und einer Verschlechterung bei den FHS/FEVT Methoden. Die Einführung von Sprüngen in der Renditengleichung hat wenig zur Qualität der VaR-Prognosen beigetragen.

²¹⁰Vgl. Tabelle 5.303 im Abschnitt 5.5.

5.4.5. Modell 5, DJIA 10000 Renditen

Modell 5 wurde in Definition 3.5 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim t(\nu) \quad (5.21)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.22)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Der Unterschied zum Modell 1 ist die Student-t Verteilung von ϵ_t .

Das Modell wurde 10000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 10000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.009144149	0.044355573	0.082747009
γ	-0.78643539	-0.47049004	-0.02803763
σ_η^2	0.02133245	0.02501713	0.02940963
ϕ	0.9106438	0.9502190	0.9714538
ν	14.508161	23.117536	27.253794

Tabelle 5.100.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 5

Die Schätzer für die Freiheitsgrade ν variieren zwischen 4.06 und 31.83, mit oberem Quartil bei 27.25. Diese Werte sind immer noch klein genug um einen bemerkbaren Unterschied zur Standardnormalverteilung darzustellen. So ist das 0.05-Quantil der $t(27.25)$ -Verteilung -1.7027 was betragsmäßig um 3.5% größer ist als das 0.05-Quantil der Standardnormalverteilung -1.6449 . Die 0.01-Quantile der beiden genannten Verteilungen unterscheiden sich sogar um 6.23%.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR.

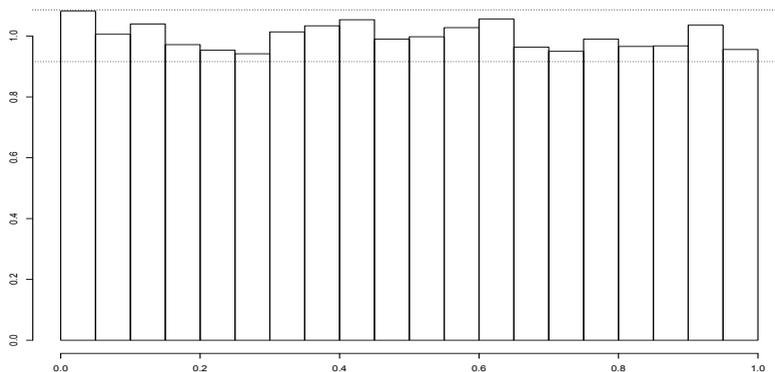
a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

Abbildung 5.21.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.661

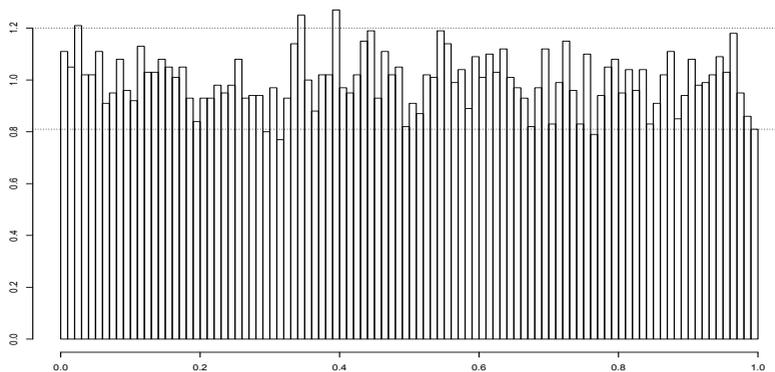


Abbildung 5.22.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.2251

Hier zeigen die p-Werte für die Anpassungstests sowie die Abbildungen für beide Klassierungen zum ersten Mal bei der MCMC-basierten Prognose eine Annahme der Prognoseverteilungen. Die leptokurtische t-Verteilung für die Innovation in der Renditengleichung scheint eine gute Approximation zu den tatsächlichen Verteilungen zu sein.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	541
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0541; 0.0632
Var(E250);V1;LB1;acf	35.69; 0; 0.05424; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	12.31; 0; 0.03552; 1 (9,10)
Var(E500);V3;LB3;acf	83.31; 0; 0.5718; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.006932; 0.004631
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.550424
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.06; 0.962 ; 0.1469; 0.16117

Tabelle 5.101.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	112
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0112; 0.2367
Var(E250);V1;LB1;acf	5.91; 0.00006; 0.1642; 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.17; 0.00076; 0.236; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.15; 0; 0.2663; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1802; 0.2021
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.465989
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2369; 1.5914 ; 0.1179; 0.1618

Tabelle 5.102.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC, ZF=500

Die besseren Ergebnisse für die Prognoseverteilungen als Ganzes werden auch im Expected Shortfall widerspiegelt- hier wird der ES zu allen VaR-Niveaus angenommen außer dem 0.95-Niveau, bei welchem der vom Modell 5-MCMC ermittelte Expected Shortfall einen positiven Bias hat, was darauf hindeuten könnte, dass das rechte Ende der wahren Prognoseverteilung platykurtischer als die t-Verteilung ist. Dies ist im Einklang mit den früheren Ergebnisse, nach denen eine Normalverteilung gut den oberen Teil der Prognoseverteilung abbildet. Beim Value-at-Risk sind die Ergebnisse etwas schlechter. Auf dem 0.05-VaR-Niveau führen nur die LR_{PF} , LB1, LB3 und N111-Tests

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	483
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0483; 0.4329
Var(E250);V1;LB1;acf	15.76; 0.1466; 0.3831; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.78; 0.0552; 0.3748; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	52.34; 0.00216; 0.4393; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.8848; 0.7289
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.642614
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0826; 0.5154 ; 0.00047; 0.0009

Tabelle 5.103.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	81
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0081; 0.0483
Var(E250);V1;LB1;acf	3.05; 0.3412; 0.4503; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.43; 0.4002; 0.05909; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.52; 0.7376; 0.4254; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.691; 0.1317
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.55491
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0869; 0.5753 ; 0.1776; 0.18805

Tabelle 5.104.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-MCMC, ZF=500

zur Annahme der Nullhypothese. Beim 0.01-VaR wird die Nullhypothese von allen VaR-Tests angenommen außer den Varianzentests V1, V2 und V3. Hier wird deutlich, dass die Varianzentests Modellschwächen aufdecken können, die weder von LR_{PF} , LR_{ind} noch LR_{cc} erkannt werden. Der 0.95-VaR wird von allen Tests angenommen außer dem V3-Test. Der 0.99-VaR wird von allen VaR-Tests angenommen außer LR_{PF} . Hier treten zu wenig Überschreitungen auf um mit einem VaR-Niveau von 0.01 vereinbar zu sein.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (FHS-A)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	452
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0452; 0.0253
Var(E250);V1;LB1;acf	14.93; 0.257; 0.7498; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.09; 0.2309; 0.538; –
Var(E500);V3;LB3;acf	32.67; 0.2355; 0.7102; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.01266; 0.003677
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.688004
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1606; 0.9961 ; 0.0006659; 0.00702

Tabelle 5.105.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	104
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0104; 0.6896
Var(E250);V1;LB1;acf	3.22; 0.2091; 0.9674; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.68; 0.0523; 0.9022; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.85; 0.06934; 0.9775; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9359; 0.92
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.636819
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3585; 1.6829 ; 0.03213; 0.073

Tabelle 5.106.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-250, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf 0.01/0.99-Niveaus angenommen und auf 0.05/0.95-Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests angenommen, außer den LR_{PF} , LR_{ind} und LR_{cc} -Tests. Der Anteil der 0.05-VaR-Überschreitungen ist signifikant kleiner als das Zielniveau von 0.05. Der 0.01-VaR wird von allen VaR-Tests angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen VaR-Tests angenommen außer den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests. Auch hier ist der Anteil der VaR-Überschreitungen zu klein. Der 0.99-VaR wird von allen Tests angenommen außer dem V2-Test.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	379
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0379; 7e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	15.49; 0.1776; 0.9261; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.35; 0.6695; 0.6606; –
Var(E500);V3;LB3;acf	28.89; 0.5029; 0.05627; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.9198; 5.32e-08
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.79495
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.06293; 0.5197 ; 0.01891; 0.02027

Tabelle 5.107.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	101
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0101; 0.92
Var(E250);V1;LB1;acf	3.49; 0.0852; 0.6446; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.82; 0.01467; 0.4727; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.05; 0.511; 0.2144; (4)
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.1074; 0.2723
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.55406
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1049; 0.5794 ; 0.07192; 0.07156

Tabelle 5.108.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-A-200, ZF=500

c) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FHS-B)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	585
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0585; 0.000143
Var(E250);V1;LB1;acf	12.29; 0.8797; 0.2208; 7, 14
Var(E125);V2;LB2;acf	5.41; 0.5864; 0.4512; –
Var(E500);V3;LB3;acf	23.57; 0.9812; 0.8633; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0876; 0.000167
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.51288
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2055; 1.1276 ; 1.24e-05; 0.00061

Tabelle 5.109.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	153
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0153; 7.8e-07
Var(E250);V1;LB1;acf	5.17; 0.0005; 0.581; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.54; 0.00002; 0.9958; 14
Var(E500);V3;LB3;acf	12.77; 0.00051; 0.8847; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6749; 4.5e-06
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.3184
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1732; 2.083 ; 0.3052; 0.3173

Tabelle 5.110.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur auf dem 0.01-Niveau angenommen. Da die B-Variante immer eine kleinere Varianz der Prognoseverteilungen impliziert, ist der Anteil der VaR-Überschreitungen bei der B-Variante meist höher. Dies hat zu Verbesserungen beim 0.95-VaR und Verschlechterung bei den anderen VaR-Niveaus (im Vergleich zum vorherigen FHS-A-Abschnitt) geführt. Beim 0.05-VaR-Niveau wird im Vergleich zum vorherigen Abschnitt auch zusätzlich der LR_{ind} -Test angenommen, beim 0.95-VaR wird zusätzlich der LR_{ind} und der LR_{cc} -Test angenommen. Beim 0.01-VaR führen nun die LR_{PF} , LR_{cc} und die Varianzen-Tests V1, V2 und V3 zur Ablehnung der Nullhypothese. Beim 0.99-VaR haben sich die Ergebnisse der folgenden Tests (im

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	516
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0516; 0.4651
Var(E250);V1;LB1;acf	13.63; 0.5192; 0.3949; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.61; 0.4863; 0.5324; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	28.48; 0.5396; 0.6355; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6323; 0.6819
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.61475
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1194; 0.5828 ; 4.14e-06; 1e-05

Tabelle 5.111.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	122
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0122; 0.0326
Var(E250);V1;LB1;acf	3.997; 0.01696; 0.356; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.2; 0.00061; 0.304; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.41; 0.3724; 0.904; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0213; 0.00717
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.352277
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.233; 0.5933 ; 0.00003979; 0.00016

Tabelle 5.112.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FHS-B-250, ZF=500

Vergleich zum vorigen Abschnitt) verschlechtert: LR_{PF} , LR_{ind} , LR_{cc} und V1.

d) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (FEVT-A)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	464
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0464; 0.0947
Var(E250); V1; LB1; acf	18.86; 0.01309; 0.3556; –
Var(E125); V2; LB2; acf	7.05; 0.2473; 0.7015; –
Var(E500); V3; LB3; acf	44.17; 0.01338; 0.79; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0155; 0.01328
n111; 95%-Intervall $ H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.66765
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.15; 0.9848 ; 0.001114; 0.0086

Tabelle 5.113.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-300k30, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	119
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0119; 0.0637
Var(E250); V1; LB1; acf	4.08; 0.01313; 0.9824; –
Var(E125); V2; LB2; acf	1.84; 0.01269; 0.9998; –
Var(E500); V3; LB3; acf	10.79; 0.00348; 0.7634; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2402; 0.0898
n111; 95%-Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4425
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.482; 1.4698 ; 0.000505; 0.01677

Tabelle 5.114.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-400k40, ZF=500

Die FEVT-Ergebnisse der ersten FEVT-Variante sind schlecht. Der Expected Shortfall wird auf allen Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von den folgenden Tests verworfen: V1, V3, LR_{ind} und LR_{cc} . Der 0.01-VaR wird von den Varianzen-Tests V1, V2 und V3 verworfen. Der 0.95-VaR wird vom LR_{PF} und LR_{cc} -Test verworfen. Der 0.99-VaR wird von den Tests V1 und V2 verworfen. Die Ergebnisse bei dieser FEVT-A-Variante sind schlechter als bei der FHS-A, hier führen oft auch die Varianzentests zur Ablehnung der Nullhypothese.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	388
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0388; 9.27e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	15.29; 0.2035; 0.5926; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.10; 0.8684; 0.6271; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	32.36; 0.2524; 0.5328; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.988; 6.49e-07
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.772231
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0773; 0.5196 ; 0.003584; 0.00437

Tabelle 5.115.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	107
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0107; 0.4867
Var(E250);V1;LB1;acf	3.97; 0.0181; 0.2875; (12)
Var(E125);V2;LB2;acf	2.02; 0.00277; 0.629; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.24; 0.6709; 0.708; (7)
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.14398; 0.2698
$n111; 95\%$ -Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4589
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2188; 0.5093 ; 2.17e-05; 0.00056

Tabelle 5.116.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-A-300k30, ZF=500

e) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) \text{ (FEVT-B)}$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	556
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0556; 0.01153
Var(E250);V1;LB1;acf	11.84; 0.9888; 0.4519; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.12; 0.8518; 0.4245; –
Var(E500);V3;LB3;acf	20.91; 0.7151; 0.7465; 7
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0963; 0.0103
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.53783
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2601; 1.1686 ; 2.31e-07; 2e-05

Tabelle 5.117.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-B-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	187
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0187; 6.11e-15
Var(E250);V1;LB1;acf	6.53; 0.00002; 0.5082; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.58; 0.00002; 0.7396; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.45; 0.00001; 0.6678; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4409; 4.46e-14
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.1515
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4449; 1.5346 ; 0.000105; 0.01052

Tabelle 5.118.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-B-400k40, ZF=500

Die zweite FEVT-Variante hat keine große Verbesserung bei den meisten VaR/ES-Niveaus gebracht (mit Ausnahme des 0.95-VaR-Niveaus). Hier wird wieder der Expected Shortfall auf allen Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen. Die 0.01/0.99-VaR werden nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests angenommen. Die Anzahl der VaR-Überschreitungen ist nur beim VaR-Niveau 0.95 angemessen, bei den restlichen ist sie zu hoch. Die kleineren Varianzen der Prognoseverteilungen haben zu betragsmäßig kleinerem mittleren VaR in der Stichprobe geführt (vgl. die mean(VaR)-Zeilen in FEVT-A und FEVT-B).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	489
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0489; 0.6125
Var(E250);V1;LB1;acf	9.46; 0.3721; 0.6396; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.48; 0.1281; 0.0834; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.05; 0.3098; 0.8267; (10)
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2885; 0.5014
n111;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.65575
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1801; 0.6149 ; 2.53e-10; 0

Tabelle 5.119.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-B-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	152
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0152; 1.21e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	5.39; 0.00024; 0.08714; (2)
Var(E125);V2;LB2;acf	2.62; 0.00001; 0.4001; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.67; 0.02755; 0.7111; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3055; 4.5e-06
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.1972
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2771; 0.5823 ; 2.71e-08; 1e-05

Tabelle 5.120.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-FEVT-B-500k50, ZF=500

f) Prognose mit der Innovationsverteilung (Student-t) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC}) \text{ (t-A)}$$

Beide Anpassungstests verwerfen die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes. Es fällt die Form des Balkendiagramms auf, die auf eine Überschätzung der Varianzen der Prognoseverteilungen hindeutet (wie Simulationen mit verschiedenen wahren vs. Prognose-Verteilungen gezeigt haben).

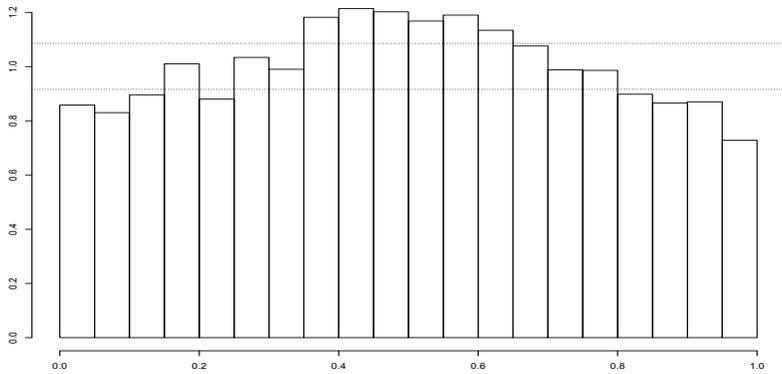


Abbildung 5.23.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-A, ZF=500, KL=20); p-Wert=0

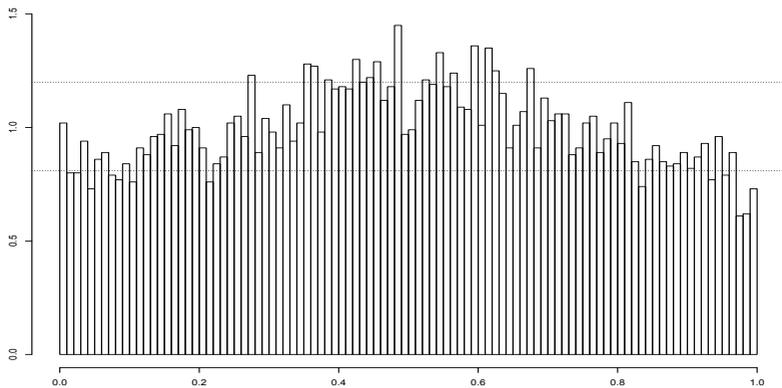


Abbildung 5.24.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-A, ZF=500, KL=100); p-Wert=0

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	429
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0429; 0.00085
Var(E250);V1;LB1;acf	25.69; 0.000047; 0.08496; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	8.77; 0.00517; 0.01045; 1,2 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	74.89; 0; 0.8295; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.00912; 0.000129
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.70034
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1294; 1.0163 ; 0.008649; 0.02735

Tabelle 5.121.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	102
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0102; 0.8412
Var(E250);V1;LB1;acf	5.54; 0.00016; 0.2634; 1, 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.02; 0.00277; 0.05605; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	17.67; 0; 0.1995; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.113; 0.2792
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.55778
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4035; 1.5992 ; 0.01233; 0.06067

Tabelle 5.122.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	364
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0364; 5.97e-11
Var(E250);V1;LB1;acf	14.04; 0.425; 0.3866; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.2; 0.7874; 0.5288; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	41.96; 0.02097; 0.4865; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9428; 5.06e-10
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.79157
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.02466; 0.5171 ; 0.3635; 0.3617

Tabelle 5.123.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-A, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	73
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0073; 0.00436
Var(E250);V1;LB1;acf	3.43; 0.10696; 0.9127; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.55; 0.1673; 0.1921; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.19; 0.1591; 0.2543; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1201; 0.005154
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.649
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0263; 0.5579 ; 0.6887; 0.6897

Tabelle 5.124.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-A, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf allen ES-Niveaus angenommen außer dem 0.05-ES-Niveau. Die VaR Ergebnisse sind schlechter, mit generell zu wenig VaR-Überschreitungen. Der 0.05-VaR wird nur von den LB1, LB3 und N111-Tests angenommen, der 0.01-VaR wird von allen Tests außer den Varianztests V1, V2 und V3 angenommen. Der 0.95-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{cc} und V3 Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur von den LR_{PF} und LR_{cc} Tests verworfen. Die großen Varianzen der Prognoseverteilungen, die bereits in den beiden Balken-Diagramme festgestellt wurden, schlagen sich auch in vergleichsweise betragsmäßig großen mittleren VaR-Werten nieder.

g) Prognose mit der Innovationsverteilung (Student-t) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \exp(\widehat{h_{t+1}}/2) (\mathbf{t-B})$$

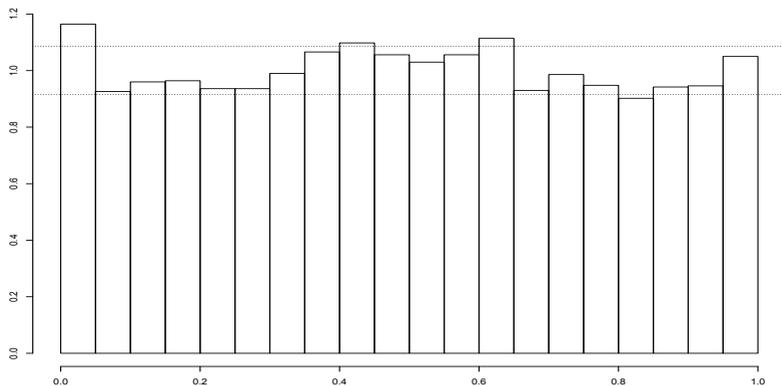


Abbildung 5.25.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-B, ZF=500, KL=20); p-Wert=6.76e-05

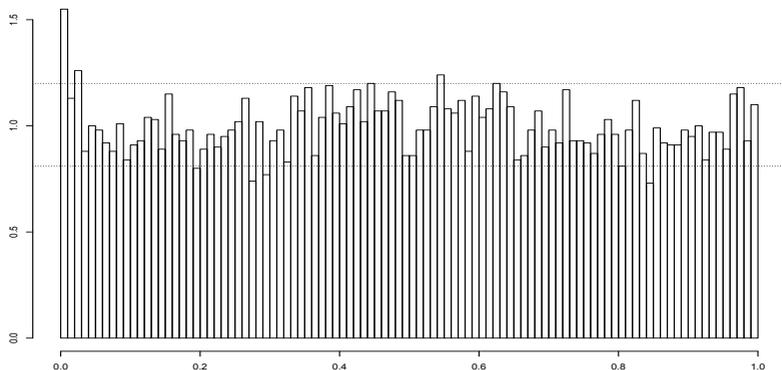


Abbildung 5.26.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 5-t-B, ZF=500, KL=100); p-Wert=4.01e-05

Die p-Werte zu beiden Anpassungstests zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen verworfen werden muss. Während hier keine Überschätzung der Varianz zu erkennen ist, bleiben im ersten Cluster zu viele transformierte Beobachtungen, was eventuell auf die Notwendigkeit einer asymmetrischen (linksschiefen und leptokurtischen) Verteilung hindeutet.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	582
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0582; 0.0002414
Var(E250);V1;LB1;acf	41.18; 0; 0.03689; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	14.10; 0; 0.008537; 1 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	98.52; 0; 0.6423; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0228; 0.00008786
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	4; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.50822
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1923; 1.1134 ; 3.57e-5; 0.00176

Tabelle 5.125.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	155
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0155; 3.13e-07
Var(E250);V1;LB1;acf	8.83; 0; 0.1402; 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.996; 0; 0.07923; 2, (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	26.62; 0; 0.1936; 5
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7061; 1.93e-06
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.26394
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4177; 1.686 ; 0.00242; 0.03381

Tabelle 5.126.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-B, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur auf den oberen Niveaus 0.95/0.99 angenommen. Die Value-at-Risk Ergebnisse sind schlecht. Der 0.05-VaR wird nur von den LB3 und N111 Tests angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen VaR-Tests außer den Varianzen Tests und dem N111-Test angenommen. Der 0.99-VaR wird nur von den Varianzentests V1, V2 und V3 verworfen. Die mittleren VaR-Werte waren bei dieser B-Variante betragsmäßig kleiner.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	525
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0525; 0.255
Var(E250);V1;LB1;acf	18.16; 0.0222; 0.4956; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.25; 0.01797; 0.3147; 9
Var(E500);V3;LB3;acf	60.41; 0.00026; 0.6395; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6289; 0.4643
n111;95%-Intervall H_0	5; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.599444
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.02449; 0.5670 ; 0.3229; 0.32553

Tabelle 5.127.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-B, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	110
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.011; 0.3226
Var(E250);V1;LB1;acf	4.09; 0.01298; 0.5905; –
Var(E125);V2;LB2;acf	NA; NA; NA
Var(E500);V3;LB3;acf	8.68; 0.02725; 0.5001; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5064; 0.4912
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.355168
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.06348; 0.6059 ; 0.2743; 0.2785

Tabelle 5.128.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 5-t-B, ZF=500

h) Zusammenfassung SV-Modell 5

Zusammenfassend lässt sich zum Modell 5 (das im Vergleich zum SV-Modell 1 die Innovation der Renditengleichung mit einer t-Verteilung modelliert) Folgendes sagen: Obwohl die ganzen Prognoseverteilungen beim 5-MCMC Modell angenommen wurden, sind die VaR Ergebnisse größtenteils unzufriedenstellend. Beim 0.05/0.99-VaR ist keine der Methoden befriedigend, beim 0.01-VaR ist nur die FHS-A-Variante befriedigend und beim 0.95-VaR sind die MCMC, die FHS-A und die FEVT-B Methode zufriedenstellend.

Die folgenden 2 Tabellen sind Ausschnitt aus Tabelle 5.303 im Abschnitt 5.5 und zeigen die Strafpunkte aufgeschlüsselt nach VaR-Niveau, Modell und VaR-Methode.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	12	11	2	0	25
FHS-A	4	9	0	3	16
FHS-B	4	9	0	3	16
FEVT-A	0	10	0	7	17
FEVT-B	3	9	3	9	24
NORM-A	8	10	2	6	26
NORM-B	12	9	2	9	32

Tabelle 5.129.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	8	6	2	3	19
FHS-A	4	0	3	2	9
FHS-B	3	9	0	8	20
FEVT-A	5	6	3	4	18
FEVT-B	3	9	0	9	21
t-A	11	6	5	3	25
t-B	12	9	7	6	34

Tabelle 5.130.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 5: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Die Verallgemeinerung des Basis-SV-Modells durch die Annahme einer t-verteilter Innovation hat zu einer deutlichen Verbesserung bei den MCMC und FHS-A-Methoden geführt, zu einer Verschlechterung bei der FHS-B-Methode und zu ähnlichen Ergebnissen bei den restlichen VaR-Berechnungsmethoden. Die Ergebnisse bei Modell 5 sind also gemischt und es ist keine deutliche (alle Methoden umfassende) Verbesserung der VaR-Ergebnisse des Modells 1 festzustellen.

5.4.6. Modell 6, DJIA 10000 Renditen

SV-Modell 6 wurde in Definition 3.6 eingeführt. Das Modell lautet:

$$r_t = \mu + d \exp(h_t/2) + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.23)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.24)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s .

Dies ist das Stochastic-Volatility-in-Mean Modell, hier wird die linear skalierte Volatilität noch zum Erklärungsansatz der Renditengleichung addiert. Bei 74.28% der 10000 geschätzten Modellen ist der geschätzte Koeffizient \hat{d} der Volatilität negativ. Dies baut eine gewisse Asymmetrie auf mit mehr Masse im linken Teil der Prognoseverteilungen, etwas Erwünschtes nach den bisherigen Erkenntnissen aus den vorherigen Modellen.

Das Modell wurde 10000 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 10000 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.00566263	0.22407740	0.30194734
γ	-0.6597971	-0.3154733	0.1212046
σ_η^2	0.02365964	0.03118715	0.04891628
ϕ	0.8974510	0.9435705	0.9649151
d	-0.32234068	-0.19374667	0.01477588

Tabelle 5.131.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ 10000, SV-Modell 6

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

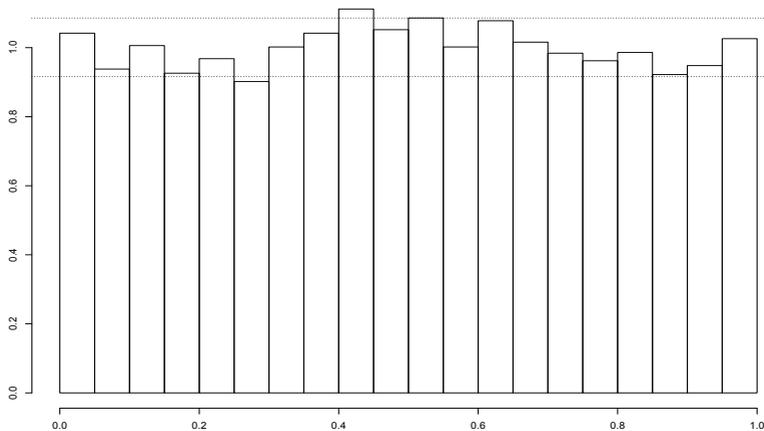


Abbildung 5.27.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0318

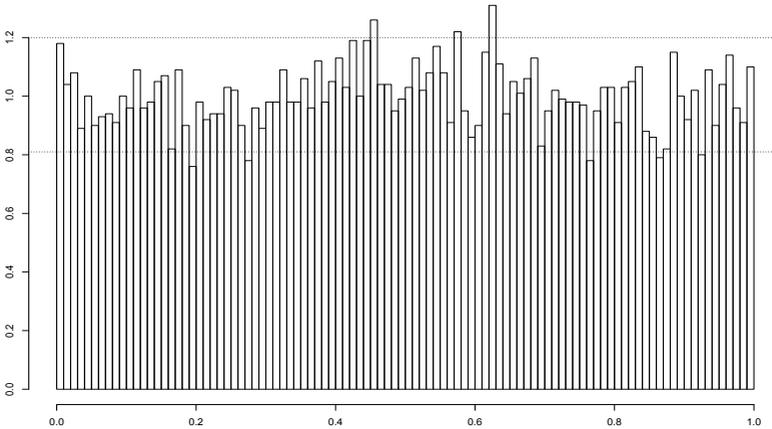


Abbildung 5.28.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.1412

Die Abbildungen zeigen relativ gute Ergebnisse für die Prognoseverteilungen als Ganzes: mit p-Werten 0.0318 und 0.1412.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	521
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0521; 0.3384
Var(E250);V1;LB1;acf	24.85; 0.0001; 0.07669; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	8.53; 0.0092; 0.2421; 1 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	60.16; 0.00029; 0.455; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3379; 0.3987
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.5941
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1166; 0.9231 ; 0.0041; 0.01387

Tabelle 5.132.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird in diesem Abschnitt nur auf den oberen 0.95/0.99-ES-Niveaus angenommen. Der Value-at-Risk auf den unteren 0.05/0.01-VaR-Niveaus wird von allen Tests außer den Varianzentests V1, V2 und V3 angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests außer den V3 und

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	119
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0119; 0.0637
Var(E250);V1;LB1;acf	5.71; 0.0001; 0.265; 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.05; 0.00205; 0.1697; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.05; 0; 0.1241; 5
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.7088; 0.1669
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4171
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3627; 1.443 ; 0.0071; 0.04149

Tabelle 5.133.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	515
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0515; 0.4933
Var(E250);V1;LB1;acf	15.29; 0.2035; 0.05978; (3)
Var(E125);V2;LB2;acf	6.65; 0.4607; 0.04871; 1, (6)
Var(E500);V3;LB3;acf	50.72; 0.00324; 0.5421; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.5999; 0.6881
$n111$;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6023
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.001; 0.5135 ; 0.9644; 0.9647

Tabelle 5.134.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	110
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.011; 0.3226
Var(E250);V1;LB1;acf	4.60; 0.00293; 0.2224; (2)
Var(E125);V2;LB2;acf	2.01; 0.00292; 0.6429; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.32; 0.1361; 0.2258; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.8422; 0.6005
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3888
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.01; 0.5648 ; 0.8529; 0.8532

Tabelle 5.135.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-MCMC, ZF=500

LB2 Tests angenommen. Der 0.99-VaR wird von allen Tests außer V1 und V2 angenommen.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Hier wird jeweils nur eine FHS/FEVT/NORM-Variante untersucht (entspricht der A-Variante der vorherigen Modelle). Da bereits bei dieser Variante der Anteil der VaR-Überschreitungen höher als die Zielniveaus ist, würde bei der B-Variante dieser Anteil noch größer (wegen der kleineren Varianz der Prognoseverteilungen), was in der Regel zu Verschlechterung der Ergebnisse führen würde.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	554
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0554; 0.0148
Var(E250);V1;LB1;acf	15.11; 0.2287; 0.2165; 7
Var(E125);V2;LB2;acf	6.58; 0.5072; 0.5323; -
Var(E500);V3;LB3;acf	28.54; 0.5342; 0.5257; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1260; 0.01582
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.5472
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2604; 0.9189 ; 6.25e-11; 0

Tabelle 5.136.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	164
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 3.9e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	5.22; 0.00042; 0.2949; -
Var(E125);V2;LB2;acf	2.48; 0.00005; 0.9022; -
Var(E500);V3;LB3;acf	14.59; 0.00009; 0.567; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.448; 2.2e-08
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.636819
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3942; 1.3567 ; 0.0002726; 0.01016

Tabelle 5.137.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-250, ZF=500

Der Expected Shortfall bei der FHS-Methode wird auf allen ES-Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests angenommen außer den LR_{PF}

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	486
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0486; 0.5188
Var(E250);V1;LB1;acf	14.08; 0.4162; 0.4681; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.86; 0.3374; 0.2408; –
Var(E500);V3;LB3;acf	30.54; 0.3721; 0.9731; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.56397; 0.6886
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6387
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1379; 0.5193 ; 8.88e-09; 0

Tabelle 5.138.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	120
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0120; 0.0513
Var(E250);V1;LB1;acf	3.85; 0.0255; 0.7391; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.03; 0.00243; 0.4656; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.37; 0.8009; 0.8567; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2497; 0.077
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3186
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2561; 0.5588 ; 1.83e-06; 3e-05

Tabelle 5.139.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FHS-250, ZF=500

und LR_{cc} -Tests. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.95-VaR ist hervorragend und wird von allen VaR-Tests angenommen. Der 0.99-VaR wird nur von den V1 und V2 -Tests verworfen.

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	535
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0535; 0.1121
Var(E250);V1;LB1;acf	13.16; 0.6383; 0.1856; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	6.07; 0.8917; 0.8499; –
Var(E500);V3;LB3;acf	24.3; 0.9436; 0.7566; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1119; 0.0797
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.5818
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3097; 0.9286 ; 6.68e-14; 0

Tabelle 5.140.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	214
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0214; 0
Var(E250);V1;LB1;acf	6.03; 0.00003; 0.1753; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	2.80; 0; 0.5629; 14
Var(E500);V3;LB3;acf	14.75; 0.00007; 0.6396; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2824; 0
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.0968
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4541; 1.21 ; 1.13e-07; 0.00066

Tabelle 5.141.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-250k25, ZF=500

Bei der FEVT-Methode wird der Expected Shortfall auf allen Niveaus verworfen. Der 0.05/0.95-VaR wird von allen Tests angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen und der 0.99-VaR wird nur von den V1 und V2 Tests verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	513
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0513; 0.5525
Var(E250);V1;LB1;acf	13.69; 0.5043; 0.3742; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.00; 0.269; 0.2124; –
Var(E500);V3;LB3;acf	32.98; 0.219; 0.9929; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8892; 0.829
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6311
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.137; 0.5113 ; 2.54e-09; 0

Tabelle 5.142.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	163
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0163; 6.5e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	4.12; 0.01176; 0.5429; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.37; 0.00013; 0.6898; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.45; 0.3612; 0.9727; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.834; 4.73e-08
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.182
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.319; 0.5176 ; 4.85e-13; 0

Tabelle 5.143.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-FEVT-200k20, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

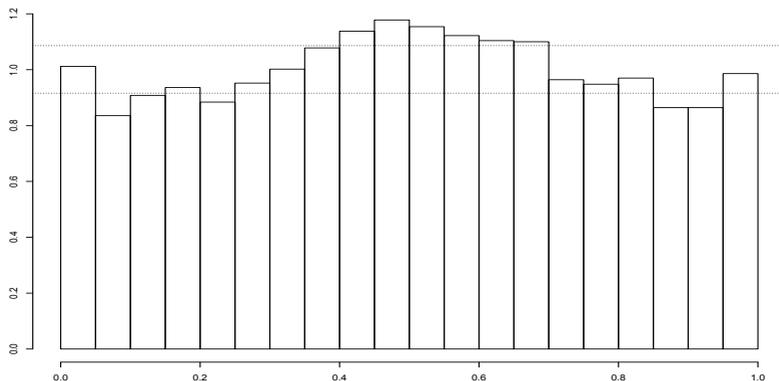


Abbildung 5.29.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=3.04e-14

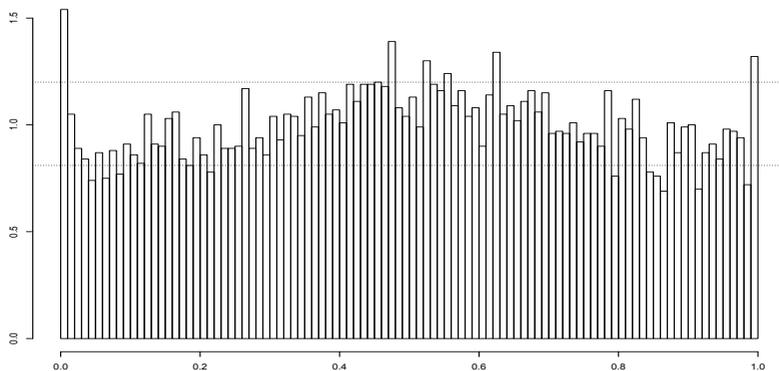


Abbildung 5.30.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (SV-Modell 6-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=3.45e-14

Die Abbildungen und die p-Werte zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes verworfen werden muss. Die Grafik zeigt (durch die Anhäufungen im mittleren und den äußersten Bereichen), dass die tatsächlichen Renditen zwar kleinere Varianz, jedoch eine leptokurtische Verteilung haben (dies wurde durch Simulation mit verschiedenen wahren vs. Prognoseverteilungen festgestellt).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	506
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0506; 0.7835
Var(E250);V1;LB1;acf	23.31; 0.000402; 0.03927; (5) 10
Var(E125);V2;LB2;acf	8.12; 0.02468; 0.1588; 1 (9,10,12)
Var(E500);V3;LB3;acf	57.8; 0.00055; 0.3183; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.1389; 0.322
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.6024
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2379; 0.9332 ; 1.69e-08; 2e-05

Tabelle 5.144.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	154
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0154; 4.95e-07
Var(E250);V1;LB1;acf	8.59; 0; 0.1037; (5), 10
Var(E125);V2;LB2;acf	2.88; 0; 0.01992; 2 (10)
Var(E500);V3;LB3;acf	26.01; 0; 0.1744; 5
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.3272; 1.99e-06
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2711
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4764; 1.331 ; 1.7e-05; 0.00468

Tabelle 5.145.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM, ZF=500

Der Expected Shortfall wird hier auf allen ES-Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von den Varianztests V1, V2 und V3 sowie dem LB1-Test verworfen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests außer LB2 angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests außer V3 angenommen. Der 0.99-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	493
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0493; 0.7475
Var(E250);V1;LB1;acf	14.43; 0.3446; 0.3476; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.77; 0.3876; 0.1508; (6)
Var(E500);V3;LB3;acf	44.77; 0.01187; 0.8115; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.7785; 0.9134
$n111$;95%-Intervall H_0	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.6258
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0753; 0.5114 ; 0.001159; 0.00206

Tabelle 5.146.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	132
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0132; 0.00217
Var(E250);V1;LB1;acf	4.42; 0.005; 0.5277; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.05; 0.00205; 0.7894; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.78; 0.02466; 0.597; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.8468; 0.008906
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.2946
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1397; 0.5297 ; 0.002949; 0.0093

Tabelle 5.147.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 10000, SV-Modell 6-NORM, ZF=500

e) Zusammenfassung SV-Modell 6

Zusammenfassend lässt sich zum Modell 6 festhalten, dass der 0.95-VaR bei allen Methoden gut abgeschnitten hat, der 0.05-VaR nur bei der FEVT Methode, der 0.01/0.99-VaR bei keiner der Methoden. Die Prognoseverteilungen als Ganzes werden nur bei der MCMC-Methode nicht verworfen, selbst dort lässt die VaR-Prognose zu wünschen übrig. Dies ist dadurch zu erklären, dass für richtige Prognoseverteilungen richtige Proportions of Failure (LR_{PF} -Test) ausreichen, für das VaR-Backtesting jedoch nicht, bei dem müssen zusätzlich u.a. die Varianzen (V1, V2 und V3-Tests) überprüft werden. Abschließend lässt sich feststellen, dass der Expected Shortfall nur von 0.95/0.99-ES bei der MCMC Methode angenommen wurde.

Die folgenden 2 Tabellen sind Ausschnitte aus Tabellen 5.303 und 5.304 im Abschnitt 5.5 und zeigen die Strafpunkte aufgeschlüsselt nach VaR-Niveau, Modell und VaR-Methode. Da im Modell 6 nur die A-Variante der FHS-

FEVT- und NORM-Methoden untersucht wurde, werden hier auch nur die A-Varianten des Modells 1 dargestellt.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	12	11	2	0	25
FHS	4	9	0	3	16
FEVT	0	10	0	7	17
NORM	8	10	2	6	26

Tabelle 5.148.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	6	6	3	4	19
FHS	3	9	0	4	16
FEVT	0	9	0	4	13
NORM	7	10	2	9	28

Tabelle 5.149.: VaR-Strafpunkte DJ 10000, SV-Modell 6: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Die Verallgemeinerung des Basis-SV-Modells durch das Einbauen eines additiven Volatilitätsterms zur Renditengleichung (Stochastic-Volatility-in-Mean) hat wegen der dadurch erreichten Asymmetrie der Prognoseverteilungen zu besseren Ergebnissen bei den MCMC/FEVT Methoden geführt und zu ähnlichen Ergebnissen bei den FHS/NORM-Methoden.

5.4.7. Modell 7 RV, SP500 2261 Renditen

Modell 7 wurde in Definition 3.7 eingeführt. Das Modell lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.25)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \lambda x_{t-1} + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.26)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s . $x_{t-1} = \ln(10000 \cdot RV_{t-1})$

Hier ist die Renditengleichung identisch wie beim Basis-SV-Modell, die Volatilitätsgleichung hat einen zusätzlichen Regressor (logarithmierte Realized Volatility des Vortages). Wegen der relativ geringen Stichprobe (2261 Renditen) konnte hier der LB3 Test nicht durchgeführt werden. Hier wird ein anderer Datensatz (Standard and Poors 500 Index) zugrunde gelegt. Um Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde das Basis-SV-Modell (Modell 1) nochmal auf diese (S&P500 -2261 Renditen) Stichprobe angewandt und die Ergebnisse werden mit dem Modell 7RV verglichen (siehe den zusammenfassenden Abschnitt e) zum Modell 7RV).

Das Modell wurde 2261 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 2261 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	-0.07428843	0.01871178	0.04072618
γ	0.01547298	0.57046896	0.62641782
σ_η^2	0.02719918	0.03121233	0.03855785
ϕ	0.2323229	0.3728938	0.5148573
λ	0.31212377	0.42237637	0.53095954

Tabelle 5.150.: Quantile der geschätzten Parameter, SP500 2261, SV-Modell 7RV

Der realisierte Schätzer für λ variiert zwischen 0.05045 und 0.7515. Das Interquartil-Intervall der Volatilitätspersistenz $\hat{\phi}$ ist hier [0.2323229; 0.5148573], was niedriger ist als das bis jetzt übliche Intervall von ca. [0.90; 0.97]. Die fehlende Volatilitätspersistenz wird von λ kompensiert.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

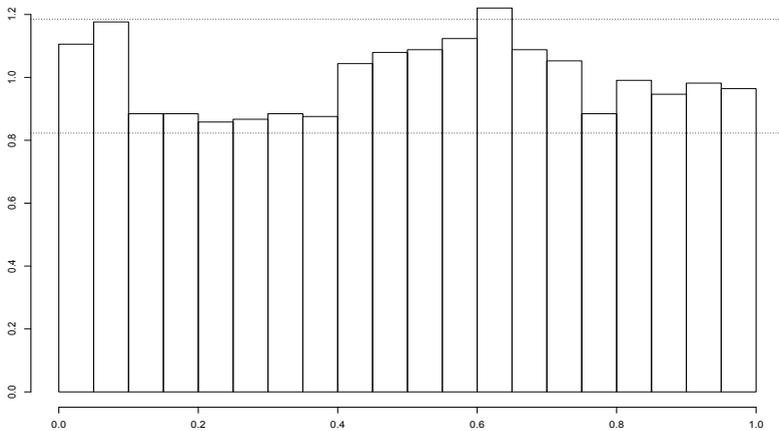


Abbildung 5.31.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.09203

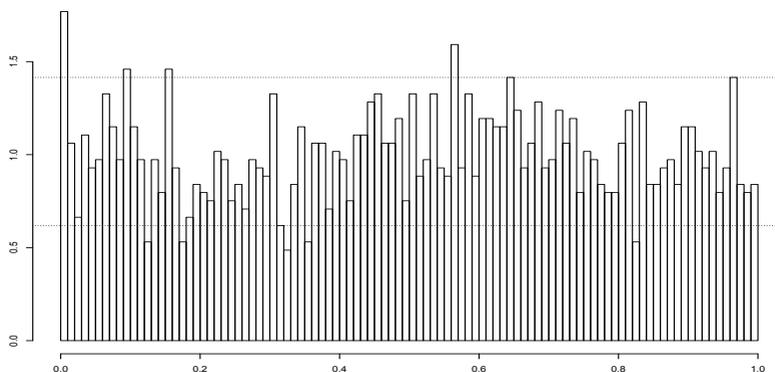


Abbildung 5.32.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.02347

Die Abbildungen zeigen relativ gute Ergebnisse der ganzen Prognoseverteilungen, mit p-Werten 0.092 und 0.023.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	125
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0553; 0.2565
Var(E250); V1; LB1; acf	34.69; 0.00372; 0.2563; –
Var(E125); V2; LB2; acf	14.93; 0.00093; 0.4673; –
Var(E500); V3; LB3; acf	49.67; 0.09711; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.42; 0.3774
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.800583
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.14597; 0.6874 ; 0.01913; 0.03442

Tabelle 5.151.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf allen Niveaus angenommen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests außer V1 und V2 angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests LB1, LB2, LR_{ind} und N111 angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests außer dem LR_{ind} -Test angenommen. Der 0.99-VaR wird von allen Tests außer dem LB1-Test angenommen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	40
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.01769; 0.000914
Var(E250);V1;LB1;acf	11.78; 0.00014; 0.3125; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.07; 0.00039; 0.127; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	26.92; 0.00176; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2299; 0.001978
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.6213
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1009; 0.8156 ; 0.4385; 0.46724

Tabelle 5.152.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	109
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.04821; 0.6943
Var(E250);V1;LB1;acf	6.75; 0.37641; 0.653; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.94; 0.13148; 0.1585; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18; 0.78406; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.018496; 0.05786
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.7784
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0329; 0.44293 ; 0.4397; 0.4405

Tabelle 5.153.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	19
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.008403; 0.4327
Var(E250);V1;LB1;acf	1.86; 0.62847; 0.04104; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.997; 0.61774; 0.3628; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2.25; 0.51531; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5703; 0.6267
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.6016
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0891; 0.4128 ; 0.3592; 0.3547

Tabelle 5.154.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC, ZF=500

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Auch beim Modell 7 wird jeweils nur eine FHS/FEVT/NORM-Variante untersucht (entspricht Variante A; bei den unteren Quantilen war bereits bei dieser Variante der Anteil der VaR-Überschreitungen über dem Zielniveau, eine Verwendung der B-Variante würde diesen Anteil nur noch erhöhen).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	119
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0526; 0.569
Var(E250);V1;LB1;acf	13.19; 0.8336; 0.5871; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.84; 0.1439; 0.9582; –
Var(E500);V3;LB3;acf	23; 0.9821; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7608; 0.8096
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8362
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2212; 0.6865 ; 0.0006237; 0.00442

Tabelle 5.155.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	35
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0155; 0.01535
Var(E250);V1;LB1;acf	7.11; 0.0077; 0.3685; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.53; 0.01795; 0.4092; –
Var(E500);V3;LB3;acf	9.67; 0.1139; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.294; 0.0304
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.797
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.; n.a.

Tabelle 5.156.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-100, ZF=500

Der 0.01-ES wird nicht ermittelt wegen der verwendeten FHS100-Methode und damit verwendete diskrete Prognoseverteilung mit nur 100 Ausprägungen. Der 0.99-ES wird angenommen, die 0.05/0.95-ES werden verworfen. Die 0.05/0.99-VaR werden von allen Tests angenommen (bis auf diejenigen die nicht durchgeführt werden konnten). Der 0.01-VaR wird von allen Tests außer den LR_{PF} , LR_{cc} , V1 und V2-Tests angenommen. Der 0.95-VaR wird nur

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	113
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0499; 0.9962
Var(E250);V1;LB1;acf	9.03; 0.6395; 0.4136; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.07; 0.3599; 0.02528; (4)
Var(E500);V3;LB3;acf	36.92; 0.4693; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0653; 0.1829
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.7242
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0933; 0.4636 ; 0.03464; 0.04011

Tabelle 5.157.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	27
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0119; 0.3679
Var(E250);V1;LB1;acf	1.25; 0.3302; 0.5003; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.44; 0.6552; 0.4292; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2.92; 0.6261; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4191; 0.4801
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.5261
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.009589; 0.5936 ; 0.9338; 0.9351

Tabelle 5.158.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS-250, ZF=500

von dem LB2-Test verworfen (bei allen VaR-Niveaus konnte LB3 nicht durchgeführt werden).

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	124
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0548; 0.2978
Var(E250);V1;LB1;acf	16.19; 0.4617; 0.8136; –
Var(E125);V2;LB2;acf	11.05; 0.0195; 0.9846; –
Var(E500);V3;LB3;acf	22.25; 0.9419; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9367; 0.5768
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8093
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2258; 0.6883 ; 0.0003825; 0.00309

Tabelle 5.159.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	47
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0208; 6.72e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	8.19; 0.00298; 0.7635; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.49; 0.0203; 0.3471; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.67; 0.0414; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1577; 1.44e-05
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.479566
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3775; 1.0233 ; 0.01494; 0.01018

Tabelle 5.160.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	115
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0508; 0.8511
Var(E250);V1;LB1;acf	7; 0.4027; 0.7255; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.65; 0.2571; 0.2172; –
Var(E500);V3;LB3;acf	22.25; 0.9419; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0549; 0.1555
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.696507
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.09961; 0.49612 ; 0.02234; 0.02818

Tabelle 5.161.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-400k40, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	35
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0155; 0.0153
Var(E250);V1;LB1;acf	2.19; 0.8115; 0.6298; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.75; 0.2693; 0.9771; –
Var(E500);V3;LB3;acf	3.33; 0.6962; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.294; 0.0304
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.354909
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.184; 0.4929 ; 0.0341; 0.04982

Tabelle 5.162.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT-250k25, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf allen ES-Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird nur von dem V2-Test verworfen. Der 0.01-VaR wird nur von den LB1, LB2, LR_{ind} und N111-Tests angenommen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests angenommen. Der 0.99-VaR wird nur von den LR_{PF} - und LR_{cc} -Tests verworfen. Der LB3 Test konnte überall nicht durchgeführt werden.

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

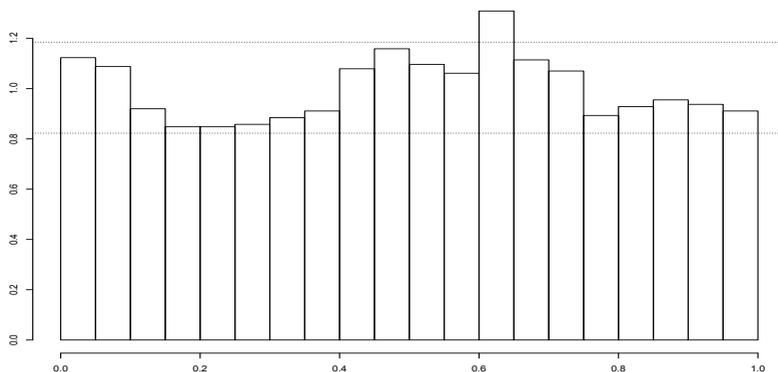


Abbildung 5.33.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500, KL=20);p-Wert=0.01624

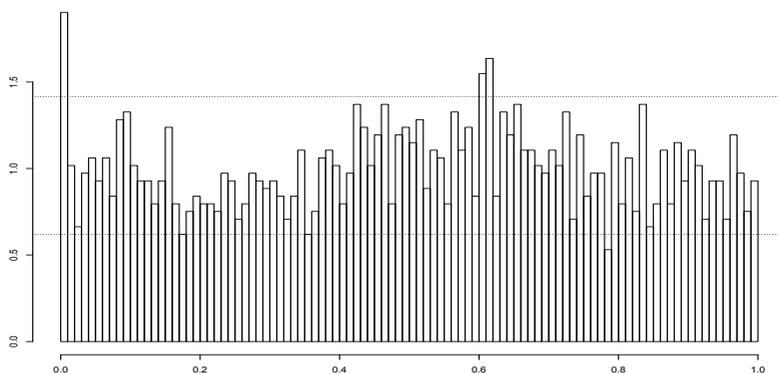


Abbildung 5.34.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500, KL=100);p-Wert=0.04898

Die p-Werte zu den Abbildungen zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen zum Signifikanzniveau 0.05 verworfen werden muss (zum Signifikanzniveau 0.01 erfolgt jedoch Annahme).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	127
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0562; 0.1865
Var(E250);V1;LB1;acf	35.25; 0.00323; 0.2322; –
Var(E125);V2;LB2;acf	15.41; 0.00066; 0.511; –
Var(E500);V3;LB3;acf	58; 0.06282; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3731; 0.2792
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.80914
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1856; 0.6873 ; 0.00286; 0.0111

Tabelle 5.163.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	43
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.019; 0.000127
Var(E250);V1;LB1;acf	16.69; 0; 0.3654; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.899; 0.00001; 0.1747; –
Var(E500);V3;LB3;acf	37.58; 0.00026; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1965; 0.0002782
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.554373
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2633; 0.7878 ; 0.03397; 0.10426

Tabelle 5.164.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall zu den 0.01/0.95/0.99-ES-Niveaus angenommen und zum 0.05-Niveau verworfen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests außer den V1 und V2-Tests angenommen. Der 0.01-Test wird von den LB1, LB2, LR_{ind} und N111-Tests angenommen. Die Varianzen der geclusterten Überschreitungen sind bei den unteren VaR-Niveaus 0.05/0.01 zu hoch. Der 0.95-VaR wird von allen Tests außer dem LR_{ind} -Test angenommen. Der 0.99-VaR wird nur vom LB1-Test verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	103
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0456; 0.3252
Var(E250);V1;LB1;acf	8; 0.5143; 0.7535; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.29; 0.1852; 0.2415; –
Var(E500);V3;LB3;acf	24.25; 0.9904; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0324; 0.0628
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.788247
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.02672; 0.4389 ; 0.538; 0.5408

Tabelle 5.165.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	21
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00929; 0.7305
Var(E250);V1;LB1;acf	2; 0.7328; 0.009329; (1)
Var(E125);V2;LB2;acf	1.09; 0.7862; 0.1189; –
Var(E500);V3;LB3;acf	0.92; 0.2587; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5302; 0.7745
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.53348
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1344; 0.4346 ; 0.1718; 0.1744

Tabelle 5.166.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM, ZF=500

e) Zusammenfassung Modell 7 RV

Zusammenfassend sind zum Modell 7 (mit zusätzlicher Einbeziehung der zuletzt beobachteten Realized Volatility in den Ansatz für die bedingte Volatilität) die guten Expected-Shortfall Ergebnisse bei der MCMC und NORM Methoden zu vermerken. Der 0.05-VaR war nur bei der FHS-Methode hervorragend, der 0.01-VaR bei keiner Methode zufriedenstellend. Die oberen VaR-Niveaus 0.95/0.99 waren überall befriedigend. Die folgenden 8 Tabellen bieten einen Vergleich des Modells 7RV mit dem Basis-SV-Modell.

Prognose mit der MCMC-Renditenverteilung

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•			•	•	•	NA	•	•	•
0.01					•		NA	•	•	•
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
0.99	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•

Tabelle 5.167.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-MCMC: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•			•	•	•	NA	•	•	•
0.01					•	•	NA	•	•	•
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
0.99	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•

Tabelle 5.168.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-MCMC: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit Filtered Historical Simulation

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05		•	•	•	•	•	NA	•	•	
0.01				•	•	•	NA	•	•	NA
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	
0.99	•	•		•	•	•	NA	•	•	

Tabelle 5.169.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-FHS: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•	•	•	•	•	•	•	NA	•	•
0.01				•	•	•		NA	•	NA
0.95	•	•	•	•	•			NA	•	•
0.99	•	•	•	•	•	•		NA	•	•

Tabelle 5.170.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FHS: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit Filtered Extreme Value Theory

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05		•		•	•	•	NA	•	•	
0.01				•	•	•	NA	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	
0.99		•		•	•	•	NA	•	•	

Tabelle 5.171.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-FEVT: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•	•		•	•	•	NA	•	•	
0.01					•	•	NA	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	
0.99		•	•	•	•	•	NA	•	•	

Tabelle 5.172.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-FEVT: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit der (gaußschen) Innovationsverteilung

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•			•	•	•	NA	•	•	
0.01					•	•	NA	•	•	•
0.95	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•
0.99	•	•	•		•	•	NA	•	•	•

Tabelle 5.173.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 1-NORM: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•			•	•	•	NA	•	•	
0.01					•	•	NA	•	•	•
0.95	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
0.99	•	•	•	•		•	NA	•	•	•

Tabelle 5.174.: Ergebnisse S&P500 2261, SV-Modell 7RV-NORM: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Die Tabellen zeigen qualitativ fast identische Ergebnisse bei den MCMC und NORM-Methoden für das Basis-SV-Modell und Modell 7RV. Eine Verbesserung haben die 7RV-FHS/FEVT Methoden im Vergleich zu den 1-FHS/FEVT Methoden gebracht. Bei der 7RV-FHS wird beim 0.05-VaR zusätzlich (zum 1-FHS) der LR_{PF} -Test angenommen und beim 0.99-VaR zusätzlich die V2- und ES-Tests. Bei der 7RV-FEVT werden zusätzlich der LR_{PF} -Test beim 0.05-VaR, der LR_{ind} -Test beim 0.95-VaR und der V2-Test beim 0.99-VaR angenommen. Auf der anderen Seite wird beim 7RV-FEVT-0.01-VaR der V3-Test verworfen. Insgesamt lässt sich feststellen, dass der zusätzliche Realized-Volatility-Term in der Gleichung der bedingten Varianz eine kleine Verbesserung der VaR/ES-Prognosequalität gebracht hat. Eine zusammenfassende Aufstellung mit Strafpunkten wird im zusammenfassenden Abschnitt zum Modell 7 VIX dargestellt.

5.4.8. Modell 7 VIX, SP500 5079 Renditen

Das Modell 7VIX hat die gleiche Modellstruktur wie Modell 7RV, mit dem Unterschied, dass $x_{t-1} = \ln(VIX_{t-1})$. Das Modell lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \epsilon_t \sim NID(0, 1) \quad (5.27)$$

$$h_t = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \lambda x_{t-1} + \eta_t, \eta_t \sim NID(0, \sigma_\eta^2) \quad (5.28)$$

mit ϵ_t und η_s voneinander unabhängig für alle t und s . $x_{t-1} = \ln(VIX_{t-1})$

Im Abschnitt 5.3 wurde bereits der Zeitraum der verwendeten Stichprobe (5579 Renditen) angegeben. Aufgrund der größeren Datenverfügbarkeit zur VIX Zeitreihe wird hier eine größere Stichprobe als beim Modell 7RV verwendet (diese größere Stichprobe umfasst die kleinere Stichprobe von 2761 Renditen). Im Unterschied zum Modell 7RV (und zusätzlich zum Basis-Modell) wird hier ein (logarithmierter) VIX-Term in der Volatilitätsgleichung verwendet. Das Modell 7 wird mit S&P-500-Index-Daten geschätzt, weil sich der VIX Index auf den S&P-500-Index bezieht (als implizite Volatilität von S&P500-Index-Optionen). Im zusammenfassenden Abschnitt e) zum Modell 7VIX wird eine Gegenüberstellung mit dem Basis-SV-Modell gemacht (angewandt auf denselben Datensatz).

Das Modell wurde 5079 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 5079 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.01747013	0.04536026	0.09483747
γ	-4.3041592	-2.5390470	-0.6772996
σ_η^2	0.03498079	0.06380355	0.15931239
ϕ	-0.2226406	0.2025254	0.9242430
λ	0.01870297	0.58959879	1.48663956

Tabelle 5.175.: Quantile der geschätzten Parameter, SP500 5079, SV-Modell 7VIX

Die Wertebereiche der geschätzten Parameter weichen von den Wertebereichen im Modell 7RV ab. Dies liegt an der unterschiedlichen Skalierung,

die $\ln(VIX)$ im Vergleich zu $\ln(10000RV)$ hat. Das führt bei manchen Schätzungen sogar zu negativen Werten von $\hat{\phi}$.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

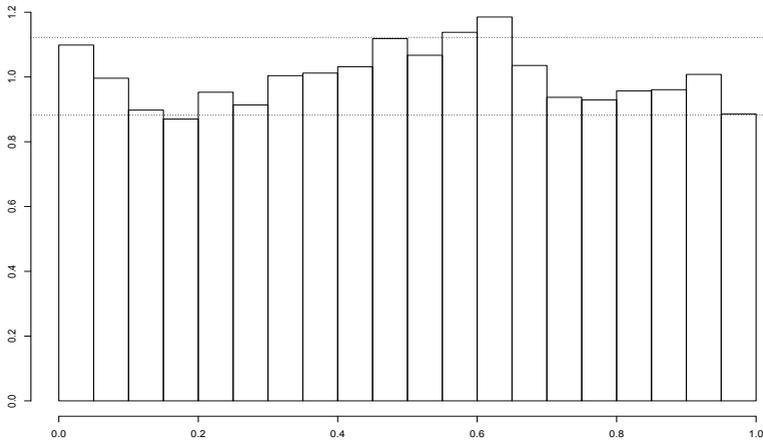


Abbildung 5.35.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.007524

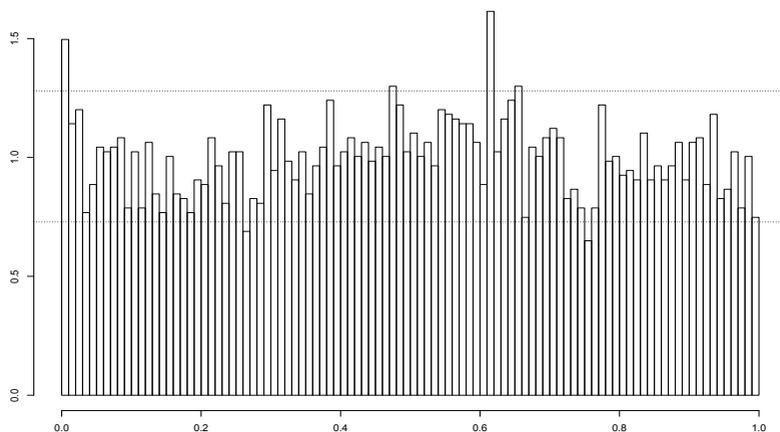


Abbildung 5.36.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.0122

Im Gegensatz zu den guten Ergebnissen bei Verwendung der RV sind hier unter Verwendung des VIX beide p-Werte zu den Abbildungen kleiner als 0.05, dadurch wird zu diesem Niveau die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen n_1	280
$\frac{n_1}{n}; LR_{PF}$	0.05513; 0.0987
Var(E250);V1;LB1;acf	30.68; 0.0003; 0.1094; –
Var(E125);V2;LB2;acf	12.85; 0.00003; 0.5207; –
Var(E500);V3;LB3;acf	75.66; 0.00068; 0.03416; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6942; 0.2356
n111;95%-Intervall $ H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6683
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1609; 0.7534 ; 0.000416; 0.00178

Tabelle 5.176.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	77
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.01516; 0.000593
Var(E250);V1;LB1;acf	10.03; 0; 0.7763; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.12; 0; 0.4467; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21.57; 0.0001; 0.2632; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.4767; 0.002118
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.54572
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2382; 0.8924 ; 0.0218; 0.0406

Tabelle 5.177.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	225
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0443; 0.0575
Var(E250);V1;LB1;acf	14.83; 0.4426; 0.7726; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.69; 0.8592; 0.5311; –
Var(E500);V3;LB3;acf	39.29; 0.135; 0.4642; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.7552; 0.1387
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.75721
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0477; 0.4107 ; 0.08295; 0.08537

Tabelle 5.178.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500

Auch im Hinblick auf den Expected Shortfall sind die Ergebnisse hier (Verwendung des VIX) ungünstiger als beim Modell 7RV (Verwendung der RV). Der Expected Shortfall wird zu den oberen ES-Niveaus 0.95/0.99 angenommen und zu den unteren ES-Niveaus 0.05/0.01 verworfen. Auch der Value-at-Risk wird zu den oberen Niveaus 0.95/0.99 von allen Tests angenommen. Der 0.05-VaR wird von den V1, V2, V3 und LB3 Tests verworfen. Der 0.01-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests (LB1, LB2, LB3, LR_{ind} und N111) angenommen. Im Vergleich zum 7RV-MCMC-ermittelten VaR ist hier eine kleine Verbesserung zu den oberen Niveaus 0.95/0.99 gegeben und eine Verschlechterung beim 0.05-VaR. Es ist an der Stelle anzumerken, dass der größere Stichprobenumfang (5079 > 2261) hier eine größere Hürde an die Ergebnisse auferlegt. So könnte z.B. der LR_{PF} -Test bei gleichem Anteil

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	38
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00748; 0.059
Var(E250);V1;LB1;acf	2.41; 0.939; 0.08712; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.18; 0.8643; 0.9685; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.29; 0.2993; 0.05262; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4491; 0.1267
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.6348
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0959; 0.3221 ; 0.0745; 0.08501

Tabelle 5.179.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC, ZF=500

der VaR-Überschreitungen zu verschiedenen Entscheidungen bei verschiedenen Stichprobengrößen führen.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	289
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0569; 0.0271
Var(E250);V1;LB1;acf	17.2; 0.7768; 0.7555; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.98; 0.1114; 0.4537; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21.96; 0.9039; 0.04498; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5137; 0.06976
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.67525
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2894; 0.7449 ; 1.91e-10; 0

Tabelle 5.180.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250, ZF=500

Die Richtigkeit des Expected Shortfall wird bei allen Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird nur von den LR_{PF} und LB3-Tests verworfen. Der 0.01-VaR und der 0.99-VaR werden nur von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.95-VaR wird von allen Tests angenommen. Im Vergleich zur 7RV-FHS-Methode sind hier Verbesserungen beim 0.01/0.95-VaR und Verschlechterungen bei den 0.05/0.99-VaR zu verzeichnen. Gemessen durch die später im Text

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	95
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0187; 2.66e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	12.51; 0.07411; 0.8323; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.6; 0.57993; 0.7135; –
Var(E500);V3;LB3;acf	22.5; 0.09185; 0.3093; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8674; 1.87e-07
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4114
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4119; 0.8865 ; 1.74e-05; 0.00052

Tabelle 5.181.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	257
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0506; 0.8446
Var(E250);V1;LB1;acf	13.4; 0.83; 0.9487; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.28; 0.8002; 0.9267; –
Var(E500);V3;LB3;acf	23.12; 0.082; 0.6852; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7772; 0.952
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.6868
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1706; 0.4365 ; 1.57e-09; 0

Tabelle 5.182.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	84
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0165; 1.86e-05
Var(E250);V1;LB1;acf	7.04; 0.50631; 0.4824; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.87; 0.20056; 0.8694; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.73; 0.48727; 0.3556; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7239; 9.8e-05
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3447
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1961; 0.4238 ; 5.74e-05; 5e-05

Tabelle 5.183.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS-250, ZF=500

eingeführten Strafpunkten²¹¹, hat die 7VIX-FHS-Variante insgesamt 10 Strafpunkte gegenüber 8 für die 7RV-FHS-Variante. Es ist also insgesamt eine leichte Verschlechterung der Ergebnisse bei Verwendung von VIX (anstatt RV) zu bemerken.

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	282
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0555; 0.0758
Var(E250);V1;LB1;acf	17.63; 0.1241; 0.429; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.74; 0.5599; 0.6222; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.32; 0.5036; 0.02433; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5399; 0.1703
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.7275
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.233; 1.8738 ; 0.03766; 0.2197

Tabelle 5.184.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	121
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0238; 0
Var(E250);V1;LB1;acf	9.16; 0.00002; 0.7431; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.51; 0; 0.8821; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.89; 0.00077; 0.1344; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5736; 3.33e-16
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2651
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.4754; 0.8233 ; 3.97e-09; 0

Tabelle 5.185.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-250, ZF=500

Hier wurde der Expected Shortfall nur auf dem 0.05-ES-Niveau angenommen. Die 0.05/0.95-VaR wurden von allen Tests angenommen! Die 0.01/0.99-VaR wurden nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Im

²¹¹Vgl. Abschnitt 5.5 vor Tabelle 5.303.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	256
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0504; 0.8951
Var(E250);V1;LB1;acf	14.67; 0.4670; 0.8085; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.37; 0.7527; 0.605; –
Var(E500);V3;LB3;acf	26.62; 0.8016; 0.7492; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7996; 0.9659
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.684
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1851; 0.4208 ; 1.79e-11; 0

Tabelle 5.186.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-300, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	96
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0189; 1.37e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	5.38; 0.00538; 0.3514; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.75; 0.00053; 0.8389; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10.49; 0.0283; 0.2234; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5014; 7.95e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.2282
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2621; 0.3688 ; 4.3e-10; 0

Tabelle 5.187.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT-300, ZF=500

zusammenfassenden Abschnitt e) wird in der letzten Tabelle ein Vergleich aufgestellt zwischen den 7RV und 7VIX Modellen. Es ist ersichtlich, dass die FEVT-Methode besser beim 7RV Modell ist (14 vs. 18 Strafpunkte²¹²)

²¹²Vgl. Abschnitt 5.5 vor Tabelle 5.303.

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

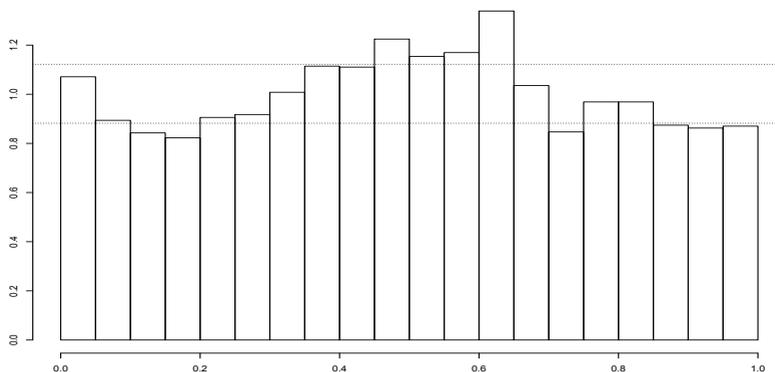


Abbildung 5.37.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=1.01e-13

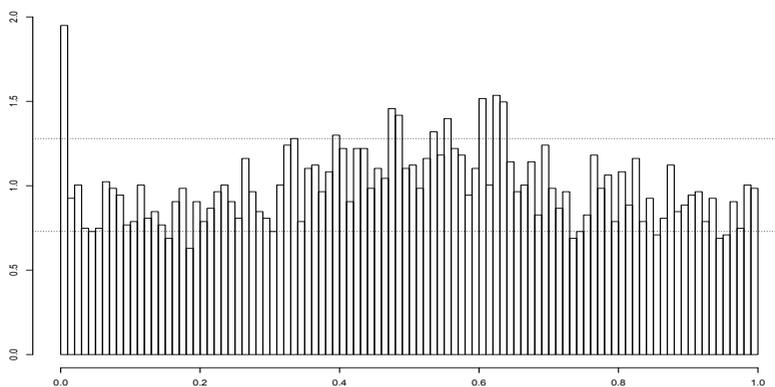


Abbildung 5.38.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=3e-15

Die p-Werte sind kleiner als 0.05, dadurch wird die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes verworfen. Die Form der Grafiken ist typisch für eine Überschätzung der Varianz und für eine tatsächliche Verteilung, die leptokurtisch ist (und nicht normal).

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	272
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0535; 0.2504
Var(E250);V1;LB1;acf	23.63; 0.00763; 0.07709; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	9.87; 0.00735; 0.4878; -
Var(E500);V3;LB3;acf	61.88; 0.00587; 0.01567; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9056; 0.511
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6864
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2747; 0.7514 ; 5.37e-09; 0

Tabelle 5.188.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	99
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.01949; 1.79e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	14.36; 0; 0.7665; -
Var(E125);V2;LB2;acf	5.59; 0; 0.5082; -
Var(E500);V3;LB3;acf	34.32; 0; 0.2254; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4665; 1.05e-08
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.403823
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3836; 0.8346 ; 1.4e-05; 0.0009

Tabelle 5.189.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500

Der Expected Shortfall wurde auf den oberen Niveaus 0.95/0.99 angenommen und auf den unteren 0.05/0.01 verworfen. Der 0.05-VaR wurde von den V1, V2, V3 und LB3-Tests verworfen. Der 0.01-VaR wurde nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Auf den 0.05/0.01-VaR-Niveaus waren die Varianzen der geclusterten Überschreitungen zu hoch. Der 0.95-VaR wurde von allen Tests angenommen und der 0.99-VaR wurde nur vom LB3-Test verworfen. Im zusammenfassenden Abschnitt e) wird in der letzten Tabelle ein Vergleich aufgestellt zwischen den 7RV und 7VIX Modellen. Es ist ersichtlich,

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	221
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0435; 0.1137
Var(E250);V1;LB1;acf	13.04; 0.7651; 0.904; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.12; 0.5522; 0.7251; –
Var(E500);V3;LB3;acf	36.62; 0.2252; 0.3048; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0597; 0.04888
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.776455
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0444; 0.4059 ; 0.1043; 0.10531

Tabelle 5.190.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	50
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0098; 0.9111
Var(E250);V1;LB1;acf	2.16; 0.7137; 0.06489; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.31; 0.8243; 0.9537; 11
Var(E500);V3;LB3;acf	5.66; 0.7652; 0.003941; 3
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3187; 0.6045
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4938
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0555; 0.3199 ; 0.2256; 0.2311

Tabelle 5.191.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM, ZF=500

dass die NORM-Methode besser beim 7RV Modell ist (15 vs. 17 Strafpunkte²¹³)

²¹³Vgl. Abschnitt 5.5 vor Tabelle 5.303.

e) Zusammenfassung Modell 7 VIX

Zusammenfassend sind zum Modell 7VIX die stets einwandfreien Ergebnisse des 0.95-VaR hervorzuheben. Der 0.05-VaR war nur bei FEVT sehr gut. Der 0.01-VaR war bei keiner der Methoden annehmbar. Der 0.99-VaR war bei der ersten und letzten Methoden annehmbar, bei FEVT und FHS jedoch nicht. Ein Vergleich mit dem Basis-SV-Modell zeigt die Überlegenheit des 7VIX-Modells bei allen 4 Methoden.

Prognose mit MCMC-simulierter Prognoserendite

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05					•	•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95		•	•	•	•	•	•	•	•	
0.99	•	•	•	•	•	•		•	•	

Tabelle 5.192.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 1-MCMC: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•				•	•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 5.193.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-MCMC: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit Filtered Historical Simulation

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05		•	•	•	•	•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
0.99	•	•		•	•	•	•	•	•	

Tabelle 5.194.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 1-FHS: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05		•	•	•	•	•		•	•	
0.01		•	•	•	•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
0.99		•	•	•	•	•	•	•	•	

Tabelle 5.195.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FHS: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit Filtered Extreme Value Theory

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05		•	•	•	•	•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•		•	
0.99				•	•	•	•	•	•	

Tabelle 5.196.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 1-FEVT: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0.01					•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
0.99					•	•	•	•	•	

Tabelle 5.197.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-FEVT: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Prognose mit der gaußschen Innovationsverteilung

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•					•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95		•	•	•	•	•	•		•	•
0.99	•	•	•	•	•	•		•	•	•

Tabelle 5.198.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 1-NORM: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

VaR-Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
0.05	•				•	•		•	•	
0.01					•	•	•	•	•	
0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0.99	•	•	•	•	•	•		•	•	•

Tabelle 5.199.: Ergebnisse S&P500 5079, SV-Modell 7VIX-NORM: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05)

Die folgende Tabelle zeigt in noch kompakterer Form die VaR-Ergebnisse (Strafpunkte) der 4 Modelle mit je 4 Methoden : 1 (SP 2261), 1 (SP 5079), 7RV (SP 2261), 7VIX (SP 5079).

Methode/Modell	1 (2261)	1 (5079)	7RV (2261)	7VIX (5079)
MCMC	15	24	15	16
FHS	13	15	8	10
FEVT	18	21	14	18
NORM	15	22	15	17

Tabelle 5.200.: Strafpunkte S&P500 2261&5079, SV-Modelle 1,7: Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Wie diese Tabelle zeigt, sind die 7RV Ergebnisse besser als die 7VIX Ergebnisse, aber auch die 1 (2261) Ergebnisse sind besser als die 1 (5079) Ergebnisse. Die schlechteren 7VIX Ergebnisse können somit ein Artefakt der größeren Stichprobe sein. Wie die Tabelle zeigt, sind sowohl die 7RV als auch 7VIX Ergebnisse besser als die jeweiligen 1-Ergebnisse. Die Verallgemeinerung durch die Aufnahme eines zusätzlichen Regressors (RV oder VIX) in die Volatilitätsgleichung hat zur Verbesserung im Vergleich zum Basis SV-Modell geführt.

5.4.9. Modell 8, SP500 2261 Renditen

Modell 8 wurde in Definition 3.8 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \tag{5.29}$$

$$\ln(10000RV_t) = \xi + h_t + u_t \tag{5.30}$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \eta_t, \tag{5.31}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho\sigma_\eta \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ \rho\sigma_\eta & 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Das Modell wurde 2261 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 2261 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	-0.03217984	0.02498179	0.05221817
γ	-0.80539224	0.09018185	0.36430344
σ_η^2	0.02463245	0.03013805	0.05172482
σ_u^2	0.1274829	0.1483034	0.1661244
ϕ	0.9188146	0.9297856	0.9759603
ρ	-0.7057741	-0.6427416	-0.5718372
ξ	-0.6297561	-0.6014465	-0.5791104

Tabelle 5.201.: Quantile der geschätzten Parameter, SP500 2261, SV-Modell 8

Es ist anzumerken, dass alle 2261 geschätzten Werte für ρ negativ sind: $\hat{\rho}$ variiert zwischen -0.8596 und -0.4298 . Das impliziert einen Leverage-Effekt bei allen Schätzungen. Alle Werte von $\hat{\xi}$ sind ebenfalls negativ: $\hat{\xi}$ variiert zwischen -0.7519 und -0.5077 . Diese Ergebnisse stimmen qualitativ mit den Ergebnissen in Takahashi et al. (2009, S. 2418) überein²¹⁴.

²¹⁴Takahashi et al. (2009) untersuchen den Tokyo Stock Price Index (TOPIX) für die Periode 1.4.1996-31.03.2005.

Takahashi et al. (2009, S. 2408) argumentieren, dass die negative Verzerrung der Realized Volatility (TSRV im Abschnitt 5.3) auf die unberücksichtigte Volatilität der Nicht-Handelszeiten zurückzuführen ist.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

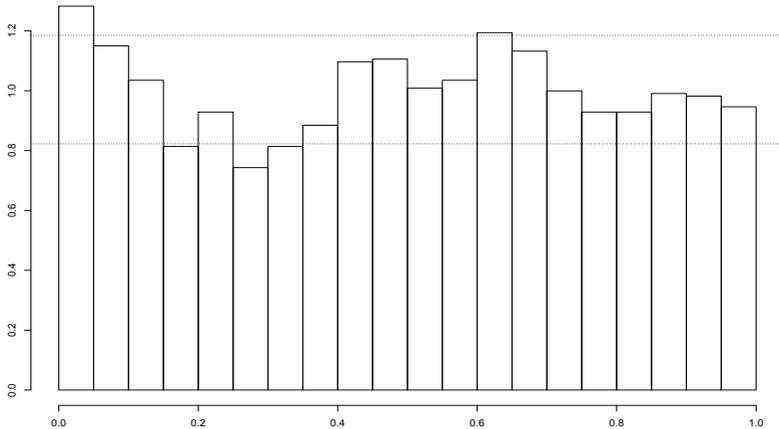


Abbildung 5.39.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.00402

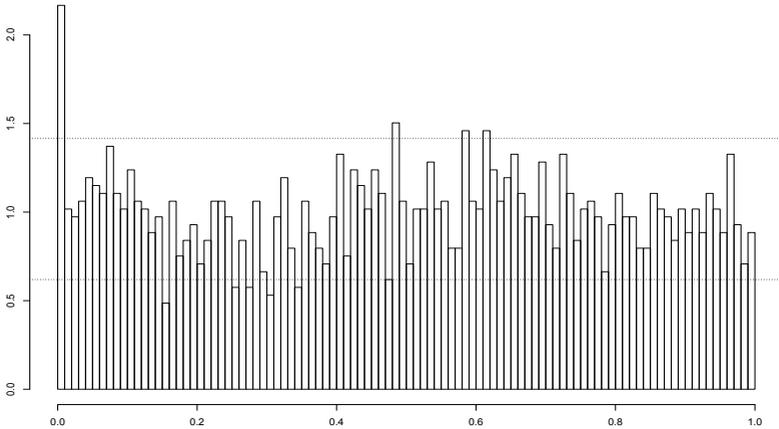


Abbildung 5.40.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.02528

Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes verworfen werden muss.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	145
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.06413; 0.003079
Var(E250);V1;LB1;acf	45.86; 0.00032; 0.3496; –
Var(E125);V2;LB2;acf	19.11; 0.00002; 0.3367; –
Var(E500);V3;LB3;acf	45.33; 0.15893; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.915; 0.01227
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.721904
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.17912; 0.685847 ; 0.002018; 0.00734

Tabelle 5.202.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird zu den Niveaus 0.01/0.95/0.99 angenommen. Der 0.05-VaR wird von den folgenden Tests verworfen: $LR_{PF}, LR_{cc}, V1$ und $V2$. Hier sind die Varianzen der geclusterten Überschreitungen zu den 250 und 125-Clustern zu hoch. Der 0.01-VaR wird nur von den LB1, LR_{ind} und N111-Test angenommen, hier sind die Varianzen zu allen betrachteten Clustergrößen

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	49
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.02167; 1.366e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	26; 0; 0.2019; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.35; 0; 0.02243; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	48.33; 0.00003; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1405; 2.87e-06
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.496726
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.17785; 0.7625 ; 0.1091; 0.15202

Tabelle 5.203.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	107
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.04732; 0.5559
Var(E250);V1;LB1;acf	8.44; 0.5567; 0.5124; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.63; 0.2509; 0.02985; (4)
Var(E500);V3;LB3;acf	33.67; 0.605; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0224; 0.06216
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.74098
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0222; 0.4266 ; 0.5915; 0.5926

Tabelle 5.204.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	20
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.008846; 0.5736
Var(E250);V1;LB1;acf	1.69; 0.5229; 0.09911; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.93; 0.5267; 0.006256; (5)
Var(E500);V3;LB3;acf	1.58; 0.3218; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5501; 0.7148
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.511857
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.06729; 0.3773 ; 0.4349; 0.4489

Tabelle 5.205.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-MCMC, ZF=500

zu hoch. Der 0.95-VaR wird von den LB2 und LR_{ind} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur vom LB2-Test verworfen. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 8 zu finden.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	130
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0575; 0.1097
Var(E250);V1;LB1;acf	20.25; 0.1271; 0.463; –
Var(E125);V2;LB2;acf	10.03; 0.0433; 0.7439; –
Var(E500);V3;LB3;acf	40.25; 0.3498; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.841; 0.2707
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.81579
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2370; 0.6589 ; 7.21e-05; 0.00126

Tabelle 5.206.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	37
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 0.00534
Var(E250);V1;LB1;acf	9.61; 0.0009; 0.5093; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.76; 0.01; 0.05205; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	11.67; 0.0663; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2671; 0.01109
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.467988
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.;

Tabelle 5.207.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-100, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur zum ES-Niveau 0.95 angenommen. Der 0.05-VaR wird vom V2-Test verworfen. Der 0.01-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{cc} , V1 und V2 Tests verworfen. Bei den 0.05/0.01-VaR sind die Varianzen der geclusterten Überschreitungen zum Teil zu hoch. Der 0.95-VaR wird nur vom LR_{ind} -Test verworfen und der 0.99-VaR wird von allen Tests

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	110
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0487; 0.7676
Var(E250);V1;LB1;acf	9.86; 0.7368; 0.5497; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.53; 0.4957; 0.1617; –
Var(E500);V3;LB3;acf	36.92; 0.4693; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.01678; 0.05493
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.71945
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.06311; 0.4364 ; 0.1322; 0.1381

Tabelle 5.208.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	22
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00973; 0.897
Var(E250);V1;LB1;acf	2.03; 0.7639; 0.4624; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.01; 0.6434; 0.151; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2.92; 0.6261; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5107; 0.799
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3673
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.3135; 0.4137 ; 0.001875; 0.00219

Tabelle 5.209.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FHS-500, ZF=500

angenommen. Es gab vereinzelt ES-Tests die nicht durchgeführt werden konnten²¹⁵ (Angabe von n.a. in der entsprechenden Tabelle). Der LB3 Test konnte überall nicht durchgeführt werden wegen der relativ kleinen Stichprobe von 2261 Beobachtungen, die weniger als 5 zweijährige Abschnitte impliziert. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 8 zu finden.

²¹⁵Bei FHS-100 ist der 0.01-VaR bereits gleich der kleinsten gefilterten Rendite und für einen 0.01-ES fehlt dann die Information.

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	130
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0575; 0.1098
Var(E250);V1;LB1;acf	11.75; 0.9889; 0.698; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.91; 0.9913; 0.7822; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.92; 0.3373; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3094; 0.1648
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8383
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2471; 0.6791 ; 6.01e-05; 0.00123

Tabelle 5.210.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	56
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0248; 2.83e-09
Var(E250);V1;LB1;acf	8.36; 0.0025; 0.5646; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.64; 0.01345; 0.1868; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	12; 0.0663; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.723; 2e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.3761
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3638; 0.8303 ; 0.001808; 0.00912

Tabelle 5.211.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-100k10, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur zum ES-Niveau von 0.95 angenommen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests angenommen. Der 0.01-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{cc} , V1 und V2 Tests verworfen. Hier ist der Anteil der Überschreitungen viel zu hoch (0.0248 bei einem Sollwert von 0.01) und die ersten 2 Varianzen sind auch zu hoch. Der 0.95-VaR wird von den LB2, LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur vom LB2-Test verworfen. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 8 zu finden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	112
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0495; 0.9192
Var(E250);V1;LB1;acf	9.19; 0.6489; 0.2781; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.10; 0.3664; 0.02136; (4)
Var(E500);V3;LB3;acf	31.33; 0.6935; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.01377; 0.0479
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.7214
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.07885; 0.4314 ; 0.05565; 0.06295

Tabelle 5.212.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-500k50, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	24
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.01061; 0.7711
Var(E250);V1;LB1;acf	1.75; 0.5845; 0.2121; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.06; 0.7199; 0.04983; (5)
Var(E500);V3;LB3;acf	2; 0.4686; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.4729; 0.7404
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3199
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.3344; 0.4225 ; 0.0007632; 0.00145

Tabelle 5.213.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-FEVT-500k50, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

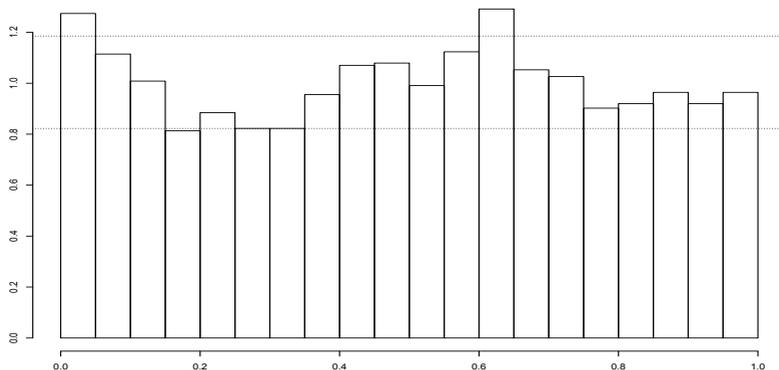


Abbildung 5.41.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.005063

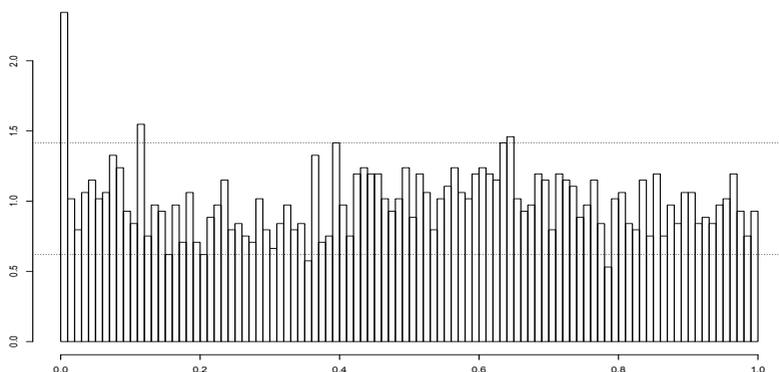


Abbildung 5.42.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (SV-Modell 8-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.01059

Aus den Abbildungen ist ersichtlich, dass die Richtigkeit der ganzen Prognoseverteilungen verworfen werden muss.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	144
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0637; 0.0041
Var(E250);V1;LB1;acf	39.94; 0.0011; 0.4163; –
Var(E125);V2;LB2;acf	17.40; 0.00005; 0.4595; –
Var(E500);V3;LB3;acf	33.33; 0.6182; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6726; 0.01465
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.7283
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2164; 0.6830 ; 0.000211; 0.00182

Tabelle 5.214.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	53
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.02344; 4.47e-08
Var(E250);V1;LB1;acf	29.69; 0; 0.2369; –
Var(E125);V2;LB2;acf	9.05; 0; 0.01044; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	52.67; 0; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1106; 8.73e-08
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4478
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2489; 0.7471 ; 0.0188; 0.06301

Tabelle 5.215.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM, ZF=500

Die Ergebnisse sind hier qualitativ identisch mit denen zur MCMC-Methode (beim Modell 8), so dass das Geschriebene zum ersten Abschnitt wiederholt werden kann.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	109
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.04821; 0.6943
Var(E250);V1;LB1;acf	10; 0.7623; 0.2804; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.12; 0.3738; 0.01022; (4)
Var(E500);V3;LB3;acf	39.33; 0.3712; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0185; 0.05786
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.74499
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.000711; 0.4273 ; 0.9862; 0.9859

Tabelle 5.216.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	21
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00929; 0.7305
Var(E250);V1;LB1;acf	1.5; 0.4538; 0.1017; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.97; 0.5837; 0.003131; (5)
Var(E500);V3;LB3;acf	1.58; 0.3218; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5302; 0.7745
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4645
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1476; 0.3761 ; 0.0872; 0.0932

Tabelle 5.217.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, SV-Modell 8-NORM, ZF=500

e) Zusammenfassung Modell 8

Zusammenfassend lässt sich zum Modell 8 hervorheben, dass der 0.95-ES überall angenommen wurde, und der 0.01/0.99-ES bei den Methoden 8MCMC und 8NORM. Der 0.99-VaR war überall annehmbar, der 0.05-VaR nur bei beiden Filtering Methoden 8FHS und 8FEVT. Die 0.01/0.95-VaR waren bei allen Methoden nicht zufriedenstellend.

Die folgenden 3 Tabellen geben Auskunft über die erreichten Strafpunkte²¹⁶ in Modellen 1, 3 und 8, alle angewandt auf die S&P 2261 Stichprobe. Die Wahl fiel auf diese Modelle (1 und 3), da Modell 1 das Basis Modell ist, Modell 3 den Leverage-Effekt einführt und Modell 8 zusätzlich noch die Realized-Volatility ins Modell integriert.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	4	10	1	0	15
FHS	3	7	1	2	13
FEVT	5	7	1	5	18
NORM	4	9	0	2	15

Tabelle 5.218.: VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	4	10	3	0	17
FHS	0	3	1	0	4
FEVT	0	5	3	3	11
NORM	4	10	6	0	20

Tabelle 5.219.: VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 3: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

²¹⁶Der Autor ist bereit, auf Nachfrage die detaillierten Ergebnisse (Annahme/Ablehnung) zu den 9 Tests zuzüglich des ES-Tests zu Modell 3 zur Verfügung zu stellen. Die ausführlichen Ergebnisse zu Modell 1 wurden bereits im Fazit zum Modell 7RV dargestellt. Die Performance der Expected Shortfall-Prognosen des Modells 8 ist ähnlich wie beim Modell 3, mit einer kleinen Verschlechterung des FHS-0.99-ES.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	7	10	2	1	20
FHS	2	7	1	0	10
FEVT	0	7	2	1	10
NORM	7	10	2	1	20

Tabelle 5.220.: VaR-Strafpunkte S&P 2261, SV-Modell 8: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Die folgende Tabelle zeigt in noch kompakterer Form die VaR-Ergebnisse (Strafpunkte) der 3 Modelle mit je 4 Methoden : 1 (SP 2261), 3 (SP 2261), 8 (SP 2261).

Methode/Modell	1	3	8
MCMC	15	17	20
FHS	13	4	10
FEVT	18	11	10
NORM	15	20	20

Tabelle 5.221.: Strafpunkte S&P500 2261, SV-Modelle 1, 3, 8: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} oder N111-Verwerfung.

Die Ergebnisse der MCMC/NORM Methoden verschlechtern sich bei Erhöhung des Komplexitätsgrads des Modells. Bei der FHS Methode hat das Modell 3 die besten Ergebnisse erzielt; die FHS-Ergebnisse des Modells 8 sind besser als die des Modells 1, jedoch schlechter als die des Modells 3. Die FEVT Ergebnisse verbessern sich bei Erhöhung des Komplexitätsgrads.

5.4.10. Modell 9, SP500 5579 Renditen

SV-Modell 9 wurde in Definition 3.9 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (5.32)$$

$$\ln VIX_t = \xi + \psi h_t + u_t \quad (5.33)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \eta_t, \quad (5.34)$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ u_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho\sigma_\eta \\ 0 & \sigma_u^2 & 0 \\ \rho\sigma_\eta & 0 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right)$$

Modell 9 ist ein leicht modifiziertes Modell 8 unter Verwendung des VIX-Index anstatt der Realized Volatility. h_t wird dann an $\ln(VIX)$ in der zweiten Modellgleichung angebunden. Wegen unterschiedlicher Skalierung von VIX und RV wurde der Parameter ψ eingeführt. Der VIX Index bezieht sich auf die implizite Volatilität (als Standardabweichung und in Prozent) des S&P-500-Index für die nächsten 30 Tage, die annualisiert wird. Deshalb wird hier der S&P 500-Aktienindex untersucht, wie schon bei Modellen 7 und 8. Die Stichprobe umfasst 5579 Renditen²¹⁷ wegen der zeitlich größeren Verfügbarkeit des VIX-Index im Vergleich zu Realized Volatility, die nur für 2761 Tage zur Verfügung gestanden hat.

Das Modell wurde 5079 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Tabelle 5.222 gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 5079 Werten).

²¹⁷Wegen des Schätzungs-Zeitfenster von 500 Beobachtungen wird die Prognose lediglich für die letzten 5079 Tage vollzogen.

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	0.03931642	0.06211279	0.11590040
γ	-0.9898087	-0.2718407	0.3645061
σ_η^2	0.010024372	0.013788819	0.018912229
σ_u^2	0.0009900504	0.0011471251	0.0014111790
ϕ	0.9678009	0.9798338	0.9902787
ρ	-0.276583366	-0.223509338	-0.173652451
ξ	2.996285	3.036365	3.079435
ψ	0.3336640	0.3657371	0.4024153

Tabelle 5.222.: Quantile der geschätzten Parameter, SP500 5079, SV-Modell 9

Der realisierte Schätzer für ρ variiert zwischen -0.3819 und -0.004337 , ist also immer negativ, in Übereinstimmung mit dem Leverage-Effekt. Der realisierte Schätzer für ξ variiert zwischen 2.80 und 3.19 . Der realisierte Schätzer für ψ variiert zwischen 0.252 und 0.5629 . Es ist ein Wert von ca. 0.5 für ψ zu erwarten, wenn man von einer Approximation Jahresvolatilität $= \sqrt{\text{Tagessvarianz}} \sqrt{250}$ ausgeht, was nach Logarithmieren zu $\ln(\text{Jahresvolatilität}) = 2.76 + 0.5 \cdot \ln(\text{Tagessvarianz})$ führt. Dies bedeutet, dass eine approximative Beziehung $\ln VIX_t = 2.76 + 0.5h_t + u_t$ zu erwarten ist, was in etwa durch die Schätzungen bestätigt wird.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875 , 5.9375 und 23.75 für den $0.05/0.95$ -VaR und 2.475 , 1.2375 und 4.95 für den $0.01/0.99$ -VaR. Standardabweichungen der auf $(-\infty, z_\alpha)$ gestutzten Standardnormalverteilung sind 0.3716 bei $\alpha = 0.05$ und 0.3112 für $\alpha = 0.01$ (zu vergleichen mit $\text{sd}(\text{ESA})$).

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

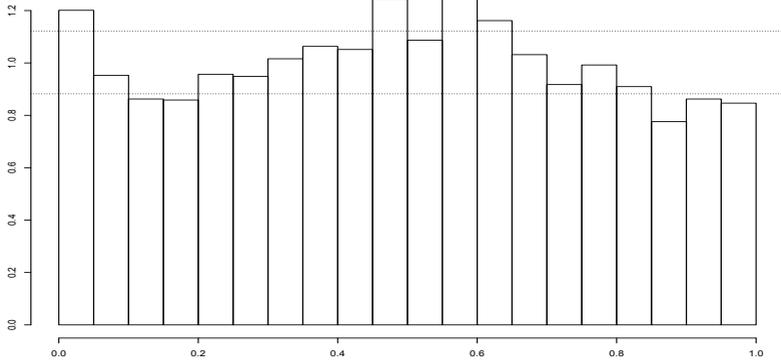


Abbildung 5.43.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=1.4e-11

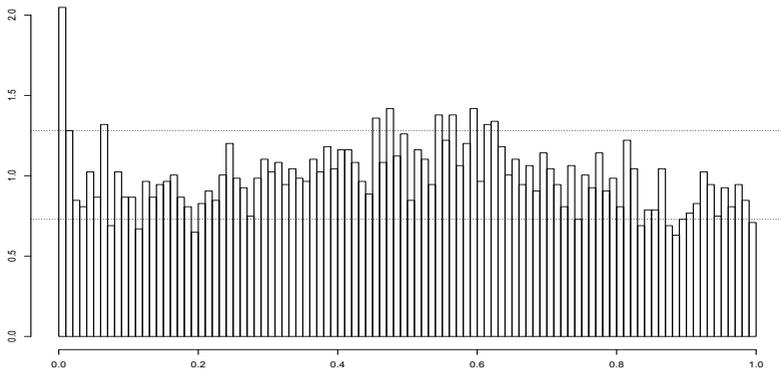


Abbildung 5.44.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=4.97e-12

Die Abbildungen zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen verworfen werden muss. Erwünscht wäre eine etwas kleinere Varianz dazu aber fat tails im linken Teil der Verteilungen. Auch die Anbindung von h_t an $\ln(VIX_t)$ scheint keine Verbesserung der Prognoseverteilung zu bringen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	305
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.06; 0.001421
Var(E250);V1;LB1;acf	28.2; 0.00104; 0.4586; –
Var(E125);V2;LB2;acf	11.43; 0.00077; 0.4907; –
Var(E500);V3;LB3;acf	49.29; 0.02897; 0.5371; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9366; 0.006078
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6948
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.213; 0.7039 ; 2.41e-07; 1e-05

Tabelle 5.223.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	105
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0207; 2.32e-11
Var(E250);V1;LB1;acf	8.91; 0.00003; 0.8017; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.4; 0; 0.04334; 3
Var(E500);V3;LB3;acf	18.71; 0.00037; 0.7101; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9044; 1.95e-10
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4521
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2517; 0.8256 ; 0.002311; 0.01359

Tabelle 5.224.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird zu den oberen 0.95/0.99-ES-Niveaus angenommen und zu den unteren 0.05/0.01 verworfen. Der Value-at-Risk ist zu keinem Niveau befriedigend. Der 0.05-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den LB1, LB3, LR_{ind} und N111-Tests angenommen. Der 0.95-VaR wird von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur vom LR_{PF} -Test verworfen. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 9 zu finden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	215
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.04233; 0.01
Var(E250);V1;LB1;acf	14.78; 0.4492; 0.3387; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.81; 0.9256; 0.2465; –
Var(E500);V3;LB3;acf	35.51; 0.2713; 0.2352; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9832; 0.0309
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.8352
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0315; 0.3829 ; 0.2288; 0.2312

Tabelle 5.225.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	36
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.007088; 0.02777
Var(E250);V1;LB1;acf	2.48; 0.9867; 0.322; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.17; 0.8396; 0.3019; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.38; 0.2854; 0.8693; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4734; 0.06888
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.593
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0146; 0.4103 ; 0.8326; 0.8366

Tabelle 5.226.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-MCMC, ZF=500

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	290
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0571; 0.0231
Var(E250);V1;LB1;acf	12.36; 0.9001; 0.1021; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.09; 0.3980; 0.004936; (1,4)
Var(E500);V3;LB3;acf	16.62; 0.5217; 0.7651; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.883; 0.07435
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.75464
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1563; 0.7188 ; 0.0002557; 0.00156

Tabelle 5.227.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	75
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0148; 0.00143
Var(E250);V1;LB1;acf	3.88; 0.08755; 0.5419; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.09; 0.00006; 0.0004755; 3
Var(E500);V3;LB3;acf	9.39; 0.052; 0.8554; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9159; 0.00614
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.70169
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.157; 1.042 ; 0.196; 0.2008

Tabelle 5.228.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-250, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall zu den 0.01/0.95/0.99-ES-Niveaus angenommen und zum 0.05-ES-Niveau verworfen. Der Value-at-Risk ist zu keinem Niveau befriedigend, hier führt der LR_{PF} -Test überall zur Verwerfung der Nullhypothese, bei den unteren VaR-Niveaus 0.05/0.01 ist der Anteil der Überschreitungen zu hoch, bei den oberen Niveaus 0.95/0.99 zu niedrig. Darüber hinaus wird der 0.05-VaR noch vom LB2-Test verworfen, der 0.01-VaR noch von den LR_{cc} , V2 und LB2-Tests verworfen und die 0.95/0.99-VaR noch vom LR_{cc} -Test verworfen. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 9 zu finden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	198
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.03898; 0.00018
Var(E250);V1;LB1;acf	13.04; 0.7651; 0.6568; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.45; 0.7237; 0.2017; –
Var(E500);V3;LB3;acf	19.61; 0.7143; 0.2665; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.9054; 0.000707
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.8477
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0414; 0.3854 ; 0.1319; 0.1343

Tabelle 5.229.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-500, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	32
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0063; 0.00446
Var(E250);V1;LB1;acf	1.94; 0.525; 0.4233; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.85; 0.2259; 0.362; (6),10
Var(E500);V3;LB3;acf	4.77; 0.9448; 0.8283; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.5241; 0.01439
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.59542
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0108; 0.5083 ; 0.9044; 0.9061

Tabelle 5.230.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FHS-500, ZF=500

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	301
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0593; 0.0032
Var(E250);V1;LB1;acf	9.05; 0.4623; 0.4451; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.92; 0.4573; 0.5433; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10; 0.1917; 0.5978; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.831; 0.01259
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.799332
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2009; 0.7163 ; 1.99e-06; 5e-05

Tabelle 5.231.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	100
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0197; 8.88e-10
Var(E250);V1;LB1;acf	4; 0.06634; 0.1657; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.38; 0.00002; 0.0011; (1) 3
Var(E500);V3;LB3;acf	8.44; 0.1143; 0.7; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4856; 5.43e-09
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4838
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3543; 0.892 ; 0.0001353; 0.00162

Tabelle 5.232.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	207
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0408; 0.001817
Var(E250);V1;LB1;acf	11.96; 0.9809; 0.07933; (1)
Var(E125);V2;LB2;acf	4.71; 0.3685; 0.02714; (2)
Var(E500);V3;LB3;acf	12.71; 0.304; 0.4225; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6055; 0.0055
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.84956
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.03745; 0.3748 ; 0.1521; 0.1567

Tabelle 5.233.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-300k30, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	46
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0091; 0.4924
Var(E250);V1;LB1;acf	1.25; 0.135; 0.644; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.14; 0.7647; 0.121; (1) 14
Var(E500);V3;LB3;acf	2.06; 0.1967; 0.581; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4389; 0.5861
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4886
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1657; 0.3525 ; 0.002612; 0.00342

Tabelle 5.234.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-FEVT-100k10, ZF=500

Hier wird nur der 0.95-Expected Shortfall angenommen. Der Value-at-Risk ist nur auf 0.99-VaR-Niveau einwandfrei. Der 0.05-VaR wird von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen, der 0.01-VaR wird von den $LR_{PF}, LR_{cc}, V2$ und $LB2$ -Tests verworfen und der 0.95-VaR wird von den LR_{PF}, LR_{cc} und $LB2$ -Tests verworfen. Hier ist der Anteil der Überschreitungen zu den 0.05/0.01-VaR wieder zu hoch, und zum 0.95-VaR zu niedrig. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 9 zu finden.

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

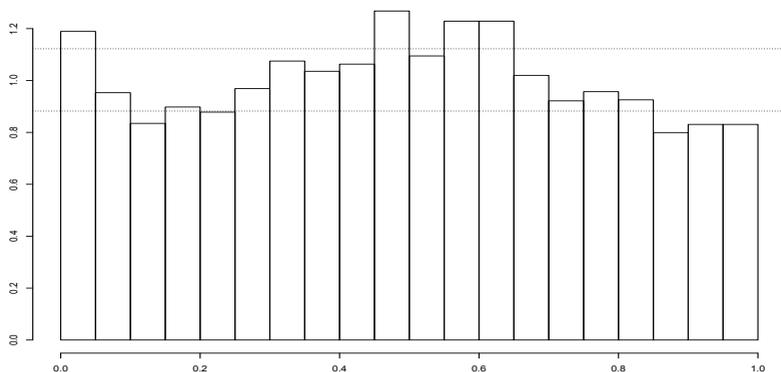


Abbildung 5.45.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=3.01e-13

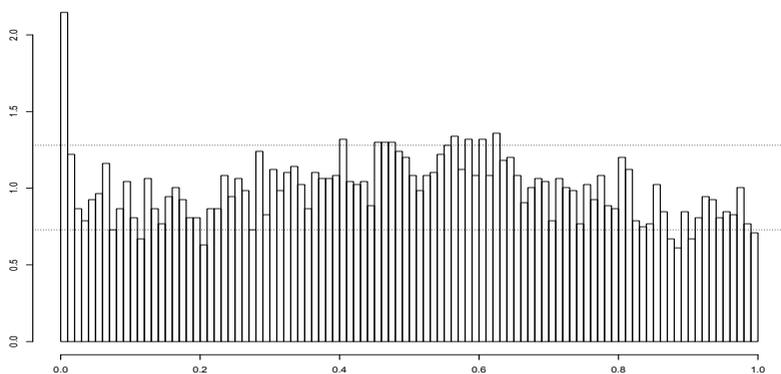


Abbildung 5.46.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (SV-Modell 9-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=1.21e-12

Die Abbildungen zeigen, dass die Richtigkeit der gaußschen Prognoseverteilungen verworfen werden muss. Eine etwas kleinere Varianz wäre erwünscht, dazu aber fat tails im linken Verteilungsende.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	302
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0595; 0.00263
Var(E250);V1;LB1;acf	29.63; 0.00052; 0.6061; –
Var(E125);V2;LB2;acf	12.1; 0.00024; 0.4887; –
Var(E500);V3;LB3;acf	51.21; 0.0226; 0.6115; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7959; 0.01039
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.698424
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2314; 0.7063 ; 2.96e-08; 1e-05

Tabelle 5.235.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	109
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.02146; 1.06e-12
Var(E250);V1;LB1;acf	10.57; 0; 0.7195; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.93; 0; 0.04146; 3
Var(E500);V3;LB3;acf	21.51; 0.0001; 0.6589; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8161; 9.27e-12
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.431123
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2756; 0.8157 ; 0.000617; 0.00756

Tabelle 5.236.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM, ZF=500

Der Expected Shortfall wurde nur auf dem 0.95-ES-Niveau angenommen. Der 0.05-VaR wurde nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.01-VaR wurde von den Unabhängigkeitstests angenommen außer dem LB2-Test. Der 0.95-VaR wurde von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen und der 0.99-VaR wurde nur vom LR_{PF} -Test verworfen. Ein Vergleich mit SV-Modell 3, angewandt auf die gleiche Stichprobe, ist in der Zusammenfassung des Modells 9 zu finden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	211
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0415; 0.00444
Var(E250);V1;LB1;acf	15.73; 0.3107; 0.2754; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.01; 0.9569; 0.1407; 1
Var(E500);V3;LB3;acf	40.4; 0.1084; 0.1763; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7951; 0.01401
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.838461
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.01669; 0.3819 ; 0.52599; 0.5307

Tabelle 5.237.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	36
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.007088; 0.0278
Var(E250);V1;LB1;acf	2.38; 0.9184; 0.5011; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.02; 0.5059; 0.2101; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.6; 0.7927; 0.679; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4734; 0.06888
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.571161
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0331; 0.4133 ; 0.63396; 0.6423

Tabelle 5.238.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, SV-Modell 9-NORM, ZF=500

e) Zusammenfassung Modell 9

Zusammenfassend sind die guten 0.95-ES-Ergebnisse bei allen Methoden zum Modell 9 hervorzuheben, die waren jedoch eher ein Zufall, denn der 0.95-VaR war bei keiner der Methoden zufriedenstellend. Alle VaR-Prognosen zum Modell 9 leiden an nicht angemessenen Proportions of Failures (Anteil der Überschreitungen, LR_{PF} -Test) mit der einzigen Ausnahme des 0.99-VaR zur 9FEVT-Methode.

Die folgenden 3 Tabellen geben Auskunft über die erreichten Strafpunkte²¹⁸ in Modellen 1, 3 und 9, alle angewandt auf die S&P 5079 Stichprobe. Die Wahl

²¹⁸Der Autor ist bereit, auf Nachfrage die detaillierten Ergebnisse (Annahme/Ablehnung) zu den 9 Tests zuzüglich des ES-Tests zu Modell 3 zur Verfügung zu stellen. Die ausführlichen Ergebnisse zu Modell 1 wurden bereits im Fazit zum Modell 7VIX dargestellt. Die ausführlichen Ergebnisse zum Modell 9 wurden im aktuellen Abschnitt, Punkte a)-d), dargestellt.

fiel auf diese Modelle (1 und 3), da Modell 1 das Basis Modell ist, Modell 3 den Leverage-Effekt einführt und Modell 9 zusätzlich noch den VIX Index ins Modell integriert.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	9	4	1	24
FHS	4	9	0	2	15
FEVT	4	9	1	7	21
NORM	8	9	4	1	22

Tabelle 5.239.: VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	10	2	0	22
FHS	0	9	0	3	12
FEVT	0	9	2	3	14
NORM	11	10	4	2	27

Tabelle 5.240.: VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 3: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	9	10	3	3	25
FHS	4	6	3	3	16
FEVT	3	6	4	0	13
NORM	9	10	3	3	25

Tabelle 5.241.: VaR-Strafpunkte S&P 5079, SV-Modell 9: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Die folgende Tabelle zeigt in noch kompakterer Form die VaR-Ergebnisse (Strafpunkte) der 3 Modelle mit je 4 Methoden: 1 (SP 5079), 3 (SP 5079), 9 (SP 5079).

Modell 3 hat bei den MCMC, FHS und FEVT-Methoden eine Verbesserung im Vergleich zum Modell 1 gebracht und bei der NORM Methode eine Verschlechterung. Die Ergebnisse des Modells 9 sind gemischt-Verbesserung bei

Methode/Modell	1	3	9
MCMC	24	22	25
FHS	15	12	16
FEVT	21	14	13
NORM	22	27	25

Tabelle 5.242.: Strafpunkte S&P500 5079, SV-Modelle 1, 3, 9: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} oder N111-Verwerfung.

den FEVT- und NORM-Methoden und Verschlechterung bei den anderen zwei Methoden im Vergleich zum Modell 3. Kein Modell (1, 3, 9) ist bei allen Methoden besser als die Anderen.

Einen Vergleich der Modelle 1 (SP 2261), 1 (SP 5079), 3 (SP 2261), 3 (SP 5079), 8 (SP 2261) und 9 (SP5079) findet man in der nächsten Tabelle.

Methode/Modell	1 (2261)	1 (5079)	3 (2261)	3 (5079)	8 (2261)	9 (5079)
MCMC	15	24	17	22	20	25
FHS	13	15	4	12	10	16
FEVT	18	21	11	14	10	13
NORM	15	22	20	27	20	25

Tabelle 5.243.: Strafpunkte S&P500 2261&5079, SV-Modelle 1,7: Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Modell 9 (SP 5079) ist überall schlechter als Modell 8 (SP 2261), dies könnte jedoch an der größeren Stichprobe liegen: die Ergebnisse der Modelle 1 und 3 sind ebenfalls konsistent schlechter bei der größeren Stichprobe.

5.4.11. Modell 10, DJIA 2500 Renditen

SV-Modell 10 wurde in Definition 3.10 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad (5.35)$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \sigma_\eta \eta_t, \quad (5.36)$$

mit $\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
 und $\lambda_t \sim \text{Inverse-Gamma}(\nu/2, \nu/2)$

Der Unterschied zum Modell 3 ist, dass hier beide Störgrößen bivariat Student-t-Verteilt sind mit Korrelationskoeffizient ρ , der hier wieder den Leverage-Effekt modelliert. Ein Vergleich der Modelle 10 und 11 mit Modellen 1 und 3 ist in der Zusammenfassung zum Modell 11 zu finden. Hier wird wiederum die Stichprobe verkleinert (vierfach kleiner als beim Basis Modell)- die zu prognostizierten Tage sind lediglich 2500. Der Grund ist der Zeitaufwand für die Durchführung der Schätzungen. Die Prognose für einen Tag von der Stichprobe beansprucht 1 Stunde und 9 Minuten auf einem 4 Kern-Processor, und bei Modell 11 sind es sogar 1 Stunde und 35 Minuten. Dies addiert sich auf 120 Tage Laufzeit für Modell 10 und eine Stichprobe von 2500 Beobachtungen (165 Tage Laufzeit für Modell 11). Zu beachten ist, dass damit 4 Jahre (aus 10) des Prognosezeitraums während der Finanzkrise ab 2007 sind.

Das Modell wurde 2500 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 2500 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	-0.01480847	0.01479488	0.05614672
γ	-0.9281286	-0.3049972	0.2397487
σ_η^2	0.015451401	0.021619974	0.026486154
ϕ	0.9510879	0.9787660	0.9857038
ρ	-0.8907235	-0.8187253	-0.7248867
ν	19.328135	25.325954	28.377968

Tabelle 5.244.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ2500, SV-Modell 10

Der realisierte Schätzer für ρ variiert zwischen -0.996 und -0.5014 , ist also stets negativ, im Einklang mit dem Leverage-Effekt. Der Parameter ν variiert zwischen 4.2826 und 32.3362 mit oberem Quartil bei 28.378 , bewegt sich also in einem Bereich, der weit genug von der Normalverteilung ist.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875 , 5.9375 und 23.75 für den $0.05/0.95$ -VaR und 2.475 , 1.2375 und 4.95 für den $0.01/0.99$ -VaR.

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

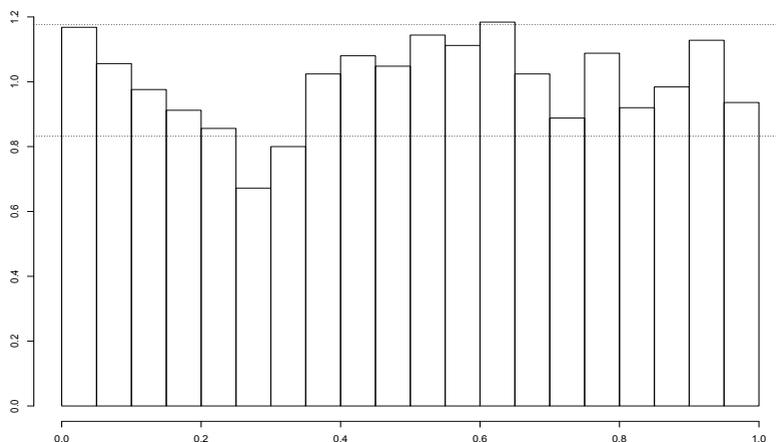


Abbildung 5.47.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert: 0.00204

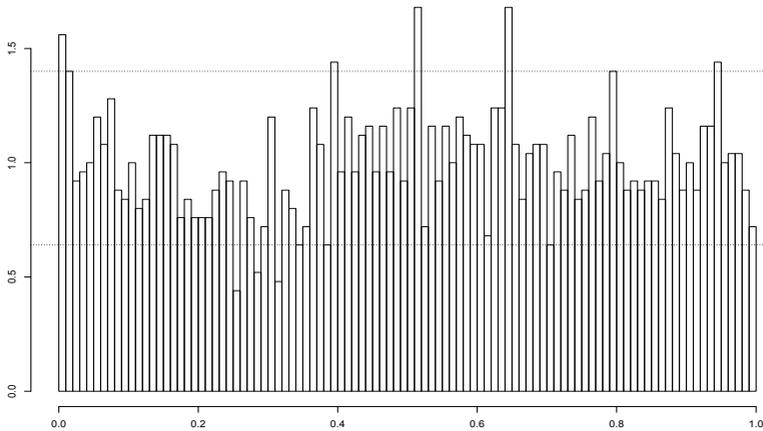


Abbildung 5.48.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert: 0.01843

Die Abbildungen zeigen, dass die Prognoseverteilungen verworfen werden müssen (auf Signifikanzniveau 0.05). Insbesondere gibt es Probleme mit dem linken Teil der Verteilungen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	147
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0588; 0.04923
Var(E250); V1; LB1; acf	48.23; 0.00008; 0.2673; –
Var(E125); V2; LB2; acf	16.98; 0.00015; 0.1456; –
Var(E500); V3; LB3; acf	130.8; 0.00028; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.6169; 0.1264
$n111$; 95%-Intervall $ H_0$	2; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.7556
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1097; 0.6283 ; 0.0359; 0.04158

Tabelle 5.245.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-MCMC, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur zum ES-Niveau von 0.01 angenommen. Beim Value-at-Risk kann der LB3-Test nicht durchgeführt werden wegen der kleineren Stichprobe von 2500, was 5 500-Clustern entspricht (und

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	40
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.016; 0.0055
Var(E250);V1;LB1;acf	6; 0.01678; 0.4355; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.70; 0.2109; 0.0517; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.5; 0.007; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.254; 0.01108
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.69022
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.00577; 0.6439 ; 0.9551; 0.9573

Tabelle 5.246.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	117
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0468; 0.4582
Var(E250);V1;LB1;acf	8.9; 0.5985; 0.8633; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.87; 0.5847; 0.9743; –
Var(E500);V3;LB3;acf	31.8; 0.636; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.015; 0.0395
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.779
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1044; 0.3529 ; 0.00177; 0.00313

Tabelle 5.247.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-MCMC, ZF=500

der LB3-Test soll ja 5 Lags untersuchen). Der 0.05-VaR wird von den Unabhängigkeitstests und dem LR_{cc} -Test angenommen. Der 0.01-VaR wird von allen Tests angenommen außer den LR_{PF} , LR_{cc} und V3-Tests. Der 0.95-VaR wird nur von den LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird von allen Tests angenommen. Selbst bei diesem Modell (mit Leverage und leptokurtischer t-Verteilung) waren die unteren Quantile schlechter geschätzt (der Anteil der VaR-Überschreitungen war zu hoch) als die oberen, was auf die Notwendigkeit einer Schiefe in der Verteilung hindeutet, die von mir ins Modell 11 eingebaut wurde. Eine Modell-Variante vom Modell 10, vorgeschlagen von Wang in Wang et al. (2011), wurde in ihrer MCMC-Methode für die gleiche Stichprobe untersucht, die VaR-Ergebnisse wurden schlechter als beim Modell 10 (Choy's Methode in Wang et al. (2011)). Ein Vergleich der Modelle 10 und 11 mit Modellen 1 und 3 ist in der Zusammenfassung zum Modell 11 zu finden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	18
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0072; 0.1386
Var(E250);V1;LB1;acf	2.18; 0.8047; 0.5023; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.73; 0.2415; 0.3078; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.3; 0.2959; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6093; 0.2939
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.7161
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2475; 0.2238 ; 0.00021; 0.00343

Tabelle 5.248.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-MCMC, ZF=500**b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit**

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	134
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0536; 0.4141
Var(E250);V1;LB1;acf	19.6; 0.1394; 0.8149; –
Var(E125);V2;LB2;acf	10.96; 0.01643; 0.6425; –
Var(E500);V3;LB3;acf	49.7; 0.08081; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4757; 0.5534
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.84998
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1876; 0.5981 ; 0.0004; 0.00152

Tabelle 5.249.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FHS-250, ZF=500

Der Expected Shortfall wird bei der 10-FHS Methode zu den ES-Niveaus 0.01/0.95 angenommen. Der Value-at-Risk ist auf den VaR-Niveaus 0.05/0.95/0.99 annehmbar und beim 0.01-Niveau nicht zufriedenstellend. Der 0.05-VaR wird von allen Tests angenommen außer dem V2-Test. Der 0.01-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{cc} , V1 und V3 Tests verworfen, hier sind die VaR-Überschreitungen zu viel. Der 0.95-VaR wird nur von den LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR ist einwandfrei.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	41
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 0.00324
Var(E250);V1;LB1;acf	4.99; 0.0437; 0.3573; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.84; 0.1669; 0.3446; –
Var(E500);V3;LB3;acf	17.2; 0.01044; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2422; 0.006573
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.646
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0993; 0.8482 ; 0.4578; 0.4608

Tabelle 5.250.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	126
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0504; 0.927
Var(E250);V1;LB1;acf	8.04; 0.4921; 0.4317; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.01; 0.3167; 0.798; –
Var(E500);V3;LB3;acf	24.2; 0.9879; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.00619; 0.02349
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.73196
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.041; 0.3893 ; 0.239; 0.2384

Tabelle 5.251.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	25
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.01; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	2.28; 0.8969; 0.1252; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.14; 0.8301; 0.6612; –
Var(E500);V3;LB3;acf	3.5; 0.6969; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4772; 0.7768
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4853
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2251; 0.3696 ; 0.00556; 0.00938

Tabelle 5.252.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FHS-250, ZF=500

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	129
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0516; 0.7149
Var(E250);V1;LB1;acf	13.43; 0.7853; 0.7502; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.52; 0.4133; 0.2117; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	33.2; 0.5713; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8732; 0.9221
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8437
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2301; 0.6099 ; 3.57e-05; 2.1e-04

Tabelle 5.253.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-300k30, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	53
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0212; 9.79e-07
Var(E250);V1;LB1;acf	5.12; 0.0389; 0.0591; 1
Var(E125);V2;LB2;acf	2.56; 0.0152; 0.0329; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	21.8; 0.0025; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1296; 1.96e-06
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4915
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2472; 0.6221 ; 0.0056; 0.0143

Tabelle 5.254.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-250k25, ZF=500

Der Expected Shortfall wird auf allen betrachteten Niveaus verworfen. Der 0.05-VaR wird von allen Tests angenommen. Der 0.01-VaR wird nur von den LB1, LR_{ind} und N111-Tests angenommen. Der 0.95-VaR wird nur von den LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur von den (wichtigen) LR_{PF} - und LR_{cc} -Tests verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	125
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.05; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	7.39; 0.4176; 0.2663; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.78; 0.2586; 0.8192; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21; 0.8762; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.00686; 0.02587
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.7554
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0894; 0.3795 ; 0.0095; 0.012

Tabelle 5.255.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	37
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0148; 0.0244
Var(E250);V1;LB1;acf	1.79; 0.5755; 0.3147; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.87; 0.4273; 0.2144; –
Var(E500);V3;LB3;acf	3.8; 0.7807; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2916; 0.04525
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.2962
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2144; 0.3432 ; 5.40e-04; 0.0017

Tabelle 5.256.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-FEVT-200k20, ZF=500**d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Student-t) und**

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Die beiden Abbildungen und die Tests verwerfen die Richtigkeit der Prognoseverteilungen. Es ist ersichtlich, dass die Varianz der Prognoseverteilungen etwas geringer sein sollte.

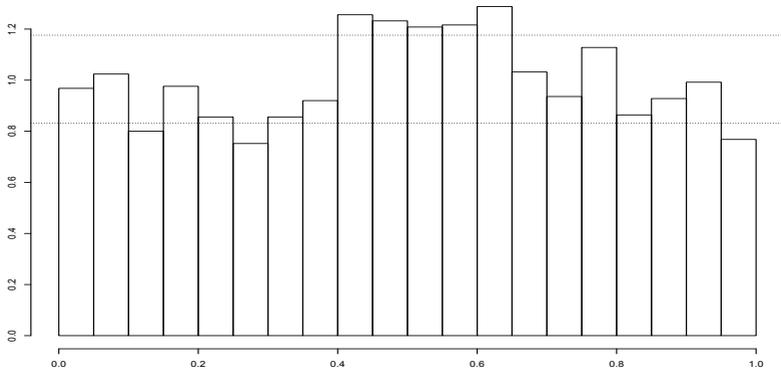


Abbildung 5.49.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-t, ZF=500, KL=20); p-Wert: 2.08e-07

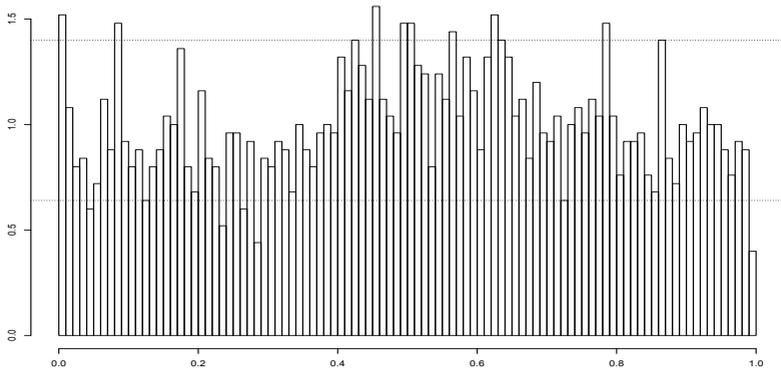


Abbildung 5.50.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 10-t, ZF=500, KL=100); p-Wert:0.0002232

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	121
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0484; 0.7122
Var(E250);V1;LB1;acf	28.77; 0.0109; 0.359; –
Var(E125);V2;LB2;acf	11.1; 0.0146; 0.2677; –
Var(E500);V3;LB3;acf	79.2; 0.011; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.718; 0.8767
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.88303
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1475; 0.6065 ; 0.0085; 0.015

Tabelle 5.257.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	38
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0152; 0.0152
Var(E250);V1;LB1;acf	4.84; 0.0529; 0.3286; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.67; 0.3359; 0.1004; –
Var(E500);V3;LB3;acf	17.3; 0.0098; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2787; 0.02909
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.7832
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0001; 0.645 ; 0.9992; 0.9992

Tabelle 5.258.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	96
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0384; 0.0056
Var(E250);V1;LB1;acf	8.49; 0.5472; 0.4314; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.43; 0.1888; 0.9789; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21.7; 0.9097; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0873; 0.005065
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.9061
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0973; 0.3345 ; 0.0054; 0.0079

Tabelle 5.259.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t, ZF=500

Der Expected Shortfall wird hier auf den 0.01/0.99 ES-Niveaus angenommen. Die Verzerrung ist zwar kleiner beim 0.95-ES als beim 0.99-ES bei einer

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	10
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.004; 0.00060358
Var(E250);V1;LB1;acf	0.67; 0.0999; 0.5596; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.47; 0.0816; 0.151; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2; 0.3722; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.7768; 0.002694
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.8063
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1361; 0.2667 ; 0.1411; 0.1587

Tabelle 5.260.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 10-t, ZF=500

größeren Varianz der Abweichungen, der 0.95-ES wird jedoch verworfen. Dies liegt an der größeren Stichprobe beim 0.95-ES (96) als beim 0.99-ES (10). Der 0.05-VaR wird nur von den Varianzentests V1, V2 und V3 verworfen. Die 0.01/0.95/0.99-VaR werden alle vom LR_{PF} -Test verworfen, beim unteren VaR sind die VaR-Überschreitungen zu viel und beim oberen - zu wenig. Darüber hinaus wird der 0.01-VaR von den V3 und LR_{cc} -Tests verworfen, und der 0.95/0.99-VaR vom LR_{cc} -Test.

e) Zusammenfassung Modell 10

Zusammenfassend lässt sich zum Modell 10 festhalten, dass die MCMC Methode Probleme mit den unteren Quantilen hat und die letzte Methode (durch die Innovationsverteilung) mit allen Quantilen. Diese Probleme werden von der FHS-Methode etwas kompensiert (durch die empirischen Verteilung der standardisierten Residuen) insbesondere auf dem 0.05-VaR-Niveau. Es wurde (insbesondere bei den MCMC und t-Methoden) festgestellt, dass eine gewisse Asymmetrie der linken und rechten Verteilungsteilen erwünscht wäre. Dies wird vom Modell 11 angesprochen. Ein Vergleich der VaR-Performance der Modelle 1, 3, 10 und 11 bei der DJIA 2500 Stichprobe findet im Fazit zum Modell 11 statt.

5.4.12. Modell 11, DJIA 2500 Renditen

SV-Modell 11 wurde in Definition 3.11 eingeführt. Es lautet:

$$r_t = \mu + \exp(h_t/2)\epsilon_t, \tag{5.37}$$

$$h_{t+1} = \gamma + \phi(h_t - \gamma) + \sigma_\eta \eta_t, \tag{5.38}$$

mit $\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \stackrel{iid}{\sim} N\left(\begin{pmatrix} \lambda_t \gamma_1 \\ \lambda_t \gamma_2 \end{pmatrix}, \lambda_t \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
 und $\lambda_t \sim \text{Inverse-Gamma}(\nu/2, \nu/2)$

Das Innovative an diesem von mir vorgeschlagenen Modell ist die Modellierung der beiden Innovationen als schief-bivariat-t-Verteilt. Auch hier wurde eine relativ kleine Stichprobe von 2500 DJIA Beobachtungen untersucht, aus Gründen erwähnt in der Einführung zum Modell 10- Die Laufzeit auf einem 4-Kern-Prozessor wäre hier 165 Tage für eine Stichprobe von 2500 Beobachtungen und 330 Tage (11 Monate) für eine Stichprobengröße von 5000 Beobachtungen.

Das Modell wurde 2500 Mal geschätzt, generelle Aussagen über die Parameter sind daher schwierig. Die folgende Tabelle gibt jeweils unteres Quartil, Median und oberes Quartil jedes geschätzten Parameters (unter den 2500 Werten):

Parameter	u. Quartil	Median	o. Quartil
μ	-0.139050864	0.008074744	0.111748211
γ	-3.6559729	-1.3440762	-0.1302845
γ_1	-0.09473860	-0.01009595	0.14933936
γ_2	-0.03108226	0.21463877	0.47211223
σ_η^2	0.015269783	0.020629501	0.025970266
ϕ	0.9435742	0.9685327	0.9803528
ρ	-0.9049932	-0.8509178	-0.7372234
ν	20.809267	25.993338	29.890811

Tabelle 5.261.: Quantile der geschätzten Parameter, DJ2500, SV-Modell 11

Der realisierte Schätzer für ρ ist negativ in 99.88% der 2500 Schätzungen. Der realisierte Schätzer für ν variiert zwischen 4.0675 und 33.2927. Der realisierte Schätzer für γ_1 ist negativ in 52.72% der 2500 Schätzungen (also

negative Schiefe der Renditeninnovation). Dagegen ist der realisierte Schätzer für γ_2 negativ in nur 28.04% der 2500 Schätzungen, d.h. die Volatilität weist eher positive Schiefe auf.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR.

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

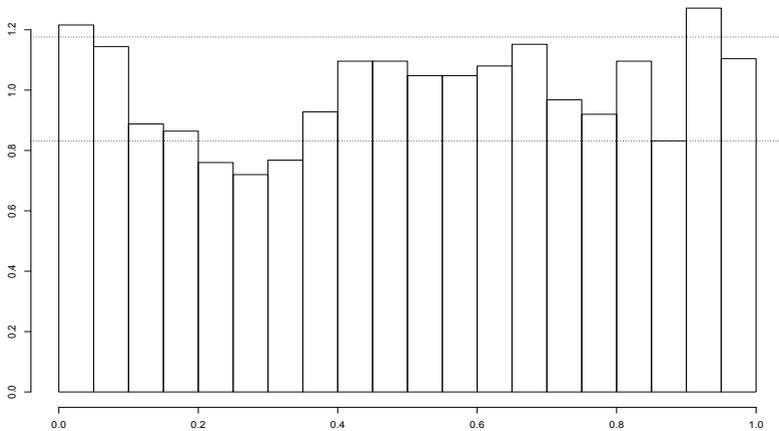


Abbildung 5.51.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert: 4.71e-06

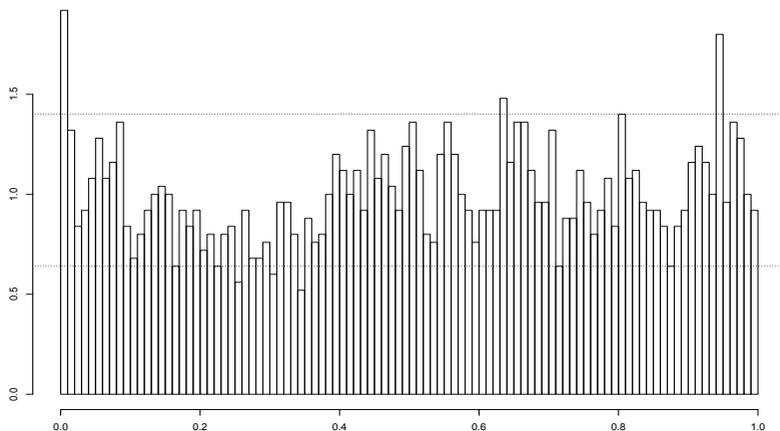


Abbildung 5.52.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert 0.0009004

Die Abbildungen zeigen, dass die Prognose durch eine nächste Rendite, generiert bei der MCMC Schätzung, nicht besser wird im Vergleich zum Modell 10-MCMC. Die Prognoseverteilungen werden zu beiden Feinheitsgraden verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	152
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0608; 0.0164
Var(E250); V1; LB1; acf	43.29; 0.0002; 0.1754; —
Var(E125); V2; LB2; acf	14.99; 0.0005; 0.2169; —
Var(E500); V3; LB3; acf	111.8; 0.0012; n.a.; —
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4254; 0.0404
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.7168
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1536; 0.6804 ; 0.0061; 0.0102

Tabelle 5.262.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird bei ES-Niveaus 0.01/0.95/0.99 angenommen und zum ES-Niveau 0.05 verworfen. Die VaR-Ergebnisse sind hier beim

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	50
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.02; 9.71e-06
Var(E250);V1;LB1;acf	10.22; 0.0003; 0.0233; 1
Var(E125);V2;LB2;acf	3.11; 0.0028; 0.0049; 1,2
Var(E500);V3;LB3;acf	33.5; 0.0001; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.153; 2e-05
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.5902
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0317; 0.7013 ; 0.7504; 0.7643

Tabelle 5.263.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	138
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0552; 0.2403
Var(E250);V1;LB1;acf	25.07; 0.0266; 0.5334; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.67; 0.37; 0.4131; –
Var(E500);V3;LB3;acf	91.8; 0.0047; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0115; 0.0205
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.6664
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0525; 0.4192 ; 0.1433; 0.1463

Tabelle 5.264.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	23
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0092; 0.6836
Var(E250);V1;LB1;acf	3.57; 0.366; 0.0586; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.98; 0.5819; 0.0282; 1, (6)
Var(E500);V3;LB3;acf	8.3; 0.2959; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5133; 0.7439
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.5237
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1053; 0.4287 ; 0.2514; 0.2675

Tabelle 5.265.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-MCMC, ZF=500

Modell 11-MCMC schlechter als bei 10-MCMC. Trotz der Schiefe in den t-Verteilungen sind die Anteile der VaR-Überschreitungen höher bei den unteren

Niveaus 0.05/0.01. Der 0.05-VaR wird nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Der 0.01-VaR ist hier besonders schlecht, er wird lediglich von den LR_{ind} - und N111-Tests angenommen! Der 0.95-VaR wird von den V1, V3, LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur vom LB2-Test verworfen.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	126
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0504; 0.927
Var(E250);V1;LB1;acf	16.93; 0.3541; 0.6389; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.91; 0.3084; 0.0832; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	31.7; 0.6447; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5722; 0.8486
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8864
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1648; 0.6622 ; 0.006; 0.0135

Tabelle 5.266.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-500, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	33
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0132; 0.1253
Var(E250);V1;LB1;acf	3.12; 0.6123; 0.533; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.29; 0.9097; 0.8619; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.3; 0.2959; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3473; 0.198
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.8579
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0884; 1.0094 ; 0.6183; 0.6234

Tabelle 5.267.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250, ZF=500

Der Expected Shortfall wird nur auf dem 0.01-ES-Niveau angenommen. Hier werden die zweitbesten VaR-Ergebnisse von allen SV-Modellen erzielt (nach dem 3 FHS Modell). Dies deutet darauf hin, dass das Modell sehr gute Schätzungen der Volatilitäten liefert, die Form der angenommenen schiefen

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	134
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0536; 0.4141
Var(E250);V1;LB1;acf	20.27; 0.1063; 0.4338; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.8; 0.3363; 0.5986; –
Var(E500);V3;LB3;acf	78.2; 0.0118; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0648; 0.1296
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.6592
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1266; 0.4202 ; 0.00066013; 0.0015

Tabelle 5.268.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	36
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0144; 0.038
Var(E250);V1;LB1;acf	2.04; 0.7371; 0.7385; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.22; 0.9823; 0.8908; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.2; 0.9771; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.305; 0.0684
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.348
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1975; 0.4445 ; 0.0116; 0.0172

Tabelle 5.269.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FHS-250, ZF=500

t-Verteilung jedoch nicht ganz angemessen ist (dies wird durch die hier verwendete FHS-Methode zurechtgerückt). Von allen VaR-Tests die durchgeführt werden konnten, haben nur insgesamt 2 Tests den jeweiligen VaR verworfen: der V3-Test beim 0.95-VaR und der LR_{PF} -Test beim 0.99-VaR, bei dem die VaR-Überschreitungen zu viele sind.

c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Die Expected-Shortfall-Prognose wird auf allen ES-Niveaus verworfen. Die 0.05/0.95-VaR-Prognosen sind einwandfrei. Die 0.01/0.99-VaR-Prognosen werden beide von den LR_{PF} - und LR_{cc} -Tests verworfen (zu viele Überschreitungen). Darüber hinaus wird der 0.99-VaR vom V3-Test verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	126
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0504; 0.927
Var(E250);V1;LB1;acf	14.27; 0.6742; 0.735; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.48; 0.4271; 0.0567; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	26.2; 0.8948; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5722; 0.8486
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8993
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.168; 0.6573 ; 0.0048; 0.0128

Tabelle 5.270.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-400k40, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	42
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0168; 0.0018
Var(E250);V1;LB1;acf	2.4; 0.9452; 0.566; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.36; 0.8113; 0.3193; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.3; 0.2959; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2308; 0.0038
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.662
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3296; 0.7609 ; 0.0076; 0.0266

Tabelle 5.271.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	125
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.05; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	6.06; 0.2818; 0.2541; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.67; 0.2346; 0.6767; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21.5; 0.9013; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.131; 0.3198
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.7301
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1791; 0.522 ; 0.00020997; 0.0001

Tabelle 5.272.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-100k10, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	46
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0184; 0.00015777
Var(E250);V1;LB1;acf	4.49; 0.078; 0.6728; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.48; 0.5952; 0.5741; (7)
Var(E500);V3;LB3;acf	12.7; 0.0415; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.8689; 0.0007765
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.1956
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1959; 0.4074 ; 0.0021; 0.0085

Tabelle 5.273.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-FEVT-500k50, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Student-t) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

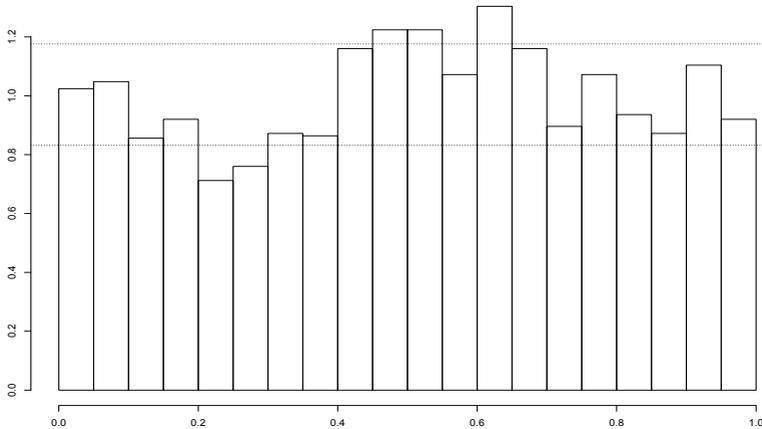


Abbildung 5.53.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-t, ZF=500, KL=20); p-Wert: 1.05e-06

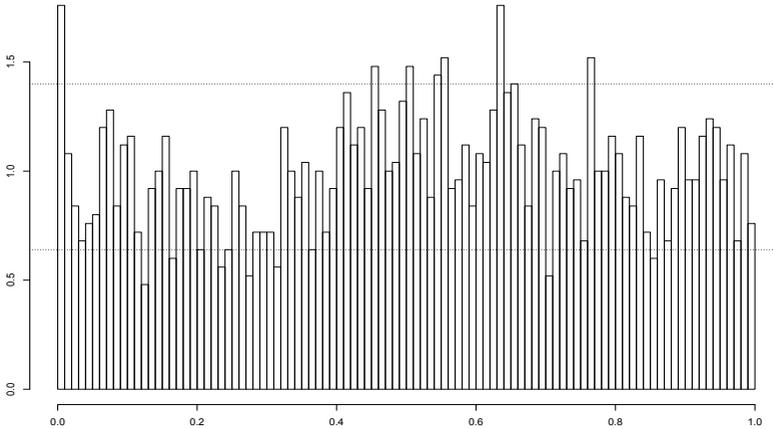


Abbildung 5.54.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (SV-Modell 11-t, ZF=500, KL=100); p-Wert: 4.77e-06

Die Abbildungen zeigen, dass die Richtigkeit der Student-t-Prognoseverteilungen verworfen werden muss.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	128
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0512; 0.7839
Var(E250);V1;LB1;acf	33.29; 0.0033; 0.0606; –
Var(E125);V2;LB2;acf	11.94; 0.0073; 0.0173; –
Var(E500);V3;LB3;acf	102.8; 0.0022; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2683; 0.5212
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.8208
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.202; 0.6626 ; 0.0007656; 0.0036

Tabelle 5.274.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t, ZF=500

Die Expected-Shortfall-Prognose wird auf den 0.01/0.95/0.99-ES-Niveaus angenommen und auf dem 0.05-ES-Niveau verworfen. Die unteren VaR-Ergebnisse sind schlechter als die oberen: Der 0.05-VaR wird von den Varianztests V1, V2 und V3 sowie dem LB2-Test verworfen. Der 0.01-VaR wird lediglich von den LB1, LR_{ind} und N111-Tests angenommen. Der 0.95-VaR

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	44
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0176; 0.0005632
Var(E250);V1;LB1;acf	6.93; 0.0069; 0.0947; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.27; 0.0294; 0.0295; –
Var(E500);V3;LB3;acf	24.7; 0.0011; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.2092; 0.001179
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.6624
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0956; 0.7004 ; 0.3705; 0.4093

Tabelle 5.275.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	115
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.046; 0.3525
Var(E250);V1;LB1;acf	18.28; 0.2273; 0.3798; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.78; 0.935; 0.1971; –
Var(E500);V3;LB3;acf	53.5; 0.0628; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.01805; 0.03981
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.776
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0459; 0.3989 ; 0.2198; 0.22

Tabelle 5.276.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	19
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0076; 0.2079
Var(E250);V1;LB1;acf	1.88; 0.6434; 0.1262; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.58; 0.1304; 0.0192; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.7; 0.9771; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.5895; 0.3921
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.6176
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.124; 0.3592 ; 0.1496; 0.1815

Tabelle 5.277.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 2500, SV-Modell 11-t, ZF=500

wird nur von den LR_{ind} und LR_{cc} Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird nur vom LB2-Test verworfen.

e) Zusammenfassung Modell 11, mit Vergleich zu Modellen 1, 3, 10

Zusammenfassend hat das Modell 11 nicht die gewünschte Verbesserung bei den modellbasierten Prognosen (MCMC und t) gebracht. Dies könnte an Schätzungsproblemen liegen, es gab bei der MCMC-Schätzung vereinzelt un plausible Ergebnisse, die ich mit einer anderen MCMC-Methode wiederholt habe (Metropolis anstatt Slice Sampling für die log-Volatilitäten). Ganz zufriedenstellend war dagegen die FHS Methode, die die zweitbesten Ergebnisse von allen SV-Modellen lieferte.

Die folgenden 4 Tabellen zeigen die Strafpunkte²¹⁹ aufgeschlüsselt nach Modell (1, 3, 10 oder 11), VaR-Niveau (0.05, 0.01, 0.95 oder 0.99) und VaR-Methode. Um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten wird hier auch für Modelle 1 und 3 die kleinere Stichprobe von 2500 DJIA Renditen untersucht.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	10	9	1	0	20
FHS	0	3	1	0	4
FEVT	7	5	2	0	14
NORM	7	9	1	0	17

Tabelle 5.278.: VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 1: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	6	10	1	0	17
FHS	2	3	1	0	6
FEVT	0	6	0	3	9
NORM	6	10	1	0	17

Tabelle 5.279.: VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 3: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Tabelle 5.282 zeigt in noch kompakterer Form die VaR-Ergebnisse (Strafpunkte) der 4 Modelle (mit je 4 Methoden) : 1, 3, 10 und 11 (bei der DJ 2500 Stichprobe).

²¹⁹Auf Nachfrage kann der Autor die Ergebnisse jedes einzelnen der 9 Tests (Annahme oder Ablehnung) zuzüglich des ES-Tests zur Verfügung stellen.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	9	5	1	0	15
FHS	2	7	1	0	10
FEVT	0	10	1	3	14
t	6	5	3	3	17

Tabelle 5.280.: VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 10: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode	0.05-VaR	0.01-VaR	0.95-VaR	0.99-VaR	Gesamt
MCMC	9	11	5	1	26
FHS	0	0	2	3	5
FEVT	0	3	0	5	8
t	7	10	1	1	19

Tabelle 5.281.: VaR-Strafpunkte DJIA 2500, SV-Modell 11: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} , N111-Verwerfung.

Methode/Modell	1	3	10	11
MCMC	20	17	15	26
FHS	4	6	10	5
FEVT	14	9	14	8
NORM/t	17	17	17	19

Tabelle 5.282.: VaR-Strafpunkte, DJIA 2500, SV-Modelle 1, 3, 10 und 11: Betrachtet werden nur 9 VaR-Tests; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, je 1 Strafpunkt für LB1, LB2, LB3, LR_{ind} oder N111-Verwerfung.

Bei der MCMC Methode verbessern sich die Ergebnisse mit wachsender Modell-Verallgemeinerung bis Modell 10, das hört jedoch beim Modell 11 auf, welches sogar schlechter als das Modell 1 ist. Bei der FHS Methode ist Modell 1 am Besten, mit vergleichbaren Ergebnissen bei Modellen 3 und 11. Bestes Modell bei der FEVT Methode ist Modell 11. Die Prognose mit Hilfe der Innovationsverteilung ist vergleichbar bei allen 4 Modellen, am schlechtesten jedoch beim Modell 11. Die Verallgemeinerung von Modell 1 zu Modell 3 hat eine Verbesserung herbeigeführt, mit einer Ausnahme bei der FHS Methode, wo der V2-Test beim 0.05-VaR die Nullhypothese verworfen hat. Die weitere

Verallgemeinerung zu Modell 10 hat Verbesserung bei der MCMC-Methode herbeigeführt und Verschlechterung bei den FEVT- und FHS-Methoden; die Performance der NORM/t-Methode ist vergleichbar geblieben. Die weitere Verallgemeinerung zum Modell 11 hat Verschlechterung bei den Modellbasierten VaR-Methoden (t und MCMC) und Verbesserung bei den FEVT und FHS Methoden. Insgesamt sind die Ergebnisse der Modelle 10 und 11 gemischt mit einer Stärke des Modells 10 bei den Modellbasierten VaR-Prognosen (MCMC und t) und einer Stärke des Modells 11 bei den FHS/FEVT Methoden. Zu beachten ist, dass die letzten 4 Jahre der DJIA 2500 Stichprobe während der Wirtschaftskrise ab 2007 liegen, also relativ volatile Jahre, mit tendenzieller Erhöhung der Anzahl der VaR-Überschreitungen.

Eine Zusammenfassung aller 11 SV-Modelle ist im Abschnitt 5.5 zu finden.

5.4.13. SV Modell 3, DAX 5000 Daten

a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung

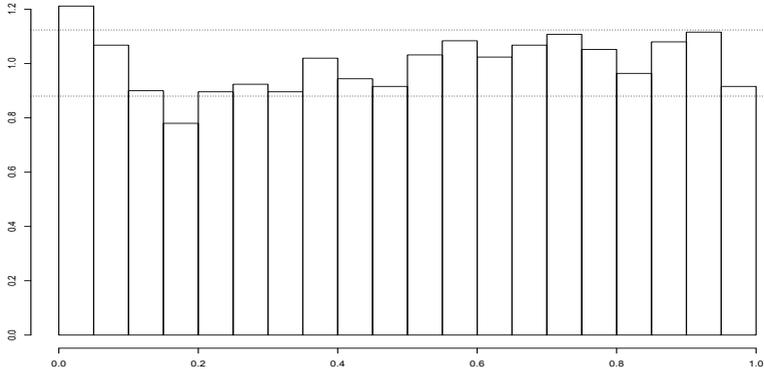


Abbildung 5.55.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0001123

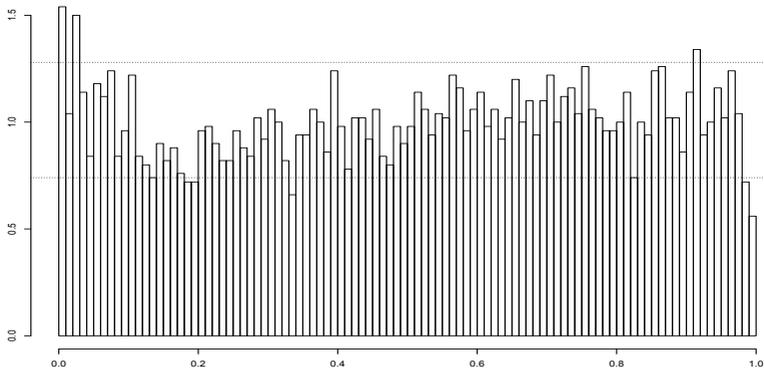


Abbildung 5.56.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.005293

Modell 3 wird wegen des guten Trade-Off zwischen Qualität der Value-at-Risk-Ergebnisse (für die Dow-Jones-5000 Zeitreihe, insbesondere die FHS-Methode) und Rechenlaufzeit dazu gewählt, auf die anderen Zeitreihen angewandt zu werden. Zu beachten ist, dass auf die Angabe signifikanter ACF-Koeffizienten für die aggregierten Überschreitungszahlen verzichtet wird und lediglich der entsprechende p-Wert des Ljung-Box-Tests angegeben wird. Die beiden Abbildungen zu 3-MCMC zeigen, dass die Richtigkeit der Prognoseverteilungen verworfen werden muss.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	305
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.061; 0.00055
Var(E250);V1;LB1	33.78; 0.0001; 0.7835
Var(E125);V2;LB2	13.32; 0; 0.4345
Var(E500);V3;LB3	82.5; 0.0002; 0.6456
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1457; 0.0008767
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-2.0935
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1015; 0.6172 ; 0.0044; 0.0068

Tabelle 5.283.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	79
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0158; 0.0001444
Var(E250);V1;LB1	5.31; 0.0063; 0.2881
Var(E125);V2;LB2	2.33; 0.0046; 0.5172
Var(E500);V3;LB3	12.54; 0.0094; 0.1466
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5289; 0.0005957
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-3.123
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1495; 0.6921 ; 0.0585; 0.0725

Tabelle 5.284.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Der Expected Shortfall wird hier auf den 0.01/0.99-ES-Niveaus angenommen, zum Teil wegen der kleineren Stichprobe als beim 0.05/0.95-ES. (So ist z.B. das Verhältnis Bias zu Standardabweichung beim 0.05-ES kleiner als beim 0.01-ES, der ES wird trotzdem auf dem 0.05-Niveau verworfen und auf dem 0.01-Niveau angenommen). Die unteren VaR-Ergebnisse (0.05/0.01-VaR) sind nicht zufriedenstellend: hier führen nur die Unabhängigkeitstests zur Annahme

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	229
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0458; 0.1672
Var(E250);V1;LB1	14.37; 0.5191; 0.8658
Var(E125);V2;LB2	5.33; 0.6625; 0.2785
Var(E500);V3;LB3	37.21; 0.2032; 0.3421
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.6218; 0.3425
$n111$;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	2.1597
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0921; 0.463 ; 0.0029; 0.0074

Tabelle 5.285.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	28
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0056; 0.0006497
Var(E250);V1;LB1	1.94; 0.5221; 0.1883
Var(E125);V2;LB2	0.68; 0.0758; 0.3253
Var(E500);V3;LB3	6.18; 0.6059; 0.4626
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.5744; 0.002561
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	3.1911
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.065; 0.6317 ; 0.5904; 0.5924

Tabelle 5.286.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

der Nullhypothesen. Der 0.95-VaR ist einwandfrei und der 0.99-VaR wird nur von den (wichtigen) LR_{PF} - und LR_{cc} -Tests verworfen.

b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Der Expected Shortfall wird auf den 0.05/0.95/0.99-ES-Niveaus verworfen, und auf dem 0.01-Niveau gar nicht berechnet (wegen der dort verwendeten FHS100 Methode). Von den Value-at-Risk Ergebnissen ist nur der 0.95-VaR zufriedenstellend. Der 0.05-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.01-VaR wird von den LR_{PF} , LR_{cc} und V2-Tests verworfen. Die VaR-Überschreitungen sind zu viel auf beiden unteren Niveaus 0.05/0.01. Der 0.95-VaR wird nur vom LB3-Test verworfen. Der 0.99-VaR wird von den V1, V3, LR_{ind} und LR_{cc} -Tests verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	293
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0586; 0.0065
Var(E250);V1;LB1	12.77; 0.8213; 0.1934
Var(E125);V2;LB2	7.61; 0.2203; 0.5578
Var(E500);V3;LB3	23.57; 0.9879; 0.8923
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.04792; 0.003471
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-2.1548
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1756; 0.6377 ; 3.78e-06; 9e-05

Tabelle 5.287.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-200, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	82
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0164; 3.13e-05
Var(E250);V1;LB1	3.67; 0.1437; 0.8473
Var(E125);V2;LB2	2.2; 0.0091; 0.5176
Var(E500);V3;LB3	6.62; 0.4751; 0.3392
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2099; 7.78e-05
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-3.1701
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.; n.a.

Tabelle 5.288.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	273
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0546; 0.1411
Var(E250);V1;LB1	13.61; 0.6564; 0.1433
Var(E125);V2;LB2	6.46; 0.7068; 0.5033
Var(E500);V3;LB3	27.12; 0.7677; 0.0277
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4111; 0.2404
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	2.0618
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0879; 0.4691 ; 0.0022; 0.0052

Tabelle 5.289.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	63
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0126; 0.0757
Var(E250);V1;LB1	4.77; 0.0161; 0.2315
Var(E125);V2;LB2	1.58; 0.2734; 0.1533
Var(E500);V3;LB3	10.68; 0.0264; 0.4473
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0088; 0.0067
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.8638
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2537; 0.5542 ; 0.0005688; 0.0034

Tabelle 5.290.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-FHS-250, ZF=500**c) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und**

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

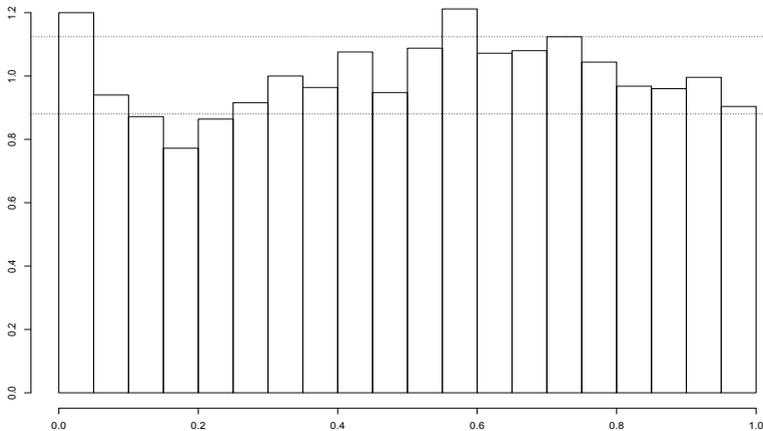


Abbildung 5.57.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=3.62e-06

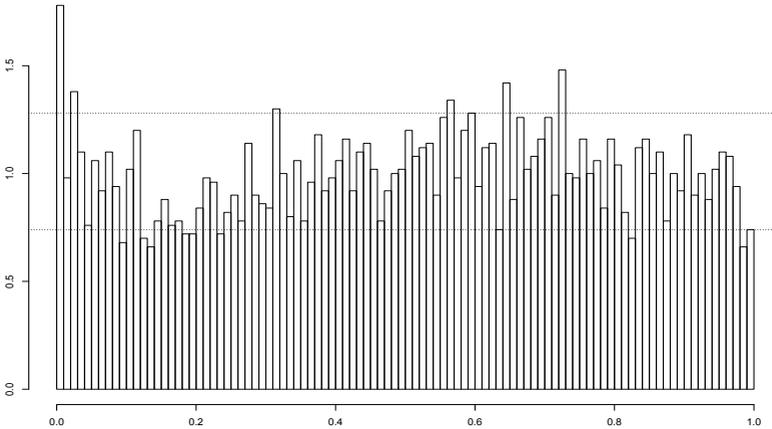


Abbildung 5.58.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=1.06e-07

Die Abbildungen zeigen eine Verwerfung der Richtigkeit der Prognoseverteilungen als Ganzes. Insbesondere waren die ersten Cluster überfüllt, was auf die Notwendigkeit einer längeren linken Ende der Verteilung hindeutet. Die Normalverteilung scheint dagegen das obere Ende der Renditenverteilung gut abzubilden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	300
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.06; 0.0016
Var(E250);V1;LB1	37.16; 0; 0.7935
Var(E125);V2;LB2	14.62; 0; 0.3144
Var(E500);V3;LB3	96.89; 0; 0.7999
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1893; 0.00293
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-2.1102
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1753; 0.6193 ; 1.55e-06; 6e-05

Tabelle 5.291.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall zu den oberen ES-Niveaus 0.95/0.99 angenommen. Die unteren VaR Ergebnisse 0.05/0.01 sind schlecht, die VaR

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	89
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0178; 5.90e-07
Var(E250);V1;LB1	7.1; 0.0003; 0.373
Var(E125);V2;LB2	2.85; 0.0003; 0.5145
Var(E500);V3;LB3	15.43; 0.0017; 0.1643
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0995; 9.79e-07
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.9979
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.3053; 0.6749 ; 4.97e-05; 0.0014

Tabelle 5.292.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	226
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0452; 0.1137
Var(E250);V1;LB1	13.69; 0.6414; 0.6116
Var(E125);V2;LB2	5.26; 0.621; 0.3613
Var(E500);V3;LB3	27.38; 0.7511; 0.1235
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6844; 0.2648
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	2.1751
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0238; 0.4653 ; 0.4433; 0.4456

Tabelle 5.293.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Prognose wird hier nur von den Unabhängigkeitstests angenommen. Die Prognose der oberen VaR 0.95/0.99 ist dagegen einwandfrei.

Zusammenfassend lässt sich auch bei der DAX-Zeitreihe die Angemessenheit der Normalverteilung für die oberen extremen Quantilen und die Notwendigkeit von einem dickeren linken Ende der Prognoseverteilung anmerken. Die FEVT-Methode wird bei den nicht-Dow-Jones- Zeitreihen nicht betrachtet, da sie ähnliche oder schlechtere Ergebnisse als FHS beim Dow-Jones hatte.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	37
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0074; 0.0527
Var(E250);V1;LB1	1.5; 0.2405; 0.1778
Var(E125);V2;LB2	0.74; 0.1146; 0.9204
Var(E500);V3;LB3	4.9; 0.9812; 0.2995
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.28; 0.08569
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	3.0628
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1818; 0.6209 ; 0.0834; 0.1143

Tabelle 5.294.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DAX 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

5.5. Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse für die SV-Modelle

5.5.1. DJIA und S&P 500

Zunächst werden für 9 ausgewählte VaR-Tests und den Bootstrapping-ES-Test die Ergebnisse in Tabellen zusammengefasst. Ein Punkt in der jeweiligen Tabelle bedeutet, dass beim entsprechenden Test die Nullhypothese nicht verworfen wurde (Signifikanzniveau 0.05).

Daten	Modell	ZF	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	1 MCMC	500							•		•	
DJ10K	1 FHSA100	500		•	•	•	•	•	•		•	
DJ10K	1 FHSB100	500		•	•	•		•	•	•	•	
DJ10K	1 FEVTA100	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	1 FEVTB100	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	1 NORM-A	500	•						•	•	•	
DJ10K	1 NORM-B	500							•	•	•	
DJ10K	2 MCMC	500						•	•	•	•	
DJ10K	2 FHS100	500		•	•	•		•	•		•	
DJ10K	2 FEVT100	500	•	•	•	•	•	•	•		•	
DJ10K	2 NORM	500						•	•	•	•	
DJ5K	3 MCMC	500	•				•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHSA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHSB250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FEVTA200	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FEVTB200	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM-A	500	•				•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM-B	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 MCMC	1K							•	•	•	
DJ5K	3 FHS100	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM	1K	•							•	•	
DJ5K	3 MCMC	2K	•							•	•	
DJ5K	3 FHS100	2K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM	2K	•							•	•	
DJ10K	4 MCMC	500					•		•	•	•	
DJ10K	4 FHS250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	4 FEVT100	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	4 NORM	500	•						•	•	•	
DJ10K	5 MCMC	500	•				•		•	•	•	•
DJ10K	5 FHSA200	500		•	•	•	•	•	•		•	
DJ10K	5 FHSB100	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	5 FEVTA300	500	•		•		•	•	•		•	
DJ10K	5 FEVTB100	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	5 t-A	500					•		•	•	•	
DJ10K	5 t-B	500							•		•	

Tabelle 5.295.: Ergebnisse SV-Modelle 0.05-Value-at-Risk: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N11	ES
DJ10000	6 MCMC	•				•	•	•	•	•	
DJ10000	6 FHS100		•	•		•	•	•	•	•	
DJ10000	6 FEVT100	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10000	6 NORM	•					•	•	•	•	
SP2261	7RV MCMC	•			•	•	•	NA	•	•	•
SP2261	7RV FHS250	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
SP2261	7RV FEVT250	•	•		•	•	•	NA	•	•	
SP2261	7RV NORM	•			•	•	•	NA	•	•	
SP5079	7VIX MCMC	•				•	•		•	•	
SP5079	7VIX FHS250		•	•	•	•	•		•	•	
SP5079	7VIX FEVT100	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	7VIX NORM	•				•	•		•	•	
SP2261	8 MCMC				•	•	•	NA	•	•	
SP2261	8 FHS250	•	•		•	•	•	NA	•	•	
SP2261	8 FEVT100	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
SP2261	8 NORM				•	•	•	NA	•	•	
SP5079	9 MCMC					•	•	•	•	•	
SP5079	9 FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	9 FEVT100		•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	9 NORM					•	•	•	•	•	
DJ2500	10 MCMC					•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 FHS250	•	•		•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 FEVT300	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 t	•				•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 MCMC					•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 FHS500	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 FEVT400	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 t	•				•	•	NA	•	•	

Tabelle 5.296.: Ergebnisse SV-Modelle 0.05-Value-at-Risk (Teil 2): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); ZF=500

Daten	Modell	ZF	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	1 MCMC	500							•	•	•	
DJ10K	1 FHSA100	500					•	•	•	•	•	NA
DJ10K	1 FHSB100	500					•	•	•	•	•	NA
DJ10K	1 FEVTA250	500						•	•	•	•	
DJ10K	1 FEVTB250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	1 NORM-A	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	1 NORM-B	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	2 MCMC	500					•	•	•			
DJ10K	2 FHS100	500					•	•	•			NA
DJ10K	2 FEVT250	500					•	•	•			
DJ10K	2 NORM	500					•	•	•	•		
DJ5K	3 MCMC	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHSA250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHSB250	500			•		•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FEVTA200	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FEVTB200	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM-A	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM-B	500					•	•	•	•	•	
DJ5K	3 MCMC	1K							•	•	•	
DJ5K	3 FHS250	1K					•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM	1K							•	•	•	
DJ5K	3 MCMC	2K					•		•	•	•	
DJ5K	3 FHS250	2K		•	•		•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM	2K							•	•	•	
DJ10K	4 MCMC	500					•		•	•	•	
DJ10K	4 FHS250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	4 FEVT250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	4 NORM	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	5 MCMC	500	•				•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSB250	500					•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FEVTA400	500	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	5 FEVTB400	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	5 t-A	500	•				•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 t-B	500					•	•	•	•	•	

Tabelle 5.297.: Ergebnisse SV-Modelle 0.01-Value-at-Risk: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N11	ES
DJ10K	6 MCMC	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	6 FHS250					•	•	•	•	•	
DJ10K	6 FEVT250					•	•	•	•	•	
DJ10K	6 NORM					•		•	•	•	
SP2261	7RV MCMC					•	•	NA	•	•	•
SP2261	7RV FHS100				•	•	•	NA	•	•	NA
SP2261	7RV FEVT100					•	•	NA	•	•	
SP2261	7RV NORM					•	•	NA	•	•	•
SP5079	7VIX MCMC					•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX FEVT250					•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX NORM					•	•	•	•	•	
SP2261	8 MCMC					•		NA	•	•	•
SP2261	8 FHS100				•	•	•	NA	•	•	NA
SP2261	8 FEVT100				•	•	•	NA	•	•	
SP2261	8 NORM					•		NA	•	•	•
SP5079	9 MCMC					•		•	•	•	
SP5079	9 FHS250		•		•	•		•	•	•	•
SP5079	9 FEVT200		•		•	•		•	•	•	
SP5079	9 NORM					•		•	•	•	
DJ2500	10 MCMC		•	•		•	•	NA	•	•	•
DJ2500	10 FHS250			•		•	•	NA	•	•	•
DJ2500	10 FEVT250					•		NA	•	•	
DJ2500	10 t		•	•		•	•	NA	•	•	•
DJ2500	11 MCMC							NA	•	•	•
DJ2500	11 FHS250	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•
DJ2500	11 FEVT200		•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 t					•		NA	•	•	•

Tabelle 5.298.: Ergebnisse SV-Modelle 0.01-Value-at-Risk (Teil 2): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend; ZF=500

Daten	Modell	ZF	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	1 MCMC	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 FHSA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 FHSB250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 FEVTA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 FEVTB250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 NORM-A	500		•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 NORM-B	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	2 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•		•
DJ10K	2 FHS200	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	2 FEVT200	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	2 NORM	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHSA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHSB250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FEVTA200	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FEVTB200	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM-A	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM-B	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 MCMC	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHS250	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 MCMC	2K		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHS200	2K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM	2K		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 MCMC	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 FHS100	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 FEVT100	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 NORM	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 MCMC	500	•	•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSA200	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSB250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FEVTA250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FEVTB100	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 t-A	500		•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 t-B	500	•				•	•	•	•		•

Tabelle 5.299.: Ergebnisse SV-Modelle 0.95-Value-at-Risk: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	6 MCMC	•	•	•		•		•	•	•	•
DJ10K	6 FHS200	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	6 FEVT200	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ10K	6 NORM	•	•	•		•	•	•	•	•	
SP2261	7RV MCMC	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
SP2261	7RV FHS400	•	•	•	•	•		NA	•	•	
SP2261	7RV FEVT400	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
SP2261	7RV NORM	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
SP5079	7VIX MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	7VIX FHS200	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX FEVT300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP2261	8 MCMC	•	•	•	•	•		NA		•	•
SP2261	8 FHS400	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
SP2261	8 FEVT500	•	•	•	•	•		NA		•	•
SP2261	8 NORM	•	•	•	•	•		NA		•	•
SP5079	9 MCMC		•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	9 FHS500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	9 FEVT300		•	•	•	•		•	•	•	•
SP5079	9 NORM		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ2500	10 MCMC	•	•	•	•	•	•	NA		•	
DJ2500	10 FHS250	•	•	•	•	•	•	NA		•	•
DJ2500	10 FEVT200	•	•	•	•	•	•	NA		•	
DJ2500	10 t		•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 MCMC	•		•		•	•	NA		•	•
DJ2500	11 FHS250	•	•	•		•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 FEVT100	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 t	•	•	•	•	•	•	NA		•	•

Tabelle 5.300.: Ergebnisse SV-Modelle 0.95-Value-at-Risk (Teil 2): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend; ZF=500

Daten	Modell	ZF	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	1 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	1 FHSA100	500		•	•	•	•	•	•	•	•	NA
DJ10K	1 FHSB100	500		•	•	•	•	•	•	•	•	NA
DJ10K	1 FEVTA250	500				•	•	•	•	•	•	
DJ10K	1 FEVTB250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	1 NORM-A	500	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	1 NORM-B	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	2 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	2 FHS250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	2 FEVT500	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	2 NORM	500	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	3 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 FHSA250	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHSB250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FEVTA250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FEVTB250	500		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM-A	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 NORM-B	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 MCMC	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHS250	1K		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM	1K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	3 MCMC	2K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 FHS250	2K		•		•	•	•	•	•	•	
DJ5K	3 NORM	2K	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 MCMC	500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	4 FHS250	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	4 FEVT500	500					•	•	•	•	•	
DJ10K	4 NORM	500	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	5 MCMC	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSA200	500	•	•		•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 FHSB250	500				•	•	•	•	•	•	
DJ10K	5 FEVTA300	500	•			•	•	•	•	•	•	
DJ10K	5 FEVTB500	500				•	•	•	•	•	•	
DJ10K	5 t-A	500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	5 t-B	500	•				•	•	•	•	•	•

Tabelle 5.301.: Ergebnisse SV-Modelle 0.99-Value-at-Risk: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	6 MCMC	•			•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	6 FHS250	•			•	•	•	•	•	•	
DJ10K	6 FEVT200	•			•	•	•	•	•	•	
DJ10K	6 NORM					•	•	•	•	•	
SP2261	7RV MCMC	•	•	•	•		•	NA	•	•	•
SP2261	7RV FHS250	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•
SP2261	7RV FEVT250		•	•	•	•	•	NA	•	•	
SP2261	7RV NORM	•	•	•	•		•	NA	•	•	•
SP5079	7VIX MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	7VIX FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX FEVT300					•	•	•	•	•	
SP5079	7VIX NORM	•	•	•	•	•	•		•	•	•
SP2261	8 MCMC	•	•	•	•	•		NA	•	•	•
SP2261	8 FHS500	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
SP2261	8 FEVT500	•	•	•	•	•		NA	•	•	
SP2261	8 NORM	•	•	•	•	•		NA	•	•	•
SP5079	9 MCMC		•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	9 FHS500		•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	9 FEVT100	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
SP5079	9 NORM		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ2500	10 MCMC	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 FHS250	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 FEVT200		•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	10 t		•	•	•	•	•	NA	•	•	•
DJ2500	11 MCMC	•	•	•	•	•		NA	•	•	•
DJ2500	11 FHS250		•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 FEVT500		•	•	•	•	•	NA	•	•	
DJ2500	11 t	•	•	•	•	•		NA	•	•	•

Tabelle 5.302.: Ergebnisse SV-Modelle 0.99-Value-at-Risk (Teil 2): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05); K steht für Tausend; ZF=500

Es fallen die relativ schlechteren Ergebnisse zum 0.01-VaR auf, wo der LR_{PF} -Test nur bei Modell 5 (MCMC und die A-Varianten), 6-MCMC und 11-FHS zur Annahme der Nullhypothese geführt hat. Der VaR zu den oberen Niveaus 0.95/0.99 sind dagegen besser. Allgemein lässt sich anmerken, dass beim 0.01/0.05-VaR die Varianzen $\text{Var}(E250)$, $\text{Var}(E125)$ und $\text{Var}(E500)$ sehr oft zu hoch waren und beim 0.95/0.99-VaR eher angemessen waren. Dies bedeutet, dass die SV-Modelle allgemein Probleme mit dem linken Teil der Renditenverteilung haben. Dies bestätigt die bereits gemachte Feststellung, dass für den linken Teil der Verteilung eine leptokurtische Verteilung angemessen ist und der rechte Teil auch durch eine Normalverteilung gut abgebildet wird.

In Tabellen 5.303 und 5.304 werden die Ergebnisse weiter verdichtet, indem Strafpunkte gebildet werden. Die Strafpunkte werden etwas subjektiv vergeben, nach der von mir geschätzten Wichtigkeit der Tests. Der wichtigste Test ist meines Erachtens der LR_{PF} -Test, der überprüft ob der Anteil der VaR-Überschreitungen korrekt ist. Deshalb gewichte ich eine Verwerfung dieses Tests mit 3 Strafpunkten. Die Varianzen-Tests V1, V2 und V3 sind ebenfalls sehr wichtig, da diese Tests die richtige Anpassung des Value-at-Risk an die zeitvariierende Volatilität überprüfen. Für aufsichtsrechtliche Zwecke ist die jährliche Anzahl der VaR-Überschreitungen relevant und es ist wichtig, dass diese Anzahl nicht zu viel streut, sonst wird in manchen Jahren der Value-at-Risk-Ansatz von der Aufsichtsbehörde verworfen. Deshalb vergebe ich jeweils 2 Strafpunkte für jede Verletzung von V1, V2 oder V3. Verwerfung eines Unabhängigkeitstests LB1, LB2, LB3, LR_{ind} oder N111 wird mit je 1 Punkt bestraft. Die Strafpunkte jedes Modells zum 0.05/0.01/0.95/0.99-VaR werden addiert, um auf eine Gesamtsumme für das Modell zu kommen. Anschließend werden die Ränge gebildet.

Variante Nr.	Variante-Name	ZF	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	\sum SP	Rang
1	1 MCMC	500	12	11	2	0	25	54
2	1 FHS-A	500	4	9	0	3	16	25
3	1 FHS-B	500	4	9	0	3	16	25
4	1 FEVT-A	500	0	10	0	7	17	29.5
5	1 FEVT-B	500	3	9	3	9	24	51
6	1 NORM-A	500	8	10	2	6	26	58
7	1 NORM-B	500	12	9	2	9	32	62
8	2 MCMC	500	10	11	1	0	22	46
9	2 FHS	500	5	11	0	10	26	58
10	2 FEVT	500	1	11	1	9	22	46
11	2 NORM	500	10	10	3	6	29	61
12	3 MCMC	500	6	9	0	0	15	20
13	3 FHS-A	500	0	3	0	0	3	1
14	3 FHS-B	500	0	7	1	3	11	10.5
15	3 FEVT-A	500	0	9	0	3	12	12.5
16	3 FEVT-B	500	3	9	0	5	17	29.5
17	3 NORM-A	500	6	9	0	0	15	20
18	3 NORM-B	500	9	10	0	0	19	36.5
19	3 MCMC	1000	11	11	1	0	23	49.5
20	3 FHS	1000	0	9	0	3	12	12.5
21	3 NORM	1000	9	11	0	0	20	40.5
22	3 MCMC	2000	9	10	3	0	22	46
23	3 FHS	2000	0	5	1	5	11	10.5
24	3 NORM	2000	9	11	3	0	23	49.5
25	4 MCMC	500	10	10	2	0	22	46
26	4 FHS	500	3	9	1	9	22	46
27	4 FEVT	500	0	9	0	9	18	33
28	4 NORM	500	8	9	2	6	25	54
29	5 MCMC	500	8	6	2	3	19	36.5
30	5 FHS-A	500	4	0	3	2	9	5
31	5 FHS-B	500	3	9	0	8	20	40.5
32	5 FEVT-A	500	5	6	3	4	18	33
33	5 FEVT-B	500	3	9	0	9	21	43
34	5 t-A	500	11	6	5	3	25	54
35	5 t-B	500	12	9	7	6	34	63

Tabelle 5.303.: VaR Performance: Strafpunkte (SP) und Rang (Teil 1); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Variante Nr.	Variante-Name	ZF	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	\sum SP	Rang
36	6 MCMC	500	6	6	3	4	19	36.5
37	6 FHS	500	3	9	0	4	16	25
38	6 FEVT	500	0	9	0	4	13	14.5
39	6 NORM	500	7	10	2	9	28	60
40	7RV MCMC	500	4	9	1	1	15	20
41	7RV FHS	500	0	7	1	0	8	3.5
42	7RV FEVT	500	2	9	0	3	14	16.5
43	7RV NORM	500	4	9	1	1	15	20
44	7VIX MCMC	500	7	9	0	0	16	25
45	7VIX FHS	500	4	3	0	3	10	7.5
46	7VIX FEVT	500	0	9	0	9	18	33
47	7VIX NORM	500	7	9	0	1	17	29.5
48	8 MCMC	500	7	10	2	1	20	40.5
49	8 FHS	500	2	7	1	0	10	7.5
50	8 FEVT	500	0	7	2	1	10	7.5
51	8 NORM	500	7	10	2	1	20	40.5
52	9 MCMC	500	9	10	3	3	25	54
53	9 FHS	500	4	6	3	3	16	25
54	9 FEVT	500	3	6	4	0	13	14.5
55	9 NORM	500	9	10	3	3	25	54
56	10 MCMC	500	9	5	1	0	15	20
57	10 FHS	500	2	7	1	0	10	7.5
58	10 FEVT	500	0	10	1	3	14	16.5
59	10 t	500	6	5	3	3	17	29.5
60	11 MCMC	500	9	11	5	1	26	58
61	11 FHS	500	0	0	2	3	5	2
62	11 FEVT	500	0	3	0	5	8	3.5
63	11 t	500	7	10	1	1	19	36.5

Tabelle 5.304.: VaR Performance: Strafpunkte (SP) und Rang (Teil 2): Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Aus Tabellen 5.303 und 5.304 wird ersichtlich, dass die gefilterten Methoden (FHS und FEVT) in der Regel besser abschneiden als die modellbasierten Methoden (MCMC und NORM/t).

Variante Nr.	Daten	Modell-Name	ZF	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	\sum SP	Rang
13	DJ5000	3 FHS-A	500	0	3	0	0	3	1
61	DJ2500	11 FHS	500	0	0	2	3	5	2
41	SP2261	7RV FHS	500	0	7	1	0	8	3,5
62	DJ2500	11 FEVT	500	0	3	0	5	8	3,5
30	DJ10000	5 FHS-A	500	4	0	3	2	9	5
45	SP5079	7VIX FHS	500	4	3	0	3	10	7,5
49	SP2261	8 FHS	500	2	7	1	0	10	7,5
50	SP2261	8 FEVT	500	0	7	2	1	10	7,5
57	DJ2500	10 FHS	500	2	7	1	0	10	7,5
14	DJ5000	3 FHS-B	500	0	7	1	3	11	10,5
23	DJ5000	3 FHS	2000	0	5	1	5	11	10,5

Tabelle 5.305.: VaR Performance: Top 10 (11) (Dow Jones und S&P-500)

In Tabelle 5.305 werden die ersten 11 Modelle (zu den Dow-Jones und S&P-500 Zeitreihen) aufgelistet. Bestes Modell ist Modell 3-FHS bei einem Schätz-Zeitfenster von 500 Beobachtungen. Zweitbestes Modell ist Modell 11-FHS bei einem Schätzfenster von ebenfalls 500 Beobachtungen. Selbst bei anderen Gewichtungen werden wahrscheinlich diese beide Modelle ihre Plätze behalten, Modell 3-FHS wurde nur von einem Test (aus 36) verworfen, und Modell 11-FHS von 2 (aus 36). Der Expected Shortfall wurde für beide ersten Modelle nur auf dem 0.01-ES-Niveau angenommen. Es ist anzumerken, dass unter den ersten 11 Modellen 4 mit einer Stichprobengröße von mindestens 5000 zu finden sind, und das obwohl größere Stichproben größere Ansprüche an die Ergebnisse auferlegen.

Zusammenfassend lässt sich anmerken, dass Modelle 3 (mit Leverage Effekt), 5 (Mit einer t-verteilten Innovation der Renditengleichung), 6 (Stochastic-Volatility-in-Mean), 7 RV und 7 VIX (mit zusätzlichem Regressor -RV oder VIX- in der Volatilitätsgleichung) besser sind als das Basis Modell 1. Somit stellen diese Modelle (aus Sicht der out-of-sample VaR/ES-Prognose) eine sinnvolle Verallgemeinerung des Basis Modells dar. Modell 10 ist bei den MCMC/t-Methoden sinnvolle Erweiterung der Modelle 1 und 3, und Modell 11 bei den FHS/FEVT-Methoden. Obwohl Modell 3 bei vereinzelt VaR-Methoden übertroffen wird, ist insgesamt seine exzellente gesamte Performance hervorzuheben. Falls man eine Gesamt-Strafpunktzahl über allen VaR-Methoden je Modell einführen würde, würde Modell 3 - für die DJIA und S&P 500 Stichproben- am besten abschneiden. Dies hat dazu geführt, dass für die restlichen Stichproben, untersucht in dieser Arbeit, lediglich Modell 3 zur Prognose herangezogen wird.

Zeitreihe	Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
DJ10000	1 MCMC	500	0.0003916	0.005912
DJ10000	1 NORM-A	500	1.11e-16	1.11e-16
DJ10000	1 NORM-B	500	3.02e-13	5.55e-16
DJ10000	2 MCMC	500	0.002513	0.04233
DJ10000	2 NORM	500	0	5.55e-16
DJ5000	3 MCMC	500	0.002892	5.62e-06
DJ5000	3 NORM-A	500	2.51e-07	2.33e-09
DJ5000	3 NORM-B	500	7.11e-06	8.37e-09
DJ5000	3 MCMC	1000	0.01022	0.001456
DJ5000	3 NORM	1000	2.03e-07	1.94e-11
DJ5000	3 MCMC	2000	0.001001	0.00643
DJ5000	3 NORM	2000	7.55e-09	2.73e-09
DJ10000	4 MCMC	500	0.02692	0.007812
DJ10000	4 NORM	500	3.33e-16	3.33e-16
DJ10000	5 MCMC	500	0.661	0.2251
DJ10000	5 t-A	500	0	0
DJ10000	5 t-B	500	6.76e-05	4.01e-05

Tabelle 5.306.: Ergebnisse SV Modelle ganze Prognoseverteilung (DJIA und SP500, Teil 1)

Die Ergebnisse zur ganzen Prognoseverteilung (Tabellen 5.306 und 5.307) sind wie folgt: Auf dem Feinheitsgrad 20 Klassen werden die Prognoseverteilungen von den Modellen 5-MCMC (mit t-verteilter Innovation in der Renditengleichung) und 7RV-MCMC (mit zusätzlichem RV Regressor in der Volatilitätsgleichung) angenommen. Auf dem Feinheitsgrad von 100 Klassen werden die Prognoseverteilungen lediglich für die 5-MCMC (t-verteilte Innovation) und 6-MCMC (Stochastic-Volatility-in-Mean) Modelle angenommen.

Zeitreihe	Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
DJ10000	6 MCMC	500	0.0318	0.1412
DJ10000	6 NORM	500	3.04e-14	3.45e-14
SP2261	7RV MCMC	500	0.09203	0.02347
SP2261	7RV NORM	500	0.01624	0.04898
SP5079	7VIX MCMC	500	0.007524	0.0122
SP5079	7VIX NORM	500	1.01e-13	3e-15
SP2261	8 MCMC	500	0.00402	0.02528
SP2261	8 NORM	500	0.005063	0.01059
SP5079	9 MCMC	500	1.4e-11	4.97e-12
SP5079	9 NORM	500	3.01e-13	1.21e-12
DJ2500	10 MCMC	500	0.00204	0.01843
DJ2500	10 t	500	2.08e-07	0.0002232
DJ2500	11 MCMC	500	4.71e-06	0.0009004
DJ2500	11 t	500	1.05e-06	4.77e-06

Tabelle 5.307.: Ergebnisse SV Modelle ganze Prognoseverteilung (DJIA und SP500, Teil 2)

5.5.2. Restliche Zeitreihen

Die SV-Modell 3 DAX-Ergebnisse wurden im Abschnitt 5.4.13 erläutert. In den folgenden Tabellen werden auch die Ergebnisse für die restlichen Zeitreihen erfasst (Aktie Boeing, Aktie Hewlett Packard, Rohstoff Brent Oil Europe, Währungskurse GBP/USD und USD/JPY). Beim 0.05-VaR haben die 3-FHS-Modelle die besten Ergebnisse erzielt mit Ausnahme der Brent Oil-Zeitreihe, bei der alle 3 betrachteten Varianten vom SV-Modell 3 exzellente VaR-Ergebnisse haben. Die 0.01-VaR Ergebnisse sind schlechter mit einziger Annahme des LR_{PF} -Tests bei den Boeing und Brent Zeitreihen und der MCMC-Modellvariante. Auch beim 0.01-VaR werden die besten Ergebnisse mit der FHS-Methode erzielt, mit Ausnahme der Brent Zeitreihe (BO), bei der die MCMC Methode besser ist. Die 0.95-VaR Ergebnisse sind annehmbar für alle Varianten des Modells 3 und alle Zeitreihen. Die 0.99-VaR Ergebnisse sind schlechter (wenn auch besser als die 0.01-VaR-Ergebnisse), mit bester Performance der 3-MCMC Modelle. Der Expected Shortfall wird relativ selten angenommen (siehe Tabellen).

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	3 MCMC					•	•	•	•	•	
DAX5K	3 FHS200		•	•	•	•	•	•	•	•	
DAX5K	3 NORM					•	•	•	•	•	
BA5K	3 MCMC	•				•	•	•	•	•	•
BA5K	3 FHS250	•	•		•	•	•	•	•	•	
BA5K	3 NORM	•				•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 MCMC	•				•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 FHS100		•	•	•	•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 NORM	•				•	•	•	•	•	
BO5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
GBPUSD5K	3 MCMC	•				•				•	
GBPUSD5K	3 FHS100	•	•	•	•	•	•		•	•	
GBPUSD5K	3 NORM	•				•			•	•	
USDJPY5K	3 MCMC	•			•	•	•		•	•	
USDJPY5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 NORM	•			•	•	•	•	•	•	

Tabelle 5.308.: Ergebnisse SV-Modell 3 0.05-Value-at-Risk/ES: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{pF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	3 MCMC					•	•	•	•	•	•
DAX5K	3 FHS100		•		•	•	•	•	•	•	NA
DAX5K	3 NORM					•	•	•	•	•	
BA5K	3 MCMC	•				•	•	•	•	•	
BA5K	3 FHS100		•	•	•	•	•	•	•	•	NA
BA5K	3 NORM					•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 MCMC		•	•		•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 FHS100		•		•	•	•	•	•	•	NA
HPQ4691	3 NORM					•	•	•	•	•	
BO5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 FHS100		•	•	•	•	•	•	•	•	NA
BO5K	3 NORM		•	•	•	•	•	•	•	•	
GBPUSD5K	3 MCMC					•	•	•	•	•	•
GBPUSD5K	3 FHS100			•	•	•	•	•	•	•	NA
GBPUSD5K	3 NORM					•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 MCMC			•		•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 NORM					•	•	•	•	•	

Tabelle 5.309.: Ergebnisse SV-Modell 3 0.01-Value-at-Risk/ES: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{pF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DAX5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DAX5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BA5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BA5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 FHS200	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
BO5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
GBPUSD5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBPUSD5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
GBPUSD5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
USDJPY5K	3 FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
USDJPY5K	3 NORM	•	•	•	•	•	•	•	•	•	

Tabelle 5.310.: Ergebnisse SV-Modell 3 0.95-Value-at-Risk/ES: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	3 MCMC		•	•	•	•	•	•	•	•	•
DAX5K	3 FHS250	•		•		•	•	•		•	
DAX5K	3 NORM	•	•		•		•	•	•		•
BA5K	3 MCMC	•		•		•	•	•	•	•	
BA5K	3 FHS400					•	•	•	•	•	
BA5K	3 NORM					•	•	•	•	•	
HPQ4691	3 MCMC	•	•	•	•		•	•	•	•	•
HPQ4691	3 FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	3 NORM							•	•	•	•
BO5K	3 MCMC	•		•	•	•	•	•	•	•	•
BO5K	3 FHS100	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
BO5K	3 NORM	•				•	•	•	•	•	•
GBPUSD5K	3 MCMC	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBPUSD5K	3 FHS100		•	•	•	•	•	•	•	•	NA
GBPUSD5K	3 NORM		•	•	•		•	•	•	•	•
USDJPY5K	3 MCMC	•	•	•	•		•	•	•	•	•
USDJPY5K	3 FHS250		•	•	•	•	•	•	•	•	•
USDJPY5K	3 NORM		•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 5.311.: Ergebnisse SV-Modell 3 0.99-Value-at-Risk/ES: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Variante Nr.	Daten	Modell-Name	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	\sum SP
1	DAX5K	3 MCMC	9	9	0	3	21
2	DAX5K	3 FHS	4	5	1	5	15
3	DAX5K	3 NORM	9	9	0	0	18
4	BA5K	3 MCMC	6	6	0	4	16
5	BA5K	3 FHS	2	3	1	9	15
6	BA5K	3 NORM	6	10	0	9	25
7	HPQ4691	3 MCMC	7	5	2	2	16
8	HPQ4691	3 FHS	3	5	0	3	11
9	HPQ4691	3 NORM	6	9	2	11	28
10	BO5K	3 MCMC	0	1	3	3	7
11	BO5K	3 FHS	0	3	0	0	3
12	BO5K	3 NORM	0	4	3	7	14
13	GBPUSD5K	3 MCMC	8	9	0	2	19
14	GBPUSD5K	3 FHS	1	5	0	3	9
15	GBPUSD5K	3 NORM	8	9	1	8	26
16	USDJPY5K	3 MCMC	6	7	3	1	17
17	USDJPY5K	3 FHS	1	3	0	3	7
18	USDJPY5K	3 NORM	5	9	3	5	22

Tabelle 5.312.: VaR Performance: Strafpunkte (SP) (restliche Zeitreihen); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Tabelle 5.312 zeigt die Strafpunkte der 18 betrachteten Kombinationen zwischen Zeitreihe und Modellvariante. Bei allen Zeitreihen ist die FHS Methode die beste. Die besten 3-FHS Ergebnisse werden bei der Brent Oil-Zeitreihe erzielt, die mit den Ergebnissen bei der Dow-Jones 5000 Zeitreihe vergleichbar sind. Zweitbesten 3-FHS Ergebnisse werden bei den Währungskursen erzielt. Die 3-FHS-Ergebnisse des DAX und der beiden Einzelaktien sind schlecht.

Zeitreihe	Modell	20 Klassen	100 Klassen
DAX5K	3 MCMC	0.0001123	0.005293
DAX5K	3 NORM	3.61e-06	1.06e-07
BA5K	3 MCMC	0.8982	0.08699
BA5K	3 NORM	4.74e-06	3.71e-08
HPQ4691	3 MCMC	0.08297	0.005943
HPQ4691	3 NORM	1.09e-11	6.85e-12
BO5K	3 MCMC	0.06841	0.03445
BO5K	3 NORM	2.92e-05	9.95e-05
GBPUSD5K	3 MCMC	0.008719	0.02912
GBPUSD5K	3 NORM	1.91e-09	5.36e-07
USDJPY5K	3 MCMC	0.0001084	0.0001191
USDJPY5K	3 NORM	0	0

Tabelle 5.313.: Ergebnisse SV Modell 3 ganze Prognoseverteilung (restliche Zeitreihen). K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Tabelle 5.313 zeigt die Ergebnisse der Anpassungstests zur Beurteilung der ganzen Prognoseverteilungen für die restlichen betrachteten Zeitreihen (außer Dow Jones und S&P-500). Für die DAX-Zeitreihe werden beide Modellvarianten verworfen. Für die Boeing-Zeitreihe erzielt die 3-MCMC-Methode gute Ergebnisse auf beiden Feinheitsniveaus. Für die Hewlett-Packard und die Brent Oil- Zeitreihen wird nur die 3-MCMC Methode auf dem niedrigeren Feinheitsgrad angenommen. Für die Währungskurse wird keine der Methoden angenommen.

Insgesamt sind die Ergebnisse der Stochastic-Volatility-Modelle, betrachtet in dieser Arbeit, nicht überall überzeugend. Beste Gesamt-Performance hat das Asymmetrische SV-Modell 3. Einzelne Modellvarianten (MCMC, FHS, FEVT oder NORM) dieses Modells werden von manchen Modellvarianten anderer Modelle übertroffen. Von allen betrachteten Zeitreihen passt das Modell 3 am besten zur Brent-Oil Zeitreihe.

5.6. Simulationsstudie

Bei den gesehenen unzufriedenstellenden Ergebnissen der Stochastic-Volatility-Modelle bei einer Anwendung auf empirische Zeitreihen stellt sich die Frage, ob die Modellspezifikationen problematisch sind, oder die Schätzverfahren und die Verfahren zum Bilden der Prognoseverteilung. Um diese Frage zu beantworten, wird das insgesamt beste (wie bereits gesehen) SV-Modell 3 als Daten-generierenden Prozess herangezogen und es wird anschließend mit der in dieser Arbeit üblichen Vorgehensweise mit dem richtig spezifizierten Modell 3 der Value-at-Risk und der Expected Shortfall prognostiziert (dabei werden die Parameter als unbekannt betrachtet und geschätzt). Falls die Ergebnisse in diesem Fall gut sind, liegt das Problem sicherlich nicht in den Schätzverfahren oder im Bilden der Prognoseverteilung. Gute Ergebnisse würden bedeuten, dass die Modellspezifikationen der hier betrachteten SV-Modelle zu den empirischen Zeitreihen nicht passend sind.

Es wurden 12000 Tagesrenditen mit Hilfe des ASV-Modells generiert. Die Parameter des Modells sind $\mu = 0$, $\gamma = -0.0688$, $\phi = 0.972$, $\sigma_\eta = 0.1495$ und $\rho = -0.3179$. Diese Parameter wurden mit einem ASV Modell, angewandt auf tägliche Renditen des S&P 500 Index für die Periode Januar 1980 bis Dezember 1987, geschätzt - Quelle ist Yu (2005, S. 173). Anschließend wurden die Ergebnisse für den Value-at-Risk anhand der Schätzung der Parameter und der Prognoseverteilung mit dem richtig spezifizierten ASV-Modell 3 betrachtet, Untersuchungsstichprobe sind die letzten 5000 Beobachtungen aus den simulierten 12000 Beobachtungen. Zu beachten ist auch, dass sich die wahren Parameter in der Simulationsstudie über die ganze Stichprobe nicht ändern, während in der Realität Strukturbrüche vorliegen. Im Folgenden werden die ausführlichen Ergebnisse dargestellt, und anschließend werden sie im zusammenfassenden Abschnitt kommentiert.

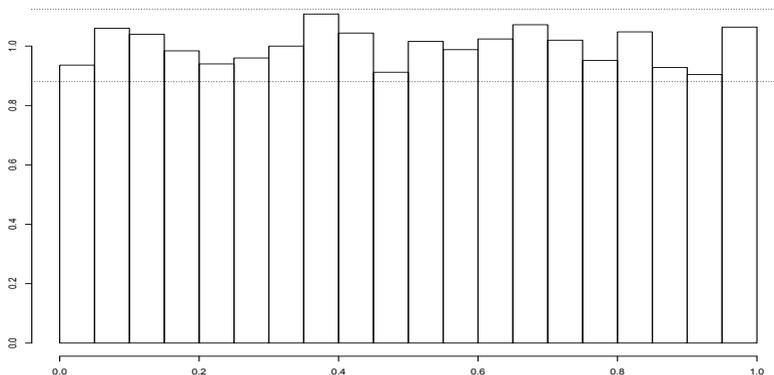
5.6.1. Modell 3 Stichprobenfenster 500**a) MCMC-simulierte Prognoseverteilung**

Abbildung 5.59.: Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.6277

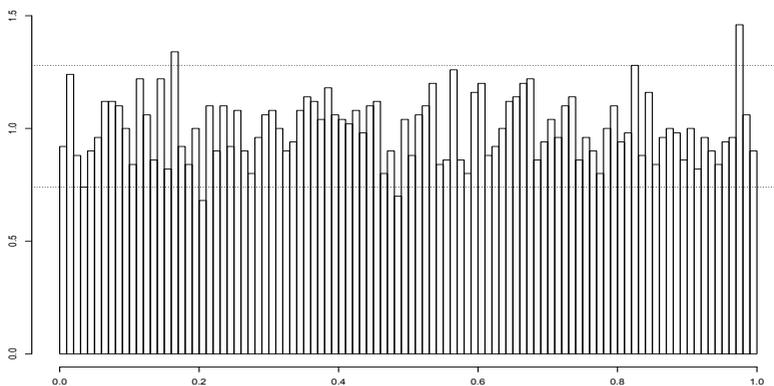


Abbildung 5.60.: Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-MCMC, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.3831

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	235
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.047; 0.3257
Var(E250);V1;LB1;acf	16.09; 0.2673; 0.5368; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.19; 0.5873; 0.1078; –
Var(E500);V3;LB3;acf	40.5; 0.1063; 0.0639; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0425; 0.07903
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6879
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0488; 0.5367 ; 0.1644; 0.1678

Tabelle 5.314.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	46
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0092; 0.5644
Var(E250);V1;LB1;acf	2.12; 0.672; 0.5958; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.95; 0.3792; 0.2028; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	7.6; 0.2429; 0.8494; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3553; 0.553
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4947
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1491; 0.631 ; 0.116; 0.1313

Tabelle 5.315.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	266
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0532; 0.3039
Var(E250);V1;LB1;acf	9.17; 0.4819; 0.9162; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.87; 0.129; 0.6166; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.82; 0.3621; 0.2077; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1936; 0.2524
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.7027
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0437; 0.3739 ; 0.0578; 0.0602

Tabelle 5.316.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	45
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.009; 0.4697
Var(E250);V1;LB1;acf	4.09; 0.0539; 0.3417; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.6; 0.2551; 0.3878; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.06; 0.6471; 0.9519; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4261; 0.5616
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.5131
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1044; 0.2851 ; 0.0181; 0.0247

Tabelle 5.317.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-MCMC, ZF=500**b) Prognoseverteilung durch Filtered Historical Simulation (mit**

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	251
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0502; 0.9483
Var(E250);V1;LB1;acf	15.21; 0.3839; 0.7115; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.64; 0.8314; 0.3497; –
Var(E500);V3;LB3;acf	36.99; 0.2119; 0.2209; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2133; 0.4598
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6687
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1158; 0.5392 ; 0.00077368; 0.002

Tabelle 5.318.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	56
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0112; 0.4028
Var(E250);V1;LB1;acf	2.06; 0.6376; 0.9088; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.02; 0.4962; 0.9619; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.71; 0.9239; 0.4401; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.26; 0.3732
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4649
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2103; 0.6281 ; 0.0152; 0.0252

Tabelle 5.319.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	255
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.051; 0.7464
Var(E250);V1;LB1;acf	5.36; 0.0817; 0.8753; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.62; 0.0886; 0.1154; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.39; 0.0778; 0.7483; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1656; 0.3626
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.7284
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	n.a.; n.a. ; n.a.; n.a.

Tabelle 5.320.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-100, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	70
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.014; 0.0073
Var(E250);V1;LB1;acf	5.11; 0.0086; 0.0494; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.99; 0.0266; 0.0228; (2),6
Var(E500);V3;LB3;acf	3.78; 0.6186; 0.0278; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0947; 0.00678
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3336
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1884; 0.3375 ; 0.000014411; 0.00014

Tabelle 5.321.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FHS-250, ZF=500**c) Quantil-Prognose durch Filtered Extreme Value Theory (mit**

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	256
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0512; 0.6981
Var(E250);V1;LB1;acf	12.48; 0.8756; 0.1942; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.02; 0.5024; 0.6005; –
Var(E500);V3;LB3;acf	22.71; 0.9277; 0.0807; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2767; 0.5127
n111;95%-Intervall H_0	2; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6567
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1498; 0.545 ; 0.000015977; 0.00016

Tabelle 5.322.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-200k20, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	83
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0166; 0.000018361
Var(E250);V1;LB1;acf	2.56; 0.9337; 0.8945; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.35; 0.7237; 0.4824; –
Var(E500);V3;LB3;acf	3.34; 0.4952; 0.3518; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0941; 2.53e-05
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.2661
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2105; 0.6127 ; 0.0024; 0.0057

Tabelle 5.323.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	264
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0528; 0.3678
Var(E250);V1;LB1;acf	3.64; 0.0338; 0.5305; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.73; 0.1046; 0.0761; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.04; 0.062; 0.1806; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1729; 0.2625
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.7027
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1367; 0.3769 ; 1.16e-08; 0

Tabelle 5.324.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-250k25, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	84
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0168; 0.000010648
Var(E250);V1;LB1;acf	4.91; 0.0121; 0.1191; –
Var(E125);V2;LB2;acf	2.25; 0.0074; 0.1434; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.16; 0.9383; 0.1284; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2353; 3.02e-05
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.2537
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.2078; 0.324 ; 8.33e-08; 0

Tabelle 5.325.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-FEVT-400k40, ZF=500

d) Prognose mit der Innovationsverteilung (Standardnormal) und

$$\hat{\sigma}_{t+1} = sd(\hat{r}_{t+1}^{MCMC})$$

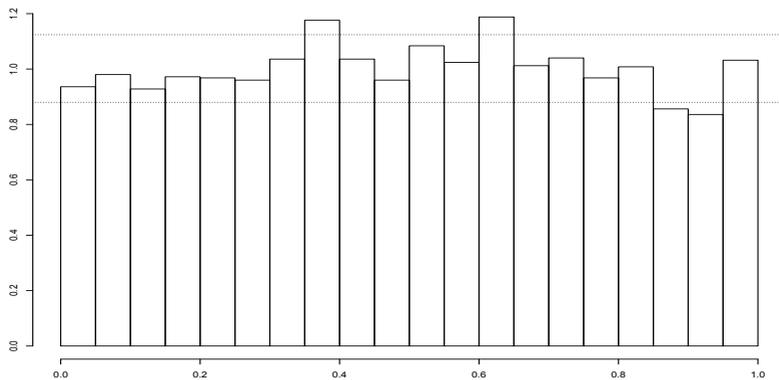


Abbildung 5.61.: Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.01155

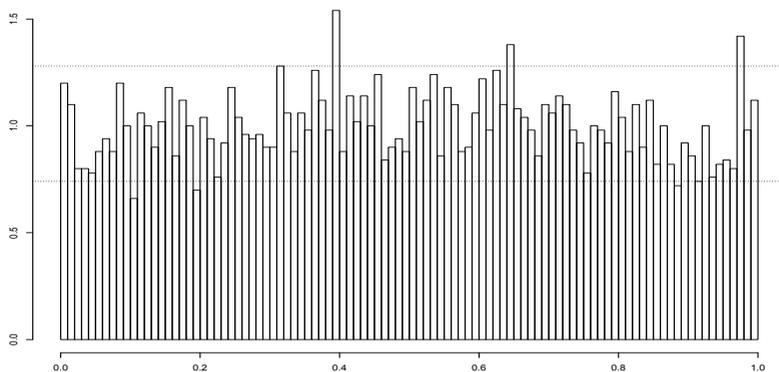


Abbildung 5.62.: Histogramm der transformierten SIM-5000-Renditen (SV-Modell 3-NORM, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.02564

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	234
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0468; 0.2942
Var(E250);V1;LB1;acf	15.69; 0.3177; 0.185; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.85; 0.4258; 0.0097; 1 (5,6)
Var(E500);V3;LB3;acf	42.71; 0.0706; 0.1432; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0741; 0.1174
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.6992
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1073; 0.5314 ; 0.0023; 0.0052

Tabelle 5.326.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	60
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.012; 0.1682
Var(E250);V1;LB1;acf	2.21; 0.7582; 0.1524; 1
Var(E125);V2;LB2;acf	1.03; 0.5171; 0.1623; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	8.44; 0.1143; 0.4567; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2273; 0.1863
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.4062
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1883; 0.5984 ; 0.0178; 0.0344

Tabelle 5.327.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	258
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0516; 0.6055
Var(E250);V1;LB1;acf	8.41; 0.3648; 0.4745; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.74; 0.106; 0.3964; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.84; 0.6654; 0.4105; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1203; 0.2613
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.7134
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0291; 0.37 ; 0.2073; 0.2088

Tabelle 5.328.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	56
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0112; 0.4028
Var(E250);V1;LB1;acf	3.96; 0.0723; 0.0962; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.63; 0.2123; 0.0845; –
Var(E500);V3;LB3;acf	3.6; 0.5728; 0.8918; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.661; 0.6393
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4204
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0103; 0.2883 ; 0.7908; 0.7917

Tabelle 5.329.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), SIM 5000, SV-Modell 3-NORM, ZF=500

5.6.2. Zusammenfassung der Ergebnisse der Simulationsstudie

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.3257	0.2673	0.5873	0.1063	0.5368	0.1078	0.0639	0.0425	●	0.1678
3 FHS250	0.9483	0.3839	0.8314	0.2119	0.7115	0.3497	0.2209	0.2133	●	0.002
3 FEVT200	0.6981	0.8756	0.5024	0.9277	0.1942	0.6005	0.0807	0.2767	●	0.00016
3 NORM	0.2942	0.3177	0.4258	0.0706	0.185	0.0097	0.1432	0.0741	●	0.0052

Tabelle 5.330.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.05-Value-at-Risk; Zeitfenster 500

Die Ergebnisse von 3-MCMC zum 0.05-VaR/ES sind sehr gut: die Nullhypothese wird nur beim Unabhängigkeitstest LR_{ind} knapp verworfen. Beim 3-FHS und 3-EVT zum 0.05-VaR/ES wird nur die Richtigkeit des Expected Shortfall verworfen. Beim 3-NORM wird die Nullhypothese bei einem Ljung-Box-Test und dem Expected-Shortfall-Test verworfen.

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	1	0.1924	0.6005	0.753	0.6292	0.2228	0.0291	0.0199	●	0.3534
3 FHS250	0.4396	0.9594	0.7722	0.5646	0.5274	0.9744	0.0427	0.5279	●	0.0025
3 NORM	0.5137	0.7236	0.2471	0.9243	0.3402	0.1456	0.0746	0.0164	●	0.003

Tabelle 5.331.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.05-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000

Eine Erhöhung des beweglichen Zeitfensters von 500 auf 2000 bringt keine enorme Verbesserung der Ergebnisse.

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.5644	0.672	0.3792	0.2429	0.5958	0.2028	0.8494	0.3553	●	0.1313
3 FHS250	0.4028	0.6376	0.4962	0.9239	0.9088	0.9619	0.4401	0.26	●	0.0252
3 FEVT250	1.8e-05	0.9337	0.7237	0.4952	0.8945	0.4824	0.3518	0.0941	●	0.0057
3 NORM	0.1682	0.7582	0.5171	0.1143	0.1524	0.1623	0.4567	0.2273	●	0.0344

Tabelle 5.332.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.01-Value-at-Risk; Zeitfenster 500

Die Ergebnisse des 0.01-VaR/ES sind ähnlich wie beim 0.05-VaR/ES, es muss nur angemerkt werden, dass der Proportion-of-Failure- Test das 3-EVT250 Modell verwirft.

Es ändert sich auch hier wenig durch Erhöhung des Zeitfensters von 500 auf 2000, bei 3-NORM führt sogar der LR_{PF} -Test zur Ablehnung.

Ähnlich ist es auch beim 0.95 VaR/ES, anzumerken ist die Annahme des ES beim 3-NORM Modell.

Eine Erhöhung des Zeitfensters von 500 auf 2000 führt dazu, dass der ES bei 3-MCMC nun verworfen wird.

Zum Niveau 0.99 wird der ES nur beim 3-NORM angenommen. Der LR_{PF} -Test führt zur Ablehnung der Nullhypothese beim 3-FHS und 3-EVT Modell.

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.7747	0.3023	0.0758	0.9616	0.6409	0.5176	0.8072	0.3347	●	0.1166
3 FHS250	0.3305	0.7834	0.4066	0.6946	0.4394	0.8901	0.3593	0.6837	●	0.0175
3 NORM	0.0302	0.6627	0.6921	0.1335	0.1835	0.6258	0.8111	0.8914	●	0.0372

Tabelle 5.333.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.01-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.3039	0.4819	0.129	0.3621	0.9162	0.6166	0.2077	0.1936	●	0.0602
3 FHS100	0.7464	0.0817	0.0886	0.0778	0.8753	0.1154	0.7483	0.1656	●	n.a.
3 FEVT250	0.3678	0.0338	0.1046	0.062	0.5305	0.0761	0.1806	0.1729	●	0
3 NORM	0.6055	0.3648	0.106	0.6654	0.4745	0.3964	0.4105	0.1203	●	0.2088

Tabelle 5.334.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.95-Value-at-Risk; Zeitfenster 500

Auch hier keine nennenswerte Verbesserung durch Erhöhung des beweglichen Zeitfensters von 500 auf 2000.

Die Auswertung der ganzen Prognoseverteilung, basierend auf MCMC-Simulation der nächsten Rendite, zeigt, dass der Anpassungstest die Richtigkeit der Prognoseverteilung - sowohl bei einer 20-er als auch bei einer 100-er Aufteilung - nicht verwerfen kann. Die anderen Modelle (3-NORM) liefern schlechtere Ergebnisse mit Ausnahme der 20-Balken-Diagramme zum Zeitfenster 2000.

Insgesamt lässt sich feststellen, dass das 3-MCMC Modell sehr gute VaR/ES/Prognoseverteilung-Ergebnisse in der Simulationsstudie erzielen. Eine Erhöhung des beweglichen Zeitfensters von 500 auf 2000 hat wenig gebracht.

Tabelle 5.339 zeigt, dass Modelle 3-MCMC und 3-NORM (zum Schätzungs-Zeitfenster von 500) exzellente Ergebnisse liefern. Dies bedeutet, dass die Stochastic-Volatility Modelle das Potenzial haben, exzellente Ergebnisse zu liefern, insbesondere wenn die Zeitreihe durch ein Stochastic-Volatility Modell generiert wurde. Dies zeigt, dass die Effizienz der MCMC-Schätzung oder der Prognoseverteilung wenigstens beim Modell 3 kein Problem darstellt.

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.275	0.3415	0.053	0.3253	0.3902	0.3129	0.0829	0.0432	●	0.0131
3 FHS500	0.5614	0.2173	0.0513	0.0852	0.7203	0.1011	0.3237	0.042	●	0
3 NORM	0.6511	0.2869	0.0435	0.2834	0.8405	0.5207	0.0748	0.0359	●	0.3989

Tabelle 5.335.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.95-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.4697	0.0539	0.2551	0.6471	0.3417	0.3878	0.9519	0.4261	●	0.0247
3 FHS250	0.0073	0.0086	0.0266	0.6186	0.0494	0.0228	0.0278	0.0947	●	0.00014
3 FEVT400	1e-05	0.0121	0.0074	0.9383	0.1191	0.1434	0.1284	0.2353	●	0
3 NORM	0.4028	0.0723	0.2123	0.5728	0.0962	0.0845	0.8918	0.661	●	0.7917

Tabelle 5.336.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.99-Value-at-Risk; Zeitfenster 500

Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
3 MCMC	0.4697	0.113	0.8742	0.7158	0.4173	0.0408	0.104	0.3659	●	0.0147
3 FHS250	0.0015	0.0656	0.0128	0.9383	0.1005	0.0012	0.0375	0.4305	●	0.00053
3 NORM	0.4843	0.0689	0.2258	0.4514	0.4582	0.0069	0.062	0.2686	●	0.7685

Tabelle 5.337.: Ergebnisse Simulationsstudie 0.99-Value-at-Risk; Zeitfenster 2000

Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
3 MCMC	500	0.6277	0.3831
3 NORM	500	0.0116	0.0256
3 MCMC	2000	0.9877	0.7105
3 NORM	2000	0.1761	0.02849

Tabelle 5.338.: Ergebnisse SV Modelle, ganze Prognoseverteilung (Simulationsstudie)

Modell Nr.	Modell-Name	ZF	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	SP Gesamt
1	3 MCMC	500	1	0	0	0	1
2	3 FHS	500	0	0	0	10	10
3	3 FEVT	500	0	3	2	7	12
4	3 NORM	500	1	0	0	0	1
5	3 MCMC	2000	2	0	1	1	4
6	3 FHS	2000	1	0	1	7	9
7	3 NORM	2000	1	3	3	1	8

Tabelle 5.339.: VaR Performance ASV-Modell 3: Strafpunkte (SP) (Durch ASV Modell 3 generierte Daten); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

6. Zum Vergleich: Berechnen des Value-at-Risk und Expected Shortfall mit GARCH Modellen und Historical Simulation und Überprüfung durch Backtesting

In diesem Kapitel werden zunächst die detaillierten Ergebnisse der VaR/ES-Berechnung (bzw. Prognoseverteilungsermittlung) für die verschiedenen Finanzinstrumente mithilfe eines APARCH Modells mit schiefer t-verteilter Innovation dargestellt (AP.st). Dieses Modell wurde ausgewählt, da es die besten Ergebnisse für den Dow-Jones Aktienindex lieferte (siehe den Abschnitt *Zusammenfassung der Ergebnisse für die Modelle der GARCH-Familie* weiter im Text) und es auch das flexibelste ist- die anderen betrachteten Modelle der GARCH Familie könnten als dessen Spezialfälle betrachtet werden. Im bereits erwähnten zusammenfassenden Abschnitt dieses Kapitels wurden insbesondere für die Dow-Jones Zeitreihe auch die Ergebnisse anderer Modelle der GARCH Familie dargestellt (das klassische GARCH(1,1) Modell (G11.nrm) mit normalverteilten Innovation, das APARCH Modell mit normal- oder Student-t verteilter Innovation (AP.nrm und AP.t)). Da die gefilterten EVT-Ergebnisse ähnlich wie die FHS Ergebnisse waren, werden sie nur im zusammenfassenden Abschnitt behandelt. Die Value-at-Risk Prognose mittels GARCH-Modelle in Verbindung mit FHS/EVT ist nicht neu in der Literatur, diese Modelle/Methoden wurden z.B. in Kuester et al. (2006) verwendet. Kuester et al. (2006) untersuchen jedoch nur das GARCH(1,1)-Modell (mit verschiedenen Annahmen für die Verteilung der Renditeninnovation- standardnormal, Student-t, schiefe-t, MixN, MixGED), in dieser Arbeit wird auch noch das APARCH(1,1)-Modell mit $\delta = 2$ untersucht. Das APARCH Modell wurde in Definition 2.20 spezifiziert. Das APARCH(p,q)-Modell, verwendet in dieser Arbeit, lautet:

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|a_{t-i}| - \varsigma_i a_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

wobei ε_t unabhängig identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz 1, und außerdem gilt $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ und $|\varsigma_i| < 1$.

Im APARCH(1,1)-Modell halte ich $\delta = 2$ fest, dieses Modell ist dann äquivalent zum GJR-Modell.

Das GARCH(p,q) Modell lautet:

$$r_t = \mu + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

wobei ε_t unabhängig identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz

1, und außerdem gilt $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ und $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$

Die in dieser Arbeit verwendeten Dichten der standardisierten und der standardisierten schiefen Student-t Verteilung²²⁰ kann man in Würtz et al. (2006, S. 10-12) finden: in diesem Beitrag werden die vom R-Paket *fGarch* verwendeten Methoden dokumentiert.

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für Var(E250), Var(E125) und Var(E500) sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR.

6.1. Dow Jones Aktienindex

6.1.1. 1000 Beobachtungen

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	490
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.049; 0.6453
Var(E250); V1; LB1; acf	13.53; 0.5446; 0.05028; (1) 10
Var(E125); V2; LB2; acf	6.77; 0.3884; 0.1355; -
Var(E500); V3; LB3; acf	21.11; 0.7351; 0.000447; (1) 5
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.1496; 0.3188
$n111$; 95%-Intervall $ H_0$	0; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.63938
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.02495; 0.8792 ; 0.5302; 0.5362

Tabelle 6.1.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS250, ZF=500

²²⁰Diese Verteilungen werden für die Innovation ε_t der Renditengleichung verwendet.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	113
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0113; 0.2006
Var(E250);V1;LB1;acf	1.99; 0.4259; 0.116; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.28; 0.8447; 0.0859; (1,6,19)
Var(E500);V3;LB3;acf	4.98; 0.9911; 0.1432; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5497; 0.3681
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.51697
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.01227; 1.325 ; 0.9217; 0.9227

Tabelle 6.2.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	504
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0504; 0.8546
Var(E250);V1;LB1;acf	9.43; 0.3656; 0.3003; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.63; 0.7509; 0.2597; –
Var(E500);V3;LB3;acf	19.75; 0.6063; 0.6757; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7673; 0.9408
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.60659
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.01752; 0.4966 ; 0.4288; 0.4288

Tabelle 6.3.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Die Ergebnisse des APARCH.st.FHS -Modells sind beim Dow-Jones-Index besser als alle Stochastic Volatility Modelle. Hier wird der Expected Shortfall auf allen ES-Niveaus angenommen. Der Value-at-Risk ist ebenfalls hervorragend, mit einer einzigen Verwerfung vom LB3-Test beim 0.05-VaR.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	106
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0106; 0.5504
Var(E250);V1;LB1;acf	1.72; 0.2038; 0.0948; (1)
Var(E125);V2;LB2;acf	1.36; 0.5935; 0.0612; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2.64; 0.1463; 0.1362; (1,7)
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.451; 0.6294
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3712
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.00277; 0.5772 ; 0.9607; 0.9606

Tabelle 6.4.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

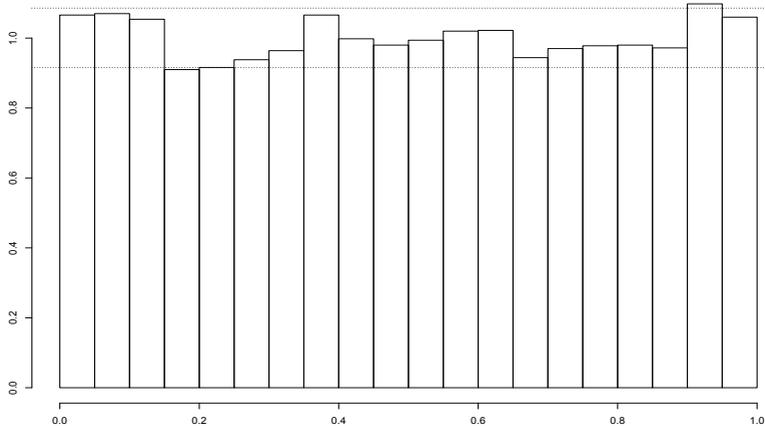


Abbildung 6.1.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0738

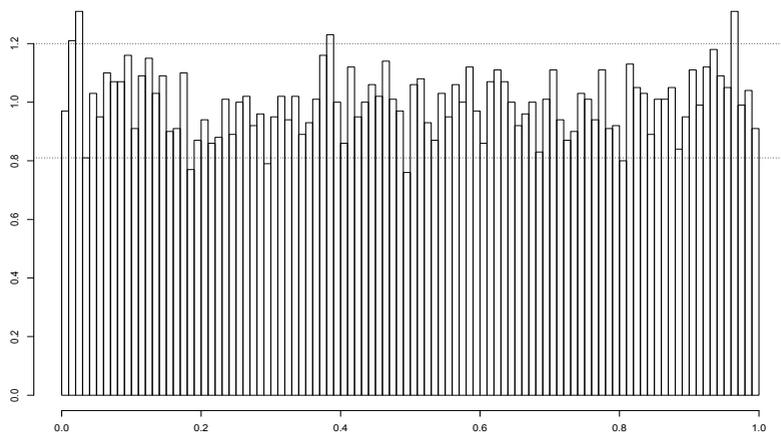


Abbildung 6.2.: Histogramm der transformierten DJIA-10000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.0934

Da die FHS Methode das Potenzial zum Verändern der modellbasierten Ergebnisse hat, stellt sich die Frage, wie gut die Ergebnisse aus dem APARCH.st Modell heraus sind. Hier zeigen beide Abbildungen keine Verwerfung der Richtigkeit der Prognoseverteilungen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	533
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0533; 0.1339
Var(E250);V1;LB1;acf	24.23; 0.00018; 0.0409; (5)
Var(E125);V2;LB2;acf	10.07; 0.0002; 0.6295; (11)
Var(E500);V3;LB3;acf	56.98; 0.00067; 0.3671; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1022; 0.0853
$n11; 95\text{-Intervall} H_0$	2; [0;4]
mean(VaR) [%]	-1.55939
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.03802; 0.8521 ; 0.3034; 0.3073

Tabelle 6.5.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 10000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	97
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0097; 0.7619
Var(E250);V1;LB1;acf	3.38; 0.1267; 0.2821; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.46; 0.3286; 0.9448; –
Var(E500);V3;LB3;acf	9.29; 0.0157; 0.567; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9515; 0.9537
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.49854
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2741; 1.3063 ; 0.04149; 0.06405

Tabelle 6.6.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 10000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	530
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.053; 0.1726
Var(E250);V1;LB1;acf	14.96; 0.2516; 0.7613; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.97; 0.2818; 0.3315; –
Var(E500);V3;LB3;acf	45.95; 0.0093; 0.5145; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6732; 0.3599
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	3; [0;4]
mean(VaR) [%]	1.5756
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.07359; 0.4909 ; 0.0006; 0.00114

Tabelle 6.7.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 10000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	91
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0091; 0.3584
Var(E250);V1;LB1;acf	2.51; 0.9481; 0.3247; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.46; 0.3271; 0.7963; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.21; 0.157; 0.3766; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2706; 0.3578
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.45486
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1424; 0.5483 ; 0.0151; 0.0259

Tabelle 6.8.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 10000, APARCH.st.st, ZF=500

Hier sind die ES und VaR Ergebnisse deutlich schlechter als bei der APARCH.st.FHS-Methode. Der Expected Shortfall wird nur auf den unteren ES-Niveaus 0.05/0.01 angenommen. Der 0.05-VaR wird von allen Varianztests und dem LB1-Test verworfen. Die 0.01/0.95-VaR werden vom V3-Test verworfen. Bei diesen erwähnten VaR-Niveaus (0.05/0.01/0.95) sind die nicht angenommenen Varianzen zu hoch. Dies zeigt, dass, obwohl die Anzahl der Überschreitungen insgesamt passend ist, sich hier der Value-at-Risk zu träge ändert (reagiert nicht auf die neuesten Marktentwicklungen, im Unterschied zur FHS-Methode) und es entstehen über die Jahren geclusterte VaR-Überschreitungen (in manchen Perioden zu viele und in manche zu wenige). Der 0.99-VaR ist einwandfrei.

Zusammenfassend könnte man zu den betrachteten 2 Prognosemethoden (APARCH.st.FHS und APARCH.st.st) die exzellenten FHS-Ergebnisse hervorheben. Die Korrektur, die die FHS Methode zusätzlich zum Modell bringt, scheint wichtig zu sein.

6.1.2. 5000 Beobachtungen

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	250
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.05; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	8.26; 0.346; 0.2517; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.22; 0.6005; 0.5301; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.11; 0.3238; 0.2341; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.2019; 0.443
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.7337
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.00231; 0.7636 ; 0.9619; 0.962

Tabelle 6.9.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Hier sind sogar alle ES/VaR-Prognosen zu allen ES/VaR-Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99 einwandfrei: alle Tests haben die Nullhypothese der Richtigkeit nicht verworfen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	50
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.01; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	2.05; 0.6235; 0.844; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.96; 0.3905; 0.3657; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.67; 0.903; 0.3113; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3148; 0.6034
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.77348
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.05233; 1.1301 ; 0.7448; 0.7445

Tabelle 6.10.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	249
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0498; 0.9482
Var(E250);V1;LB1;acf	7.73; 0.2767; 0.886; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.49; 0.2859; 0.5371; –
Var(E500);V3;LB3;acf	22.1; 0.8847; 0.4787; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4588; 0.7586
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.62435
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.001212; 0.4204 ; 0.9637; 0.9639

Tabelle 6.11.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	51
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0102; 0.8873
Var(E250);V1;LB1;acf	0.8921; 0.0572; 0.5553; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.2814; 0.8941; 0.3097; –
Var(E500);V3;LB3;acf	1.8778; 0.169; 0.7301; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3052; 0.5851
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3756
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0419; 0.3969 ; 0.4540; 0.4521

Tabelle 6.12.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 5000, APARCH.st.FHS400, ZF=500

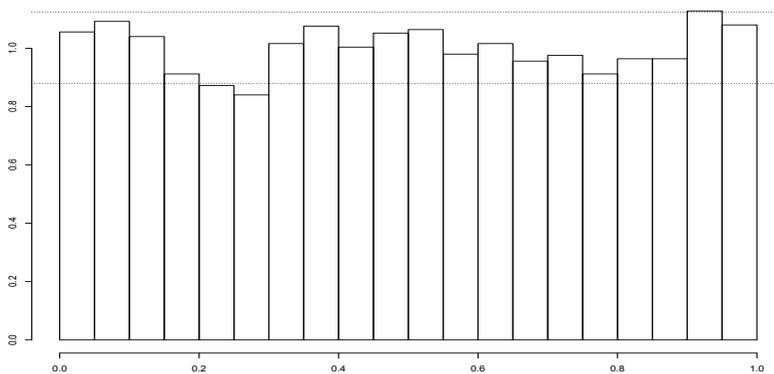
Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

Abbildung 6.3.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0831

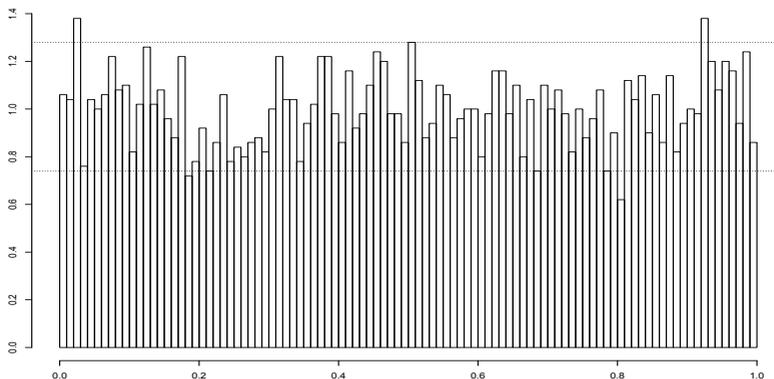


Abbildung 6.4.: Histogramm der transformierten DJIA-5000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.1037

Auch hier zeigen beide Abbildungen eine Annahme der Richtigkeit der Prognoseverteilungen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	264
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0528; 0.3678
Var(E250);V1;LB1;acf	17.43; 0.1383; 0.4595; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.37; 0.2912; 0.8747; –
Var(E500);V3;LB3;acf	34.49; 0.3198; 0.1064; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.27; 0.3617
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.64614
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0402; 0.7439 ; 0.3812; 0.3842

Tabelle 6.13.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), DJIA 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	53
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0106; 0.6728
Var(E250);V1;LB1;acf	2.13; 0.6893; 0.7147; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.84; 0.2098; 0.2335; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.9; 0.9812; 0.6235; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.2865; 0.518
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.64479
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.153; 0.9648 ; 0.2535; 0.2587

Tabelle 6.14.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), DJIA 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur auf den unteren ES-Niveaus 0.05/0.01 angenommen. Die Value-at-Risk Prognose wird von allen Tests nur vom LR_{ind} -Test zum 0.95-VaR verworfen (und dies bei einem p-Wert von 0.0481). Es kann eine Verbesserung im Vergleich zum APARCH.st.st-Modell bei der 10000-Zeitreihe festgestellt werden- das Modell scheint in der neueren Vergangenheit besser zu funktionieren. Natürlich ist die FHS Methode auch hier besser, und auf sie sollte nicht verzichtet werden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	270
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.054; 0.1999
Var(E250);V1;LB1;acf	11.32; 0.8879; 0.2406; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.22; 0.6005; 0.1811; –
Var(E500);V3;LB3;acf	42.44; 0.0738; 0.6203; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.0481; 0.0621
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.574
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0761; 0.4040 ; 0.00218; 0.00281

Tabelle 6.15.: Backtesting ($VaR^{0.95}$, $ES^{0.95}$), DJIA 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	43
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0086; 0.308
Var(E250);V1;LB1;acf	1.71; 0.364; 0.623; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.15; 0.7893; 0.8689; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.9; 0.9812; 0.273; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.3877; 0.4101
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.3983
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1705; 0.3414 ; 0.00212; 0.00681

Tabelle 6.16.: Backtesting ($VaR^{0.99}$, $ES^{0.99}$), DJIA 5000, APARCH.st.st, ZF=500

6.1.3. 2500 Beobachtungen

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	123
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0492; 0.854
Var(E250);V1;LB1;acf	6.23; 0.2978; 0.9442; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.13; 0.3495; 0.4984; –
Var(E500);V3;LB3;acf	10.3; 0.4027; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6925; 0.91
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.9511
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.01744; 0.6504 ; 0.7666; 0.7743

Tabelle 6.17.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	27
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0108; 0.6915
Var(E250);V1;LB1;acf	1.79; 0.5755; 0.3861; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.87; 0.4273; 0.4148; (8)
Var(E500);V3;LB3;acf	2.8; 0.5686; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4425; 0.6876
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.965
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.274; 1.1225 ; 0.2158; 0.2334

Tabelle 6.18.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen n_1	125
$\frac{n_1}{n}; LR_{PF}$	0.05; 1
Var(E250);V1;LB1;acf	8.94; 0.6065; 0.3374; –
Var(E125);V2;LB2;acf	3.99; 0.3104; 0.8421; –
Var(E500);V3;LB3;acf	18.5; 0.7622; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.00686; 0.02587
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.73059
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.005325; 0.3658 ; 0.871; 0.8721

Tabelle 6.19.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen n_1	26
$\frac{n_1}{n}; LR_{PF}$	0.0104; 0.8417
Var(E250);V1;LB1;acf	0.93; 0.176; 0.1859; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.27; 0.9469; 0.6298; –
Var(E500);V3;LB3;acf	1.7; 0.3402; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4597; 0.7455
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.55221
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.05205; 0.3743 ; 0.4849; 0.4874

Tabelle 6.20.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall auf allen ES-Niveaus 0.05/0.01/0.99/0.95 angenommen. Der Value-at-Risk wird von allen Tests (die durchgeführt werden konnten) angenommen mit einzigen Ausnahmen die LR_{ind} und LR_{cc} -Tests nur beim 0.95-VaR.

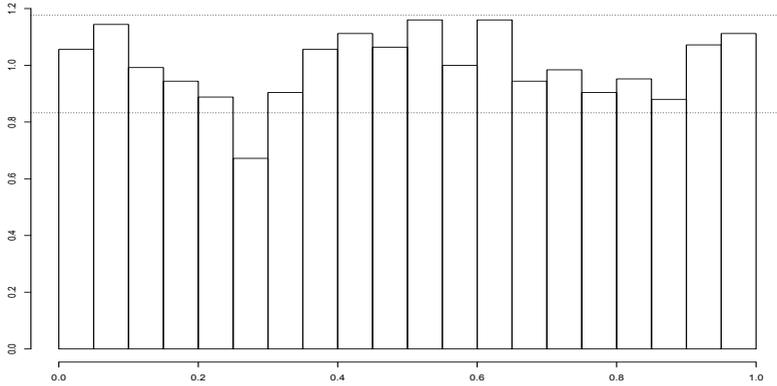
Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

Abbildung 6.5.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.01692

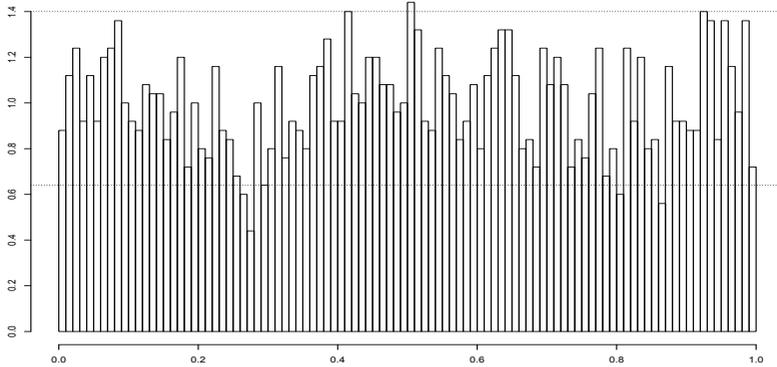


Abbildung 6.6.: Histogramm der transformierten DJIA-2500-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.1281

Hier werden die schief-t-Prognoseverteilungen nur auf dem höheren Feinheitsgrad 100 angenommen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	132
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0528; 0.5242
Var(E250);V1;LB1;acf	24.18; 0.0333; 0.243; –
Var(E125);V2;LB2;acf	8.36; 0.2033; 0.1662; –
Var(E500);V3;LB3;acf	52.3; 0.0683; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.9912; 0.814
$n11; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.85288
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.05589; 0.6551 ; 0.3288; 0.3448

Tabelle 6.21.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DJIA 2500, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	22
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0088; 0.5382
Var(E250);V1;LB1;acf	1.73; 0.5354; 0.7201; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.62; 0.1521; 0.673; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.3; 0.8767; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5319; 0.6814
$n11; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.97923
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.07449; 0.9851 ; 0.7264; 0.7304

Tabelle 6.22.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DJIA 2500, APARCH.st.st, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur auf dem 0.95-ES-Niveau verworfen. Der Value-at-Risk wird von allen Tests (die durchgeführt werden konnten) angenommen außer: dem V1-Test beim 0.05-VaR und den LR_{ind} und LR_{cc} -Tests beim 0.95-VaR.

Obwohl die Prognose APARCH.st.st, basierend auf der schiefen t-Verteilung, schlechter als die FHS-Methode mit einem APARCH.st-Filter ist, ist sie immerhin besser als die meisten Stochastic-Volatility Modelle. Auf die FHS-Methode sollte auch hier nicht verzichtet werden.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	139
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0556; 0.2066
Var(E250);V1;LB1;acf	11.43; 0.9418; 0.4368; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.94; 0.998; 0.396; –
Var(E500);V3;LB3;acf	42.7; 0.1925; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.001506; 0.002911
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.70732
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1102; 0.3712 ; 0.000629; 0.00153

Tabelle 6.23.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DJIA 2500, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	18
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0072; 0.1386
Var(E250);V1;LB1;acf	1.51; 0.4168; 0.1526; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.937; 0.5047; 0.3439; –
Var(E500);V3;LB3;acf	5.3; 0.9266; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6093; 0.2939
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.61641
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.209; 0.3547 ; 0.02292; 0.05404

Tabelle 6.24.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DJIA 2500, APARCH.st.st, ZF=500

6.2. Standard and Poors S&P 500 Aktienindex

Als Anhaltspunkt zur Beurteilung der Tabellen mit Backtesting-Ergebnissen wird nochmal auf die folgenden Werte hingewiesen: Soll-Erwartungswerte für Var(E250), Var(E125) und Var(E500) sind 11.875, 5.9375 und 23.75 für den 0.05/0.95-VaR und 2.475, 1.2375 und 4.95 für den 0.01/0.99-VaR.

6.2.1. 5079 Beobachtungen

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	253
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0498; 0.9512
Var(E250);V1;LB1;acf	5.84; 0.1074; 0.5878; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.24; 0.2139; 0.3447; (1)
Var(E500);V3;LB3;acf	9.33; 0.1691; 0.4197; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4894; 0.7862
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.85255
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0005883; 0.7385 ; 0.9899; 0.99

Tabelle 6.25.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	63
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0124; 0.09698
Var(E250);V1;LB1;acf	3.82; 0.1034; 0.9406; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.58; 0.2734; 0.1636; –
Var(E500);V3;LB3;acf	7.57; 0.2518; 0.3688; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2083; 0.114
$n111; 95\% \text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.71477
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.1859; 1.0412 ; 0.1615; 0.173

Tabelle 6.26.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS500, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	263
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0518; 0.5623
Var(E250);V1;LB1;acf	10.45; 0.7154; 0.8922; (8)
Var(E125);V2;LB2;acf	3.99; 0.1533; 0.7004; -
Var(E500);V3;LB3;acf	28.46; 0.6777; 0.0299; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.084; 0.1896
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.65589
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.00007407; 0.3691 ; 0.9974; 0.9976

Tabelle 6.27.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	50
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00984; 0.9111
Var(E250);V1;LB1;acf	2.36; 0.885; 0.7352; -
Var(E125);V2;LB2;acf	1.45; 0.522; 0.8351; -
Var(E500);V3;LB3;acf	3.96; 0.6811; 0.4862; -
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3187; 0.6045
$n111; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.4060
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.00989; 0.2893 ; 0.8101; 0.8085

Tabelle 6.28.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, APARCH.st.FHS500, ZF=500

Hier führen - außer dem LB3-Test beim 0.95-VaR - alle VaR/ES-Tests zur Annahme der Richtigkeit.

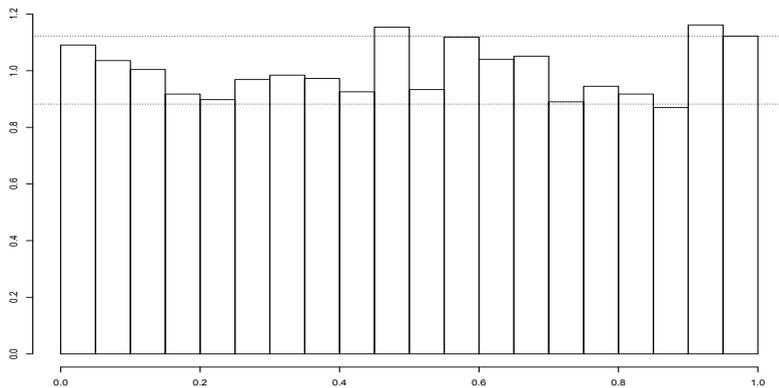
Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

Abbildung 6.7.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0026

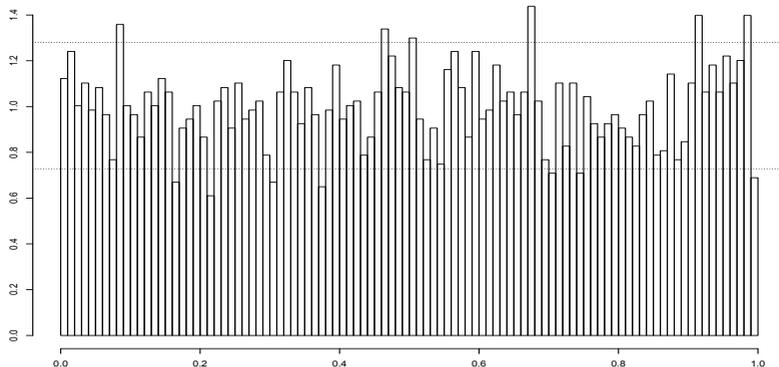


Abbildung 6.8.: Histogramm der transformierten S&P500-5079-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.000519

Die beiden Abbildungen zeigen, dass die schief-t-Prognoseverteilungen auf beiden Feinheitsebenen verworfen werden müssen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	277
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.05454; 0.1433
Var(E250);V1;LB1;acf	8.64; 0.3984; 0.0587; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.8; 0.4034; 0.311; –
Var(E500);V3;LB3;acf	23.82; 0.996; 0.01174; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.76; 0.3255
$n11; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-1.7338
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0225; 0.7322 ; 0.6094; 0.61

Tabelle 6.29.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), S&P500 5079, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	57
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.01122; 0.3904
Var(E250);V1;LB1;acf	5.29; 0.00658; 0.8897; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.74; 0.1122; 0.1083; –
Var(E500);V3;LB3;acf	14.01; 0.00396; 0.5966; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6736; 0.632
$n11; 95\%$ -Intervall $ H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.79778
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0268; 0.9908 ; 0.8392; 0.8404

Tabelle 6.30.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), S&P500 5079, APARCH.st.st, ZF=500

Die Ergebnisse der APARCH.st.st-Prognose sind etwas schlechter als die APARCH.st.FHS Prognose bei dieser 5079-S&P-500-Stichprobe. Hier wird der Expected Shortfall nur auf den unteren 0.05/0.01-ES-Niveaus angenommen. Der 0.05-VaR wird vom LB3-Test verworfen. Der 0.01-VaR wird von den V1 und V3-Tests verworfen (die Varianzen der Cluster waren zu hoch). Der 0.95-VaR wird von den LR_{PF} (p-Wert 0.0497) und LR_{cc} -Tests verworfen (der Anteil der VaR-Überschreitungen ist zu hoch). Der 0.99-VaR wird vom LR_{PF} - und vom LR_{cc} -Test verworfen, hier ist der Anteil der VaR-Überschreitungen zu niedrig.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	285
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.05611; 0.0497
Var(E250);V1;LB1;acf	11.84; 0.9945; 0.7127; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.05; 0.5184; 0.5615; –
Var(E500);V3;LB3;acf	34.99; 0.2961; 0.3887; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0903; 0.0345
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	1.62537
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.09938; 0.3689 ; 8.05e-06; 0.00003

Tabelle 6.31.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 5079, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	35
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00689; 0.0183
Var(E250);V1;LB1;acf	1.19; 0.1162; 0.8008; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.87; 0.2423; 0.5615; –
Var(E500);V3;LB3;acf	2.68; 0.3203; 0.5804; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.4858; 0.04869
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.48553
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.2057; 0.2954 ; 0.0002287; 0.00076

Tabelle 6.32.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 5079, APARCH.st.st, ZF=500

Zusammenfassend lässt sich zur 5079-S&P 500 Stichprobe die etwas schlechtere APARCH.st.st Prognose anmerken, die jedoch von der FHS-Methode exzellent korrigiert wird (dort gab es nur einen einzigen verwerfenden Test).

6.2.2. 2261 Beobachtungen

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	111
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.0491; 0.8427
Var(E250);V1;LB1;acf	4.5; 0.1841; 0.6566; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.5; 0.4899; 0.3703; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.25; 0.3834; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.5024; 0.7837
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.96982
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.004742; 0.739 ; 0.9462; 0.9469

Tabelle 6.33.: Backtesting ($VaR^{0.05}$, $ES^{0.05}$), S&P500 2261, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	23
$\frac{n1}{n}$; LR_{PF}	0.01017; 0.9345
Var(E250);V1;LB1;acf	2.53; 0.9558; 0.739; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.80; 0.3409; 0.4294; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.67; 0.3033; n.a.; –
LR_{ind} ; LR_{cc}	0.4916; 0.7866
$n111$;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-2.85812
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.056; 1.1926 ; 0.8239; 0.8315

Tabelle 6.34.: Backtesting ($VaR^{0.01}$, $ES^{0.01}$), S&P500 2261, APARCH.st.FHS500, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	111
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.04909; 0.8427
Var(E250);V1;LB1;acf	9.44; 0.684; 0.7902; –
Var(E125);V2;LB2;acf	4.34; 0.4359; 0.2622; –
Var(E500);V3;LB3;acf	38.67; 0.4078; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0773; 0.2061
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.75774
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.01541; 0.36 ; 0.6528; 0.6532

Tabelle 6.35.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, APARCH.st.FHS400, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	21
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00929; 0.7305
Var(E250);V1;LB1;acf	1; 0.2288; 0.6038; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.09; 0.7862; 0.01198; (5)
Var(E500);V3;LB3;acf	1.67; 0.4245; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5302; 0.7745
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.58358
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.001147; 0.3081 ; 0.9866; 0.986

Tabelle 6.36.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Auch bei dieser kleineren S&P-500-Stichprobe sind die FHS-Ergebnisse mit dem APARCH.st-Filter hervorragend. Von allen ES/VaR-Tests, die durchgeführt werden konnten, führte nur der LB2-Test zum 0.99-VaR zur Ablehnung.

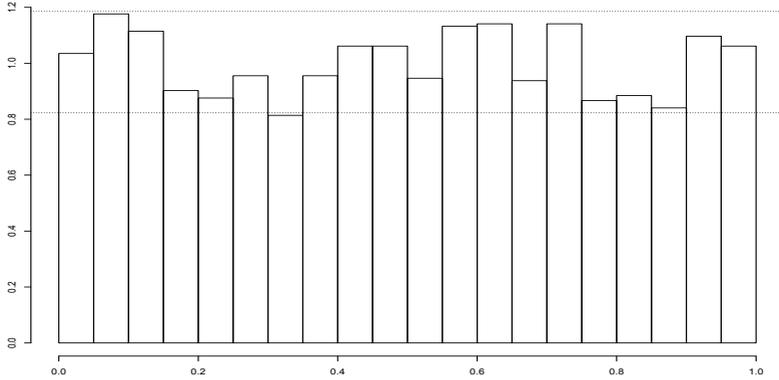
Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

Abbildung 6.9.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0776

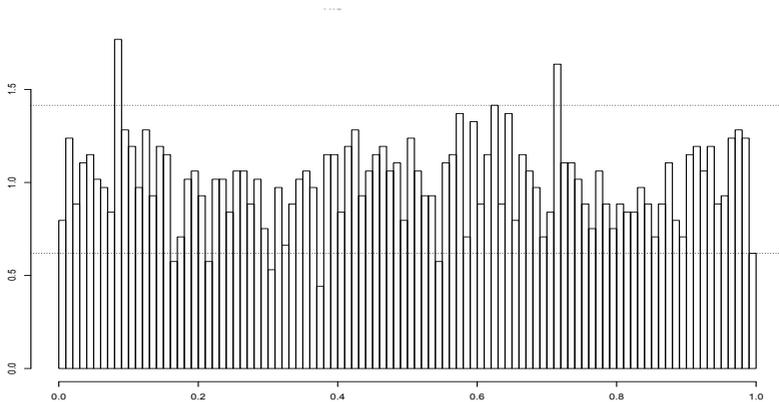


Abbildung 6.10.: Histogramm der transformierten S&P500-2261-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.1323

Auch hier führen beide Abbildungen nicht zur Verwerfung der Prognoseverteilungen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	117
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0517; 0.7046
Var(E250);V1;LB1;acf	14; 0.7295; 0.2346; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.26; 0.8755; 0.2932; 2
Var(E500);V3;LB3;acf	14.67; 0.6459; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6414; 0.8335
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	-1.89381
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.04313; 0.7217 ; 0.5193; 0.5314

Tabelle 6.37.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), S&P500 2261, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	18
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.007961; 0.3123
Var(E250);V1;LB1;acf	3.5; 0.4221; 0.5542; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.18; 0.907; 0.777; –
Var(E500);V3;LB3;acf	8.92; 0.2724; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5908; 0.5206
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-3.00891
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1162; 1.2056 ; 0.6876; 0.6957

Tabelle 6.38.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), S&P500 2261, APARCH.st.st, ZF=500

Hier wird der Expected Shortfall nur auf dem 0.95-ES-Niveau verworfen. Alle VaR-Tests führen zur Annahme außer dem LB2-Test beim 0.95-VaR.

Zusammenfassend führen beide Methoden bei der 2261-S&P500-Stichprobe zu sehr guten Ergebnissen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	120
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.05307; 0.5065
Var(E250);V1;LB1;acf	11.44; 0.9422; 0.303; –
Var(E125);V2;LB2;acf	5.19; 0.725; 0.0224; –
Var(E500);V3;LB3;acf	45.58; 0.1523; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1192; 0.2375
n11;95%-Intervall H_0	0; [0;2]
mean(VaR) [%]	1.73107
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0895; 0.3546 ; 0.006623; 0.00896

Tabelle 6.39.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), S&P500 2261, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	14
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.00619; 0.0503
Var(E250);V1;LB1;acf	1.78; 0.6166; 0.2325; –
Var(E125);V2;LB2;acf	0.89; 0.4691; 0.2177; –
Var(E500);V3;LB3;acf	4.67; 0.9525; n.a.; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6761; 0.1354
n11;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.64881
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.1568; 0.2891 ; 0.0635; 0.0643

Tabelle 6.40.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), S&P500 2261, APARCH.st.st, ZF=500

6.3. DAX Aktienindex

Prognose durch Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.FHS)

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	268
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0536; 0.248
Var(E250);V1;LB1;acf	11.73; 0.9708; 0.2978; –
Var(E125);V2;LB2;acf	6.37; 0.754; 0.103; –
Var(E500);V3;LB3;acf	16.18; 0.4966; 0.3248; (1)
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.1104; 0.143
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-2.25099
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.02376; 0.6317 ; 0.5386; 0.5416

Tabelle 6.41.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DAX 5000, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	54
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0108; 0.5746
Var(E250);V1;LB1;acf	1.38; 0.1828; 0.5188; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.31; 0.8243; 0.2887; (1) 9
Var(E500);V3;LB3;acf	2.04; 0.1945; 0.6976; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.6162; 0.7528
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-3.4582
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.3832; 1.5802 ; 0.0805; 0.1062

Tabelle 6.42.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DAX 5000, APARCH.st.FHS300, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	247
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0494; 0.8454
Var(E250);V1;LB1;acf	10.13; 0.6547; 0.1764; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.12; 0.3853; 0.373; –
Var(E500);V3;LB3;acf	13.79; 0.3606; 0.7852; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.7127; 0.9174
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	2.12455
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.02063; 0.4837 ; 0.5032; 0.5052

Tabelle 6.43.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DAX 5000, APARCH.st.FHS250, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	52
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0104; 0.7776
Var(E250);V1;LB1;acf	3.41; 0.2655; 0.0955; (3)
Var(E125);V2;LB2;acf	1.34; 0.7502; 0.7035; (6)
Var(E500);V3;LB3;acf	9.51; 0.0504; 0.1545; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5722; 0.8189
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	2.97508
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.0591; 0.5433 ; 0.4368; 0.4404

Tabelle 6.44.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DAX 5000, APARCH.st.FHS500, ZF=500

Beim DAX ist die APARCH.st.FHS Methode hervorragend: hier führen alle 48 Tests zur Annahme der VaR/ES auf allen Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99.

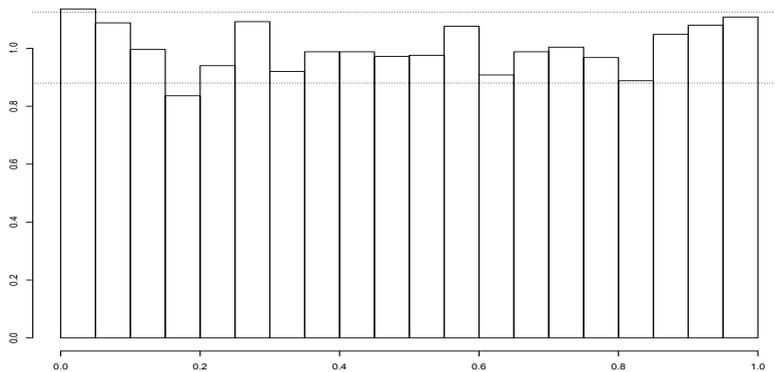
Prognose mit einem APARCH Modell mit schiefer Student-t Verteilung (APARCH.st.st)

Abbildung 6.11.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=20); p-Wert=0.0469

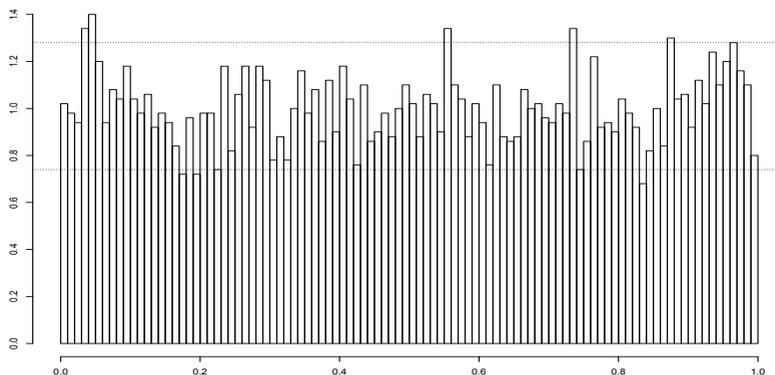


Abbildung 6.12.: Histogramm der transformierten DAX-5000-Renditen (APARCH.st.st, ZF=500, KL=100); p-Wert=0.1661

Die APARCH.st.st- Prognoseverteilungen werden zum niedrigeren Feinheitsgrad verworfen (jedoch bei einem p-Wert von 0.0469) und zum höheren Feinheitsgrad angenommen.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	284
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0568; 0.0307
Var(E250);V1;LB1;acf	16.27; 0.2455; 0.6827; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.37; 0.2912; 0.2085; –
Var(E500);V3;LB3;acf	38.04; 0.174; 0.9089; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.0838; 0.02155
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;3]
mean(VaR) [%]	-2.21677
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.068; 0.5981 ; 0.0563; 0.0627

Tabelle 6.45.: Backtesting ($VaR^{0.05}, ES^{0.05}$), DAX 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	51
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0102; 0.8873
Var(E250);V1;LB1;acf	2.58; 0.9141; 0.5071; –
Var(E125);V2;LB2;acf	1.33; 0.7728; 0.9707; –
Var(E500);V3;LB3;acf	6.1; 0.6317; 0.298; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.5505; 0.8282
$n111; 95\text{-Intervall} H_0$	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	-3.50233
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	0.06329; 0.7105 ; 0.5276; 0.5292

Tabelle 6.46.: Backtesting ($VaR^{0.01}, ES^{0.01}$), DAX 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Der Expected Shortfall wird hier nur auf dem 0.95-ES-Niveau verworfen. Der 0.05-VaR wird nur von den LR_{PF} und LR_{cc} -Tests verworfen. Der 0.99-VaR wird von den V3, LB1 und LB2-Tests verworfen. Die 0.01/0.95-VaR sind einwandfrei.

Zusammenfassend lassen sich beim DAX die exzellenten APARCH.st.FHS-Ergebnisse anmerken, die die aufgetretenen Probleme bei der APARCH.st.st-Methode korrigieren.

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	277
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.0554; 0.0848
Var(E250);V1;LB1;acf	13.5; 0.6764; 0.7627; –
Var(E125);V2;LB2;acf	7.4; 0.2813; 0.9527; –
Var(E500);V3;LB3;acf	21.12; 0.8183; 0.1615; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.2181; 0.1055
n111;95%-Intervall H_0	1; [0;3]
mean(VaR) [%]	2.07616
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.0781; 0.4672 ; 0.005758; 0.01053

Tabelle 6.47.: Backtesting ($VaR^{0.95}, ES^{0.95}$), DAX 5000, APARCH.st.st, ZF=500

Anzahl VaR-Überschreitungen $n1$	40
$\frac{n1}{n}; LR_{PF}$	0.008; 0.1408
Var(E250);V1;LB1;acf	3.26; 0.3457; 0.01183; (3)
Var(E125);V2;LB2;acf	1.08; 0.6261; 0.0109; 1 (7)
Var(E500);V3;LB3;acf	11.11; 0.021; 0.1502; –
$LR_{ind}; LR_{cc}$	0.3317; 0.2115
n111;95%-Intervall H_0	0; [0;0]
mean(VaR) [%]	3.10725
mean(ESA); sd(ESA); TT; BT	-0.004126; 0.6275 ; 0.967; 0.9666

Tabelle 6.48.: Backtesting ($VaR^{0.99}, ES^{0.99}$), DAX 5000, APARCH.st.st, ZF=500

6.4. Zusammenfassung der Ergebnisse für die Modelle der GARCH-Familie

6.4.1. DOW Jones

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10K	G11.nrm.FHS250	•	•	•	•	•	•			•	•
DJ10K	G11.nrm.nrm	•				•	•	•		•	
DJ10K	AP.nrm.FHS250	•	•	•	•	•			•	•	•
DJ10K	AP.nrm.FHS500	•			•		•		•	•	•
DJ10K	AP.nrm.FEVT200	•	•	•	•		•		•	•	
DJ10K	AP.nrm.norm	•				•	•	•	•	•	
DJ10K	AP.t.FHS250	•	•	•	•	0.0492	•		•	•	•
DJ10K	AP.t.FEVT250	•	•	•	•	•	•		•	•	•
DJ10K	AP.t.t					•	•	•	0.0498	•	•
DJ10K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•			•	•	•
DJ10K	AP.st.FEVT200	•	•	•	•	•				•	•
DJ10K	AP.st.st	•					•	•		•	•
DJ5K	AP.nrm.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.nrm.FEVT100	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.nrm.nrm	•				•	•	•	•	•	
DJ5K	AP.t.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.t.FEVT250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.t.t					•	•		•	•	•
DJ5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.st.FEVT250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ2500	AP.t.FHS250	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.t.t	•				•		n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.st.st	•				•	•	n.a.	•	•	•

Tabelle 6.49.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.05-Value-at-Risk/ES (Dow Jones, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N11	ES
DJ10K	G11.nrm.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	G11.nrm.nrm					•	•	•		•	•
DJ10K	APnrm.FHS250	•	•	•	•					•	•
DJ10K	APnrm.FHS500	•	•	•	•			•		•	•
DJ10K	APnrm.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	APnrm.nrm					•		•		•	•
DJ10K	AP.t.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.t.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.t.t	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.FHS500	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.nrm					•		•		•	•
DJ5K	AP.t.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.t.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.t.t					•		•		•	•
DJ5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.st.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ2500	AP.t.FHS300							n.a.		•	•
DJ2500	AP.t.t	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•
DJ2500	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•
DJ2500	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•

Tabelle 6.50.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.01-Value-at-Risk/ES (Dow Jones, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N11	ES
DJ10K	G11.nrm.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	G11.nrm.nrm	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	APnrm.FHS250	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	APnrm.FHS500	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	APnrm.FEVT250	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	APnrm.nrm	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.t.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.t.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.t.t		•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.FEVT400	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.FHS250	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.FEVT300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	APnrm.nrm	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.t.FHS300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.t.FEVT300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.t.t	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.st.FEVT300	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ2500	AP.t.FHS500	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•
DJ2500	AP.t.t	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•
DJ2500	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•
DJ2500	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.		•	•

Tabelle 6.51.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.95-Value-at-Risk/ES (Dow Jones, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	NI11	ES
DJ10K	G11.nrm.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	G11.nrm.nrm	•	•			•	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.nrm.FHS250	•	•	•	•	0.0495	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.nrm.FHS500	•	•	•	•		•	•	•	•	•
DJ10K	AP.nrm.FEVT500	•	•	•	•		•	•	•	•	•
DJ10K	AP.nrm.nrm		•			•	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.t.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.t.FEVT500	•	•	•	•		•	•	•	•	•
DJ10K	AP.t.t		•	•		•	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ10K	AP.st.FEVT500	•	•	•	•		•		•	•	•
DJ10K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	AP.nrm.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.nrm.FEVT500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.nrm.nrm	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.t.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.t.FEVT500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.t.t		•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ5K	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.st.FEVT500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	
DJ2500	AP.t.FHS400	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.t.t		•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
DJ2500	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•

Tabelle 6.52.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.99-Value-at-Risk/ES (Dow Jones, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. Falls der p-Wert nah unter 0.05 lag, wurde er angegeben. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell Nr.	Daten	Modell-Name	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	SP Gesamt
1	DJ10K	G11.nrm.FHS	2	0	0	0	2
2	DJ10K	G11.nrm.nrm	7	9	0	4	20
3	DJ10K	AP.nrm.FHS250	2	2	0	1	5
4	DJ10K	AP.nrm.FHS500	6	0	2	1	9
5	DJ10K	AP.nrm.FEVT	2	1	0	1	4
6	DJ10K	AP.nrm.norm	6	10	2	7	25
7	DJ10K	AP.t.FHS	2	0	0	0	2
8	DJ10K	AP.t.FEVT	1	1	0	1	3
9	DJ10K	AP.t.t	10	6	5	5	26
10	DJ10K	AP.st.FHS	1	0	0	0	1
11	DJ10K	AP.st.FEVT	2	0	0	2	4
12	DJ10K	AP.st.st	7	2	2	0	11
13	DJ5K	AP.nrm.FHS	0	0	0	0	0
14	DJ5K	AP.nrm.FEVT	0	0	0	0	0
15	DJ5K	AP.nrm.nrm	6	9	0	0	15
16	DJ5K	AP.t.FHS	0	0	0	0	0
17	DJ5K	AP.t.FEVT	0	0	0	0	0
18	DJ5K	AP.t.t	10	9	0	3	22
19	DJ5K	AP.st.FHS	0	0	0	0	0
20	DJ5K	AP.st.FEVT	0	0	0	0	0
21	DJ5K	AP.st.st	0	0	1	0	1
22	DJ2500	AP.t.FHS	0	0	1	0	1
23	DJ2500	AP.t.t	7	0	1	3	11
24	DJ2500	AP.st.FHS	0	0	1	0	1
25	DJ2500	AP.st.st	2	0	1	0	3

Tabelle 6.53.: VaR Performance GARCH Modelle: Strafpunkte (SP) (Dow Jones); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Tabelle 6.53 zeigt, wie gut die Ergebnisse der Modelle der GARCH Familien waren. Selbst das einfachste GARCH(1,1) Modell (in der FHS-Variante) mit normalverteilten Innovationen hat eine niedrigere Strafpunktzahl (2) als das beste Stochastic-Volatility Modell (3). Bestes Modell war bei der Dow-Jones-10000 Zeitreihe das APARCH.st.FHS Modell²²¹ mit Gesamt-Strafpunktzahl von 1 und angenommenem Expected Shortfall zu allen ES-Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99. Beste Modelle bei der Dow-Jones-5000-Zeitreihe waren APARCH.nrm.FHS, APARCH.nrm.FEVT, APARCH.t.FHS, APARCH.t.FEVT, APARCH.st.FHS, APARCH.st.FEVT, die alle jeweils eine Gesamt-Strafpunktzahl von 0 (!) hatten mit angenommenem Expected Shortfall zu allen ES-Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99. Zur Dow-Jones-2500-Zeitreihe waren die Modelle APARCH.t.FHS und APARCH.st.FHS die besten mit

²²¹Dieses Modell zeigt hervorragende Ergebnisse auch bei dieser relativ großen Stichprobe von ca. 40 Jahren täglichen Beobachtungen!

jeweils 1 Strafpunkt und angenommenem Expected Shortfall zu allen ES-Niveaus.

Die FHS/EVT Varianten waren besser als die bloßen GARCH-Modellen, obwohl auch das APARCH.st.st Modell exzellente Ergebnisse bei den 5000 und 2500-Stichproben erzielte.

Daten	Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
DJ10K	G11.nrm.nrm	500		
DJ10K	AP.nrm.nrm	500		
DJ10K	AP.t.t	500	0.049	•
DJ10K	AP.st.st	500	•	•
DJ5K	AP.nrm.nrm	500		
DJ5K	AP.t.t	500		•
DJ5K	AP.st.st	500	•	•
DJ2500	AP.t.t	500		•
DJ2500	AP.st.st	500		•

Tabelle 6.54.: Ergebnisse GARCH-Modelle ganze Prognoseverteilung (Dow Jones): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit der Prognoseverteilung) zum Signifikanzniveau 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Tabelle 6.54 zeigt, dass die ganzen Prognoseverteilungen des APARCH Modells mit schiefer t-Innovation -außer bei 20 Klassen bei der DJ-2500 Stichprobe - zu allen Feinheitsgraden und allen erwähnten DJ-Stichprobengrößen angenommen werden. Die hier nicht angezeigten Ergebnisse der FHS-Methoden sind ebenfalls hervorragend: ab einem Fenster von mindestens 300 FHS-Beobachtungen (also FHS300, FHS400 oder FHS500) werden die ganzen Prognoseverteilungen zu beiden Feinheitsgraden (20 und 100) angenommen.

Zusammenfassend lässt sich anmerken, dass solche Ergebnisse schwer zu übertreffen sind, und die Stochastic-Volatility Modelle haben es auch nicht getan.

6.4.2. Restliche Zeitreihen

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DAX5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP2261	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
SP2261	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
BA5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BO5K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BO5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 6.55.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.05-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DAX5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP2261	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
SP2261	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
BA5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BO5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BO5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0,0493
JPY5K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 6.56.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.01-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	$LR_{p,F}$	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DAX5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.st	0.0497	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP2261	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
SP2261	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
BA5K	AP.st.FHS400	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B05K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B05K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 6.57.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.95-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Daten	Modell	$LR_{p,F}$	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DAX5K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DAX5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP2261	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
SP2261	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	n.a.	•	•	•
BA5K	AP.st.FHS300	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B05K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
B05K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.FHS500	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.FHS250	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
JPY5K	AP.st.st	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabelle 6.58.: Ergebnisse GARCH-Modelle 0.99-Value-at-Risk/ES (andere Zeitreihen, Zeitfenster 500): Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt. Falls der p-Wert nah unter 0.05 lag, wurde er angegeben. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell Nr.	Daten	Modell-Name	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	SP Gesamt
1	DAX5K	AP.st.FHS	0	0	0	0	0
2	DAX5K	AP.st.st	3	0	0	4	7
3	SP5079	AP.st.FHS	0	0	1	0	1
4	SP5079	AP.st.st	1	4	3	3	11
5	SP2261	AP.st.FHS	0	0	0	1	1
6	SP2261	AP.st.st	0	0	1	0	1
7	BA5K	AP.st.FHS	0	0	0	1	1
8	BA5K	AP.st.st	6	6	0	0	12
9	HPQ4691	AP.st.FHS	0	0	0	1	1
10	HPQ4691	AP.st.st	4	0	0	1	5
11	BO5K	AP.st.FHS	0	0	0	1	1
12	BO5K	AP.st.st	0	1	0	1	2
13	GBP5K	AP.st.FHS	0	0	0	0	0
14	GBP5K	AP.st.st	9	3	3	0	15
15	JPY5K	AP.st.FHS	0	0	0	0	0
16	JPY5K	AP.st.st	1	0	2	0	3

Tabelle 6.59.: VaR Performance GARCH Modelle: Strafpunkte (SP) (restliche Zeitreihen außer Dow-Jones); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Tabelle 6.59 zeigt die exzellenten Ergebnisse der APARCH.st.FHS Methode auch bei den restlichen (nicht Dow-Jones) betrachteten Zeitreihen. Die hat beim DAX und bei den beiden Währungskurse eine Strafpunkt-Gesamtzahl von 0 erzielt und bei den restlichen Zeitreihen je eine Strafpunktzahl von 1. Die Ergebnisse der APARCH.st.st Methode, die auf dem bloßen APARCH Modell mit schiefer-t-Innovationsverteilung basieren (also ohne die FHS-Anpassung) sind etwas schlechter. Ein Vergleich der Tabellen 5.312 und 6.59 zeigt die Überlegenheit des APARCH.st.FHS Modells im Vergleich zu allen Varianten des Stochastic-Volatility-Modells 3. Anzumerken ist noch die exzellente Expected-Shortfall-Performance des APARCH.st.FHS Modells: hier kann der ES bei allen Zeitreihen und allen ES-Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99 nicht verworfen werden.

Zusammenfassend lässt sich die Überlegenheit der GARCH Modellen auch bei dieser Vielfalt von Zeitreihen feststellen (Aktienindizes, einzelne Aktien, Rohstoff, Wechselkurse).

Daten	Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
DAX5K	AP.st.st	500		•
SP5079	AP.st.st	500		
SP2261	AP.st.st	500	•	•
BA5K	AP.st.st	500		
HPQ4691	AP.st.st	500	•	•
BO5K	AP.st.st	500	•	
GBP5K	AP.st.st	500	•	•
JPY5K	AP.st.st	500	•	

Tabelle 6.60.: Ergebnisse GARCH-Modelle ganze Prognoseverteilung (restliche Zeitreihen):
Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit der Prognoseverteilung) zum Signifikanzniveau 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000).

Tabelle 6.60 zeigt, dass die Prognoseverteilungen des APARCH.st.st Modells (bei 20 Klassen) bei den meisten Zeitreihen angenommen werden. Hier wurden die FHS Ergebnisse nicht domumentiert, aber die Anpassungstests wurden trotzdem durchgeführt: zum Feinheitsgrad von 20 Klassen werden die Prognoseverteilungen (bei allen Zeitreihen) angenommen , und, sobald eine mindestens FHS300-Methode benutzt wurde, auch zum höheren Feinheitsgrad.

6.5. Simulationsstudie

Es wurde die Überlegenheit des APARCH Modells über die SV-Modelle bei Anwendung auf empirische Zeitreihen festgestellt. Somit bietet das APARCH Modell eine Modellspezifikation, die passender zu den empirischen Zeitreihen ist. Interessant ist dann die Frage, ob sich die APARCH Ergebnisse stark verschlechtern, wenn der Daten-Generierende Prozess ein Stochastic Volatility Modell ist. Wenn die APARCH Ergebnisse auch hier gut bleiben, spricht das für die Robustheit der APARCH-Spezifikation. Es wird der gleiche Datensatz verwendet wie auch im Abschnitt 5.6. Die folgende Tabelle zeigt die p-Werte der beiden Modellvarianten- die Filtered Historical Simulation mit einem APARCH Filter mit schiefer Student-t-Verteilung (APARCH.st.FHS) und der modellbasierten (APARCH.st.st).

Modell	VaR	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
AP.st.FHS250	0.05	0.557	0.33	0.9	0.69	0.023	0.218	0.058	0.317	●	0.782
AP.st.st	0.05	0.696	0.27	0.60	0.07	0.301	0.178	0.006	0.082	●	0.837
AP.st.FHS400	0.01	0.778	0.98	0.54	0.82	0.832	0.84	0.634	0.296	●	0.61
AP.st.st	0.01	0.47	0.27	0.14	0.51	0.996	0.817	0.5738	0.366	●	0.688
AP.st.FHS500	0.95	0.897	0.11	0.07	0.09	0.291	0.478	0.942	0.033	●	0.456
AP.st.st	0.95	0.368	0.09	0.05	0.12	0.784	0.567	0.329	0.105	●	0.007
AP.st.FHS400	0.99	1	0.16	0.81	0.37	0.026	0.093	0.253	0.529	●	0.48
AP.st.st	0.99	0.564	0.02	0.17	0.72	0.479	0.539	0.564	0.075	●	0.001

Tabelle 6.61.: Ergebnisse APARCH Value-at-Risk (Simulationsstudie); Zeitfenster 500

Wie man sieht, sind die Ergebnisse (insbesondere der APARCH.st.FHS-Variante) hervorragend.

Die folgende Tabelle zeigt die Untersuchung der ganzen Prognoseverteilungen im APARCH.st.st-Modell. Die Anpassungstests führen zur Annahme der Nullhypothese der Richtigkeit der Prognoseverteilungen.

Modell	ZF	20 Klassen	100 Klassen
AP.st.st	500	0.6916	0.6618

Tabelle 6.62.: Ergebnisse APARCH.st.st, ganze Prognoseverteilung (Simulationsstudie)

Die Ergebnisse werden mit Hilfe der Strafpunkte weiter verdichtet.

Modell-Name	ZF	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	SP Gesamt
3 MCMC	500	1	0	0	0	1
3 FHS	500	0	0	0	10	10
3 FEVT	500	0	3	2	7	12
3 NORM	500	1	0	0	0	1
AP.st.FHS	500	1	0	1	1	3
AP.st.st	500	1	0	0	2	3

Tabelle 6.63.: VaR Performance APARCH vs. ASV-Modell 3: Strafpunkte (SP) (Durch ASV Modell 3 generierte Daten); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Die APARCH Ergebnisse sind hervorragend, werden jedoch von den modellbasierten 3-MCMC und 3-NORM Verfahren übertroffen.

Insgesamt lässt sich die Robustheit des APARCH Modells bei verschiedenen Datensätzen feststellen.

6.6. Historical Simulation

Zum Schluss präsentiere ich die Ergebnisse der einfachen Historical Simulation, wo der Value-at-Risk und Expected Shortfall aus der historischen empirischen Verteilung der letzten Renditen berechnet wird. Es wurde ein Zeitfenster von **100** letzten Renditen gewählt, da dabei bessere Ergebnisse entstehen. Die nächste Tabelle stellt die Ergebnisse dar. Zu beachten ist, dass hier der Expected Shortfall mit demselben Test - wie schon die SV und APARCH Modelle - überprüft wird, ohne dabei die identische Verteilung der ES-Abweichungen zu gewährleisten oder zu unterstellen.

Daten	Niveau	LR_{PF}	V1	V2	V3	LB1	LB2	LB3	LR_{ind}	N111	ES
DJ10000	0.05	•			•	•	•	•		•	•
DJ10000	0.01	•	•	•	•	•	•	•	•		NA
DJ10000	0.95	•	•	•	•	•	•	•		•	•
DJ10000	0.99	•	•	•	•	•	•	•		•	NA
DJ5000	0.05	•			•	•	•	•		•	•
DJ5000	0.01	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
DJ5000	0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
DJ5000	0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
DJ2500	0.05	•			•	•	•	NA	•	•	•
DJ2500	0.01	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	NA
DJ2500	0.95	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	•
DJ2500	0.99	•	•	•	•	•	•	NA	•	•	NA
SP5079	0.05	•			•	•		•		•	•
SP5079	0.01	•	•		•	•		•	•	•	NA
SP5079	0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
SP5079	0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
DAX5000	0.05				•	•	•	•			•
DAX5000	0.01	•	•	•	•	•	•			•	NA
DAX5000	0.95	•	•		•	•		•		•	•
DAX5000	0.99	•	•	•	•	•	•	•		•	NA
BA5000	0.05	•	•		•	•	•				•
BA5000	0.01	•	•	•	•	•		•	•	•	NA
BA5000	0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
BA5000	0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
HPQ4691	0.05	•	•	•	•	•	•	•			•
HPQ4691	0.01	•	•	•	•			•	•	•	NA
HPQ4691	0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
HPQ4691	0.99	•	•	•	•			•	•	•	NA
BO5000	0.05	•	•	•	•	•			•	•	•
BO5000	0.01	•	•	•	•		•	•	•	•	NA
BO5000	0.95	•	•	•	•		•		•	•	•
BO5000	0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
GBP5000	0.05	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5000	0.01	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA
GBP5000	0.95	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
GBP5000	0.99	•	•	•	•	•		•	•	•	NA
JPY5000	0.05	•	•	•	•	•	•	•	•		•
JPY5000	0.01	•	•	•		•	•	•	•	•	NA
JPY5000	0.95	•	•	•	•			•	•	•	•
JPY5000	0.99	•	•	•	•	•	•	•	•	•	NA

Tabelle 6.64.: Ergebnisse Historical Simulation 100: Ein Punkt bedeutet angenommene Nullhypothese (=Richtigkeit des Value-at-Risk/ES) zum Signifikanzniveau 0.05 (die entsprechenden p-Werte sind mindestens 0.05). Für den ES-Test wurde der Bootstrapping Test zugrunde gelegt.

Reihe Nr.	Reihe-Name	Modell	SP 005	SP 001	SP 095	SP 099	SP Gesamt
1	DJ10000	HS100	5	1	1	1	8
2	DJ5000	HS100	5	1	0	0	6
3	DJ2500	HS100	4	0	0	0	4
4	SP5079	HS100	6	3	0	0	9
5	SP2261	HS100	5	0	0	0	5
6	DAX5000	HS100	9	2	4	1	16
7	BA5000	HS100	5	1	0	0	6
8	HPQ4691	HS100	2	2	0	2	6
9	BO5000	HS100	2	1	2	0	5
10	GBP5000	HS100	0	0	0	1	1
11	JPY5000	HS100	1	2	2	0	5

Tabelle 6.65.: VaR Performance Historical Simulation: Strafpunkte (SP); Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den vorherigen zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung.

Aus Tabelle 6.65 wird ersichtlich, dass die Historical Simulation relativ gute Value-at-Risk Ergebnisse für alle Zeitreihen liefert (vielleicht mit Ausnahme der DAX-Zeitreihe). Mit Strafpunkten unter 10 für die Dow Jones/S&P-500 Zeitreihen würde die Historical Simulation (HS100) mit den besten 10 Stochastic-Volatility-Modelle konkurrieren können (siehe Tabelle 5.305). Die Performance der HS100 bei der DAX-Zeitreihe ist mit 16 Strafpunkten vergleichbar mit der Performance des SV-Modells 3 (Tabelle 5.312) und schlechter als die Performance der GARCH Modelle (Tabelle 6.59). Vergleich von Tabellen 6.65 und 5.312 zeigt: Bei allen restlichen Zeitreihen mit Ausnahme der Brent Oil Zeitreihe sind die HS100-VaR-Ergebnisse besser als die entsprechenden SV-Modell-3 VaR-Ergebnisse. Außerdem wird der Expected Shortfall zum ES-Niveau 0.05/0.95 bei der HS100, im Unterschied zum SV-Modell-3-ES, stets angenommen.

6.7. Beste Vertreter einer Modellklasse (je Zeitreihe)

Tabellen 6.66-6.73 zeigen einen Vergleich der Performance der jeweils besten SV-Modelle mit APARCH-Modellen (die in der Familie der GARCH-Modelle am besten abschnitten) und der Historical Simulation für die verschiedenen Zeitreihen. In der Spalte SP-gesamt findet man die Summe der Strafpunkte aus der Value-at-Risk-Evaluation zu den 4 VaR-Niveaus 0.05/0.01/0.95/0.99. Es wurde nur der Anpassungstest zu den Prognoseverteilungen mit 20 Klassen (PV20) aufgenommen. Bei den FHS und HS Methoden steht ein NA in dieser Spalte PV20, es wird jedoch in Klammern das Ergebnis des trotzdem durchgeführten Anpassungstests für die ganze Prognoseverteilung angegeben (obwohl hier die Test-Voraussetzungen einer stetigen Prognoseverteilung nicht

erfüllt sind). Die FEVT-Prognosen sind reine Quantilprognosen, es wird insbesondere keine Prognoseverteilung ermittelt. Es steht dann ein NA bei den FEVT-Prognosen in der PV20-Spalte. Der Expected Shortfall wurde bei einer FHS100- oder HS100-Prognose zu den Niveaus 0.01/0.99 nicht ermittelt (daher NA), da zur Ermittlung jeweils nur 100 Beobachtungen zur Verfügung stehen.

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	DJ10K	3-FHS-A	9	NA (-)		•		•
SV	DJ5K	3-FHS-A	3	NA (•)		•		
SV	DJ2.5K	11-FHS	5	NA (•)		•		
SV	DJ2.5K	11-FEVT	8	NA				
SV	DJ2.5K	10-FHS	10	NA (•)		•	•	
GARCH	DJ10K	AP.st.FHS	1	NA (•)	•	•	•	•
GARCH	DJ5K	AP.nrm.FHS/EVT	0	NA (•*)	•	•	•	•
GARCH	DJ5K	AP.L.FHS/EVT	0	NA (•*)	•	•	•	•
GARCH	DJ5K	AP.st.FHS/EVT	0	NA (•*)	•	•	•	•
GARCH	DJ2.5K	AP.L.FHS	1	NA (•)	•	•	•	•
GARCH	DJ2.5K	AP.st.FHS	1	NA (•)	•	•	•	•
HS	DJ10K	HS100	8	NA (-)	•	NA	•	NA
HS	DJ5K	HS100	6	NA (•)	•	NA	•	NA
HS	DJ2.5K	HS100	4	NA (•)	•	NA	•	NA

Tabelle 6.66.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Dow Jones): Strafpunkte (SP); PV20- Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. *Angabe zur FHS; für FEVT NA. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	SP2261	3-FHS	4	NA (•)			•	•
SV	SP5079	7VIX-FHS	10	NA (-)				
GARCH	SP2261	AP.st.FHS	1	NA (•)	•	•	•	•
GARCH	SP2261	AP.st.st	1	•	•	•	•	•
GARCH	SP5079	AP.st.FHS	1	NA (•)	•	•	•	•
HS	SP2261	HS100	5	NA (•)	•	NA	•	NA
HS	SP5079	HS100	9	NA (•)	•	NA	•	NA

Tabelle 6.67.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (S&P 500): Strafpunkte (SP); PV20- Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05.

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP Gesamt	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	DAX5K	3FHS	15	NA (-)		NA		
GARCH	DAX5K	AP.st.FHS	0	NA (●)	●	●	●	●
HS	DAX5K	HS100	16	NA (●)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.68.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (DAX): Strafpunkte (SP); PV20- Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung , 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP Gesamt	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	BA5K	3FHS	15	NA (-)		NA		
SV	BA5K	3MCMC	16	●	●			
GARCH	BA5K	AP.st.FHS	1	NA (●)	●	●	●	●
HS	BA5K	HS100	6	NA (-)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.69.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Boeing Aktie): Strafpunkte (SP); PV20-Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung , 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP Gesamt	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	HPQ4691	3FHS	11	NA (-)		NA		
GARCH	HPQ4691	AP.st.FHS	1	NA (●)	●	●	●	●
HS	HPQ4691	HS100	6	NA (●)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.70.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Hewlett-Packard Aktie): Strafpunkte (SP); PV20-Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung , 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05.

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	BOSK	3FHS	3	NA (0,0496)		NA		NA
GARCH	BOSK	AP.st.FHS	1	NA (●)	●	●	●	●
HS	BOSK	HS100	5	NA (●)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.71.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (Brent Oil): Strafpunkte (SP); PV20-Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	GBP5K	3FHS	9	NA (●)		NA		NA
GARCH	GBP5K	AP.st.FHS	0	NA (●)	●	●	●	●
HS	GBP5K	HS100	1	NA (●)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.72.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (GBP/USD Währungskurs): Strafpunkte (SP); PV20-Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Modell-Familie	Datensatz	Modell	SP	PV20	ES005	ES001	ES095	ES099
SV	JPY5K	3FHS	7	NA (●)				
GARCH	JPY5K	AP.st.FHS	0	NA (●)	●	●	●	●
HS	JPY5K	HS100	5	NA (●)	●	NA	●	NA

Tabelle 6.73.: Vergleich der Performance von SV, GARCH, HS (USD/JPY Währungskurs): Strafpunkte (SP); PV20-Prognoseverteilung (20 Klassen); ES-Tests. Betrachtet werden nur die 9 VaR-Tests aus den zusammenfassenden Tabellen; 3 Strafpunkte für LR_{PF} -Verwerfung, jeweils 2 Strafpunkte für V1, V2 oder V3-Verwerfung, 1 Strafpunkt für sonstige Verwerfung. PV20 hat einen Punkt bei angenommener Nullhypothese des Anpassungstests. Für den ES wurde der Bootstrapping-Test zugrunde gelegt. Signifikanzniveau aller Tests 0.05. K steht für Tausend. (z.B. 5K=5000)

Alle 8 Tabellen zeigen die Überlegenheit der FHS²²² mit einem APARCH-Filter gegenüber den SV-Modellen und der Historical Simulation. Die Ergebnisse der Historical Simulation waren bei Dow-Jones, S&P 500, DAX und

²²²Auch die hier nicht dokumentierten Rosenblatt-Transformationen waren bei FHS mit einem APARCH-Filter sehr gut, obwohl die Prognoseverteilungen diskret sind. Fast überall wird dabei die Nullhypothese angenommen.

Brent Oil vergleichbar mit den SV-Ergebnissen und bei den restlichen Zeitreihen besser als die SV-Ergebnisse.

7. Fazit und Ausblick

In den letzten beiden Jahrzehnten hat in der ökonomischen Finanzmarktfor- schung der Ansatz der Stochastic-Volatility-Modelle gegenüber den GARCH- Modellen zunehmend an Boden gewonnen. Die größere Komplexität der SV- Modelle und vor allem die enormen Schwierigkeiten mit der Modellschätzung haben wichtige wissenschaftliche Weiterentwicklungen herausgefordert. Ein bedeutender Fortschritt wurde mit der MCMC-Methode erreicht, die 1994 für die Schätzung von Stochastic-Volatility-Modellen eingeführt wurde und eine der effizientesten Methoden ist. Zusammen mit der rasanten Entwicklung der Rechnertechnologie erlaubten die neuen Schätzmethode die Spezifi- kation und Anwendung immer allgemeinerer Stochastic-Volatility-Modelle. Gleichzeitig wurde mit zahlreichen Untersuchungen eine Überlegenheit der aufwändigen SV-Modelle gegenüber GARCH-Modellen festgestellt, die mit einer besseren In-Sample-Anpassung an die Daten und insbesondere einer besseren Erfassung der Stylized Facts belegt wurde. Dagegen fehlt es an umfassenden Untersuchungen der Out-of-Sample-Güte, insbesondere was die Güte der VaR- und ES-Prognosen angeht²²³. Ziel dieser Arbeit war es, diese Lücke auszufüllen und mit einer umfassenden Untersuchung einerseits die Leistungsfähigkeit unterschiedlicher Stochastic-Volatility-Modelle (inkl. eines von mir eingeführten SV-Modells) zu vergleichen und andererseits - so die Erwartung - die Überlegenheit der aufwändigen SV-Modelle gegenüber GARCH-Modellen auch für die anwendungsrelevante Out-of-Sample-Güte zu belegen. In diesem letzten Punkt hat die vorliegende Untersuchung dann aber das überraschende Ergebnis gebracht, dass die Stochastic-Volatility-Modelle im Bezug auf Out-of-Sample-Prognosen von Value-at-Risk und Expected Shortfall durchweg den weit besser handhabbaren Modellen der GARCH- Familie und zum Teil selbst der Historical-Simulation-Methode unterlegen sind. Speziell hat sich der Ansatz eines Asymmetric-Power-ARCH-Modells (APARCH) mit schiefer t-verteilter Innovation (speziell die FHS Variante des Modells) als weit überlegen herausgestellt. In diesem überraschenden Ergeb- nis meiner umfangreichen Untersuchungen dürfte der wichtigste Beitrag der vorliegenden Forschungsarbeit liegen.

²²³Eine sehr gute Out-of-sample-Güte der Varianzprognosen (mit Monatsdaten vom neu- seeländischen Aktienmarkt) der SV-Modelle wurde in der bereits im Abschnitt 3.3 betrachteten Studie Yu (2002) festgestellt.

Value-at-Risk und Expected Shortfall sind zwei wichtige Kennzahlen der Risikomessung. Die sind sowohl intern für die Finanzinstitutionen von Bedeutung, als auch extern für die Öffentlichkeit und die Aufsichtsbehörden. In den neuesten Basel-3 Dokumente wie Basel (2013) wird der Schwerpunkt bei der Bestimmung der Kapitalunterlegung der Banken vom Value-at-Risk auf den Expected Shortfall verlagert. Kapitel 2 bietet einen Überblick über die Konzepte Value-at-Risk und Expected Shortfall. In dieser Arbeit wird die MCMC-Methode verwendet mit der Unterstützung der Software WinBUGS/OpenBUGS. Überblick über die Schätzungsproblematik der SV-Modelle und die Software WinBUGS/OpenBUGS liefert Kapitel 4. Es wurde eine breite Sammlung von SV-Modellen (entwickelt sukzessiv in Kapitel 3 unter Einführung eines neuen Modells-Modell 11) hin auf ihre Güte untersucht (siehe Kapitel 5). Dies war eine zeitintensive Aufgabe, da eine saubere Schätzung der SV-Modelle (mit erfüllten Stationaritätskriterien) sehr viel Rechenzeit in Anspruch nimmt. So erfordert z.B. eine Schätzung (die die Basis für eine eintägige Value-at-Risk oder Expected-Shortfall Prognose liefert) für das SV-Modell 11 eine Rechenzeit von einer Stunde und 35 Minuten auf einem Rechner mit 4 Kern-Prozessor. Wenn man bedenkt, dass ich in der Arbeit Stichproben von 2500, 5000 oder 10000 Tagen untersuche, ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von mehreren Monaten allein für dieses Modell. Dagegen läuft eine vergleichbare Schätzung der Modelle der GARCH-Familie lediglich einige Stunden für die ganze 10000-Tages-Stichprobe. In Kapitel 5 wurden die SV-Modelle auf eine Vielfalt von Finanzmarktzeitreihen von Tagesrenditen angewandt: Dow Jones (10000, 5000, 2500 Beobachtungen), S&P 500 (5079, 2261 Beobachtungen), DAX (5000 Beobachtungen), Boeing Aktie (5000 Beobachtungen), Hewlett-Packard Aktie (4691 Beobachtungen), Brent Oil Europe (5000 Beobachtungen), GBP/USD und USD/JPY Währungskurse (je 5000 Beobachtungen). Anschließend wurde im Kapitel 6 unter Verwendung derselben Zeitreihen der Value-at-Risk und Expected Shortfall mit Modellen der GARCH Familie und mit Historical Simulation berechnet.

Ein Vergleich der Ergebnisse der Stochastic Volatility Modelle mit denen der Modelle der GARCH-Familie zeigt klar die Überlegenheit der GARCH-Modelle gegenüber den SV-Modellen für alle Finanzmarktzeitreihen, wenn es um Prognoseverteilungen oder um die Prognose von Risikokennzahlen wie des Value-at-Risk oder Expected Shortfall geht (Abschnitt 6.7 zeigt die besten Modelle einer Modellklasse je Zeitreihe). Beim Vergleich der Modelle anhand der Dow-Jones Zeitreihe liefert das Asymmetric-SV-Modell (SV-Modell 3) mit korrelierten normalverteilten Innovationen in der Mean- und Variance-Gleichungen die besten Ergebnisse. Zweitbestes SV-Modell (in der FHS Variante) ist dabei das schiefe Asymmetric-SV-Modell mit korrelierten

schiefen-t-verteilten Innovationen, ein von mir entwickeltes Modell, bei dem die in der Literatur verwendete Verteilungsannahme (symmetrisch) t-verteilter Innovationen durch eine schiefe t-Verteilung verallgemeinert wird (Modell 11).

Es lässt sich noch anmerken, dass Modelle 3 (mit Leverage Effekt), 5 (Mit einer t-verteilten Innovation der Renditengleichung), 6 (Stochastic-Volatility-in-Mean), 7 RV und 7 VIX (mit zusätzlichem Regressor -RV oder VIX- in der Volatilitätsgleichung) besser als das Basis Modell 1 sind. Somit stellen diese Modelle (aus Sicht der out-of-sample VaR/ES-Prognose) eine sinnvolle Verallgemeinerung des Basis Modells dar. Modell 10 ist bei den MCMC/t-Methoden sinnvolle Erweiterung der Modelle 1 und 3, und Modell 11 bei den FHS/FEVT-Methoden. Obwohl SV-Modell 3 bei vereinzelt VaR-Methoden von anderen SV-Modellen übertroffen wird, ist insgesamt seine exzellente Gesamt-Performance hervorzuheben. Falls man eine Gesamt-Strafpunktzahl über allen VaR-Methoden je Modell einführen würde, würde SV-Modell 3 am besten von den SV-Modellen - für die DJIA und S&P 500 Stichproben - abschneiden. Dies hat dazu geführt, dass für die restlichen Stichproben, untersucht in dieser Arbeit, lediglich Modell 3 (von den SV-Modellen) zur Prognose herangezogen wird.

In Anbetracht der besseren Ergebnisse und der weitaus kürzeren Rechenzeit würde ich für eine effiziente VaR- und ES-Prognose eindeutig die Modelle der GARCH-Familie heranziehen. Diese Modelle funktionieren sehr gut für alle in Betracht gezogenen Zeitreihen- Dow-Jones, S&P 500, DAX, Einzelaktien Boeing und Hewlett Packard, Rohstoffpreise (insbesondere Preis von Brent-Oil-Europe), Wechselkurse wie USD/GBP oder USD/JPY.

Möglicher Grund der schlechteren Performance der SV-Modelle könnte die ineffizientere Schätzung der Parameter sein; die hier angewandten Markov-Chain-Monte-Carlo-Methoden zählen zu den effizientesten bekannten Methoden, sind jedoch womöglich immer noch weiter hinter der Maximum-Likelihood-Methode, mit der die GARCH Modellen geschätzt werden. Deshalb wurde eine Simulationsstudie durchgeführt, in der die Daten mit einem Asymmetric-SV-Modell mit korrelierten normalverteilten Innovationen (Modell 3) künstlich generiert wurden. Die Simulationsstudie zeigt, dass SV-Modell-3 für diesen Datensatz exzellente Ergebnisse liefert (die modellbasierten Varianten MCMC/NORM waren besser als die APARCH-Prognosen), was eher gegen eventuelle Ineffizienz der MCMC-Schätzung spricht, insbesondere bei diesem einen Modell. Zu betonen ist, dass das APARCH Modell selbst auf diesem fremden Territorium nahezu gleich gut war. Es wird der zukünftigen Forschung überlassen, zu überprüfen ob die MCMC-Schätzung der anderen SV-Modelle nicht an Ineffizienz leidet. Dies könnte untersucht werden, indem

man Datensätze mit dem jeweiligen SV-Modell generiert und dann mit demselben Modell schätzt.

Einige Beiträge in der Literatur²²⁴ zeigen eine bessere In-Sample-Anpassung der SV-Modelle gegenüber GARCH-Modellen für größere Zeitfenster (z.B. 2000 anstatt 500). Eine Erhöhung des Zeitfensters von 500 auf 2000 wurde von mir - sowohl in der Simulationsstudie als auch mit empirischen Zeitreihen - untersucht, hat jedoch keine Verbesserung der Prognosen herbeigeführt.

Für die FHS Methode mit einem SV-Modell als Filter sind die geschätzten Volatilitäten von großer Bedeutung. In dieser Arbeit wurde bei der FHS-Methode mit den Punktschätzern für die vergangenen Volatilitäten gearbeitet. Als mögliche (allerdings sehr rechenintensive) Erweiterung könnte man die ganzen MCMC-Ketten der Volatilitäten in die FHS-Methode integrieren.

²²⁴Vgl. z.B. Hafner und Preminger (2010), Tabelle 2.

Literaturverzeichnis

- Acerbi, C. und D. Tasche (2002) *On the Coherence of Expected Shortfall*, Journal of Banking and Finance, 26, S. 1487–1503.
- Alizadeh, S., M. W. Brandt, und F. X. Diebold (2002) *Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models*, Journal of Finance, 57(3), S. 1047–1091.
- Andersen, T. G. (1994) *Stochastic Autoregressive Volatility: A Framework for Volatility Modelling*, Mathematical Finance, 4, S. 75–102.
- Andersen, T. G. (1996) *Return Volatility and Trading Volume: An Information Flow Interpretation of Stochastic Volatility*, Journal of Finance, 51, S. 169–204.
- Andersen, T. G., T. Bollerslev, P. F. Christoffersen, und F. X. Diebold (2007) *Practical Volatility and Correlation Modeling for Financial Market Risk Management*, in *The Risks of Financial Institutions*, hrsg. von Carey, M. und R. M. Stulz, Kapitel 11, S. 513–548, The University of Chicago Press.
- Andersen, T. G., H. Chung, und B. E. Sorensen (1999) *Efficient Method of Moments Estimation of a Stochastic Volatility Model: A Monte Carlo Study*, Journal of Econometrics, 91, S. 61–87.
- Andersen, T. G., R. A. Davis, J.-P. Kreiß, und T. Mikosch (2009) *Handbook of Financial Time Series*, Springer.
- Ané, T. und H. Geman (2000) *Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns*, The Journal of Finance, 55(5), S. 2259–2284.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, und D. Heath (1997) *Thinking Coherently*, Risk, 10, S. 68–71.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber, und D. Heath (1999) *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, 9, S. 203–228.
- Bachelier, L. (1900) *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Troisième Série, 17, S. 21–86.

- Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, und L. Vosper (1999) *VaR without Correlations for Portfolios of Derivative Securities*, Journal of Futures Markets, 19, S. 583–602.
- Barone-Adesi, G., K. Giannopoulos, und L. Vosper (2002) *Backtesting Derivative Portfolios with Filtered Historical Simulation (FHS)*, European Financial Management, 8, S. 31–58.
- Basak, S. und A. Shapiro (2001) *Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices*, The Review of Financial Studies, 14, S. 371–405.
- Basel, B. I. Z. (1996) *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht.
- Basel, B. I. Z. (2011) *Messages From the Academic Literature on Risk Measurement for the Trading Book*, Working Paper No. 19, 31.01.2011, Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht.
- Basel, B. I. Z. (2012) *Consultative Document: Fundamental Review of the Trading Book*, Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht.
- Basel, B. I. Z. (2013) *Consultative Document, Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework*, Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht.
- Bauer, H. (1978) *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, New York: de Gruyter.
- Bauer, H. (1992) *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, Berlin, New York, 2. Aufl.
- Berg, A., R. Meyer, und J. Yu (2004) *Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models*, Journal of Business and Economic Statistics, 22(1), S. 107–120.
- Bhattacharya, R. N. und E. C. Waymire (1990) *Stochastic Processes with Applications*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, New York et al.
- Billingsley, P. (1961) *The Lindeberg Levy Theorem for Martingales*, Proceedings of the American Mathematical Society, 12, S. 788–792.
- Bollerslev, T. (1986) *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31(3), S. 307–327.

- Borodin, A. N. und P. Salminen (2002) *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, Probability and its Applications, Birkhäuser, Basel et al., 2. Aufl.
- Box, G. E. P. und G. M. Jenkins (1976) *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisco: Holden-Day.
- Brock, W. A., W. D. Dechert, J. A. Scheinkman, und B. LeBaron (1996) *A Test for Independence Based on the Correlation Dimension*, *Econometric Reviews*, 15(3), S. 197–235.
- Broto, C. und E. Ruiz (2002) *Estimation Methods for Stochastic Volatility Models: A Survey*, Working Paper, 02-54, Universidad Carlos III de Madrid.
- Bünning, H. und G. Trenkler (1994) *Nichtparametrische Statistische Methoden*, Walter de Gruyter, Berlin, 2. Aufl.
- Campbell, J. Y., A. W. Lo, und A. C. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Carlin, B. P. und T. A. Louis (2000) *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, Chapman and Hall, London, 2. Aufl.
- Carnero, M. A., D. Peña, und E. Ruiz (2001) *Is Stochastic Volatility more Flexible than GARCH?*, Working Paper, 01-08, Universidad Carlos III de Madrid.
- Carnero, M. A., D. Peña, und E. Ruiz (2004) *Persistence and Kurtosis in GARCH and Stochastic Volatility Models*, *Journal of Financial Econometrics*, 2(2), S. 319–342.
- Chen, J. M. (2013) *Measuring Market Risk Under Basel II, 2.5, and III: VAR, Stressed VAR and Expected Shortfall*, Working Paper, Michigan State University- College of Law.
- Chib, S. (2001) *Markov Chain Monte Carlo Methods: Computation and Inference*, in *Handbook of Econometrics*, hrsg. von Heckman, J. J. und E. Leamer, Vol. 5, Kapitel 57, S. 3569–3649, Elsevier, North-Holland.
- Chib, S. und E. Greenberg (1995) *Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm*, *The American Statistician*, 49(4), S. 327–335.
- Chib, S., F. Nardari, und N. Shephard (2002) *Markov Chain Monte Carlo Methods for Stochastic Volatility Models*, *Journal of Econometrics*, 108, S. 281–316.

- Choy, S. T. B., W. Y. Wan, und C. M. Chan (2008) *Bayesian Student-t Stochastic Volatility Models Via Scale Mixtures*, *Advances in Econometrics*, 23, S. 595–618, Special Issue on Bayesian Econometric Methods.
- Christoffersen, P. F. (1998) *Evaluating Interval Forecasts*, *International Economic Review*, 39(4), S. 841–862.
- Christoffersen, P. F. und D. Pelletier (2002) *Backtesting Portfolio Risk Measures*, CIRANO.
- Clark, P. K. (1973) *A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Prices*, *Econometrica*, 41(1), S. 135–155.
- Clements, M. P. und D. F. Hendry (1998) *Forecasting Economic Time Series*, Cambridge University Press.
- Cont, R. (Hrsg.) (2010) *Encyclopedia of Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd.
- Cootner, P. H. (Hrsg.) (1964) *The Random Character of Stock Market Prices*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts.
- Cowles, A. (1933) *Can Stock Market Forecasters Forecast?*, *Econometrica*, 1, S. 309–324.
- Cowles, A. (1944) *Stock Market Forecasting*, *Econometrica*, 12, S. 206–214.
- Cowles, A. (1960) *A Revision of Previous Conclusions Regarding Stock Price Behavior*, *Econometrica*, 28, S. 909–915.
- Cowles, A. und H. E. Jones (1937) *Some A Posteriori Probabilities in Stock Market Action*, *Econometrica*, 5, S. 280–294.
- Crnkovic, C. und J. Drachman (1996) *Quality Control*, *Risk*, 9, S. 139–143.
- Danielsson, J. (1994) *Stochastic Volatility in Asset Prices: Estimation with Simulated Maximum Likelihood*, *Journal of Econometrics*, 64, S. 375–400.
- Danielsson, J. (1998) *Multivariate Stochastic Volatility Models: Estimation and a Comparison with VGARCH Models*, *Journal of Empirical Finance*, 5, S. 155–173.
- Danielsson, J. und J. F. Richard (1993) *Accelerated Gaussian Importance Sampler with Application to Dynamic Latent Variable Models*, *Journal of Applied Econometrics*, 3, S. 153–174.

- Diebold, F. X., T. A. Gunther, und A. S. Tay (1998) *Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management*, International Economic Review, 39(4), S. 863–883.
- Ding, Z., C. W. J. Granger, und R. F. Engle (1993) *A long memory property of stock market returns and a new model*, Journal of Empirical Finance, 1(1), S. 83–106.
- Doornik, J. A. (1996) *Ox: Object Oriented Matrix Programming*, Chapman and Hall, London.
- Dowell, M. und P. Jarratt (1972) *The Pegasus Method for Computing the Root of an Equation*, BIT Numerical Mathematics, 12, S. 503–508.
- Efron, B. und R. J. Tibshirani (1994) *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall/CRC.
- Eller, R. und H. P. Deutsch (1998) *Derivate und Interne Modelle*, Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart.
- Engle, R. F. (1982) *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, 50(4), S. 987–1008.
- Franco, C. und J.-M. Zakoian (2010) *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*, John Wiley & Sons Ltd.
- Franke, J., W. Härdle, und C. Hafner (2001) *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Fuller, W. A. (1976) *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Galdi, F. C. und L. M. Pereira (2007) *Value at Risk (VaR) Using Volatility Forecasting Models: EWMA, GARCH and Stochastic Volatility*, Brazilian Business Review, 4(1), S. 74–94.
- Gallant, A. R. und G. Tauchen (1996) *Which Moments to Match?*, Econometric Theory, 12, S. 657–681.
- Gelfand, A. E. und A. F. M. Smith (1990) *Sampling-based Approaches to Calculating Marginal Densities*, Journal of the American Statistical Association, 85, S. 398–409.

- Gelman, A., J. B. Carlin, H. S. Stern, und D. B. Rubin (2004) *Bayesian Data Analysis*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2 Aufl.
- Gelman, A., G. O. Roberts, und W. R. Gilks (1996) *Efficient Metropolis Jumping Rules*, in *Bayesian Statistics 5*, hrsg. von Bernardo, J. M., J. O. Berger, A. P. Dawid, und A. F. M. Smith, S. 599–607, Oxford University Press, Oxford.
- Geman, S. und D. Geman (1984) *Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, S. 721–741.
- Geweke, J. (1992) *Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments*, in *Bayesian Statistics 4*, hrsg. von Bernardo, J. M., J. O. Berger, A. P. Dawid, und A. F. M. Smith, Clarendon Press, Oxford.
- Ghysels, E., A. C. Harvey, und E. Renault (1996) *Stochastic Volatility*, in *Handbook of Statistics*, hrsg. von Maddala, G. S. und C. R. Rao, Vol. 14, S. 119–191, Elsevier, Amsterdam.
- Gilks, W. R. und P. Wild (1992) *Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling*, Applied Statistics, 41, S. 337–348.
- Glasserman, P. (2004) *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Applications of Mathematics, Springer.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan, und D. E. Runkle (1993) *On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, The Journal of Finance, 48(5), S. 1779–1801.
- Gourieroux, C., A. Monfort, und E. Renault (1993) *Indirect Inference*, Journal of Applied Econometrics, 8, S. 85–118.
- Granger, C. W. J. und O. Morgenstern (1970) *Predictability of Stock Market Prices*, Heath: Lexington.
- Haario, H., E. Saksman, und J. Tamminen (2005) *Componentwise Adaptation for High Dimensional MCMC*, Computational Statistics, 20, S. 265–273.
- Hafner, C. und A. Preminger (2010) *Deciding Between GARCH and Stochastic Volatility via Strong Decision Rules*, Journal of Statistical Planning and Inference, 140(3), S. 791–805.
- Hamilton, J. D. (1994) *Time series analysis*, Princeton University Press.

- Harvey, A. C. und N. Shephard (1996) *The Estimation of an Asymmetric Stochastic Volatility Model for Asset Returns*, Journal of Business and Economic Statistics, 14, S. 429–434.
- Hastings, W. K. (1970) *Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and their Applications*, Biometrika, 57, S. 97–109.
- Hautsch, N. und Y. Ou (2008) *Discrete-Time Stochastic Volatility Models and MCMC-Based Statistical Inference*, Technical Report 2008-063, SFB 649, Humboldt-Universität zu Berlin.
- Heidelberger, P. und P. D. Welch (1983) *Simulation Run Length Control in the Presence of an Initial Transient*, Operations Research, 31(6), S. 1109–1144.
- Hermann, M. (2006) *Numerische Mathematik*, Oldenbourg Verlag, München.
- Hol, E. und S. J. Koopman (2000) *Forecasting the Variability of Stock Index Returns with Stochastic Volatility Models and Implied Volatility*, Technical Report TI 2000-104/4, Tinbergen Institute.
- Holton, G. A. (2003) *Value-at-Risk: Theory and Practice*, Academic Press, San Diego, California.
- Hsieh, D. A. (1991) *Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets*, Journal of Finance, 46(5), S. 1839–1877.
- Hu, W. und A. N. Kercheval (2008) *The Skewed t Distribution for Portfolio Credit Risk*, Advances in Econometrics, 22, S. 55–83.
- Hyndmann, R. J. und Y. Fan (1996) *Sample Quantiles in Statistical Packages*, The American Statistician, 50(4), S. 361–365.
- Jacquier, E., N. G. Polson, und P. E. Rossi (1994) *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models*, Journal of Business and Economic Statistics, 12(4), S. 371–389.
- Jacquier, E., N. G. Polson, und P. E. Rossi (2004) *Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Fat-Tails and Correlated Errors*, Journal of Econometrics, 122, S. 185–212.
- Jazwinski, A. H. (1970) *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, Inc., New York.
- Johnson, N. L. und S. Kotz (1970) *Continuous Univariate Distributions-1*, John Wiley and Sons, Ltd.

- Johnson, N. L., S. Kotz, und N. Balakrishnan (1994) *Continuous Univariate Distributions, Vol. 1*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Wiley, New York, 2. Aufl.
- Jorion, P. (1997) *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill, New York.
- Jovanovic, F. (2006) *A Nineteenth-Century Random Walk: Jules Regnault and the Origins of Scientific Financial Economics*, *Pioneers of Financial Economics*, 1, S. 191–218.
- Kendall, M. G. (1953) *The Analysis of Economic Time Series—Part 1: Prices*, *Journal of the Royal Statistical Society*, 96, S. 11–52.
- Kerkhof, J. und B. Melenberg (2004) *Backtesting for Risk-Based Regulatory Capital*, *Journal of Banking and Finance*, 28, S. 1845–1865.
- Kim, S., N. Shephard, und S. Chib (1998) *Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models*, *Review of Economic Studies*, 65, S. 361–393.
- Knight, F. H. (1965) *Risk, Uncertainty & Profit*, New York: Harper & Row Publishers.
- Koopman, S. J. und E. H. Uspensky (2000) *The Stochastic Volatility in Mean Model*, Technical Report 2000-024/4, Tinbergen Institute.
- Kuester, K., S. Mittnik, und M. S. Paolella (2006) *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), S. 53–89.
- Kupiec, P. H. (1995) *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*, *Journal of Derivatives*, 3(2), S. 73–84.
- Lehmann, E. L. (1983) *Theory of Point Estimation*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Liesenfeld, R. und R. C. Jung (2000) *Stochastic Volatility Models: Conditional Normality versus Heavy-Tailed Distributions*, *Journal of Applied Econometrics*, 15, S. 137–160.
- Lunn, D. J., A. Thomas, N. Best, und D. Spiegelhalter (2000) *WinBUGS- A Bayesian Modelling Framework: Concepts, Structure, and Extensibility*, *Statistics and Computing*, 10, S. 325–337.

- Mandelbrot, B. (1963) *The Variation of Certain Speculative Prices*, Journal of Business, 36(4), S. 396–411.
- Manganelli, S. (2004) *Asset Allocation by Variance Sensitivity Analysis*, Journal of Financial Econometrics, 2, S. 370–389.
- Mardia, K. V., J. T. Kent, und J. M. Bibby (1979) *Multivariate Analysis*, Academic Press Inc. (London) Ltd.
- McNeil, A. J. und R. Frey (2000) *Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach*, Journal of Empirical Finance, 7, S. 271–300.
- McNeil, A. J., R. Frey, und P. Embrechts (2005) *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press.
- Metropolis, N., A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, und E. Teller (1953) *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, Journal of Chemical Physics, 21, S. 1087–1092.
- Meyer, R. und J. Yu (2000) *BUGS for a Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models*, Econometrics Journal, 3, S. 198–215.
- Mills, T. C. (1993) *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press.
- Nakajima, J. und Y. Omori (2012) *Stochastic Volatility Model with Leverage and Asymmetrically Heavy-Tailed Error Using GH Skew Student's *t*-Distribution*, Computational Statistics and Data Analysis, 56, S. 3690–3704.
- Neal, R. M. (1997) *Markov Chain Monte Carlo Methods Based on Slicing the Density Function*, Technical Report 9722, Dept. of Statistics, University of Toronto.
- Neal, R. M. (2003) *Slice Sampling*, The Annals of Statistics, 31, S. 705–767.
- Nicholls, D. F. und B. G. Quinn (1982) *Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction*, Lecture Notes in Statistics, 11, Springer-Verlag: New York.
- Osborne, M. F. M. (1959) *Brownian Motion in the Stock Market*, Operations Research, 7(2), S. 145–173.
- Popper, K. (2007) *Logik der Forschung*, Akademie Verlag, Berlin, 3 Aufl.

- Praetz, P. D. (1972) *The Distribution of Share Prices*, Journal of Business, 45, S. 45–55.
- Press, S. J. (1967) *A compound events model for security prices*, Journal of Business, 40(3), S. 317–335.
- Pritsker, M. (2001) *The Hidden Dangers of Historical Simulation*, Finance and Economics Discussion Series 27. Board of Governors of the Federal Reserve System, Washington, D.C.
- Rappoport, P. (1993) *A New Approach: Average Shortfall*, J.P. Morgan, Fixed Income Research (44-71), S. 325-399.
- Regnault, J. (1863) *Calcul des chances et philosophie de la bourse*, Paris: Mallet-Bachelier and Castel.
- Rinne, H. und K. Specht (2002) *Zeitreihen: Statistische Modellierung, Schätzung und Prognose*, Verlag Vahlen, München.
- Roberts, G. O. und J. S. Rosenthal (2006) *Examples of Adaptive MCMC*, Technical Report 0610, University of Toronto.
- Rockafellar, R. T. und S. Uryasev (2002) *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance, 26, S. 1443–1471.
- Rosenberg, B. (1972) *The Behaviour of Random Variables with Nonstationary Variance and the Distribution of Security Prices*, Research Program in Finance, Working Paper 11, Graduate School of Business Administration, University of California, Berkeley.
- Rosenblatt, M. (1952) *Remarks on a Multivariate Transformation*, Annals of Mathematical Statistics, 23(3), S. 470–472.
- Sadorsky, P. (2005) *Stochastic Volatility Forecasting and Risk Management*, Applied Financial Economics, 15(2), S. 121–135.
- Samuelson, P. A. (1965) *Rational Theory of Warrant Pricing*, Industrial Management Review, 6(2), S. 13–39.
- Sandmann, G. und S. J. Koopman (1998) *Estimation of Stochastic Volatility Models via Monte Carlo Maximum Likelihood*, Journal of Econometrics, 87, S. 271–301.
- Shephard, N. (Hrsg.) (2005) *Stochastic volatility : selected readings*, Advanced texts in econometrics, Oxford University Press.

- Shiryayev, A. N. (1988) *Wahrscheinlichkeit*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Shreve, S. E. (2004) *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, New York et al.
- Sinn, H.-W. (2011) *Kasino Kapitalismus: Wie es zur Finanzkrise kam, und was jetzt zu tun ist*, Ullstein Buchverlage GmbH, Berlin, 2. Aufl.
- Spiegelhalter, D., A. Thomas, N. Best, und W. R. Gilks (1996) *BUGS 0.5: Bayesian Inference Using Gibbs Sampling- Manual (version ii)*, Medical Research Council Biostatistics Unit, Cambridge.
- Takahashi, M., Y. Omori, und T. Watanabe (2009) *Estimating Stochastic Volatility Models Using Daily Returns and Realized Volatility Simultaneously*, Computational Statistics and Data Analysis, 53, S. 2404–2426.
- Taleb, N. N. (2010) *The Black Swan: The Impact of The Highly Improbable*, New York: Random House, Inc., 2. Aufl.
- Tanner, M. A. und W. H. Wong (1987) *The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation*, Journal of the American Statistical Association, 82, S. 528–550.
- Tauchén, G. und M. Pitts (1983) *The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets*, Econometrica, 51, S. 485–505.
- Taylor, S. J. (1982) *Financial Returns Modelled by the Product of Two Stochastic Processes—a Study of Daily Sugar Prices 1961–79*, in *Time Series Analysis: Theory and Practice 1*, hrsg. von Anderson, O. D., Amsterdam: North Holland.
- Taylor, S. J. (1986) *Modelling financial time series*, Chichester, UK: John Wiley.
- Taylor, S. J. (2005) *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*, Princeton University Press, Princeton, Oxford.
- Taylor, S. J. (2008) *Modelling financial time series*, World Scientific Publishing.
- Tesarova, V. (2012) *Value at Risk: GARCH vs. Stochastic Volatility Models: Empirical Study*, Charles University in Prague, Tschechien, Masterthesis.

- Tierney, L. (1994) *Markov Chains for Exploring Posterior Distributions*, *Annals of Statistics*, 22(4), S. 1701–1728.
- Tsay, R. S. (1987) *Conditional Heteroscedastic Time Series Models*, *Journal of the American Statistical Association*, 82, S. 590–604.
- Tsay, R. S. (2002) *Analysis of Financial Time Series*, Wiley series in probability and statistics, John Wiley & Sons, New York et al.
- Wang, J. J. J., J. S. K. Chan, und S. T. B. Choy (2011) *Stochastic Volatility Models with Leverage and Heavy-Tails Distributions: A Bayesian Approach Using Scale Mixtures*, *Computational Statistics and Data Analysis*, 55, S. 852–862.
- Wild, P. und W. R. Gilks (1993) *Algorithm AS 287: Adaptive Rejection Sampling from Log-concave Density Functions*, *Applied Statistics*, 42, S. 701–709.
- Wold, H. (1938) *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Stockholm: Almqvist and Wicksell.
- Working, H. (1934) *A Random Difference Series for Use in the Analysis of Time Series*, *Journal of the American Statistical Association*, 29, S. 11–24.
- Working, H. (1960) *Notes on the Correlation of First Differences of Averages in a Random Chain*, *Econometrica*, 28, S. 916–918.
- Würtz, D., Y. Chalabi, und L. Luksan (2006) *Parameter Estimation of ARMA Models with GARCH/APARCH Errors: An R and SPlus Software Implementation*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich.
- Wylie, J., Q. Zhang, und T. K. Siu (2010) *Can Expected Shortfall and Value-at-Risk be Used to Statistically Hedge Options*, *Quantitative Finance*, 10, S. 575–583.
- Xu, D. und T. S. Wirjanto (2013) *Risk Measures under a Stochastic Volatility Model with a Mixture-of-Normal Error Distribution*, Working Paper, verfügbar bei SSRN.
- Yu, J. (2002) *Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market*, *Applied Financial Economics*, 12, S. 193–202.
- Yu, J. (2005) *On Leverage in a Stochastic Volatility Model*, *Journal of Econometrics*, 127, S. 165–178.

Zhang, L., P. A. Mykland, und Y. Aït-Sahalia (2005) *A Tale of Two Time Scales: Determining Integrated Volatility With Noisy High-Frequency Data*, Journal of the American Statistical Association, 100(472), S. 1394–1411.

A. OpenBugs Sampling Methoden

A.1. SV Modell 2

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	conjugate Inverse-Gamma
$\phi = 4\phi^* - 2$	Beta(2,2) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
$\psi = 2\psi^* - 1$	Beta(2,2) für ψ^*	Slice Sampling für ψ^*
h_t		Single Component Adaptive Metropolis

Tabelle A.1.: Sampling Methoden im SV-Modell 2

A.2. SV Modell 3

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,25)	conjugate normal
γ	normal(0,25)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
ρ	Gleichverteilung(-1,1)	Slice Sampling
h_t		Slice Sampling, da auf (-80,80) gestutzt

Tabelle A.2.: Sampling Methoden im SV-Modell 3

A.3. SV Modell 4

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
s_t	normal($-\delta^2, \delta^2$) für $\ln(1 + s_t)$	Slice Sampling
q_t	Bernoulli(κ)	Discrete Slice Sampling
σ_η^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
κ	Gleichverteilung(0,1)	conjugate beta
δ	Beta(1.5,20)	Slice Sampling

Tabelle A.3.: Sampling Methoden im SV-Modell 4

A.4. SV Modell 5

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
σ_η^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
λ_t	Inverse-Gamma($\nu/2, \nu/2$)	Slice Sampling für $\frac{1}{\lambda_t}$
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
ν	Gleichverteilung(3,40)	Slice Sampling

Tabelle A.4.: Sampling Methoden im SV-Modell 5

A.5. SV Modell 6

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
d	normal(0,2)	conjugate normal

Tabelle A.5.: Sampling Methoden im SV-Modell 6

A.6. SV Modell 7

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,1)	conjugate normal
γ	normal(0,10)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(4,0.1)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Gleichverteilt(0,1) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
λ	normal(0,10)	conjugate normal

Tabelle A.6.: Sampling Methoden im SV-Modell 7

A.7. SV Modell 8

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,25)	conjugate normal
γ	normal(0,25)	conjugate normal
σ_η^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	Slice Sampling
σ_u^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	conjugate inverse gamma
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Slice Sampling, da auf (-100,100) gestutzt
ρ	Gleichverteilt(-1,1)	Slice Sampling
ξ	normal(0,25)	conjugate normal

Tabelle A.7.: Sampling Methoden im SV-Modell 8

A.8. SV Modell 9

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,25)	conjugate normal
γ	normal(0,25)	conjugate normal
σ_η^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	Slice Sampling
σ_u^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	conjugate inverse gamma
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
h_t		Slice Sampling, da auf (-100,100) gestutzt
ρ	Gleichverteilt(-1,1)	Slice Sampling
ξ	normal(0,25)	conjugate normal
ψ	Beta(2,2)	Slice Sampling

Tabelle A.8.: Sampling Methoden im SV-Modell 9

A.9. SV Modell 10

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,25)	conjugate normal
γ	normal(0,25)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
ρ	Gleichverteilung(-1,1)	Slice Sampling
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
λ_t	Inverse-Gamma($\nu/2, \nu/2$)	Slice Sampling für $\frac{1}{\lambda_t}$
ν	Gleichverteilung(3,40)	Slice Sampling

Tabelle A.9.: Sampling Methoden im SV-Modell 10

A.10. SV Modell 11

Parameter	Prior	Sampling-Methode
μ	normal(0,25)	conjugate normal
γ	normal(0,25)	conjugate normal
γ_1	normal(0,25)	conjugate normal
γ_2	normal(0,25)	conjugate normal
σ_{η}^2	Inverse-Gamma(2.5,0.025)	Slice Sampling
$\phi = 2\phi^* - 1$	Beta(20,1.5) für ϕ^*	Slice Sampling für ϕ^*
ρ	Gleichverteilung(-1,1)	Slice Sampling
h_t		Single Component Adaptive Metropolis
λ_t	Inverse-Gamma($\nu/2, \nu/2$)	Slice Sampling für $\frac{1}{\lambda_t}$
ν	Gleichverteilung(3,40)	Slice Sampling

Tabelle A.10.: Sampling Methoden im SV-Modell 11

In den letzten beiden Jahrzehnten hat in der ökonomischen Finanzmarktforschung der Ansatz der Stochastic-Volatility-Modelle gegenüber den GARCH-Modellen zunehmend an Boden gewonnen. Dies ist auf die oft festgestellte bessere in-sample Anpassung der zeitdiskreten Stochastic-Volatility-Modelle an empirische Daten zurückzuführen. Dagegen fehlt es an umfassenden Untersuchungen der out-of-sample-Güte, insbesondere was die Güte der Value-at-Risk und Expected Shortfall Prognosen angeht. Ziel dieser Dissertation war es, diese Lücke auszufüllen. Es wurde die Prognosefähigkeit von 11 Stochastic-Volatility Modellen und 4 GARCH Modellen verglichen. Die untersuchte Zeitreihe sind die 10000, 5000 bzw. 2500 Tagesrenditen des Dow-Jones-Indexes bis 25.10.2011. Das Asymmetrische Stochastic-Volatility-Modell (Modell 3 in der Arbeit) wird auch auf andere Zeitreihen angewandt: Tagesrenditen des DAX-Index, der Boeing Aktie, der Hewlett-Packard-Aktie, der Ölsorte Brent, der USD/JPY und GBP/USD-Wechselkurse. Die vorliegende Untersuchung hat das überraschende Ergebnis gebracht, dass die Stochastic-Volatility-Modelle im Bezug auf out-of-sample-Prognosen von VaR und ES durchweg den weit besser handhabbaren Modellen der GARCH-Familie und zum Teil selbst der Historical-Simulation-Methode unterlegen sind. Speziell hat sich der Ansatz eines Asymmetrisch-Power-ARCH-Modells (APARCH(1,1)) mit schiefer t-verteilter Innovation, kombiniert mit Filtered Historical Simulation, als weit überlegen herausgestellt.