

**Stochastisch erweiterte
Mehrskalmodellierung offenporiger
Metallschäume**

Dissertation

zur Erlangung des Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät

der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Thomas Bleistein, M.Sc.

Saarbrücken

2019

Tag des Kolloquiums: 30.04.2020

Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Guido Kickelbick

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels

Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster

Vorsitz: Prof. Dr.-Ing. Michael Vielhaber

Akad. Mitarbeiter: Dr.-Ing. Frank Aubertin

Für meinen Vater

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, die vorliegende Arbeit meinem verstorbenen Vater, Günter Bleistein, zu widmen!

Du hast mich stets angetrieben und mich mit deinem Vertrauen und deiner Unterstützung dorthin gebracht, wo ich heute bin. Deine Gedanken, deine Einstellung und nicht zuletzt deine Liebe haben mich über deinen Tod hinaus zu dem Menschen gemacht, der ich heute bin. Ohne dich hätte ich die Kraft, diesen Weg zu gehen, nicht aufgebracht.

Dafür danke ich dir von ganzem Herzen!

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik an der Universität des Saarlandes unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels. Finanziell wurde diese Arbeit durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Di 430/20-1) unterstützt. Für die Hilfe und Unterstützung, die ich in der Zeit meiner Dissertation erhalten habe, möchte ich mich an dieser Stelle gerne bedanken.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater und Erstgutachter Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels, der mir die Promotion ermöglicht hat. Die Unterstützung und Förderung, die ich in den letzten Jahren erfahren durfte, haben maßgeblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen. Seit meinen Anfängen am Lehrstuhl für Technische Mechanik und während der Zeit meiner Promotion hat er mir jederzeit großes Vertrauen geschenkt und war für fachliche Diskussion immer bereit.

Bei Prof. Dr.-Ing. Alexander Düster vom Institut für Konstruktion und Festigkeit von Schiffen an der Technischen Universität Hamburg möchte ich mich für die Übernahme des Zweitgutachtens bedanken. Die erfolgreiche Zusammenarbeit im Rahmen des gemeinsamen Projektes der Deutschen Forschungsgemeinschaft hat den Grundstein für die entstandene Promotion gelegt.

Meinem wissenschaftlichen Begleiter Prof. Dr. Christian Motz möchte ich vor allem für die hilfreichen Diskussionen zu Beginn meiner Promotion danken. Diese haben mir bei meiner Forschungsarbeit sehr geholfen.

Gerne möchte ich die Möglichkeit nutzen, mich ganz besonders bei PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung zu bedanken. Aufgrund der jahrelangen Zusammenarbeit und Unterstützung hat sie erheblichen Anteil an meiner Entwicklung. Die zahlreichen fachlichen Diskussionen, Ideen und Anmerkungen haben meine Arbeits- und Sichtweisen verbessert und sehr geprägt.

Weiter bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik, die mich während meiner Zeit als studentischer und wissenschaftlicher Mitarbeiter begleitet haben, für das angenehme Arbeitsklima und die fachlichen Diskussionen. Mein ganz besonderer Dank gilt an dieser Stelle Dr.-Ing. Tobias Scheffer, Martin Reis M. Sc. und Ralf Derr M. Sc., die mich weit über die Promotion hinaus stets unterstützt haben und nicht nur mit fachlichen Diskussionen, sondern auch mit ihren freundschaftlichen Ratschlägen zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Abschließend geht mein persönlicher Dank an meine Familie und Freunde, die in den vergangenen Jahren viel Verständnis für meine Arbeit hatten. Hervorheben möchte ich meine Mama Jutta und Schwester Annika, die mich gerade nach dem Verlust meines Vaters sehr unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt Laura Kiefer, die mich in allen Bereichen unterstützt hat und in der Zeit meiner Promotion, wann immer es möglich war, entlastet hat.

Saarbrücken, 2019

Thomas Bleistein

Zusammenfassung

Offenporige Metallschäume zeigen bedingt durch ihre stochastische Tragwerksstruktur aus einzelnen Stegen eine hohe Steifigkeit im Bezug zur Dichte und eignen sich somit für eine Vielzahl von Anwendungen im Bereich des Leichtbaus. Die Möglichkeit der hohen Deformation bei einer definierten Kraft ermöglicht eine hohe Energieaufnahme und ist besonders für den Bereich der Crash-Absorption ideal. Die Kombination aus diesen Eigenschaften macht offenporige Metallschäume zu einer interessanten Materialklasse.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Mehrskalenmodellierung dieser Kategorie von Metallschäumen und der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens mithilfe der numerischen Umsetzung des Modellierungsansatzes. Alle relevanten Schritte, von der experimentellen Untersuchung der Materialeigenschaften auf den unterschiedlichen Skalen über die Modellentwicklung bis hin zur Validierung des implementierten Modells an Experimenten werden behandelt.

Die stochastische Erweiterung erfolgt durch den Bezug zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stegorientierungen des realen Schaums. Diese Stegorientierungen fließen ebenso wie das effektive Materialverhalten der Stege unter Zug- und Druckbelastung sowie unter Biegung ein. Somit bietet die vorliegende Arbeit einen neuen Ansatz der Skalenkopplung zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von offenporigen Metallschäumen.

Abstract

Due to their stochastic load-bearing structure consisting of individual struts, open-cell metal foams offer a high stiffness in relation to density and are therefore suitable for a large number of applications in the field of lightweight construction. The possibility of high deformation at a defined force enables high energy absorption and is particularly ideal for the area of crash absorption. The combination of these properties makes open-cell metal foams an interesting class of materials.

The present work deals with the multi-scale modelling of this category of metal foams and the characterisation of the macroscopic behaviour by means of the numerical implementation of the modelling approach. All relevant steps, from the experimental investigation of the material properties on the different scales, the model development up to the validation of the implemented model by experiments, are covered.

The stochastic extension is done with regard to the probability distribution of the strut orientations of the real foam. These strut orientations are included as well as the effective material behaviour of the struts under tensile and compression loading and under bending. Thus the present work represents a new approach to scale-coupling for the description of the macroscopic behaviour of open-cell metal foams.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Einleitung	1
2	Mechanische Grundlagen	7
2.1	Kontinuumsmechanische Grundlagen	9
2.2	Elasto-plastisches Materialverhalten und Schädigung	19
2.2.1	Elasto-plastisches Materialverhalten	19
2.2.2	Schädigung	27
2.3	Numerische Grundlagen	30
2.3.1	Finite-Elemente-Methode	30
2.3.2	Numerische Methoden zur Lösung von Evolutionsgleichungen	32
3	Charakterisierung von Metallschäumen	35
3.1	Struktur-Eigenschaftsbeziehung von Metallschäumen	36
3.2	Makroskopische Charakterisierung von Metallschäumen	39
3.3	Mikroskopische Charakterisierung von Metallschäumen	46
4	Modellierungsgrundlagen	51
4.1	Homogenisierungsmethoden	52
4.2	Microplane Theorie	55
4.2.1	Allgemeine Modellvorstellung der Microplane-basierten Theorien	59
4.2.2	Grundlagen der Microplane Theorie M1	63
4.2.3	Erweiterung der Microplane Theorie M1	66

5	Materialmodellierung	69
5.1	Microplane-basiertes Multiskalenmodell für offenporige Metallschäume .	70
5.1.1	Modellvorstellung	70
5.1.2	Numerische Umsetzung	72
5.2	Erweitertes Microplane Multiskalenmodell	75
5.2.1	Erweiterung des Modells um stochastische Geometrieparameter des gesamten Schaums	79
6	Experimentelle Materialcharakterisierung	87
6.1	Versuche auf der Mikroebene an Einzelstegen	88
6.2	Makroskopische Experimente	100
7	Makroskopische Simulation	105
7.1	Makroskopisches Kontinuumsmodell	106
7.1.1	Implementierung	106
7.1.2	Simulation und Parameteridentifikation	110
7.2	Multiskalenmodell	115
7.2.1	Phänomenologische 1D Konstitutivgesetze	115
7.2.2	Parameteridentifikation	120
8	Modellvalidierung	125
8.1	Makroskopische Druck- und Zugversuche	126
8.2	Makroskopische Fließflächen	128
8.3	Bestimmung des plastischen Deformationsanteils	130
8.4	Fazit	135
9	Zusammenfassung und weiterführende Gedanken	137
9.1	Zusammenfassung	137
9.2	Weiterführende Gedanken	140
	Literaturverzeichnis	143
A	Anhang	161

1

Motivation und Einleitung

Metallschäume sind, wie viele weitere Werkstoffe, von der Natur motiviert. Schon immer hat sich der Mensch die über die Jahrtausende durch Evolution entstandenen Strukturen der Natur zur Entwicklung neuer Technologien und Materialien zum Vorbild genommen. Stabile und gleichzeitig leichte Strukturen in der Natur bestehen selten aus einem soliden Material, sondern sind durch eine poröse Struktur gekennzeichnet. Beispiele solcher Strukturen finden sich in Bienenwaben, die eine regelmäßige Tragwerksstruktur bilden, oder im menschlichen Knochen, der mit seiner stochastischen Verteilung eine unregelmäßige Tragwerksstruktur aufweist. Darüber hinaus existieren viele weitere Strukturen, wie beispielsweise Holz oder Kork, die sich im Verlauf der Evolution in der Natur durchgesetzt haben. Offenporige Metallschäume sind einer der Werkstoffe, bei dem der Mensch sich das Vorbild der Natur zunutze macht. Die stochastische Tragwerksstruktur führt zu vielseitigen positiven Eigenschaften unterschiedlicher Metallschäume, welche ein breites Spektrum an Anwendungen bieten. Gleichzeitig bestärkt die Notwendigkeit, nachhaltig mit den vorhandenen Ressourcen unserer Erde zu wirtschaften, die Weiterentwicklung neuer Materialien und somit auch von Metallschäumen.

Schon heute werden Metallschäume in unterschiedlichen Industriezweigen eingesetzt. Dabei ist der Leichtbau eines der Hauptanwendungsgebiete [87], dessen Ziel in der Reduktion des Gewichts tragender Bauteile bei gleichzeitiger Aufrechterhaltung der Festigkeit liegt. Gerade in der Automobil-, Luft- und Raumfahrtindustrie ermöglichen leichtere Bauteile eine effizientere Fortbewegung. In diesen Industriebereichen werden durch die Verwendung von Metallschäumen sowohl Metall in der Herstellung als auch Energie im Laufe des Produktlebenszyklus eingespart. Ein weiterer Vorteil

des zellulären Aufbaus von Metallschäumen liegt in ihrer Eigenschaft bezüglich der Energieabsorption [10]. Diese Eigenschaft erlaubt es, auf zusätzliche Komponenten zur Energieabsorption zu verzichten, wodurch weitere Ressourcen eingespart werden. Tragende Komponenten aus Metallschäumen bieten gleichzeitig den Vorteil, bei Unfällen einen Teil der Energie auf einem definierten Kraftniveau aufzunehmen und somit zur Sicherheit von Insassen beizutragen [14].

Die Weiterentwicklung des Herstellungsprozesses von Metallschäumen führt zu einer zunehmend kostengünstigeren Produktion und macht Metallschäume für immer mehr Anwendungsgebiete interessant. Daraus resultiert der Bedarf, das Materialverhalten abschätzen und vorhersagen zu können. Da große experimentelle Testreihen an ganzen Bauteilen bzw. einzelnen Komponenten zeit- und kostenaufwendig sind, ist die Modellierung von Metallschäumen neben der Optimierung des Herstellungsprozesses eines der wichtigsten Forschungsfelder. Um den enormen experimentellen Aufwand ganzer Testreihen an realen Komponenten zu reduzieren, existieren unterschiedliche Modellierungsansätze. Zum einen lässt sich das Material rein phänomenologisch beschreiben (vgl. Gibson et al. [91, 207]), wobei kein Bezug zur Mikrostruktur hergestellt wird. Kleine Änderungen im Herstellungsprozess erfordern für diesen Modellierungsansatz eine Anpassung des Modells. Zum anderen existiert der Ansatz, die gesamte Mikrostruktur zu modellieren (vgl. Jiroušek et al. [122, 123]), was bei großen Bauteilen zu einer enormen Anzahl an Freiheitsgraden in den Simulationen führt. Durch die große Anzahl an Freiheitsgraden werden zur Durchführung der Berechnungen teure, extrem leistungsfähige Server benötigt. Trotz dieser leistungsfähigen Server resultieren die Modelle in langen Rechenzeiten und sind für den täglichen Einsatz in der Produktion ungeeignet. Bislang existieren keine vielversprechenden Ansätze zur Abbildung der starken Abhängigkeit der Bauteileigenschaften von der Mikrostruktur der Schäume, die gleichzeitig eine effiziente Modellierung gewährleisten.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Forderung nach einer effizienten und mikrostruktur-basierten Modellierung von Metallschäumen behandelt. Die Grundlage bildet die Bestimmung effektiver makroskopischer Materialparameter anhand der Mikrostruktur. Dazu werden die aus mikromechanischen Experimenten abgeleiteten effektiven Materialeigenschaften mit Hilfe einer geeigneten Homogenisierung in ein makroskopisches Materialmodell integriert. Durch den Bezug zur Mikrostruktur wird eine effiziente Methode zur Beschreibung ganzer Bauteile vorgestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein 10 ppi Aluminiumschaum der Firma Celltec Materials GmbH (Dresden, Deutschland) verwendet, um das Materialmodell zu entwickeln, zu testen und anschließend zu validieren. Dieses Materialmodell ist jedoch nicht auf den verwendeten Metallschaum beschränkt, sondern ermöglicht durch den Austausch der mikrostrukturellen Daten die Charakterisierung beliebiger offenporiger Schäume. Durch

die experimentelle Charakterisierung an einzelnen Stegen, wie sie in der vorliegenden Arbeit vorgestellt wird, können beliebige Schäume beschrieben werden. Zur mikromechanischen Charakterisierung werden Zug- und Druckversuche sowie Biegeversuche an Einzelstegen durchgeführt. Die anschließende phänomenologische Beschreibung des beobachteten Verhaltens dient als Grundlage für die Homogenisierung. Weiter liefert die stochastische Auswertung der Stegorientierungen deren Wahrscheinlichkeitsverteilung. Daraus ergibt sich die Perspektive, neben Metall- auch Keramik-, Polymer- oder Hybridschäume zu modellieren. Unter Hybridschäumen werden Schäume zusammengefasst, die aus mehr als einem Material bestehen, beispielsweise mit nanochristallinen Nickel beschichtete Aluminium- [125] oder Polymerschäume [126]. Dabei stellen insbesondere Hybridschäume aus Polymer und Metall einen der vielseitigsten Schäume dar [124, 126].

Das entwickelte Materialmodell muss in der Lage sein, das komplexe Verhalten von Metallschäumen abzubilden. Neben dem Verhalten unter Zug- und Druckbelastung ist von besonderem Interesse, das Versagen unter einer Vielzahl von multiaxialen Belastungszuständen darzustellen. Da Metallschäume bedingt durch ihren zellulären Aufbau eine geschlossene Fließfläche besitzen, muss auch das entwickelte Modell der Forderung nach einer geschlossenen Fließfläche gerecht werden. Neben der Validierung mit experimentellen Daten wird das entwickelte Multiskalenmodell in dieser Arbeit mit einem etablierten Fließflächenmodell von Bier et al. [34, 35] verglichen. Die Gliederung der vorliegenden Arbeit wird im Folgenden genauer erläutert.

In Kapitel 2 werden die mechanischen Grundlagen und die damit verbundenen spezifischen Begriffe der Mechanik eingeführt. Dazu fasst das Kapitel zunächst die für diese Arbeit relevanten kontinuumsmechanischen Grundlagen [101, 109] zusammen, um anschließend allgemein das Materialverhalten einzuführen. Das relevante Materialverhalten zur Auswertung des experimentell ermittelten Verhaltens von Stegen und des gesamten Schaums wird durch elasto-plastisches Materialverhalten und Schädigung abgebildet. Zusätzlich werden die numerischen Grundlagen zur Implementierung des Materialmodells zusammengefasst. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich die essentiellen Grundprinzipien als Basis vorgestellt und keineswegs eine vollständige Darstellung aller mechanischen Grundprinzipien geliefert.

Aufbauend auf Kapitel 2 fasst Kapitel 3 die Charakterisierung von Metallschäumen zusammen und bietet gleichzeitig einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung. Zunächst wird der allgemeine hierarchische Aufbau von Schäumen erläutert und die Abhängigkeit des makroskopischen Verhaltens von der Mikrostruktur beschrieben [63, 168]. Anschließend wird der aktuelle Stand der Charakterisierung von Metallschäumen auf der Makro- und der Mikroebene zusammengefasst. Dabei bildet die Makroebene den

gesamten Schaum bis hin zu großen Bauteilen ab. Die Mikroebene umfasst hingegen einzelne Stege des Metallschaums.

Kapitel 4 umfasst die weiteren und abschließenden Grundlagen zum Verständnis der Arbeit. Die allgemeinen Grundlagen der Homogenisierungsmethoden und der aktuelle Stand der Forschung werden eingangs des Kapitels beschrieben. Im Anschluss wird auf eine speziellere Homogenisierungsmethode, die Microplane Theorie [17, 23], eingegangen. Die Microplane Theorie ist die Basis des neu entwickelten Modells zur Charakterisierung von Metallschäumen. Zunächst werden der Ursprung der Theorie und die gesamte zeitliche Weiterentwicklung bis zum heutigen Stand beschrieben. Der Grundgedanke der Theorie wird durch Kapitel 4 beschrieben, und die Modellvorstellung wird genau erläutert. Da die Microplane Theorie über die Jahre viele unterschiedliche Modelle hervorgebracht hat, werden die beiden für diese Arbeit relevanten Modelle detailliert vorgestellt und die erforderlichen Gleichungen für die anschließende Einführung des entwickelten Materialmodells hergeleitet.

Die Definition des entwickelten Multiskalenmodells im Rahmen dieser Arbeit erfolgt in Kapitel 5. Dabei werden der erste Ansatz des Microplane Modells mit Bezug zur Mikrostruktur von offenporigen Schäumen und die Interpretation der einzelnen Stege im Rahmen der Microplane Theorie vorgestellt. Dieser bietet eine neue Möglichkeit zur Beschreibung des Materialverhaltens von Schaumstrukturen und erweitert somit die Möglichkeit der Simulation zellulärer Strukturen. Neben der Beschreibung der numerischen Umsetzung des entwickelten Multiskalenmodells für Metallschäume wird die Erweiterung des Modells um stochastische Geometrieparameter eingeführt. Die Verteilung der Stege, die für jeden Schaum charakteristisch ist, kann somit in das Multiskalenmodell einbezogen werden.

Kapitel 6 umfasst neben den Experimenten zur Charakterisierung des Verhaltens einzelner Stege auch die zur Validierung des Multiskalenmodells erforderlichen Experimente am gesamten Schaum. Zunächst werden die verwendeten Methoden zur experimentellen Charakterisierung von Einzelstegen vorgestellt, um anschließend die Ergebnisse der Zug-, Druck- und Biegeversuche an einzelnen Stegen zusammenzufassen. Da die makroskopischen Experimente für die Validierung des Modells unumgänglich sind, werden die im Rahmen der Habilitation von PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung [124] durchgeführten und für diese Arbeit zur Verfügung gestellten Experimente kurz beschrieben und die Ergebnisse diskutiert.

Die Beschreibung des makroskopischen Verhaltens, welches in Kapitel 6 aus den Experimenten hervorgeht, erfolgt in Kapitel 7. Um das entwickelte Multiskalenmodell zu verifizieren, wird zunächst die in dieser Arbeit umgesetzte Implementierung eines makroskopischen Materialmodells basierend auf der Arbeit von Bier et al. [34, 35] vorgestellt. Zur Validierung sollen sowohl das experimentell ermittelte makroskopische Verhalten als auch die numerischen Ergebnisse des phänomenologischen Fließflächenmodells mit dem entwickelten Multiskalenmodell verglichen werden. Das implementierte Kontinuumsmodell wird verwendet, um die initiale Fließfläche des zur Validierung dienenden 10 ppi Aluminiumschaums abzubilden. In diesem Rahmen wird die Durchführung einer Parameteridentifikation beschrieben. Anschließend wird die Implementierung des Multiskalenmodells aufbauend auf der Definition in Kapitel 5 abgeschlossen. Dazu werden die eindimensionalen, phänomenologischen Materialmodelle basierend auf den Experimenten an Einzelstegen eingeführt. Die Materialparameter der eindimensionalen Modelle werden mithilfe einer Parameteridentifikation an die experimentellen Daten angepasst und finalisieren somit das makroskopische Multiskalenmodell.

In Kapitel 8 wird das entwickelte Multiskalenmodell in drei Stufen validiert. Zunächst dienen die makroskopischen Zug- und Druckversuche als erste zwingend notwendige Bedingung, um die Richtigkeit des Multiskalenmodells zu prüfen. Die initiale Fließfläche des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaums wird zur Validierung des Fließverhaltens des Modells verwendet. Um einen besseren Vergleich herzustellen, wird die angepasste Fließfläche des Kontinuumsmodells aus Kapitel 7 herangezogen. Dieser Vergleich ist essentiell, um die Leistungsfähigkeit des Multiskalenmodells zu veranschaulichen. Des Weiteren muss das Modell in der Lage sein, die komplexe geschlossene Fließfläche von Metallschäumen abzubilden. Abschließend wird eine numerische Verifikation durchgeführt, indem das Multiskalenmodell unter inhomogener Belastung mit dem Kontinuumsmodell verglichen wird. Im Rahmen der numerischen Validierung werden zusätzlich die Bestimmung der makroskopischen plastischen Deformation im Multiskalenmodell eingeführt und die Richtigkeit durch das Kontinuumsmodell verifiziert.

Das abschließende 9. Kapitel liefert einen Überblick der vorgestellten Arbeit und fasst die Ergebnisse zusammen. Zum Abschluss der Arbeit werden weiterführende Gedanken formuliert, welche die Grundlage für weitere Forschungsinhalte bilden und somit den Anstoß für neue Projektideen basierend auf den beschriebenen Ergebnissen liefern.

2

Mechanische Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten mechanischen Konzepte, die zum Verständnis der vorliegenden Arbeit benötigt werden, zusammengefasst. Dazu wird die Kinematik des Körpers mit den entsprechenden Deformations- sowie Verzerrungsmaßen beschrieben und anhand der unterschiedlichen Konfigurationen eines Kontinuums dargestellt. Zum Verständnis der implementierten Materialmodelle für große Deformationen werden der Green-Lagrange-Verzerrungstensor und die logarithmischen Dehnungsmaße benötigt. Um die Notwendigkeit der logarithmischen Dehnungsmaße hervorzuheben, wird zusätzlich der Euler-Almansi-Verzerrungstensor eingeführt. Weiter werden die benötigten Spannungsmaße zu den jeweiligen Verzerrungen beschrieben und der Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Deformationsmaßen durch die Konstitutivgleichungen definiert. Die in diesem Kapitel beschriebenen kinematischen und konstitutiven Zusammenhänge dienen dem Verständnis des entwickelten Materialmodells. Weiter werden die Grundlagen der numerischen Methoden, die für die Implementierung verwendet wurden, beschrieben. Die eingeführten Größen und Methoden bilden nur einen kleinen Überblick über die Mechanik und dienen dem Leser zum Einstieg in die Thematik der vorliegenden Arbeit. Zur Vervollständigung der Beschreibung der Kontinuumsmechanik wird auf Greve [101] und Eringen [76] verwiesen. Ergänzende Literatur zu den eingeführten konstitutiven Zusammenhängen der Plastizität liefern unter anderem Altenbach und Öchsner [4] sowie Bonet und Wood [40]. Vertiefende Literatur der Schädigungen findet sich bei Lemaître [148] und Öchsner [170]. Die Grundlagen zur Finiten-Elemente-Methode werden detailliert bei Zienkiewicz et al. [228, 229] zusammengefasst. Zur

Vertiefung der numerischen Methoden liefern Quarteroni et al. [181, 182] eine gute Zusammenfassung.

2.1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Die Kontinuumsmechanik dient zur Beschreibung der Bewegung und der damit einhergehenden Deformation einer zusammenhängenden, kompakten Punktmenge, die einen Körper \mathcal{B} bildet. Unter der Voraussetzung, dass die Materie im Körper kontinuierlich verteilt ist, der atomare Aufbau vernachlässigt wird und die betrachtete Skala groß gegenüber den atomistischen Dimensionen ist, wird der Körper \mathcal{B} als Kontinuum bezeichnet. Zur Einführung der Grundgleichungen wird keine a priori Annahme bezüglich der Form des Körpers getroffen, sondern eine allgemeine Formulierung für beliebige Körper eingeführt. Dabei sind die einzelnen materiellen Punkte des Kontinuums Träger der Materialeigenschaften und bilden somit die kleinste darstellbare Größe innerhalb eines Kontinuums.

Die Beschreibung der Bewegung und Deformation des Körpers \mathcal{B} erfolgt durch die Kinematik. Allgemein werden zwei Konfigurationen, die Referenz- und die Momentankonfiguration, eingeführt. Die Referenzkonfiguration ist eine definierte Ausgangslage und wird meist zum Zeitpunkt t_0 typischerweise für einen unbelasteten Zustand festgelegt. Eine aktualisierte Konfiguration des Kontinuums zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > t_0$ wird als Momentankonfiguration bezeichnet. In der Referenzkonfiguration kann jeder materielle Punkt X mithilfe seines Ortsvektors \mathbf{X} eindeutig charakterisiert werden. Der Abstand vom Punkt X zu einem infinitesimal benachbarten Punkt Y in der Referenzkonfiguration wird durch ein materielles Linienelement $d\mathbf{X}$ abgebildet. Die Bewegung des gesamten Körpers und aller seiner materiellen Punkte und Linienelemente wird über die bijektive Bewegungsfunktion χ beschrieben. Diese Funktion bildet den Zusammenhang zwischen den Positionen des Punktes X in der Referenzkonfiguration und in der Momentankonfiguration. Der Ortsvektor der Momentankonfiguration wird über

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

mit der Bewegungsfunktion χ dargestellt. Die Bewegungsfunktion ist als Funktion des Ortsvektors in der Referenzkonfiguration definiert. Die inverse Funktion χ^{-1} bildet entsprechend \mathbf{x} auf \mathbf{X} mit

$$\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

ab. Somit ist eine ein-eindeutige Verknüpfung der Referenzkonfiguration mit der Momentankonfiguration gegeben, d. h. jeder Punkt der Referenzkonfiguration wird genau einem Punkt der Momentankonfiguration zugeordnet und umgekehrt. Die Differenz der

beiden Ortsvektoren von X gibt den Verschiebungsvektor \mathbf{u}

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration an. Eine graphische Verdeutlichung der beschriebenen Größen ist in Abbildung 2.1 gegeben. Der Deformationsgradient \mathbf{F} beschreibt die lokale Verformung des Körpers \mathcal{B} und wird über den Gradienten der Bewegungsfunktion $\chi(\mathbf{X}, t)$, mit

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.4)$$

definiert. Damit stellt er den Zusammenhang zwischen dem Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration und dem Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration her.

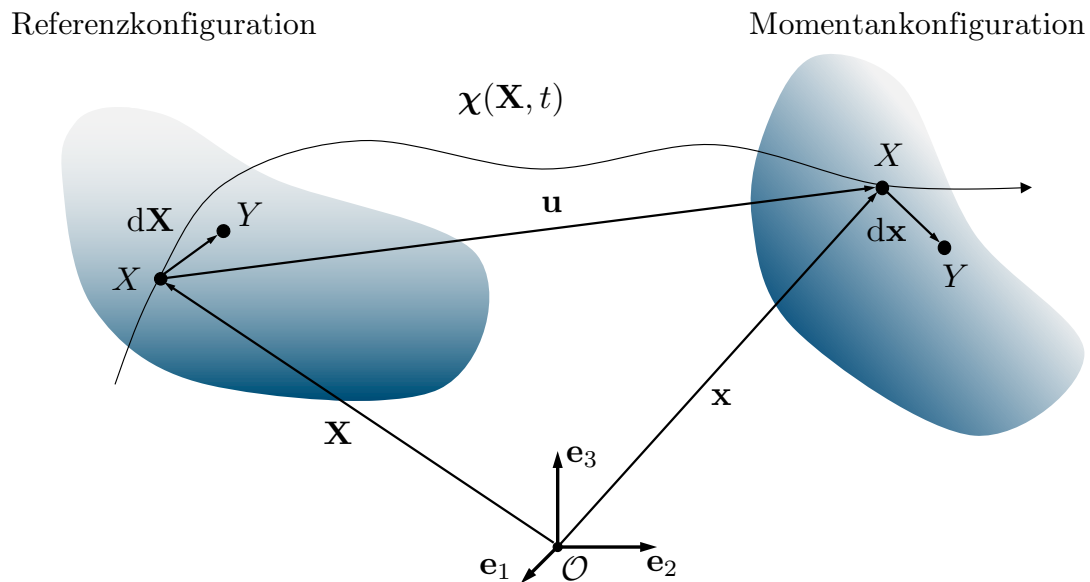


Abbildung 2.1: Kontinuumskörper \mathcal{B} in der Referenz- und Momentankonfiguration

Somit bildet der Deformationsgradient \mathbf{F} das Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration auf das Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration über

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

ab. Analog zur Abbildung materieller Punkte und Linienelemente können auch Volumenelemente von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration transportiert werden. Die Jacobi-Determinante J bildet mit dem Zusammenhang

$$dv = J dV \quad (2.6)$$

ein Volumenelement dV der Referenzkonfiguration auf ein Volumenelement dv der Momentankonfiguration ab. Die Jacobi-Determinante J des Deformationsgradienten \mathbf{F} wird durch

$$J = \det \mathbf{F} \quad (2.7)$$

definiert.

Neben der Deformation des Körpers \mathcal{B} beinhaltet der Deformationsgradient auch dessen Starrkörperrotation. Mittels der Polarzerlegung wird der Deformationsgradient mit

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.8)$$

eindeutig multiplikativ aufgeteilt. Hierbei wird die Rotation durch den eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} (mit $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ und $\det \mathbf{R} = +1$) und die Streckung durch die symmetrisch positiv definiten linken und rechten Strecktensoren \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} abgebildet. Somit eignet sich der Deformationsgradient \mathbf{F} nicht als Maß für die Formänderung, da eine Starrkörperrotation enthalten ist (vgl. Gl. (2.8)). Aus diesem Grund werden im Folgenden geeignete Maße zur Beschreibung der Formänderung in den unterschiedlichen Konfigurationen eingeführt.

Die Streckung λ eines Linienelements kann durch das Verhältnis der Längen des Linienelements in der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration als

$$\lambda = \frac{|d\mathbf{x}|}{|d\mathbf{X}|} = \sqrt{\frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \quad (2.9)$$

dargestellt werden. Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs aus Gleichung (2.5) kann die Streckung ausschließlich in Abhängigkeit von Größen der Referenzkonfiguration und des Deformationsgradienten \mathbf{F} mittels

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X})}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} = \sqrt{\frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \quad (2.10)$$

$$:= \sqrt{\frac{d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}} \quad (2.11)$$

dargestellt werden. In Gleichung (2.11) wird der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor \mathbf{C} mit

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad (2.12)$$

als Deformationsmaß der Referenzkonfiguration eingeführt. Analog kann die Streckung λ durch den inversen Zusammenhang

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

in der Momentankonfiguration dargestellt werden. Daraus ergibt sich mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{(\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x})}} = \sqrt{\frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}}} \quad (2.14)$$

$$:= \sqrt{\frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x}}} \quad (2.15)$$

die Definition des invertierten, linken Cauchy-Green-Deformationstensor \mathbf{B}^{-1} mit

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.16)$$

Somit wird der linke Cauchy-Green-Deformationstensor \mathbf{B} als

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.17)$$

definiert. In ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen haben sich Verzerrungsmaße durchgesetzt, die für den undeformierten Körper zu null werden. Der rechte und linke Cauchy-Green-Deformationstensor werden in diesem Fall zum Einheitstensor \mathbf{I} , welcher per Definition ungleich null ist. Aus diesem Grund werden Verzerrungen anstelle der Streckungen verwendet. Für die Referenzkonfiguration wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} definiert als

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.18)$$

Analog wird zur Vollständigkeit der Euler-Almansi-Verzerrungstensor über

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.19)$$

in der Momentankonfiguration eingeführt. Die Definition der beiden Verzerrungstensoren über den Deformationsgradienten \mathbf{F} ermöglicht eine mathematische Verknüpfung der Verzerrungstensoren. Hierbei wird die Überführung von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.20)$$

als push forward und die Überführung von der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration durch

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (2.21)$$

als pull back bezeichnet.

Es wird angenommen, dass ein Körper \mathcal{B} durch äußere Einflüsse von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration überführt wird. Dann werden durch Schneiden des Körpers \mathcal{B} in jedem materiellen Volumenelement ΔV die lokalen Kräfte auf der Oberfläche des Volumenelements freigelegt. Die lokale Schnittkraft ΔF wird auf die entsprechende Teilfläche ΔA bezogen. Da die Schnittkräfte durch die Kontinuitätsannahme gleichmäßig auf die Schnittflächen verteilt sind, existiert der Grenzwert für infinitesimale Flächen und definiert den Spannungsvektor \mathbf{t}_s mit

$$\mathbf{t}_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} . \quad (2.22)$$

Der Spannungszustand wird für jeden materiellen Punkt eindeutig über die Spannungsvektoren auf drei senkrecht zueinander stehenden Schnittflächen definiert und im Spannungstensor zusammengefasst. Auf die detaillierte Herleitung wird an dieser Stelle verzichtet; sie findet sich unter anderem bei Haupt [109]. Der Spannungstensor ist dabei, wie der Verzerrungstensor, ein Tensor zweiter Stufe.

Analog zur Definition unterschiedlicher Verzerrungsmaße auf den einzelnen Konfigurationen des Körpers \mathcal{B} existieren unterschiedliche Spannungsmaße auf den einzelnen Konfigurationen. Zu deren exakten Herleitung und Beschreibung wird auf Altenbach [3] und Bertram [30] verwiesen. Auf der Momentankonfiguration wird der symmetrische Cauchy-Spannungstensor \mathbf{T} definiert, der die wahren Spannungen im Körper \mathcal{B} wiedergibt. Die wahren Spannungen beziehen die in der Momentankonfiguration wirkenden Kräfte auf die deformierten Flächenelemente. Weitere Spannungsmaße werden durch Zurückführen der Flächenelemente und/oder der Kraft auf die Referenzkonfiguration mithilfe einer Transformation definiert. Ein Zurückziehen der Fläche auf die Referenzkonfiguration und Beibehalten der Kräfte der Momentankonfiguration liefert

$$\mathbf{P} = J \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T} , \quad (2.23)$$

der als erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (1. PK) definiert wird. Häufig wird der Tensor als Nominalspannungstensor bezeichnet. Der 1. PK stellt einen Zweifeldtensor dar und existiert sowohl auf der Referenzkonfiguration als auch auf der Momentankonfi-

guration. Wird anschließend der Kraftvektor auf die Referenzkonfiguration gezogen, so ergibt sich der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (2. PK) mittels

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.24)$$

der sich auf die Referenzkonfiguration bezieht. Ein Transport der Spannung von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration wird mit

$$\mathbf{T} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.25)$$

beschrieben. Eine explizite Herleitung der Transformation für die unterschiedlichen Spannungstensoren beruht auf dem Konzept der dualen Variablen und ist unter anderem bei Haupt und Tsakmakis [110] und Parisch [178] zu finden. Die formale Linearisierung der eingeführten Spannungs- und Dehnungsmaße führt für kleine Deformationen zu identischen Maßen auf allen Konfigurationen. Die Spannung für kleine Deformationen wird üblicherweise mit $\boldsymbol{\sigma}$ und die Verzerrung mit $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezeichnet.

Die eingeführten Spannungs- und Deformationsmaße bilden die Grundlage zur allgemeinen Charakterisierung des Materialverhaltens. Sie werden im Folgenden für die Entwicklung und Implementierung eines Materialmodells zur Darstellung des Verhaltens von offenporigen Metallschäumen verwendet. Ferner sind zur Charakterisierung von inelastischem Materialverhalten Annahmen bezüglich der Kinematik essentiell. Zu inelastischem Materialverhalten zählen beispielsweise plastisches oder viskoses Verhalten. Da in der vorliegenden Arbeit keine viskosen Effekte behandelt werden, wird bei der folgenden Beschreibung nur auf plastisches Verhalten eingegangen. Ähnliche Überlegungen können für jegliches inelastisches Materialverhalten angestellt werden [40, 114].

Für homogene Deformationen, wie beispielsweise den uniaxialen Zug, wird die Kinematik vereinfacht beschrieben. Dies führt zu einer eindeutigen Unterscheidung der elastischen von der inelastischen, plastischen Deformation. Abbildung 2.2 zeigt ein typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm für das plastische Materialverhalten eines Werkstoffes unter uniaxialer Zugbelastung. Bis zum Erreichen einer Fließspannung σ_F verhält sich das Material bei einer Belastung elastisch und bei Überschreiten der Fließspannung beginnt das Material plastisch zu fließen. Wird das Material im Anschluss wieder entlastet, zeigt sich eine bleibende Deformation.

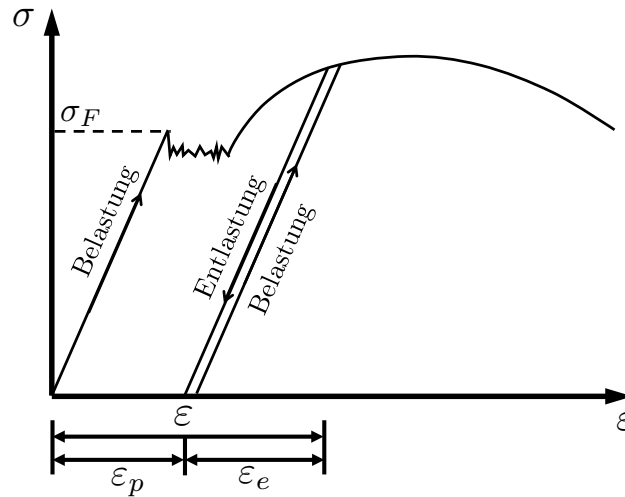


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung eines typischen Spannungs-Dehnungs-Diagramms für metallische Werkstoffe unter uniaxialer Zugbelastung

Die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kurve entspricht für die Entlastung der ursprünglichen Steigung. Die bleibende Deformation wird als plastische Dehnung ϵ_p bezeichnet. Für eindimensionale Fälle lässt sich die Dehnung ϵ additiv in einen rein elastischen Anteil ϵ_e und einen rein plastischen Anteil ϵ_p mit

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (2.26)$$

aufteilen. Diese Aussage lässt sich nicht auf beliebige inhomogene Deformationen übertragen, da eine vollständige Entlastung nicht realisierbar ist. Durch Wegnahme der von außen an den Körper angreifenden Kräfte ändert sich dessen Deformationszustand. Zusätzlich zur Änderung der Deformationen bleiben im Körper Spannungen aufgrund der Inhomogenität zurück und werden als Eigenspannungen bezeichnet. In der Kontinuumsmechanik wird der Körper durch ein Gedankenexperiment in kleine Teilstücke unterteilt und lokal entlastet. Diese lokale Entlastung führt zu einer inkompatiblen Zwischenkonfiguration (ZK). Die Kompatibilität dieser Konfiguration wird durch die Eigenspannungen im Körper gewährleistet. Die durch das Gedankenexperiment entstandene Zwischenkonfiguration kann durch die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p \quad (2.27)$$

in einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}_p beschrieben werden [145]. Der Zusammenhang der Zwischenkonfiguration mit der zuvor eingeführten Referenzkonfiguration sowie der Momentankonfiguration ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Die Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} ist nicht eindeutig. Der plastische Anteil

des Deformationsgradienten \mathbf{F}_p stellt den Transport in eine spannungsfreie Zwischenkonfiguration dar und kann mit einer beliebigen Rotation überlagert werden. Diese Überlagerung kann mathematisch mit einem orthogonalen Tensor \mathbf{Q} [31, 117, 150] beschrieben werden und führt zu

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_p. \quad (2.28)$$

Die potentielle Rotation der Zwischenkonfiguration wird als plastischer Spin bezeichnet und kann nur durch zusätzliche konstitutive Annahmen bestimmt werden [59–61].

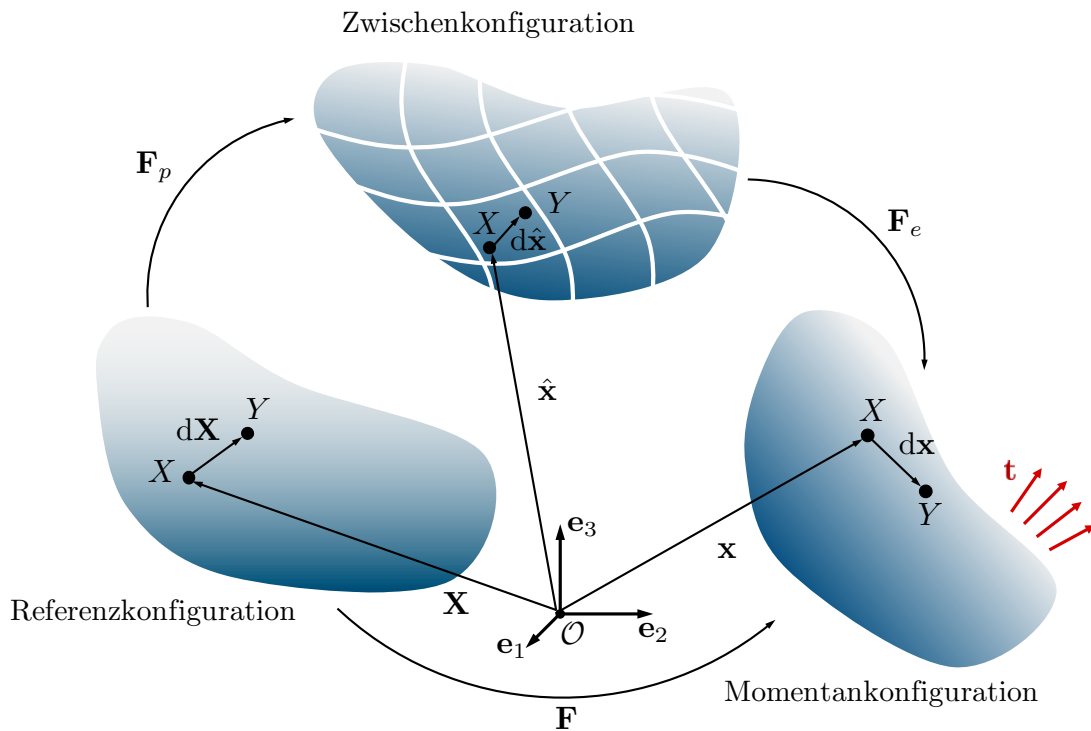


Abbildung 2.3: Darstellung der zusätzlich eingeführten inkompatiblen Zwischenkonfiguration und Zusammenhang mit der Referenz- und Momentankonfiguration zur Beschreibung von inelastischem Materialverhalten

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} kann zur Einführung des plastischen rechten Cauchy-Green-Deformationstensors

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p \quad (2.29)$$

genutzt werden. Wie der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor bezieht sich auch der plastische rechte Cauchy-Green-Deformationstensor auf die Referenzkonfiguration. Mit \mathbf{C}_p lässt sich analog zur Definition des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} der

plastische Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E}_p als

$$\mathbf{E}_p := \frac{1}{2} (\mathbf{C}_p - \mathbf{I}), \quad (2.30)$$

formulieren. Mithilfe des elastischen Anteils des Deformationsgradienten werden die Deformations- und Verzerrungstensoren im Bezug zur Momentankonfiguration dargestellt. Für den elastischen linken Cauchy-Green-Deformationstensor \mathbf{B}_e gilt

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T \quad (2.31)$$

und der elastische Euler-Almansi-Verzerrungstensor \mathbf{A}_e ergibt sich somit zu

$$\mathbf{A}_e := \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_e^{-1}). \quad (2.32)$$

Eine additive Zerlegung, wie sie im homogenen Fall in Gleichung (2.26) definiert wurde, ist weder in der Referenzkonfiguration noch in der Momentankonfiguration möglich. Analog zum Transport von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration kann der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} durch den plastischen Anteil des Deformationsgradienten \mathbf{F}_p und einen push forward auf die Zwischenkonfiguration abgebildet werden. Dabei ergibt sich auf der Zwischenkonfiguration ein Verzerrungstensor

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}, \quad (2.33)$$

der aus dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} abgeleitet ist. Das Einsetzen der Definition von \mathbf{E} und der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} führt zu

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{I} + \mathbf{I} - \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \mathbf{F}_p^{-1}). \quad (2.34)$$

Daraus resultiert eine additive Aufteilung analog zu Gleichung (2.27) in einen rein elastischen Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ und einen rein plastischen Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ mit

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (2.35)$$

in der Zwischenkonfiguration. Nur in dieser führt die additive Zerlegung zu einem rein elastischen und einem rein plastischen Verzerrungsmaß. Weder auf der Referenzkonfiguration noch auf der Momentankonfiguration kann das additive Konzept angewandt werden, um eine Aufteilung in rein elastische und rein plastische Maße zu erhalten.

Der additive Split liefert kein rein elastisches Pendant auf der Referenzkonfiguration. Durch die additive Zerlegung des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} bleiben versteckte plastische Anteile zurück. Zwar wird auf der Momentankonfiguration ein rein elastisches Verzerrungsmaß definiert, aber durch einen additiven Split verbleiben versteckte elastische Anteile in einem plastischen Verzerrungstensor auf der Momentankonfiguration zurück (vgl. Gl. (2.32)). Für eine allgemeine Charakterisierung des inelastischen Verhaltens von Kontinua wird ein multiplikativer Split des Deformationsgradienten \mathbf{F} benötigt.

Hencky-Dehnung

Zur Beschreibung beliebig großer Deformationen für eindimensionale Materialmodelle bietet die Verwendung der logarithmischen Hencky-Dehnung ε_L die Möglichkeit, einen additiven Split zu verwenden. Dazu wird die Hencky-Dehnung über den natürlichen Logarithmus der Streckung λ mit

$$\varepsilon_L = \ln(\lambda) \quad (2.36)$$

definiert. Die Einführung der logarithmischen Dehnung ermöglicht die Anwendung der additiven Zerlegung, wie sie für kleine Deformationen im eindimensionalen Fall definiert wurde, auf beliebig große Deformationen. Eine detaillierte Beschreibung der Herleitung und weiterer Verwendungsbeispiele wird bei Bonet und Wood [40] gegeben. Interpretieren lässt sich die logarithmische Dehnung im eindimensionalen Fall als wahre Dehnung. D. h. sie stellt einen Bezug zur aktuellen Länge des durch eine Krafteinwirkung deformierten Körpers her. Der Zusammenhang der logarithmischen Hencky-Dehnung zur Ingenieursdehnung ε , die für den eindimensionalen Fall als Längenänderung ΔL pro Ausgangslänge L_0

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.37)$$

definiert ist, wird über

$$\varepsilon_L = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.38)$$

gegeben.

2.2 Elasto-plastisches Materialverhalten und Schädigung

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ist abhängig von der Beschaffenheit des Körpers und führt zu materialabhängigen Gleichungen. Zum Verständnis der Arbeit wird kurz auf das elastische Materialverhalten und die damit verbundenen konstitutiven Zusammenhänge eingegangen. Anschließend werden die grundlegenden Konzepte der Plastizität und der Schädigung anhand kleiner Deformationen vorgestellt. Das makroskopische Modell zur Beschreibung der Fließfläche von Schäumen ist für kleine Deformationen implementiert. Für das mikrostruktur-basierte Modell wird eine Formulierung für große Deformationen implementiert. Dieses Modell wird mit logarithmischen Dehnungen umgesetzt. Aus diesem Grund lässt sich die Beschreibung der Modelle für kleine Deformationen auf die implementierten Materialmodelle anwenden.

2.2.1 Elasto-plastisches Materialverhalten

Für die vorliegende Arbeit zur Charakterisierung von Metallschäumen werden elastisches und elasto-plastisches Verhalten sowie ein Schädigungsansatz vorgestellt. Für einen vollständigen Überblick über alle Materialklassen wird auf die Literatur verwiesen [93, 208, 219]. Die Grundlage der Beschreibung bildet das elastische Materialverhalten (s. Abb. 2.4 (a)). Im eindimensionalen Fall wird zwischen der Spannung σ und der Dehnung ε ein linearer Zusammenhang mit

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.39)$$

angenommen. Dieser wird über den E-Modul E abgebildet, der die Steigung der Geraden im Diagramm angibt (s. Abb. 2.4 (a)). Für den dreidimensionalen Fall lässt sich Gleichung (2.39) zum verallgemeinerten Hookeschen Gesetz als Tensorgleichung zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.40)$$

erweitern, wobei $\overset{4}{\mathbb{C}}$ als Tensor vierter Stufe die elastischen Eigenschaften des Körpers widerspiegelt.

Durch die Annahme von Symmetrie und Isotropie wird das verallgemeinerte Hookesche Gesetz durch die Lamé-Konstanten μ und λ beschrieben als

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad (2.41)$$

mit $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$ als Spur des Dehnungstensors. Die Lamé-Konstanten μ und λ sind Materialkonstanten, die im Rahmen der Kontinuumsmechanik zur Beschreibung von isotropem Materialverhalten verwendet werden. Alternativ werden weitere Elastizitätskonstanten verwendet, wie beispielsweise der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν . Diese stellen keine unabhängigen Größen dar, sondern werden durch die Kombination der Lamé-Konstanten berechnet [4].

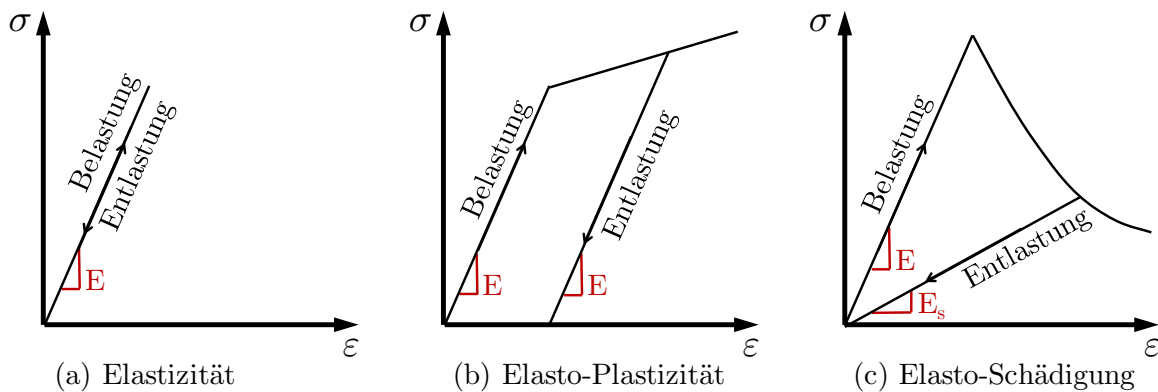


Abbildung 2.4: Idealisertes elastisches Materialverhalten (a), elasto-plastisches Materialverhalten (b) und elastisches Materialverhalten mit Schädigung (c)

Für die Einführung der idealisierten Materialmodelle der Plastizität und Schädigung bilden die in Abbildung 2.4 (b) und Abbildung 2.4 (c) dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagramme die Grundlage. Ab einer gewissen Spannung liegt kein lineares Verhalten vor, sondern die Beschreibung der Spannung in Abhängigkeit der Dehnung ist nichtlinear. Für die Plastizität folgt nach Erreichen der Fließspannung σ_F ein verfestigendes Verhalten. Einen Sonderfall stellt eine konstante Spannung nach Erreichen der Fließspannung dar, was als ideal-plastisches Verhalten bezeichnet wird.

Der in Kapitel 2.1 eingeführte additive Split der Dehnung, der aus uniaxialen Deformationen motiviert wurde, wird im Folgenden für die mehraxiale Verallgemeinerung angewandt. Da die Entwicklung des Multiskalenmodells für beliebig große Deformationen erfolgt, wird die Charakterisierung des Materialverhaltens mithilfe der vorgestellten logarithmischen Hencky-Dehnung durchgeführt (vgl. Bonet und Wood [40]). Das ermöglicht eine analoge Formulierung zu der hier eingeführten Beschreibung und die

Verwendung des additiven Splits. Die Implementierung des zur Validierung dienenden Kontinuumsmodells basiert auf der Annahme von kleinen Deformationen. Das verallgemeinerte Hookesche Gesetz aus Gleichung (2.40) liefert unter Verwendung des additiven Splits des Dehnungstensors den Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}_e = \overset{4}{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (2.42)$$

zwischen der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und der gesamten Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$, wobei $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ den plastischen Anteil der Dehnung dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird bei der Darstellung der Plastizität nach Prandtl und Reuss [179, 188] vorgegangen. Für die Beschreibung der Plastizität wird eine Fließspannung σ_F benötigt, die den Beginn des plastischen Bereiches definiert. Hierzu wird eine Fließfunktion F mit

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_F = 0 \quad (2.43)$$

eingeführt, die im mehrdimensionalen Fall den Spannungszustand des Materials beschreibt, bei dem plastisches Fließen einsetzt. Es wird eine äquivalente Spannung σ_{eq} definiert, die mit einer Fließspannung σ_F aus dem uniaxialen Versuch verglichen wird. Erreicht die äquivalente Spannung die Fließspannung, beginnt das Material zu plastifizieren. Um die Fließfunktion im Spannungsraum darzustellen, wird die Fließfunktion in Abhängigkeit der Hauptspannungen definiert. Diese stellen die Eigenwerte des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ dar, die durch Lösen des Gleichungssystems

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_i \mathbf{I}) = 0 \quad (2.44)$$

berechnet werden. Mithilfe der Hauptspannungen σ_I , σ_{II} und σ_{III} wird die Fließfunktion im Hauptspannungsraum dargestellt. Die entstandene Geometrie wird als Fließfläche bezeichnet. Die Hauptspannungen sind eine Kategorie von Invarianten des Spannungstensors und sind unabhängig vom Bezugssystem. Die Hauptspannungen sind nicht die einzigen invarianten Größen, die zur Charakterisierung der Fließfläche verwendet werden. Für das Aufstellen der Fließfunktion werden, wie durch die Theorie isotroper Tensorfunktionen [109] beschrieben, drei beliebige unabhängige Invarianten benötigt. Die am häufigsten verwendeten Invarianten des Spannungstensors zur Beschreibung der Fließfläche sind zum einen die erste Hauptinvariante I_1 , die mit

$$I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.45)$$

definiert wird und zum anderen die zweite Hauptinvariante J_2 sowie die dritte Hauptinvariante J_3 des Spannungsdeviators $\boldsymbol{\sigma}^D$. Allgemein kennzeichnet I_* eine Invariante des

Spannungstensors und J_* eine Invariante des Spannungsdeviators. Als Spannungsdeviator wird dabei der Spannungsanteil bezeichnet, welcher vom hydrostatischen Zustand abweicht. Die mittlere Normalspannung σ_m ist als

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (2.46)$$

definiert und gibt den hydrostatischen Anteil des Spannungstensors an. Somit wird der Spannungsdeviator über

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_m \quad (2.47)$$

beschrieben. Daraus ergibt sich die zweite deviatorische Invariante des Spannungstensors zu

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = -I_2(\boldsymbol{\sigma}^D) = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \quad (2.48)$$

aus dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors und kann über die Hauptspannungen ausgedrückt werden. Die dritte deviatorische Hauptinvariante des Spannungstensors wird über den Zusammenhang

$$J_3(\boldsymbol{\sigma}) = -I_3(\boldsymbol{\sigma}^D) = \det(\boldsymbol{\sigma}^D) = (\sigma_I - \sigma_m)(\sigma_{II} - \sigma_m)(\sigma_{III} - \sigma_m) \quad (2.49)$$

definiert. Somit lässt sich der elastische Bereich durch das Innere der Fließfläche

$$F(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = F(I_1, J_2, J_3) < 0 \quad (2.50)$$

in Abhängigkeit der Invarianten des Spannungstensors eingrenzen. Solange $F < 0$ gilt, liegt elastisches Materialverhalten vor und erst bei Erreichen der Fließgrenze für $F = 0$ liegt Plastizität vor. Werte von $F > 0$ sind hingegen unzulässig. Eine dreidimensionale Veranschaulichung der Fließfunktionen findet häufig im Hauptspannungsraum (s. Abb. 2.5 (a) am Beispiel einer von Mises Fließfläche [164, 165]) statt. Die geläufigsten zweidimensionalen Darstellungen der Fließfläche resultieren aus Schnitten im Hauptspannungsraum.

Diese Schnitte können abhängig von der hydrostatischen Achse (s. Abb. 2.5 (a), Cyan) definiert werden. Die hydrostatische Achse bildet die Hauptdiagonale im Spannungsraum und wird aus allen Punkten, für die alle drei Hauptspannungen identisch sind, zusammengesetzt. Die Ebene normal zur hydrostatischen Achse wird als Oktaederebene bezeichnet (rotes Dreieck in Abb. 2.5 (a)). Sie wird meist als einzelner Schnitt durch

die Fließfläche dargestellt (s. Abb. 2.5 (b)).

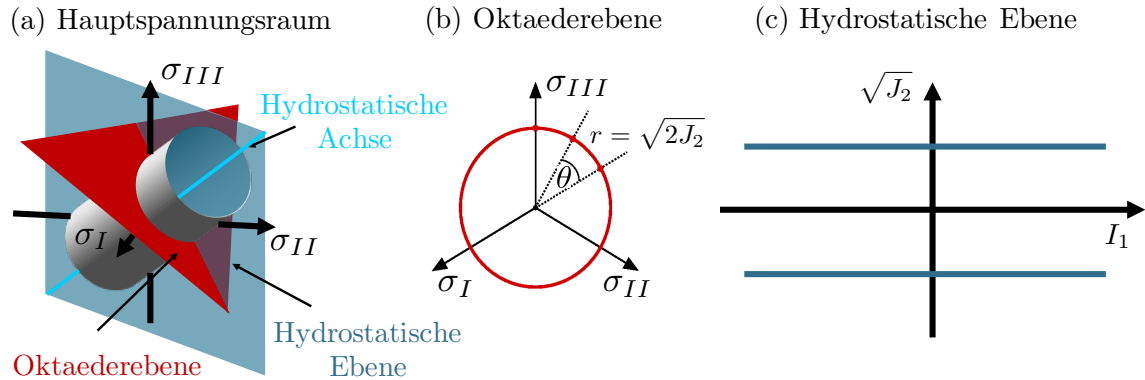


Abbildung 2.5: Darstellung der von Mises Fließfläche [164, 165] im Hauptspannungsraum (a), der Oktaederebene (b) und der Hydrostatischen Ebene (c)

Zur Beschreibung der Fließfläche in der Oktaederebene werden die Lode-Koordinaten verwendet [4]. Diese entsprechen einer Darstellung in Polarkoordinaten und werden durch den Lode-Winkel θ

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{\sqrt{27}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (2.51)$$

und die radiale Koordinate r

$$r = \sqrt{2J_2} \quad (2.52)$$

beschrieben.

Die hydrostatische Ebene ist orthogonal zur Oktaederebene. Sie enthält die hydrostatische Achse als horizontale Achse, über die die Wurzel der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators aufgetragen wird. Zu beachten ist, dass die Oktaederebene keine Veranschaulichung der Fließfläche bezüglich des hydrostatischen Spannungszustandes und die hydrostatische Ebene keine Veranschaulichung bezüglich der Symmetrie um die hydrostatische Achse liefert.

Zur Beschreibung von verfestigendem Verhalten der Fließfunktion wird die äquivalente Spannung eines beliebigen Spannungszustands mit einer Fließspannung verglichen. Durch Anpassung der äquivalenten Spannung bzw. der Aufstellung einer Funktion für die Fließspannung kann die beliebige Entwicklung der Fließfläche dargestellt werden [109]. Im Allgemeinen wird die Verfestigung in unterschiedliche Kategorien unterteilt:

- die isotrope Verfestigung, die eine Vergrößerung der Fließfläche ähnlich zur Ausgangsfließfläche beschreibt;
- die kinematische Verfestigung, die nur die Lage der Fließfläche im Spannungsraum beeinflusst;
- die anisotrope Verfestigung, die eine beliebige Vergrößerung der Fließfläche beschreibt.

Die unterschiedlichen Arten der Verfestigung sind in Abbildung 2.6 in der Oktaederebene dargestellt. Die weitere Modellentwicklung beschränkt sich auf die isotrope Verfestigung und damit erfolgt die Beschreibung der Fließfunktion in Abhängigkeit der initialen Fließspannung σ_F und der Verfestigungsvariablen α .

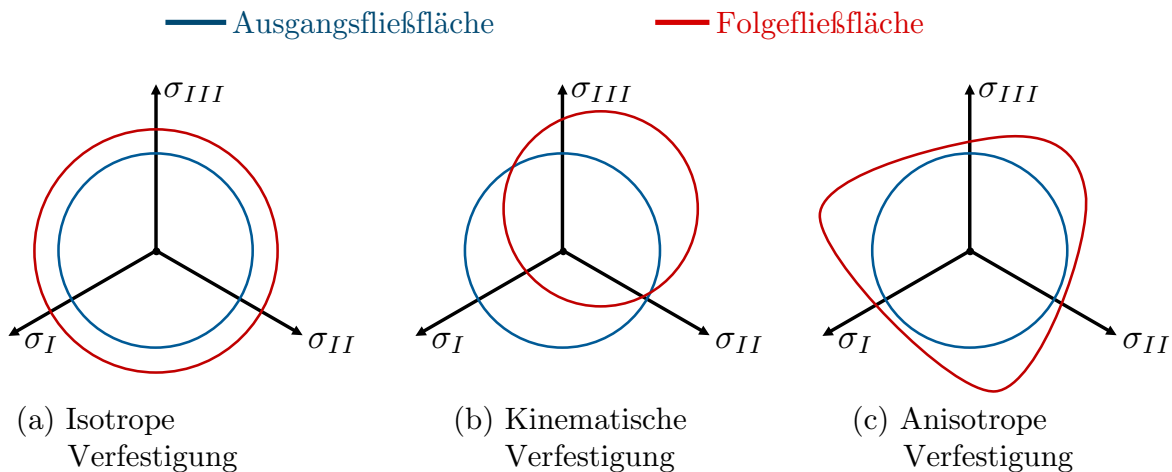


Abbildung 2.6: Darstellung der unterschiedlichen Verfestigungsarten in der Oktaederebene: Isotrope Verfestigung (a), kinematische Verfestigung (b), anisotrope Verfestigung (c)

Somit hängt die Fließfunktion von den beiden Größen und dem Spannungstensor ab und wird über

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_{eq} - k_F(\sigma_F, \alpha) \quad (2.53)$$

definiert. Diese Funktion beschreibt die Evolution der Fließfläche für eine isotrope Verfestigung, wie sie in Abbildung 2.6 (a) dargestellt ist.

Zusätzlich zur Fließfunktion und der Verfestigung wird eine Fließregel benötigt, die die Richtung des plastischen Fließens angibt. Es wird zwischen assoziiertem und nicht-assoziertem Fließen unterschieden. Für die Beschreibung der Fließrichtung wird das Fließpotential G

$$G(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}) = G(I_1, J_2, J_3) \quad (2.54)$$

als Funktion der Invarianten des Spannungstensors eingeführt. Im Fall von assoziiertem Fließen sind Fließpotential und Fließfunktion identisch. Die Fließregel dient der Bestimmung der plastischen Dehnrate $\dot{\epsilon}_p$, welche coaxial zum Normalenvektor auf der durch das Fließpotential gebildeten Fläche steht. Für den Sonderfall des assoziierten Fließens steht die plastische Dehnrate somit coaxial zum Normalenvektor der Fließfläche, da Fließfunktion und Fließpotential identisch sind. Abbildung 2.7 zeigt den Unterschied beispielhaft für eine rotationssymmetrische Fließfläche um die hydrostatische Achse (z. B. von Mises Fließfläche [164, 165]) und ein beliebiges Fließpotential in der Oktaederebene. Allgemein wird die plastische Dehnrate über den funktionalen Zusammenhang

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (2.55)$$

bestimmt. Der plastische Multiplikator γ dient dabei der Skalierung der plastischen Dehnrate. Die Richtung des Normalenvektors auf der Oberfläche des Fließpotentials wird durch die Ableitung des Fließpotentials nach der Spannung bestimmt. Der plastische Multiplikator dient weiter zur Beschreibung der Verfestigungsvariablen α (s. Tab. 2.1).

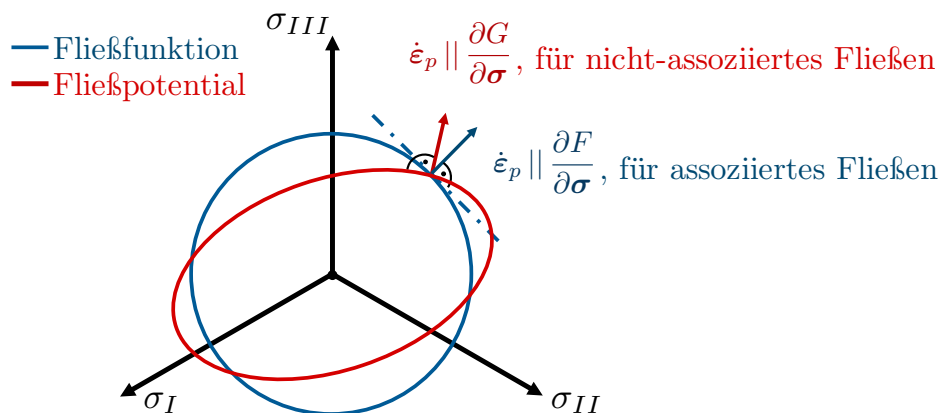


Abbildung 2.7: Darstellung der Unterschiede zwischen assoziiertem und nicht-assoziertem Fließen am Beispiel einer rotationssymmetrischen Fließfläche [164, 165] (blau) um die hydrostatische Achse und einem beliebigen Fließpotential (rot)

Zur Beschreibung der Plastizität werden in Tabelle 2.1 die notwendigen Zusammenhänge zur analytischen Beschreibung der Plastizität zusammengefasst. Als zusätzliche Kriterien werden die Kuhn-Tucker-Bedingung [143, 144] und die Konsistenzbedingung [178] formuliert. Die Kuhn-Tucker-Bedingung beschreibt die notwendigen Nebenbedingungen, die für die Plastizität gelten. So kann der plastische Multiplikator γ niemals kleiner als null und die Fließfunktion F niemals größer als null sein. Das Produkt aus plastischem Multiplikator und Fließfunktion muss immer null sein, da im elastischen Bereich für $F \leq 0$ der plastische Multiplikator null sein muss und im plastischen Bereich die Fließfunktion null ist. Zur Ermittlung des plastischen Multiplikators dient die Konsistenzbedingung. Sie beinhaltet, dass ein auf der Fließfläche befindlicher Spannungspunkt auf dieser bleibt und bei Entlastung der Spannungspunkt ins Innere der Fließfläche, sprich in den elastischen Bereich, gelangt. Zur numerischen Umsetzung wird ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren angewandt. Dabei wird in einem rein elastischen Schritt eine Trial-Spannung und in einem iterativen Prozess die plastische Dehnung bestimmt, wie bei Simo [196] beschrieben.

Tabelle 2.1: Gleichungen zur Beschreibung der Plastizität für beliebige Fließflächen und allgemeine Fließrichtung

Allgemeine 3D Beschreibung der Plastizität für kleine Deformationen		
Verzerrungen	$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$	(2.56)
Hookesches Gesetz	$\boldsymbol{\sigma} = \overset{4}{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)$	(2.57)
Fließfunktion	$F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_{eq,F} - k_F(\sigma_F, \alpha)$	(2.58)
Fließpotential	$G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = \sigma_{eq,G} - k_G(\sigma_F, \alpha)$	(2.59)
Fließregel	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \gamma \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$	(2.60)
Evolution der Verfestigung	$\dot{\alpha} = \gamma \frac{\partial G}{\partial \alpha}$	(2.61)
Kuhn-Tucker-Bedingung	$\gamma \geq 0; F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0; \gamma F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$	(2.62)
Konsistenzbedingung	$\gamma \dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$ für $F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$	(2.63)

2.2.2 Schädigung

Eine Vielzahl an Werkstoffen zeigt eine deutliche Abnahme der Festigkeit infolge von Belastung, Verformung oder Alterung. Dieser physikalische Prozess wird als Schädigung bezeichnet [137, 148]. Abbildung 2.4 (c) zeigt einen beispielhaften Verlauf für eine uniaxiale Belastung und die damit einhergehende Schädigung des Materials. Zur idealisierten Beschreibung von Schädigung wird ein skalarer Schädigungsparameter d eingeführt, der für das ungeschädigte Material null ist und im Laufe der Schädigung gegen den Wert $d = 1$ anwächst. Der Wert $d = 1$ beschreibt ein vollständig geschädigtes Material. Die Charakterisierung des Schädigungsverhaltens kann allgemein für dreidimensionale Spannungszustände durchgeführt werden und wird im Folgenden mit dem Konzept effektiver Spannungen beschrieben, welches über einen eindimensionalen Spannungszustand motiviert wird. Hierzu wird die Spannung nicht als Kraft pro Querschnittsfläche, sondern als Kraft pro tragender Querschnittsfläche bestimmt. Abbildung 2.8 veranschaulicht das Konzept schematisch und verdeutlicht somit die Abnahme der tragenden Querschnittsfläche durch die Bildung von Mikrorissen und Mikroporen eines Werkstoffs unter Belastung.

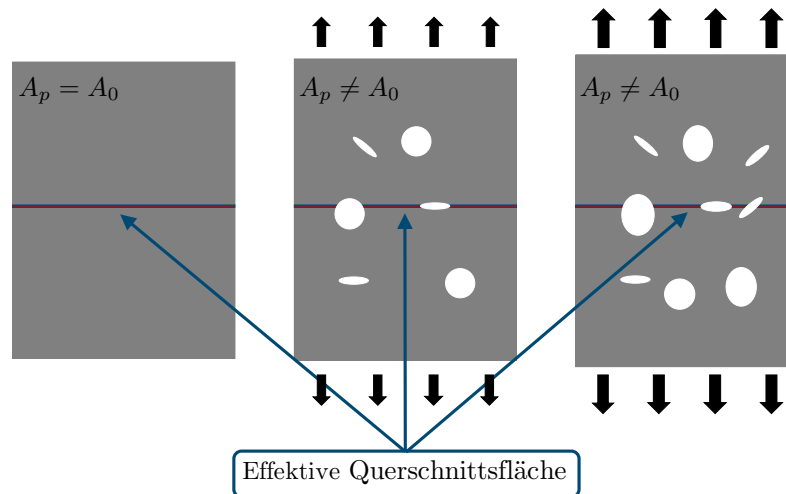


Abbildung 2.8: Konzept der effektiven Spannung am Beispiel der Entwicklung der effektiven Querschnittsfläche durch Bildung von Mikroporen und Mikrorissen

Bezogen auf die Beschreibung der Nominalspannung σ für die Referenzkonfiguration und somit der Ausgangsfläche A_0 kann die Spannung für den uniaxialen Fall mit

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (2.64)$$

beschrieben werden. Die effektive Spannung $\tilde{\sigma}$ berechnet sich mit

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A_0 - A_p} = \frac{F}{A_0 \left(1 - \frac{A_p}{A_0}\right)} = \frac{F}{A_0 (1 - d)} \quad (2.65)$$

in Abhängigkeit der Querschnittsfläche A_p der durch die Schäden entstandenen Mikroporen. Mithilfe dieses Konzepts wird der Schädigungsparameter über den Quotienten aus der geschädigten Fläche und der Ausgangsfläche bestimmt. Da die Fläche der Mikroporen maximal die Ausgangsfläche des gesamten Körpers erreicht, ist das Maximum des Schädigungsparameters $d_{max} = 1$. Die Berechnung des Verzerrungszustands über die effektive Spannung liefert die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{1}{E} \frac{\sigma}{(1 - d)} \quad (2.66)$$

in Abhängigkeit des Schädigungsparameters. Daraus folgt mit

$$\sigma = (1 - d) E \varepsilon \quad (2.67)$$

das Hookesche Gesetz für die Modellierung des Schädigungsverhalten. Dieses entspricht der Beschreibung des intakten Materials, welches die ursprünglichen Materialeigenschaften besitzt. Das beschriebene Konzept kann entsprechend für den mehrdimensionalen Spannungszustand als

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) f(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.68)$$

mit dem beliebigen Elastizitätsgesetz $f(\boldsymbol{\varepsilon})$ definiert werden. Dabei ist die Annahme einer isotropen Schädigung getroffen. Für eine allgemeine Beschreibung muss die skalarwertige Schädigungsvariable durch einen Schädigungstensor vierter Stufe ersetzt werden. Da es sich bei der Schädigungsvariablen um eine innere Größe handelt, muss deren Evolution mit entsprechenden mathematischen Gleichungen beschrieben werden. Zunächst wird eine initiale Schädigungsbedingung formuliert, die den Beginn der Schädigung angibt. Analog zur Plastizität wird eine Schädigungsspannung bzw. eine Vergleichsschädigungsspannung für den mehraxialen Belastungsfall benötigt. Es wird eine Schädigungsfläche F_d definiert, für die im Falle der Schädigung $F_d = 0$ gilt. Werte von $F_d < 0$ beschreiben den elastischen Bereich des Materials. Bei Erreichen der Schädigungsspannung wird F_d zu Null und das Material beginnt zu schädigen. Das in dieser Arbeit verwendete Modell zur Beschreibung duktiler Schädigung, dessen Hauptbestandteil das beschriebene Konzept effektiver Spannungen ist, basiert auf den Ideen von Lemaître [146–149]. Das Einsetzen der Schädigung wird gleichgesetzt mit

dem Beginn der Plastifizierung. Die Fließfläche und die Schädigungsfläche stimmen überein und die Evolution der Schädigungsvariablen wird über den plastischen Multiplikator definiert. Tabelle 2.2 fasst die Grundgleichungen der duktilen Schädigung nach Lemaître [146, 147] zusammen. Dabei wird die Evolution der Schädigungsvariablen über Gleichung (2.73) beschrieben. Die zusätzlichen Parameter s , r und Y dienen der Beschreibung der Schädigungsevolution, wobei der in Gleichung (2.74) angegebene Parameter Y der Änderung der inneren Energiedichte durch das Schädigungswachstum bei konstanter Belastung entspricht. Die Parameter s und r sind phänomenologische Parameter, die zur Anpassung der Schädigungsevolution unterschiedlicher Materialien dienen. Vertiefende Informationen zur Schädigung, die über die benötigten Informationen zum Verständnis dieser Arbeit hinausgehen, finden sich beispielweise bei Krajcinovic et al. [137, 138] und Kachanov [135].

Tabelle 2.2: Grundgleichungen des Schädigungsmodells nach Lemaître [146, 147] für isotrope Verfestigung für den eindimensionalen Fall

1D Schädigungsmodell nach Lemaître [146, 147] für duktile Schädigung		
Hookesches Gesetz	$\sigma = (1 - d) E (\varepsilon - \varepsilon_p)$	(2.69)
Fließfunktion	$F = \frac{\sigma_{eq}}{(1 - d)} - k(\alpha)$	(2.70)
Fließregel	$\dot{\varepsilon}_p = \gamma \frac{\text{sgn}(\sigma)}{(1 - d)}$	(2.71)
Evolution der Verfestigung	$\dot{\alpha} = \gamma$	(2.72)
Evolution des Schädigungsparameters	$\dot{d} = \frac{\gamma}{(1 - d)} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s$	(2.73)
	mit $Y = -\frac{\sigma^2}{2E(1 - d)^2}$	(2.74)

2.3 Numerische Grundlagen

2.3.1 Finite-Elemente-Methode

In der vorliegenden Arbeit wird das entwickelte Materialmodell zur Charakterisierung des Materialverhaltens von Metallschäumen im Open-Source-Programm FEAPTM (*Finite Element Analysis Program*) implementiert. Eine detaillierte Beschreibung des Programms ist in der Dokumentation der Entwickler gegeben [201–203]. Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist ein ursprünglich zur Lösung von strukturmechanischen Problemen entwickeltes numerisches Verfahren, das heute vor allem in den Natur- und Ingenieurwissenschaften eingesetzt wird. Die FEM dient in erster Linie dem Lösen partieller, zeit- und ortsabhängiger Differentialgleichungen. Aufgrund ihrer Vielseitigkeit, der Möglichkeit der freien Unterteilung des Lösungsgebietes sowie der Option, beliebige Geometrien zu berechnen, ist die FEM bis heute eines der am häufigsten verwendeten Tools im Ingenieursalltag [134]. Die freie Unterteilung des Lösungsgebietes erfolgt in endlich viele Teilgebiete, die sogenannten finiten Elemente. Das allgemeine Vorgehen im Rahmen der FEM ist für die unterschiedlichen Anwendungsfälle identisch. Zunächst wird eine Differentialgleichung (DGL) aufgestellt, die es zu lösen gilt. Im Anschluss wird aus der DGL die schwache Form berechnet. Die DGL wird mit einer Testfunktion multipliziert und anschließend wird über das gesamte Gebiet des Körpers integriert. Die örtliche Diskretisierung des Körpers entspricht einer Zerlegung des gesamten Gebiets in n Teilgebiete. Mathematisch entspricht die örtliche Diskretisierung einer Überführung der integralen schwachen Form in eine Summe über alle Teilgebiete. Für die einzelnen Teilgebiete wird die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}^e gebildet. Die einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen werden zur Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} assembliert. Die Berücksichtigung der Randbedingungen erfolgt im Vektor \mathbf{F}_r . Die Multiplikation der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} mit dem Lösungsvektor \mathbf{u} muss den Randbedingungen folgen und ergibt mit

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_r \quad (2.75)$$

das zu lösende Gleichungssystem. Der Lösungsvektor wird durch Lösen des Gleichungssystems bestimmt. Die Lösung kann entweder direkt durch Invertieren der Systemsteifigkeitsmatrix oder alternativ durch iterative Verfahren und eine damit verbundene Abschätzung der Lösung erfolgen. In der vorliegenden Arbeit wird die FE-Software FEAPTM verwendet. Da alle erforderlichen Schritte zur Verwendung der FEM im Programm integriert sind und die Nutzung im Rahmen des zu entwickelnden Materialmodells auf die Implementierung eines Materialmodells auf der Ebene der Integrationspunkte

bzw. der Elemente beschränkt ist, wird an dieser Stelle für eine detailliertere Beschreibung auf Fritzen [86] und Rust [190] verwiesen. Kern der FEM im Bereich der Mechanik ist die lokale Form der Impulsbilanz, deren Herleitung unter anderem bei Mase [153] und Altenbach [5] zu finden ist. Für den stationären Fall ergibt sich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.76)$$

mit der Fernwirkungskraft $\rho \mathbf{b}$ und der Divergenz des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$. Zunächst wird die lokale Form der Impulsbilanz mit der Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert und anschließend wird über das gesamte Gebiet integriert

$$\int_V \delta \mathbf{u} \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV = 0. \quad (2.77)$$

Die Testfunktionen entsprechen virtuellen Verschiebungen und somit entspricht die schwache Form der virtuellen Arbeit [229]. Zusätzlich wird die Produktregel der Divergenz mit

$$\operatorname{div} (a \mathbf{B}) = \operatorname{Grad} a \cdot \mathbf{B} + a \operatorname{div} \mathbf{B} \quad (2.78)$$

für ein allgemeines Skalarfeld a und ein Vektorfeld \mathbf{B} benötigt. Wird der Gaußsche Integralsatz berücksichtigt, vereinfacht sich die schwache Form der Impulsbilanz zu

$$\int_V \operatorname{Grad} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA. \quad (2.79)$$

Zur Lösung der schwachen Form der Impulsbilanz von strukturmechanischen Problemen von Festkörpern werden weitere Annahmen getroffen. Unter Ausnutzen der Symmetrie des Spannungstensors und unter Berücksichtigung der Definition des Verzerrungstensors vereinfacht sich die schwache Form der Impulsbilanz zu

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} dA. \quad (2.80)$$

Die Lösung der schwachen Form erfolgt durch die Diskretisierung in einzelne Teilgebiete (finite Elemente) und die damit verbundene numerische Integration. Auf Details zur Diskretisierung, wie sie bei Zienkiewicz [229] gegeben sind, wird an dieser Stelle verzichtet. Damit beschränkt sich die Lösung für den Anwender auf die Auswertung der Konstitutivgleichung an jedem einzelnen Integrationspunkt und der Bestimmung der Steifigkeit als Ableitung der Spannung nach der Dehnung. Vertiefende Informationen

zur Bestimmung der Element- und Gesamtsteifigkeitsmatrix sind bei Zienkiewicz [229] und in der Dokumentation von FEAPTM [201–203] gegeben.

2.3.2 Numerische Methoden zur Lösung von Evolutionsgleichungen

Die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen bezüglich der Plastizität bzw. der Schädigung werden durch Differentialgleichungen 1. Ordnung beschrieben. Zur numerischen Lösung solcher Differentialgleichungen existieren zahlreiche Methoden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll nur eine Auswahl an Methoden vorgestellt werden und nicht genauer auf weitere Verfahren eingegangen werden. Die numerische Bestimmung der Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung erfolgt meist durch Diskretisierung und Lösen der entstandenen Gleichung. Da im Rahmen der Plastizität und der Schädigung mindestens eine Evolutionsgleichung als Differentialgleichung 1. Ordnung und die Fließbedingung als Gleichung gelöst werden müssen, entsteht ein lineares Gleichungssystem. Es existieren unterschiedliche Methoden zur Lösung des Gleichungssystems, wobei im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur das Newton-Raphson-Verfahren beschrieben wird. Eine allgemeine Differentialgleichung 1. Ordnung der Form

$$\dot{x} = f(t, x_t) \quad (2.81)$$

kann durch eine Taylorreihe angenähert werden. Das Abbrechen der Taylorreihe nach dem ersten Glied liefert

$$\dot{x} = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t} \quad (2.82)$$

mit $x_t = x(t)$, $x_{t+1} = x(t + \Delta t)$ der Zeitschrittweite Δt und wird als explizites Euler-Verfahren bezeichnet. Vorgestellt wurde das Verfahren von Leonhard Euler im Jahr 1792 [78]. Nach Einsetzen von Gleichung (2.82) in Gleichung (2.81) und Umsortieren der Gleichung ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem mit

$$0 = x_t - x_{t+1} + \Delta t f(t, x_t). \quad (2.83)$$

In Kombination mit weiteren benötigten Evolutionsgleichungen und der Fließbedingung entsteht ein Gleichungssystem, welches unter Verwendung des Mehrdimensionalen-Newton-Verfahrens gelöst wird [169, 184]. Das zu lösende Gleichungssystem wird be-

geschrieben durch den Vektor $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ und der Verfahrensvorschrift

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_t} (\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = 0, \quad (2.84)$$

die sich aus allen k Gleichungen zusammensetzt und abhängig vom k -dimensionalen Vektor \mathbf{x} ist. Aus der Verfahrensvorschrift wird die Fixpunktiteration als

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{x}_t - \mathbf{J}(\mathbf{x}_t)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) \quad (2.85)$$

definiert, mit der Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ als Berechnungsvorschrift für jeden Iterationsschritt. Die Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ ist allgemein definiert als Matrix der partiellen Ableitungen der Funktion $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ nach dem Vektor \mathbf{x} mit

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \frac{\partial g_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_k} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

und wird im Rahmen des Mehrdimensionalen-Newton-Verfahrens an der Stelle \mathbf{x}_t ausgewertet. Da die Berechnung der Inversen einer Matrix numerisch aufwendig und ineffizient ist, wird stattdessen das Gleichungssystem

$$-\mathbf{J}(\mathbf{x}_t) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_t) \quad (2.87)$$

mit

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t \quad (2.88)$$

gelöst. Eine Möglichkeit, das entstandene lineare Gleichungssystem zu lösen, bietet das Gaußsche Eliminationsverfahren. Das Verfahren wird für lineare Gleichungssysteme der Form

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{a} \quad (2.89)$$

angewandt. Die Grundidee des Verfahrens basiert auf der Durchführung einer Vorwärtselimination, bei der die Gleichung (2.89) durch elementare Zeilenumformungen

in

$$\mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.90)$$

überführt wird. Dabei bleibt die Lösung \mathbf{x} unverändert und \mathbf{B} ist eine $k \times k$ Dreiecksmatrix der Form

$$\mathbf{B} \cong \begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} & \cdots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix}. \quad (2.91)$$

Die Lösung \mathbf{x} wird durch Rückwärtssubstitution mit

$$x_k = \frac{b_k}{B_{kk}} \quad (2.92)$$

und

$$x_i = \frac{1}{B_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^k B_{ij} x_j \right) \quad i = k, k-1, \dots, 1 \quad (2.93)$$

bestimmt. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Methoden stellen eine Auswahl an Möglichkeiten dar, die beschriebenen Probleme numerisch zu lösen. Detaillierte Beschreibungen sind bei Simo [196] gegeben. Alternative Methoden sind bei Schwarz und Klöckner [194] sowie bei Hoffman [113] zu finden.

3

Charakterisierung von Metallschäumen

Metallschäume gehören wegen ihrer hierarchischen Struktur zu den mikroheterogenen Materialien. Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden die einzelnen hierarchischen Ebenen separat betrachtet. Im Folgenden werden grundlegende Eigenschaften sowie charakteristische Werte von offenporigen Schäumen eingeführt. Zur vollständigen Charakterisierung von Metallschäumen werden zunächst die unterschiedlichen hierarchischen Ebenen als sogenannte Skalen eingeführt. Anschließend werden die Alternativen der Charakterisierung auf den einzelnen Skalen beschrieben und in den aktuellen Stand der Forschung eingeordnet. Um einen vollständigen Überblick über die Charakterisierung von Metallschäumen zu erhalten, werden über die Thematik der Arbeit hinausgehende Konzepte eingeführt. Dies dient der Einordnung des entwickelten Modells und bietet die Möglichkeit, das Modell mit den Vor- und Nachteilen anderer Modellierungsmethoden für Metallschäume zu vergleichen. Detaillierte Informationen zu zellulären Materialien und offenporigen Schäumen im Speziellen sind bei Ashby et al. [10, 11], Gibson et al. [92] und Dukhan [71] zu finden.

3.1 Struktur-Eigenschaftsbeziehung von Metallschäumen

In der Natur sind die meisten Strukturen zur Aufnahme von Lasten zellulär aufgebaut. Beispiele solcher Strukturen sind Knochen, Kork, Holz oder Bienenwaben. Der Mensch nimmt sich die Natur in den letzten Dekaden in der Entwicklung neuartiger Materialien zum Vorbild. Eine Klasse der neu entwickelten Materialien stellen Metallschäume dar, die schon heute in einer Vielzahl unterschiedlicher Anwendungen eingesetzt werden. Beispiele sind unter anderem der Einsatz als Werkzeugmaschinenschlitten oder als Stütze für einen Ausleger eines mobilen Krans [87]. Metallschäume sind aus Metall oder einer Metalllegierung bestehende zelluläre Materialien mit einer stochastisch aufgebauten Mikrostruktur. Eine weitere Unterteilung erfolgt in geschlossen- und offenporige Metallschäume. Geschlossenporige Schäume setzen sich aus Zellen mit geschlossenen Flächen zusammen. Offenporige Schäume bestehen hingegen aus Zellen mit offenen Flächen und sind somit durchlässig für Flüssigkeiten und Gase. Die offenporigen Zellen werden aus einzelnen Stegen aufgebaut, die in Knoten miteinander verbunden sind. Die Herstellung von Metallschäumen erfolgt dabei auf verschiedene Arten [10, 14, 63], wobei an dieser Stelle nur auf einen Herstellungsprozess kurz eingegangen werden soll. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Metallschäume werden durch ein Feingussverfahren (vgl. Abb. 3.1) hergestellt. Dazu wird ein Polymerschaum als Grundlage zur Herstellung einer Gussform verwendet. Zunächst werden die Zwischenräume des Polymerschaums mit einer keramischen Masse aufgefüllt, dem sogenannten Schlicker. Wenn dieser ausgehärtet ist, wird der Polymerschaum beispielsweise durch Ausbrennen entfernt. Anschließend wird der entstandene Hohlraum mit der gewünschten flüssigen Metalllegierung ausgegossen. Nach der Verfestigung der Legierung wird der Schlicker entfernt und der entstandene Metallschaum stellt eine direkte Nachbildung des Polymerschaums dar. Eine detaillierte Beschreibung des Herstellungsprozesses ist bei Yamada et al. [220] gegeben.

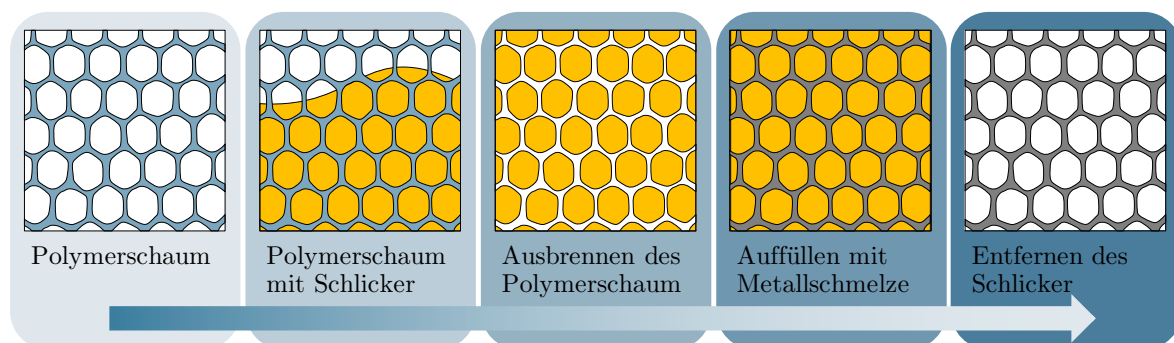


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des Feingussverfahrens zur Herstellung eines offenporigen Metallschaums

Zur Unterscheidung und Klassifizierung von offenporigen Schäumen dienen als charakteristische Größen:

- die Anzahl an Poren pro Länge
- die relative Dichte
- die Porosität
- die Konnektivität.

Dabei wird die Anzahl an Poren pro Länge in Poren pro Inch (ppi) gemessen und als ppi-Zahl ausgedrückt. Sie definiert die mittlere Porengröße eines Schaums. Entsprechend der Definition beschreibt eine höhere ppi-Zahl einen Schaum mit kleineren Poren und umgekehrt eine kleinere ppi-Zahl einen Schaum mit größeren Poren. Die relative Dichte ρ_R wird als Verhältnis der Dichte des Schaums ρ_S zur Dichte des Stegmaterials ρ_M mit

$$\rho_R = \frac{\rho_S}{\rho_M} \quad (3.1)$$

bestimmt. Die relative Dichte korreliert stark mit der Porosität, der Länge und Dicke der Stege im Schaum und somit mit dessen Topologie. Allgemein gibt die Porosität P das Verhältnis des von den Poren eingenommenen Volumens V_P zum Gesamtvolumen des Schaums V_G mit

$$P = \frac{V_P}{V_G} \quad (3.2)$$

an. Für einen Schaum bestehend aus Stegen mit einem homogenen, inkompressiblen Material bilden die Porosität P und die relative Dichte ρ_R keine unabhängigen Größen und werden durch $P = 1 - \rho_R$ ineinander umgerechnet.

Eine weitere Größe, welche häufig zur Klassifizierung von Schäumen verwendet wird, ist die Konnektivität. Sie beschreibt die Topologie von Schäumen. Gemessen wird die Konnektivität als gemittelte Anzahl der Stege eines Schaums, die in einem Knoten zusammenlaufen.

Aufgrund der hohen Porosität von Schäumen erinnern sie an Fachwerkstrukturen und verteilen äußere Lasten auf die einzelnen Stege. Damit wird deutlich, dass die Eigenschaften eines Schaums nicht allein von dem verwendeten Material abhängen, sondern durch die Geometrie der Stege beeinflusst werden. Die Geometrie der Stege wird z. B. durch deren Form und Länge beschrieben und durch die Größe der Poren bestimmt. Somit hängen die Eigenschaften eines Schaums vom verwendeten Material und der Struktur ab. Dieser Zusammenhang wird als Struktur-Eigenschaftsbeziehung bezeichnet.

Diese Beziehung wird durch die hierarchische Struktur von Schäumen beschrieben. Allgemein werden Schäume auf drei solcher hierarchischen Skalen charakterisiert [63, 125, 168]. Die Modellierung ganzer konstruktiver Bauteile findet auf der Makroebene statt, die gleichzeitig die größte Skala darstellt. Die nächstkleinere Skala liegt in der Größenordnung einzelner bis weniger Poren eines Schaums vor. Bestimmt wird das Verhalten der Mesoebene durch die Porengröße, die Verteilung und die Geometrie einzelner Poren. Die Poren der Mesoebene setzen sich aus einzelnen Stegen zusammen. Die Mikroebene stellt in dieser Gliederung die kleinste Skala dar und beschreibt die einzelnen Stege. Anzumerken bleibt, dass die Unterteilung in eine weitere Skala möglich ist, die z. B. die Kristallstruktur der Stege betrachtet. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf diese Unterteilung verzichtet, da ein effektives Materialverhalten der Stege für die Modellierung erforderlich ist. Abbildung 3.2 zeigt die hierarchischen Skalen beispielhaft für einen offenporigen Aluminiumschaum in Anlehnung an Jung et al. [125].

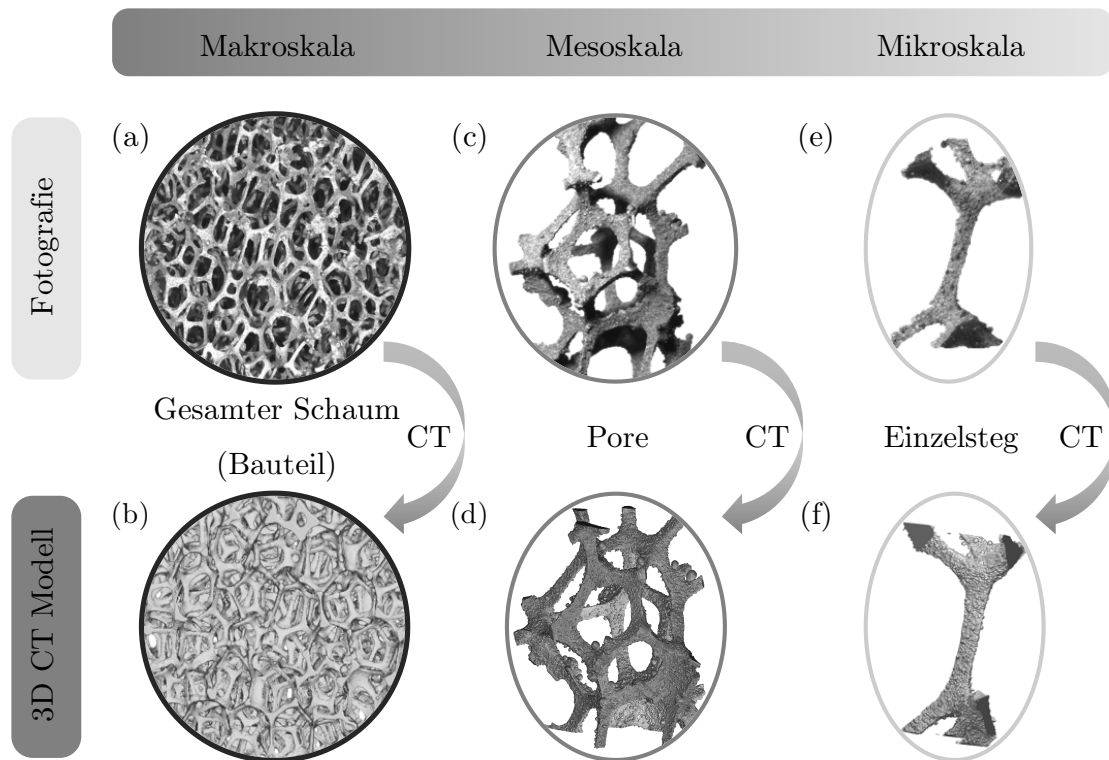


Abbildung 3.2: Hierarchische Struktur von offenporigen Metallschäumen am Beispiel eines 10 ppi Aluminiumschaums: (a) Schaum, (b) CT Modell des realen Schaums, (c) einzelne Pore, (d) CT Modell der Pore, (e) Einzelsteg und (f) CT Modell des Einzelsteiges; makroskopische CT-Aufnahmen, zur Verfügung gestellt vom Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM in Kaiserslautern

Für die Makro-, Meso- und Mikroebene sind jeweils eine reale Fotografie eines Schaums, einer Pore bzw. eines Steges in Kombination mit dem jeweiligen 3D Modell gezeigt. Alle drei Modelle wurden mithilfe einer Computertomographie (CT) erstellt. Die CT-

Aufnahmen des gesamten Schaums wurden vom Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM im Rahmen einer Kooperation mit dem Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern zur Verfügung gestellt. Die Modelle der einzelnen Pore und des Einzelsteiges sind im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes am INSA (Institut National des Sciences Appliquées) in Lyon aufgenommen worden. Zum vollständigen Verständnis des makroskopischen Verhaltens von Schäumen ist die Charakterisierung des Verhaltens auf allen drei Ebenen notwendig. Dazu werden im Folgenden die derzeitigen Alternativen zur Charakterisierung auf den unterschiedlichen Ebenen beschrieben und zusammengefasst.

3.2 Makroskopische Charakterisierung von Metallschäumen

Die makroskopische Charakterisierung setzt sich aus der Anwendung experimenteller Methoden und der Modellierung des beobachteten Verhaltens zusammen. Zur Validierung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Multiskalenmodells ist die experimentelle Charakterisierung der Makroebene essentiell. Aus diesem Grund wird der Stand der Forschung zur Charakterisierung im Speziellen von offenporigen Metallschäumen beschrieben. Anschließend werden die unterschiedlichen Möglichkeiten der Modellierung des beobachteten Verhaltens kurz zusammengefasst. Bedingt durch den zellulären Aufbau weisen Metallschäume einen signifikanten Unterschied zwischen Zug- und Druckbelastungen auf. Abbildung 3.3 verdeutlicht diesen Unterschied in einem schematischen Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Zug- und Druckbelastungen. Während unter Zugbelastungen das Versagen der ersten Stege, respektive der ersten Porenlage, zu einer fehlenden Verbindung zum restlichen Schaum und somit einem Abfall der Spannung führt, wird unter Druckbelastungen ein anderes Verhalten beobachtet. Durch das Kollabieren der ersten Porenlage wird diese in die darunterliegende Porenlage gedrückt und überträgt die Belastung auf diese. Dabei wird die maximale Spannung σ_{pcs} , die kurz vor dem Kollaps der ersten Porenlage erreicht wird, als „plastic collapse stress“ (PCS) bezeichnet. Das sukzessive Kollabieren der Porenlagen führt zu einer annähernd konstanten Spannung über einen großen Dehnungsbereich. Diese wird als Plateauspannung σ_p bezeichnet und ist in Abbildung 3.3 im mittleren Bereich gekennzeichnet.

Der letzte Teil des Spannungs-Dehnungs-Diagramms zeigt die Verdichtung des Schaums und den damit verbundenen Anstieg der Spannung. Unter Zugbelastungen wird die Spannung kurz vor dem Auseinanderreißen der ersten Porenlage ebenfalls als PCS bezeichnet.

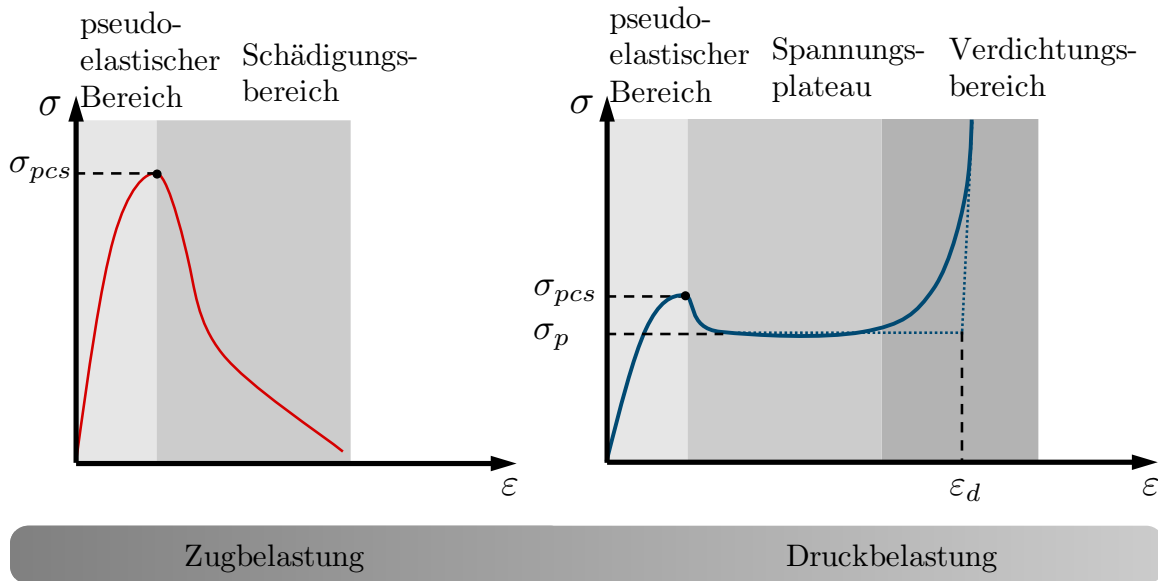


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung typischer Spannungs-Dehnungs-Diagramme offener Metallschäume unter Zug- und Druckbelastung

Sowohl unter Zug- als auch unter Druckbelastung entspricht der Anfangsbereich keiner Elastizität im klassischen Sinne. Da selbst für kleine Lasten und Deformationen erste Stege irreversibel deformiert werden, wird dieser Bereich als pseudo-elastischer Bereich bezeichnet.

Das Verhalten von Metallschäumen unter Zug- und Druckbelastungen ist gut erforscht [15, 102, 128, 183], jedoch ist die Beschreibung des Versagens unter multiaxialen Belastungen, welches von großem Interesse ist, weniger erforscht. Der potentielle Einsatz als Energieabsorber oder im Leichtbau [10] machen eine Charakterisierung des Verhaltens unter multiaxialen Lasten erforderlich. Weiter weisen Metallschäume, anders als Metalle, eine bleibende Deformation unter hydrostatischer Belastung auf. Somit ist eine Beschreibung über ein Fließkriterium nach von Mises [164, 165] nicht ausreichend, da die plastische Kompressibilität zu einer geschlossenen konvexen Fließfläche führt [64, 65]. Um eine solche Fließfläche experimentell zu ermitteln, sind Zug- und Druckversuche nicht ausreichend. Es ist eine Vielzahl unterschiedlicher Experimente notwendig, die schematisch in Abbildung 3.4 in Anlehnung an Jung et al. [127] zusammengefasst sind.

Neben den uniaxialen Experimenten werden hydrostatische Experimente, einfache Scherversuche und Torsionsversuche zur Charakterisierung von Fließflächen von Metallschäumen verwendet [7, 64, 94, 189]. Multiaxiale Experimente werden durch Experimente mithilfe eines Arcan-Aufbaus [8, 70, 227] oder durch die Überlagerung uniaxialer Lasten mit Torsion bzw. einer Umkehrung der Reihenfolge realisiert [36, 94, 103]. Auf eine detaillierte Darstellung der experimentellen Charakterisierung wird im Rahmen dieser

Arbeit nicht eingegangen, da der Fokus auf der Modellierung liegt und die makroskopischen Experimente von PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung durchgeführt und zur Validierung des Modells zur Verfügung gestellt wurden. Die Versuchsdurchführung und die Ergebnisse werden bei Jung [124] und Jung et al. [127, 128] eingehend beschrieben, zusammengefasst und diskutiert. Bei Shafiq et al. [195] wird eine Zusammenfassung unterschiedlicher Fließflächen für Schäume gegeben und die experimentelle Ermittlung beschrieben. Eine der aufwendigsten Charakterisierungen von offenporigen Aluminiumschäumen ist bei Jung et al. [127] zu finden.

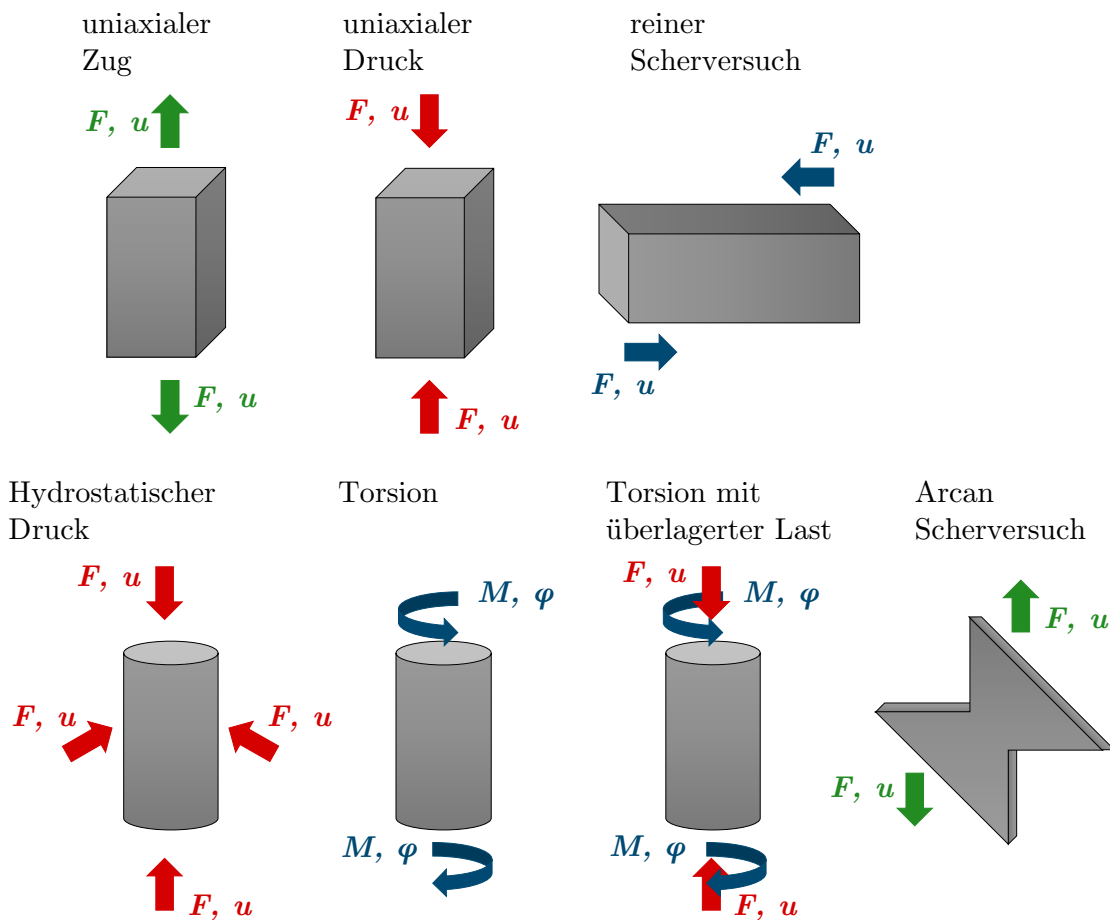


Abbildung 3.4: Auswahl an typischen Experimenten zur experimentellen Charakterisierung des Fließverhaltens von Metallschäumen

Der beschriebene hohe experimentelle Aufwand zur Charakterisierung der Fließfläche von Metallschäumen zeigt die Notwendigkeit geeigneter effizienter Simulationsmodelle. Dazu werden Modellierungskonzepte und deren numerische Umsetzung benötigt. Dabei wird die Modellierung der mechanischen Eigenschaften von Metallschäumen grundsätzlich in drei Kategorien eingeteilt, die in Abbildung 3.5 dargestellt sind. Im blauen Drittel der Abbildung 3.5 sind Mikrostrukturmodelle dargestellt. Alle Modelle, die die komplette Mikrostruktur auflösen, werden unter diesem Begriff zusammengefasst.

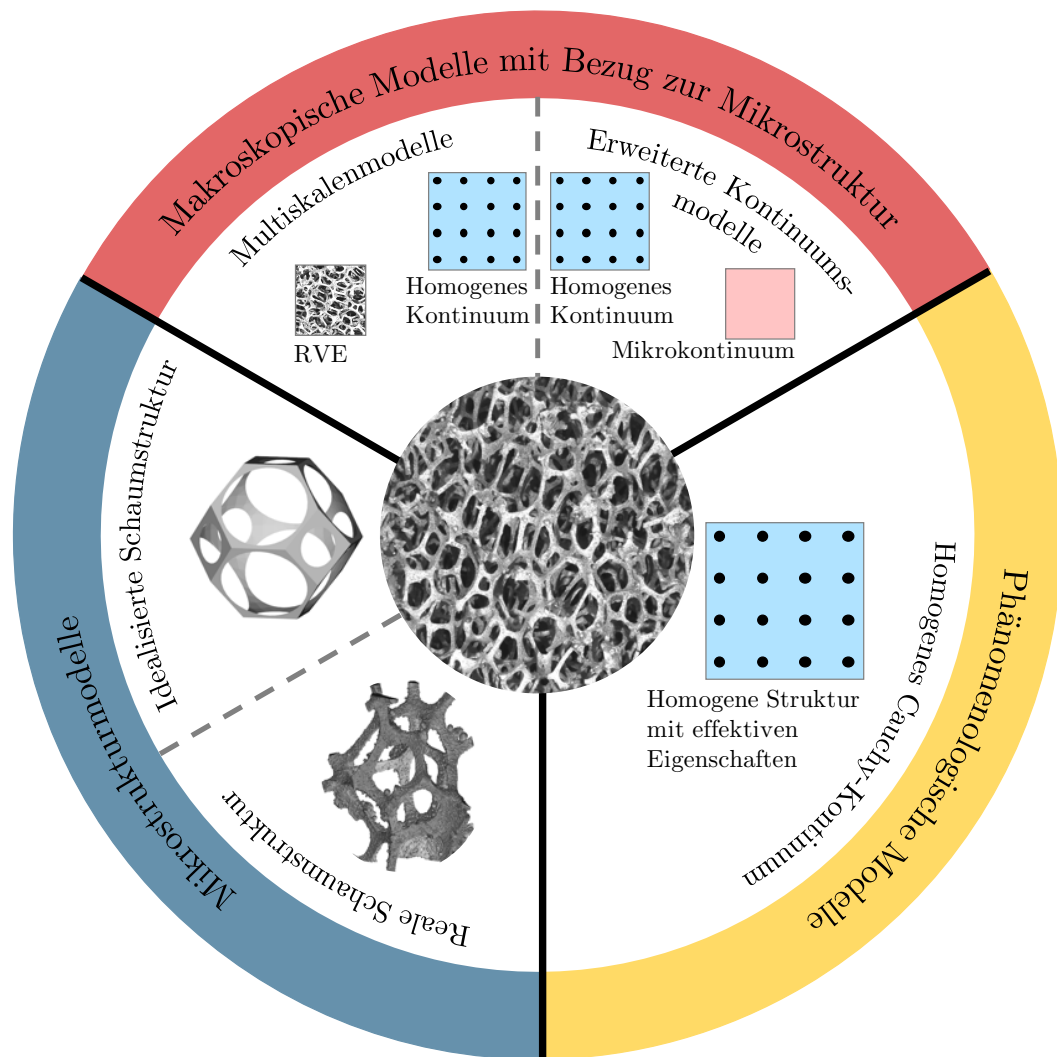


Abbildung 3.5: Modellierungskonzepte zur makroskopischen Charakterisierung von Metallschäumen, unterteilt in drei Hauptgruppen

Unter Vernachlässigung der Mikrostruktur wird das makroskopische Verhalten mithilfe rein phänomenologischer Modelle beschrieben (s. Abb. 3.5 gelbes Drittel). Makroskopische Materialmodelle, die durch unterschiedliche Methoden einen Bezug zur Mikrostruktur herstellen, stellen eine weitere Option zur Charakterisierung mikroheterogener Materialien dar. Diese sind in Abbildung 3.5 im roten Drittel dargestellt. In den folgenden drei Abschnitten werden die farblich gekennzeichneten Modellierungskategorien genauer beschrieben.

Phänomenologische Modelle

Die einfachste Modellalternative stellt dabei ein rein phänomenologisches Materialmodell dar, das den gesamten Schaum als ein Cauchy-Kontinuum auffasst. Die Modellparameter dienen der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens ohne Bezug zur Mikrostruktur der Schäume. Somit werden physikalische Effekte, die das Verhalten prägen, nicht berücksichtigt. Der große Vorteil dieser Materialmodelle liegt in der effizienten Simulation ganzer Bauteile, die um ein Vielfaches größer sind als die Inhomogenitäten der Mikrostruktur. Neben dem fehlenden Bezug zur Mikrostruktur besteht der größte Nachteil im hohen experimentellen Aufwand, das Modell an die Realität anzupassen. Dabei muss für jede Änderung, beispielsweise der Porengröße oder der Steggeometrie, der experimentelle Datensatz zur Anpassung des phänomenologischen Materialmodells erneuert werden. Insbesondere in Bezug auf die Bestimmung der Fließflächen der Metallschäume sind hohe Kosten und ein erheblicher zeitlicher Aufwand mit den Änderungen des Schaums verbunden. Phänomenologische Materialmodelle beschränken sich meist auf die Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Diagramme mithilfe von elastisch-plastischen Materialmodellen, um so Vorhersagen bezüglich des Versagens bzw. der Energieabsorption treffen zu können. Um das Materialverhalten von Metallschäumen durch elastisch-plastische Materialmodelle zu beschreiben, ist es notwendig, die charakteristische Fließfläche abzubilden.

Dabei unterscheiden sich Metallschäume von vielen anderen Materialien durch ihr Versagen unter hydrostatischem Druck. In der Literatur und in der Anwendung haben sich verschiedene Ansätze etabliert. Einer der ersten Ansätze ist die Verwendung der Drucker-Prager-Fließbedingung, die ursprünglich der Beschreibung von Böden diente. Im Hauptspannungsraum stellt das Drucker-Prager Modell einen Kegel um die hydrostatische Achse dar. Die Drucker-Prager-Fließfläche wurde zur sogenannten GAZT-Fließfläche zur Beschreibung von Schäumen erweitert. Die erste Weiterentwicklung fand durch Sugimura et al. [197] statt. Später erweiterten Gibson et al. [91, 207] das Modell zur GAZT-Fließfläche, wie sie heute bekannt ist. Weitere Varianten der GAZT-Fließfläche wurden von Miller [163] und Badiche et al. [13] vorgestellt. Die Fließfläche nach Green [100] ist eine der ersten Fließflächen, die das Versagen von Schäumen unter hydrostatischem Druck bzw. Zug berücksichtigt und einen Ellipsoid um die hydrostatische Achse im Hauptspannungsraum bildet. Eine weitere geschlossene Fließfläche, die nicht aus mehreren Fließflächen zusammengesetzt wird, wurde von Ehlers [74] als Sieben-Parameter-Modell vorgestellt. Dieses Modell ist in der Lage, das asymmetrische Fließverhalten von Schäumen [127] abzubilden. Eine weitere Möglichkeit, die Asymmetrie abzubilden, bietet die Fließfläche von Bier und Hartmann [34, 35, 104], die zur Beschreibung von Metallpulver entwickelt wurde. Dazu wird mittels einer logarithmischen Interpolation zweier unterschiedlicher Fließflächen eine einzige Fließfläche

generiert, die stets konvex ist. Eins der meist verwendeten Fließflächenmodelle für Metallschäume ist das Modell von Deshpande und Fleck [64]. Die Idee von Deshpande und Fleck basiert, wie die Idee von Green [100], auf der Beschreibung der Fließfläche als Ellipsoid.

Mikrostrukturmodelle

Die Modellierungsansätze zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von Schäumen basierend auf der Diskretisierung der gesamten Mikrostruktur werden unter dem Oberbegriff der Mikrostrukturmodelle zusammengefasst. Ziel ist die Beschreibung und die Nachbildung des makroskopischen Verhaltens ohne die hohe Anzahl an realen Versuchen. Der Nachteil der kompletten Auflösung der Mikrostruktur ist der hohe numerische Aufwand. Da alle Stege der makroskopischen Schaumstruktur vernetzt werden müssen, beinhaltet das numerische Modell eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden. Neben der Option, die reale Schaumstruktur beispielsweise durch CT-Aufnahmen [122, 123, 130] in ein numerisches Modell umzuwandeln, werden idealisierte Schaumstrukturen erstellt [55, 89, 90, 90]. Da für jede Variation der Schaumparameter ein neues Modell erstellt werden muss und die numerische Berechnung sehr aufwendig ist, sind vollaufgelöste Mikrostrukturen für große Bauteile unbrauchbar. Neben den Effizienzproblemen führen Materialparameter, die am verwendeten Vollmaterial des Schaums identifiziert wurden, zu erheblichen Unterschieden zwischen Simulation und Experiment am Schaum. Heinze et al. [111] zeigten eine deutliche Überschätzung des realen Verhaltens im Vergleich zu den Experimenten an der realen Schaumstruktur.

Makroskopische Modelle mit Bezug zur Mikrostruktur

Eine weitere Alternative, das Materialverhalten von Metallschäumen zu beschreiben, ist die Verwendung eines makroskopischen Modells unter Berücksichtigung der Mikrostruktur. Dazu werden mikrostrukturelle Einflüsse in ein makroskopisches Kontinuumsmodell einbezogen. Unterschieden werden Makromodelle mit Bezug zur Mikrostruktur in Multiskalenmodelle und erweiterte Kontinuumsmodelle. Für die Multiskalenmodelle bildet dabei die Betrachtung eines repräsentativen Volumenelements (RVE) als kleinstmögliche Volumeneinheit die Grundlage zur Beschreibung der mikroskopischen Inhomogenitäten. Dabei liegt ein besonderes Augenmerk darauf, eine statistisch repräsentative Mikrostruktur zu verwenden [72, 73, 79, 120]. Die Multiskalenmodelle bieten eine genaue Möglichkeit, um das makroskopische Verhalten anhand der Mikrostruktur zu beschreiben. Unterschieden werden grundsätzlich Mehrgitterverfahren, wie die FE² Modelle und

klassische Homogenisierungsmethoden, wie beispielsweise die Bestimmung des effektiven E -Moduls (vgl. Voigt [214] und Reuss [187]). Dabei beschreibt die Homogenisierung allgemein die Berechnung effektiver Eigenschaften auf der Makroskala durch eine theoretische Verschmierung der Heterogenitäten der Mikrostruktur [27, 28, 107, 108]. Sowohl die FE² Modelle als auch die klassischen Homogenisierungsmethoden ermöglichen die Kopplung unterschiedlicher Skalen. Die Homogenisierung bildet für diese Arbeit die wichtigste Methode zur Skalenkopplung und wird in Kapitel 4 beschrieben. Auf der Makroskala wird ein homogenes Kontinuum vernetzt und für jeden Integrationspunkt des FE-Netzes auf der Makroskala wird ein RVE hinterlegt. Dieses RVE besteht aus der Mikrostruktur, die ebenfalls mit einem FE-Netz diskretisiert wird. Lokale makroskopische Dehnungen der Makroskala werden in Verschiebungsrandbedingungen für die einzelnen RVEs übersetzt. Die Ergebnisse werden als effektive Eigenschaften in Form von Reaktionskräften und Steifigkeiten auf die Makroskala zurückgeführt, die in lokale makroskopische Spannungen umgewandelt werden. Dieser Schritt wird solange durchgeführt, bis das Makromodell einen Gleichgewichtszustand für den globalen Belastungszustand erreicht. Der Vorteil eines solchen Modells liegt in der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens ohne die Notwendigkeit, ein makroskopisches Materialmodell zu formulieren.

Weitere Homogenisierungsmethoden zur Beschreibung des effektiven Materialverhaltens von Metallschäumen basieren auf den Grundgedanken von Reuss [187] und Voigt [214]. Im Rahmen der Mischungstheorie [209, 211] findet die Bestimmung des effektiven Materialverhaltens unter der Annahme der Koexistenz unterschiedlicher Phasen statt. Somit entsteht eine allgemeinere Mittelung der Eigenschaften über ein Verschmieren aller Phasen über das Volumen. Weiter besitzt jede der einzelnen Phasen ihre eigene Bewegungsfunktion und ein eigenes Konstitutivgesetz. Die Interaktion der einzelnen Phasen wird durch die Bilanzgleichungen berücksichtigt. Die effektiven Materialeigenschaften werden anschließend durch eine Superposition unter Berücksichtigung der Einzeldichten bestimmt. Detaillierte Beschreibungen der Mischungstheorie sind unter anderem bei Bowen [41, 42] und Truesdell [210] zu finden. Eine Weiterentwicklung der Mischungstheorie findet sich in der Theorie poröser Medien [62, 75], die eine Erweiterung um das Konzept der Volumenanteile beschreibt. Dabei werden die Volumenanteile als interne Variablen zur Charakterisierung der lokalen Zusammensetzung der Mischung verwendet. Durch die fehlende Berücksichtigung der Mikrostruktur führt die Beschreibung von Schäumen gleicher Porosität, aber unterschiedlicher Porengröße zu dem identischen mehrphasigen Kontinuum.

Eine weitere Kategorie makroskopischer Modelle mit Bezug zur Mikrostruktur bilden erweiterte Kontinuumsmodelle. Der Unterschied in der Beschreibung liegt in der Bestimmung einer charakteristischen Länge anstelle effektiver Materialparameter. Jeder Punkt des heterogenen Materials wird als homogen angesehen und durch zusätzliche Freiheitsgrade wird der Bezug zu Mikrostrukturparametern ermöglicht. Zusätzlich zu den Interaktionen der einzelnen Materialpunkte durch die Verschiebungsfreiheitsgrade werden weitere Wechselwirkungen eingeführt. Diese Erweiterung wird auf unterschiedlichste Weise realisiert, wie beispielsweise durch Einbeziehen höherer Gradienten der Verschiebung oder zusätzlicher Freiheitsgrade. Eine Zusammenfassung und ein Überblick über die Entwicklung der Theorien sind bei Tekoğlu [204] gegeben. Grundsätzlich werden Modelle mit höheren Gradienten der Verschiebung verwendet, indem neben den Dehnungen der Gradient der Dehnung oder höhere Gradienten der Dehnung verwendet werden. Die daraus resultierenden Spannungen werden als Hyperspannungen bezeichnet. Diese Hyperspannungen geben zusätzliche Kopplungsterme zwischen den einzelnen Materialpunkten an. Beispiele für die Verwendung höherer Gradienten der Dehnung finden sich unter anderem bei Aifantis [1, 2], Coleman et al. [56], Diebels [66, 67] und Green et al. [99]. Als weitere Möglichkeit, die Interaktion zweier Materialpunkte zu beschreiben, dient die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade. Neben den Verschiebungen werden unabhängige kinematische Größen eingeführt, die wiederum zu unabhängigen gekoppelten Spannungen führen. Der Ursprung der Erweiterung um unabhängige kinematische Größen kann auf die Cosserat-Kontinuumstheorie [57] und auf die später entwickelte Timoshenko-Balken-Theorie [205] zurückgeführt werden. Beispiele zur Anwendung erweiterter Kontinuumsmodelle mit zusätzlichen Freiheitsgraden finden sich in der mikromorphen Theorie [77, 212, 213]. Anwendungen der Theorie im Bezug zu Metallschäumen werden z. B. bei Forest et al. [82] und Hütter et al. [115] besprochen. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf eine Erweiterung der Kontinuumstheorie verzichtet wird und nur im Ausblick diskutiert wird, sei auf die eingeführte Literatur verwiesen.

3.3 Mikroskopische Charakterisierung von Metallschäumen

Das makroskopische Verhalten hängt aufgrund des hierarchischen Aufbaus von Schäumen vom verwendeten Material und von der Mikrostruktur ab. So lassen sich makroskopisch beobachtete Phänomene auf Mechanismen der Mikroebene zurückführen. Der Einfluss der Struktur der Schäume wurde in zahlreichen numerischen Untersuchun-

gen betrachtet. Modelle des gesamten Schaums wurden mithilfe der Computertomographie erstellt und mit den Materialparametern des verwendeten Schaummaterials simuliert [97, 98, 111, 119]. Die Ergebnisse zeigten im Vergleich zu den Experimenten eine erhebliche Überschätzung der makroskopischen mechanischen Eigenschaften. Erklärungen hierzu sind Unregelmäßigkeiten in der Dichte, Fehlstellen im Schaum und die abweichenden Eigenschaften des Stegmaterials zum Vollmaterial. Den größten Einfluss hat dabei die Änderung der Eigenschaften des Stegmaterials [105]. Eine Erklärung für die Änderung der Materialeigenschaften bietet die Herstellung durch ein Feingussverfahren. Die wesentlich größere Oberfläche bezogen auf das Volumen im Verhältnis zu einem gegossenen Vollmaterial führt zu Änderungen der Mikrostruktur. Die daraus resultierende unterschiedliche Abkühlrate des Feingussverfahren im Vergleich zur Herstellung des Vollmaterials führt zu unterschiedlichen Kornstrukturen. Weiter bedingt ein ungleichmäßiges Abkühlen Eigenspannungen, die zu Inhomogenitäten führen [105, 139, 221, 225].

Die Überschätzung der makroskopischen mechanischen Eigenschaften macht die Notwendigkeit der Charakterisierung der Materialeigenschaften von einzelnen Stegen deutlich. Alternativ kann eine Mikroindentation zur Bestimmung der Eigenschaften herangezogen werden. Eine Nanoindentation hingegen würde die Eigenschaften einzelner Körner bestimmen und somit keine neue Information liefern. Detaillierte Beschreibungen der Verfahren finden sich unter anderem bei Oliver und Pharr [171, 172] sowie Chen und Diebels [53]. Die Durchführung von Mikroindentation an Aluminiumschäumen wird bei Amsterdam et al. [6] und Zhou et al. [225] ausgeführt. Weiter wurden durch Nanoindentation die Härte [129] des verwendeten Schaummaterials bzw. die Härte und der E -Modul [88, 125] gemessen. Durch Mikroindentation wurden an anderer Stelle ebenfalls die Härte des Schaummaterials [52, 173, 193] und die Fließgrenze [173] bestimmt.

Die Charakterisierung der mechanischen Eigenschaften der Stege erfordert im Vergleich zu standardisierten Zugversuchen individuelle Lösungen. Die unterschiedliche Form einzelner Stege eines offenporigen Schaums, aber auch die Variation unterschiedlicher Schäume bedingt ein Umdenken bei der Klemmung der Stege. Aus diesem Grund wurden in den vergangenen Jahren speziell adaptierte Versuchsstände bzw. komplette Neukonstruktionen vorgestellt [80, 133, 224]. Die Klemmung zur Aufbringung der Deformation der Stege wurde dabei auf unterschiedlichste Weise realisiert. Neben geschlitzten Haltern, die bei Zhou et al. [223, 224] Anwendung fanden, wurden die Stege in den Versuchen von Betts et al. [32, 33] durch flache Klemmen eingespannt. Eine Einspannung der Stege in den Versuchsstand ohne Reibung wurde durch einen Formschluss von Schüler et al. [193] und Jung et al. [131, 133] eingeführt. Schüler et al. [193] verwendeten eine Modellierungsmasse zum Ausrichten der Stege und fixierten

diese anschließend mit einem Cyanacrylat-Klebstoff. Jung et al. [131, 133] verwendeten mit Woodschem Metall gefüllte Vergusszylinder, die mit dem Versuchsstand verschraubt wurden. Das Woodsche Metall liefert den Vorteil einer schnellen Fixierung des Steges in den Vergusszylindern und reduziert somit die Zeit der Versuchsvorbereitung deutlich. Eine weitere positive Eigenschaft ist die Lösbarkeit der Verbindung, wodurch eine Fehlausrichtung korrigiert werden kann.

Eine weitere Herausforderung ist die Präparation der Proben für Zug-, Druck- oder Biegeversuche. Dabei muss aus einem makroskopischen Schaum ein einzelner Steg extrahiert werden. Zhou et al. [223, 224] waren im Jahr 2004 die Ersten, die Mikrozugversuche an Metallschaumstegen durchführten. Die Extraktion der Proben gelang ihnen durch die Verwendung von Funkenerosion (EDM). Im ersten Schritt wurden 2 mm dicke Scheiben durch Drahterosion aus dem Schaum geschnitten. Durch Senkerodieren wurden in einem zweiten Schritt einzelne Stege extrahiert. Da die Funkenerosion limitiert ist, was sowohl das Material als auch die Größe des Schaums betrifft, wird meist ein sehr feiner Seitenschneider verwendet, um einzelne Stege vorsichtig aus dem Schaum zu extrahieren [131, 133, 193].

Verglichen mit Zugversuchen an genormten Probengeometrien weisen Zugversuche an Stegen eine große Streuung auf. Diese ist bedingt durch die große Inhomogenität der Proben durch den Herstellungsprozess und die unregelmäßige Geometrie. Die große Streuung macht eine höhere Anzahl an Experimenten notwendig. Die unterschiedliche Form der einzelnen Stege führt zu einer starken Geometrieabhängigkeit der Ergebnisse. Um den Einfluss der Stegeometrie und der unterschiedlichen Längen der Stege zu eliminieren, werden die Spannungs-Dehnungs-Diagramme bestimmt. Da anders als für homogene und genormte Proben die Geometrie von Steg zu Steg variiert, ist ein größerer Aufwand notwendig. Zur Bestimmung der Spannung aus den gemessenen Kraftwerten muss zunächst die Querschnittsfläche der Stege bestimmt werden. In der Literatur werden dazu verschiedene Alternativen vorgestellt. Die Querschnittsfläche wird beispielsweise über Dreiecke analytisch genähert [193, 223, 224] oder mittels CT-Aufnahmen der Stege genau bestimmt. In Kombination mit einer großen Anzahl an notwendigen Versuchen führt die Bestimmung mittels CT-Aufnahmen zu immensen Kosten. Um diese zu reduzieren und die Experimente effizienter zu gestalten, stellten Jung et al. [132] eine alternative Methode zur Bestimmung der Querschnittsfläche vor, in der durch Messen der Querschnittsfläche nach dem Versuch die ursprüngliche Querschnittsfläche abgeschätzt wurde. Dazu wird die Dehnung kurz vor dem Riss der Probe verwendet, um Effekte durch die plastische Verformung einzubeziehen. Eine detaillierte Beschreibung findet sich bei Jung et al. [132]. Eine kostengünstige Alternative zur Bestimmung der ursprünglichen Geometrie der einzelnen Stege bietet die Photogrammetrie [111]. Mit

einer selbstkonstruierten Vorrichtung werden Bilder der Stege aus unterschiedlichen Ebenen rund um den Steg aufgenommen und anschließend ein 3D Modell erstellt. Neben der Information über den Querschnitt der einzelnen Stege wird die Dehnung benötigt. Da die Bestimmung der Dehnung aus dem Maschinenweg und der initialen Länge zu erheblichen Fehlern führt, müssen andere Methoden verwendet werden. Zhou et al. [223, 224] nutzten Oberflächenmarkierungen, um die Dehnung auszuwerten. Die gängigste Methode ist die Digitale Bildkorrelation (DIC) [131, 193], abgeleitet aus dem englischen Digital Image Correlation. Dazu wird die Oberflächenstruktur der Stege oder alternativ ein vorher aufgebrachtes Specklemuster mithilfe einer Kamera für unterschiedliche Zeitpunkte aufgenommen [131, 133, 136, 193]. Ansätze zur Optimierung und Verbesserung der DIC wurden von Reis et al. [186] vorgestellt.

Neben Zugversuchen an einzelnen Stegen werden zur mikroskopischen Charakterisierung auch Biege- und Druckversuche durchgeführt. Die Durchführung von Biegeversuchen wurde bis dato nur von Reis et al. [186] realisiert. Dazu wurde der eigens konstruierte Mikrozug-Versuchsstand [133, 218] um eine Aufnahme zur Durchführung einer Drei-Punkt- bzw. Zwei-Punkt-Biegung erweitert [185]. Die Auswertung der Versuche erfolgt über die Annahme der Bernoulli-Balken-Theorie und erfordert neben der Bestimmung der Verschiebung mittels DIC die Ermittlung des Flächenträgheitsmomentes. Mikrodruckversuche an einzelnen Stegen dienen anders als Zug- oder Biegeversuche nicht der direkten Bestimmung von Materialparametern, sondern liefern lediglich Informationen über die Deformationsmechanismen. Bleistein et al. [38] verwendeten die Versuche, um die makroskopischen Eigenschaften von Metallschäumen unter uniaxialen Belastungen vorherzusagen. Dabei dienten die Mikrozug- und Mikrodruckversuche als Eingangsgrößen für eindimensionale Materialmodelle, die über eine numerische Homogenisierung mittels der Microplane Theorie in ein 3D Materialmodell für den makroskopischen Schaum verallgemeinert wurden. Es wurden keine Materialmodelle für die Versuche formuliert, sondern die experimentellen Daten durch stückweise lineare Funktionen angenähert. Der Fokus der Veröffentlichung lag auf der experimentellen Charakterisierung. Ferner wurden lediglich makroskopische Zug- und Druckversuche zur Veranschaulichung des Potentials der Modellvorstellung verwendet und keine vollständige Validierung durchgeführt. Da die Druckversuche ein Stabilitätsproblem darstellen, beinhalten sie Struktureffekte, die Rückschlüsse auf Materialkennwerte der Stege unzulässig machen. Jedoch dienen die Ergebnisse dazu, das reale Verhalten einzelner Stege unter Druckbelastung abzubilden und somit effektive mikroskopische Eigenschaften des Schaums in ein makroskopisches Materialmodell zu integrieren.

4

Modellierungsgrundlagen

Die Multiskalenmodellierung von Metallschäumen erfordert neben der Charakterisierung des Materialverhaltens eine Kopplung der mikroskopischen Ebene der Einzelstege und der makroskopischen Ebene des gesamten Schaums (Bauteils). Die Basis dafür bilden Homogenisierungsmethoden, die im Folgenden zunächst allgemein eingeführt werden. Diese Beschreibung dient dem Einstieg in die Microplane bzw. Microsphere Theorie und in das Konzept der repräsentativen Raumrichtungen, die das Fundament des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Multiskalenmodells bilden. Zur Vervollständigung wird die Entwicklung der Microplane und der Microsphere Theorie bis zu ihrem Ursprung im Jahr 1900 aufgeführt. Das Konzept der repräsentativen Raumrichtungen baut auf den beiden Theorien auf und wurde erst in den 2000er Jahren entwickelt. Die Darstellung der zeitlichen Entwicklung verfolgt das Ziel, die Gemeinsamkeiten bzw. die Unterschiede der Theorien herauszustellen. Grundlegend dienen alle drei Ansätze einer Verallgemeinerung mikroskopischer Materialeigenschaften, um das dreidimensionale makroskopische Verhalten zu beschreiben. Aus diesem Grund wird eine allgemeine Einführung der Microplane Theorie vorgenommen, die in weiten Teilen identisch mit der Microsphere Theorie und dem Konzept der repräsentativen Raumrichtungen ist. Die Beschreibung der Microplane Theorie bildet gleichzeitig den Stand der Forschung im Bereich der Multiskalenmodelle mit Bezug zur selbigen ab. Die Grundlagen der Microplane Theorie dienen dem Verständnis des entwickelten Multiskalenmodells zur Skalenkopplung der Mikro- und Makroebene von offenporigen Metallschäumen.

4.1 Homogenisierungsmethoden

Das makroskopische Verhalten vieler Materialien ist abhängig von deren mikrostrukturellen Eigenschaften. Die Natur liefert Beispiele für diese Abhängigkeit der makroskopischen Eigenschaften von der Mikrostruktur. Holz besteht aus mehreren Fasern, die dessen Verhalten stark beeinflussen. Weitere Beispiele finden sich in der Muskulatur oder in den Knochen des menschlichen Körpers. Dabei setzt sich ein Muskel ebenfalls aus einzelnen Fasern zusammen, wohingegen Knochen Beispiele für zelluläre Strukturen darstellen. Um diese Abhängigkeit des makroskopischen Verhaltens von der Mikrostruktur abzubilden, wird die Homogenisierung als Basis und Mittel zur Skalenkopplung genutzt.

Die Homogenisierung wird als Mittel eingesetzt, um Mikro- in Makrogrößen umzuwandeln, die die Mikro- und Makroskala verbinden. Dabei werden effektive Eigenschaften eines Kontinuums aus der Mikrostruktur bestimmt. Allgemein wird eine beliebige Größe durch eine volumetrische Mittelung über ein Gebiet Ω mit

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega} \bullet \, dv \quad (4.1)$$

berechnet.

Durch Einbeziehen der Mikrostruktur in die Modellierung werden die physikalischen Prozesse der Mikrostruktur abgebildet, die nicht explizit in phänomenologischen Modellen enthalten sind. Durch eine geeignete Diskretisierung in unterschiedliche Teilgebiete wird die integrale Form in eine Summe mit

$$\langle \bullet \rangle = \sum_i \bullet_i \omega_i \quad (4.2)$$

überführt. Die Wichtungsfaktoren ω_i stellen dabei die Verhältnisse der Teilvolumen zum Gesamtvolumen dar. Detaillierte Beschreibungen finden sich bei Nasser [168] und Hashin [106]. Die Umkehrung der Überlegung zur Homogenisierung wird unter dem Begriff der Lokalisierung zusammengefasst. Die Lokalisierung beschreibt die Entwicklung der Mikrostruktur, die durch vorgegebene makroskopische Prozesse stattfindet. Zusammenfassend ist unter beiden Begriffen die Kopplung unterschiedlicher Skalen durch mathematische Modelle möglich. Im Rahmen der Arbeit wird ausschließlich die Homogenisierung genauer erläutert.

Für jede Art der Homogenisierung muss zunächst eine Bestimmung der Skalen erfolgen, die durch die Homogenisierung gekoppelt werden. Um eine Homogenisierung durchzuführen, ist ein gewisser Größenunterschied zwischen den Skalen erforderlich, der als Skalenabstand bezeichnet wird. Der notwendige Skalenabstand und dessen genauere Definition werden bei Hill [112] und bei Hashin [106] beschrieben. Grundlegend müssen sämtliche geometrischen Abmessungen der Makroebene wesentlich größer als die mikroskopischen Heterogenitäten sein. Ein Beispiel ist durch Dualphasenstähle gegeben. Deren Korngröße von einigen 100 Mikrometern ist deutlich kleiner als die Abmessung ganzer Bauteile, die in der Größenordnung von Zentimetern bzw. Metern liegt. Mit den definierten Grundprinzipien und dem geeigneten Skalenabstand werden unterschiedliche Materialien durch Homogenisierungsmethoden charakterisiert. Grundsätzlich wird die Homogenisierung in eine analytische und eine numerische Homogenisierung unterteilt, wobei für beide Arten zunächst eine mikroskopische Größe bestimmt wird. Anschließend werden durch eine entsprechende Homogenisierungsvorschrift die berechneten mikroskopischen Größen zurück auf die Makroebene übertragen (vgl. Abb. 4.1).

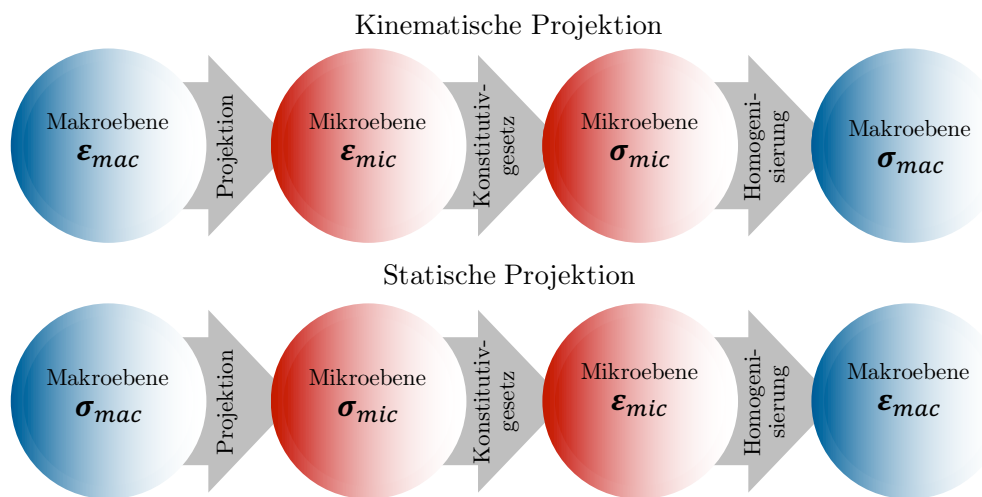


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der kinematischen und statischen Projektion; Projektion der makroskopischen Größe auf die Mikroebene; Bestimmung der verbleibenden mikroskopischen Größen und Definition eines Konstitutivgesetzes; Homogenisierung der mikroskopischen Größen, um eine effektive Größe auf der Makroebene zu erhalten

Die einfachsten Konzepte bilden die analytischen Homogenisierungsmethoden nach Voigt [214] und Reuss [187], die in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt sind. Für eine beliebige Kompositstruktur wird von einer konstanten Dehnung [214] bzw. einer konstanten Spannung [187] für die unterschiedlichen Phasen einer Kompositstruktur ausgegangen. Für die unterschiedlichen Phasen der Mikrostruktur wird die Spannung, respektive die Dehnung, mithilfe eines Materialgesetzes bestimmt. Anschließend wird über eine Mischungsregel eine gewichtete mittlere Spannung bzw. eine gewichtete mittlere Dehnung der Makroebene berechnet. Die Projektion der makroskopischen

Dehnungen auf die Mikroebene wird als kinematische Projektion und die Projektion der makroskopischen Spannung auf die Mikroebene als statische Projektion bezeichnet. In Abbildung 4.1 sind die statische und kinematische Projektion schematisch dargestellt.

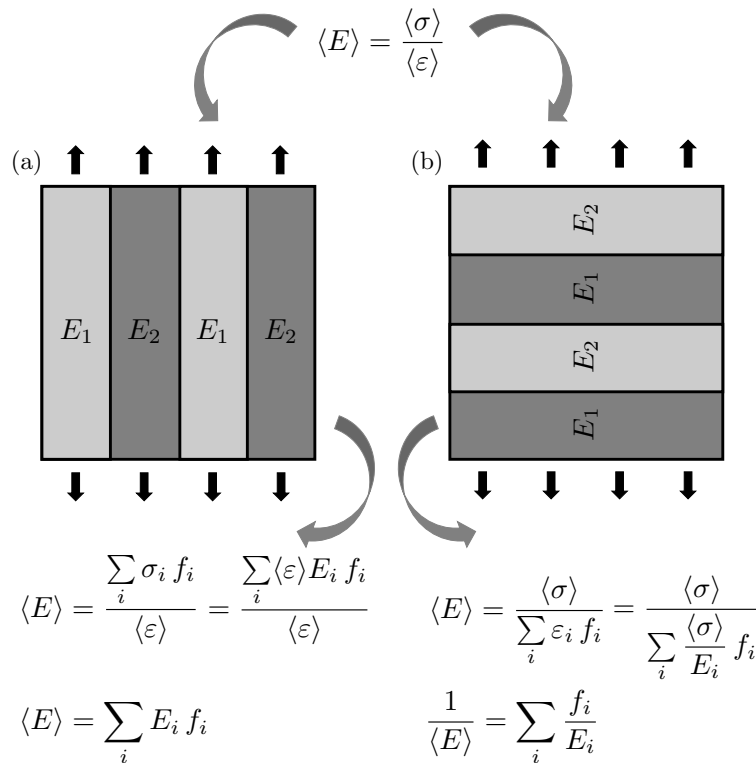


Abbildung 4.2: Berechnung des effektiven E -Moduls eines mehrphasigen Verbundwerkstoffes nach Voigt [214] (a) und Reuss [187] (b) schematisch für zwei Phasen

Neben Voigt [214] ging auch Taylor [199] von homogenen Dehnungsfeldern aus, wohingegen Reuss [187] und Sachs [191] homogene Spannungsfelder annahmen. Aus der schematischen Darstellung einer zweiphasigen Kompositstruktur in Abbildung 4.2 ist die Annahme homogener Dehnungen für eine Orientierung der einzelnen Phasen in Belastungsrichtung und die Annahme homogener Spannungen für eine Orientierung quer zur Belastungsrichtung ersichtlich. Für eine parallele Ausrichtung müssen die einzelnen Phasen gleich deformiert werden, wohingegen für eine Querorientierung die Spannung wegen der identischen Querschnittsfläche identisch ist. Unter der Annahme von rein elastischem Verhalten ergeben sich die effektiven E -Module aus den E -Moduln der einzelnen Phasen wie in Abbildung 4.2 hergeleitet.

Die analytischen Homogenisierungsmethoden haben durch die getroffenen Annahmen erhebliche Nachteile bezüglich der Beschreibung von Inhomogenitäten. So ist es bei offenzelligen Schäumen, die unterschiedliche Anordnungen von Inhomogenitäten aufweisen, nicht mehr möglich, einen geschlossenen Ausdruck für das Materialverhalten zu formulieren. Numerische Methoden hingegen liefern keine explizite Gleichung zur Charakterisierung des Materialverhaltens, sondern resultieren in diskreten Werten für die makroskopischen Größen. Im Rahmen der Homogenisierungsmethoden werden RVE

verwendet. Die lokale makroskopische Deformation entspricht der auf das RVE aufgetragenen Deformation und das entstehende Randwertproblem wird numerisch gelöst. Im Anschluss wird das Ergebnis gemittelt und so der Zusammenhang der makroskopischen Größen in Form von diskreten Werten geliefert. Das Vorgehen für die numerische Homogenisierung anhand eines RVE wird unter anderem bei Hill [112] und Miehe [159] beschrieben. Um ein makroskopisches Materialgesetz zur Abbildung des effektiven Materialverhaltens zu erhalten, wird meist ein phänomenologisches Modell an die diskreten Ergebnisse angepasst. Eine weitere Methode zur Charakterisierung des makroskopischen Verhaltens wird durch die Verwendung einer Diskretisierung auf beiden Skalen beschrieben. Die sogenannte FE^2 Methode oder Mehrgittermethode [79, 175] ermöglicht eine direkte makroskopische Beschreibung des Materialverhaltens. Gleichzeitig wird durch die Diskretisierung der Mikroebene der numerische Aufwand erhöht. Ansätze zur Charakterisierung des Materialverhaltens von Schäumen unter Verwendung eines RVE sind bei Diebels et al. [68, 69] gegeben. Dabei erfolgt eine Mittelung über die einzelnen Phasen. Dazu werden durch Volumenanteile und durch den Einsatz der Mischungstheorie die einzelnen mikroskopischen Größen gemittelt und die makroskopischen Größen bestimmt. Eine spezielle Art der Homogenisierung wird durch die Microplane Theorie und verwandte Theorien abgebildet. Dabei bieten diese Theorien die Option, das Materialverhalten mittels 1D Konstitutivgesetzen zu beschreiben, wodurch die Modellierung der beobachteten Eigenschaften vereinfacht wird.

4.2 Microplane Theorie

Die Basis der Microplane Theorie ist die Beschreibung des Materialverhaltens auf unterschiedlichen Ebenen, welche bis ins Jahr 1900 zurückgeht. Im Rahmen der Bruchlinientheorie von Mohr [166] wurde erstmals Materialverhalten auf unterschiedlichen Ebenen beschrieben. Dabei wurden die Elastizitätsgrenze und das Bruchverhalten durch unterschiedliche Bruchlinien definiert. Eine Übertragung der Idee auf plastisches Fließen kristalliner Werkstoffe wurde 1938 von Taylor [200] vorgestellt und 1949 von Batdorf und Budiansky [16] im Rahmen der Gleitebenentheorie der Kristallplastizität verwendet. Die Gleitebenentheorie wurde in den 1980er und 1990er Jahren dahingehend weiterentwickelt, dass sie heute allgemein zur Beschreibung des Materialverhaltens von Metallen verbreitet ist [158, 162, 192]. Zeitgleich zur Entwicklung der Gleitebenentheorie in den 1950er Jahren wurden Netzwerkmodelle zur Beschreibung des Materialverhaltens von Polymeren entwickelt [81, 118, 206, 217]. Hierbei wird zur Modellierung des elastischen Materialverhaltens von Polymeren ein Bezug zur molekularen Mikrostruktur hergestellt. Die reale Verteilung der einzelnen Polymerketten wird durch vereinfachte geometri-

sche Strukturen widergespiegelt. Die Gemeinsamkeit der Gleitebentheorie und der Netzwerkmodelle besteht in der Grundidee, das makroskopische Materialverhalten durch unterschiedliche Richtungen zu beschreiben. Die Definition eines Konstitutivgesetzes erfolgt eindimensional für die einzelnen Richtung. Der Unterschied liegt in deren Interpretation. In der Gleitebentheorie geben die Normalenvektoren der Gleitebenen die Richtungen vor, innerhalb der Netzwerkmodelle ist es die Orientierung der Polymerketten.

In den 1980er Jahren wird zum ersten Mal der Begriff „Microplane Modell“ verwendet. Bažant und Oh [23] definierten und prägten diesen Begriff im Rahmen der Beschreibung von sprödem Materialverhalten. Mit der Entwicklung der Microplane Theorie waren Bažant und Oh [23] die Ersten, die eine Schädigungsformulierung zur Beschreibung des Materialverhaltens auf unterschiedlichen Ebenen einführten. Ausgangspunkt ihrer Theorie sind die Inhomogenitäten von Beton. Dabei werden die Grenzschichten zwischen der Zementmatrix und den festen Zuschlagsstoffen als bevorzugte Richtung für Mikrorissbildung angesehen. Neben einer allgemeineren Formulierung der Microplane Theorie gegenüber der Gleitebentheorie liegt der Hauptunterschied in der Projektion der makroskopischen Größen auf die einzelnen Ebenen. Die Gleitebentheorie basiert auf einer Projektion des makroskopischen Spannungstensors auf die einzelnen Ebenen (vgl. statische Projektion Abb. 4.1) und wird mit einer Homogenisierung nach Reuss [187] in Verbindung gebracht. Die Microplane Modelle basieren hingegen auf einer kinematischen Projektion und werden mit einer Homogenisierung nach Voigt [214] assoziiert. Als makroskopische Größe wird dabei der Verzerrungstensor auf die einzelnen Ebenen projiziert. Seit den 1980er Jahren wurde das Microplane Modell stetig weiterentwickelt. Das erste Modell von Bažant und Oh [23], die M1 Version, berücksichtigte nur die Normalkomponenten der Ebenen und beschrieb die mikroskopischen Spannungen über ein skalarwertiges Konstitutivgesetz. Die erste Modifikation in der M1⁰ Version [18] des Microplane Modells beinhaltete eine Erweiterung durch die Tangentialrichtungen und somit die Option, Scherung zu beschreiben. Die M1⁰ Erweiterung der M1 Version ermöglicht es, die vorher konstante Querkontraktion von $\nu = 0,25$ auf einen Bereich zwischen $-1 \leq \nu \leq 0,25$ auszuweiten. 1988 wurde das Modell von Bažant und Prat [25] in der M2 Version weiter modifiziert. Die Normalkomponente wurde in eine Gestalt- und Volumenänderung unterteilt, wodurch der Wertebereich für die Querkontraktionszahl auf $-1 \leq \nu \leq 0,5$ erweitert wurde. Die M3 Version [26] baut das Microplane Modell auf moderate Deformationen von bis zu 10% aus. Die M4 Version von Bažant et al. [19, 21] und Caner et al. [44] liefert schließlich eine Erweiterung auf beliebig große Deformationen. Carol et al. [51] fassen die Verallgemeinerung der Microplane Theorie auf große Deformationen zusammen und liefern so einen Überblick über die unterschiedlichen Formulierungsvarianten.

Carol et al. [50] haben die thermodynamische Konsistenz der Microplane Modelle untersucht und mit Ausnahme der M2 Version bestätigt. Kuhl et al. [142] erweiterten die in der M4 eingeführte Energieformulierung auf inelastisches Materialverhalten. Die erste Microplane Version wird ohne Einführung der Energieformulierung als thermodynamisch konsistent angesehen. Seit der Jahrtausendwende wurden weitere Microplane Formulierungen vorgestellt. Für Beton wurden die M5 und M7 Versionen formuliert [20, 45, 46]. Die Versionen M5f, M6, M6f und M7f sind die letzten Entwicklungen des Microplane Modells und dienen der Charakterisierung von faserverstärktem Beton [29, 47, 48]. Neben der Verwendung für Beton und faserverstärkten Beton wurde die Microplane Theorie auch für Ton [22], Erdboden [180], Gestein [24], Hartschäume [43], Faserverbundwerkstoffe [47, 58] und biologisches Gewebe [49] verwendet. Die Charakterisierung von Schaumstrukturen ist dabei für Sandwichstrukturen und geschlossoporige Schäume beschrieben [43]. Eine Beschreibung von offenporigen Schäumen mit einem direkten Bezug zur Mikrostruktur wurde erstmals bei Bleistein et al. [37–39] beschrieben und ist eine neue Art der makroskopischen Charakterisierung von offenporigen Metallschäumen. Seit den 2010er Jahren wird die Microplane Theorie ebenfalls zur Beschreibung des Materialverhaltens von Formgedächtnislegierungen verwendet [121, 154–157, 226].

Parallel zur Weiterentwicklung der Gleitebenentheorie wurden auch die Netzwerkmodelle weiterentwickelt [9]. Miehe et al. [161] haben ein Microsphere Modell vorgestellt, welches in den Grundzügen ähnlich der Microplane Theorie M1 ist. Über eine kinematische Projektion wird der makroskopische Verzerrungstensor auf die Mikroebene projiziert. Auf der Mikroebene werden statt Ebenen lediglich Orientierungen betrachtet. Diese Orientierungen werden direkt den Polymerketten zugeordnet. Die Betrachtung unterschiedlicher Richtungen in der Microsphere Theorie entspricht der Betrachtung der Normalenrichtungen einzelner Ebenen im Rahmen der Microplane Theorie. Erweitert wurde das Microsphere Modell [161] von Miehe et al. [160] um viskoelastisches Materialverhalten und anschließend von Göktepe [95] um Schädigung.

In den 2000er Jahren hat Ihlemann [116] den Begriff der repräsentativen Raumrichtungen geprägt, welcher von Freund et al. [83–85] und Lorenz et al. [151] zu Beginn der 2010er Jahre etabliert wurde. Das Konzept der repräsentativen Raumrichtungen unterscheidet sich von der Microplane oder Microsphere Theorie nur in der Abstraktion. So werden keine ausgewählten Materialien beschrieben, sondern lediglich eindimensionale konstitutive Zusammenhänge ohne direkte physikalische Interpretation der Mikrostruktur definiert. Dabei liegt das Hauptaugenmerk des Konzepts auf der effizienten numerischen Verallgemeinerung eindimensionaler Konstitutivgesetze. Diese führt zu vollständigen dreidimensionalen Materialmodellen. Die Entwicklung der Theorien ist in Abbildung 4.3 zusammengefasst.

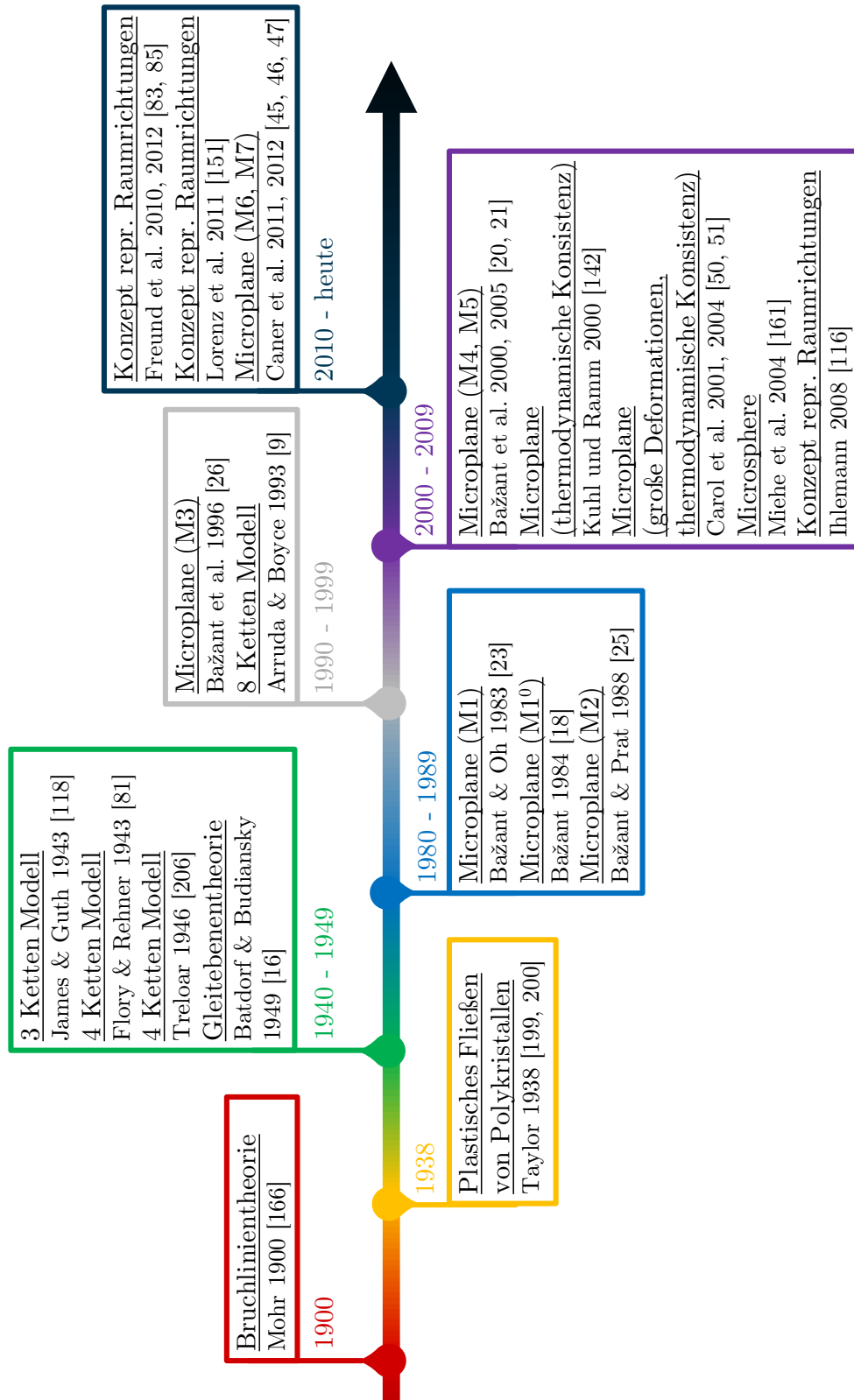


Abbildung 4.3: Zeitliche Entwicklung der Microplane Theorie und verwandter Theorien

4.2.1 Allgemeine Modellvorstellung der Microplane-basierten Theorien

Im Folgenden wird die allgemeine Modellvorstellung der Microplane Theorie eingeführt. Sie bildet die Basis zur genaueren Beschreibung des Multiskalenmodells für Metallschäume. Eine detaillierte Herleitung der Microplane Theorie M1 [23] bildet dabei den Grundgedanken der Microsphere Theorie [161] und des Konzepts repräsentativer Raumrichtungen [83] ab, weshalb auf eine separate Einführung der drei Theorien verzichtet wird. Alle drei Theorien basieren ausschließlich auf der Normalkomponente der einzelnen Ebenen und können identisch beschrieben werden. Der Unterschied der Theorien liegt dabei in der physikalischen Interpretation der einzelnen Richtungen. Die Berechnung der Streckung λ der einzelnen Normalenrichtungen und die Mittelung der Spannungen auf der Mikroebene zu einem makroskopischen Spannungstensor unterscheiden sich nicht. Die Erweiterung der Microplane Theorie M1 um eine Tangentialkomponente wird anschließend genauer beschrieben. Alle spezielleren Formulierungen der Theorie werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet und sind für die Entwicklung des vorgestellten Materialmodells für offenporige Metallschäume nicht relevant.

Die allgemeine Modellvorstellung basiert auf der Idee, das Materialverhalten mit Bezug zur Mikrostruktur zu beschreiben, ohne die Mikrostruktur in ihrer vollständigen Komplexität abzubilden. Die Mikrostruktur eines Körpers wird dabei auf wesentliche Merkmale reduziert. In der Gleitebenentheorie werden die Kristallstruktureigenschaften von Metallen als wesentliche Merkmale verwendet [16]. Bažant et al. [23] hingegen beschreiben das Materialverhalten mithilfe der Grenzschichten zwischen der Zementmatrix und den festen Zuschlagsstoffen von Beton. In der Microsphere Theorie nach Miehe et al. [161] werden die einzelnen Polymerketten betrachtet und deren Orientierung als Richtung analog zur Normalenrichtung der Ebenen in der Microplane Theorie beschrieben. Allen gemeinsam ist die Modellierung einer beliebigen Mikrostruktur. Zunächst wird eine makroskopische Deformation auf die Mikroebene projiziert. Für jeden Punkt des makroskopischen Kontinuums wird auf der Mikroskala eine Einheitskugel definiert, welche wiederum in einzelne Tangentialebenen und damit Richtungen unterteilt wird. Die Tangentialebenen der Einheitskugeln dienen der Beschreibung der Mikrostruktur. Die Normalenrichtung der einzelnen Tangentialebenen bildet die Basis für die einfachsten Modelle. Für jede einzelne Normalenrichtung wird ein eindimensionales Konstitutivgesetz definiert, um aus den projizierten Dehnungen die entsprechenden Spannungen der einzelnen Ebenen zu bestimmen. Eine Erweiterung der Idee um die Tangentialkomponenten der Ebene führt zu einem zusätzlichen eindimensionalen Konstitutivgesetz. Die berechneten mikroskopischen Spannungen für die unterschiedlichen Ebenen der

Einheitskugel werden durch die Integration über die Kugeloberfläche zu Spannungen auf der Makroebene homogenisiert. Zur Reduktion des numerischen Aufwandes wird eine diskrete Anzahl an Richtungen und somit an Ebenen definiert. Die Integration über die Kugeloberfläche wird zu einer gewichteten Summe. Abbildung 4.4 stellt die allgemeine Modellvorstellung für die beschriebene kinematische Projektion dar. Mittels der allgemeinen Modellvorstellung ist es möglich, das von der Mikrostruktur abhängige, makroskopische Materialverhalten von beliebigen Materialien in einer homogen Struktur zu beschreiben.

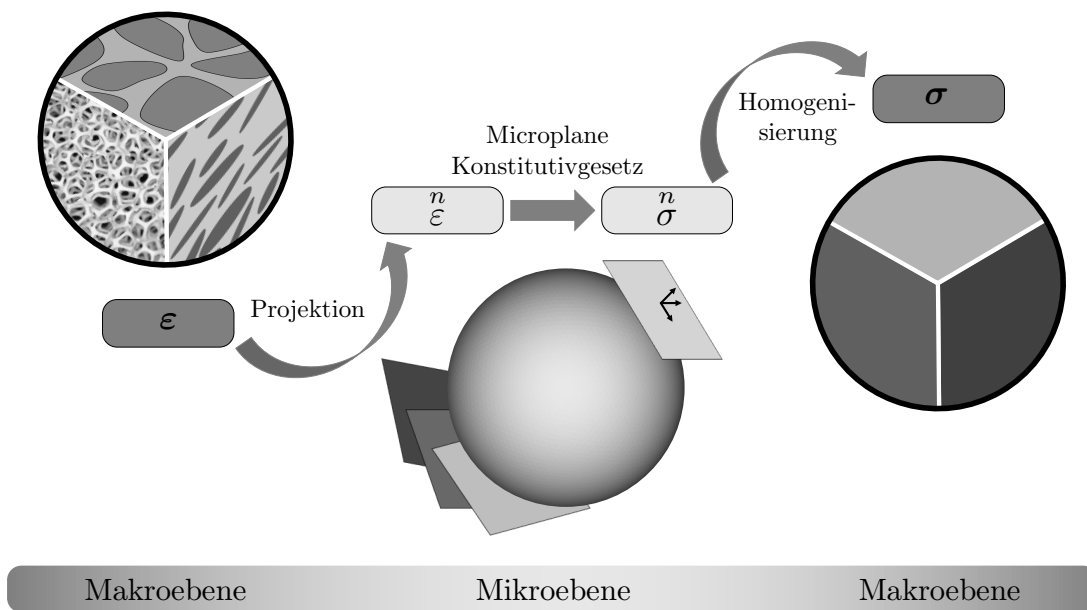


Abbildung 4.4: Grundidee der Microplane Theorie abgewandelt nach Kuhl [140]

Die Diskretisierung der Einheitskugel zur numerischen Integration wurde von Bažant et al. [17, 18, 23] in den 1980er Jahren beschrieben. Abbildung 4.5 zeigt eine Auswahl an potentiellen Diskretisierungen nach Bažant et al. [17]. Im Fall einer orthogonal symmetrischen Diskretisierung (vgl. Abb. 4.5 (c)-(f)) ist aus Gründen der Symmetrie nur ein Achtel der Kugel dargestellt. Für den Fall einer nicht orthogonal symmetrischen Diskretisierung (vgl. Abb. 4.5 (a) und (b)) wird die gesamte Kugel abgebildet. Die Linien in den einzelnen Skizzen dienen lediglich zur Veranschaulichung und zur besseren räumlichen Vorstellung. Die Wichtung der einzelnen Richtungen erfolgt mithilfe unterschiedlicher Annahmen analytisch nach Bažant und Oh [17] und ermöglicht die Beschreibung von isotropem Materialverhalten. Alternativ bietet eine Anpassung der Wichtungsfaktoren die Beschreibung von Anisotropie. Für eine isotrope Verteilung der Wichtungen kann die Grundidee der Voronoi-Diagramme [215, 216] verwendet werden. Jedem Diskretisierungspunkt der Kugeloberfläche wird eine Fläche aus den Punkten zugeordnet, die bezüglich der euklidischen Norm näher an dem speziellen Diskretisierungspunkt liegt als an jedem anderen.

Die in Abbildung 4.5 (a)-(b) dargestellten Diskretisierungen basieren auf einem Pentagondodekaeder mit dem Umkugelradius von eins. Das Pentagondodekaeder ist einer der fünf Platonischen Körper und setzt sich aus zwölf gleichen Fünfecken zusammen. Abbildung 4.5 (a) bildet ein Pentagondodekaeder und gleichzeitig die Diskretisierung der Einheitskugel mit 20 Punkten ab. Aufgrund der Symmetrie vereinfacht sich die Modellierung zu 2×10 Punkten. Die Eckpunkte liegen auf dem Umkreis mit dem Radius eins und die Fünfecke bilden nicht die zugehörigen Flächen eines Voronoi-Diagramms ab. Durch Hinzufügen der Flächenschwerpunkte der einzelnen Fünfecke und die Projektion auf die Einheitskugel wird eine Diskretisierung mit 32 Punkten erreicht, die ebenfalls durch Symmetrie auf 2×16 Punkte reduziert wird (s. Abb. 4.5 (b)). Die weiteren vier Skizzen in Abbildung 4.5 (c)-(f) stellen orthogonal symmetrische Diskretisierungen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Oberflächenpunkten dar.

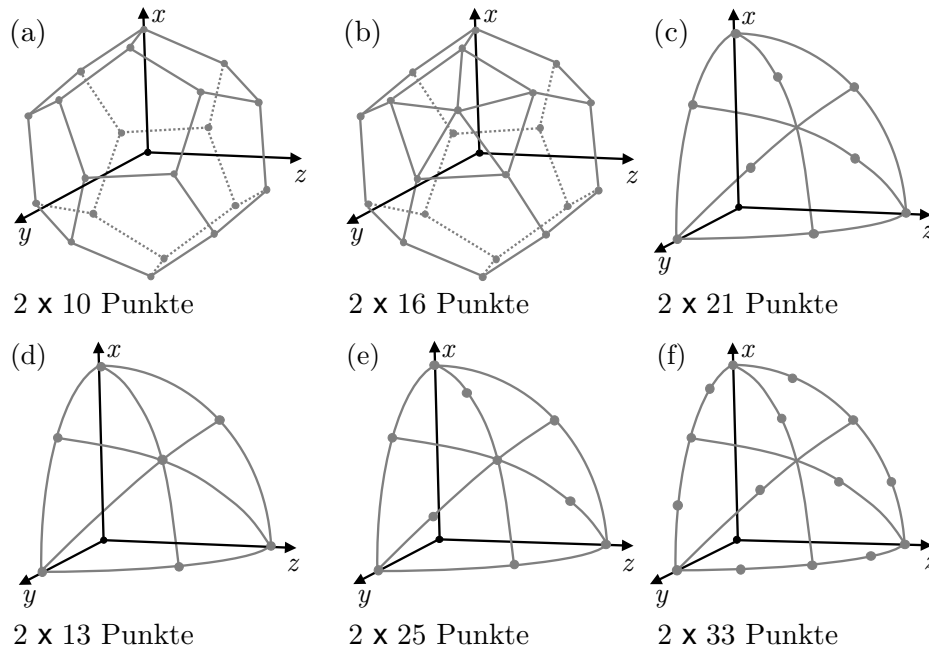


Abbildung 4.5: Abgewandelte Abbildung unterschiedlicher Diskretisierungsmöglichkeiten der Einheitskugel wie von Bažant und Oh [17] eingeführt

In Untersuchungen zur Abhängigkeit der Microplane Theorie von der Ausrichtung der Orientierungen von Bažant et al. [24] wurde die Genauigkeit der einzelnen Diskretisierungen getestet. Die Abweichung wurde durch Berechnungen mit unterschiedlichen Orientierungen der Kugel unter gleichen Lasten bestimmt und die ursprüngliche Orientierung als Referenz betrachtet. Die quantitativen Abweichungen wurden für entfestigendes Verhalten gemessen. Die Analyse zur numerischen Integration der Kugeloberfläche führte Bažant et al. [24] zu dem Ergebnis, dass eine Diskretisierung mit 2×21 Richtungen (s. Abb. 4.5 (c)) mit einer Abweichung von maximal $\pm 3\%$ ein zufriedenstellendes Ergebnis liefert. Eine maximale Abweichung von $\pm 1\%$ wird durch Modelle mit mindestens 2×33 Punkten auf der Kugeloberfläche (s. Abb. 4.5 (f)) erlangt. Für andere Belas-

tungsfälle wurden keine Untersuchungen durchgeführt. In Abbildung 4.5 (c) ist die in der vorliegenden Arbeit verwendete Diskretisierung mit 2×21 Punkten dargestellt. Die genauen Angaben für die Diskretisierung der einzelnen Halbkugeln finden sich in tabellarischer Form bei Bažant et al. [17, 23]. Die Diskretisierung der Kugeloberfläche mit 2×21 Punkten ist in Tabelle 4.1 angegeben. Zur Identifizierung der einzelnen diskreten Richtungen dient der überschriebene Index n einer beliebigen Variablen (\bullet^n). Die eingeführte Notation wird im Folgenden für alle Größen, die zu den diskreten Richtungen der Einheitskugel gehören, verwendet.

Tabelle 4.1: Diskretisierung der Einheitskugel mit 2×21 Oberflächenpunkten nach Bažant et al. [17, 23], wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden als kartesische x - y - z -Koordinate vom Mittelpunkt der Einheitskugel beschrieben

Richtung n	$\overset{n}{x}$ -Koordinate	$\overset{n}{y}$ -Koordinate	$\overset{n}{z}$ -Koordinate	Wichtungsfaktor $\overset{n}{\omega}$
1	1	0	0	0,026521424
2	0	1	0	0,026521424
3	0	0	1	0,026521424
4	0,707106781	0,707106781	0	0,019930147
5	0,707106781	-0,707106781	0	0,019930147
6	0,707106781	0	0,707106781	0,019930147
7	0,707106781	0	-0,707106781	0,019930147
8	0	0,707106781	0,707106781	0,019930147
9	0	0,707106781	-0,707106781	0,019930147
10	0,387907304	0,387907304	0,836095597	0,025071237
11	0,387907304	0,387907304	-0,836095597	0,025071237
12	0,387907304	-0,387907304	0,836095597	0,025071237
13	0,387907304	0,387907304	-0,836095597	0,025071237
14	0,387907304	0,836095597	0,387907304	0,025071237
15	0,387907304	0,836095597	-0,387907304	0,025071237
16	0,387907304	-0,836095597	0,387907304	0,025071237
17	0,387907304	-0,836095597	-0,387907304	0,025071237
18	0,836095597	0,387907304	0,387907304	0,025071237
19	0,836095597	0,387907304	-0,387907304	0,025071237
20	0,836095597	-0,387907304	0,387907304	0,025071237
21	0,836095597	-0,387907304	-0,387907304	0,025071237

4.2.2 Grundlagen der Microplane Theorie M1

Die Grundlagen der Modellierung für die Normalkomponente der Mikroebene sind für die Microplane und Microsphere Theorie sowie für das Konzept repräsentativer Raumrichtungen in weiten Teilen identisch. Aus diesem Grund wird bewusst auf die detaillierte Beschreibung der einzelnen Theorien verzichtet. Da die Microplane Theorie M1 die Basis der Modelle bildet, dient diese gleichzeitig als Namensgeber des Kapitels. Die Grundlagen werden für beliebig große Deformationen eingeführt. Die dabei verwendete Notation wird analog zu Kapitel 2 verwendet.

Die Basis bildet die diskretisierte Kugeloberfläche. Die Verbindung des Kugelmittelpunktes zu den einzelnen Punkten auf der Kugeloberfläche dient als Normalenvektor der einzelnen Mikroebenen. Die Definition der Kugel als Einheitskugel realisiert eine direkte Verwendung der Normalenvektoren, da diese normierte Richtungsvektoren darstellen. Aus den genannten Symmetrien erfolgt die Beschreibung ausschließlich für eine Halbkugel und wird bei der numerischen Integration durch deren Superposition mit dem Faktor zwei berücksichtigt. In Abbildung 4.6 dient die zweidimensionale Vereinfachung einer Einheitskugel der Darstellung einer beliebigen Deformation und der damit verbundenen Streckung der Normalenvektoren. Die verwendeten Größen zur Herleitung der Dehnung der einzelnen Normalenrichtungen sind in der Skizze eingezeichnet. Zur Beschreibung der Dehnung wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} verwendet.

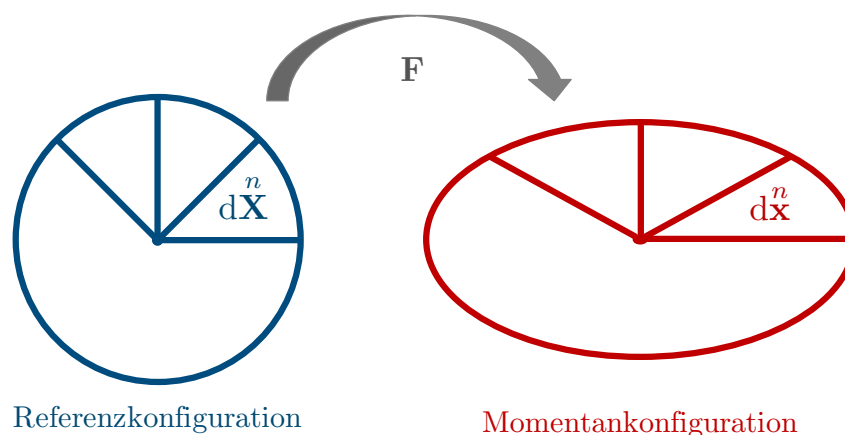


Abbildung 4.6: Zweidimensionale Veranschaulichung der Einheitskugel als Einheitskreis; links im undeformierten Zustand und in den Größen der Referenzkonfiguration; rechts in einem exemplarisch deformierten Zustand und in den Größen der Momentankonfiguration

Durch die Definition als Einheitskugel wird der Normalenvektor der Ebene durch den Verbindungsvektor vom Mittelpunkt der Einheitskugel zum entsprechenden Punkt auf der Oberfläche der Einheitskugel beschrieben. Die entsprechende Streckung des Normalenvektors ergibt sich aus der Streckung dieses Verbindungsvektors. Bezogen auf die Kontinuumsmechanik entspricht der Verbindungsvektor der undeformierten Kugel einem Linienelement $d\mathbf{X}^n$ der Referenzkonfiguration mit der Länge eins. Dementsprechend wird der Verbindungsvektor in der Momentankonfiguration mit dem Linienelement $d\mathbf{x}^n$ beschrieben. Die Streckung eines Linienelements wird nach Gleichung (2.11) berechnet. Die unterschiedlich orientierten Normalenvektoren der n Richtungen werden in der Referenzkonfiguration durch die Einheitsvektoren \mathbf{n}^n beschrieben. Mit diesem Zusammenhang werden die definierten Linienelemente $d\mathbf{X}^n$ der Referenzkonfiguration durch die Einheitsvektoren \mathbf{n}^n der einzelnen Richtungen der Einheitskugel ersetzt. Das Umstellen der Gleichung (2.11) führt zur Berechnung der Streckung λ^n der n Richtungen der Einheitskugel mit

$$\lambda_N^n = \sqrt{\frac{\mathbf{n}^n}{\sqrt{\mathbf{n}^n \cdot \mathbf{n}^n}} \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\mathbf{n}^n}{\sqrt{\mathbf{n}^n \cdot \mathbf{n}^n}}}, \quad (4.3)$$

als Funktion der Normalenvektoren \mathbf{n}^n der Referenzkonfiguration. Die Norm der n Einheitsvektoren $\sqrt{\mathbf{n}^n \cdot \mathbf{n}^n}$ ist eins und die Streckung λ_N^n der einzelnen Richtungen wird mit

$$\lambda_N^n = \sqrt{\mathbf{n}^n \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}^n} \quad (4.4)$$

berechnet. Durch die Definition des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} über den rechten Cauchy-Green-Strecktensor \mathbf{C} aus Gleichung (2.18) wird die Streckung als

$$\lambda_N^n = \sqrt{\mathbf{n}^n \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}^n} \quad (4.5)$$

dargestellt. Über den eindimensionalen Zusammenhang der Streckung mit der Dehnung in der Referenzkonfiguration

$$\lambda_N^n = \sqrt{2E_N^n + 1}, \quad (4.6)$$

wird schließlich der Zusammenhang des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} und dessen Projektion E_N^n auf die n Richtungen der Einheitskugel mit

$$E_N^n = \mathbf{n}^n \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}^n \quad (4.7)$$

definiert. Somit lässt sich die beschriebene kinematische Projektion des Green-Lagrange-Verzerrungstensors anhand des Projektionstensors

$${}^n\mathbf{N} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.8)$$

als

$${}^nE_N = \mathbf{N} : \mathbf{E}, \quad (4.9)$$

wie bei Carol et al. [51] bzw. Kuhl et al. [141] eingeführt, schreiben. Die projizierten Dehnungen in die n diskreten Richtungen werden verwendet, um mithilfe eines beliebigen eindimensionalen Konstitutivgesetzes die Spannungen ${}^n\bar{P}_N$ der n Richtungen zu bestimmen (vgl. Abb. 4.4). Allgemein wird die Spannung ${}^n\bar{P}_N$ vom Typ der Nominalspannung als Funktion der Streckungen ${}^n\lambda_N$, der Streckgeschwindigkeiten ${}^n\dot{\lambda}_N$ und einem Satz von i internen Variablen Γ_i mit

$${}^n\bar{P}_N = \bar{P}_N \left({}^n\lambda_N, {}^n\dot{\lambda}_N, \Gamma_i \right) \quad (4.10)$$

bestimmt. Aus der Homogenisierung und der damit verbundenen Bedingung, dass die makroskopische Spannungsleistung identisch der effektiven Spannungsleistung sein muss, folgt die Forderung, dass die makroskopische Spannungsleistung dP_σ identisch mit der Summe aller Spannungsleistungen $d{}^n\bar{P}_\sigma$ der unterschiedlichen Richtungen ist. Somit wird über die Gleichung

$$dP_\sigma = \sum_n d{}^n\bar{P}_\sigma \quad (4.11)$$

die Grundlage zur Bestimmung der makroskopischen Spannung geliefert. Durch den Bezug der Spannungs- und Dehnungsmaße auf die Referenzkonfiguration wird Gleichung (4.11) als

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dV = \sum_n {}^n\bar{P}_N {}^n\dot{\lambda}_N d\bar{V} = \sum_n {}^n\bar{S}_N {}^n\lambda_N {}^n\dot{\lambda}_N d\bar{V} \quad (4.12)$$

in Abhängigkeit des 2. PK sowie dessen eindimensionalem Pendant ${}^n\bar{S}_N$ und des Green-Lagrange-Verzerrungstensors \mathbf{E} dargestellt. Der Quotient $d\bar{V}/dV$ beschreibt den Anteil des Volumens einer bestimmten Raumrichtung im Verhältnis zu einem betrachteten Volumenelement des gesamten Kontinuums. Das betrachtete Volumenelement des Kontinuums entspricht in der Referenzkonfiguration dem Volumen der Einheitskugel. Das

Volumenverhältnis entspricht den Wichtungsfaktoren $\overset{n}{\omega}$, wodurch sich die Summe zu

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \sum_n \overset{n}{S}_N \overset{n}{\lambda}_N \overset{n}{\dot{\lambda}}_N \overset{n}{\omega} \quad (4.13)$$

vereinfacht. Werden finite Flächenelemente betrachtet, kann die Berechnung der Wichtungsfaktoren durch die Voronoi-Diagramme erfolgen und wird als ausreichend genaue Näherung angesehen. Die zeitliche Ableitung der Streckung $\overset{n}{\lambda}_N$ aus Gleichung (4.4) wird mit dem Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{C}} = 2\dot{\mathbf{E}} \quad (4.14)$$

in Abhängigkeit der Normalenvektoren $\overset{n}{\mathbf{n}}$ und der Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{E}}$ als

$$\overset{n}{\dot{\lambda}} = \frac{1}{\overset{n}{\lambda}} \overset{n}{\mathbf{n}} \otimes \overset{n}{\mathbf{n}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (4.15)$$

dargestellt. Das Einsetzen des gewonnenen Zusammenhangs aus Gleichung (4.15) in Gleichung (4.12) ergibt

$$\left(\mathbf{S} - \sum_n \overset{n}{S}_N \overset{n}{\mathbf{n}} \otimes \overset{n}{\mathbf{n}} \overset{n}{\omega} \right) : \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (4.16)$$

Da Gleichung (4.16) für beliebige Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{E}}$ gelten muss, wird der makroskopische 2. PK beschrieben durch

$$\mathbf{S} = \sum_n \overset{n}{S}_N \overset{n}{\mathbf{n}} \otimes \overset{n}{\mathbf{n}} \overset{n}{\omega} \quad (4.17)$$

und stellt die Homogenisierung der mikroskopischen Spannungen dar. Eine detaillierte Beschreibung für beliebige Diskretisierungen ist bei Freund [83] gegeben. Bei Carol et al. [51] und Kuhl [140] führen alternative Überlegungen zum identischen Ergebnis für die Homogenisierung der Spannungen für eine Normalenrichtung $\overset{n}{\mathbf{n}}$ im Rahmen der Microplane Theorie.

4.2.3 Erweiterung der Microplane Theorie M1

Im Laufe der Jahre wurde eine Vielzahl an unterschiedlichen Microplane Modellen entwickelt, um gleichzeitig unterschiedliche Materialien, wie z. B. Beton, geschlossensporige Schäume [43], Polymere [95, 161], Faserverbundwerkstoffe [47, 58] oder neuere

Materialien, wie Formgedächtnislegierungen [154, 155], zu charakterisieren. An dieser Stelle wird die für diese Arbeit verwendete Erweiterung um eine Tangentialkomponente auf der Mikroebene vorgestellt. Eine Übersicht über einen Großteil der Erweiterungen bezüglich der Microplane Theorie ist bei Carol et al. [51] gegeben.

Zusätzlich zur Projektion des Dehnungstensors in die Normalenrichtungen der einzelnen Tangentialebenen wird die Dehnung in die Tangentialebene projiziert. Analog zur Projektion in die Normalenrichtung (vgl. Gl. (4.9)) wird ein Projektionstensor

$$\mathbf{T}^n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}^4 - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.18)$$

mit den Normalenvektoren der Ebenen und dem Einheitstensor \mathbf{I}^4 vierter Stufe definiert. Die Dehnung \mathbf{E}_T^n in der Tangentialebene ergibt sich als Vektor

$$\mathbf{E}_T^n = \mathbf{T}^n : \mathbf{E} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{n} E_N^n \quad (4.19)$$

und kann in Abhängigkeit der Normalenvektoren der einzelnen Richtungen und der in Normalenrichtung projizierten Dehnung bestimmt werden. Da die Dehnungen E_N^n \mathbf{n} und \mathbf{E}_T^n stets senkrecht aufeinander stehen, kann der Tangentialvektor \mathbf{t}^n mit

$$\mathbf{t}^n = \frac{\mathbf{E}_T^n}{|\mathbf{E}_T^n|} \quad (4.20)$$

definiert werden. In Abbildung 4.7 ist die Projektion der makroskopischen Dehnung als Vektor auf die n -te Ebene und die anschließende Zerlegung des Vektors in die Normal- und Tangentialebene schematisch dargestellt.

Unter Verwendung des Betrags $E_T^n = |\mathbf{E}_T^n|$ der tangentialen Dehnungskomponente ergibt sich in Tangentialrichtung ein eindimensionales Konstitutivgesetz. Die berechnete Spannung \mathbf{S}_T^n des eindimensionalen Konstitutivgesetzes entspricht dem Betrag des zweidimensionalen Spannungsvektors \mathbf{S}_T^n mit

$$\mathbf{S}_T^n = |\mathbf{S}_T^n|. \quad (4.21)$$

Für die definierten orthogonalen Normalen- und Tangentialvektoren folgt die Homogenisierung der Normalen- und Tangentialkomponente unter Berücksichtigung der Beziehung ${}^n \mathbf{t} \cdot {}^n \mathbf{n} = 0$. Weiter führt der Zusammenhang

$${}^n \mathbf{t} \cdot \left({}^n \mathbf{n} \cdot \overset{4}{\mathbf{I}} \right) = \left({}^n \mathbf{t} \otimes {}^n \mathbf{n} \right) : \overset{4}{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \left({}^n \mathbf{t} \otimes {}^n \mathbf{n} + {}^n \mathbf{n} \otimes {}^n \mathbf{t} \right) \quad (4.22)$$

zu der makroskopischen Spannung

$$\mathbf{S} = \sum_n \left(S_N {}^n \mathbf{n} \otimes {}^n \mathbf{n} + S_T \frac{1}{2} \left({}^n \mathbf{t} \otimes {}^n \mathbf{n} + {}^n \mathbf{n} \otimes {}^n \mathbf{t} \right) \right) \omega. \quad (4.23)$$

Erweiterungen wie der volumetrisch-isochoere Split werden in der Implementierung des Multiskalenmodells nicht verwendet und entsprechend nicht weiter ausgeführt. Die Grundideen für alle in dieser Arbeit durchgeführten Weiterentwicklungen der Microplane Theorie sind mit den dargestellten Ansätzen beschrieben.

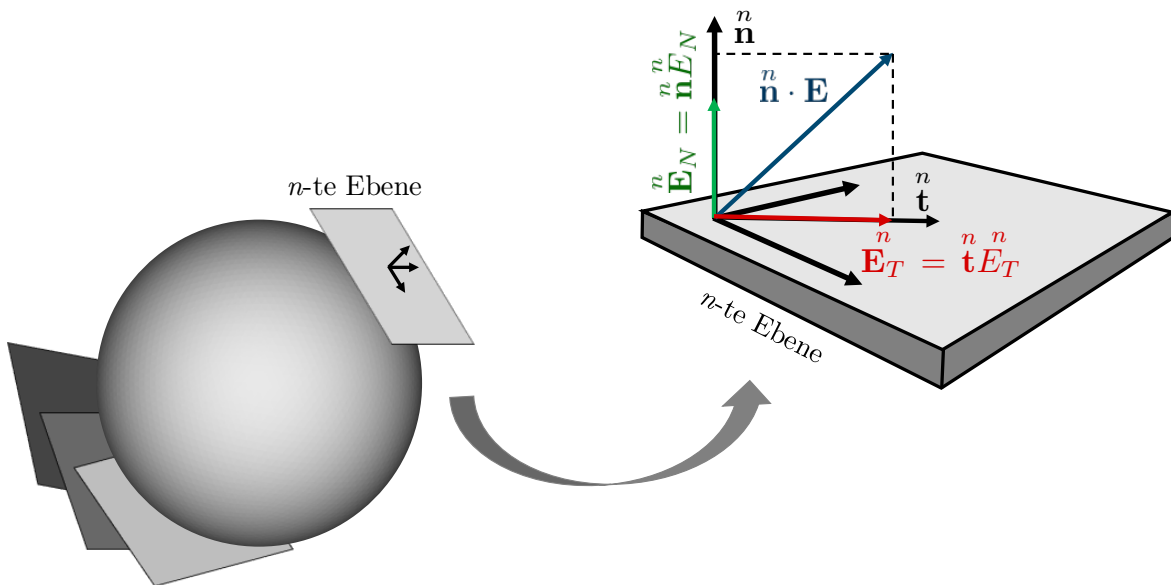


Abbildung 4.7: Projektion der makroskopischen Verzerrung auf die n -te Ebene einer diskretisierten Kugel und Projektion des Verzerrungsvektors der Ebene in Normal- und Tangentialkomponente

5

Materialmodellierung

Zur Beschreibung des makroskopischen Materialverhaltens von offenporigen Metallschäumen mit Bezug zur Mikrostruktur dient ein Homogenisierungsansatz. Die vorgestellte Microplane Theorie aus Kapitel 4 liefert das mathematische Grundgerüst. Eine neuartige Interpretationsmöglichkeit der Einheitskugeln der Microplane Theorie ermöglicht eine Skalenkopplung zwischen der Makro- und Mikroskala offenporiger Metallschäume. Dazu wird jeder Punkt des Kontinuums gleichzeitig als statistische Verteilung aller Stege und als eine Einheitskugel interpretiert. Daraus resultiert die Interpretation der einzelnen Richtungen der Einheitskugel als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die einzelnen Stege und somit kann jede Richtung mit dem Verhalten eines Steges beschrieben werden. Zunächst wird ein erstes Modell auf Basis der M1 Theorie [23] vorgestellt. Innerhalb des Modells werden ausschließlich die Komponenten in Normalenrichtung betrachtet. Die 1D Materialmodelle der Microplane Theorie werden durch Zug- und Druckversuche an einzelnen Stegen motiviert. Im zweiten Teil des Kapitels wird die Modellvorstellung um Biegemechanismen erweitert. Die Grundlage der Modellerweiterung um das Biegen von Stegen bildet die M1⁰ Theorie [18]. Neben der Identifikation der Eigenschaften der Normalenrichtung durch Zug- und Druckversuche wird die Tangentialrichtung mit einem Biegen der einzelnen Stege des Schaums assoziiert. Motiviert wird diese Erweiterung durch makroskopische Versuche am gesamten Schaum. Die Erweiterung um die Berücksichtigung von statistisch ausgewerteten Stegorientierungen ermöglicht es, weitere Mikrostrukturparameter in das Modell einzubeziehen. Daraus resultiert die Option, das Modell für unterschiedliche Schaumstrukturen anzupassen. Den Abschluss des Kapitels bildet die Ausarbeitung der numerischen Umsetzung des Modells in FEAPTM [201–203].

5.1 Microplane-basiertes Multiskalenmodell für offenporige Metallschäume

5.1.1 Modellvorstellung

Zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Metallschäumen auf der Makroebene wird ein auf der Microplane Theorie nach Bažant und Oh [23] basierendes Modell verwendet. Das Hauptaugenmerk des Modellierungsansatzes liegt auf der Abbildung des mechanischen Verhaltens der Makroebene durch eine phänomenologische Beschreibung der Experimente der Mikroebene. Die in Kapitel 4 vorgestellte M1 Microplane Theorie [23] bildet die Basis der Modellierung und die beschriebenen Formeln stellen die Grundlage der numerischen Umsetzung dar. Die Beschreibung des makroskopischen Verhaltens von Metallschäumen erfolgt mit der Betrachtung des gesamten Schaums als homogenes Kontinuum (vgl. Abb. 5.1 (a)).

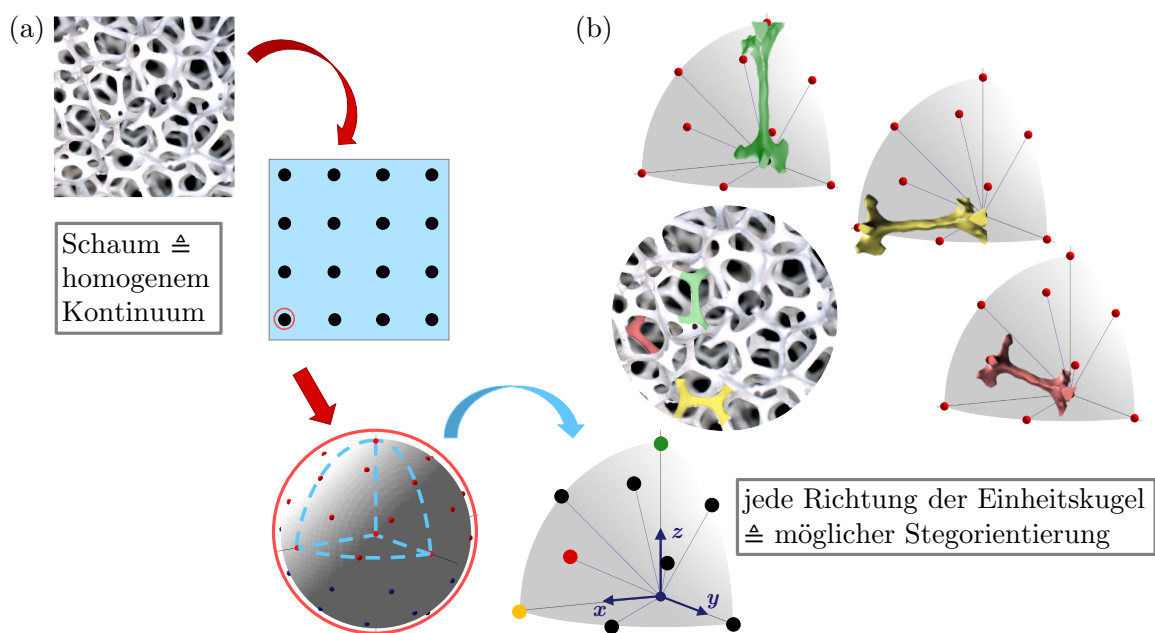


Abbildung 5.1: Interpretation des makroskopischen Schaums als homogenes Kontinuum (a); Auffassung jeder Einheitskugel als statistische Verteilung der Stegorientierungen, woraus die Interpretation jeder Richtung der Einheitskugel als eine mögliche Stegorientierung folgt; Berücksichtigung der Stegorientierung durch Richtungen der diskretisierten Einheitskugel verdeutlicht an einem Achtel der Kugel (b)

Jeder Punkt des Kontinuums bildet die statistische Verteilung der Stegorientierung ab und gleichzeitig wird dort eine Einheitskugel definiert. Damit repräsentiert die Einheitskugel die statistische Verteilung aller Stege und jede einzelne Richtung der Einheitskugeln wird durch das Verhalten der Stege bestimmt. Durch diese simultane Interpretation des Kontinuumpunktes folgt die Kopplung der Mikro- mit der Makroskala, wie in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Orientierung des Steges innerhalb des Schaums wird dabei durch die unterschiedlichen Richtungen der diskretisierten Einheitskugel (s. Kap. 4.2.1) in das Modell einbezogen. Da die 2×21 diskret verteilten Richtungen der Einheitskugel nicht alle Stegorientierungen abbilden, werden sie den nächstmöglichen Richtungen zugeordnet. Abbildung 5.1 (b) zeigt die Zuordnung der Stegorientierungen zu den Richtungen der Einheitskugel für drei exemplarische Richtungen einer Viertelkugel.

In der M1 Theorie werden die Deformationen der einzelnen Richtungen nur über ihre Normalenrichtung beschrieben. In der beschriebenen Modellvorstellung ist diese gleichbedeutend mit der Belastung der Einzelstege unter Zug- bzw. Druckbelastung. Die Bestimmung der 1D Konstitutivgesetze der einzelnen Stege wird durch eine rein phänomenologische Beschreibung der uniaxialen Versuche an Einzelstegen vorgenommen. Durch die dreidimensionale Geometrie der Stege ist es notwendig, die in den Experimenten ermittelten Daten zu normieren, um der Einheitslänge und der reinen eindimensionalen Ausdehnung der einzelnen Richtungen der Einheitskugel zu entsprechen. Damit ist eine Beschreibung des makroskopischen mechanischen Verhaltens von Metallschäumen rein durch Versuche an einzelnen Stegen des Schaums möglich. Das makroskopische Verhalten wird dementsprechend ausschließlich durch Konstitutivgleichungen der Mikroebene beschrieben. Gleichzeitig wird durch die Homogenisierung im Rahmen der Microplane Theorie kein mikroskopisches Modell verwendet, wodurch die Vernetzung der Mikroebene und der damit verbundene höhere numerische Aufwand entfällt. Das eingeführte Modell bildet somit eine neue Möglichkeit zur Beschreibung des Materialverhaltens von Metallschäumen. Die entwickelte Modellvorstellung zur skalenübergreifenden Charakterisierung von Metallschäumen entspricht einem Multiskalenmodell (vgl. Abb. 3.5).

Für die Modellentwicklung wird zunächst eine Implementierung mit einer gleichmäßigen Verteilung der Stegorientierungen im Schaum vorgenommen. Die von Bažant und Oh [23] vorgestellten Diskretisierungen besitzen Wichtungsfaktoren zur Beschreibung von isotropem Materialverhalten. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Steg einer der diskreten Richtungen zugeordnet wird, entspricht dem Wichtungsfaktor dieser Richtung. Für die Annahme, dass alle Stegorientierungen gleich häufig auftreten, können somit die Wichtungsfaktoren aus Tabelle 4.1 verwendet werden.

5.1.2 Numerische Umsetzung

Zur numerischen Umsetzung der beschriebenen Modellvorstellung wird ein Materialmodell in Form einer Umat-Routine in der FE-Software FEAPTM implementiert. Der Hauptvorteil der Umat-Routine in FEAPTM liegt in der Möglichkeit, das Materialverhalten direkt für einen Integrationspunkt des FE-Netzes zu definieren. Alle notwendigen Schritte, die im Rahmen der FEM standardmäßig durchgeführt werden müssen, sind im Aufbau von FEAPTM zur Verwendung der Umat-Routine enthalten. Der Zusammenhang des FE-Modells und der Mikrostruktur wird durch die Zuordnung jedes Integrationspunktes zu einem Punkt des Kontinuums beschrieben. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, entspricht somit jeder Integrationspunkt der statistischen Verteilung der Stege im Schaum und gleichzeitig einer Einheitskugel des Microplane Modells.

Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird eine finite Theorie für beliebige Deformationen zugrunde gelegt. Als Eingangsgröße für die Umat-Routine dient der Deformationsgradient an jedem Integrationspunkt. Die Eingangsgrößen können beliebig erweitert werden und ermöglichen somit die Übergabe von Materialparametern, die in einer Eingabedatei definiert werden. Die Ausgabe der Umat-Routine muss in Form des Cauchy-Spannungstensors und des zugehörigen Steifigkeitstensors in der Momentankonfiguration erfolgen.

Da im Allgemeinen der Steifigkeitstensor aus der Differentiation der Spannung nach der Dehnung bestimmt wird, muss für jede Änderung des Konstitutivgesetzes der Steifigkeitstensor neu bestimmt werden. Besonders im Fall von nichtlinearen Konstitutivgesetzen wird der Aufwand zur analytischen Bestimmung des Steifigkeitstensors groß. Zur schnelleren Änderung des Konstitutivgesetzes bietet es sich an, die analytische Differentiation durch eine numerische zu ersetzen.

Die Bestimmung des Steifigkeitstensors entspricht der Bestimmung der Steigung einer beliebigen mehrdimensionalen Funktion. An dieser Stelle wird auf den Begriff der numerischen Tangente [96] verwiesen, die das oben beschriebene Problem aufgreift. Für eine beliebige Funktion $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ in Abhängigkeit des n dimensionalen Vektors $\tilde{\mathbf{x}}$ folgt der Differentialquotient zur Bestimmung der Steigungsmatrix \mathbf{m} mit

$$\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})}{d\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{x}_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{x}_n} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

und kann in Indexschreibweise als

$$m_{ij} = \frac{\partial f_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_j} \quad (5.2)$$

dargestellt werden. Durch Ersetzen des Differentialquotienten in Gleichung (5.2) mithilfe der Definition des Differenzenquotienten ergeben sich die Komponenten der Steigungsmatrix zu

$$m_{ij} = \frac{\partial f_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{f_i(\tilde{\mathbf{x}} + \Delta x \hat{\mathbf{x}}_j) - f_i(\tilde{\mathbf{x}})}{\Delta x}, \quad (5.3)$$

mit der Variation $\Delta x \approx v(1 + |\tilde{x}_j|)$. Dabei entspricht v annähernd der Wurzel aus der Toleranz des gewählten Datentyps [177] und $\hat{\mathbf{x}}_j$ dem Einheitsvektor der j -ten Richtung. Dieser Zusammenhang ermöglicht es, den Steifigkeitstensor zu einem beliebigen Spannungstensor zu bestimmen. Durch die Verwendung der numerischen Tangente wird das implementierte Materialmodell universell einsetzbar und beliebige Methoden zur Berechnung des makroskopischen Spannungstensors am Integrationspunkt können verwendet werden. Im Rahmen der Microplane Theorie ist die Bestimmung der eindimensionalen Steifigkeiten wegen des komplexen nichtlinearen Materialverhaltens aufwendig. Die Berechnung der Spannung durch ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren ermöglicht keine explizite Formulierung des Konstitutivgesetzes und somit keine einfache analytische Ableitung. Mit der Verwendung der numerischen Tangente entfällt dieser Schritt und die eindimensionalen konstitutiven Zusammenhänge sind variabel, ohne die Steifigkeiten zu bestimmen.

Innerhalb der Umat-Routine wird aus dem Deformationsgradienten unter Verwendung von Gleichung (2.12) der Green-Lagrange-Verzerrungstensor bestimmt (vgl. Gl. (2.18)). Dieser dient als Grundlage für die Implementierung des Microplane Modells. Zur Projektion des Green-Lagrange-Verzerrungstensors im Rahmen der Microplane Theorie wird zunächst die Einheitskugel definiert. Dazu wird die in Tabelle 4.1 angegebene Diskretisierung für eine Kugel mit 2×21 diskreten Richtungen definiert. Die Einheitsvektoren der definierten Kugel dienen als Normalenvektoren für die Microplane Theorie. Unter der Verwendung der Normalenvektoren wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor in die einzelnen Richtungen der Einheitskugel projiziert (vgl. Gl. (4.9)). Für jede Richtung wird anschließend ein Konstitutivgesetz zur Berechnung der Spannung definiert. Hierbei wird das unterschiedliche Verhalten der Stege unter Zug- und Druckbelastung anhand einer Fallunterscheidung berücksichtigt. Die Definition der Konstitutivgesetze wird an die später vorgestellten experimentellen Ergebnisse angepasst. Anschließend wird der makroskopische 2. PK durch die in Gleichung (4.17) beschriebene Homogenisierung berechnet. Die Verwendung der numerischen Tangente erfordert die Berechnung

der Spannung für einen variierten Green-Lagrange-Verzerrungstensor zur Bestimmung des Steifigkeitstensors $\overset{4}{\mathcal{C}}$ in der Referenzkonfiguration. Als letzter Schritt erfolgt die Berechnung des Cauchy-Spannungstensors und des Steifigkeitstensors $\overset{4}{\mathcal{D}}$ in der Momentankonfiguration durch einen push forward. Der Cauchy-Spannungstensor wird, wie in Gleichung (2.25) beschrieben, aus dem 2. PK bestimmt. Der push forward des Steifigkeitstensors $\overset{4}{\mathcal{C}}$ ist definiert als

$$\overset{4}{\mathcal{D}} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F} : \overset{4}{\mathcal{C}} : \mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T. \quad (5.4)$$

Die Herleitung des Zusammenhangs ist bei Bonet und Wood [40] und in der Dokumentation von FEAPTM [202] gegeben. Die Beschreibung der implementierten eindimensionalen Konstitutivgesetze erfolgt nach der Auswertung der Zug- und Druckversuche an Einzelstegen in Kapitel 7, um einen direkten Bezug zum mechanischen Verhalten auf der Mikroebene herzustellen.

5.2 Erweitertes Microplane Multiskalenmodell

Die Motivation zur Erweiterung des aus Zug- und Druckdaten bestehenden Modells folgt aus Beobachtungen in Experimenten am gesamten Schaum. Wie in Abbildung 5.2 exemplarisch für einen uniaxialen Druckversuch dargestellt, ist die Deformation der einzelnen Stege nicht allein durch uniaxiale Deformation charakterisiert. Einige Stege erfahren unter der makroskopisch uniaxialen Druckbelastung eine Verschiebung senkrecht zur Stegorientierung. Die rot gekennzeichneten Stege erfahren eine Deformation, die mit einer Biegebeanspruchung vergleichbar ist. Die gestrichelten Linien in Abbildung 5.2 stellen die ursprünglichen Konfigurationen von jeweils drei Stegen dar. Für eine fortschreitende Deformation ändert sich die Konfiguration der drei Stege. Die gestrichelte Linie ist für alle drei Zeitpunkte identisch. Dabei wird das reale Verhalten der Stege in makroskopischen Experimenten durch die Überlagerung von Stauchung bzw. Dehnung und einer Zwei- bzw. Drei-Punkt-Biegung charakterisiert. Die Motivation am realen Verhalten von Schäumen unter uniaxialer makroskopischer Belastung liefert die Annahme, dass für alle makroskopischen Lastfälle eine Überlagerung von einer Zug- bzw. Druckbelastung mit einer Biegebelastung auftritt.

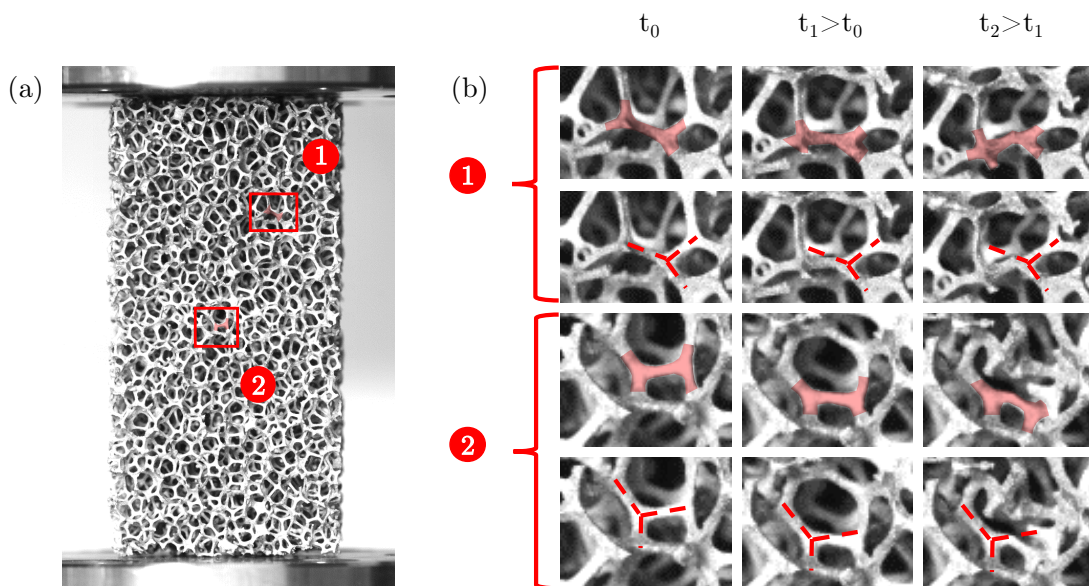


Abbildung 5.2: Motivation zur Erweiterung des Microplane Modells um die Biegung der Stege; (a) Makroskopische Probe unter Druckbelastung; (b) Bildserie aus dem Versuch für die Bereiche 1 und 2 aus (a) für drei Zeitpunkte

Mit der Vereinfachung, dass die Zwei- und Drei-Punkt-Biegung den gleichen Deformationsmechanismus repräsentieren, wird in der Modellierung der Bezug zur Zwei-Punkt-Biegung hergestellt. Die Erweiterung der Modellvorstellung um eine Biegung erfordert eine zusätzliche Richtung im Rahmen der Microplane Theorie. Diese ist in der $M1^0$ Theorie zusätzlich mit der Tangentialkomponente der einzelnen Ebenen gege-

ben (s. Kap. 4.2.3). Mit den Erkenntnissen aus den makroskopischen Experimenten, dass die Stege zusätzlich senkrecht zu ihrer Stegachse deformiert werden, bildet die $M1^0$ Theorie die Basis einer erweiterten Interpretation. Die Tangentialkomponente der Dehnung wird als normierte Durchbiegung der einzelnen Richtungen der Einheitskugel betrachtet. In der Modellvorstellung, dass jede Richtung der Einheitskugel eine mögliche Stegorientierung des realen Schaums darstellt, entspricht dies der Durchbiegung eines Steges. Somit wird die Tangentialkomponente der Microplane $M1^0$ Theorie durch eine Zwei-Punkt-Biegung an Stegen beschrieben.

Da in der realen Deformation sowohl Zwei- als auch Drei-Punkt-Biegung auftritt, wird der Unterschied der experimentellen Ergebnisse an späterer Stelle diskutiert. Abbildung 5.3 (a) zeigt die Erweiterung um eine Tangentialkomponente der Microplane Theorie am Beispiel einer Achtelkugel. Die Normalkomponente ist in Grün und die Tangentialkomponente in Rot dargestellt. Die Kombination aus beiden Komponenten ergibt die in Gelb dargestellte Gesamtverschiebung der Diskretisierungspunkte der Einheitskugel. In Abbildung 5.3 (b) ist die Interpretation der Normal- und Tangentialkomponente als uniaxiale Verschiebung und Durchbiegung mit analogen Farben am Steg dargestellt. Durch den zusätzlichen Bezug zur Biegung von Stegen wird in Kombination mit der phänomenologischen Beschreibung der Zug- und Druckversuche eine möglichst reale Beschreibung der Mikrostruktur erreicht. Der weitere konstitutive Zusammenhang für die einzelnen Richtungen der Einheitskugel liefert einen separaten Satz an Materialparametern, der die Querkontraktion des Modells beeinflusst.

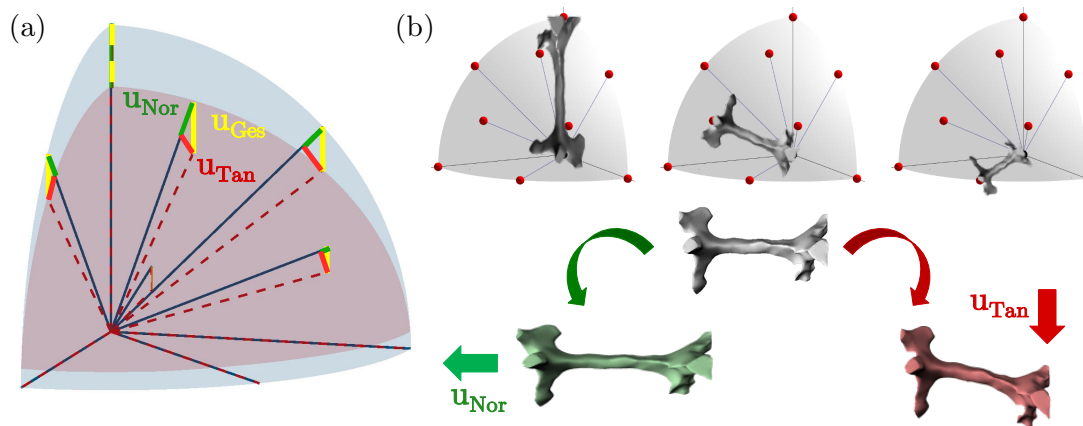


Abbildung 5.3: Aufteilung der gesamten Verschiebung der diskreten Oberflächenpunkte der Einheitskugel in Normal- und Tangentialverschiebung (a); Interpretation der Normalverschiebung als uniaxiale Druck- bzw. Zuglast und der Tangentialverschiebung als Zwei-Punkt-Biegung für jede Richtung und somit für den Einzelsteg

Die Interpretation der Tangentialkomponente als Biegung der Stege bietet die Option, unterschiedliches Verhalten für variierte Mikrostrukturen zu berücksichtigen. Für einen Schaum mit dünnen langen Stegen kann die Biegung als dominanter angenommen werden und dementsprechend die Tangentialkomponente im Modell stärker gewichtet werden. Somit bietet sich eine Vielzahl von Optionen, auf einzelne Struktureigenschaften des Schaums einzugehen. Die Implementierung der dargestellten Erweiterung ist im Wesentlichen identisch zum beschriebenen Vorgehen für das ursprüngliche Modell. Die Unterschiede liegen in der zusätzlichen Projektion des Green-Lagrange-Verzerrungstensors in die Tangentialrichtung. Dazu wird der in Gleichung (4.19) gegebene Zusammenhang genutzt. Zusätzlich wird die Homogenisierungsvorschrift aus Gleichung (4.17) durch Gleichung (4.23) ersetzt. Durch diese Änderungen wird mit einem aus Biegeversuchen an Stegen motivierten Konstitutivgesetz die Tangentialspannungskomponente der Microplane Theorie berechnet. Aus den Spannungen der einzelnen Richtungen der Einheitskugel in Normal- sowie Tangentialrichtung wird der makroskopische 2. PK für den einzelnen Integrationspunkt bestimmt.

Mittels der Bestimmung einer leicht abweichenden Spannung durch die Variation des Green-Lagrange-Verzerrungstensors unter Verwendung der numerischen Tangente wird die Steifigkeitsmatrix $\overset{4}{\mathcal{C}}$ analog zu Gleichung (5.3) bestimmt. Um die Erweiterbarkeit und die Variabilität der Implementierung zu ermöglichen, wurde das Modell modular implementiert. Aus diesem Grund können beispielsweise Änderungen an den Konstitutivgleichungen der Mikroebene vorgenommen werden, ohne den restlichen Programmaufbau anzupassen. Eine schematische Darstellung der Implementierung und des modularen Aufbaus ist in Abbildung 5.4 gegeben.

Dabei stellt die FE-Software FEAPTM den FE-Rahmen und liefert für beliebige Elemente die Deformation jedes einzelnen Integrationspunktes. Zusätzlich können Historyvariablen und Materialparameter an die Umat-Routine übergeben werden. Innerhalb der Umat-Routine muss die Cauchy-Spannung und die dazugehörige Steifigkeit der Momentankonfiguration bestimmt werden. Dazu werden zunächst sämtliche verwendeten Variablen initialisiert. Die Einheitskugel wird ebenfalls als Subroutine initialisiert. Diese Umsetzung ermöglicht eine Änderung der Diskretisierung der Einheitskugel, ohne an der restlichen Umat-Routine Änderungen vorzunehmen. Mit Gleichung (2.18) wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor berechnet. Mit den durch die Einheitskugel definierten diskreten Richtungen wird dieser anhand der kinematischen Projektion auf die einzelnen Normalen- und Tangentialrichtungen projiziert. Die projizierten Verzerrungen dienen als Grundlage für die eindimensionalen Konstitutivgesetze. Durch die Homogenisierung (vgl. Gl. 4.23) wird der makroskopische 2. PK berechnet.

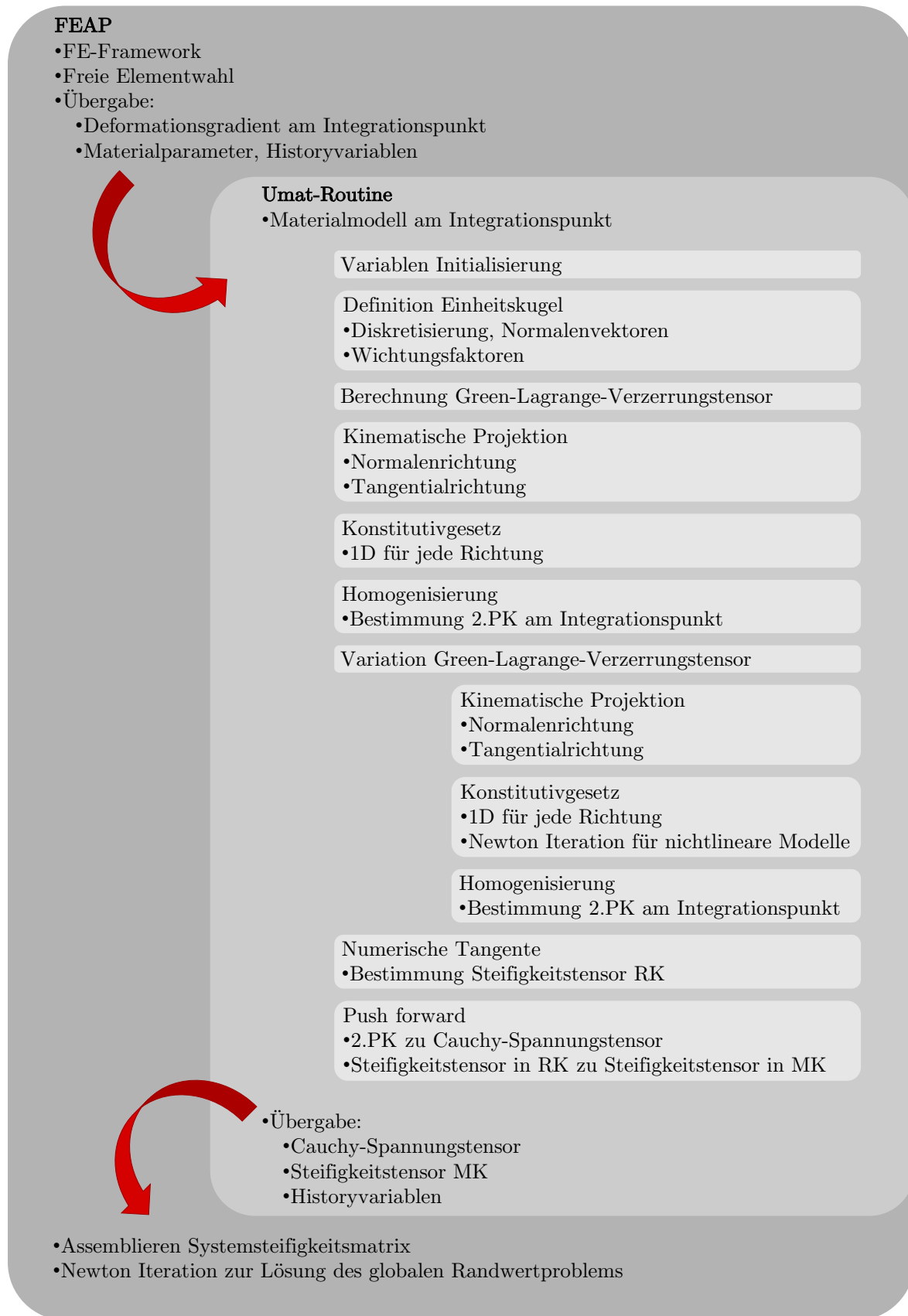


Abbildung 5.4: Aufbau der Implementierung des Materialmodells als benutzerdefiniertes Materialmodell; modularer Aufbau zur besseren Strukturierung und Modifikation des Modells

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix unter Verwendung der numerischen Tangente wird die beschriebene Prozedur noch einmal mit einer variierten Deformation durchgeführt. Daraus resultiert eine marginal abweichende Spannung. So kann mit Gleichung (5.3) der Steifigkeitstensor in der Referenzkonfiguration bestimmt werden, ohne das Konstitutivgesetz zu kennen. Der letzte Schritt ist die Umrechnung der Spannung und der Steifigkeit in die Momentankonfiguration, um diese gemeinsam mit den Historyvariablen an die FE-Software FEAPTM übergeben zu können. Aus diesen Werten wird die Systemsteifigkeitsmatrix assembliert und gemeinsam mit der Randbedingung und einer Newton Iteration die Lösung bestimmt.

5.2.1 Erweiterung des Modells um stochastische Geometrieparameter des gesamten Schaums

Die im Modell enthaltenen Wichtungsfaktoren für die Homogenisierung der mikroskopischen Spannungen (vgl. $\tilde{\omega}$ in Gl. (4.17) und Gl. (4.23)) basieren auf der Veröffentlichung von Bažant und Oh [23] und dienen der Beschreibung von isotropem Materialverhalten. Da die vorgestellte Interpretation die Wichtungsfaktoren direkt mit der Wahrscheinlichkeit für eine gewisse Stegorientierung im realen Schaum koppelt, wird im Folgenden eine Möglichkeit zur Ermittlung dieser Stegorientierung vorgestellt.

Im Rahmen einer Kooperation mit dem Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik und dem Fachbereich Mathematik der Technischen Universität Kaiserslautern wurde eine CT-Aufnahme einer realen makroskopischen Schaumstruktur generiert. Die CT-Aufnahme wurde von einem 10 ppi Aluminiumschaum (AlSi₇Mg_{0.3}, Celltec Materials GmbH in Dresden, Deutschland) aufgenommen. Die Größe des Schaums betrug dabei $42,51 \times 42,10 \times 40,98 \text{ mm}^3$, was in etwa fünf Poren pro Raumrichtung entspricht. So wird ein repräsentatives Volumen garantiert und die Auswertung der CT-Daten bildet die reale Verteilung der Stegorientierung des untersuchten Aluminiumschaums ab.

Das aus der CT-Aufnahme generierte Volumen besitzt eine Voxelauflösung von $29,44 \mu\text{m}$ und enthält entsprechend der Größe $1444 \times 1430 \times 1392$ Voxel. Zur besseren Datenverarbeitung wird die Auflösung der Voxel halbiert, wodurch eine Voxelauflösung von $58,88 \mu\text{m}$ resultiert. Aus dem Bilderstapel wird mithilfe einer Schwellwertbestimmung nach Otsu [174] der Schaum vom Hintergrund separiert und das entstandene binarisierte Volumen geglättet. Die Segmentierung der Stege basiert auf der von Cheng et al. [54] vorgestellten Methode, die im Groben eine Skelettierung der Schaumstruktur

durchführt. Die entstandenen Stegsegmente dienen zur Bestimmung der Orientierung der realen Stege. Dazu wird der Verbindungsvektor der Endpunkte jedes Segmentes als Orientierungsvektor aufgefasst. Durch Normierung des Vektors wird die Orientierung der realen Schaumstege als Einheitsvektor dargestellt.

Zur späteren Zuordnung der Stegorientierungen zu den einzelnen Richtungen des Microplane Modells werden alle Orientierungen in fünf Kategorien unterteilt. Diese Kategorien werden in Abhängigkeit von der z -Koordinate eingeteilt, die der Richtung der longitudinal ausgerichteten Poren entspricht. Die Ausbildung der longitudinalen Poren ist durch den Herstellungsprozess bedingt. So entstehen beim Schäumen der als Rohling dienenden Polymerschäume ovale Formen. Eine Einteilung analog zur z -Komponente der Richtungsvektoren der Einheitskugel des verwendeten Microplane Modells liefert fünf unterschiedliche Kategorien (s. Tab. 4.1). Die Einteilung der Kategorien ist in Abbildung 5.5 am Beispiel der Diskretisierung der Einheitskugel und der entsprechenden Zuordnung unterschiedlicher Stegorientierungen gegeben. Zur Veranschaulichung sind die Orientierungen der fünf Kategorien an exemplarischen Stegen eines Schaums mit derselben Farbe gekennzeichnet. Die einzelnen Bereiche der fünf Kategorien in Abhängigkeit der z -Komponente sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

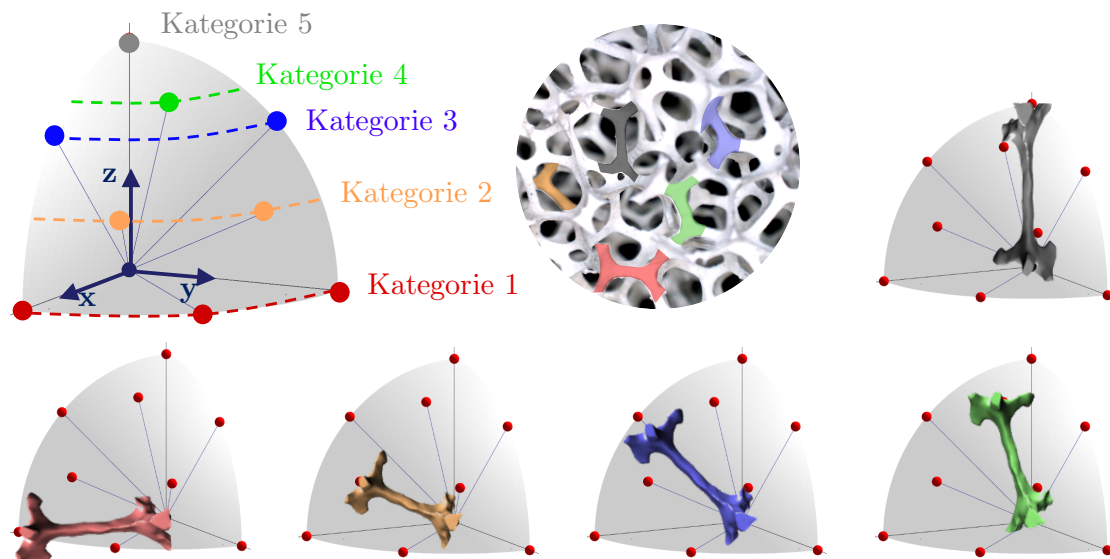


Abbildung 5.5: Einteilung der Kategorien anhand der z -Komponente der Einheitskugel und deren Zuordnung zu Stegorientierungen im Schaum

Tabelle 5.1: Einteilung der Stegorientierung in fünf Kategorien in Abhängigkeit der z -Koordinate entsprechend der longitudinalen Porenausrichtung

Kategorie	Einteilung nach z -Koordinate		
	Einteilungsuntergrenze	Einteilungsmittelpunkt	Einteilungsobergrenze
1	0	0,0969	0,1938
2	0,1938	0,3706	0,5474
3	0,5474	0,6595	0,7715
4	0,7715	0,8448	0,9180
5	0,9180	0,9590	1

Die Veranschaulichung der Orientierungen erfolgt in Abbildung 5.6 als normierte Häufigkeitsverteilung auf der Oberfläche einer Einheitskugel. In Abbildung 5.6 (a) wird die Verteilung aller Stege dargestellt. Dabei wird die ungleichmäßige Verteilung deutlich. Diese ist durch die ausgeprägte Orientierung in z -Richtung bedingt. Durch die annähernde Rotationssymmetrie um die z -Achse kann eine orthotrope Verteilung der Stegorientierungen angenommen werden. Die Orientierungen werden aus diesem Grund in Kategorien abhängig von der z -Koordinate eingeteilt.

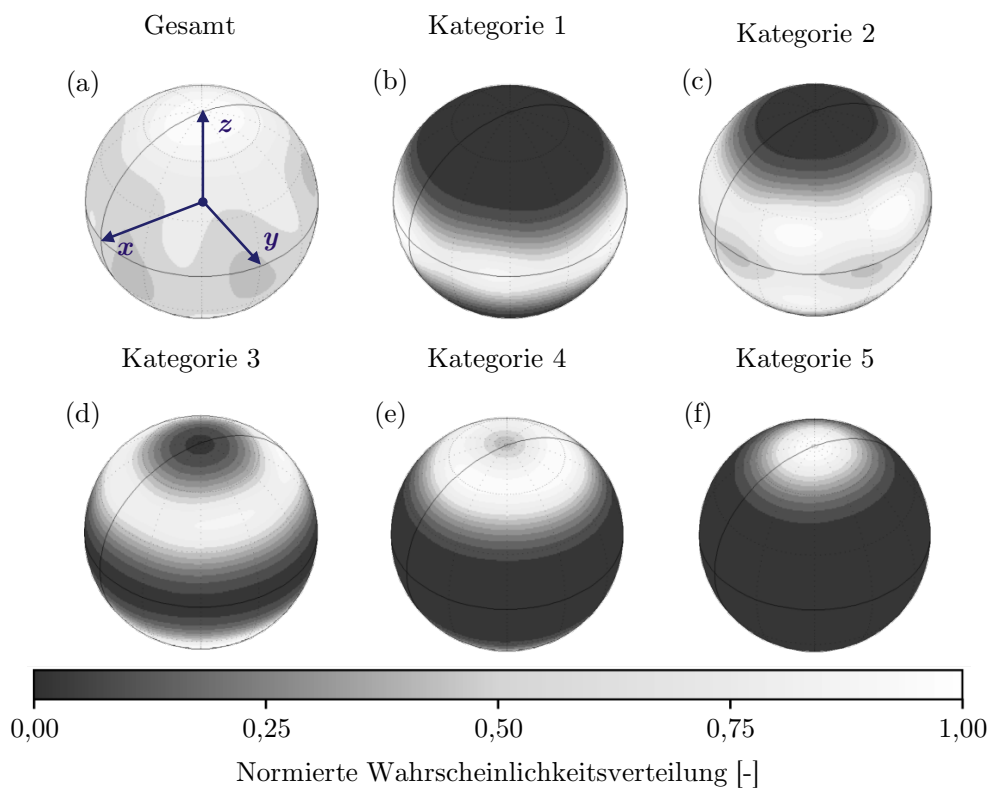


Abbildung 5.6: Verteilung der Richtungen für den gesamten Schaum (a); Verteilung der Richtungen eingeteilt nach Kategorien abhängig von der z -Koordinate der Einheitskugel zur Veranschaulichung der Rotationssymmetrie um die z -Achse (b)-(f) (abgewandelt nach Bleistein et al. [39])

Die normierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen der nach Kategorien eingeteilten Orientierungen sind in Abbildung 5.6 (b)-(f) für ansteigende z -Komponenten der Richtungen dargestellt. Für alle fünf Kategorien bildet sich eine annähernd symmetrische Verteilung der Orientierung um die z -Achse ab. Dies belegt die Annahme aus Abbildung 5.6 (a). Unter Verwendung der rotationssymmetrischen Verteilung um die z -Achse werden die Wichtungsfaktoren über die einzelnen Kategorien ermittelt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Steg in der entsprechenden Kategorie vorliegt, dient dabei als Grundlage. Die Wahrscheinlichkeit der einzelnen, diskreten Richtungen wird durch die Anzahl an Richtungen pro Kategorie bestimmt. In Tabelle 5.2 sind die durch die statistische Auswertung bestimmten Wichtungsfaktoren für die in Tabelle 4.1 vorgestellte Kugeldiskretisierung zusammengefasst. In Abbildung 5.7 ist die verwendete Nummerierung der Raumrichtungen aus Tabelle 5.2 für eine Halbkugel graphisch dargestellt.

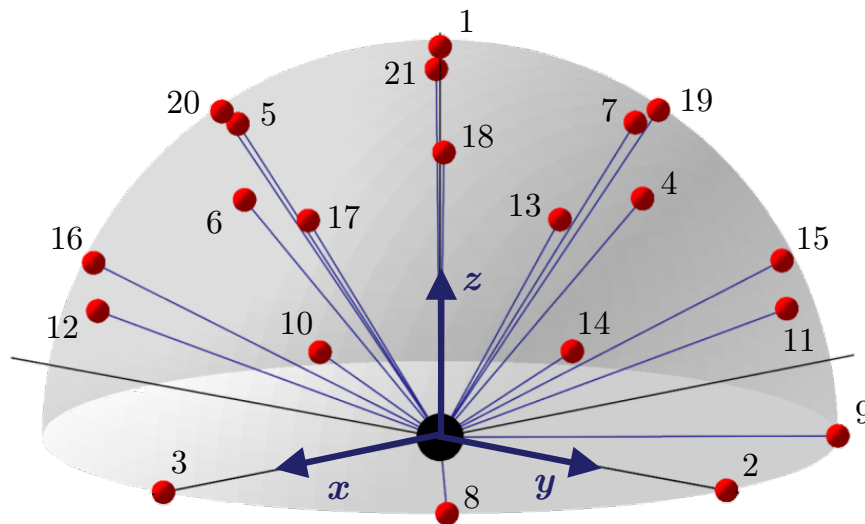


Abbildung 5.7: Nummerierung der diskreten Richtungen der Einheitskugel für das Microplane Modell anhand einer Halbkugel und der Diskretisierung mit 2×21 Richtungen für die gesamte Kugel

Tabelle 5.2: Diskretisierung der Einheitskugel mit 2×21 Oberflächenpunkten (21 für eine Halbkugel), wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden und der Wichtung der einzelnen Richtungen mithilfe der statistischen Orientierungsauswertung

Richtung n	$\overset{n}{x}$ -Koordinate	$\overset{n}{y}$ -Koordinate	$\overset{n}{z}$ -Koordinate	Statistisch ausgewerteter Wichtungsfaktor $\overset{n}{\omega}$
1	1	0	0	0,06578
2	0	1	0	0,02290
3	0	0	1	0,02290
4	0,707106781	0,707106781	0	0,02688
5	0,707106781	-0,707106781	0	0,02688
6	0,707106781	0	0,707106781	0,02688
7	0,707106781	0	-0,707106781	0,02688
8	0	0,707106781	0,707106781	0,02290
9	0	0,707106781	-0,707106781	0,02290
10	0,387907304	0,387907304	0,836095597	0,01902
11	0,387907304	0,387907304	-0,836095597	0,01902
12	0,387907304	-0,387907304	0,836095597	0,01902
13	0,387907304	0,387907304	-0,836095597	0,01902
14	0,387907304	0,836095597	0,387907304	0,01902
15	0,387907304	0,836095597	-0,387907304	0,01902
16	0,387907304	-0,836095597	0,387907304	0,01902
17	0,387907304	-0,836095597	-0,387907304	0,01902
18	0,836095597	0,387907304	0,387907304	0,02069
19	0,836095597	0,387907304	-0,387907304	0,02069
20	0,836095597	-0,387907304	0,387907304	0,02069
21	0,836095597	-0,387907304	-0,387907304	0,02069

Anzumerken ist, dass die Bestimmung der Wichtungsfaktoren für jeden beliebigen Schaum mit der vorgestellten Methode durchgeführt werden kann. Gleichbedeutend ist die Methode nicht auf die vorgestellte Kugeldiskretisierung beschränkt, sondern auf jede beliebige Diskretisierung anwendbar. Die rotationssymmetrische Verteilung ist ebenfalls keine a priori Annahme, sondern muss für jeden Schaum bzw. jede Mikrostruktur geprüft und gegebenenfalls modifiziert werden. Zusätzlich ermöglicht die statistische Aufbereitung der CT-Daten die Bestimmung der Steglängen. Dazu werden die Längen der Stegsegmente ausgewertet. Zusammen mit den Radien der für die Knoten angenommenen Kugeln ergeben sich die unterschiedlichen Steglängen im Schaum. Zur Eliminierung der Randeffekte werden die Stege, die nur einem Knoten zugeordnet werden, aus der Berechnung entfernt. Für den gesamten Schaum ergibt sich aus der Auswertung eine mittlere Steglänge von 2,320 mm bei einer Standardabweichung von 0,693 mm. Zusätz-

lich werden die Steglängen für die eingeteilten Orientierungskategorien bestimmt. In Tabelle 5.3 sind die mittleren Steglängen sowohl für den gesamten Schaum als auch für die fünf Kategorien zusammengefasst. Die longitudinale Ausrichtung der Stege für den Schaum zeigt sich in der Variation der Steglängen. Horizontal zur Gießrichtung ausgerichtete Stege besitzen die kleinste mittlere Länge (vgl. Kategorie 1 in Tab. 5.3) und Stege in Gießrichtung die größte mittlere Länge (vgl. Kategorie 5 in Tab. 5.3). Die Steglänge korreliert mit der z -Koordinate der Orientierungen und dementsprechend mit der longitudinalen Ausrichtung der Stege. Abbildung 5.8 visualisiert die Verteilung der Steglängen für den gesamten Schaum und für die einzelnen Kategorien in Form von Histogrammen und ordnet sie den einzelnen Richtungen der verwendeten Einheitskugel des Microplane Modells zu. Aus Gründen der Symmetrie wird in Abbildung 5.8 nur ein Achtel der Kugel dargestellt. Die Auswertung der Stegorientierungen in den Histogrammen wurde für die Diskretisierung der gesamten Kugel durchgeführt.

Tabelle 5.3: Mittlere Steglängen und deren Standardabweichung für den verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum aufgeteilt in fünf Kategorien und für den gesamten Schaum (vgl. Abb. 5.8)

Kategorie	1	2	3	4	5	Gesamt
Mittlere Steglänge [mm]	2,141	2,118	2,262	2,547	2,846	2,320
Standardabweichung [mm]	0,570	0,594	0,692	0,697	0,705	0,693

Die Histogramme in Abbildung 5.8 zeigen eine Normalverteilung der Steglängen für den gesamten Schaum sowie für jede der einzelnen Kategorien. Dies stützt die Annahme, dass die verwendete Größe des makroskopischen Schaums eine repräsentative Auswertung für den verwendeten Schaum ermöglicht. Die zusätzliche Längenauswertung ermöglicht eine Auswahl der Stege anhand der Kategorien und vereinfacht die Zuordnung einzelner Stege zu den jeweiligen Kategorien.

Zusammenfassend wird durch die Erweiterung des vorgestellten Multiskalenmodells um eine statistische Auswertung der Stegorientierung und deren Länge ein zusätzlicher Bezug zur Mikrostruktur des Schaums hergestellt. Dadurch wird die Nähe des Modells zum realen Schaum gestärkt und die Modellierung möglichst realitätsnah umgesetzt.

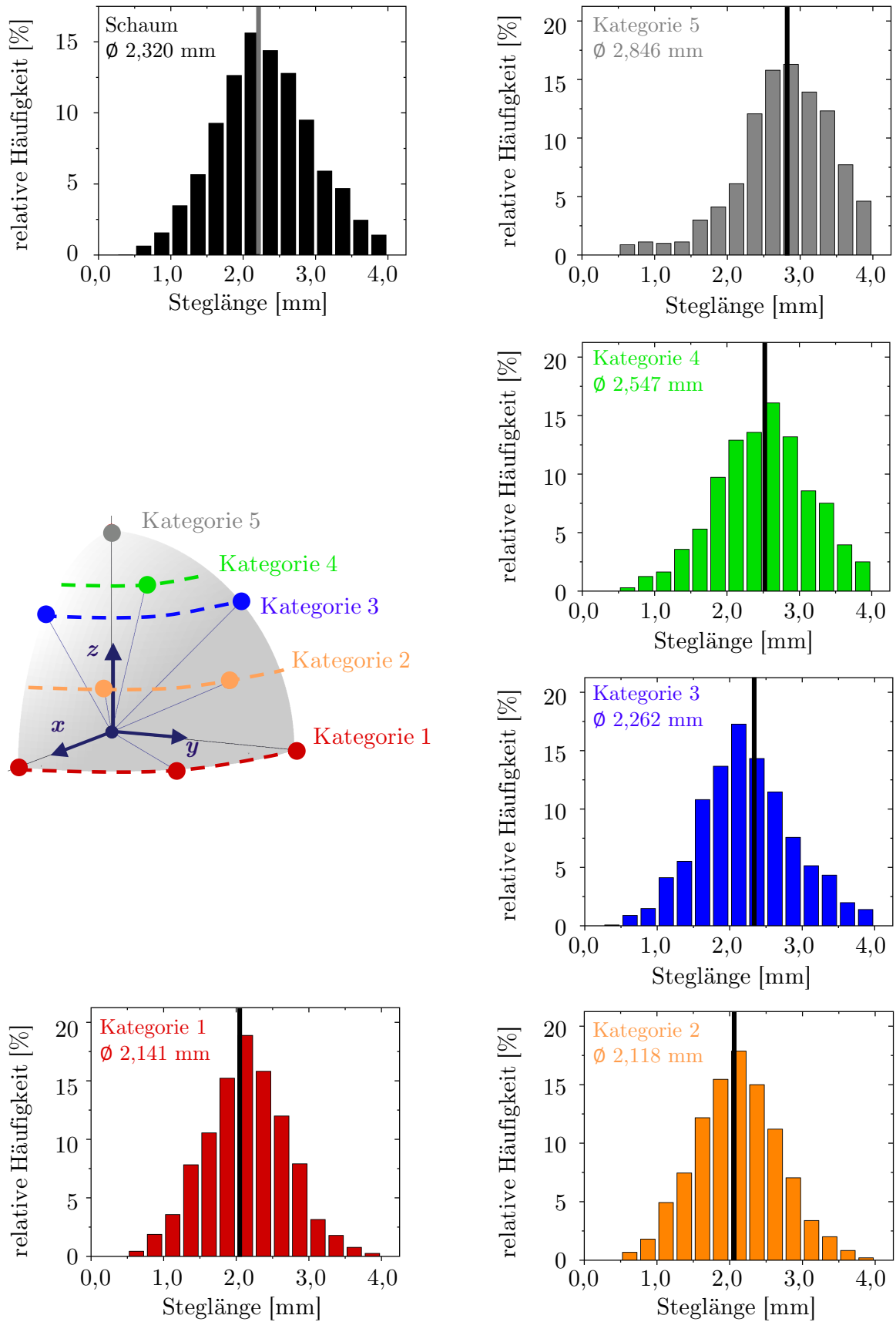


Abbildung 5.8: Verteilung der Steglängen für den gesamten Schaum (Schwarz) und die einzelnen Kategorien entsprechend der z -Koordinate der Einheitskugel am Beispiel einer Viertelkugel; Farben passend zur Einteilung der z -Koordinate an der Viertelkugel

6

Experimentelle Materialcharakterisierung

Das Kapitel beschreibt die experimentellen Methoden zur Charakterisierung von offenporigen Metallschäumen am Beispiel eines 10 ppi Aluminiumschaums der Firma Celltec Materials GmbH mit Sitz in Dresden, Deutschland. Die dargestellten Methoden können auf beliebige offenporige Schäume angewandt werden. Für das vorgestellte Materialmodell aus Kapitel 5 werden Informationen des Stegverhaltens benötigt. Dazu werden experimentelle Methoden zur Charakterisierung auf der Mikroskala eingeführt. Diese dienen als Basis für die phänomenologischen Materialmodelle des Multiskalenmodells. Zusätzlich zur Beschreibung des experimentellen Vorgehens werden die Ergebnisse aus den unterschiedlichen Versuchen der Mikroskala an Einzelstegen vorgestellt. Die Auswertung der einzelnen Versuche an Stegen erfordert zusätzliche Informationen über die Geometrie der Stege, die im Rahmen dieses Kapitels beschrieben werden. Die Ergebnisse der Experimente werden im Anschluss diskutiert.

Das Ziel der Arbeit ist die makroskopische Modellierung von Metallschäumen unter Verwendung der Ergebnisse aus mikroskopischen Experimenten an Stegen. Dazu dienen makroskopische Experimente zur Validierung des entwickelten Modells. Die makroskopischen experimentellen Daten wurden von PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung zur Verfügung gestellt. Aus diesem Grund werden die Experimente lediglich kurz beschrieben und die Ergebnisse anschließend zusammengefasst.

6.1 Versuche auf der Mikroebene an Einzelstegen

Die Versuche an Einzelstegen werden exemplarisch für Stege eines 10 ppi Aluminiumschaums ($\text{AlSi}_7\text{Mg}_{0.3}$, Celltec Materials GmbH in Dresden, Deutschland) beschrieben und ausgewertet. Die Verwendung des beschriebenen Modells und der damit verbundenen Charakterisierung an Einzelstegen ist auf beliebige offenporige Schäume anwendbar. Zur Beschreibung des vorgestellten Materialmodells müssen sowohl Zug- und Druckversuche als auch Zwei-Punkt-Biegeversuche durchgeführt werden. Dazu dient eine Eigenkonstruktion des Lehrstuhls für Technische Mechanik, die im Laufe der Jahre weiterentwickelt wurde [133, 185, 218]. Der Versuchsstand wurde ursprünglich zur Durchführung von Zugversuchen an Einzelstegen konstruiert. Aus diesem Grund wird der Versuchsstand im Folgenden als μ -TD (abgeleitet von Micro-Tensile-Device) bezeichnet. Der μ -TD ermöglicht eine Verschiebung von bis zu 100 mm und eine Geschwindigkeit von bis zu 5 mm/s. Dabei wird bei einer Kraft von bis zu 1500 N eine Auflösung der Verschiebung von $0,2 \mu\text{m}$ und bei einer Kraft von bis zu 6000 N eine Auflösung der Verschiebung von $3 \mu\text{m}$ erreicht [133]. Durch den modularen Aufbau ist der μ -TD universell einsetzbar. Neben Zug- und Druckversuchen werden Biegeversuche durch kleinere Umbauten ermöglicht [185]. Zusätzlich zur Modularität der mechanischen Komponenten ermöglicht der Aufbau die Verwendung eines optischen Messsystems, das für die unterschiedlichen Versuche angepasst werden kann. Im Rahmen der Materialcharakterisierung an Einzelstegen wird eine monochrome 9 MP AVT Manta G917B CCD-Kamera (Allied Vision Technologies GmbH, Stadtroda, Deutschland) mit einem telezentrischen Objektiv (TC23016, Opto Engineering SEO, Grünwald, Deutschland) verwendet. Dadurch wird eine zweidimensionale digitale Bildkorrelation (2D DIC) ermöglicht, die zur Bestimmung der Verschiebungen genutzt wird. Einführungen in die DIC finden sich unter anderem bei Sutton et al. [198]. Vertiefende Informationen und ein Literaturüberblick zur DIC sind bei Pan et al. [176] gegeben.

Der gesamte Aufbau des μ -TD ist in Abbildung 6.1 (a) dargestellt. Dabei wird der Antriebsstrang als wichtigste Baugruppe hervorgehoben. Durch die Präzisionsspindel, angetrieben von einem Schrittmotor, wird die hohe Genauigkeit von Submikrometern erreicht. Die Vergrößerung der Probenaufnahme für Zug- und Druckversuche ist in Abbildung 6.1 (b) dargestellt. Dabei ist der Aufbau für die Experimente, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, mit einer Kamera und dem telezentrischen Objektiv abgebildet. Analog ist eine vergrößerte Darstellung der Probenaufnahme für die Zwei-Punkt-Biegung in Abbildung 6.1 (c) dargestellt. Auf die Darstellung der Kamera wird zur Verdeutlichung der Biegevorrichtung verzichtet. Mithilfe der dünnen Klinge und der Positionierung des Steges durch den x - y -Tisch ist für jede Steglänge die Zwei-Punkt-Biegung realisierbar.

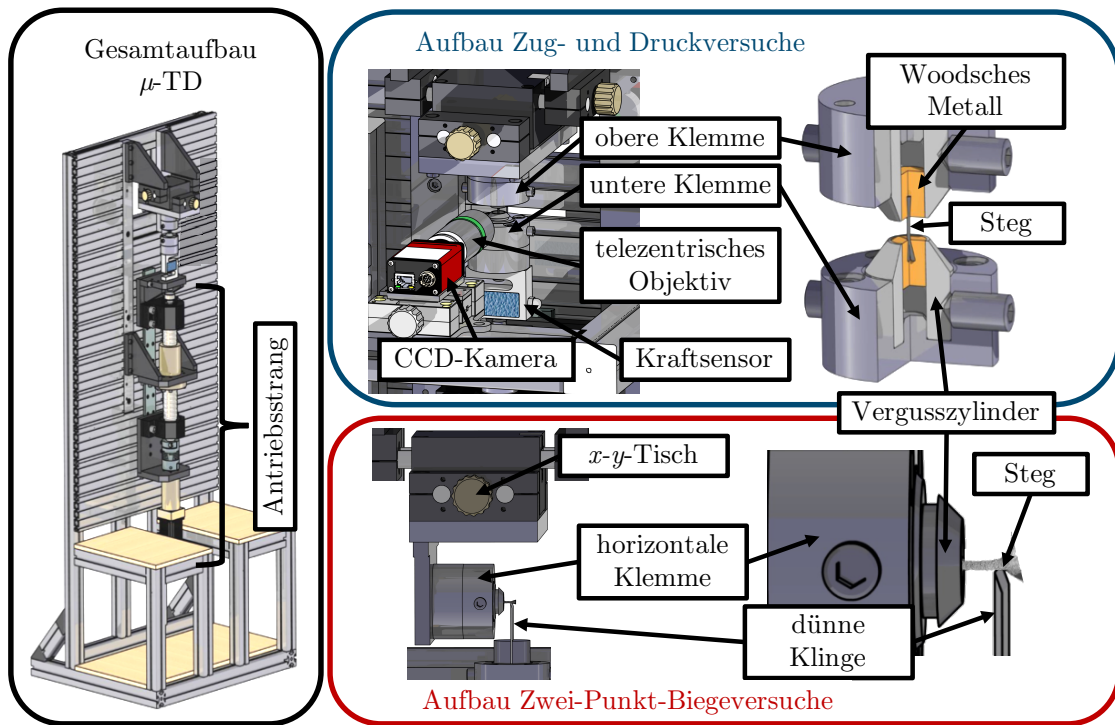


Abbildung 6.1: Verwendeter Aufbau für die experimentelle Charakterisierung an Einzelstegen; Schwarz: Gesamter Versuchsstand ohne Kamera (in Anlehnung an Jungt et al. [133]); Blau: Aufbau für die Zug- und Druckversuche; Rot: Aufbau für die Zwei-Punkt-Biegeversuche (Darstellung ohne verwendete Kamera)

Zur Durchführung der Versuche sind mehrere Vorbereitungsschritte erforderlich. Diese sind, mit Ausnahme des Einbaus in den Versuchsstand, für die Zug- und Druckversuche sowie die Biegeversuche identisch. Zunächst wird aus dem gesamten Schaum ein einzelner Steg separiert. Dazu dient, wie in Kapitel 3 beschrieben, ein feiner Seitenschneider. Durch vorsichtiges Separieren immer kleinerer Schaumstrukturen wird ein Steg ohne Vorbelastung extrahiert. In Abbildung 6.2 ist das Vorgehen beispielhaft für die Extraktion eines Steges aus einem gesamten Schaum dargestellt. Das Resultat ist ein einzelner Steg samt Knoten, welcher mit kleinen Überresten angrenzender Stege verbunden ist. Diese Überreste dienen später einem optimalen Einbau der Stege in die Klemmen.

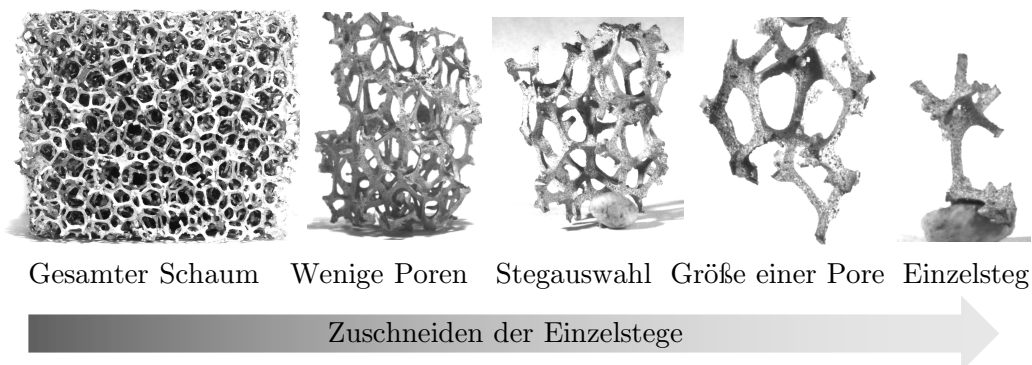


Abbildung 6.2: Schrittweise Extraktion eines einzelnen Steges vom gesamten Schaum bis zum Einzelsteg mit Knoten und Überresten angrenzender Stege

Da jeder Steg eine individuelle Geometrie aufweist, ist es notwendig, diese zur Auswertung der Versuche zu bestimmen. Dazu wird die eingeführte photogrammetrische Methode [111] verwendet. Von jedem Steg wird rundherum alle 15° ein Bild aus zwei unterschiedlichen Winkeln zur Horizontalen aufgenommen. Eine monochrome 9 MP AVT Manta G917B CCD-Kamera (Allied Vision Technologies GmbH, Stadtroda, Deutschland) kombiniert mit einem KOWA LM50GHC Objektiv (Kowa Optimed Deutschland GmbH, Düsseldorf, Deutschland) wird zur Aufnahme der Bilder verwendet. Das Resultat sind 48 Bilder des Steges, aus denen mit der kommerziellen Software 3DSomTM ein 3D Modell erstellt wird. Mit einem vorher ausgedruckten und auf die Probengröße angepassten Kalibriertarget werden die einzelnen Bilder den Richtungen zugeordnet. In den einzelnen Bildern muss der Hintergrund von den Stegen separiert werden. Die entstandene Maske in jedem Bild dient der Software zur Erstellung des 3D Modells. In Abbildung 6.3 ist der Ablauf zur Erstellung der 3D Modelle von der Aufnahme der Bilder bis zum fertigen Modell zusammengefasst. Zusätzlich ist die Aufnahme der Bilder aus zwei unterschiedlichen Ebenen exemplarisch für 0° , 120° und 240° Rotation abgebildet.

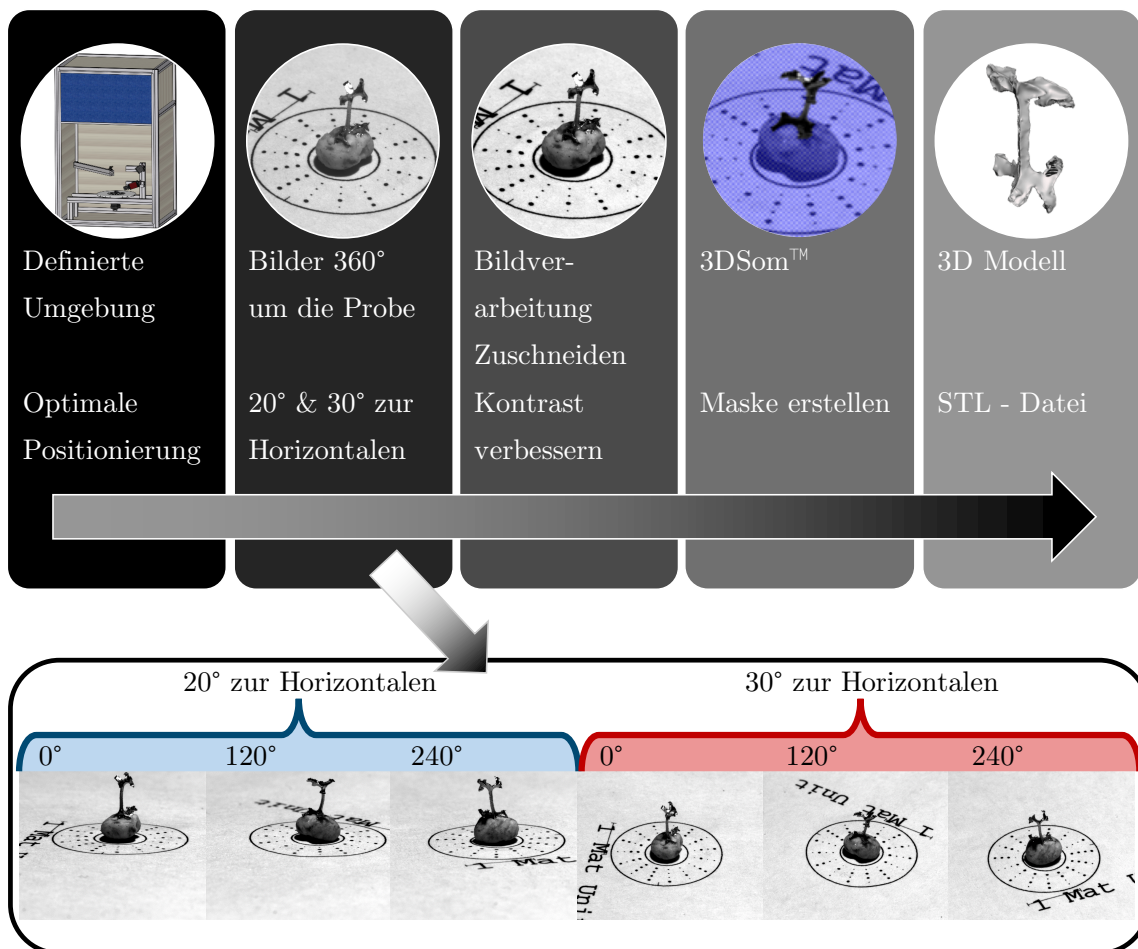


Abbildung 6.3: Prozessbeschreibung der 3D Modellerstellung unter Verwendung der Photogrammetrie

Zur Auswertung der realen Verschiebung und der Dehnung mittels der DIC wird ein sogenanntes Specklemuster benötigt. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der Oberflächenstruktur der einzelnen Stege. Da die Verzerrung der Oberflächenstruktur zu ungewollten Reflexionen führt, wird ein Specklemuster aufgebracht. Im ersten Schritt werden die Stege mit einer mattweißen Farbe grundiert. Anschließend werden im zweiten Schritt mattschwarze Punkte, die sogenannten Speckle, hinzugefügt. Eine genaue Beschreibung zur DIC und deren Optimierung für Einzelstege ist bei Reis et al. [186] gegeben.

Zug- und Druckversuche

Die vorbereiteten Stege werden in kleinen Vergusszylindern fixiert. Dazu werden die Vergusszylinder mit Woodschem Metall gefüllt und die Stege in das erhitzte, flüssige Woodsche Metall gesetzt. Zunächst wird jeder Steg außerhalb des Versuchsstands in einen Vergusszylinder getaucht und senkrecht zum Vergusszylinder im Metall fixiert (s. Abb. 6.4 (a)). Dabei ist darauf zu achten, dass der Knoten mit den Überresten der restlichen Stege voll von dem flüssigen Metall umschlossen wird. Nachdem das Woodsche Metall vollständig abgekühlt ist, wird der Vergusszylinder mit dem einseitig eingegossenen Steg in die obere Klemme des μ -TD eingebaut (s. Abb. 6.4 (b)). Da die Stege eine annähernd dreieckige Querschnittsfläche besitzen, wird der Steg mit einer der Dreiecksseiten möglichst senkrecht zur Kamera ausgerichtet. Der untere Vergusszylinder ist fest mit der unteren Klemme des Versuchsstands verbunden. Das Woodsche Metall wird kontrolliert durch einen Heizdraht erhitzt und anschließend der Steg durch Verfahren des Motors in das flüssige Metall getaucht (s. Abb. 6.4 (c)). Während der Abkühlung des Woodschen Metalls wird die Kraft gemessen und bis zum vollständigen Erstarren des Metalls durch Verfahren der unteren Klemme zu Null geregelt.

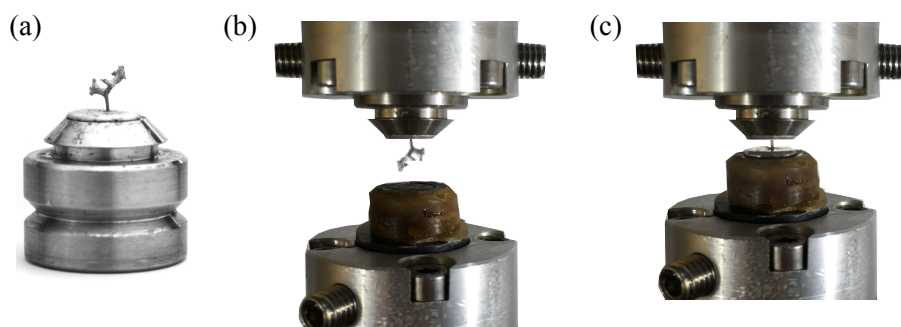


Abbildung 6.4: Detaillierte Darstellung des Einbaus der Stege in den μ -TD; (a) fertig eingegossener Steg im Vergusszylinder; (b) eingebauter oberer Vergusszylinder mit Steg; (c) fertig eingebauter Steg für die Zug- und Druckversuche

Alle Zug- und Druckversuche werden auf die gleiche Weise vorbereitet. Die Versuchsdurchführung geschieht quasi-statisch mit einer Geschwindigkeit von $0,002 \text{ mm/s}$, was bei einer durchschnittlichen Steglänge von $2,320 \text{ mm}$ (vgl. Abb. 5.8) einer Dehnrates von ungefähr $8,62 \times 10^{-4} \text{ 1/s}$ entspricht. Die Verschiebung wird in Stufen von $0,006 \text{ mm}$ aufgebracht. Zwischen den einzelnen Stufen wird jeweils ein Bild des aktuellen Deformationszustandes aufgenommen. Gleichzeitig werden zwischen den einzelnen Stufen die Kraftwerte gespeichert. Dadurch erfolgt die Erfassung der Kraftwerte sowie das Aufnehmen der Bilder zum identischen Zeitpunkt. Im Postprocessing wird mithilfe der DIC die reale Verschiebung der einzelnen Stege ermittelt. Um eine ausreichende Anzahl an Experimenten zu vergleichen, werden jeweils 15 unterschiedliche Stege verwendet. Die resultierenden Kraft-Verschiebungs-Diagramme für die Zugversuche sind in Abbildung 6.5 dargestellt.

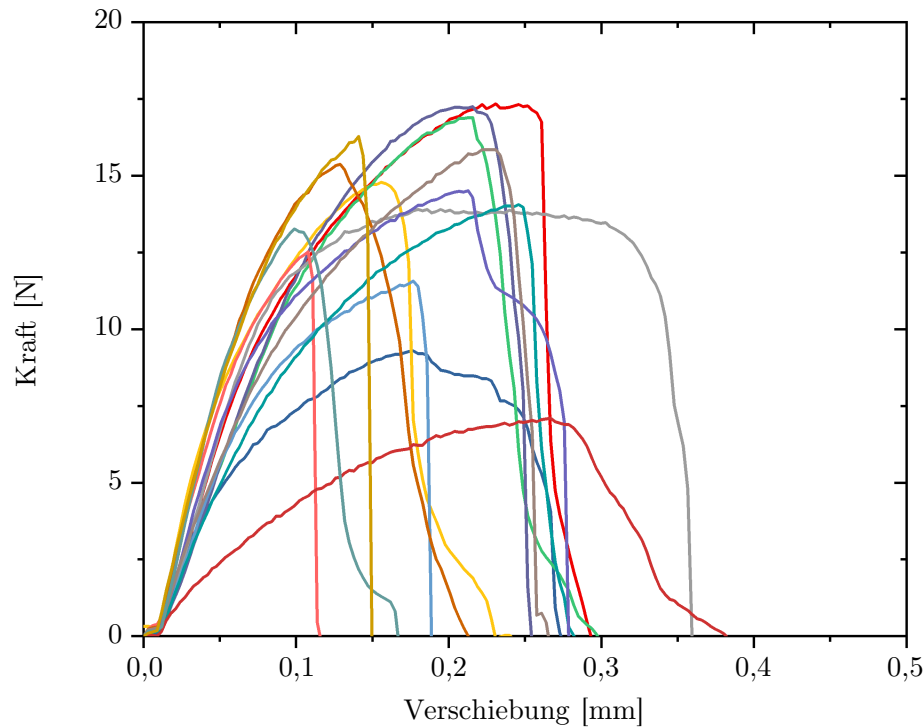


Abbildung 6.5: Kraft-Verschiebungs-Diagramme der Zugversuche an 15 einzelnen Stegen zur Veranschaulichung der großen Streuung und der qualitativ gleichen Verläufe

Analog sind in Abbildung 6.6 die Kraft-Verschiebungs-Diagramme der Druckversuche aufgetragen. Das Verhalten unter Zug- und Druckbelastung unterscheidet sich signifikant. Unter Zugbelastung zeigt sich nach Erreichen einer gewissen Kraft und dem damit verbundenen Reißen der einzelnen Stege ein Abfall der Kraft auf Null. Da unter Druckbelastung die Stege knicken, fällt die Kraft nach Erreichen einer Knicklast leicht ab. Durch das Knicken berühren sich die Stege nach weiterer Deformation und die Kraft steigt weiter an.

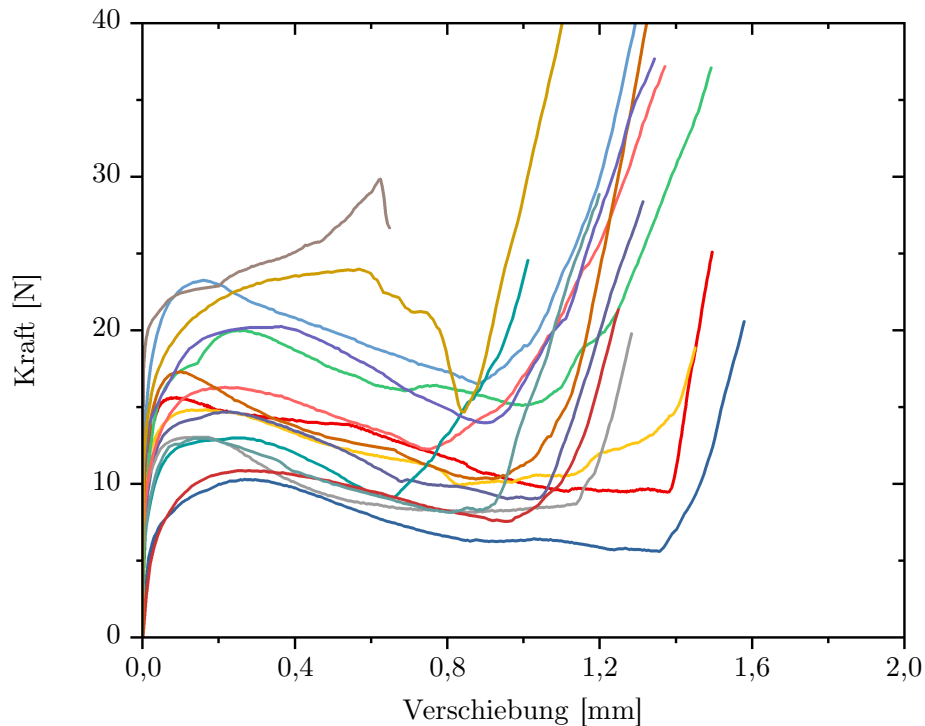


Abbildung 6.6: Kraft-Verschiebungs-Diagramme der Druckversuche an 15 einzelnen Stegen zur Veranschaulichung der großen Streuung und der qualitativ gleichen Verläufe

Sowohl die Zug- als auch die Druckversuche weisen für alle 15 Stege qualitativ das gleiche Verhalten auf. Durch die stark unterschiedlichen Geometrien der Stege ist ein quantitativer Vergleich jedoch nicht möglich. Um die experimentellen Ergebnisse quantitativ zu vergleichen, wird eine Normierung benötigt. Dazu dient die Dehnung, die aus der realen Verschiebung und der Ausgangslänge bestimmt wird. Weiter wird eine Normierung der Kraft auf die ursprüngliche Querschnittsfläche durchgeführt und bildet somit die Nominalspannung ab. Das erstellte 3D Modell vom jeweiligen Steg dient als Grundlage. Die Querschnittsfläche wird im Bereich des Risses (Zug) bzw. des ersten Knickens (Druck) durch die Mittelwertbildung der einzelnen Querschnittsflächen bestimmt. Daraus resultieren die Spannungs-Dehnungs-Diagramme der Zug- und Druckversuche in Abbildung 6.7 und Abbildung 6.8. Die berechnete Dehnung entspricht der Ingenieursdehnung und die Spannung der Nominalspannung. Analog zu den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen weisen die Spannungs-Dehnungs-Diagramme der Zug- und Druckversuche weiterhin deutliche Unterschiede auf.

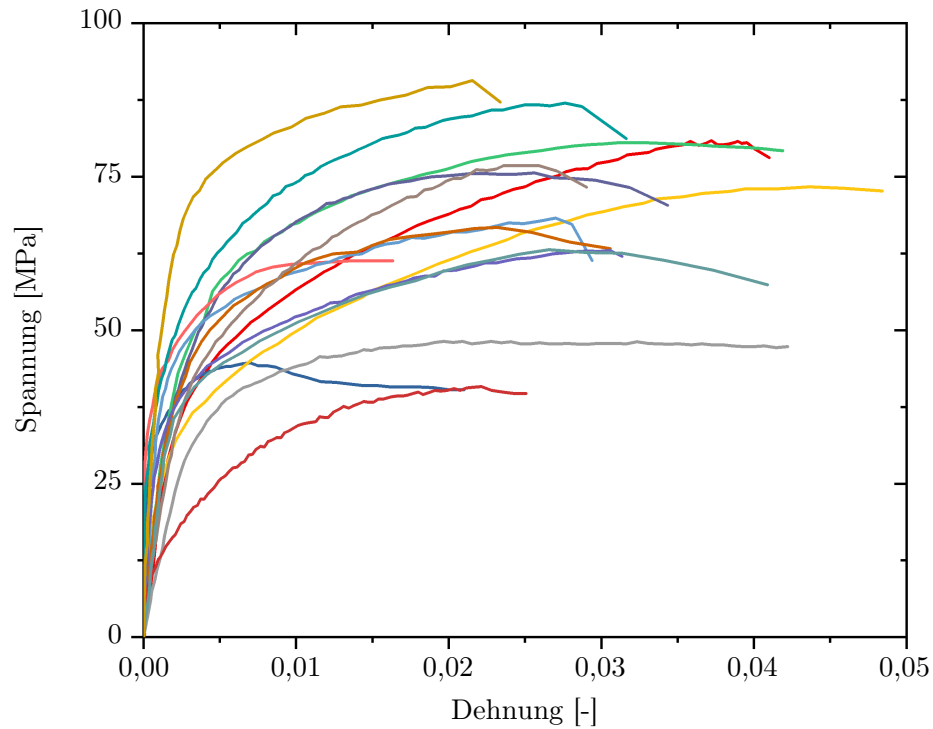


Abbildung 6.7: Spannungs-Dehnungs-Diagramme der Zugversuche an 15 einzelnen Stegen bestimmt aus den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen

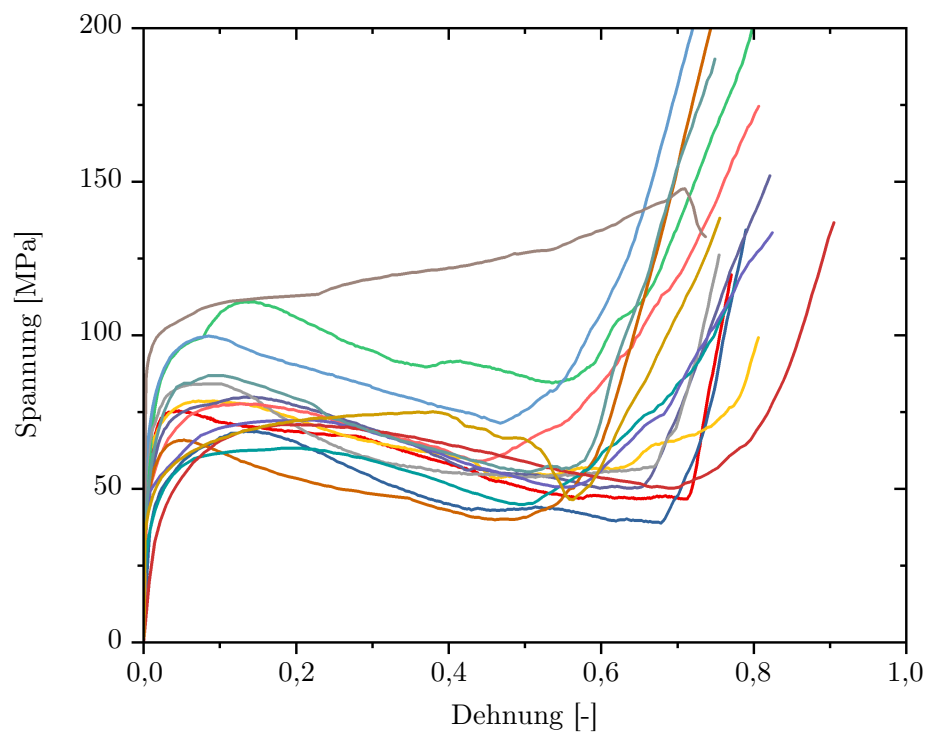


Abbildung 6.8: Spannungs-Dehnungs-Diagramme der Druckversuche an 15 einzelnen Stegen bestimmt aus den Kraft-Verschiebungs-Diagrammen

Erklärungen liefern zum einen die Variation der Stegausrichtung beim Eingießen in den Vergusszylinder und zum anderen die Inhomogenitäten innerhalb des Steges. Die durchgeführten CT-Aufnahmen am 10 ppi Schaum weisen signifikante Einschlüsse innerhalb der einzelnen Stege auf (s. Abb. 6.9 (a)).



Abbildung 6.9: Inhomogenitäten in Stegen eines 10 ppi Aluminiumschaums; ein Schnittbild aus einer CT-Aufnahme eines gesamten Schaums (a); je ein Schnittbild aus einer CT-Aufnahme eines Einzelsteges (b) und (c)

Diese Einschlüsse werden durch die CT-Aufnahmen an Einzelstegen (s. Abb. 6.9 (b)-(c)) verdeutlicht. In den CT-Aufnahmen stellt der schwarze Bereich die Umgebung des Schaums dar. Die grauen bzw. weißen Bereiche kennzeichnen den Schaum. Die schwarzen Einschlüsse in den grau bzw. weiß dargestellten Stegen zeigen Lufteinschlüsse. Da die photogrammetrische Methode zum Erstellen der 3D Modelle keine Informationen über das Innere der Stege liefert, wird nicht für alle Stege die reale Querschnittsfläche zur Berechnung der Spannungs-Dehnungs-Diagramme berücksichtigt. Mit diesen Inhomogenitäten ist die große Streuung der Experimente zu erklären. Gleichzeitig wird durch die Inhomogenitäten eine Vielzahl an Experimenten benötigt, um im Mittel ein statistisch repräsentatives Spannungs-Dehnungs-Diagramm zu erhalten.

Biegeversuche

Wie für die Zug- und Druckversuche an Einzelstegen werden für die Zwei-Punkt-Biegung an Einzelstegen die fertig gespeckelten Stege außerhalb des Versuchsstands in einen Vergusszylinder mit Woodschem Metall eingegossen. Analog zu den Zug- und Druckproben wird dabei der Steg senkrecht zum Vergusszylinder ausgerichtet. Der in Abbildung 6.1 (c) dargestellte Aufbau für die Zwei-Punkt-Biegung liefert eine Klemme zum horizontalen Einbau des Vergusszylinders inklusive Steg. Die untere Klemme aus den Zug- bzw. Druckversuchen wird durch eine schmale Klinge ersetzt. Diese ist zentrisch über dem Kraftsensor positioniert und wird durch den Motor verfahren. Zur optischen Auswertung wird, wie für die Zug- und Druckversuche, eine der flachen Seiten des Steges senkrecht zur Kamera ausgerichtet. Die horizontale obere Klemme ist durch einen x - y -Tisch verfahrbar, um somit die dünne Klinge im Bereich des nicht eingegossenen Knotens zu positionieren (vgl. Abb. 5.8). Weiter wird darauf geachtet, dass der Kraftangriffspunkt für alle Stege möglichst nah am freien Knoten liegt, aber gleichzeitig die Klinge nicht entlang des Knotens abrutschen kann. Eine detaillierte Ansicht eines eingebauten Steges für die Zwei-Punkt-Biegung ist in Abbildung 6.10 einmal für ein CAD Modell und einmal für die Realität gegeben. Die Durchführung der Biegeversuche wird im quasi-statischen Bereich mit einer Verfahrensgeschwindigkeit der dünnen Klinge von 0,003 mm/s und einer Stufenhöhe von 0,006 mm realisiert. Die einzelnen Stege werden bis zum Bruch gebogen.

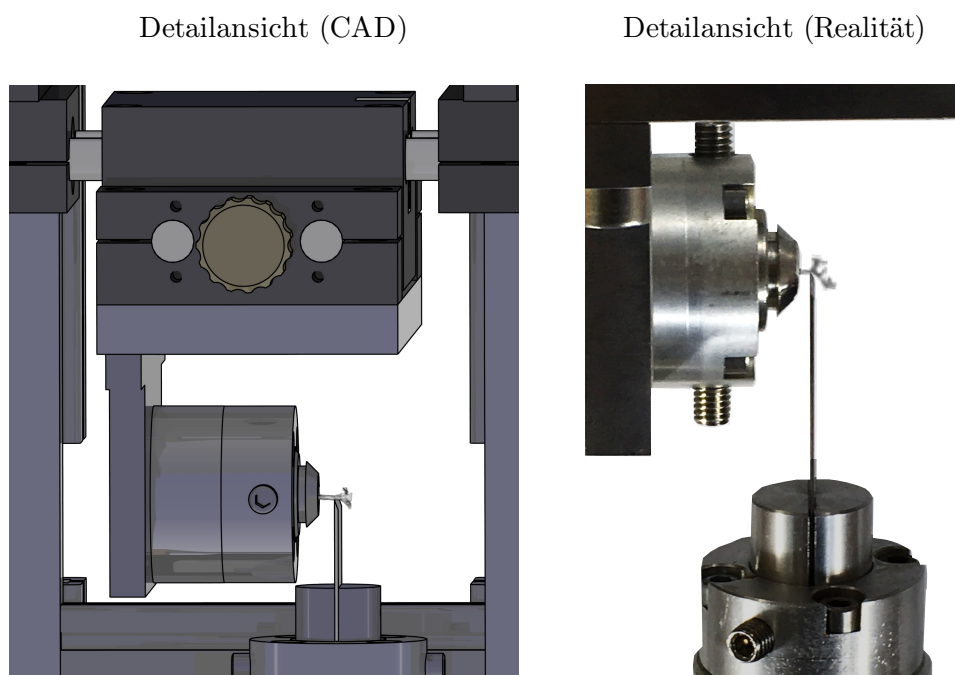


Abbildung 6.10: Detaillierte Darstellung eines für die Zwei-Punkt-Biegung eingebauten Steges einmal als CAD Modell und einmal in Realität

Die große Streuung der experimentellen Daten aus den Zug- und Druckversuchen bestärkt die Notwendigkeit, eine große Anzahl an Versuchen durchzuführen, um statistische Schwankungen abzufangen. Für die Biegeversuche werden aus diesem Grund ebenfalls 15 Stege getestet. Dabei steht nicht die Auswertung der Biegespannung oder der Biegesteifigkeit im Vordergrund, sondern das phänomenologische Verhalten der Stege unter Biegebelastung. Für jede Stufe der Belastung wird ein Kraftwert gespeichert und gleichzeitig ein Bild der aktuellen Deformation aufgenommen. Durch das aufgebrachte Specklemuster wird mittels der DIC die reale Verschiebung des Kraftangriffspunktes der Biegung bestimmt, welche der Durchbiegung des Steges entspricht. Abbildung 6.11 zeigt die gemessene Kraft über die Durchbiegung für alle 15 getesteten Stege. Die Kräfte steigen bis zum Entstehen eines ersten Risses an und fallen anschließend leicht ab.

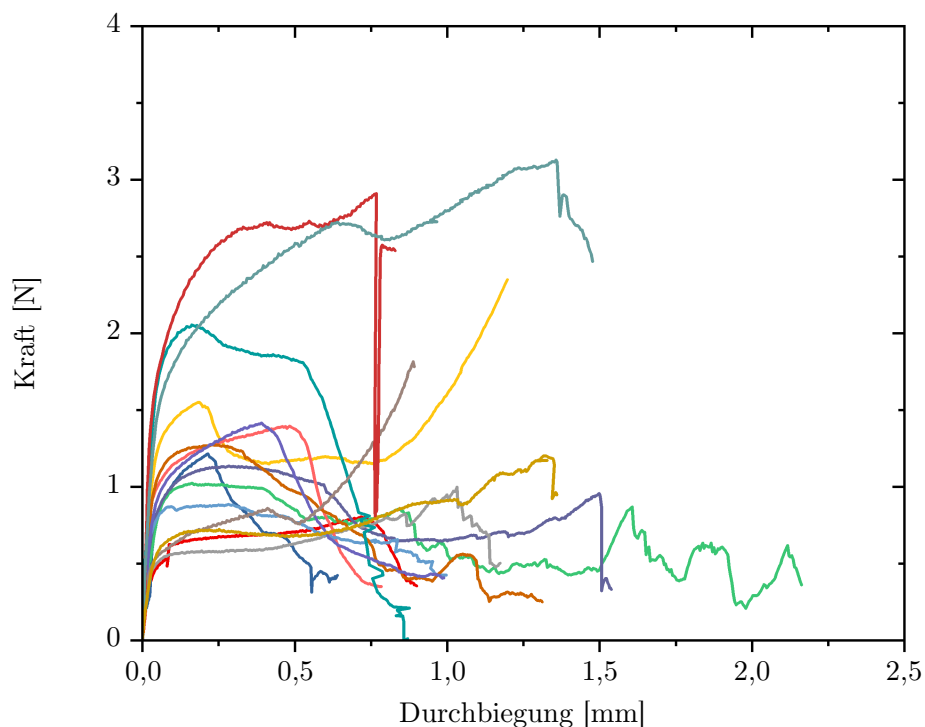


Abbildung 6.11: Kraft-Durchbiegungs-Diagramme für die Zwei-Punkt-Biegung an 15 einzelnen Stegen

Für das implementierte Modell werden die Kraft und die Durchbiegung normiert. Da für die Richtungen des Microplane Modells keine geometrischen Ausdehnungen vorliegen, wird die Kraft auf die mittlere Querschnittsfläche des Steges und die Durchbiegung auf die Länge des Steges zwischen den beiden Lagerpunkten normiert. Daraus resultiert ein Diagramm, das gemäß der Einheiten einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm entspricht, jedoch nur normierte Kräfte und Durchbiegungen darstellt. Aus der Interpretation des beschriebenen Modells geht hervor, dass diese Normierung die für das Modell notwendigen Größen abbildet. Analog zu den Zug- und Druckversuchen entsprechen die ausgewerteten normierten Kräfte einer Nominalspannung, da die Fläche

aus den undeformierten photogrammetrischen 3D Modellen und die Kräfte aus der Momentankonfiguration ermittelt werden. Die normierte Durchbiegung wird über die Ausgangslänge der Stege bestimmt und entspricht somit einer Ingenieursdehnung. In Abbildung 6.12 sind die normierten Kraftverläufe über die normierte Durchbiegung aufgetragen. Dabei wird eine große Variation der Experimente deutlich. Eine Erklärung dafür ist die vereinfachte Berücksichtigung der Geometrie. Da das Flächenträgheitsmoment bei Biegeprozessen einen der Haupteinflussfaktoren bildet und an dieser Stelle vernachlässigt wird, kann die starke Variation aus der Vereinfachung resultieren. Analog zu den Zug- und Druckversuchen an Stegen werden die Inhomogenitäten der einzelnen Stege nicht berücksichtigt, da die Photogrammetrie keine Informationen über das Innere der Stege liefert (vgl. Abb. 6.9). Trotz der Streuung wird für das entwickelte Modell angenommen, dass die gemittelte Kurve das Verhalten von Stegen unter Biegebelastung in geeigneter Form abbildet.

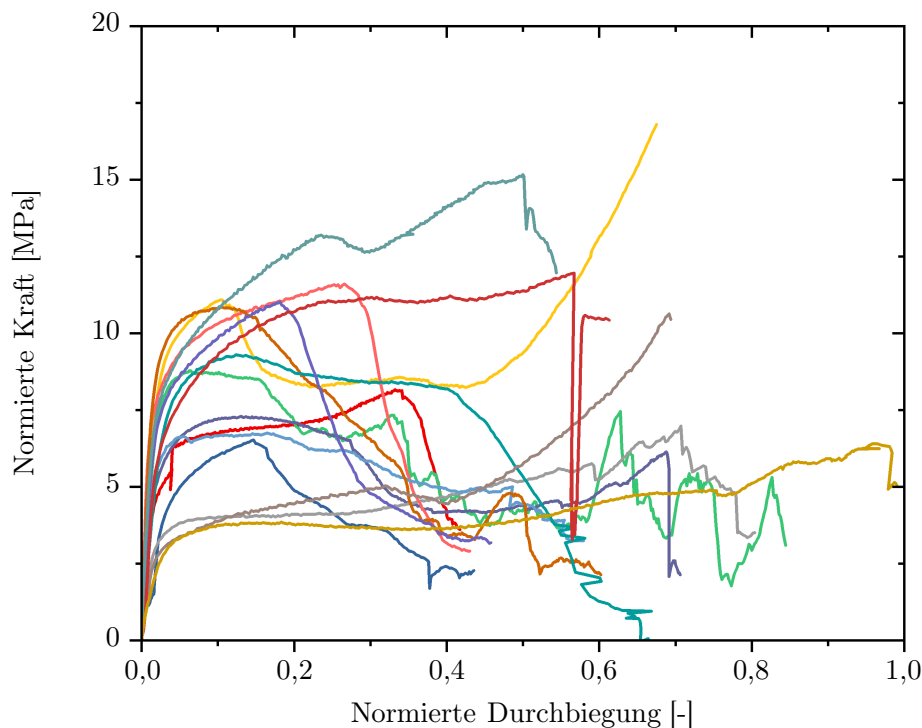


Abbildung 6.12: Normierte Kraft-Durchbiegungs-Diagramme für die Zwei-Punkt-Biegung an 15 einzelnen Stegen

Da im Schaum neben der Zwei-Punkt-Biegung auch andere Biegeprozesse auftreten, wird die Zwei- mit einer Drei-Punkt-Biegung verglichen. Dazu dienen Versuche, die von Ing. Marcel Adorna im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes am Lehrstuhl für Technische Mechanik durchgeführt wurden. Die Ergebnisse aus den Drei-Punkt-Biegeversuchen sind in Abbildung 6.13 aufgetragen. Die verrauschten Kraftwerte resultieren aus der Verwendung eines zu großen Kraftsensors für die zu messenden Kräfte und bilden das Rauschen des Sensors ab. Im Vergleich zu Abbildung 6.11 wird die qualitative Überein-

stimmung herausgestellt. Nach einem linearen Anstieg weisen beide Arten der Biegung einen gekrümmten Übergang zu einer konstanten Kraft auf. Nach dem Bruch fällt die Kraft für die einzelnen Stege ab. Die Hauptunterschiede der beiden Biegeprozesse liegen in ihrer maximalen Kraft und ihrer Steigung.

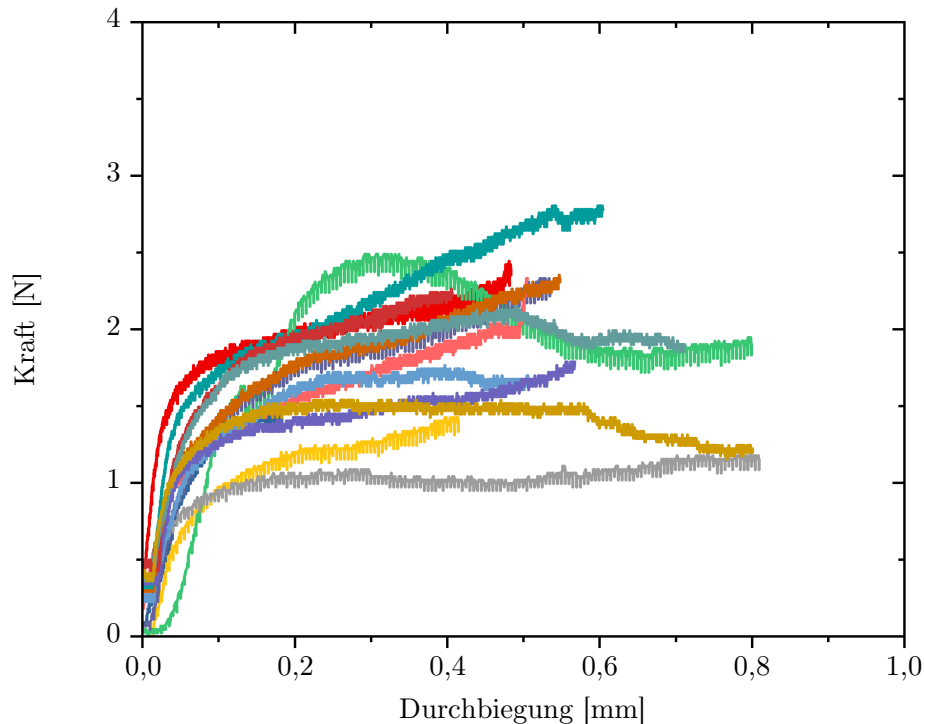


Abbildung 6.13: Kraft-Durchbiegungs-Diagramme für die Drei-Punkt-Biegung an 15 einzelnen Stegen zur Verfügung gestellt von Ing. Marcel Adorna

Da die Steigung jedoch stark von der Länge und die Kraft von der Länge sowie der Querschnittsfläche abhängt, werden diese durch eine spätere Normierung innerhalb des Modells berücksichtigt. Die qualitative Übereinstimmung der Verläufe stützt die Annahme, dass zur Modellierung der Biegebeanspruchung die Zwei-Punkt-Biegung eine ausreichende Beschreibung liefert. Die Verwendung unterschiedlicher Biegebeanspruchungen bietet die Option, das in dieser Arbeit verwendete Modell um weitere Prozesse der Mikrostruktur zu erweitern. Die charakterisierten Spannungs-Dehnungs-Diagramme bzw. die normierten Kraft-Durchbiegungs-Verläufe dienen als Grundlage des implementierten Multiskalenmodells. Dazu werden die je 15 experimentell erfassten Kurven gemittelt. Die jeweils resultierende Kurve dient zur Parameteranpassung der verwendeten Materialmodelle für die unterschiedlichen Belastungen.

6.2 Makroskopische Experimente

Die in diesem Kapitel vorgestellten Experimente an makroskopischen Schaumproben wurden im Rahmen der Habilitation von PD Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung [124] durchgeführt. Weitere Veröffentlichungen zu den Versuchen sind durch Jung et al. [127, 128] gegeben. Da die Experimente zur Validierung des entwickelten Materialmodells dienen, wird im Folgenden kurz auf die Versuchsdurchführung und die Auswertung eingegangen.

Alle makroskopischen Experimente wurden analog zu den statistischen Auswertungen und den Experimenten an einzelnen Stegen an einem 10 ppi Aluminiumschaum ($\text{AlSi}_7\text{Mg}_{0.3}$, Celltec Materials GmbH in Dresden, Deutschland) durchgeführt. Für alle Versuche wurden quasi-statische Bedingungen verwendet, was für die Zug- und Druckversuche einer Dehnrates von $5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ entspricht. Durchgeführt wurden alle Experimente an einer ElectroPulsTM der Firma Ldt. Instron, Pfungstadt, Deutschland. Die geschlossene Fließfläche von offenporigen Metallschäumen (s. Kap. 3) kann nicht durch einfache Zugversuche abgebildet werden. Zusätzlich zum unterschiedlichen Fließverhalten unter Zug- und Druckbelastungen [12, 195, 227] zeigen Schäume bedingt durch die Volumenänderung unter Last ein Fließen unter hydrostatischen Lastfällen [11, 65, 91]. Aus diesem Grund wurden Zug- und Druckversuche sowie Torsionsversuche mit einer überlagerten uniaxialen Last durchgeführt. Der Vorteil der Auswahl dieser Versuche ist die identische Probengeometrie für alle Experimente. Dazu wurde ein Quader mit quadratischer Grundfläche aus den Schäumen extrahiert. Das Verhältnis der Quaderhöhe zur Breite der Grundfläche wurde auf 2 : 1 festgelegt. Die Maße der Proben betragen ca. $80 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$. Um statistische Schwankungen auszugleichen, wurden pro Lastfall fünf unterschiedliche Proben getestet.

Zur Durchführung der Druckversuche bedarf es keiner weiteren Vorbereitung der Proben. Um eine Lastübertragung des Versuchsstands auf die Zug- und Torsionsproben zu ermöglichen, werden je 5 mm des Schaumquaders mit einem Polymer (PUR4/GM708, ebalta Kunststoff GmbH, Rothenburg ob der Tauber, Deutschland) gefüllt. Um dennoch die gleiche effektive Probengeometrie von ca. $80 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ zu gewährleisten, werden 10 mm höhere Quader vorbereitet. Während sich die Auswertung der uniaxialen Versuche einfach gestaltet, muss zur Auswertung der Torsionsversuche und der mit uniaxialen Lasten überlagerten Torsionsversuche die Scherspannung τ und die Scherung γ für die Torsion eines Quaders berechnet werden. Nach Zhang et al. [222] wird für einen Quader die Scherspannung mit

$$\tau = \frac{3 + 1,8 (d/w) M}{w d^2} \quad (6.1)$$

und die Scherung mit

$$\gamma = \frac{d\theta}{h} \left(1 - 0,378 \frac{d^2}{w^2} \right) \quad (6.2)$$

berechnet. Dabei ist d die Tiefe, w die Breite und h die Höhe des Quaders. Mit dem gemessenen Moment M und dem aufgebrachten Verdrehwinkel θ ergeben sich die Scherung und Scherspannung aus den geometrischen Abmessungen der Probe und den gemessenen Daten des Versuchs. Die Torsionsversuche wurden mit unterschiedlichen Lasten in Abhängigkeit der gemittelten PCS-Werte aus den Druck- bzw. Zugversuchen durchgeführt. Dabei entsprechen die reinen Torsionsversuche einer Auflast von 0 N. Zur Validierung des vorgestellten Materialmodells werden zum einen die Ergebnisse aus den Druck- und Zugversuchen und zum anderen die ermittelte Fließfläche verwendet. Die Fließfläche eines Schaums ergibt sich allgemein durch die Bestimmung invarianter Größen des Spannungstensors für den PCS. Zum Vergleich der Fließfläche dient die vorgestellte hydrostatische Ebene. Die erste Hauptinvariante des Spannungstensors (I_1) wie auch die zweite Hauptinvariante des Spannungsveviators (J_2) werden, wie bei Jung [124] beschrieben, aus den Versuchsdaten berechnet. Da die unterschiedlichen Proben in ihrer Größe und damit in ihrem Gewicht variieren, wurden die Fließflächen auf die Masse normiert. Die Annahme eines Kontinuumsmodell für die Simulation liefert die gleiche Masse für die einzelnen Simulationsmodelle. Aus diesem Grund wurde die massenormierte Fließfläche um die Masse der Simulationsmodelle skaliert und resultiert in der in Abbildung 6.14 dargestellten Fließfläche in der Hydrostatischen Ebene. Die Punkte stellen den PCS der unterschiedlichen Proben dar. Die experimentell ermittelte Fließfläche stützt die theoretische Annahme, dass Schäume eine geschlossene Fließfläche ausbilden. Für den 10 ppi Aluminiumschaum bildet sich eine ellipsenähnliche Fließfläche.

Weiter dienen die Zug- und Druckversuche zur Validierung des Modells. Dazu werden die Spannungs-Dehnungs-Diagramme aus den Versuchen mit den Simulationen verglichen. In Abbildung 6.15 sind fünf Druckversuche dargestellt, die den typischen dreigeteilten Spannungs-Dehnungs-Verlauf (vgl. Abb. 3.3) für Metallschäume widerspiegeln. Analog werden für die Zugversuche die Spannungs-Dehnungs-Diagramme in Abbildung 6.16 zusammengefasst. Durch fehlerhafte Versuchsdurchführung und Mangel an Proben sind in Abbildung 6.16 nur drei Kurven dargestellt. Als Grundlage zur Auswertung der experimentellen Daten dient die undeformierte Geometrie des Schaums. Die Kraft wird in den Experimenten für die Momentankonfiguration ermittelt. Somit stellen die Größen im Spannungs-Dehnungs-Diagramm die Nominalspannung und die Ingenieursdehnung dar.

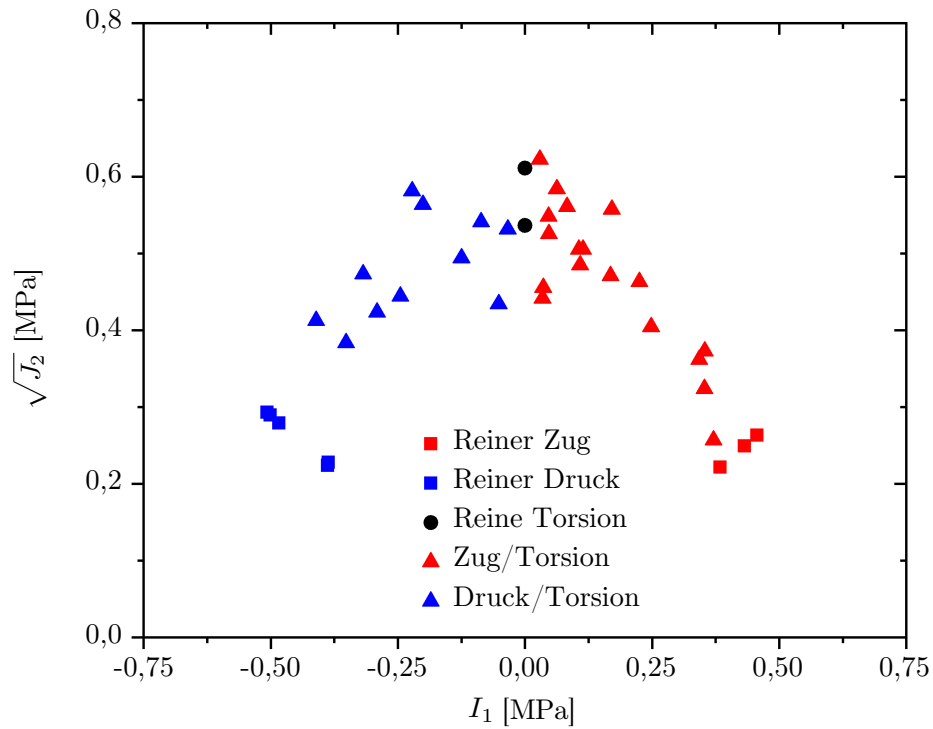


Abbildung 6.14: Fließfläche für die makroskopischen multiaxialen Experimente für den verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum nach Jung et al. [127]

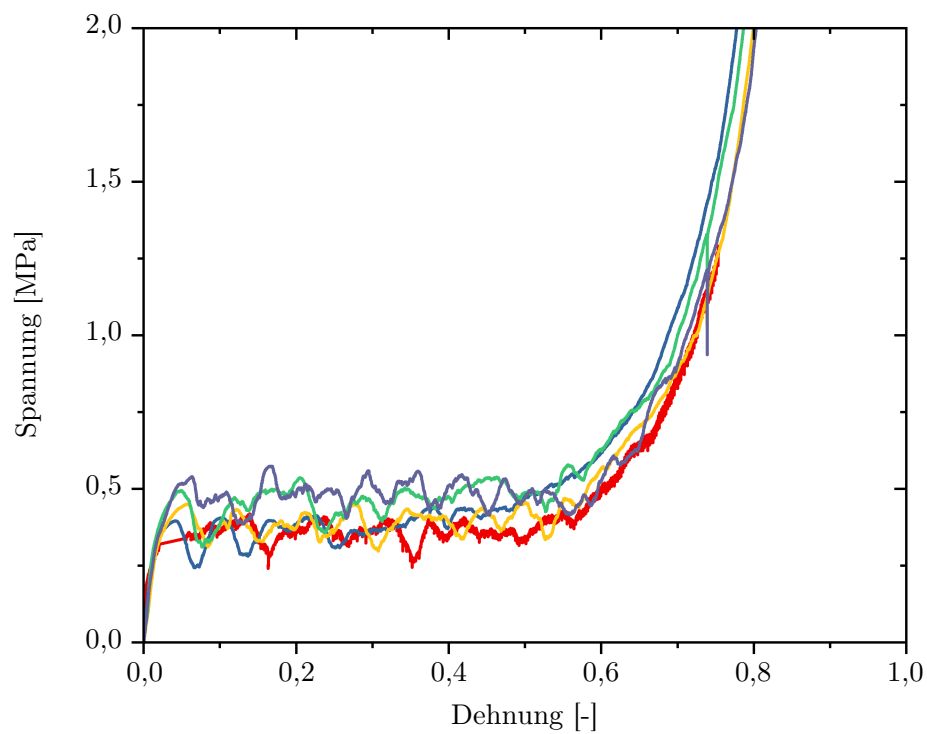


Abbildung 6.15: Makroskopische Spannungs-Dehnungs-Diagramme für den verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum unter Druck nach Jung [124]

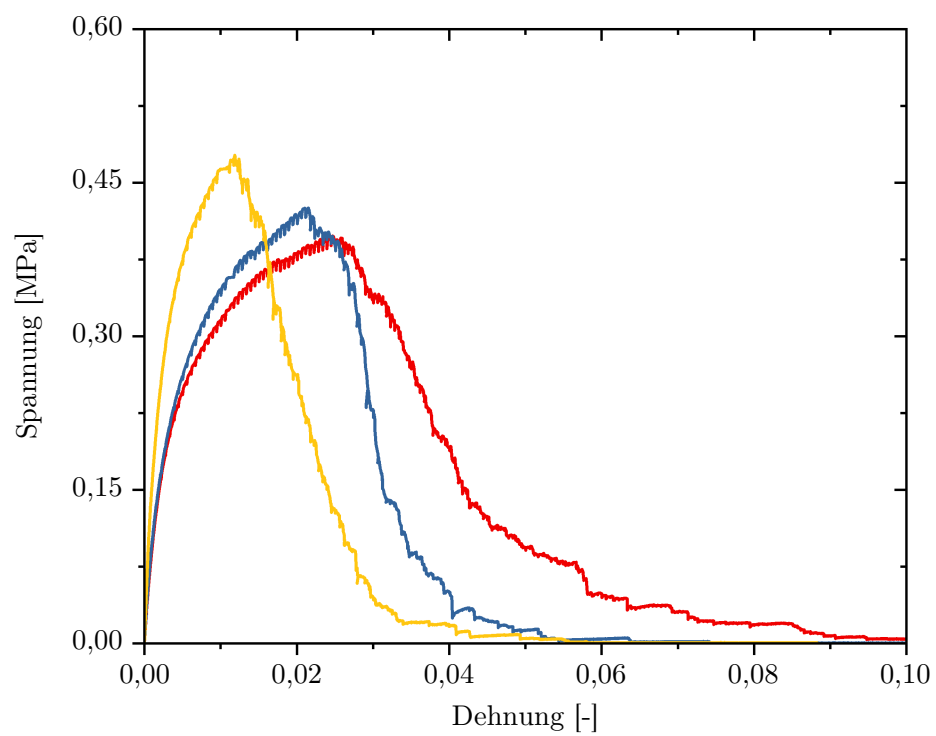


Abbildung 6.16: Makroskopische Spannungs-Dehnungs-Diagramme für den verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum unter Zug nach Jung [124]

7

Makroskopische Simulation

Zur Simulation des makroskopischen Verhaltens von Metallschäumen wird im ersten Teil des Kapitels ein Kontinuumsmodell zur Beschreibung des Fließverhaltens inklusive Implementierung vorgestellt. Dazu wird eine Fließfunktion, wie sie von Bier und Hartmann [35] eingeführt wurde, verwendet. Die Implementierung basiert auf der Annahme kleiner Deformationen, da der Fokus auf der Abbildung der initialen Fließfläche des Schaums liegt. Mit dem vorgestellten Kontinuumsmodell wird die experimentelle Fließfläche des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaums dargestellt. Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode zur Parameteridentifikation ist dabei für beliebige zelluläre Materialien einsetzbar. Mithilfe der durch diese Parameteridentifikation angepassten Fließflächenfunktion nach Bier et al. [35] wird das entwickelte Multiskalenmodell in Kapitel 8 validiert. Der zweite Teil des Kapitels dient der Beschreibung der Implementierung des Multiskalenmodells. Die experimentelle Charakterisierung an Einzelstegen bildet die Basis für die 1D Konstitutivgesetze der einzelnen Microplane Richtungen. Die ermittelten normierten Ergebnisse aus den Experimenten werden mit phänomenologischen Konstitutivgesetzen beschrieben. Die Implementierung der Modelle erfolgt in der FE-Software FEAPTM.

In beiden Abschnitten wird neben der Beschreibung der implementierten Modelle auf die Identifikation der Materialparameter im Allgemeinen und für das Beispiel des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaums eingegangen. Die ermittelten Materialparameter des Kontinuumsmodells sowie des Multiskalenmodells dienen als Grundlage für die nachfolgende Validierung. Die identifizierten Materialparameter des Multiskalenmodells basieren lediglich auf den Resultaten der mikroskopischen Experimente an Einzelstegen.

7.1 Makroskopisches Kontinuumsmodell

7.1.1 Implementierung

Als Kontinuumsmodell zur Validierung des entwickelten Multiskalenmodells wird ein elasto-plastisches Materialmodell für kleine Deformationen implementiert. Als Fließkriterium dient das von Bier et al. [35] eingeführte Modell. Wie in Kapitel 3 vorgestellt, liefert dieses Modell eine Möglichkeit zur Beschreibung der geschlossenen Fließflächen von Metallschäumen. Durch die logarithmische Interpolation eines exponentiellen Fließkriteriums und eines Fließkriteriums in Form einer ellipsoiden Fließfläche ist das Fließkriterium nach Bier et al. [35] in der Lage, sowohl symmetrische als auch unsymmetrische Fließflächen abzubilden. Jung und Diebels [127] haben mit den experimentell ermittelten Fließflächen für 10, 20 und 30 ppi Aluminiumschäume die Notwendigkeit aufgezeigt, sowohl symmetrische als auch unsymmetrische Fließflächen abbilden zu können. Das exponentielle Fließkriterium für die Fließfläche nach Bier et al. [35] wird über die Fließfunktion F_1 mit

$$F_1 = \sqrt{J_2} - k + A_1 e^{(A_2 I_1)} \quad (7.1)$$

in Abhängigkeit der ersten Hauptinvarianten des Spannungstensors und der zweiten Hauptinvarianten des Spannungsdeviators beschrieben. Das Fließkriterium, das einen Ellipsoiden im Hauptspannungsraum beschreibt, wird über die Fließfunktion F_2 mit

$$F_2 = \sqrt{J_2 + \alpha (I_1 - 3\xi)^2} - k \quad (7.2)$$

abgebildet und hängt ebenfalls von der ersten Hauptinvarianten des Spannungstensors und der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators ab. Die weiteren Variablen der beiden Fließfunktionen k , A_1 , A_2 , und ξ werden mit den folgenden Gleichungen berechnet:

$$k = \sqrt{\alpha (I_0 - 3\xi)^2}, \quad (7.3)$$

$$A_1 = k \left(1 - \sqrt{1 - r^2}\right)^{-I_0 / ((1+r)(3\xi - I_0))}, \quad (7.4)$$

$$A_2 = \frac{\ln \left(1 - \sqrt{1 - r^2}\right)}{(1 + r)(3\xi - I_0)}, \quad (7.5)$$

$$\xi = \frac{a_1}{a_2} \exp(-a_2 r_k) + c_k r_k. \quad (7.6)$$

Die Parameter a_1 , a_2 , c , r , I_0 und α sind Materialparameter und bestimmen die Form und Größe der initialen Fließfläche (vgl. Abb. 7.1). Die zeitliche Entwicklung der Verfestigungsvariablen α wird mithilfe der Evolutionsgleichung für $\dot{\alpha}$ durch

$$\dot{\alpha} = \gamma \left(\frac{c_d}{\alpha} \left((I_1 - 3\xi) \frac{\partial F_B}{\partial I_1} - 2J_2 \frac{\partial F_B}{\partial J_2} \right) - b_d \alpha \chi \right) \quad (7.7)$$

mit der Definition von χ über

$$\chi = \sqrt{3 \left(\frac{\partial F_B}{\partial I_1} \right)^2 + 2 J_2 \left(\frac{\partial F_B}{\partial J_2} \right)^2} \quad (7.8)$$

berechnet. Zur Beschreibung der Evolution der Fließfläche dienen die Parameter c_d , b_d , c_k sowie r_k . Der Parameter r_k wird als Spur der plastischen Dehnung definiert und für den plastischen Multiplikator γ gelten die in Tabelle 2.1 zusammengefassten Gleichungen. Die logarithmische Interpolation der beiden Fließfunktionen liefert die Fließfunktion F_B als

$$F_B = c k \ln \left(\frac{e^{(F_1/c k)} + e^{(F_2/c k)}}{2} \right). \quad (7.9)$$

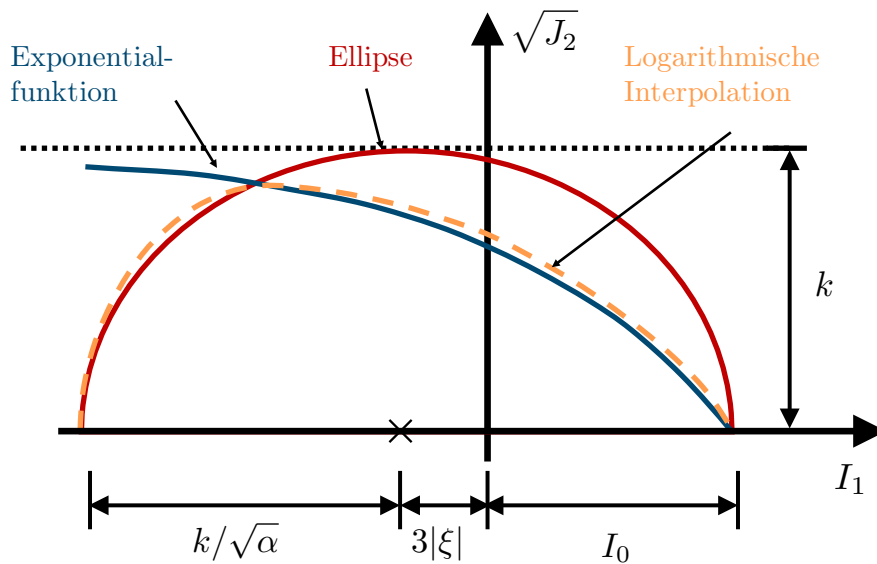


Abbildung 7.1: Logarithmisch interpolierte Fließfläche in Anlehnung an Bier et al. [35]

Somit sind zur Beschreibung der Fließfläche nach Bier et al. [34, 35, 104] neun unterschiedliche Materialparameter notwendig. Abbildung 7.1 stellt exemplarisch eine logarithmische Interpolation der beiden Fließfunktionen F_1 und F_2 als Gesamtfließfläche F_B in der hydrostatischen Ebene dar. Die ellipsoide Fließfläche im Hauptspannungsraum stellt in der hydrostatischen Ebene eine Ellipse dar. Die Materialparameter zur Bestimmung der Form der initialen Fließfläche sind an entsprechender Stelle eingezeichnet und verdeutlichen graphisch deren Einfluss auf die Form der Fließfläche. Die logarithmische Interpolation garantiert eine stets konvexe Fließfläche (vgl. Bier et al. [35]).

Wegen des nicht-assozierten Fließens von Metallschäumen wird zusätzlich zur Fließfunktion ein Fließpotential G_B definiert. Mit der Verwendung von nicht-assoziertem Fließen ist es möglich, die Querkontraktion im plastischen Bereich der Deformation im Modell unabhängig von der Fließfunktion an die Realität anzupassen. Als Fließpotential wird ein Potential, welches im Hauptspannungsraum einen Ellipsoiden darstellt, verwendet. Das Fließpotential wird somit in Abhängigkeit der ersten Hauptinvarianten des Spannungstensors und der zweiten Hauptinvarianten des Spannungsdeviators mit

$$G_B = \sqrt{3 J_2 + \frac{1}{9} \beta^2 I_1^2} \quad (7.10)$$

definiert und hängt nur vom Materialparameter β ab. Damit kann die plastische Querkontraktionszahl ν_{pl} wie bei Altenbach et al. [4] vorgestellt über den Zusammenhang

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2\nu_{pl}}{1 + \nu_{pl}}} \quad (7.11)$$

durch den Parameter β angepasst werden. Wie bei Lührs et al. [152] für nanoporöses Gold gezeigt, wird für den verwendeten Aluminiumschaum eine plastische Querkontraktionszahl von $\nu_{pl} = 0$ zugrunde gelegt. Daraus ergibt sich durch Umstellen der Gleichung (7.11) der Materialparameter β zu

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (7.12)$$

Die Implementierung der vorgestellten Fließfunktion und des Fließpotentials zur Berücksichtigung von nicht-assoziertem Fließen ist in der FE-Software FEAPTM umgesetzt. Dazu wird ein User-Element verwendet, in dem das Materialmodell für jeden Integrationspunkt definiert und anschließend der Spannungstensor und die dazugehörige Steifigkeit bestimmt wird. Als Grundlage der Implementierung dient ein elastisch-plastisches Materialmodell, wie es in Tabelle 2.1 vorgestellt wurde. Der Spannungstensor

σ wird durch die additive Zerlegung der Dehnung mit dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz als

$$\sigma = \overset{4}{\mathbb{C}} : (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (7.13)$$

berechnet. Die allgemeinen Funktionen in Gleichung (2.58) und Gleichung (2.59) werden durch die eingeführte Fließfunktion F_B und das Fließpotential G_B ersetzt. Daraus ergibt sich auf der Ebene der Integrationspunkte ein nichtlineares Materialverhalten, das durch eine Evolution der plastischen Dehnung und der Verfestigungsvariablen beschrieben wird. Zur Lösung der Evolutionsgleichungen wird sowohl die Fließregel als auch die Evolution der Verfestigungsvariablen mittels des in Kapitel 2 beschriebenen expliziten Euler-Verfahren in ein Gleichungssystem umgewandelt. Aus Gründen der Symmetrie wird der plastische Verzerrungstensor zweiter Stufe ε auf sechs Komponenten reduziert. Daraus ergeben sich unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens sechs Gleichungen für die sechs plastischen Komponenten des plastischen Verzerrungstensors. Insgesamt existieren somit sieben Evolutionsgleichungen, für die gilt:

$$0 = \varepsilon_{p,11}^{n+1} - \varepsilon_{p,11}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{11}} \Delta t, \quad (7.14)$$

$$0 = \varepsilon_{p,22}^{n+1} - \varepsilon_{p,22}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{22}} \Delta t, \quad (7.15)$$

$$0 = \varepsilon_{p,33}^{n+1} - \varepsilon_{p,33}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{33}} \Delta t, \quad (7.16)$$

$$0 = \varepsilon_{p,23}^{n+1} - \varepsilon_{p,23}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{23}} \Delta t, \quad (7.17)$$

$$0 = \varepsilon_{p,13}^{n+1} - \varepsilon_{p,13}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{13}} \Delta t, \quad (7.18)$$

$$0 = \varepsilon_{p,12}^{n+1} - \varepsilon_{p,12}^n - \gamma \frac{\partial F_B}{\partial \sigma_{12}} \Delta t, \quad (7.19)$$

$$0 = \alpha^{n+1} - \alpha^n - \gamma \Delta t. \quad (7.20)$$

Die plastischen Dehnungen $\varepsilon_{p,ij}^n$ und die plastische Verfestigung α^n sind die Werte des letzten Iterationsschrittes n . Die Größen des aktuellen Iterationsschrittes $n + 1$ werden durch die plastischen Dehnungen $\varepsilon_{p,ij}^{n+1}$, die plastische Verfestigung α^{n+1} und den plastischen Multiplikator γ beschrieben. Δt stellt in den Gleichungen (7.14)-(7.20) die Zeitschrittweite der Simulation dar. In den sieben Evolutionsgleichungen (7.14)-(7.20) sind mit den aktuell zu bestimmenden plastischen Dehnungen, der Verfestigungsvariablen und dem plastischen Multiplikator acht unbekannte Größen enthalten. Durch die

zusätzliche Bedingung, dass für jeden plastischen Deformationszustand die Fließbedingung erfüllt sein muss, liefert

$$0 = F_B = ck \ln \left(\frac{e^{(F_1/ck)} + e^{(F_2/ck)}}{2} \right) \quad (7.21)$$

die achte Gleichung. Somit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar. Zur Lösung des Gleichungssystems werden das in Kapitel 2 vorgestellte Mehrdimensionale-Newton-Verfahren (vgl. Gl. (2.85)-(2.88)) und das Gaußsche Eliminationsverfahren verwendet. Die resultierenden aktuellen Größen der plastischen Dehnung und der Verfestigungsvariablen dienen zur Berechnung des Spannungstensors für den aktuellen Deformationszustand. Die entsprechende Steifigkeitsmatrix zum berechneten Spannungswert wird über die in Kapitel 5 beschriebene numerische Tangente ermittelt. Dazu wird die Berechnung des Spannungstensors für einen variierten Deformationszustand durchgeführt und die Komponenten der Steifigkeitsmatrix wie in Gleichung (5.3) bestimmt. Durch die Verwendung der numerischen Tangente wird für das Kontinuumsmodell die Bestimmung der Steifigkeit vereinfacht und eine Anpassung der konstitutiven Zusammenhänge ohne Änderung des Vorgehens zur Bestimmung der Steifigkeit ermöglicht.

7.1.2 Simulation und Parameteridentifikation

Zur Identifikation der Parameter des Kontinuumsmodells wird das in Gleichung (2.41) definierte Hookesche Gesetz mit den Lamé-Konstanten als Grundlage verwendet. Als Eingangsgrößen für das Simulationsmodell dienen der E -Modul und die Querkontraktionszahl ν , um eine bessere Vergleichbarkeit mit dem entwickelten Multiskalenmodell zu gewährleisten. Die Lamé-Konstanten ergeben sich aus dem E -Modul und der Querkontraktionszahl zu

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (7.22)$$

und

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (7.23)$$

Weiter müssen zur Bestimmung der Fließfläche sowohl die Parameter für die initiale Fließfläche als auch die Verfestigungsparameter bestimmt werden. Die ermittelte makroskopische Fließfläche des 10 ppi Aluminiumschaums dient als Grundlage zur Anpassung der initialen Fließflächenparameter a_1 , a_2 , c , r , I_0 und α . Zur Identifikation der Materi-

alparameter wird der in MatlabTM integrierte *fminsearch*-Algorithmus verwendet. Dieser basiert auf dem Nelder-Mead-Verfahren [167], das der Optimierung einer nichtlinearen Funktion mit mehreren Parametern dient. Zur Ermittlung der Parameter der initialen Fließfläche des 10 ppi Aluminiumschaums wird die Abweichung der gemessenen Datenpunkte der Fließfläche aus den Experimenten in der hydrostatischen Ebene und den entsprechenden Funktionswerten der implementierten Fließfläche nach Bier et al. [35] bestimmt. Die Abweichung der realen Werte für die Wurzel der zweiten deviatorischen Invarianten aus dem Experiment y_{Exp} und aus dem implementierten Simulationsmodell y_{Sim} dient als zu minimierende Funktion $f_{Fehler}(y_{Exp}, y_{Sim})$. Die Fehlerfunktion wird über

$$f_{Fehler}(y_{Exp}, y_{Sim}) = \frac{2 \sum_i (y_{Exp,i} - y_{Sim,i})^2}{\sum_i |y_{Exp,i} + y_{Sim,i}| + 10^{-6}} \quad (7.24)$$

als Summe der Fehlerquadrate dividiert durch den Mittelwert berechnet. Der zusätzliche Term 10^{-6} im Nenner dient lediglich der Vermeidung einer Division durch Null, für den Fall, dass beide Werte Null sind. Für die Optimierung wird eine maximale Anzahl von 100.000 Iterationen vorgegeben. Für eine Abweichung des Modells von der Realität, die kleiner als 2×10^{-6} ist oder eine Änderung der zu identifizierenden Parameter, die kleiner als 2×10^{-6} ist, wird von einer hinreichend genauen Lösung ausgegangen. Die Optimierung wird für unterschiedliche Startwerte der sechs Parameter durchgeführt. Die identifizierten Parameter sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst und die daraus resultierende Fließfläche ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

Tabelle 7.1: Identifizierte Materialparameter für die initiale Fließfläche des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaums

Parameter	a_1 [MPa]	a_2 [-]	c [-]	r [-]	I_0 [MPa]	α [-]
Wert	0,0226	-0,6581	0,7202	0,4258	0,6389	1,1595

Zur Darstellung wird die Fließfläche zusammen mit den experimentell ermittelten Punkten der Fließfläche in der hydrostatischen Ebene aufgetragen. Sowohl qualitativ als auch quantitativ stimmt das Fließflächenmodell mit den experimentellen Daten überein. Der quantitative Vergleich wird durch die Bestimmung der Korrelation zwischen den realen Werten und den entsprechenden Werten der Fließfunktion gegeben. Für die ermittelte Fließfläche ergibt sich ein Korrelationsfaktor von 90 %.

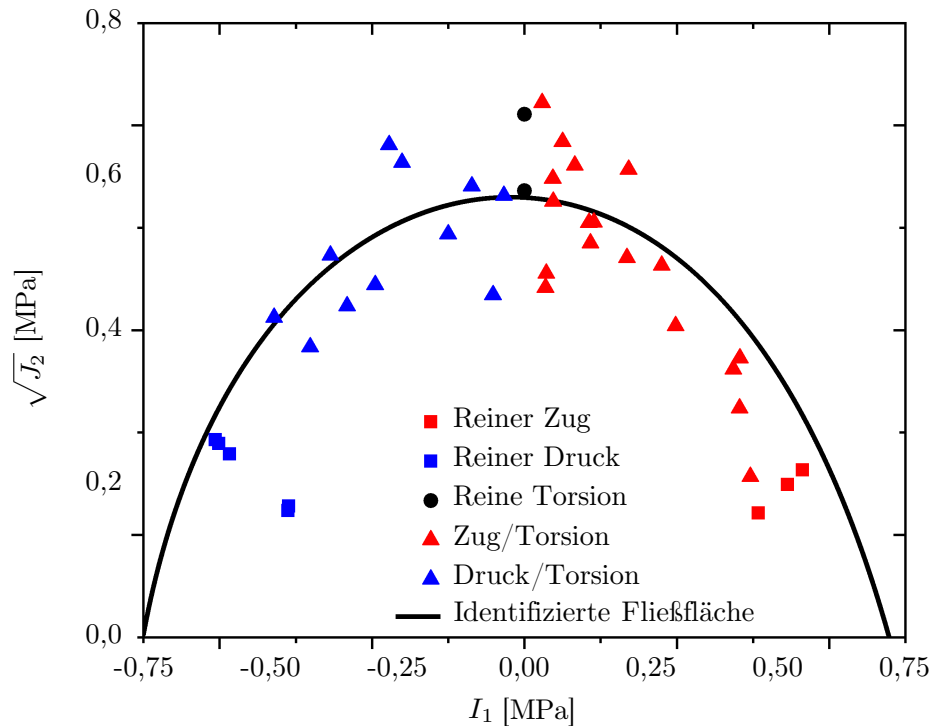


Abbildung 7.2: Fließfläche des 10 ppi Aluminiumschaums für die gemessenen experimentellen Werte als blaue und rote Dreiecke sowie schwarze Kreise dargestellt und für die Parameteridentifikation als durchgezogene schwarze Linie

Die ermittelten Parameter der initialen Fließfläche dienen im Folgenden zur Identifikation der verbliebenen Materialparameter. Die Identifikation erfordert eine inverse Berechnung, wozu eine Simulation an einem geometrischen Modell der realen Probe aus dem Experiment durchgeführt wird. Als Geometrie wird ein Quader mit einer Kantenlänge von $80 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ mit $30 \times 15 \times 15$ Elementen des implementierten User-Elements vernetzt. Das entspricht der verwendeten Probengeometrie der getesteten Aluminiumschäume auf der Makroebene. Die Experimente weisen einen deutlichen Unterschied der linearen Steigung für den Anfangsbereich in den Spannungs-Dehnungs-Diagrammen in Abbildung 6.15 und Abbildung 6.16 unter Druck- und Zugbelastungen auf. Für das verwendete Kontinuumsmodell muss der E -Modul je nach Art der Belastung angepasst werden. Um dennoch eine effiziente Parameteridentifikation zu erreichen, wird zunächst der E -Modul für die Druckversuche in Kombination mit den Verfestigungsparametern der Fließfunktion ermittelt. Da für Schäume nicht nur die plastische Querkontraktionszahl, sondern auch die Querkontraktionszahl im elastischen Bereich zu Null angenommen werden kann, beschränkt sich die Anzahl an Parametern auf vier. Zur Bestimmung der Parameter wird analog zur Bestimmung der initialen Fließflächenparameter die Abweichung zwischen Modell und Realität minimiert. Der in MatlabTM implementierte *fminsearch*-Algorithmus dient zur Ermittlung des Minimums der Abweichung. Anders als für die initiale Fließfläche muss für jede Iteration die Simulation mit neuen Parametern durchgeführt werden. Für die Druck- und Zugversuche werden die

Randbedingungen analog zu den Experimenten als Dirichlet-Randbedingungen aufgebracht. Die Ergebnisse der Simulation werden mit der in Gleichung (7.24) beschriebenen Fehlerfunktion mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Diese Iteration wird solange durchgeführt, bis der Fehler kleiner als 2×10^{-6} oder eine Änderung der zu identifizierenden Parameter kleiner als 2×10^{-6} ist. Die Resultate der Parameteridentifikation sind die in Tabelle 7.2 zusammengefassten Materialparameter. Die Visualisierung der Ergebnisse ist in Abbildung 7.3 als Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt. Die Simulation bildet den pseudo-elastischen Bereich des Druckversuchs am realen Schaum sehr gut ab. Der PCS wird durch die Simulation vorhergesagt. Das sukzessive Kollabieren der Porenlagen bedingt die Plateauspannung und wird im verwendeten Kontinuumsmodell linear genähert.

Tabelle 7.2: Identifizierte Materialparameter für den verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum

Parameter	E_D [MPa]	E_Z [MPa]	c_k [MPa]	c_d [MPa]	b_d [-]
Wert	16,6667	41,9551	0,0	0,6150	0,0

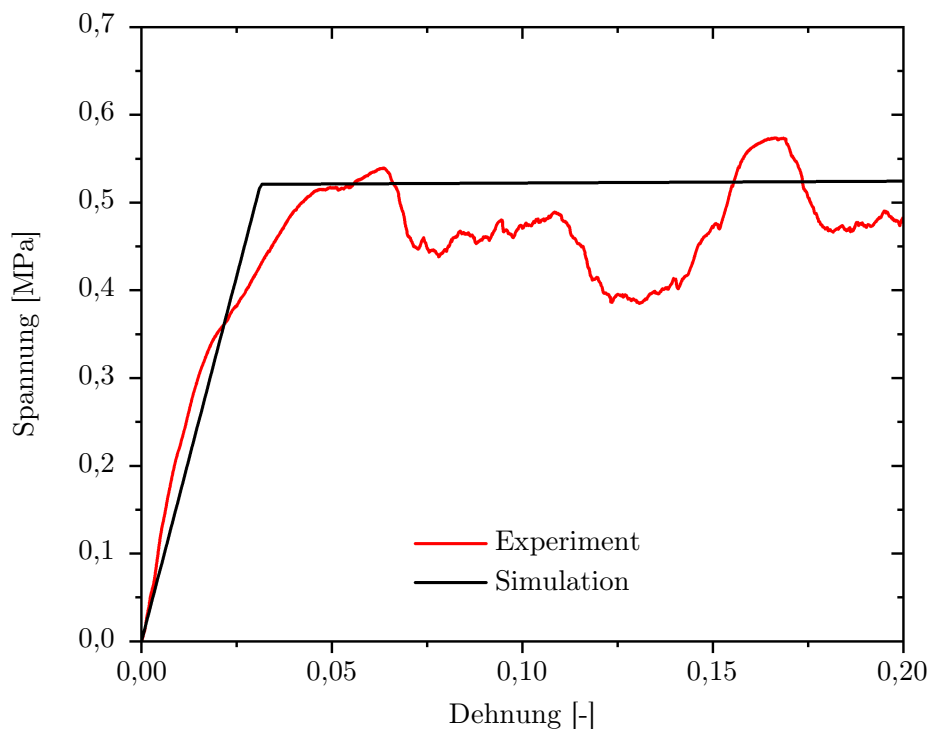


Abbildung 7.3: Makroskopisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm der gemittelten Druckversuche des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum und des Simulationsergebnisses für die identifizierten Materialparameter

Die identifizierten Parameter für die Evolution der Fließfläche werden für die Identifikation des E -Moduls unter Zugbelastung als vorausgesetzt angenommen. Da das Kontinuumsmodell nur die Plastizität abbildet, ist eine Beschreibung des Spannungsabfalls nach Erreichen des PCS unter Zugbelastung nicht möglich. Aus diesem Grund dient das Modell der Abschätzung des PCS unter verschiedenen Lastfällen. Für die Ermittlung des E -Moduls wird die gleiche Optimierungsroutine in MatlabTM verwendet wie für die Ermittlung des E -Moduls unter Druckbelastung. Das Ergebnis der Optimierung ist in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Der qualitative Vergleich der Ergebnisse ist in Abbildung 7.4 gegeben, wobei der annähernd lineare Anfangsbereich des experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Diagramms deutlich wird. Die Abnahme der Steigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm wird durch das einfache elastisch-plastische Materialmodell nicht abgebildet. Dennoch wird auch für die Zugversuche der PCS annähernd vorhergesagt. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Spannungs-Dehnungs-Diagramme in Abbildung 7.3 und in Abbildung 7.4 identisch skaliert.

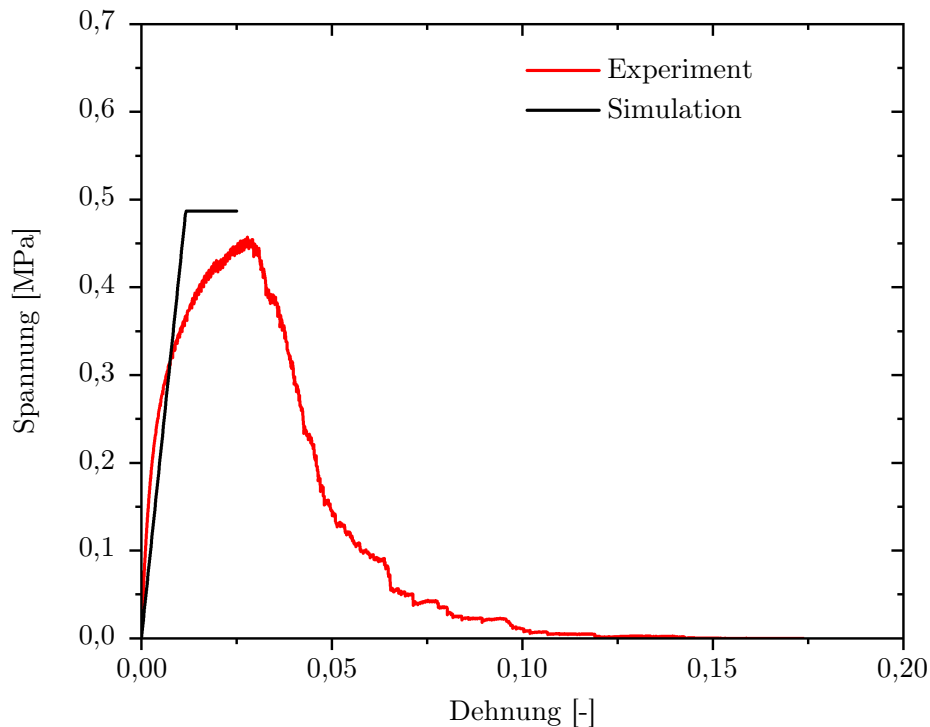


Abbildung 7.4: Makroskopisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm der gemittelten Zugversuche des verwendeten 10 ppi Aluminiumschaum und des Simulationsergebnisses für die identifizierten Materialparameter

7.2 Multiskalenmodell

7.2.1 Phänomenologische 1D Konstitutivgesetze

Das in Kapitel 5 vorgestellte Multiskalenmodell basierend auf der Microplane Theorie mit der Erweiterung um die stochastische Verteilung der Stegorientierungen dient als Grundlage für die in diesem Kapitel durchgeführte Implementierung. Wie in Abbildung 5.4 zusammengefasst, wird das Modell als Umat-Routine in der FE-Software FEAPTM umgesetzt. Die Ergebnisse der Experimente an Einzelstegen dienen der Vervollständigung des Modells. Die experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Diagramme (s. Abb. 6.7 und Abb. 6.8) bzw. das normierte Kraft-Durchbiegungs-Diagramm (s. Abb. 6.12) für die Biegung werden mithilfe von rein phänomenologischen 1D Konstitutivgesetzen beschrieben. Dabei wird ein gesondertes Konstitutivgesetz für die Biegung und damit für die Tangentialkomponente des Microplane Modells verwendet. Um das unterschiedliche Verhalten der Stege unter Druck- und Zugbelastungen abzubilden, wird für die Normalkomponente der Microplane Theorie eine Fallunterscheidung eingeführt. Diese prüft für jede der diskreten Richtungen, ob eine Druck- oder Zugbelastung vorliegt. Mit der vorgestellten Unterscheidung werden alle Belastungsarten, die für das Modell relevant sind, abgedeckt. Die folgenden Materialmodelle werden im Programmablauf nur im Unterprogramm der 1D Konstitutivgesetze verwendet. Die restliche Implementierung bleibt von den 1D Modellen unbeeinflusst. Zunächst werden für alle Belastungsarten die phänomenologischen Konstitutivgesetze vorgestellt und beschrieben. Im Anschluss wird die Routine zur Parameteridentifikation allgemein beschrieben und die Ergebnisse für alle drei Belastungsarten zusammengefasst und diskutiert.

Die Druckversuche an Einzelstegen zeigen einen komplexen Spannungs-Dehnungs-Verlauf. Eine Option, das Verhalten phänomenologisch mit einem 1D Konstitutivmodell zu charakterisieren, ist ein elasto-plastisches Materialmodell, wie es in Kapitel 2 beschrieben und in Tabelle 2.1 mit den wichtigsten Gleichungen zusammengefasst wurde. Dabei werden die Gleichungen (2.56)-(2.61) zu skalarwertigen Gleichungen vereinfacht und hängen somit ausschließlich von skalaren Größen ab. Zur phänomenologischen Beschreibung wird von assoziiertem Fließen ausgegangen, wodurch das Fließpotential und die Fließfunktion identisch sind. Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme der 15 Einzelstege unter Druckbelastung weisen nach einem annähernd linearen Anfangsbereich eine abnehmende Steigung auf. Nach einer Dehnung von ca. 40% ändert sich die Krümmung und die Spannung steigt erneut an. Um dieses Verhalten abzubilden, wird das

Hookesche Gesetz mit

$$\sigma = E_{SD} (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (7.25)$$

als Basis definiert. Der Index SD dient der Zuordnung zu den Stegen unter Druckbelastung. Dabei stellt E_{SD} den effektiven E -Modul für die Druckversuche an Stegen dar. Aus Gründen der Übersicht werden die Größen analog zur Beschreibung der kleinen Deformationen in Kapitel 2 mit σ , ε und ε_p beschrieben. Die verwendeten Größen für das Modell entsprechen der Nominalspannung sowie der logarithmischen Dehnung und werden durch die Zusammenhänge der Kontinuumsmechanik zur Cauchy-Spannung umgerechnet. Durch die Verwendung der logarithmischen Dehnung ist der additive Split der Dehnung auch für beliebige Deformationen anwendbar. Weiter wird ein Fließkriterium mit zwei unterschiedlichen exponentiellen Verfestigungsfunktionen definiert. Die Fließfunktion zur Beschreibung des Stegverhaltens unter Druckbelastung F_{SD} wird über

$$F_{SD}(\sigma, \alpha_{SD}) = \sigma_{SD,F} - k_{SD}(\alpha_{SD}) \quad (7.26)$$

definiert. Die Verfestigungsfunktion k_{SD} ist eine Funktion der Verfestigungsvariablen α_{SD} und ist definiert als

$$\begin{aligned} k_{SD}(\alpha_{SD}) = & \sigma_{SD,y} + (\sigma_{SD,inf} - \sigma_{SD,y}) (1 - \exp(-\beta_{SD} \alpha_{SD})) \\ & + H_{SD} \alpha_{SD} + (\delta_{SD} (\exp(\kappa_{SD} (\alpha_{SD} - 0,4)) - 1)) \end{aligned} \quad (7.27)$$

in Abhängigkeit der Materialparameter $\sigma_{SD,y}$, $\sigma_{SD,inf}$, β_{SD} , H_{SD} , δ_{SD} und κ_{SD} . Dabei stellt $\sigma_{SD,y}$ die initiale Fließspannung und somit den Beginn des Fließens dar. Die erste Exponentialfunktion dient der Beschreibung der Steigungsabnahme im Spannungs-Dehnungs-Diagramm nach Erreichen der initialen Fließspannung. Dieser Bereich wird durch den Übergang von der initialen Fließspannung zu einer maximalen Fließspannung $\sigma_{SD,inf}$ charakterisiert. Anschließend wird durch eine lineare Entfestigung mit dem Verfestigungsmodul H_{SD} die lineare Spannungsabnahme beschrieben. Die zweite Exponentialfunktion dient der Beschreibung des Spannungsanstiegs für den Selbstkontakt der Stege. Zur Beschreibung des exponentiellen Spannungsanstiegs nach Erreichen einer Dehnung von ca. 40 % dienen die Parameter δ_{SD} und κ_{SD} .

Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des plastischen Dehnungsanteils ε_p sowie der Verfestigungsvariablen α_{SD} dienen die Evolutionsgleichungen, die sich aus der Fließregel (s. Gl. (2.60)) und der Evolutionsvorschrift der Verfestigung (s. Gl. (2.61)) ergeben. Für den eindimensionalen Fall und unter Verwendung des expliziten Euler-Verfahrens

folgen die beiden Gleichungen zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung mit

$$0 = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n - \gamma_{SD} \frac{\partial F_{SD}}{\partial \sigma} \Delta t, \quad (7.28)$$

$$0 = \alpha_{SD}^{n+1} - \alpha_{SD}^n - \gamma_{SD} \Delta t. \quad (7.29)$$

Dabei beschreibt der hochgestellte Index $n + 1$ die aktuellen Größen und der hochgestellte Index n den Wert des letzten Belastungsschrittes. In den Gleichungen sind drei unbekannte Größen mit ε_p^{n+1} , α_{SD}^{n+1} und γ_{SD} enthalten. Zur eindeutigen Lösung dient als dritte Gleichung die Fließbedingung $F_{SD} = 0$, die für jede plastische Belastung erfüllt sein muss. Damit ergibt sich ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt iterativ unter Verwendung des in Kapitel 2 vorgestellten Mehrdimensionalen-Newton-Verfahrens und dem Gaußschen Eliminationsverfahren. Mit dem eindimensionalen Konstitutivgesetz wird das Verhalten der Stege unter Druckbelastungen beschrieben. Im Rahmen des implementierten Multiskalenmodells kann die eindimensionale Konstitutivgleichung für die Normalkomponente der einzelnen Richtungen verwendet werden. Die Anpassung der Materialparameter folgt nach der Einführung der Konstitutivgesetze für die Zug- und Biegebelastung, da die Identifikation identisch abläuft.

Die Experimente an Stegen unter Zugbelastung weisen ein signifikant unterschiedliches Verhalten im Vergleich zu den Druckversuchen auf. Abbildung 6.7 zeigt den typischen Spannungs-Dehnungs-Verlauf für die Zugversuche an Einzelstegen. Für alle 15 Stege stellt sich ein anfänglich lineares Verhalten ein, gefolgt von einer Abnahme der Steigung und somit der Steifigkeit bis hin zum Reißen der Stege. Das Reißen der Stege ist damit gleichbedeutend mit einem abrupten Spannungsabfall zu Null. Zur phänomenologischen Beschreibung des Verhaltens unter Zugbelastung wird ein elastisch-plastisches Schädigungsmodell implementiert. Als Grundlage dient das in Kapitel 2 vorgestellte Schädigungsmodell nach Lemaître [146, 147]. Dabei werden die in Tabelle 2.2 zusammengefassten Gleichungen als 1D Konstitutivgesetze der Normalkomponente des Microplane Modells unter Zugbelastung verwendet. Analog zur Beschreibung des Materialverhaltens unter Druckbelastung wird das Modell für logarithmische Dehnungen implementiert, was einen additiven Split der Dehnung in einen elastischen und plastischen Anteil ermöglicht. Für eine bessere Übersicht werden die Spannungen mit σ und die Dehnungen mit ε bezeichnet. Das allgemeine Hookesche Gesetz aus Gleichung (2.69) bildet mit

$$\sigma = (1 - d_{SZ}) E_{SZ} (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (7.30)$$

die Basis für das Modell. Der effektive E -Modul für die Zugbelastung wird mit E_{SZ} identifiziert. Zur Beschreibung der Plastizität wird assoziiertes Fließen vorausgesetzt. Als Fließfunktion wird für die Einzelstege unter Zugbelastung die Funktion F_{SZ} mit

$$F_{SZ}(\sigma, \alpha_{SZ}) = \frac{\sigma_{SZ,F}}{(1 - d_{SZ})} - k_{SZ}(\alpha_{SZ}) \quad (7.31)$$

zugrunde gelegt. Die Verfestigungsfunktion k_{SZ} wird als exponentielle Verfestigung mit einem linearen Anteil über

$$k_{SZ}(\alpha_{SZ}) = \sigma_{SZ,y} + (\sigma_{SZ,inf} - \sigma_{SZ,y}) (1 - \exp(-\beta_{SZ} \alpha_{SZ})) + H_{SZ} \alpha_{SZ} \quad (7.32)$$

definiert. Darin geben $\sigma_{SZ,y}$ die initiale Fließspannung unter Zugbelastung an, $\sigma_{SZ,inf}$ die Spannung nach dem exponentiellen Übergang und H_{SZ} den Verfestigungsmodul. Der Materialparameter β_{SZ} beschreibt die Form des exponentiellen Übergangs zwischen der initialen Fließspannung und der maximalen Fließspannung $\sigma_{SZ,inf}$. Neben der zeitlichen Entwicklung der plastischen Dehnung und der Verfestigungsvariablen muss die zeitliche Entwicklung der Schädigungsvariablen d_{SZ} beschrieben werden. Mit dem expliziten Euler-Verfahren werden die Evolutionsgleichungen (2.71)-(2.73) dargestellt als

$$0 = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n - \gamma_{SZ} \frac{\partial F_{SZ}}{\partial \sigma} \Delta t, \quad (7.33)$$

$$0 = \alpha_{SZ}^{n+1} - \alpha_{SZ}^n - \gamma_{SZ} \Delta t, \quad (7.34)$$

$$0 = d_{SZ}^{n+1} - d_{SZ}^n - \Delta t \frac{\gamma_{SZ}}{(1 - d_{SZ})} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s \quad (7.35)$$

und ergeben gemeinsam mit der Fließbedingung $F_{SZ} = 0$ ein Gleichungssystem aus vier Gleichungen mit vier unbekanntenen Größen. Die unbekanntenen Größen sind dabei die aktuelle plastische Dehnung ε_p^{n+1} , die aktuelle Verfestigungsvariable α_{SZ}^{n+1} , die aktuelle Schädigungsvariable d_{SZ}^{n+1} und der plastische Multiplikator γ_{SZ} . Für die Schädigungsevolution ist Y definiert als

$$Y = -\frac{\sigma^2}{2E_{SZ}(1 - d_{SZ})^2}. \quad (7.36)$$

Die Parameter s und r beschreiben die zeitliche Entwicklung der Schädigungsvariablen. Das Gleichungssystem wird analog zum Konstitutivgesetz unter Druckbelastung iterativ mithilfe des in Kapitel 2 vorgestellten Mehrdimensionalen-Newton-Verfahrens und dem Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst. Das vorgestellte Materialmodell ermöglicht die eindimensionale Beschreibung des Stegverhaltens unter Zugbelastung im Rahmen der Microplane Theorie.

Als Materialmodell für die Tangentialkomponente des Multiskalenmodells wird ein elastisch-plastisches Materialmodell zur Charakterisierung des Verhaltens der Stege der Zwei-Punkt-Biegung definiert. Zur Beschreibung der normierten Kraft-Durchbiegungs-Diagramme wird eine exponentielle Verfestigung für den Übergang der annähernd linearen Anfangssteifigkeit bis zu einer maximalen normierten Kraft angenommen. Um den Kraftabfall in den Experimenten abzubilden, wird eine lineare Entfestigung gewählt. Dies stellt, analog zur Beschreibung der Zug- und Druckversuche, lediglich eine Möglichkeit dar, das Materialverhalten rein phänomenologisch zu charakterisieren. Die Basis für die Charakterisierung bildet das eindimensionale Hookesche Gesetz, wie es in Kapitel 2 eingeführt wurde. Durch die Beschreibung der normierten Durchbiegung über die tangentielle Dehnungskomponente der Microplane Theorie folgt das Hookesche Gesetz mit

$$\sigma = E_{SB} (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (7.37)$$

und die Verwendung der logarithmischen Dehnung ermöglicht den additiven Split der Dehnung. Der effektive E -Modul E_{SB} in Gleichung (7.37) bildet die Anfangssteigung der normierten Kraft-Durchbiegungs-Kurve ab. Das plastische Verhalten wird über die modifizierten Gleichungen aus Tabelle 2.1 für den eindimensionalen Fall und für assoziiertes Fließen beschrieben. Die Fließfunktion für die Beschreibung der Plastizität unter Biegebeanspruchung F_{SB} wird mit

$$F_{SB}(\sigma, \alpha_{SB}) = \sigma_{SB,F} - k_{SB}(\alpha_{SB}) \quad (7.38)$$

definiert. Die oben erläuterte Verfestigung wird über

$$k_{SB}(\alpha_{SB}) = \sigma_{SB,y} + (\sigma_{SB,inf} - \sigma_{SB,y}) (1 - \exp(-\beta_{SB} \alpha_{SB})) + H_{SB} \alpha_{SB} \quad (7.39)$$

beschrieben. $\sigma_{SB,y}$ stellt die initiale Fließspannung, $\sigma_{SB,inf}$ die maximale Fließspannung nach dem exponentiellen Übergang und H_{SB} den Verfestigungs- bzw. Entfestigungsmodul dar. Die Variable β_{SB} beschreibt den Übergang von der initialen Fließspannung zur maximalen Fließspannung. Die Evolution der Verfestigungsvariablen α_{SB} wird wie in Gleichung (2.61) definiert. Unter Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens folgen die beiden Gleichungen zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der plastischen Dehnung und der Verfestigung zu:

$$0 = \varepsilon_p^{n+1} - \varepsilon_p^n - \gamma_{SB} \frac{\partial F_{SB}}{\partial \sigma} \Delta t, \quad (7.40)$$

$$0 = \alpha_{SB}^{n+1} - \alpha_{SB}^n - \gamma_{SB} \Delta t. \quad (7.41)$$

Für die eindeutige Lösung muss als dritte Gleichung das Fließkriterium $F_{SB} = 0$ erfüllt sein. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt analog zu denen für die Zug- und Druckbelastung.

7.2.2 Parameteridentifikation

Zur Identifikation aller Materialparameter der drei vorgestellten Modelle (E_{SD} , $\sigma_{SD,y}$, $\sigma_{SD,inf}$, β_{SD} , H_{SD} , δ_{SD} , κ_{SD} , E_{SZ} , $\sigma_{SZ,y}$, $\sigma_{SZ,inf}$, β_{SZ} , H_{SZ} , d_{SZ} , E_{SB} , $\sigma_{SB,y}$, $\sigma_{SB,inf}$, β_{SB} und H_{SB}) wird der Mittelwert der experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Diagramme bzw. des normierten Kraft-Durchbiegungs-Diagramms bestimmt. Für die Parameteridentifikation der 1D Modelle dient allein das mathematische Modell. Ein zusätzlicher Bezug zu den realen Stegen wird nicht benötigt. Es wird die Annahme getroffen, dass der Mittelwert der je 15 Experimente an Einzelstegen die geometrisch bedingten Schwankungen abbildet. Die identifizierten Parameter werden anschließend im FE-Modell verwendet. Zur Parameterbestimmung wird der Fehler zwischen den Materialmodellen und der jeweiligen mittleren Spannungs-Dehnungs-Kurve ermittelt. Als Fehlerfunktion dient die in Gleichung (7.24) definierte Abweichung. Mit dem in MatlabTM integrierten *fminsearch*-Algorithmus wird das Minimum der Fehlerfunktion und somit der Abweichung zwischen dem jeweiligen Modell und dem zugehörigen Experiment bestimmt. Dazu werden die 1D Materialmodelle mit unterschiedlichen Materialparametern durchgerechnet, bis die Fehlerfunktion aus Gleichung (7.24) oder die Änderung der Materialparameter kleiner als 10^{-6} ist. Beschränkt wird die Identifikation weiter durch eine maximale Anzahl von 100.000 Iterationen.

Die Ergebnisse der Parameteridentifikation sind in Tabelle 7.3 für alle drei Materialmodelle zusammengefasst. Die Parameter dienen als Materialparameter für die implementierten Materialmodelle für die Normal- und Tangentialkomponente des beschriebenen Multiskalenmodells. Die Validierung des Modells wird mit den ermittelten Materialparametern der Mikroebene an Experimenten der Makroebene durchgeführt. Zur Visualisierung der Parameteridentifikation sind die Spannungs-Dehnungs-Diagramme der 1D Konstitutivgesetze für Druck- und Zugbelastung in Abbildung 7.5 und Abbildung 7.6 dargestellt. Dabei entsprechen die schwarzen Verläufe dem angepassten 1D Konstitutivgesetz, wie es für die einzelnen Richtungen der Mikroebene verwendet wird. In beiden Diagrammen ist in Rot der Mittelwert aus den 15 experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Diagrammen dargestellt.

Tabelle 7.3: Identifizierte Materialparameter für die 1D Materialmodelle zur phänomenologischen Beschreibung der Zug-, Druck- und Biegeexperimente an Einzelstegen eines 10 ppi Aluminiumschaums

		Druckbelastung						
Parameter	E_{SD} [MPa]	$\sigma_{SD,y}$ [MPa]	$\sigma_{SD,inf}$ [MPa]	β_{SD} [-]	H_{SD} [MPa]	δ_{SD} [MPa]	κ_{SD} [-]	
	3618,76	89,84	89,87	636,11	-39,34	9,56	3,17	
		Zugbelastung						
Parameter	E_{SZ} [MPa]	$\sigma_{SZ,y}$ [MPa]	$\sigma_{SZ,inf}$ [MPa]	β_{SZ} [-]	H_{SZ} [MPa]	s_{SZ} [-]	r_{SZ} [-]	
	39945,67	25,79	51,59	481,12	881,82	-0,10	28,60	
		Biegebelastung						
Parameter	E_{SB} [MPa]	$\sigma_{SB,y}$ [MPa]	$\sigma_{SB,inf}$ [MPa]	β_{SB} [-]	H_{SB} [MPa]			
	296,07	4,37	8,74	100,00	-8,02			

Die Parameteridentifikation zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der phänomenologischen Materialmodelle mit den experimentellen Daten für die Druck- und Zugbelastung. In Abbildung 7.7 ist das mittlere normierte Kraft-Durchbiegungs-Diagramm für die 15 Zwei-Punkt-Biegeversuche mit dem 1D Konstitutivgesetz zur Beschreibung der Tangentialkomponente der Microplane Theorie aufgetragen. Für das verwendete 1D Konstitutivgesetz wird die gemittelte experimentelle Kurve sehr gut abgebildet. Insbesondere mit dem Vergleich der großen Streuung der experimentellen Daten liegen die kleineren Abweichungen der simulierten Kurven perfekt auf den experimentellen Kurven. Anzumerken ist, dass die phänomenologische Beschreibung der Experimente der Einzelstege nur eine Möglichkeit darstellt, das mikroskopische Materialverhalten abzubilden. Die verwendeten Materialmodelle dienen der Veranschaulichung, dass mit dem entwickelten Multiskalenmodell beliebige eindimensionale nichtlineare Zusammenhänge in dreidimensionale Materialmodelle verallgemeinert werden können. Die Änderung des mikroskopischen Verhaltens oder der Interpretation der einzelnen Richtungen der Microplane Theorie kann ohne großen Aufwand angepasst werden und ist somit für beliebige zelluläre Materialien bzw. Mikrostrukturen anwendbar.

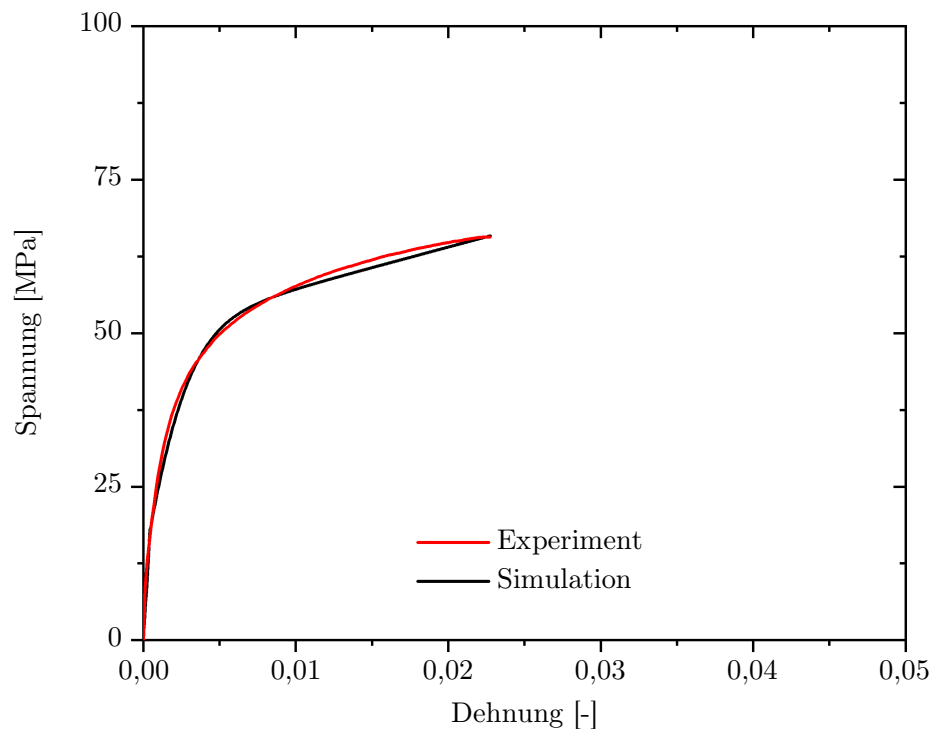


Abbildung 7.5: Mittleres Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Zugversuche an 15 einzelnen Stegen in Rot und resultierendes Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus den ermittelten Materialparametern der mikroskopischen Materialmodelle in Schwarz

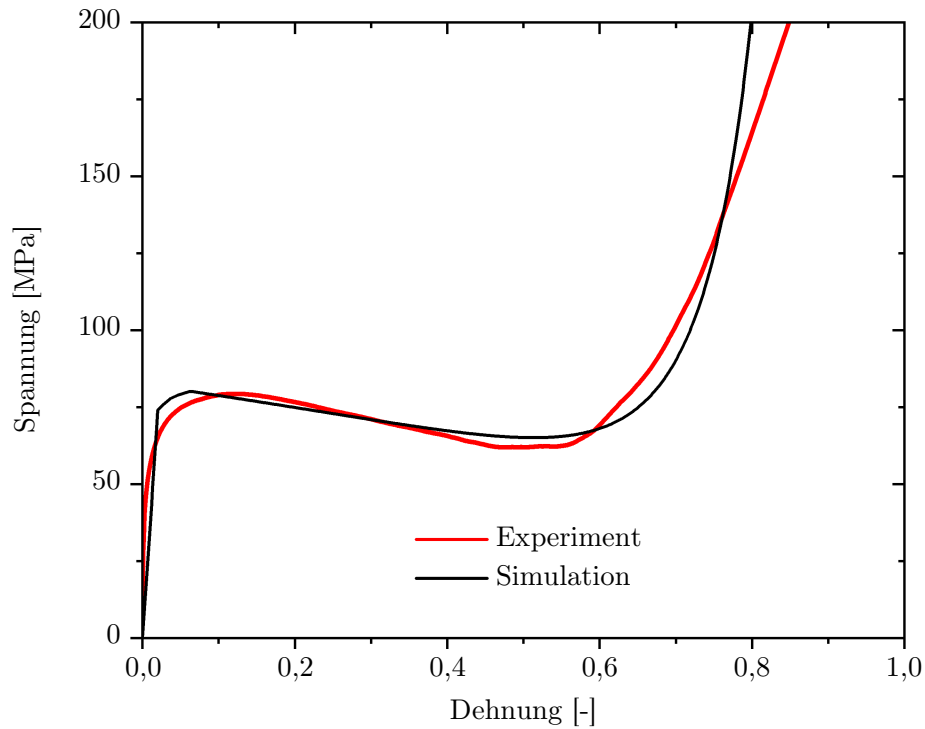


Abbildung 7.6: Mittleres Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Druckversuche an 15 einzelnen Stegen in Rot und resultierendes Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus den ermittelten Materialparametern der mikroskopischen Materialmodelle in Schwarz

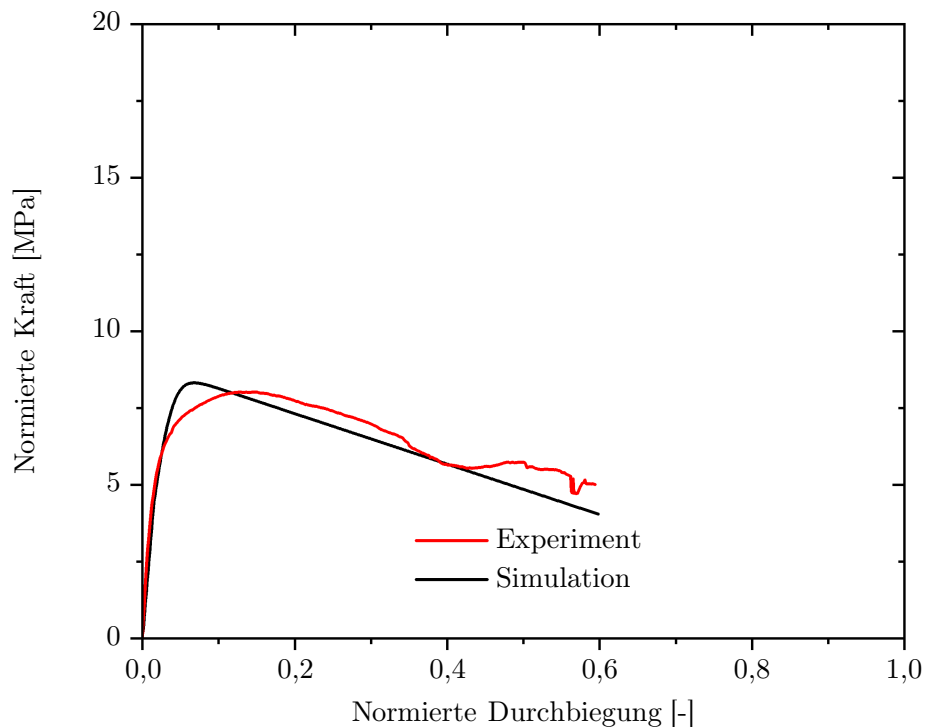


Abbildung 7.7: Mittleres normiertes Kraft-Durchbiegungs-Diagramm der Zwei-Punkt-Biegeversuche an 15 einzelnen Stegen in Rot und resultierendes Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus den ermittelten Materialparametern der mikroskopischen Materialmodelle in Schwarz

Modellvalidierung

Zur Modellvalidierung wird das entwickelte Multiskalenmodell sowohl mit den makroskopischen Experimenten als auch mit dem implementierten Kontinuumsmodell zur Bestimmung der makroskopischen Fließfläche verglichen. Zunächst wird das Multiskalenmodell mit Druck- und Zugversuchen an makroskopischen 10 ppi Aluminiumschaumproben validiert. Dazu dienen die in Kapitel 6 vorgestellten experimentellen Ergebnisse. Die Simulation wird an einem Quader durchgeführt, welcher bezüglich der Abmessungen und Randbedingungen identisch mit dem Quader aus den Experimenten ist. Anschließend werden die Simulationsergebnisse den experimentellen Resultaten gegenübergestellt und diskutiert. Als weitere Validierung dient die experimentell ermittelte Fließfläche des 10 ppi Aluminiumschaums aus Kapitel 6 in Kombination mit dem Kontinuumsmodell basierend auf der Fließfläche nach Bier et al. [35]. Mit dem Multiskalenmodell werden unterschiedliche Belastungen simuliert und anschließend mit der Fließfläche verglichen. Die durch die Parameteridentifikation ermittelte initiale Fließfläche dient zum Vergleich der Simulationsergebnisse des Multiskalenmodells.

Abschließend wird das Multiskalenmodell dem Kontinuumsmodell gegenübergestellt. Dazu wird ein inhomogener Deformationszustand simuliert und die beiden Modelle werden im Bereich von kleinen Deformationen miteinander verglichen. Dazu werden die Spannungsverteilung über die gesamte Probe und der plastische Verzerrungstensor der beiden Materialmodelle verwendet. Aus diesen Ergebnissen wird gleichzeitig die Routine zur Bestimmung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten im Multiskalenmodell eingeführt und auf Plausibilität geprüft.

8.1 Makroskopische Druck- und Zugversuche

Das Multiskalenmodell wird mit den ermittelten Materialparametern aus den Experimenten an Einzelstegen und den Wichtungsfaktoren der stochastischen Orientierungsanalyse für einen zu den Druck- und Zugversuchen identischen Quader angewandt. Der Quader wird analog zu den Simulationen mit dem Kontinuumsmodell mit $30 \times 15 \times 15$ linearen Hexaederelementen vernetzt, was nur eine von mehreren Vernetzungsmöglichkeiten darstellt. Durch die Implementierung des Materialmodells als Umat-Routine ist die Wahl der verwendeten Elemente an die entsprechende Geometrie anpassbar. Die Druck- und Zugrandbedingungen werden als Dirichlet-Randbedingung aufgebracht und bilden somit die verschiebungsgesteuerten Experimente ab. Die Simulation erfolgt für beliebig große Deformation unter Verwendung der im Multiskalenmodell beschriebenen finiten Theorie. Die Ergebnisse der Simulation werden mit den mittleren Spannungs-Dehnungs-Diagrammen der Druck- bzw. Zugversuche am makroskopischen 10 ppi Aluminiumschaum verglichen. Entsprechend der experimentellen Daten werden die Simulationsergebnisse als Nominalspannung über der Ingenieursdehnung aufgetragen. Die Umrechnung von dem für die Simulation benötigten Cauchy-Spannungstensor in den Nominalspannungstensor wird durch Gleichung (2.23) beschrieben.

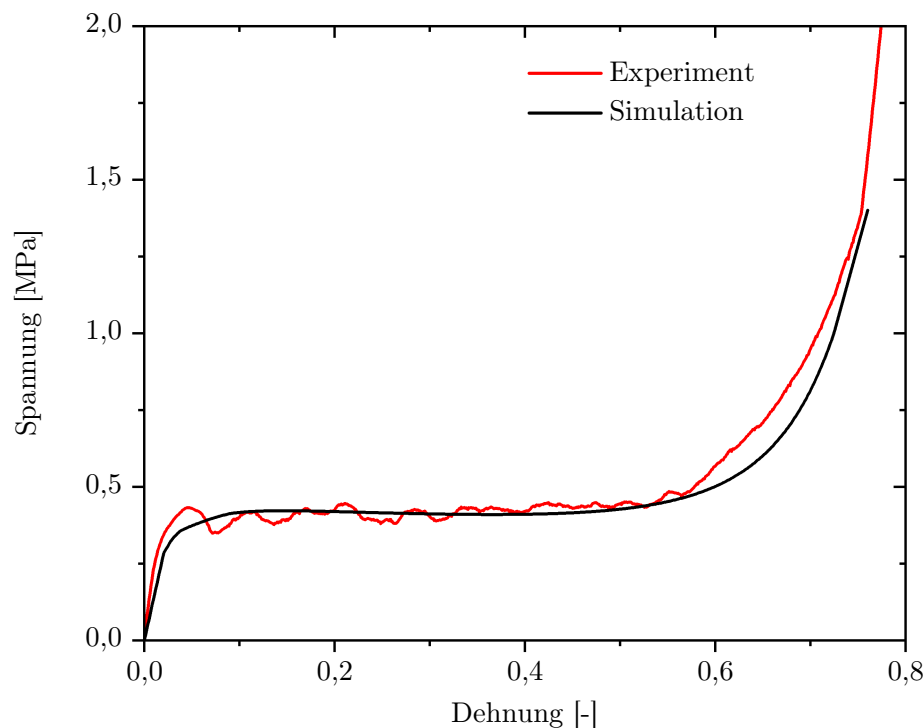


Abbildung 8.1: Simulation eines makroskopischen Druckversuchs mit dem Multiskalenmodell und den ermittelten Parametern aus den mikroskopischen Versuchen an Einzelstegen im Vergleich zum Mittelwert aus den realen Experimenten

Für die Simulation der Druckversuche ergibt sich unter Verwendung der ausschließlich mikroskopisch ermittelten Parameter der in Abbildung 8.1 gezeigte Spannungs-Dehnungs-Verlauf. In Abbildung 8.1 sind der Mittelwert der experimentellen Ergebnisse in Rot und die Ergebnisse der Simulation in Schwarz dargestellt. Die Simulation beschreibt den Spannungs-Dehnungs-Verlauf sehr gut. Sowohl der anfängliche pseudo-elastische Bereich als auch die mittlere Plateau-Spannung werden durch das Multiskalenmodell abgebildet. Die Verdichtung des Schaums für Dehnungen ab etwa 60 % wird durch das Modell ebenfalls beschrieben. Die Abweichungen der Simulation in der anfänglichen Steigung und für die Verdichtung liegen im Bereich der Schwankungen der Experimente (vgl. Abb. 6.15).

Für die Simulation der Zugversuche sind die Ergebnisse in Abbildung 8.2 in Schwarz dargestellt. Im gleichen Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist der Mittelwert der Zugversuche am makroskopischen 10 ppi Aluminiumschaum in Rot abgetragen. Analog zur Simulation der Druckversuche werden die Zugversuche sehr gut durch das Multiskalenmodell wiedergegeben. Sowohl die anfängliche Steigung als auch der PCS werden sehr gut abgebildet. Der kontinuierliche Spannungsabfall nach dem PCS in den Experimenten wird durch das Multiskalenmodell nicht beschrieben.

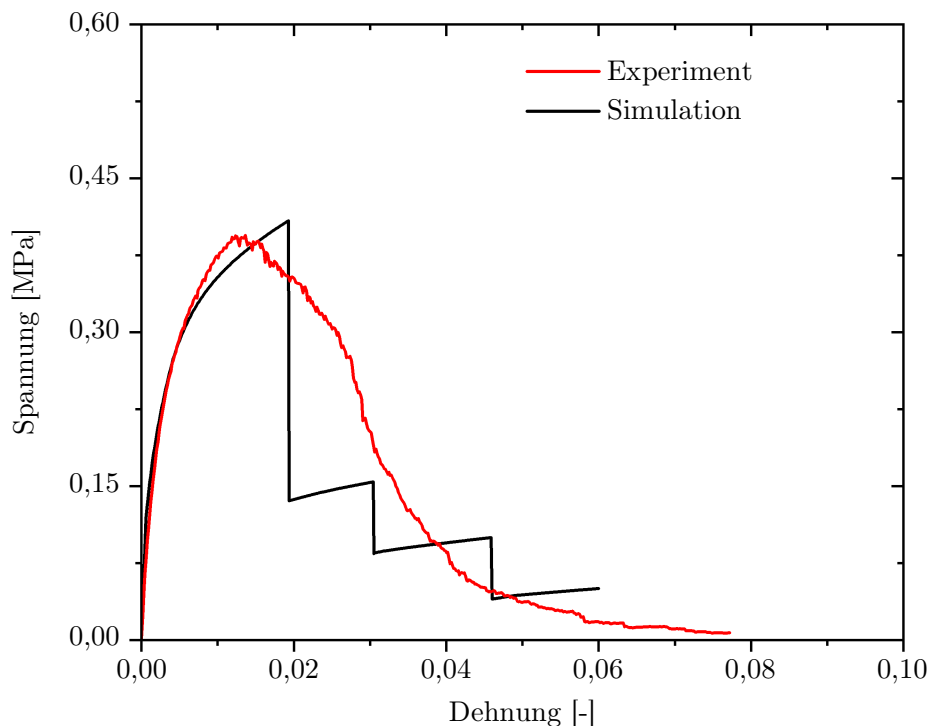


Abbildung 8.2: Simulation eines makroskopischen Zugversuchs mit dem Multiskalenmodell und den ermittelten Parametern aus den mikroskopischen Versuchen an Einzelstegen im Vergleich zum Mittelwert aus den realen Experimenten

Die Abnahme der Spannung wird dennoch annähernd durch die stufige Abnahme abgebildet. Eine Erklärung für die diskontinuierliche Spannungsabnahme in der Simulation liefert die Microplane Theorie selbst. Durch das Erreichen der maximalen Spannung für das verwendete Materialgesetz der Zugversuche fällt die Spannung der einzelnen Richtungen nacheinander auf Null ab. Durch die gewählte Diskretisierung der Einheitskugel existieren nur wenige Richtungen, die unter uniaxialer makroskopischer Last nacheinander zu Null werden. Ein kontinuierlicher Abfall der Spannung erfordert eine feinere Diskretisierung der Einheitskugel, um somit die in Abbildung 5.6 dargestellten fünf Kategorien auf beliebig viele Kategorien zu erweitern. Sobald die Anzahl der Kategorien größer wird, fällt die Spannung für jede Kategorie weiter abrupt ab. Jedoch ergibt sich makroskopisch ein deutlich kontinuierlicher Verlauf. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf Simulationen mit unterschiedlichen Diskretisierungen verzichtet, da die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Modells anhand einer Diskretisierung der Einheitskugel aufgezeigt wird. Die Ergebnisse der ersten Simulation zeigen das Potential des Multiskalenmodells, welches ohne makroskopische Materialparameter das makroskopische Verhalten des 10 ppi Aluminiumschaums abbildet. Die Beschreibung des PCS unter Druck- und Zugbelastung lässt erahnen, dass auch die Fließfläche durch das rein mikromechanisch motivierte Multiskalenmodell abgebildet wird.

8.2 Makroskopische Fließflächen

Zur Validierung der Annahme aus dem vorherigen Abschnitt dient die Beschreibung der makroskopischen Fließfläche in Kapitel 7 durch das Kontinuumsmodell. Die ermittelten Parameter zur Beschreibung der initialen Fließfläche der 10 ppi Aluminiumschäume werden zur Validierung der Simulationen unterschiedlicher Lastszenarien mit dem Multiskalenmodell verwendet. Um die Abbildung der Fließfläche für unterschiedliche Lastfälle zu demonstrieren, werden beliebige Randbedingungen simuliert. Alle Randbedingungen werden als Dirichlet-Randbedingungen aufgebracht.

Zur Abbildung der Fließfläche im Hauptspannungsraum werden die unterschiedlichen Simulationen an einem Würfel der Kantenlänge $40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ durchgeführt. Neben einer reinen Schubbelastung wird eine um Zug- bzw. Druckbelastung überlagerte Schubbelastung simuliert. Weiter werden triaxiale Deformationen auf den Würfel aufgebracht, um den Bereich der Fließfläche um die hydrostatische Achse abbilden zu können. Die insgesamt sieben Lastfälle sind in Abbildung 8.3 dargestellt und stellen nur einen Bruchteil an potenziellen Belastungsszenarien dar. Dennoch ist es mit der Auswahl an Lastfällen möglich, den gesamten Bereich der hydrostatischen Ebene abzubilden.

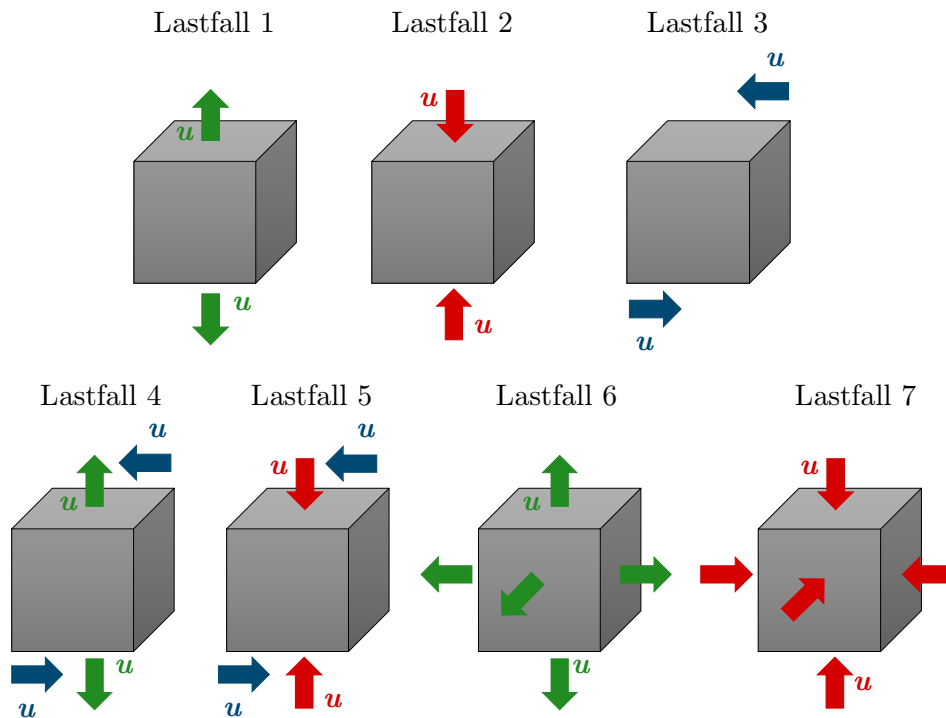


Abbildung 8.3: Unterschiedliche Lastfälle für die Validierungssimulationen mit dem entwickelten Multiskalenmodell

Für die Auswertung der Simulationen wird im Spannungs-Dehnungs-Diagramm der PCS analog zu den Druck- und Zugversuchen bestimmt. Anders als für die Experimente werden die erste Hauptinvariante des Spannungstensors und die zweite Hauptinvariante des Spannungstensors direkt im Rahmen der Simulation berechnet (s. Gl. (2.45) und Gl. (2.48)). Die aus den sieben Simulationen ermittelten Wertepaare werden in Abbildung 8.4 in der hydrostatischen Ebene gemeinsam mit der in Kapitel 7 bestimmten initialen Fließfläche dargestellt. Die Ergebnisse der Simulation bilden eine geschlossene Fließfläche ab und beschreiben die durch die Parameteridentifikation ermittelte Fließfläche des Kontinuumsmodells. Im Vergleich mit Abbildung 7.2 zeigt sich, dass alle Simulationen im Bereich der experimentellen Streuung liegen. Weiter bilden die Daten der Simulation eine konvexe Fließfläche ab, die neben der Notwendigkeit einer geschlossenen Fließfläche zur Charakterisierung des PCS von Schäumen unter hydrostatischem Druck eine der Hauptansprüche an die Fließfläche ist.

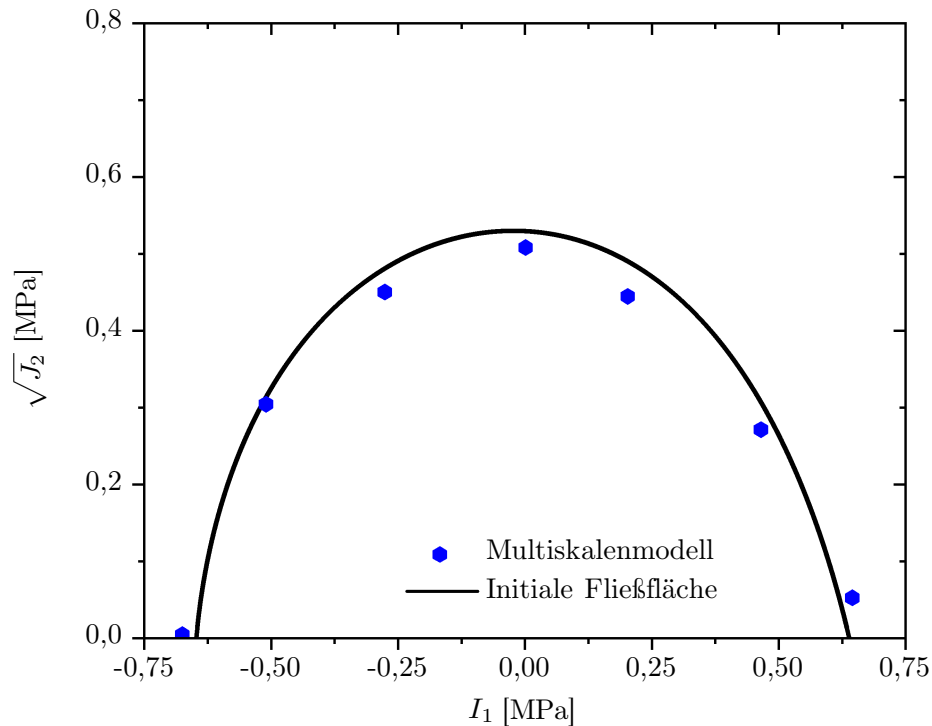


Abbildung 8.4: Validierung des Multiskalenmodells durch die initiale Fließfläche für den 10 ppi Aluminiumschaum

Der Vergleich der Simulation unterschiedlicher Lastfälle mit dem entwickelten Multiskalenmodell stützt die Annahme der vorliegenden Arbeit, dass das makroskopische Verhalten von Schäumen rein durch mikroskopische Eigenschaften und eine geeignete Homogenisierungsmethode im Rahmen der Microplane Theorie charakterisiert werden kann. Die Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit der experimentell ermittelten Fließfläche zeigt die Leistungsfähigkeit des entwickelten Mehrskalenmodells. Die verwendete Interpretation der einzelnen Richtungen der Microplane Theorie, welche den Bezug zur Mikrostruktur von Schäumen herstellt, liefert das makroskopische Verhalten eines realen Schaums. Damit ist das Grundkonzept als neue Möglichkeit zur makroskopischen Beschreibung von Metallschäumen plausibel und bildet die Grundlage für weitere Forschungsinhalte.

8.3 Bestimmung des plastischen Deformationsanteils

Abschließend wird das Multiskalenmodell bezüglich der plastischen Deformation validiert. Hierzu dient ein Simulationsmodell eines einseitig eingespannten Balkens, der gleichzeitig gebogen und gedrückt wird. Um die plastische Deformation zu vergleichen, wird die Simulation sowohl mit dem Multiskalenmodell als auch mit dem Kontinuumsmodell

durchgeführt. Die plastische Dehnung des Kontinuumsmodells ist bekannt und folgt aus dem 3D Konstitutivgesetz. Der plastische Anteil der Deformation im Multiskalenmodell ist dagegen nicht ohne Weiteres gegeben. Zur Bestimmung der makroskopischen plastischen Dehnung wird die plastische Dehnung der einzelnen Richtungen als Grundlage verwendet. Im Rahmen der verwendeten finiten Theorie entspricht dies einer lokalen Entlastung zur Bestimmung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten.

Zur Validierung der Annahme wird der plastische Deformationszustand mit dem des Kontinuumsmodells verglichen. Die logarithmischen plastischen Dehnungen der einzelnen Richtungen der Einheitskugeln an jedem Integrationspunkt werden zunächst in plastische Green-Lagrange-Verzerrungen umgerechnet. Der Zusammenhang der logarithmischen Dehnung und der Green-Lagrange-Verzerrung ist im eindimensionalen Fall gegeben mit

$$\varepsilon_L = \ln \left(\sqrt{2E + 1} \right). \quad (8.1)$$

Die plastischen Green-Lagrange-Verzerrungen $\overset{n}{E}_{N,p}$ und $\overset{n}{E}_{T,p}$ der einzelnen Richtungen der Einheitskugel ergeben, analog zu den Spannungen, über eine Homogenisierungsvorschrift (vgl. Gl. (4.23)) den makroskopischen plastischen Green-Lagrange-Verzerrungstensor mit

$$\mathbf{E}_p = \sum_n \left(\overset{n}{E}_{N,p} \overset{n}{\mathbf{n}} \otimes \overset{n}{\mathbf{n}} + \overset{n}{E}_{T,p} \frac{1}{2} \left(\overset{n}{\mathbf{t}} \otimes \overset{n}{\mathbf{n}} + \overset{n}{\mathbf{n}} \otimes \overset{n}{\mathbf{t}} \right) \right) \overset{n}{\omega}. \quad (8.2)$$

Die Homogenisierung stellt eine Methode zur Bestimmung des plastischen Anteils des Deformationsgradienten im Rahmen der Microplane Theorie dar. Aus der Definition des Green-Lagrange-Verzerrungstensors in Gleichung (2.30) und dem Zusammenhang aus Gleichung (2.29) ergibt sich der plastische Green-Lagrange-Verzerrungstensor als Funktion des plastischen Anteils des Deformationsgradienten mit

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p \right) - \mathbf{I} \right). \quad (8.3)$$

Aus diesem Zusammenhang kann im Postprocessing der plastische Anteil des Deformationsgradienten ermittelt werden. Mittels des Kontinuumsmodells wird die Bestimmung der plastischen Maße des Multiskalenmodells validiert. Dabei wird ausschließlich das initiale Fließen für beide Modelle betrachtet. Diesbezüglich wird die Annahme getroffen, dass kleine Deformationen vorliegen und somit die Green-Lagrange-Verzerrung der Dehnung des Kontinuumsmodells entspricht. Weiter wird für beide Modelle ein Vergleich der Spannungsverteilung durchgeführt. Als Spannungswerte dienen sowohl die mittlere Normalspannung (s. Gl. (2.46)) als auch die von Mises Vergleichsspannung σ_V

als invariante Größen. Die von Mises Vergleichsspannung wird als

$$\sigma_V = \sqrt{3 J_2}, \quad (8.4)$$

in Abhängigkeit der zweiten Hauptinvarianten des Spannungsdeviators definiert. In Abbildung 8.5 ist der Verlauf der mittleren Normalspannung des simulierten Balkens im Ausgangszustand und für zwei weitere Deformationszustände dargestellt. Zusätzlich sind im Ausgangszustand die verwendeten Randbedingungen in Grün eingetragen. Der erste Deformationszustand entspricht einer rein elastischen Deformation und der zweite zeigt eine erste plastische Deformation an den Rändern der Geometrie. Die Verteilung der Spannung ist für die verwendeten Simulationsmodelle annähernd identisch. Sowohl für die Simulation des Balkens mit dem Multiskalenmodell als auch mit dem Kontinuumsmodell bildet sich die größte mittlere Spannung in der rechten oberen und der linken unteren Ecke aus.

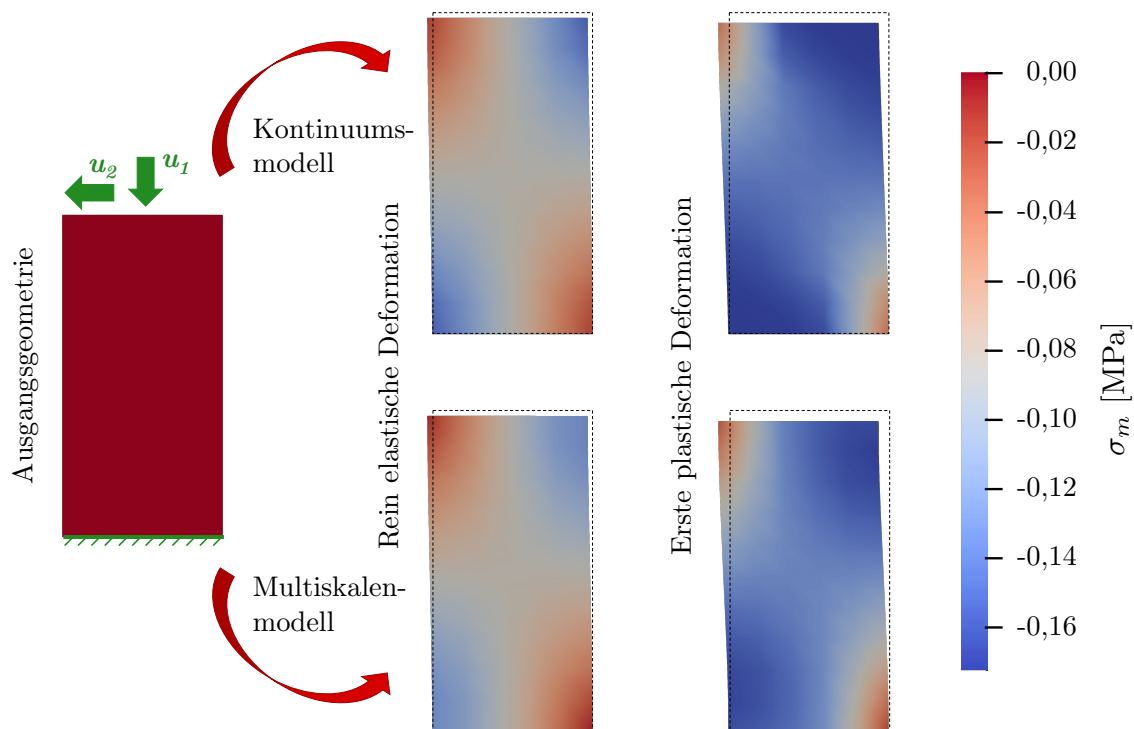


Abbildung 8.5: Vergleich der mittleren Normalspannung für das Kontinuums- und das Multiskalenmodell für einen inhomogenen Deformationszustand; je für einen rein elastischen Deformationszustand und den ersten plastischen Deformationszustand

Ein ähnliches Ergebnis folgt für den Vergleich der Verteilung der von Mises Vergleichsspannung. In Abbildung 8.6 sind wie in Abbildung 8.5 neben dem Ausgangszustand zwei weitere Deformationszustände für das Multiskalen- und das Kontinuumsmodell abgebildet. Die verwendeten Randbedingungen für die Simulation sind an der undeformierten Geometrie eingetragen. Die maximalen Spannungswerte für die von Mises Vergleichsspannung bilden sich analog zu den Maximalwerten der mittleren Normalspannung aus. Die Verteilung der von Mises Vergleichsspannung ist für beide Materialmodelle annähernd gleich. Somit zeigt das Multiskalenmodell ein identisches Verhalten im Vergleich zum Kontinuumsmodell. Die verwendete multiaxiale Belastung, die zu inhomogenen Deformations- und Spannungszuständen führt, bestätigt das neu entwickelte Multiskalenmodell. Der Vergleich mit dem etablierten Kontinuumsmodell zeigt, dass sowohl im elastischen als auch im inelastischen Bereich das Multiskalenmodell vergleichbare Ergebnisse produziert. Dabei weichen die Spannungswerte der beiden Modelle nur unwesentlich voneinander ab.

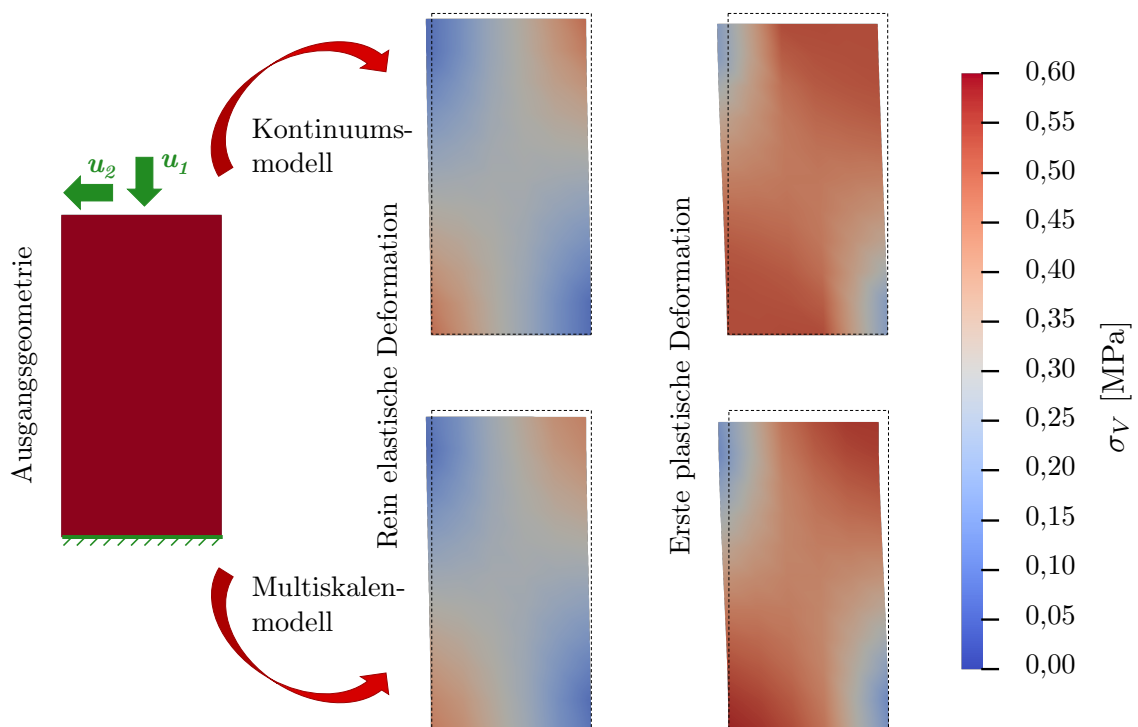


Abbildung 8.6: Vergleich der von Mises Vergleichsspannung für das Kontinuums- und das Multiskalenmodell für einen inhomogenen Deformationszustand; je für einen rein elastischen Deformationszustand und den ersten plastischen Deformationszustand

Um neben dem Vergleich der Spannungswerte eine Aussage über die Übereinstimmung der Deformation treffen zu können, wird für den Balken die plastische Dehnung für ein Element der rechten oberen Ecke verglichen. Durch die größten Spannungen in diesem Teil der Geometrie treten in den Elementen die ersten plastischen Deformationen auf. Um im Bereich kleiner Deformationen das erste Fließen zu beschreiben, wird exemplarisch ein Element aus der rechten oberen Ecke ausgewählt. Die Komponenten des plastischen Anteils des Dehnungstensors werden für beide Materialmodelle in Tabelle 8.1 gegenübergestellt und der Quotient aus Kontinuums- und Multiskalenmodell als Maß für die relative Abweichung angegeben. Dabei werden Werte kleiner 10^{-6} annähernd als Null angenommen. Die plastischen Dehnungen in Tabelle 8.1 liegen für beide Materialmodelle in derselben Größenordnung vor und stimmen annähernd überein. Die Abweichung der beiden Modelle liegen nur für die Komponente ε_{22} bei mehr als 5%. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Werte der Komponente ε_{22} im Bereich 10^{-5} liegen, wird die Abweichung als hinreichend genau angenommen. Die beiden anderen Komponenten ε_{33} und ε_{13} , die ungleich Null sind, stimmen nahezu perfekt überein.

Tabelle 8.1: Unterschied der einzelnen Komponenten des plastischen Dehnungstensors der unterschiedlichen Materialmodelle exemplarisch für ein Element der Simulationsmodelle

	Kontinuumsmodell	Multiskalenmodell	Quotient
ε_{11}	0,00	0,00	–
ε_{22}	$-2,92 \times 10^{-5}$	$-3,09 \times 10^{-5}$	0,94
ε_{33}	$-8,01 \times 10^{-2}$	$-7,93 \times 10^{-2}$	1,01
ε_{12}	0,00	0,00	–
ε_{23}	0,00	0,00	–
ε_{13}	$1,01 \times 10^{-2}$	$1,01 \times 10^{-2}$	1,00

Die Abweichungen zwischen dem Multiskalenmodell und dem Kontinuumsmodell lassen sich durch die unterschiedlichen Modellierungskonzepte erklären. Während für das Kontinuumsmodell kein Bezug zur Mikrostruktur hergestellt wird, bildet jeder Integrationspunkt des Multiskalenmodells die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stegorientierung ab. Durch die unterschiedlichen nichtlinearen Materialmodelle der einzelnen Richtungen der Einheitskugel werden die makroskopischen Größen beeinflusst. Weiter ist das makroskopische Materialmodell direkt an makroskopische Daten angepasst, wohingegen das Multiskalenmodell rein auf Daten der Mikroebene basiert. Somit ist das Ergebnis der Validierung trotz kleinerer Abweichungen zufriedenstellend. Das in dieser Arbeit entwickelte Multiskalenmodell führt für homogene sowie für inhomogene Deformationszustände zu vergleichbaren Ergebnissen wie das etablierte Kontinuumsmodell.

8.4 Fazit

Die Modellvalidierung zeigt das Potential des entwickelten Multiskalenmodells, welches in der Lage ist, das experimentell ermittelte makroskopische Materialverhalten abzubilden. Trotz der alleinigen Verwendung von Informationen der Mikroebene sowie der stochastisch erfassten Stegorientierungen stimmen Multiskalenmodell und Realität sehr gut überein. Die Spannungsverteilungen für homogene und inhomogene Deformationszustände sind mit denen etablierter Kontinuumsmodelle vergleichbar. Neben der Beschreibung der Spannungen bildet das Multiskalenmodell auch die plastischen Dehnungen ab. Dazu wurde eine Möglichkeit der Ermittlung des plastischen Green-Lagrange-Verzerrungstensors aus den Dehnungen der einzelnen Richtungen der Einheitskugel vorgestellt. Mithilfe dieser Methode ist es möglich, im Postprocessing den plastischen Anteil des Deformationsgradienten zu bestimmen. Somit bildet das vorgelegte Multiskalenmodell die Grundlage einer völlig neuen und innovativen Beschreibung von Metallschäumen.

Zusammenfassung und weiterführende Gedanken

9.1 Zusammenfassung

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit bestand in der Entwicklung eines Multiskalenmodells mit Bezug zur Mikrostruktur von Metallschäumen, um das makroskopische Materialverhalten anhand mikromechanischer Experimente zu beschreiben. Neben der Entwicklung eines innovativen Multiskalenmodells beinhaltete die Zielsetzung der Arbeit die numerische Umsetzung in der FE-Software FEAPTM. Zusätzlich bestand die Aufgabe in der Validierung des Modells durch makroskopische Experimente sowie ein selbst implementiertes klassisches, rein phänomenologisches Materialmodell. Zur Charakterisierung der mikromechanischen Eigenschaften des Schaums wurde die Durchführung und Auswertung von Versuchen an Einzelstegen auf Basis von Jung et al. [133] weiterentwickelt.

Metallschäume weisen, bedingt durch ihren hierarchischen Aufbau, eine starke Abhängigkeit der makroskopischen Eigenschaften von der Beschaffenheit der Mikrostruktur auf. Daraus resultiert die Notwendigkeit, das makroskopische Materialverhalten durch den Bezug zur Mikrostruktur zu modellieren. Die komplexe stochastische Mikrostruktur von Metallschäumen führt zu signifikanten makroskopischen Eigenschaften. Metallschäume weisen ein stark unterschiedliches Verhalten unter Zug- und Druckbelastung auf. Anders als die meisten Materialien besitzen sie eine geschlossene Fließfläche und

zeigen daher durch ihre poröse Struktur auch unter hydrostatischem Druck plastisches Verhalten. Aus diesem Grund muss das Multiskalenmodell in der Lage sein, sowohl das makroskopische Verhalten unter Zug- und Druckbelastung als auch die geschlossene Fließfläche abzubilden. Anzumerken ist, dass das gesamte Modell lediglich auf der Materialcharakterisierung der Mikroebene basiert und ohne Informationen der Makroebene formuliert ist.

Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Multiskalenmodell für große Deformationen erfüllt alle gestellten Bedingungen. Das Multiskalenmodell wurde auf Basis der Microplane Theorie entwickelt, die eine spezielle Art der Homogenisierungsmethoden darstellt. Für die Microplane Theorie wird jeder Punkt eines Kontinuums über eine Einheitskugel beschrieben, welche wiederum in diskrete Richtungen unterteilt wird. Für jede der Richtungen werden Tangential- und Normalkomponenten des makroskopischen Dehnungstensors bestimmt. Für die Tangential- und Normalenrichtung wird über ein eindimensionales Konstitutivgesetz die Spannung der einzelnen Richtungen der Einheitskugel bestimmt. Der letzte Schritt besteht in der Homogenisierung der Spannungen mittels Integration über die Kugeloberfläche. Für eine diskrete Anzahl an Richtungen entspricht die Integration einer gewichteten Summe.

Das entwickelte Multiskalenmodell für große Deformationen stellt einen innovativen Bezug der einzelnen Einheitskugeln des Modells zur Mikrostruktur des Metallschaums her. Jede Einheitskugel wird als Wahrscheinlichkeitsverteilung der Stegorientierungen des gesamten Schaums betrachtet. Somit werden die einzelnen Richtungen der Einheitskugel als mögliche Stegorientierungen interpretiert und die Normalkomponenten der einzelnen Richtungen werden mit einer Zug- bzw. Druckbelastung des Einzelsteges gleichgesetzt. Analog bildet die Tangentialkomponente die Durchbiegung der Stege ab. Die Charakterisierung des Materialverhaltens der Mikroebene wird durch Experimente an Einzelstegen beschrieben. Dazu dienen Zug- und Druckversuche sowie Zwei-Punkt-Biegeversuche.

Der Ausgleich der statistischen Schwankungen erfolgt durch die Durchführung von 15 Versuchen an unterschiedlichen Stegen für jede der Belastungsarten. Die Auswertung der Versuche mittels der DIC und der 3D Modelle, die durch eine photogrammetrische Methode erstellt wurden, dient als Basis der phänomenologischen Beschreibung der Stege. Die eindimensionalen Materialgesetze des Multiskalenmodells wurden an die Experimente an Einzelstegen angepasst. Durch eine stochastische Auswertung der Stegorientierung innerhalb des makroskopischen Schaums wurden die Wichtungsfaktoren für die Homogenisierung der Spannungen der einzelnen Richtungen der Einheitskugel bestimmt. Die stochastische Auswertung liefert einen weiteren Bezug des Multiskalenmodells zur Mikrostruktur der Metallschäume.

Das Multiskalenmodell mit den ausschließlich auf der Mikroebene basierenden Materialeigenschaften wurde anschließend durch Experimente am makroskopischen Schaum validiert sowie durch ein etabliertes, selbst implementiertes Kontinuumsmodell nach Bier et al. [35] verifiziert. Die Validierung des Multiskalenmodells stützt die Annahme, dass das Verhalten des Metallschaums durch eine Homogenisierungsmethode und das Materialverhalten der Mikroebene abgebildet werden kann. In der vorliegenden Ausarbeitung wird das makroskopische Verhalten von Metallschäumen unter Zug- und Druckbelastung durch das Multiskalenmodell gut vorhergesagt. Weiter bildet das Modell die makroskopische Fließfläche des Metallschaums sehr gut ab. Dabei wurde gezeigt, dass das Multiskalenmodell eine geschlossene, konvexe Fließfläche bildet.

Zum Abschluss der Arbeit wurde eine rein numerische Verifikation des Modells durchgeführt. Das Multiskalenmodell wurde mit dem selbst implementierten Kontinuumsmodell nach Bier et al. [35] verglichen. In einer Simulation mit einem inhomogenen Deformationszustand wurden invariante Spannungsgrößen rein qualitativ für einen rein elastischen und einen ersten plastischen Deformationszustand gegenübergestellt. Ein quantitativer Vergleich wurde über den plastischen Dehnungstensor für ein initiales Fließen durchgeführt. Dazu wurde eine Möglichkeit vorgestellt, die Dehnungsmaße der einzelnen Richtungen der Einheitskugel in makroskopische Dehnungsmaße für große Deformationen umzurechnen. Die makroskopischen Dehnungsmaße stimmen für beide Modelle sehr gut überein und stützen die eingeführte Methode zur Bestimmung makroskopischer Dehnungsmaße im Multiskalenmodell. Weiter bietet die eingeführte Methode die Möglichkeit, den plastischen Anteil des Deformationsgradienten im Postprocessing zu bestimmen.

Die vorliegende Arbeit bietet einen neuen Ansatz, das Materialverhalten von Metallschäumen zu beschreiben. Das ausschließlich auf Materialeigenschaften der Mikroebene aufgebaute Multiskalenmodell ist in der Lage, das komplexe makroskopische Verhalten der Metallschäume abzubilden. Somit sind aufwendige Testreihen zur Bestimmung der makroskopischen Fließfläche von Metallschäumen nicht weiter nötig. Das vorgestellte Multiskalenmodell ermöglicht die Einsparung von Kosten und die Vorhersage des Verhaltens ganzer Bauteile durch rein mikromechanische Charakterisierungsmethoden.

9.2 Weiterführende Gedanken

Das entwickelte Multiskalenmodell bildet die Basis für weiterführende Untersuchungen. Das Modell wurde anhand eines 10 ppi Aluminiumschaums validiert, wobei weitere Untersuchungen für unterschiedliche Porengrößen und unterschiedliche Schaumarten ausstehen. Dabei liegt eine Herausforderung in der Erweiterung der mikromechanischen Charakterisierung bezüglich sehr kleiner Stege ($< 0,5$ mm), da sowohl die Probenpräparation als auch die Versuchsdurchführung für sehr kleine Stege überdacht und angepasst werden muss. Diese Validierung des Modells stellt einen sehr hohen experimentellen Aufwand dar, verursacht durch die experimentelle mikroskopische und die makroskopische Charakterisierung der unterschiedlichen Schaumarten.

In der vorliegenden Arbeit wurde lediglich eine Diskretisierung der Einheitskugel behandelt. Weitere Untersuchungen zur Auswirkung unterschiedlich feiner Diskretisierung auf die makroskopischen Ergebnisse des Modells stehen aus. Eine feinere Diskretisierung der Einheitskugel führt unweigerlich zu größerem numerischen Aufwand und somit zu längeren Rechenzeiten. Gleichzeitig wird durch eine feinere Anzahl eine größere Anzahl realer Stegorientierungen mit dem Materialmodell abgebildet, wodurch eine Verbesserung des Modells im Bezug auf die realen Ergebnisse denkbar ist.

Die fehlende Beschreibung von Größeneffekten innerhalb des Modells stellt eine notwendige Erweiterung dar. Anstelle des verwendeten Modellansatzes bietet das Konzept erweiterter Kontinua die Möglichkeit, diese abzubilden. Das bekannteste erweiterte Kontinuum stellt das Cosserat-Kontinuum [57] dar, bei dem neben Kraftspannungen auch Momentenspannungen zugelassen werden. Das Grundprinzip erweiterter Kontinua basiert, wie in Kapitel 3 beschrieben, auf der Erweiterung klassischer Kontinuumsmodelle um höhere Gradientenformulierungen oder weitere Freiheitsgrade. Daraus ergibt sich die Möglichkeit, innere lokale Größen zu bestimmen und somit Größeneffekte abzubilden. Die Kopplung der Microplane Theorie [17, 23] mit dem Konzept erweiterter Kontinua stellt den wichtigsten Punkt der Erweiterung dar. Gleichzeitig müssen die zusätzlichen Gradiententerme bzw. Freiheitsgrade der Schaumstruktur zugeordnet und eine passende physikalische Interpretation im Bezug zur Mikrostruktur erarbeitet werden.

Durch eine alternative Interpretation der einzelnen Richtungen der Einheitskugel innerhalb der Microplane Theorie kann der Modellansatz umstrukturiert werden. Die einzelnen Richtungen könnten beispielsweise direkt als ein Steg behandelt werden. Eine Interaktion der einzelnen Stege im makroskopischen Schaum kann durch eine neue Interpretation als zusätzliche Verbindung der einzelnen Richtungen betrachtet werden. Daraus resultiert eine Abhängigkeit der Deformation der Einheitskugel von der Verbindung der einzelnen, diskreten Richtungen. Sämtliche rheologische Modelle sind als Verbindung zwischen den Richtungen denkbar. Eine weitere alternative Interpretation

ist die Kopplung der einzelnen Einheitskugeln. Wird eine Einheitskugel als Einzelsteg betrachtet, kann die Konnektivität der einzelnen Stege durch zusätzliche Kopplungen der einzelnen Einheitskugeln erfolgen. Dies würde zusätzlichen Freiheitsgraden und deren Einschränkung entsprechen.

Mittels des entwickelten Modells können nicht nur zelluläre Materialien beschrieben werden, sondern es existieren zahlreiche potenzielle Anwendungsbereiche. So kann jedes Material, dessen Verhalten stark von der Mikrostruktur bestimmt wird, durch das entwickelte Multiskalenmodell beschrieben werden. Dabei ist eine Anpassung der Interpretation der Einheitskugeln und der einzelnen Richtungen durchzuführen. Alternativ können durch die einzelnen Richtungen direkt physikalische Effekte der Mikrostruktur abgebildet werden, ohne gezielt die Charakterisierung der Mikrostruktur experimentell durchzuführen. Ein Beispiel bietet die Gleitebentheorie der Kristallplastizität. Abschließend bietet das in der vorliegenden Arbeit entwickelte stochastisch erweiterte Multiskalenmodell zahlreiche interessante Forschungsthemen und somit die Grundlage für weitere Forschungsansätze.

Literaturverzeichnis

- [1] Aifantis, E. C. [1984]. ‘On the microstructural origin of certain inelastic models.’ *Journal of Engineering Materials and Technology*, **106**(4), pp. 326–330.
- [2] Aifantis, E. C. [1987]. ‘The physics of plastic deformation.’ *International Journal of Plasticity*, **3**(3), pp. 211–247.
- [3] Altenbach, H. [2012]. *Kontinuumsmechanik*. Springer.
- [4] Altenbach, H. & A. Öchsner [2014]. *Plasticity of pressure-sensitive materials*. Springer Science & Business Media.
- [5] Altenbach, J. & H. Altenbach [1994]. *Einführung in die Kontinuums-Mechanik*. Teubner.
- [6] Amsterdam, E., J. T. M. De Hosson & P. Onck [2008]. ‘On the plastic collapse stress of open-cell aluminum foam.’ *Scripta Materialia*, **59**(6), pp. 653–656.
- [7] Andrews, E., G. Gioux, P. Onck & L. Gibson [2001]. ‘Size effects in ductile cellular solids. part ii: experimental results.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **43**(3), pp. 701–713.
- [8] Arcan, M., Z. Hashin, & A. Voloshin [1978]. ‘A method to produce uniform plane-stress states with applications to fiber-reinforced materials.’ *Experimental Mechanics*, **18**(4), pp. 141–146.
- [9] Arruda, E. M. & M. C. Boyce [1993]. ‘A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **41**(2), pp. 389–412.
- [10] Ashby, M. F., T. Evans, N. A. Fleck, J. Hutchinson, H. Wadley & L. Gibson [2000]. *Metal foams: a design guide*. Elsevier.
- [11] Ashby, M. F. & R. M. Medalist [1983]. ‘The mechanical properties of cellular solids.’ *Metallurgical Transactions A*, **14**(9), pp. 1755–1769.

- [12] Ayyagari, R. S. & M. Vural [2015]. ‘Multiaxial yield surface of transversely isotropic foams: Part i-modeling.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **74**, pp. 49–67.
- [13] Badiche, X., S. Forest, T. Guibert, Y. Bienvenu, J.-D. Bartout, P. Ienny, M. Croset & H. Bernet [2000]. ‘Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams: application of the mechanics of cellular solids and of porous materials.’ *Materials Science and Engineering: A*, **289**(1-2), pp. 276–288.
- [14] Banhart, J. [2001]. ‘Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams.’ *Progress in Materials Science*, **46**(6), pp. 559–632.
- [15] Bastawros, A., H. Bart-Smith & A. Evans [2000]. ‘Experimental analysis of deformation mechanisms in a closed-cell aluminum alloy foam.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**(2), pp. 301–322.
- [16] Batdorf, S. B. & B. Budiansky [1949]. ‘A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip.’ *National Advisory Committee for Aeronautics*, **1871**, pp. 1–35.
- [17] Bažant, P. & B. Oh [1986]. ‘Efficient numerical integration on the surface of a sphere.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **66**(1), pp. 37–49.
- [18] Bažant, Z. P. [1984]. ‘Microplane model for strain-controlled inelastic behaviour.’ *Mechanics of Engineering Materials, CS Desai, RH Gallagher*.
- [19] Bažant, Z. P., M. D. Adley, I. Carol, M. Jirásek, S. A. Akers, B. Rohani, J. D. Cargile & F. C. Caner [2000]. ‘Large-strain generalization of microplane model for concrete and application.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **126**(9), pp. 971–980.
- [20] Bažant, Z. P. & F. C. Caner [2005]. ‘Microplane model m5 with kinematic and static constraints for concrete fracture and anelasticity. i: Theory.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **131**(1), pp. 31–40.
- [21] Bažant, Z. P., F. C. Caner, I. Carol, M. D. Adley & S. A. Akers [2000]. ‘Microplane model m4 for concrete. i: Formulation with work-conjugate deviatoric stress.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **126**(9), pp. 944–953.
- [22] Bažant, Z. P. & J.-K. Kim [1986]. ‘Creep of anisotropic clay: microplane model.’ *Journal of Geotechnical Engineering*, **112**(4), pp. 458–475.
- [23] Bažant, Z. P. & B. H. Oh [1983]. ‘Microplane model for fracture analysis of concrete structures.’ Technical report, Northwestern University Evanston Illinois Technological Institute.

- [24] Bažant, Z. P. & B. H. Oh [1985]. ‘Microplane model for progressive fracture of concrete and rock.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **111**(4), pp. 559–582.
- [25] Bažant, Z. P. & P. C. Prat [1988]. ‘Microplane model for brittle-plastic material: I. theory.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **114**(10), pp. 1672–1688.
- [26] Bažant, Z. P., Y. Xiang & P. C. Prat [1996]. ‘Microplane model for concrete. i: Stress-strain boundaries and finite strain.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **122**(3), pp. 245–254.
- [27] Bear, J. [2013]. *Dynamics of fluids in porous media*. Courier Corporation.
- [28] Bear, J. & Y. Bachmat [2012]. *Introduction to modeling of transport phenomena in porous media*, volume 4. Springer Science & Business Media.
- [29] Beghini, A., Z. P. Bažant, Y. Zhou, O. Gouirand & F. C. Caner [2007]. ‘Microplane model m5f for multiaxial behavior and fracture of fiber-reinforced concrete.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **133**(1), pp. 66–75.
- [30] Bertram, A. [2012]. *Elasticity and plasticity of large deformations*. Springer.
- [31] Betten, J. [1987]. *Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer.
- [32] Betts, C., D. Balint, J. Lee, J. Lin & P. Lee [2014]. ‘In situ microtensile testing and x-ray microtomography-based finite element modelling of open-cell metal foam struts and sandwich panels.’ *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **49**(8), pp. 592–606.
- [33] Betts, C., D. Balint & J. Lin [2013]. *An Investigation of the Mechanical Properties of Open Cell Aluminium Foam Struts: Microtensile Testing and Modelling*, pp. 53–63. Springer.
- [34] Bier, W., M. Dariel, N. Frage, S. Hartmann & O. Michailov [2007]. ‘Die compaction of copper powder designed for material parameter identification.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **49**(6), pp. 766–777.
- [35] Bier, W. & S. Hartmann [2006]. ‘A finite strain constitutive model for metal powder compaction using a unique and convex single surface yield function.’ *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **25**(6), pp. 1009–1030.
- [36] Blazy, J.-S., A. Marie-Louise, S. Forest, Y. Chastel, A. Pineau, A. Awade, C. Grol-leron & F. Moussy [2004]. ‘Deformation and fracture of aluminium foams under proportional and non proportional multi-axial loading: statistical analysis and size effect.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **46**(2), pp. 217–244.

- [37] Bleistein, T., A. Jung & S. Diebels [2018]. ‘Multiscale characterisation and simulation of open cell metal foams.’ In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 18. Wiley Online Library.
- [38] Bleistein, T., A. Jung & S. Diebels [2019]. ‘A microsphere-based material model for open cell metal foams.’ *Continuum Mechanics and Thermodynamics*.
- [39] Bleistein, T., M. Reis, T. Cheng, X., C. Redenbach, S. Diebels & A. Jung [2019]. ‘Multiscale microsphere modelling of open-cell metal foams enriched by statistical analysis of geometric parameters.’ *Mechanics of Material*, (submitted).
- [40] Bonet, J. & R. D. Wood [1997]. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press.
- [41] Bowen, R. M. [1980]. ‘Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures.’ *International Journal of Engineering Science*, **18**(9), pp. 1129–1148.
- [42] Bowen, R. M. [1982]. ‘Compressible porous media models by use of the theory of mixtures.’ *International Journal of Engineering Science*, **20**(6), pp. 697–735.
- [43] Brocca, M., Z. P. Bažant & I. M. Daniel [2001]. ‘Microplane model for stiff foams and finite element analysis of sandwich failure by core indentation.’ *International Journal of Solids and Structures*, **38**(44-45), pp. 8111–8132.
- [44] Caner, F. C. & Z. P. Bažant [2000]. ‘Microplane model m4 for concrete. ii: Algorithm and calibration.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **126**(9), pp. 954–961.
- [45] Caner, F. C. & Z. P. Bažant [2012]. ‘Microplane model m7 for plain concrete. i: Formulation.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **139**(12), pp. 1714–1723.
- [46] Caner, F. C. & Z. P. Bažant [2012]. ‘Microplane model m7 for plain concrete. ii: Calibration and verification.’ *Journal of Engineering Mechanics*, **139**(12), pp. 1724–1735.
- [47] Caner, F. C., Z. P. Bažant, C. G. Hoover, A. M. Waas & K. W. Shahwan [2011]. ‘Microplane model for fracturing damage of triaxially braided fiber-polymer composites.’ *Journal of Engineering Materials and Technology*, **133**(2), pp. 1–12.
- [48] Caner, F. C., Z. P. Bažant & R. Wendner [2013]. ‘Microplane model m7f for fiber reinforced concrete.’ *Engineering Fracture Mechanics*, **105**, pp. 41–57.
- [49] Caner, F. C., Z. Guo, B. Moran, Z. P. Bažant & I. Carol [2007]. ‘Hyperelastic anisotropic microplane constitutive model for annulus fibrosus.’ *Journal of Biomechanical Engineering*, **129**(5), pp. 632–641.

- [50] Carol, I., M. Jirásek & Z. Bažant [2001]. ‘A thermodynamically consistent approach to microplane theory. part i. free energy and consistent microplane stresses.’ *International Journal of Solids and Structures*, **38**(17), pp. 2921–2931.
- [51] Carol, I., M. Jirásek & Z. P. Bažant [2004]. ‘A framework for microplane models at large strain, with application to hyperelasticity.’ *International Journal of Solids and Structures*, **41**(2), pp. 511–557.
- [52] Carpenter, G., Z. Wronski & M. Phaneuf [2004]. ‘Tem study of nanopores and the embrittlement of cvd nickel foam.’ *Materials Science and Technology*, **20**(11), pp. 1421–1426.
- [53] Chen, Z. & S. Diebels [2012]. ‘Nanoindentation of hyperelastic polymer layers at finite deformation and parameter re-identification.’ *Archive of Applied Mechanics*, **82**(8), pp. 1041–1056.
- [54] Cheng, X., S. Föhst, C. Redenbach & K. Schladitz [2019]. ‘Detecting branching nodes of multiply connected 3d structures.’ In *International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, pp. 441–455. Springer.
- [55] Christensen, R. [1986]. ‘Mechanics of low density materials.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **34**(6), pp. 563–578.
- [56] Coleman, B. D. & M. L. Hodgdon [1987]. ‘On shear bands in ductile materials.’ In *Analysis and Thermomechanics*, pp. 227–255. Springer.
- [57] Cosserat, E. & F. Cosserat [1907]. *Sur la mécanique générale*. Gauthier-Villars.
- [58] Cusatis, G., A. Beghini & Z. P. Bažant [2008]. ‘Spectral stiffness microplane model for quasibrittle composite laminates-part i: theory.’ *Journal of Applied Mechanics*, **75**(2), pp. 021009.
- [59] Dafalias, Y. F. [1984]. ‘The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations.’ *Mechanics of Materials*, **3**(3), pp. 223–233.
- [60] Dafalias, Y. F. [1985]. ‘The plastic spin.’ *Journal of Applied Mechanics*, **52**(4), pp. 865–871.
- [61] Dafalias, Y. F. [1998]. ‘Plastic spin: necessity or redundancy?’ *International Journal of Plasticity*, **14**(9), pp. 909–931.
- [62] De Boer, R. [2012]. *Theory of porous media: highlights in historical development and current state*. Springer Science & Business Media.

- [63] Degischer, H. P. & B. Kriszt [2002]. *Handbook of cellular metals: production, processing, applications*. Wiley-vch.
- [64] Deshpande, V. & N. Fleck [2000]. ‘Isotropic constitutive models for metallic foams.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**(6), pp. 1253–1283.
- [65] Deshpande, V. & N. Fleck [2001]. ‘Multi-axial yield behaviour of polymer foams.’ *Acta Materialia*, **49**(10), pp. 1859–1866.
- [66] Diebels, S. [1999]. ‘A micropolar theory of porous media: constitutive modelling.’ *Transport in Porous Media*, **34**, pp. 193–208.
- [67] Diebels, S. [2000]. *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitation, Universität Stuttgart.
- [68] Diebels, S. & H. Steeb [2003]. ‘Stress and couple stress in foams.’ *Computational Materials Science*, **28**, pp. 714–722.
- [69] Diebels, S., H. Steeb & W. Ehlers [2003]. ‘Microscopic and macroscopic modelling of foams.’ In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 2, pp. 156–157. Wiley Online Library.
- [70] Doyoyo, M. & T. Wierzbicki [2003]. ‘Experimental studies on the yield behavior of ductile and brittle aluminum foams.’ *International Journal of Plasticity*, **19**(8), pp. 1195–1214.
- [71] Dukhan, N. [2013]. *Metal foams: fundamentals and applications*. DEStech Publications, Inc.
- [72] Düster, A., H.-G. Sehlhorst & E. Rank [2012]. ‘Numerical homogenization of heterogeneous and cellular materials utilizing the finite cell method.’ *Computational Mechanics*, **50**(4), pp. 413–431.
- [73] Ebinger, T., H. Steeb & S. Diebels [2005]. ‘Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes.’ *Computational Materials Science*, **32**(3-4), pp. 337–347.
- [74] Ehlers, W. [1995]. ‘A single-surface yield function for geomaterials.’ *Archive of Applied Mechanics*, **65**(4), pp. 246–259.
- [75] Ehlers, W. [1996]. ‘Grundlegende Konzepte in der Theorie poröser Medien.’ *Technische Mechanik*, **16**(1), pp. 63–76.
- [76] Eringen, A. C. [1980]. *Mechanics of continua*. Huntington, NY, Robert E. Krieger Publishing Co.

- [77] Eringen, A. C. & C. B. Kafadar [1976]. ‘Part i. polar field theories.’ *Continuum Physics*, **4**, pp. 1–73.
- [78] Euler, L. [1792]. *Institutiones calculi integralis*, volume 1. Academia Imperialis Scientiarum.
- [79] Feyel, F. [1999]. ‘Multiscale FE² elastoviscoplastic analysis of composite structures.’ *Computational Materials Science*, **16**(1-4), pp. 344–354.
- [80] Fíla, T., D. Kytýř, P. Koudelka, T. Doktor, P. Zlámal & O. Jiroušek [2014]. ‘Micro-mechanical testing of metal foam cell walls using miniature three-point bending.’ In *Key Engineering Materials*, volume 586, pp. 120–124. Trans Tech Publ.
- [81] Flory, P. J. & J. Rehner [1943]. ‘Statistical theory of chain configuration and physical properties of high polymers.’ *Annals of the New York Academy of Sciences*, **44**(1), pp. 419–429.
- [82] Forest, S., J.-S. Blazy, Y. Chastel & F. Moussy [2005]. ‘Continuum modeling of strain localization phenomena in metallic foams.’ *Journal of Materials Science*, **40**(22), pp. 5903–5910.
- [83] Freund, M. [2012]. *Verallgemeinerung eindimensionaler Materialmodelle für die Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz.
- [84] Freund, M. & J. Ihlemann [2008]. ‘Effiziente FEM-Adaption des Konzepts repräsentativer Raumrichtungen.’ In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 8, pp. 10423–10424. Wiley Online Library.
- [85] Freund, M. & J. Ihlemann [2010]. ‘Generalization of one-dimensional material models for the finite element method.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik: Applied Mathematics and Mechanics*, **90**(5), pp. 399–417.
- [86] Fritzen, P. [1997]. *Numerische Behandlung nichtlinearer Probleme der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie*. Shaker.
- [87] Garcia-Moreno, F. [01 2016]. ‘Commercial applications of metal foams: Their properties and production.’ *Materials*, **9**, pp. 85.
- [88] Gauthier, M., A. Katz, A. Maison, C. V. Cojocar & F. Bernier [2018]. ‘Effect of hardening heat treatment on the mechanical properties of a 17-4ph stainless steel foam.’ *MRS Advances*, **3**(62), pp. 3655–3668.

- [89] Gent, A. & A. Thomas [1959]. ‘The deformation of foamed elastic materials.’ *Journal of Applied Polymer Science*, **1**(1), pp. 107–113.
- [90] Gibson, I. & M. F. Ashby [1982]. ‘The mechanics of three-dimensional cellular materials.’ *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, **382**(1782), pp. 43–59.
- [91] Gibson, L., M. Ashby, J. Zhang & T. Triantafillou [1989]. ‘Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads-i. modelling.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **31**(9), pp. 635–663.
- [92] Gibson, L. J. & M. F. Ashby [1999]. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge University Press.
- [93] Giesekus, H. [2011]. *Phänomenologische Rheologie: Eine Einführung*. Springer.
- [94] Gioux, G., T. McCormack & L. Gibson [2000]. ‘Failure of aluminum foams under multiaxial loads.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **42**(6), pp. 1097–1117.
- [95] Göktepe, S. & C. Miehe [2005]. ‘A micro–macro approach to rubber-like materials. part iii: The micro-sphere model of anisotropic mullins-type damage.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**(10), pp. 2259–2283.
- [96] Goldschmidt, F. [2015]. *Modellierung und Simulation von Klebeverbindungen mit gradierten mechanischen Eigenschaften*. Dissertation, Universität des Saarlandes.
- [97] Gong, L., S. Kyriakides & W.-Y. Jang [2005]. ‘Compressive response of open-cell foams. part i: Morphology and elastic properties.’ *International Journal of Solids and Structures*, **42**(5-6), pp. 1355–1379.
- [98] Gradinger, R. & F. G. Rammerstorfer [1998]. ‘On the influence of meso-inhomogeneities on the crush worthiness of metal foams.’ *Acta Materialia*, **47**(1), pp. 143–148.
- [99] Green, A. E. & R. S. Rivlin [1997]. ‘Multipolar continuum mechanics.’ In *Collected Papers of RS Rivlin*, pp. 1754–1788. Springer.
- [100] Green, R. [1972]. ‘A plasticity theory for porous solids.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **14**(4), pp. 215–224.
- [101] Greve, R. [2013]. *Kontinuumsmechanik: Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer.

- [102] Hangai, Y., T. Morita & T. Utsunomiya [2017]. ‘Functionally graded aluminum foam consisting of dissimilar aluminum alloys fabricated by sintering and dissolution process.’ *Materials Science and Engineering: A*, **696**, pp. 544–551.
- [103] Hanssen, A., O. Hopperstad, M. Langseth & H. Ilstad [2002]. ‘Validation of constitutive models applicable to aluminium foams.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **44**(2), pp. 359–406.
- [104] Hartmann, S. & W. Bier [2008]. ‘High-order time integration applied to metal powder plasticity.’ *International Journal of Plasticity*, **24**(1), pp. 17–54.
- [105] Hasan, M., A. Kim & H.-J. Lee [2008]. ‘Measuring the cell wall mechanical properties of al-alloy foams using the nanoindentation method.’ *Composite Structures*, **83**(2), pp. 180–188.
- [106] Hashin, Z. [1983]. ‘Analysis of composite materials - a survey.’ *Journal of Applied Mechanics*, **50**(3), pp. 481–505.
- [107] Hassanizadeh, M. & W. G. Gray [1979]. ‘General conservation equations for multi-phase systems: 1. averaging procedure.’ *Advances in Water Resources*, **2**, pp. 131–144.
- [108] Hassanizadeh, M. & W. G. Gray [1979]. ‘General conservation equations for multi-phase systems: 2. mass, momenta, energy, and entropy equations.’ *Advances in Water Resources*, **2**(4), pp. 191–203.
- [109] Haupt, P. [2013]. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer Science & Business Media.
- [110] Haupt, P. & C. Tsakmakis [1989]. ‘On the application of dual variables in continuum mechanics.’ *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **1**(3), pp. 165–196.
- [111] Heinze, S., T. Bleistein, A. Düster, S. Diebels & A. Jung [2018]. ‘Experimental and numerical investigation of single pores for identification of effective metal foams properties.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **98**(5), pp. 682–695.
- [112] Hill, R. [1952]. ‘The elastic behaviour of a crystalline aggregate.’ *Proceedings of the Physical Society. Section A*, **65**(5), pp. 349–354.
- [113] Hoffman, J. D. & S. Frankel [2001]. *Numerical methods for engineers and scientists*. CRC press.

- [114] Holzapfel, G. A. [2002]. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science*. Springer.
- [115] Hütter, G., U. Mühlich & M. Kuna [2015]. ‘Micromorphic homogenization of a porous medium: elastic behavior and quasi-brittle damage.’ *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **27**(6), pp. 1059–1072.
- [116] Ihlemann, J. [2008]. ‘Generalization of one-dimensional constitutive models with the concept of representative directions.’ In *Constitutive models for rubber-proceedings-*, volume 5, p. 29. Balkema.
- [117] Itskov, M. [2007]. *Tensor algebra and tensor analysis for engineers*. Springer.
- [118] James, H. M. & E. Guth [1943]. ‘Theory of the elastic properties of rubber.’ *The Journal of Chemical Physics*, **11**(10), pp. 455–481.
- [119] Jang, W.-Y., A. M. Kraynik & S. Kyriakides [2008]. ‘On the microstructure of open-cell foams and its effect on elastic properties.’ *International Journal of Solids and Structures*, **45**(7-8), pp. 1845–1875.
- [120] Jänicke, R., S. Diebels, H.-G. Sehlhorst & A. Düster [2009]. ‘Two-scale modelling of micromorphic continua.’ *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, **21**(4), pp. 297–315.
- [121] Jin, C., M. Salviato, W. Li & G. Cusatis [2017]. ‘Elastic microplane formulation for transversely isotropic materials.’ *Journal of Applied Mechanics*, **84**(1), pp. 1–14.
- [122] Jiroušek, O., I. Jandejsek & D. Vavřík [2011]. ‘Evaluation of strain field in microstructures using micro-ct and digital volume correlation.’ *Journal of Instrumentation*, **6**(01).
- [123] Jiroušek, O., P. Zlámal, D. Kytýř & M. Kroupa [2011]. ‘Strain analysis of trabecular bone using time-resolved x-ray microtomography.’ *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, **633**, pp. 148–151.
- [124] Jung, A. [2016]. *Cellular Materials: Structure-Property Relationship and Mechanical Modelling*. Habilitation, Universität des Saarlandes.
- [125] Jung, A., Z. Chen, J. Schmauch, C. Motz & S. Diebels [2016]. ‘Micromechanical characterisation of ni/al hybrid foams by nano-and microindentation coupled with ebsd.’ *Acta Materialia*, **102**, pp. 38–48.
- [126] Jung, A. & S. Diebels [2016]. ‘Synthesis and mechanical properties of novel ni/pu hybrid foams: a new economic composite material for energy absorbers.’ *Advanced Engineering Materials*, **18**(4), pp. 532–541.

- [127] Jung, A. & S. Diebels [2017]. ‘Microstructural characterisation and experimental determination of a multiaxial yield surface for open-cell aluminium foams.’ *Materials & Design*, **131**(Supplement C), pp. 252 – 264.
- [128] Jung, A. & S. Diebels [2018]. ‘Yield surfaces for solid foams: A review on experimental characterization and modeling.’ *GAMM-Mitteilungen*, **41**(2).
- [129] Jung, A., S. Diebels, A. Koblichka-Veneva, J. Schmauch, A. Barnoush & M. R. Koblichka [2014]. ‘Microstructural analysis of electrochemical coated open-cell metal foams by ebsd and nanoindentation.’ *Advanced Engineering Materials*, **16**(1), pp. 15–20.
- [130] Jung, A., M. Larcher, O. Jirousek, P. Koudelka & G. Solomos [2015]. ‘Strain-rate dependence for ni/al hybrid foams.’ In *EPJ Web of Conferences*, volume 94, p. 04030. EDP Sciences.
- [131] Jung, A., J. Luksch, T. Bleistein, J. Adrien & E. Maire [2018]. ‘In-situ and ex-situ micro mechanical testing of open-cell metal foams.’ In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 18. Wiley Online Library.
- [132] Jung, A., J. Luksch, S. Diebels, F. Schäfer & C. Motz [2018]. ‘In-situ and ex-situ microtensile testing of individual struts of al foams and ni/al hybrid foams.’ *Materials & Design*, **153**, pp. 104–119.
- [133] Jung, A., M. Wocker, Z. Chen & H. Seibert [2015]. ‘Microtensile testing of open-cell metal foams-experimental setup, micromechanical properties.’ *Materials & Design*, **88**, pp. 1021–1030.
- [134] Jung, M. & U. Langer [2001]. *Methode der Finiten Elemente für Ingenieure*. Springer.
- [135] Kachanov, L. [2013]. *Introduction to continuum damage mechanics*, volume 10. Springer Science & Business Media.
- [136] Kaya, A. C., P. Zaslansky, A. Nikolaus & C. Fleck [2016]. ‘Tensile failure observations in sintered steel foam struts revealed by sub-micron contrast-enhanced microtomography.’ *Materials & Design*, **105**, pp. 190–200.
- [137] Krajcinovic, D. [1989]. ‘Damage mechanics.’ *Mechanics of Materials*, **8**(2-3), pp. 117–197.
- [138] Krajcinovic, D. & J. Lemaitre [1987]. *Continuum damage mechanics: theory and applications*. Springer.

- [139] Kralik, V. & J. Nemecek [2011]. ‘Micromechanical properties of porous material based on metal foam.’ *Chem. Listy*, **105**, pp. 672–675.
- [140] Kuhl, E. [2000]. *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Dissertation, Universität Stuttgart.
- [141] Kuhl, E. & E. Ramm [1998]. ‘On the linearization of the microplane model.’ *Mechanics of Cohesive-frictional Materials: An International Journal on Experiments, Modelling and Computation of Materials and Structures*, **3**(4), pp. 343–364.
- [142] Kuhl, E. & E. Ramm [2000]. ‘Microplane modelling of cohesive frictional materials.’ *European Journal of Mechanics Series A Solids*, **19**, pp. 121–144.
- [143] Kuhn, H. W. [2014]. ‘Nonlinear programming: a historical view.’ In *Traces and Emergence of Nonlinear Programming*, pp. 393–414. Springer.
- [144] Kuhn, H. W. & A. W. Tucker [1951]. ‘Nonlinear programming.’ *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*.
- [145] Lee, E. H. [1969]. ‘Elastic-plastic deformation at finite strains.’ *Journal of Applied Mechanics*, **36**(1), pp. 1–6.
- [146] Lemaitre, J. [1985]. ‘A continuous damage mechanics model for ductile fracture.’ *Journal of Engineering Materials and Technology*, **107**(1), pp. 83–89.
- [147] Lemaitre, J. [1985]. ‘Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations.’ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**(1-3), pp. 31–49.
- [148] Lemaitre, J. [2012]. *A course on damage mechanics*. Springer Science & Business Media.
- [149] Lemaitre, J. & R. Desmorat [2005]. *Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer Science & Business Media.
- [150] Lippmann, H. [2013]. *Angewandte Tensorrechnung: Für Ingenieure, Physiker und Mathematiker*. Springer.
- [151] Lorenz, H., M. Freund, D. Juhre, J. Ihlemann & M. Klüppel [2011]. ‘Constitutive generalization of a microstructure-based model for filled elastomers.’ *Macromolecular Theory and Simulations*, **20**(2), pp. 110–123.
- [152] Lührs, L., C. Soyarslan, J. Markmann, S. Bargmann & J. Weissmüller [2016]. ‘Elastic and plastic poisson’s ratios of nanoporous gold.’ *Scripta Materialia*, **110**, pp. 65–69.

- [153] Mase, G. T., R. E. Smelser & G. E. Mase [2009]. *Continuum Mechanics for Engineers*. CRC press.
- [154] Mehrabi, R. & M. Kadkhodaei [2013]. ‘3d phenomenological constitutive modeling of shape memory alloys based on microplane theory.’ *Smart Materials and Structures*, **22**(2).
- [155] Mehrabi, R., M. Kadkhodaei & M. Elahinia [2014]. ‘A thermodynamically-consistent microplane model for shape memory alloys.’ *International Journal of Solids and Structures*, **51**(14), pp. 2666–2675.
- [156] Mehrabi, R., M. Kadkhodaei & A. Ghaei [2012]. ‘Numerical implementation of a thermomechanical constitutive model for shape memory alloys using return mapping algorithm and microplane theory.’ In *Advanced Materials Research*, volume 516, pp. 351–354. Trans Tech Publ.
- [157] Mehrabi, R., M. Kadkhodaei, M. Taheri Andani & M. Elahinia [2015]. ‘Microplane modeling of shape memory alloy tubes under tension, torsion, and proportional tension–torsion loading.’ *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **26**(2), pp. 144–155.
- [158] Miehe, C. [1996]. ‘Exponential map algorithm for stress updates in anisotropic multiplicative elastoplasticity for single crystals.’ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**(19), pp. 3367–3390.
- [159] Miehe, C. [2002]. ‘Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation.’ *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **55**(11), pp. 1285–1322.
- [160] Miehe, C. & S. Göktepe [2005]. ‘A micro–macro approach to rubber-like materials. part ii: The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53**(10), pp. 2231–2258.
- [161] Miehe, C., S. Göktepe & F. Lulei [2004]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. part i: the non-affine micro-sphere model of rubber elasticity.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **52**(11), pp. 2617–2660.
- [162] Miehe, C., J. Schröder & J. Schotte [1999]. ‘Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials.’ *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **171**(3-4), pp. 387–418.
- [163] Miller, R. E. [2000]. ‘A continuum plasticity model for the constitutive and indentation behaviour of foamed metals.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **42**(4), pp. 729–754.

- [164] Mises, R. v. [1913]. ‘Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand.’ *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 582–592.
- [165] Mises, R. v. [1928]. ‘Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **8**(3), pp. 161–185.
- [166] Mohr, O. [1900]. ‘Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials.’ *Zeit. Vereines Deutsch. Ing.*, **44**, pp. 1–12.
- [167] Nelder, J. A. & R. Mead [1965]. ‘A simplex method for function minimization.’ *The Computer Journal*, **7**(4), pp. 308–313.
- [168] Nemat-Nasser, S. & M. Hori [2013]. *Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials*, volume 37. Elsevier.
- [169] Newton, I. [1687]. *Philosophiae naturalis principia mathematica*.
- [170] Öchsner, A. [2016]. *Continuum Damage and Fracture Mechanics*. Springer.
- [171] Oliver, W. C. & G. M. Pharr [1992]. ‘An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments.’ *Journal of Materials Research*, **7**(6), pp. 1564–1583.
- [172] Oliver, W. C. & G. M. Pharr [2004]. ‘Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology.’ *Journal of Materials Research*, **19**(1), pp. 3–20.
- [173] Olurin, O. B., D. S. Wilkinson, G. C. Weatherly, V. Paserin & J. Shu [2003]. ‘Strength and ductility of as-plated and sintered cvd nickel foams.’ *Composites Science and Technology*, **63**(16), pp. 2317–2329.
- [174] Otsu, N. [March 1979]. ‘A threshold selection method from gray level histograms.’ *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, **9**, pp. 62–66.
- [175] Özdemir, I., W. Brekelmans & M. G. Geers [2008]. ‘FE² computational homogenization for the thermo-mechanical analysis of heterogeneous solids.’ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**(3-4), pp. 602–613.
- [176] Pan, B., K. Qian, H. Xie & A. Asundi [2009]. ‘Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review.’ *Measurement Science and Technology*, **20**(6).
- [177] Pang, T. [1999]. *An introduction to computational physics*. American Association of Physics Teachers.

- [178] Parisch, H. [2003]. *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Springer.
- [179] Prandtl, L. [1924]. ‘Spannungsverteilung in plastischen Körpern.’ In *Proceedings of the 1st international congress on applied mechanics*, pp. 43–54.
- [180] Prat, P. C. & Z. P. Bažant [1991]. ‘Microplane model for triaxial deformation of saturated cohesive soils.’ *Journal of Geotechnical Engineering*, **117**(6), pp. 891–912.
- [181] Quarteroni, A., R. Sacco & F. Saleri [2010]. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media.
- [182] Quarteroni, A., R. Sacco & F. Saleri [2013]. *Numerische Mathematik 2*. Springer.
- [183] Rajput, M. S., M. Burman, J. Köll & S. Hallström [2019]. ‘Compression of structural foam materials-experimental and numerical assessment of test procedure and specimen size effects.’ *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **21**(1), pp. 260–288.
- [184] Raphson, J. [1697]. *Analysis aequationum universalis: seu ad aequationes algebraicas resolvendas methodus generalis, & expedita, ex nova infinitarum serierum methodo, deducta ac demonstrata*, volume 1.
- [185] Reis, M. [2016]. *Konzeption und Konstruktion eines Mikrobiegeversuches*. Masterarbeit, Universität des Saarlandes.
- [186] Reis, M., M. Adorna, O. Jiroušek & A. Jung [2019]. ‘Improving DIC accuracy in experimental setups.’ *Advanced Engineering Materials*.
- [187] Reuss, A. [1929]. ‘Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **9**(1), pp. 49–58.
- [188] Reuss, A. [1930]. ‘Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie.’ *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **10**(3), pp. 266–274.
- [189] Ruan, D., G. Lu, L. S. Ong & B. Wang [2007]. ‘Triaxial compression of aluminium foams.’ *Composites Science and Technology*, **67**(6), pp. 1218–1234.
- [190] Rust, W. [2011]. *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen*. Springer.
- [191] Sachs, G. [1929]. ‘Zur Ableitung einer Fließbedingung.’ In *Mitteilungen der deutschen Materialprüfungsanstalten*, pp. 94–97. Springer.

- [192] Sawischlewski, E., P. Steinmann & E. Stein [1996]. ‘Modelling and computation of instability phenomena in multisurface elasto-plasticity.’ *Computational Mechanics*, **18**(4), pp. 245–258.
- [193] Schüler, P., R. Frank, D. Uebel, S. F. Fischer, A. Bührig-Polaczek & C. Fleck [2016]. ‘Influence of heat treatments on the microstructure and mechanical behaviour of open cell alsi7mg0.3 foams on different lengthscales.’ *Acta Materialia*, **109**, pp. 32–45.
- [194] Schwarz, H.-R. & N. Köckler [2013]. *Numerische Mathematik*. Springer.
- [195] Shafiq, M., R. S. Ayyagari, M. Ehaab & M. Vural [2015]. ‘Multi-axial yield surface of transversely isotropic foams: Part ii-experimental.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **76**, pp. 224–236.
- [196] Simo, J. C. & T. J. Hughes [2006]. *Computational inelasticity*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- [197] Sugimura, Y., J. Meyer, M. He, H. Bart-Smith, J. Grenstedt & A. Evans [1997]. ‘On the mechanical performance of closed cell al alloy foams.’ *Acta Materialia*, **45**(12), pp. 5245–5259.
- [198] Sutton, M. A., J. J. Orteu & H. Schreier [2009]. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- [199] Taylor, G. I. [1938]. ‘Analysis of plastic strain in a cubic crystal.’ *Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume*, pp. 218–224.
- [200] Taylor, G. I. [1938]. ‘Plastic strain in metals.’ *J. Inst. Metals*, **62**, pp. 307–324.
- [201] Taylor, R. [2013]. ‘Feap—a finite element analysis program version 8.4 programmer manual.’ *University of California, Berkeley*. (<http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/manual84.pdf>) [Accessed on January 10, 2014].
- [202] Taylor, R. [2013]. ‘Feap—a finite element analysis program version 8.4 theory manual.’ *University of California, Berkeley*. (<http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/manual84.pdf>) [Accessed on January 10, 2014].
- [203] Taylor, R. [2013]. ‘Feap—a finite element analysis program version 8.4 user manual.’ *University of California, Berkeley*. (<http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/manual84.pdf>) [Accessed on January 10, 2014].
- [204] Tekoğlu, C. [2006]. *Size effects in cellular solids*. University Library Groningen.

- [205] Timoshenko, S. [1921]. ‘On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section.’ *Philosophical Magazine*, p. 744.
- [206] Treloar, L. R. G. [1946]. ‘The statistical length of long-chain molecules.’ *Transactions of the Faraday Society*, **42**, pp. 77–82.
- [207] Triantafillou, T., J. Zhang, T. Shercliff, L. Gibson & M. Ashby [1989]. ‘Failure surfaces for cellular materials under multiaxial loads-ii. comparison of models with experiment.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **31**(9), pp. 665–678.
- [208] Trostel, R. [2013]. *Mathematische Grundlagen der Technischen Mechanik III Materialmodelle in der Ingenieurmechanik*. Springer.
- [209] Truesdell, C. [1957]. ‘Sulle basi della termomeccanica.’ *Rend. Lincei*, **22**(8), pp. 33–38.
- [210] Truesdell, C. [1984]. ‘Thermodynamics of diffusion.’ In *Rational thermodynamics*, pp. 219–236. Springer.
- [211] Truesdell, C. & R. Toupin [1960]. *The classical field theories*. Springer.
- [212] Twiss, R. J. & A. C. Eringen [1971]. ‘Theory of mixtures for micromorphic materials-i: Balance laws.’ *International Journal of Engineering Science*, **9**(10), pp. 1019–1044.
- [213] Twiss, R. J. & A. C. Eringen [1972]. ‘Theory of mixtures for micromorphic materials-ii. elastic constitutive equations.’ *International Journal of Engineering Science*, **10**(5), pp. 437–465.
- [214] Voigt, W. [1887]. *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle*. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- [215] Voronoi, G. [1908]. ‘Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. premier mémoire. sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites.’ *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **133**, pp. 97–178.
- [216] Voronoi, G. [1909]. ‘Nouvelles applications des paramètres continus à théorie des formes quadratiques. deuxième mémoire. recherches sur les paralléloèdres primitifs.’ *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **136**, pp. 67–182.
- [217] Wang, M. C. & E. Guth [1952]. ‘Statistical theory of networks of non-gaussian flexible chains.’ *The Journal of Chemical Physics*, **20**(7), pp. 1144–1157.

- [218] Wocker, M. [2014]. *Konzeption und Konstruktion eines Versuchsstands zur mikromechanischen Materialcharakterisierung zellulärer Materialien*. Masterarbeit, Universität des Saarlandes.
- [219] Worch, H., W. Pompe & W. Schatt [2011]. *Werkstoffwissenschaft*. John Wiley & Sons.
- [220] Yamada, Y., K. Shimojima, Y. Sakaguchi, M. Mabuchi, M. Nakamura, T. Asahina, T. Mukai, H. Kanahashi & K. Higashi [2000]. ‘Processing of cellular magnesium materials.’ *Advanced Engineering Materials*, **2**(4), pp. 184–187.
- [221] Yuan, J.-y. & Y.-x. Li [2015]. ‘Effects of cell wall property on compressive performance of aluminum foams.’ *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, **25**(5), pp. 1619–1625.
- [222] Zhang, Y., D. Rodrigue & A. Ait-Kadi [2003]. ‘Torsion properties of high density polyethylene foams.’ *Journal of Cellular Plastics*, **39**(6), pp. 451–474.
- [223] Zhou, J., S. Allameh & W. Soboyejo [2005]. ‘Microscale testing of the strut in open cell aluminum foams.’ *Journal of Materials Science*, **40**(2), pp. 429–439.
- [224] Zhou, J., Z. Gao, A. Cuitino & W. Soboyejo [2004]. ‘Effects of heat treatment on the compressive deformation behavior of open cell aluminum foams.’ *Materials Science and Engineering: A*, **386**(1-2), pp. 118–128.
- [225] Zhou, J., C. Mercer & W. Soboyejo [2002]. ‘An investigation of the microstructure and strength of open-cell 6101 aluminum foams.’ *Metallurgical and Materials Transactions A*, **33**(5), pp. 1413–1427.
- [226] Zhou, T., C. Yu, G. Kang & Q. Kan [2019]. ‘A new microplane model for non-proportionally multiaxial deformation of shape memory alloys addressing both the martensite transformation and reorientation.’ *International Journal of Mechanical Sciences*, **152**, pp. 63–80.
- [227] Zhou, Z., Z. Wang, L. Zhao & X. Shu [2012]. ‘Loading rate effect on yield surface of aluminum alloy foams.’ *Materials Science and Engineering: A*, **543**, pp. 193–199.
- [228] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [1994]. *The finite element method: basic formulation and linear problems*, volume 1. McGraw-Hill Berkshire, UK.
- [229] Zienkiewicz, O. C. & R. L. Taylor [2000]. *The finite element method: solid mechanics*, volume 2. Butterworth-Heinemann.

A

Veröffentlichungen, Vorträge und Poster

A.1 Veröffentlichungen und Proceedings

- Bleistein, T., M. Reis, T. Cheng, X., C. Redenbach, S. Diebels & A. Jung [2019]. 'Multiscale microsphere modelling of open-cell metal foams enriched by statistical analysis of geometric parameters.' *Mechanics of Material*, (submitted).
- Bleistein, T., S. Diebels & A. Jung [2019]. 'Parameter identification for open cell aluminium foams using inverse calculation.' *Computers and Mathematics with Application*, (submitted).
- Bleistein, T., A. Jung & S. Diebels [2019]. 'A microsphere-based material model for open cell metal foams.' *Continuum Mechanics and Thermodynamics*.
- Bleistein, T., A. Jung & S. Diebels [2018]. 'Multiscale characterisation and simulation of open cell metal foams.' In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 18. Wiley Online Library.
- A. Jung, T. Bleistein & S. Diebels [2019], 'Modelling of Cellular Materials by a Microsphere-based Material Model.' In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 19. Wiley Online Library.

- S. Heinze, T. Bleistein, A. Düster, S. Diebels & A. Jung [2018]. 'Experimental and numerical investigation of single pores for identification of effective metal foams properties.' *Z. Angew. Math. Mech.* 98, 682-695.
- A. Jung, J. Luksch, T. Bleistein, J. Adrien & E. Maire [2018]. 'In-situ and ex-situ micro mechanical testing of open-cell metal foams.' In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 18. Wiley Online Library.
- D. Foetz, D. Quinten, G. Falk, A. Jung, T. Bleistein & S. Diebels [2016]. 'Cellular magnesia/carbon refractories: Processing, (thermo-)mechanical characterization and finite element modeling.' *Refractories World Forum*, 8(2): 102-109.
- T. Bleistein, A. Jung & S. Diebels [2016], 'Thermo-mechanically coupled modelling of cellular MgO-C refractories under thermal shock.' In *PAMM: Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, volume 16. Wiley Online Library.

A.2 Vorträge

- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Thermo-mechanically coupled modelling of cellular MgO refractories under thermal shock', Jahrestreffen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), 07.-11. März 2016, Braunschweig.
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Simulation of open cell metal foams with a yield criterion by Green', EUFOAM, 03.-06. Juli 2016, Dublin (Irland).
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Makroskopische Simulation von Metallschäumen mit FEAPTM', 9. Workshop Kontinuumsmechanik, 14.-16. September 2016, Clausthal.
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'A multilevel Newton method to simulate open cell metal foams', EMMC 15, 07.-09. September 2016, Brüssel (Belgien).
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Experimentelle Mechanik Methoden der Materialcharakterisierung', Tag der Technik, 23. Juni 2017, Saarbrücken.

- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Simulation and inverse calculation of single metal foam pores', ECCOMAS Thematic Conference on Computational modeling of Complex Materials across the Scale, 7.-9. November 2017, Paris (Frankreich).
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Multiscale characterisation and simulation of open cell metal foams', Jahrestreffen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), 19.-23. März 2018, München.
- Jung, A., Luksch, J. & Bleistein, T., 'In-situ and ex-situ micromechanical testing of open-cell metal foams', Jahrestreffen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), 19.-23. März 2018, München.
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Macroscopic characterisation of open cell metal foams based on 1D material laws', 11. Workshop Kontinuumsmechanik, 12.-14. September 2018, Hirschegg (Österreich).
- Jung, A., Bleistein, T. & Diebels, S., 'Modelling of cellular materials by a microsphere-based material model', Jahrestreffen der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM), 18.-22. März 2019, Wien (Österreich).
- zusätzlich zehn lehrstuhlinterne Vorträge und fünf Vorträge im Rahmen von Projekttreffen

A.3 Poster

- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Cellular Materials: Macroscopic Characterisation', DGM Regionalforum Saar, 29. Januar 2019, Saarbrücken.
- Bleistein, T., Jung, A. & Diebels, S., 'Modellierung und Simulation von Metallschäumen', Doktorandentag der Naturwissenschaftlich Technischen Fakultät III der Universität des Saarlandes, 9. November 2016, Saarbrücken.