

Verfahren der Ordnungsreduktion zur Charakterisierung passiver
Mikrowellenstrukturen im Frequenz- und Zeitbereich auf Basis der
Finite-Elemente-Methode

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität des Saarlandes

von

Rolf-Björn Baltes

Saarbrücken

2018

Tag des Kolloquiums: 26.07.2018

Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Guido Kickelbick

Mitglieder des

Prüfungsausschusses:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Rolf Pelster

Univ.-Prof. Dr. techn. R. Dyczij-Edlinger

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Michael Möller

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. habil. Ursula van Rienen

Akademischer Mitarbeiter: Dr.-Ing. Joachim Schmitt

Meinem Vater gewidmet

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger für das Bereitstellen des hochinteressanten Themas ganz herzlich bedanken. Seine zahlreichen Anregungen und die vielen fachlichen Diskussionen waren eine große Hilfe bei der Anfertigung der Dissertation.

Weiterhin bedanke ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Michael Möller und Prof. Dr. rer. nat. habil. Ursula van Rienen für das Interesse an der Arbeit sowie die Übernahme des Koreferats. Außerdem gilt mein Dank Prof. Dr. rer. nat. Rolf Pelster für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission sowie Dr.-Ing. Joachim Schmitt für seine Tätigkeit als Beisitzer.

Großer Dank gebührt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die meine Arbeit über drei Jahre finanziert hat.

Ebenfalls möchte ich mich bei allen ehemaligen und aktuellen Mitarbeitern des Lehrstuhls für theoretische Elektrotechnik für die vielen fachlichen Diskussionen und das tolle Arbeitsklima ganz herzlich bedanken.

Ich danke in gleicher Weise meinem Freundeskreis, insbesondere Rouven Britz, auf dessen volle Unterstützung stets Verlass war.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern Traute und Ralf Baltes, auf deren Unterstützung ich jeder Zeit zählen konnte, sowie meiner Schwester Lynn Baltes, die als Korrekturleserin herhalten musste.

Kurzfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung von Verfahren zur effizienten und zuverlässigen Charakterisierung passiver Mikrowellenstrukturen mit linearem Materialverhalten auf der Basis elektromagnetischer Felder. Die Anregung der Strukturen erfolgt mittels axial homogener Wellenleiter, deren Eigenmoden die Ein- bzw. Ausgänge definieren. Die Grundlage der Charakterisierung bildet die Methode der finiten Elemente (FE) im Frequenzbereich, die sowohl zur Analyse der Wellenleiter als auch zur Simulation der Mikrowellenstruktur zum Einsatz kommt. Die Anwendung von Verfahren der Modellordnungsreduktion (MOR) auf die FE-Systeme führt zu einer signifikante Reduktion der benötigten Rechenzeit.

Die Hauptbeiträge sind eine neue FE-Formulierung zur modalen Analyse von Wellenleiter sowie eine neue FE-Formulierung zur Simulation der Mikrowellenstrukturen. Weiterhin wird ein MOR-Verfahren entwickelt, das die Behandlung von Strukturen erlaubt, die durch Wellenleiter mit frequenzabhängigen Modenformen angeregt werden. Um die gemeinsame Simulation linearer und nichtlinearer Teilsysteme zu ermöglichen, wird ein neuartiges Verfahren zur Transformation der Modelle aus dem Frequenzbereich in den Zeitbereich vorgeschlagen. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Berücksichtigung von frequenzabhängigen Materialeigenschaften.

Abstract

This work aims at developing methods for the efficient and reliable characterization of passive microwave structures with linear materials on the basis of electromagnetic fields. The excitation of the structures is realized by axial homogeneous waveguides, the eigenmodes of which define the inputs and outputs. The characterization is based on the finite element (FE) method in the frequency domain, which is used for analyzing the waveguides as well as for the microwave structure itself. Application of methods of model order reduction (MOR) to the FE systems leads to a significant reduction in computational times.

The main contribution of the work is a new FE formulation for the modal analysis of waveguides as well as a new FE formulation of the microwave structure. Furthermore, a MOR method is developed that can handle devices which are fed by waveguides featuring frequency-dependent mode patterns. To enable the simultaneous simulation of linear and nonlinear subsystems, a new procedure for transforming the models from the frequency-domain to the time-domain is proposed. In this context, a special focus lies on frequency-dependent materials.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mathematische Modelle passiver Mikrowellenstrukturen	7
2.1	Grundlegende Gleichungen	8
2.2	Materialmodelle	10
2.2.1	Debye-Modell	11
2.2.2	Lorentz-Modell	12
2.2.3	Drude-Modell	14
2.3	Randbedingungen	16
2.4	Eigenschaften axial homogener Wellenleiter	18
2.5	Beschreibung mittels Netzwerkmatrizen	19
2.6	Funktionsräume	22
3	Eine Finite-Elemente-Formulierung zur Analyse axial homogener Wellenleiter	27
3.1	Elementare Zweifeld-Formulierung	28
3.1.1	Mathematisches Modell	29
3.1.2	Diskretisierung mittels finiter Elemente	31
3.2	Analyse des statischen Grenzfalls	37
3.3	Stabilisierung für niedrige Frequenzen	40

3.4	Numerische Beispiele	49
3.4.1	Parallelplattenwellenleiter	50
3.4.2	Geschirmte Mikrostreifenleitung	53
3.4.3	Rechteckhohlleiter mit dispersivem Material	55
3.5	Zusammenfassung	58
4	Effiziente Analyse passiver Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich	59
4.1	Finite-Elemente Formulierungen zur Analyse passiver Mikrowellenstrukturen	60
4.1.1	Die Impedanz-Formulierung	61
4.1.2	Diskussion der Impedanz-Formulierung	64
4.1.3	Die Streuparameter-Formulierung	66
4.1.4	Vergleich der Formulierungen	68
4.2	Modellordnungsreduktion	73
4.2.1	Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Systeme	74
4.2.2	Anregung mit frequenzabhängigen Modenformen	77
4.2.3	Selbst-adaptives Verfahren zur Erstellung der Projektionsmatrix	84
4.3	Numerische Beispiele	87
4.3.1	Gekoppelte Mikrostreifenleitungen	87
4.3.2	Übergang von Rechteckhohlleiter auf Rechteckhohlleiter mit dielektrischem Einsatz	94
4.4	Zusammenfassung	99
5	Kompakte Zeitbereichsmodelle passiver Mikrowellenstrukturen	101
5.1	Modelle im Frequenzbereich	102
5.2	Transformation in den Zeitbereich	104

5.3	Validierung der Zeitbereichsmodelle	112
5.3.1	Lösung der Zustandsraummodelle	113
5.3.2	Transformation in den Frequenzbereich	117
5.4	Integration in Schaltungssimulatoren	118
5.5	Numerische Beispiele	119
5.5.1	Parallelplattenstruktur	120
5.5.2	Parallelplattenwellenleiter mit dispersivem Materialeinsatz . .	126
5.6	Zusammenfassung	130
6	Zusammenfassung und Ausblick	133
A	Beweis der Kausalität des Lorentz-Materialmodells	137
B	Bestimmung der Anregungsvektoren aus der Wellenleiter-Formu- lierung	143
C	Beweis zur Passivität der reduzierten Modelle	149
	Eigene Publikationen	165
	Abbildungsverzeichnis	171
	Tabellenverzeichnis	173
	Literaturverzeichnis	183

Kapitel 1

Einleitung

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die effiziente Charakterisierung passiver Mikrowellenstrukturen auf der Basis elektromagnetischer Felder. Die Arbeit beschränkt sich dabei auf lineares und zeitinvariantes Materialverhalten. Die Anregung der Strukturen wird mittels axial homogenen Wellenleitern realisiert. Die modalen Felder der Wellenleiter bilden die Ein- bzw. Ausgänge, womit es ermöglicht wird, die Mikrowellenstrukturen mittels Netzwerkmatrizen zu charakterisieren. Weitere Details sowie die zugrunde liegenden mathematischen Modelle zur Beschreibung der Strukturen sind in Kapitel 2 gegeben.

Im Rahmen der Auslegung und Konstruktion passiver Mikrowellenstrukturen, wie beispielsweise Filter oder Antennen, ist es von entscheidender Bedeutung, das Verhalten der Bauteile präzise vorhersagen zu können. Dies beschleunigt den Designprozess und spart Kosten, da die Anzahl der zu erstellenden Prototypen zur experimentellen Validierung reduziert wird. Aufgrund der fortschreitenden Miniaturisierung und der damit verbundenen Erhöhung der Komplexität elektromagnetischer Strukturen ist es schwierig, in vielen Fällen sogar unmöglich, diese mittels analytischer Verfahren zu charakterisieren. Daher bedarf es numerischer Methode, die in der Lage sind, auch Strukturen mit komplexen Geometrien verlässlich und effizient zu beschreiben.

Für diese Aufgabe wurden in den vergangenen Jahren unterschiedliche Simulationsverfahren entwickelt. Die am weitesten verbreiteten Verfahren sind unter anderem die Methode der *Finiten Differenzen* (FD) [Yee66], [TH00], die *Finite Integrations-technik* (FIT) [Wei96], [CW01], die *Randelemente Methode* (REM) [Hsi06], [Gib08] sowie die Methode der *Finiten Elemente* (FE) [SF73]. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Methode der FE verwendet. Diese zeichnet sich durch eine hohe Flexibilität in der Modellierung von komplizierten Geometrien und komplexem Materialverhalten aus. Ein weiterer Vorteil ist das Vorhandensein von Ansatzfunktionen höherer Ordnung, die eine Erhöhung der Konvergenzraten ermöglichen.

Die Methode der FE kommt zur Analyse von Strukturen sowohl im Zeitbereich [LLC97],[SLC03] als auch im Frequenzbereich [ZC06, Kapitel 3] zum Einsatz. Während Strukturen mit nichtlinearen Materialien im Zeitbereich analysiert werden müssen, können Strukturen mit linearen Materialien im Frequenzbereich simuliert werden. Die Simulation im Frequenzbereich hat gegenüber der Simulation im Zeitbereich einige Vorteile. So lässt sich frequenzabhängiges Materialverhalten einfach berücksichtigen. Weiterhin führt die Analyse von Strukturen mit elektrisch kleinen Details oder von resonanten Strukturen im Zeitbereich zu langen Rechenzeiten. Da sich die vorliegende Arbeit auf Strukturen mit linearen und zeitinvarianten Materialeigenschaften beschränkt, wird die Simulation im Frequenzbereich durchgeführt.

Der erste Schritt bei der Simulation der beschriebenen Strukturen ist die modale Analyse der speisenden Wellenleiter. Dabei werden die modalen Felder und die zugehörigen Ausbreitungskoeffizienten der ausbreitungsfähigen und der schwach gedämpften Moden berechnet. Da nur in wenigen Fällen eine analytische Lösung möglich ist, werden numerische Verfahren benötigt. Aus der Literatur sind unterschiedliche FE-Formulierungen zur modalen Analyse von Wellenleitern bekannt. Diese unterscheiden sich vor allem in den Feldgrößen, die diskretisiert werden. In [LSC91] und [VD02] wird die elektrische Feldstärke diskretisiert, in [VZ95] die magnetische Erregung, und in [Sve89] werden beide genannten Größen verwendet. Im Gegensatz dazu wird in [BB91], [PL95], [LLL03] und [FHDE04] in einem elektrischen Skalarpotential sowie einem magnetischen Vektorpotential formuliert. Die Gemeinsamkeit dieser Verfahren ist, dass sie alle auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem führen, dessen Eigenvektoren die modalen Felder enthalten, und dessen Eigenwert dem Ausbreitungskoeffizienten oder dessen Quadrat entspricht. Während alle genannten Formulierungen verlässliche Ergebnisse für hohe Frequenzen liefern, sind nur einige in der Lage, dies auch für niedrige Frequenzen und den statischen Grenzfall zu tun [VD02], [LLL03], [FHDE04]. Diese niederfrequenzstabilen Formulierungen haben eine weitere Gemeinsamkeit: Sie führen alle auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem im Quadrat des Ausbreitungskoeffizienten. Dies hat zur Folge, dass betragsmäßig sehr kleine Ausbreitungskoeffizienten schlecht aufgelöst werden können. Dazu sei auch auf die numerischen Beispiele in Abschnitt 3.4 verwiesen. Eine wichtige Konsequenz davon ist, dass die Ausbreitungskoeffizienten von Moden vom Typ transversal elektromagnetischen (TEM) bzw. vom Typ quasi-TEM für niedrige Frequenzen, trotz Niederfrequenzstabilität der Formulierungen, nicht korrekt dargestellt werden. Um dieses Problem zu beheben, wird in Kapitel 3 eine neue niederfrequenzstabile FE-Formulierung vorgestellt, die bis zum statischen Grenzfall verlässliche Ergebnisse liefert und außerdem auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem führt, dessen Eigenwert direkt dem gesuchten Ausbreitungskoeffizienten entspricht.

Nachdem die modalen Felder und die zugehörigen Ausbreitungskoeffizienten in den speisenden Wellenleitern bestimmt sind, werden diese zur Anregung der zu analysierenden Mikrowellenstruktur verwendet. Zu deren Beschreibung mittels FE sind in

der Literatur unterschiedliche Formulierungen bekannt. Neben der Unterteilung der Formulierungen nach den Feldern, die diskretisiert werden, lassen sich die Formulierungen auch nach der Wahl der Ein- bzw. Ausgänge unterteilen. So gibt es zum einen Impedanz (Z)-Formulierungen [DeP83], [WMF83], [WP86], die modale Ströme und Spannungen als Ein- bzw. Ausgänge verwenden. Zum anderen existieren Streuparameter(S)-Formulierungen [CL88], [Lee90], die auf einfallenden und auslaufenden Wellen als Ein- bzw. Ausgängen basieren. Im Gegensatz zu den Formulierungen für die modale Analyse von Wellenleitern führen diese Formulierungen auf ein lineares Gleichungssystem, das numerisch gelöst wird. Die Z -Formulierung ist aufgrund ihrer Einfachheit weit verbreitet, führt im verlustfreien Fall allerdings auf scharfe, innere Resonanzen. Diese Resonanzen sind unphysikalisch und resultieren aus der Art der Anregung. Für eine detaillierte Erklärung sowie ein numerisches Beispiel sei an dieser Stelle auf Abschnitt 4.1.2 verwiesen. Im Gegensatz dazu ist die *Transfinite-Elemente-Methode* (TFE) [CL88], [Lee90], die eine S -Formulierung darstellt, frei von inneren Resonanzen. Allerdings werden im Rahmen der TFE die Ansatzfunktionen auf den Querschnitten der speisenden Wellenleiter auf die Form der anregenden Moden restringiert. Dies führt zum einen zu einem erheblichen Aufwand bei der Implementierung, zum anderen wird die Frequenzabhängigkeit der Systemmatrizen im Fall von frequenzabhängigen Modenformen wesentlich verkompliziert. Um dies zu umgehen, wird in Kapitel 4 eine neue S -Formulierung vorgestellt, die das Auftreten innerer Resonanzen vermeidet, dabei jedoch auf eine Restriktion der Ansatzfunktionen auf den Querschnitten der speisenden Wellenleiter verzichtet. Dies führt dazu, dass der Einfluss frequenzabhängiger Modenformen auf die Systemmatrix minimiert wird.

Die vorgestellten FE-Formulierungen sind in der Lage die Netzwerkmatrizen in beliebigen Frequenzpunkten zu berechnen. Allerdings sind die Matrizen der resultierenden Gleichungssysteme in der Regel sehr groß, schwach besetzt und frequenzabhängig. Aus diesem Grund muss das lineare Gleichungssystem für jeden betrachteten Frequenzpunkt neu gelöst werden. Werden die Einträge der Netzwerkmatrizen an vielen diskreten Frequenzpunkten benötigt, sei es um ein breites Frequenzband abzudecken oder um scharfe Resonanzen aufzulösen, führt dies zu langen Rechenzeiten. Um die Rechenzeit signifikant zu verringern und die gesuchten Netzwerkmatrizen dennoch mit geringem Fehler zu berechnen, bietet es sich an, Verfahren der *Modellordnungsreduktion* (MOR) anzuwenden. Im Rahmen dieser Arbeit kommt die *Reduzierte-Basis-Methode* (RBM) [PR06], [RHP07] zum Einsatz, bei der es sich um ein projektionsbasiertes MOR-Verfahren handelt. Bei projektionsbasierten MOR-Verfahren wird das FE-Modell auf den niedrigdimensionalen Spaltenraum einer rechteckigen Matrix projiziert. Das so generierte reduzierte Modell hat geringe Dimension, weist aber die gleiche Struktur wie das zugrunde liegende FE-System auf. Die Idee der RBM ist, die Projektionsmatrix so zu konstruieren, dass deren Spaltenraum dem Raum entspricht, der von Lösungen des FE-Systems an gewissen Frequenzpunkten aufgespannt wird. Zur Wahl dieser Frequenzpunkte existieren selbst-adaptive Verfahren [FHMS11], [HSZ12], [dRM09], [KFK⁺11], die eine auto-

matisierte Erstellung der reduzierten Modelle ermöglichen. Der Vorteil der RBM gegenüber konkurrierenden MOR-Ansätzen, wie zum Beispiel dem *balancierten Abschneiden* [Moo81] oder *momentenabgleichenden Einpunktverfahren* [FF95] [SLL03], ist, dass die RBM auch sehr große FE-Systeme handhaben kann und bei breitbandigen Anwendungen auf vergleichsweise kleine reduzierte Modelle führt [SFDE09]. Eine wichtige Voraussetzung zur Anwendung der RBM ist ein affin in der Frequenz parametrisiertes FE-System. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die Modenformen in den speisenden Wellenleitern frequenzunabhängig, also vom Typ TEM, transversal elektrisch (TE) oder transversal magnetisch (TM) sind. Dazu müssen die Wellenleiter in transversaler Richtung homogenes Materialverhalten aufweisen. Ist das Materialverhalten der speisenden Wellenleiter in transversaler Richtung jedoch inhomogen, können die Verfahren der RBM nicht angewendet werden. Ein einfacher Ansatz um dieses Problem zu umgehen ist, die Modenform über das betrachtete Frequenzband als konstant anzunehmen und mit der Modenform an der Mittenfrequenz zu approximieren [WMSW02]. Dieser Ansatz kommt vor allem bei quasi-TEM-Moden zum Einsatz und liefert für schmale Frequenzbänder gute Ergebnisse. Die numerischen Ergebnisse in Abschnitt 4.3 zeigen jedoch, dass die so berechneten Ergebnisse für breite Frequenzbänder unbrauchbar werden. Der einzige dem Autor bekannte Ansatz, der frequenzabhängige Modenformen berücksichtigt, ist der aus [SCL01], [ABM⁺04]. Dieser Ansatz basiert auf der TFE und somit wirken sich die frequenzabhängigen Modenformen auf die gesamte Systemmatrix aus. Diese wird mittels eines Polynoms approximiert, um eine affine Parametrierung in der Frequenz zu erhalten. Anschließend kommt ein MOR-Verfahren zum Einsatz, das einen inexakten Momentenabgleich durchführt, wodurch die Genauigkeit des Verfahrens nicht garantiert werden kann. Um diese Nachteile zu umgehen, wird in Kapitel 4 ein neues MOR-Verfahren vorgestellt. Dieses basiert auf reduzierten Modellen für die speisenden Wellenleiter, die direkt auf die reduzierten Modelle der Mikrowellenstrukturen gekoppelt werden und somit eine effiziente Berechnung des Übertragungsverhaltens ermöglichen. Die neue MOR-Methode kann dabei nicht nur auf die Z- und die zuvor hergeleitete S-Formulierung angewendet werden, sie ermöglicht es auch beide zu kombinieren und so von den Vorteilen beider Formulierungen zu profitieren. Die Kombination von Z- und S-Formulierung im Rahmen der MOR wurde in [FLDE10] für affin in der Frequenz parametrisierte Systeme vorgestellt und im Rahmen dieser Arbeit auf Strukturen erweitert, die durch frequenzabhängige Modenformen angeregt werden.

Wie bereits angesprochen, ermöglichen die Verfahren zur Simulation im Frequenzbereich lediglich die Analyse von Strukturen mit linearen und zeitinvarianten Materialien. Viele elektromagnetische Systeme bestehen allerdings sowohl aus linearen Teilkomponenten (beispielsweise Übertragungsleitungen, Filter, Antennen) als auch aus nichtlinearen Teilkomponenten (beispielsweise Verstärker, digitale Komponenten). Soll das gesamte System analysiert werden, so muss diese Simulation im Zeitbereich durchgeführt werden. Um dennoch von den Vorteilen der Simulation im Frequenzbereich profitieren zu können, werden Verfahren benötigt, die eine Trans-

formation der Frequenzbereichsdaten in den Zeitbereich ermöglichen. Erste Ansätze [DSH87], [Bra95] basieren auf der Berechnung der Netzwerkmatrizen im Frequenzbereich und deren anschließender Transformation in den Zeitbereich. Im Zeitbereich werden die resultierenden Übertragungsfunktionen dann mit den entsprechenden Eingangssignalen gefaltet. Besonders wenn die Auswertung im Zeitbereich an vielen diskreten Zeitpunkten benötigt wird, führt dieses Vorgehen zu langen Rechenzeiten. Um dies zu umgehen, erstellen spätere Ansätze [GS99], [LA10] eine rationale Interpolation der Übertragungsfunktion, aus der eine niedrigdimensionale Realisierung in Zustandsraum- [Ant05, Kapitel 4.4] bzw. Deskriptordarstellung [LA10] erstellt wird. Der Nachteil dieser Ansätze ist, dass sie keine Möglichkeit bieten die transienten elektromagnetischen Felder ohne großen numerischen Aufwand zu rekonstruieren. Weiterhin ist die Passivität der so erstellten Modelle nicht garantiert [GS01], [DDS09]. Dadurch kann es nötig sein, diese nachträglich einzuprägen [GTU08], [DDS09]. Die Passivität ist deshalb von entscheidender Bedeutung, da ein nicht passives System im Frequenzbereich akausales Verhalten im Zeitbereich aufweisen und somit zu unphysikalischen Ergebnissen führen kann. Um diese Nachteile zu umgehen, wird in Kapitel 5 ein neuartiges Verfahren zur Transformation der Frequenzbereichsdaten in den Zeitbereich vorgestellt. Im Rahmen dieser Arbeit beschränkt sich dieses Verfahren zur Transformation auf Strukturen, die lediglich von TEM-Moden angeregt werden. Im Gegensatz zu den früheren Verfahren basiert die neue Methodik nicht auf der Transformation der Einträge der Netzwerkmatrizen, sondern vielmehr wird das Frequenzbereichsmodell direkt in den Zeitbereich transformiert. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf frequenzabhängigen Materialmodellen. Um die Rechenzeit im Zeitbereich zu reduzieren, werden nicht die FE-Modelle direkt transformiert, sondern es werden die zuvor erstellten reduzierten Modelle verwendet. Aufgrund des projektionsbasierten MOR-Ansatzes ist es mit geringem Aufwand möglich, die transienten Felder zu rekonstruieren. Da die Dimension der reduzierten Modelle gering ist, kann außerdem die Simulation im Zeitbereich effizient erfolgen. Weiterhin wird in Kapitel 5 bzw. Anhang C gezeigt, dass die reduzierten Modelle im Frequenzbereich beweisbar passiv sind, und somit auch die Kausalität der erzeugten Zeitbereichsmodelle gewährleistet ist. Während der Beweis zur Passivität in [ZD10], [DZ12] auf einer Z-Formulierung basiert und eine Restriktion auf Ansatzfunktionen mit nicht verschwindender Rotation erfordert, liegt der hier präsentierten Beweistechnik die bevorzugte S-Formulierung zugrunde. Weiterhin kommt die neue Beweistechnik ohne eine Restriktion der Ansatzfunktionen aus. Die erzeugten Zeitbereichsmodelle liegen in Zustandsraumdarstellung vor und können daher mit den Verfahren aus [AN01], [LM07] in Schaltungssimulatoren realisiert werden. Auf diese Weise können die linearen Komponenten des Gesamtsystems zusammen mit den nichtlinearen Teilkomponenten simuliert werden.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren werden anhand numerischer Beispiele validiert, um die Zuverlässigkeit und Effizienz der Methoden zu demonstrieren.

Kapitel 2

Mathematische Modelle passiver Mikrowellenstrukturen

Gegenstand der Arbeit ist die Charakterisierung passiver Mikrowellenstrukturen auf der Basis elektromagnetischer Felder. In dem aktuellen Kapitel werden die betrachteten Strukturen mit ihren wichtigsten Eigenschaften vorgestellt, sowie allgemeine mathematische Modelle zu deren Beschreibung angegeben. In Abbildung 2.1 ist schematisch eine solche Struktur dargestellt. Das Innere entspricht dem Feldgebiet Ω , enthält verschiedene Materialien und wird im Folgenden als zusammenhängend angenommen. Die elektromagnetischen Felder in Ω genügen den Maxwell-Gleichungen, die in Abschnitt 2.1 vorgestellt werden. Die in Ω enthaltenen Materialien und deren Eigenschaften wie Orts- oder Frequenzabhängigkeit werden in Abschnitt 2.2 spezifiziert. Die Abgrenzung der Struktur gegenüber ihrer Umgebung erfolgt über den Rand $\partial\Omega$. Die auf $\partial\Omega$ zulässigen Randbedingungen werden in Abschnitt 2.3 vorgestellt. Diese dienen unter anderem dazu, Abstrahlung in den freien Raum sowie die Anregung der Struktur über axial homogene Wellenleiter zu modellieren. Zusammen mit den Gleichungen aus Abschnitt 2.1 erlauben die Randbedingungen die Formulierung eines Randwertproblems, welches den Verlauf der elektromagnetischen Felder in Ω beschreibt. Mathematische Modelle zur Beschreibung der Felder in den speisenden, axial homogenen Wellenleitern werden in Abschnitt 2.4 vorgestellt. Die Eigenschaften dieser Felder ermöglichen es, Ein- und Ausgänge zu definieren, die es erlauben, die Mikrowellenstrukturen mittels Netzwerkmatrizen zu charakterisieren. Auf die Repräsentation der Strukturen mittels Netzwerkmatrizen wird in Abschnitt 2.5 eingegangen. Zum Abschluss des Kapitels werden spezielle Funktionsräume vorgestellt, die die Grundlage zur korrekten mathematischen Beschreibung der zuvor eingeführten elektromagnetischen Felder bilden und speziell bei der Diskretisierung der Felder eine entscheidende Rolle spielen.

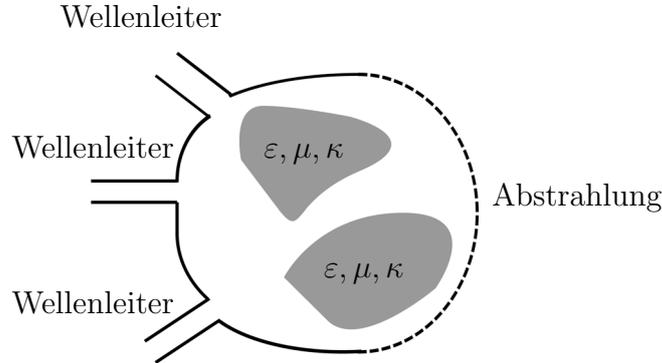


Abbildung 2.1: Beispiel einer Mikrowellenstruktur.

2.1 Grundlegende Gleichungen

Ausgangspunkt für die Beschreibung der elektromagnetischen Felder in Ω sind die Maxwell-Gleichungen in differentieller Form. In Abwesenheit von eingepprägten Volumenströmen und eingepprägten elektrischen Ladungen lauten sie in zeitabhängiger Form

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.1d)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{E} die *elektrische Feldstärke*, \mathbf{H} die *magnetische Erregung*, \mathbf{D} die *elektrische Flussdichte*, \mathbf{B} die *magnetische Flussdichte*, \mathbf{J} die *elektrische Stromdichte* und ρ die *elektrische Raumladungsdichte* am Ort \mathbf{r} zur Zeit t . Um die elektromagnetischen Felder beschreiben zu können, sind neben den Maxwell-Gleichungen noch weitere Gleichungen vonnöten, die die Felder untereinander in Beziehung setzen. Diese *Konstitutivgleichungen* beschreiben den Einfluss der vorhandenen Materialien. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich dabei auf lineare und zeitinvariante Materialien, sodass die Konstitutivgleichungen folgende Form annehmen

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_m(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau. \quad (2.2c)$$

Dabei ist ε_0 die *Permittivität des Vakuums*, μ_0 die *Permeabilität des Vakuums*, $\hat{\chi}_e$ der *elektrische Suszeptibilitätstensor*, $\hat{\chi}_m$ der *magnetische Suszeptibilitätstensor* und $\hat{\kappa}$ der *elektrische Leitfähigkeitstensor*.

Wird von einer harmonischen Zeitabhängigkeit der Form $e^{j\omega t}$ der Felder mit Kreisfrequenz ω ausgegangen, können die Maxwell-Gleichungen, aufgrund der gemachten Einschränkungen bezüglich der Materialeigenschaften, im Frequenzbereich betrachtet werden. Im Frequenzbereich gilt

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.3c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (2.3d)$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ und ρ die Phasoren, die den Zeitbereichsgrößen $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{J}$ und ϱ zugeordnet sind, sowie $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Die Materialbeziehungen (2.13) transformieren sich im Frequenzbereich zu

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \varepsilon_0 \chi_e(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_0 \chi_m(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \kappa(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (2.4c)$$

mit

$$\chi_e(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.5a)$$

$$\chi_m(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}_m(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.5b)$$

$$\kappa(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (2.5c)$$

sowie dem *relativen Permittivitätstensor* $\varepsilon_r = \mathbf{I} + \chi_e$ und dem *relativen Permeabilitätstensor* $\mu_r = \mathbf{I} + \chi_m$. Umgekehrt ergeben sich die Materialparameter im Frequenzbereich aus denen des Zeitbereichs entsprechend

$$\hat{\chi}_e(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.6a)$$

$$\hat{\chi}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.6b)$$

$$\hat{\kappa}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.6c)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im weiteren Verlauf auf die explizite Angabe der Orts- bzw. Frequenzabhängigkeit verzichtet. Mit Einführung der *charakteristischen Impedanz des Freiraums*

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad (2.7)$$

der *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum*

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad (2.8)$$

sowie der *Freiraumwellenzahl*

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0}, \quad (2.9)$$

führen (2.3) zusammen mit (2.4) auf die *vektorielle Helmholtz-Gleichung* für die elektrische Feldstärke:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + j k_0 \eta_0 \kappa \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Die vektorielle Helmholtz-Gleichung bildet die Grundlage für das später zu lösende Randwertproblem und gilt im gesamten Feldgebiet Ω .

2.2 Materialmodelle

In diesem Abschnitt werden die betrachteten Materialien im Feldgebiet Ω näher erläutert und die bisher sehr allgemeine Abhängigkeit der Materialeigenschaften vom Ort \mathbf{r} sowie der Kreisfrequenz ω konkretisiert.

Es wird davon ausgegangen, dass das Feldgebiet Ω aus N_{Mat} disjunkten Teilbereichen besteht, innerhalb derer die Materialeigenschaften räumlich konstant sind:

$$\Omega = \bigoplus_{n=1}^{N_{Mat}} \Omega_n. \quad (2.11)$$

Die Ortsabhängigkeit der Materialbeziehungen lässt sich damit im Frequenzbereich darstellen als

$$\alpha(\mathbf{r}, \omega) = \alpha_j(\omega), \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_j, \quad \alpha \in \{\varepsilon_r, \mu_r, \kappa\}. \quad (2.12a)$$

Eine analoge Beziehung gilt für die Darstellung im Zeitbereich.

Neben der Ortsabhängigkeit wird auch die Frequenzabhängigkeit der Materialparameter eingeschränkt. Zur Vereinfachung der Darstellung werden im Folgenden isotrope Materialien betrachtet. Die Verallgemeinerung auf tensorielle Materialeigenschaften erfolgt, indem die folgenden Überlegungen für jede Komponente einzeln durchgeführt werden. Ziel der Einschränkung der Frequenzabhängigkeit ist, kausales Materialverhalten zu erhalten. Dies wird durch die Forderung erreicht, dass $\hat{\chi}_e(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\chi}_m(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, t)$ für Zeiten $t < 0$ verschwinden. Die Integrale (2.2) laufen dann lediglich bis t :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \hat{\chi}_e(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \int_{-\infty}^t \hat{\chi}_m(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (2.13b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau, \quad (2.13c)$$

wodurch sichergestellt wird, dass die Felder \mathbf{D} , \mathbf{B} und \mathbf{J} von Werten von \mathbf{E} und \mathbf{H} der Vergangenheit und der Gegenwart, nicht jedoch der Zukunft abhängen. Ausgehend von dieser Forderung lassen sich die *Kramers-Kronig-Beziehungen* [RC09, S. 200 ff.] herleiten, die Real- und Imaginärteile der Ausdrücke im Frequenzbereich miteinander verknüpfen. Für ε_r muss gelten

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_r(\omega)) = \varepsilon_\infty - \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(\varepsilon_r(x))}{x - \omega} dx, \quad (2.14a)$$

$$\operatorname{Im}(\varepsilon_r(\omega)) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\varepsilon_r(x)) - \varepsilon_\infty}{x - \omega} dx, \quad (2.14b)$$

wobei *P.V.* für den Hauptwert [Pri03, S. 231] steht und ε_∞ die relative elektrische Permittivität bei sehr hohen Frequenzen bezeichnet. Für die relative magnetische Permeabilität sowie die elektrische Leitfähigkeit gelten analoge Beziehungen. Die Beziehungen (2.14) zwischen Real- und Imaginärteil sind auch als *Hilbert-Transformation* [EMOT54, Kapitel 15] bekannt. Für den Sonderfall, dass $\varepsilon_r = \varepsilon_{r,c}$ reell und konstant über der Frequenz ist, lässt sich leicht zeigen, dass die Beziehungen (2.14) erfüllt sind. Der zugehörige Ausdruck im Zeitbereich $\hat{\varepsilon}_{r,c}$ ergibt sich zu

$$\hat{\varepsilon}_{r,c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{r,c} e^{j\omega t} d\omega = \varepsilon_{r,c} \delta(t), \quad (2.15)$$

wobei $\delta(t)$ den Dirac-Impuls bezeichnet. Damit ergibt sich der erwartete Zusammenhang im Zeitbereich

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \varepsilon_{r,c} \delta(\tau - t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \tau) d\tau = \varepsilon_0 \varepsilon_{r,c} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden drei weitverbreitete Modelle zur Beschreibung der Frequenzabhängigkeit von Materialien berücksichtigt. Diese sind das Debye-, und das Lorentz-Modell, die frequenzabhängige Permittivitäten und Permeabilitäten beschreiben, sowie das Drude-Modell, das frequenzabhängige elektrische Leitfähigkeiten beschreibt. Im Folgenden werden die drei Modelle kurz vorgestellt und ihre physikalische Relevanz motiviert. Weiterhin wird sichergestellt, dass sie die Beziehungen (2.14) erfüllen.

2.2.1 Debye-Modell

Die folgenden Überlegungen werden anhand der elektrischen Permittivität durchgeführt, gelten aber für die magnetische Permeabilität entsprechend. Ziel des Debye-

Modells ist die Beschreibung eines Relaxations-Prozesses in Materialien, die polare Moleküle enthalten [RC09, S. 229 ff.]. Wirkt ein äußeres elektrisches Wechselfeld auf die Moleküle, richten sich diese entlang des Feldes aus. Wird die Frequenz des äußeren Feldes nun erhöht, können sich, aufgrund innerer Reibung, immer weniger Moleküle entlang des Feldes ausrichten. Dadurch nimmt der Realteil der elektrischen Polarisation mit steigender Frequenz ab. Ab einer gewissen Frequenz können keine Moleküle mehr dem angelegten Feld folgen und liefern somit keinen Beitrag mehr zur Polarisation. Dieser beschriebene Mechanismus wird über eine frequenzabhängige Permittivität nach dem Debye-Modell berücksichtigt. In Anwesenheit eines einzelnen Debye-Pols ergibt sich die Darstellung

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + j\omega\tau_e}, \quad (2.17)$$

Dabei bezeichnet ε_∞ die relative Permittivität bei sehr hohen Frequenzen, $\Delta\varepsilon$ bezeichnet den Abfall der relativen Permittivität zufolge des Debye-Pols, und τ_e bezeichnet die Debye-Relaxationszeit. Alle drei beschriebenen Größen sind dabei aus physikalischen Gründen positiv. Um zu überprüfen, dass die Kramers-Kronig-Beziehungen erfüllt sind, wird (2.17) in Real- und Imaginärteil aufgespalten:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) + j\varepsilon''_r(\omega), \quad (2.18)$$

mit

$$\varepsilon'_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{1 + \omega^2\tau_e^2}, \quad (2.19a)$$

$$\varepsilon''_r(\omega) = -\frac{\Delta\varepsilon\omega\tau_e}{1 + \omega^2\tau_e^2}. \quad (2.19b)$$

Nach [EMOT54, S. 245] entsprechen die Integrale aus (2.14) mit den Werten für $\varepsilon'_r(\omega)$ und $\varepsilon''_r(\omega)$ aus (2.19) einem Hilbert-Transformationspaar, womit sichergestellt ist, dass die Materialbeziehung (2.17) kausal ist. In Abbildung 2.2 sind beispielhaft die Verläufe des Real- bzw. des Imaginärteils von $\varepsilon_r(\omega)$ für $\varepsilon_\infty = 2.9$, $\Delta\varepsilon = 3$ und $\tau_e = 2.3 \cdot 10^{-9}$ s dargestellt. Wird die elektrische Permittivität (2.17) in den Zeitbereich transformiert, ergibt sich

$$\hat{\varepsilon}_r(t) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon}{\tau_e} e^{-\frac{t}{\tau_e}} \theta(t), \quad (2.20)$$

wobei $\theta(t)$ die Sprungfunktion darstellt. Das Auftreten der Sprungfunktion an dieser Stelle unterstreicht die Kausalität der Funktion, da somit $\hat{\varepsilon}_r(t)$ offensichtlich für $t < 0$ verschwindet.

2.2.2 Lorentz-Modell

Wie das Debye-Modell findet es zur Beschreibung dielektrischer und magnetischer Stoffe Anwendung. Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf das Verhalten der Permittivität, gelten aber analog auch für die Permeabilität. Physikalische

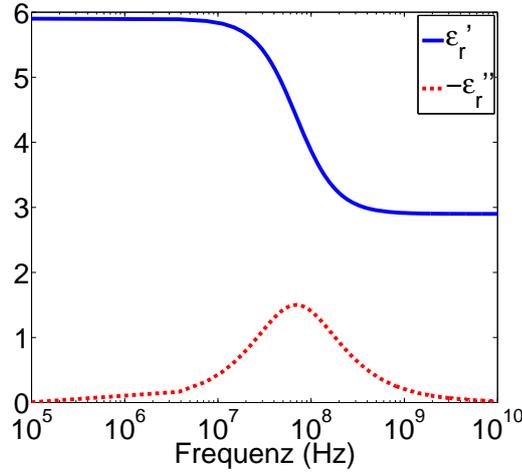


Abbildung 2.2: Verlauf der elektrischen Permittivität nach dem Debye-Modell über der Frequenz.

Grundlage des Lorentz-Modells sind Schwingungen von Elektronen, die sich in einem elektrischen Wechselfeld befinden [RC09, S. 224 ff.]. Das Feld übt Kräfte auf die Elektronen aus, die sich daraufhin von ihrem Atomkern entfernen. Die so entstehende Rückstellkraft zusammen mit Dissipationsprozessen führt zu einer gedämpften Schwingung der Elektronen. Auf makroskopischer Ebene wird dies durch folgende Frequenzabhängigkeit der elektrischen Permittivität berücksichtigt:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2}{\omega_e^2 + 2j\omega\delta_e - \omega^2}. \quad (2.21)$$

Dabei bezeichnen ω_e die Resonanzkreisfrequenz der Schwingung, δ_e die Dämpfungskonstante, ε_∞ die Permittivität bei hohen Frequenzen und $\Delta\varepsilon$ die Änderung der Permittivität durch den Lorentz-Pol. Diese Größen sind alle positiv. Die Aufspaltung von $\varepsilon_r(\omega)$ in Real- und Imaginärteil entsprechend (2.18) führt zu

$$\varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2(\omega_e^2 - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_e^2}, \quad (2.22a)$$

$$\varepsilon_r''(\omega) = -2\frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2\omega\delta_e}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_e^2}. \quad (2.22b)$$

Durch Auswertung der Integrale (2.14) unter Verwendung der Werte (2.22) lässt sich überprüfen, dass Real- und Imaginärteil nach (2.22) ein Hilbert-Transformationspaar bilden und somit den Kramers-Kronig Bedingungen genügen. Die entsprechende Rechnung findet sich in Anhang A. Der Verlauf des Real- und Imaginärteils der Permittivität nach dem Lorentz-Modell ist in Abbildung 2.3 über der Frequenz für folgende Parameter dargestellt:

$$\varepsilon_\infty = 2.21, \quad \Delta\varepsilon = 0.54, \quad \omega_e = 2\pi \cdot 10^9 \text{ Hz}, \quad \delta_e = 0.2\omega_e. \quad (2.23)$$

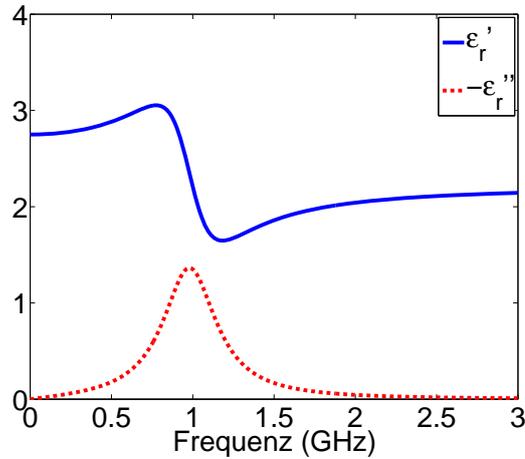


Abbildung 2.3: Verlauf der elektrischen Permittivität nach dem Lorentz-Modell über der Frequenz.

Im Zeitbereich ergibt sich die Darstellung

$$\hat{\varepsilon}_r(t) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2}{\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} t\right) e^{-\delta_e t} \theta(t). \quad (2.24)$$

Auch hier unterstreicht die Sprungfunktion die Kausalität des Materialmodells.

2.2.3 Drude-Modell

Im Gegensatz zu den vorherigen beiden Modellen kommt das Drude-Modell zum Einsatz, um eine frequenzabhängige elektrische Leitfähigkeit zu modellieren. Ähnlich wie das Debye-Modell für die Permittivität beschreibt das Drude-Modell eine Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit für große Frequenzen. Physikalisch lässt sich diese Abnahme auf Zusammenstöße der Elektronen mit Gitterschwingungen, Gitterfehlstellen und Gitterverunreinigungen erklären [Jac01, S. 312]. Die durch das Drude-Modell beschriebene Frequenzabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit nimmt folgende Darstellung an:

$$\kappa(\omega) = \frac{\kappa_0}{1 + j\omega\tau_c}. \quad (2.25)$$

Dabei bezeichnen κ_0 die elektrische Leitfähigkeit im statischen Grenzfall und τ_c die Kollisionszeitkonstante. Zur Überprüfung der Kramers-Kronig Bedingung, wird $\kappa(\omega)$ die Leitfähigkeit ebenfalls in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Es gilt

$$\kappa(\omega) = \kappa'(\omega) + j\kappa''(\omega), \quad (2.26a)$$

$$\kappa'(\omega) = \frac{\kappa_0}{1 + \omega^2\tau_c^2}, \quad (2.26b)$$

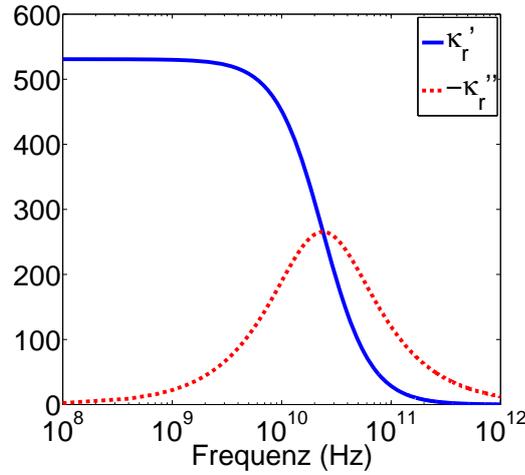


Abbildung 2.4: Verlauf der elektrischen Leitfähigkeit nach dem Drude-Modell über der Frequenz.

$$\kappa''(\omega) = -\frac{\kappa_0 \omega \tau_c}{1 + \omega^2 \tau_c^2}. \quad (2.26c)$$

Dass es sich bei Real- und Imaginärteil von κ um ein Hilbert-Transformationspaar handelt, folgt aus [EMOT54, S. 245]. Damit ist sichergestellt, dass auch das Drude-Modell die Kramers-Kronig Bedingungen erfüllt und ein kausales Materialmodell darstellt. Der Verlauf von κ' und κ'' ist in Abbildung 2.4 für [SE06]

$$\tau_c = \frac{0.2\text{mm}}{0.1c_0}, \kappa_0 = \left(\frac{2c_0}{0.2\text{mm}}\right)^2 \varepsilon_0 \tau_c \quad (2.27)$$

dargestellt. Wird (2.25) in den Zeitbereich transformiert, ergibt sich

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{\kappa_0}{\tau_c} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \theta(t). \quad (2.28)$$

Die eingeführten Materialmodelle beinhalten jeweils einen einzigen Pol bzw. eine einzige Resonanz. Um im weiteren Verlauf der Arbeit auch allgemeinere Materialien mit mehreren Polen bzw. Resonanzen oder Kombinationen von beiden behandeln zu können, wird die allgemeinste Form der elektrischen Permittivität, der magnetischen Permeabilität bzw. der elektrischen Leitfähigkeit für das n -te Material folgendermaßen angenommen:

$$\varepsilon_{r,n} = \varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + j\omega \tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2j\omega \delta_{e,n,i_L} - \omega^2}, \quad (2.29a)$$

$$\mu_{r,n} = \mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D}}{1 + j\omega \tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega \delta_{m,n,j_L} - \omega^2}, \quad (2.29b)$$

$$\kappa_n = \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + j\omega\tau_{c,n,i_C}}. \quad (2.29c)$$

Dabei stellen die Terme G_{D,n,i_D} , G_{L,n,i_L} , F_{D,n,i_D} , F_{L,n,i_L} , sowie G_{c,n,i_C} zusätzliche positive Skalierungsfaktoren dar, während $N_{eD,n}$ und $N_{mD,n}$ die Anzahl der elektrischen bzw. magnetischen Debye-Pole, $N_{eL,n}$ und $N_{mL,n}$ die Anzahl der elektrischen bzw. magnetischen Lorentz-Resonanzen und $N_{Dr,n}$ die Anzahl der Drude-Pole des n -te Materials bezeichnen.

2.3 Randbedingungen

Damit die vektorielle Helmholtz-Gleichung (2.10) mit den Materialbeziehungen nach (2.29) eine eindeutige Lösung besitzt, müssen zusätzlich Randbedingungen auf $\partial\Omega$ angegeben werden. In [ZC06, S. 7 f.] wird gezeigt, dass die hier verwendeten Randbedingungen zu einer eindeutigen Lösung führen. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass sich $\partial\Omega$ aus folgenden disjunkten Teilrändern zusammensetzt:

$$\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_R \cup \Gamma_P. \quad (2.30)$$

Auf den Teilrändern Γ_E und Γ_H wird die tangentielle Komponente von \mathbf{E} bzw. \mathbf{H} zu Null vorgegeben. Da die vektorielle Helmholtz-Gleichung in der elektrischen Feldstärke formuliert wird, entsprechen diese homogenen Dirichletschen bzw. homogenen Neumannschen Randbedingungen:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.31)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{n}} \times [(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (2.32)$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ den aus dem Feldgebiet weisenden Normalenvektor bezeichnet. Die Randbedingungen (2.31) und (2.32) entsprechen dem Übergang zu einem perfekten elektrischen Leiter bzw. zu einem perfekten magnetischen Leiter. Gleichung (2.31) wird dazu verwendet, die Oberfläche von sehr guten elektrischen Leitern zu modellieren, in denen die Eindringtiefe gegen Null geht. Im Gegensatz dazu erlaubt (2.32) es, die Oberfläche zu hochpermeablen magnetischen Materialien zu modellieren. Außerdem kommt (2.32) häufig zur Modellierung von Symmetrieebene zum Einsatz.

Der Teilrand Γ_R modelliert Abstrahlung in den freien Raum. Da es nicht möglich ist, den unendlichen Raum zu diskretisieren, wird eine Randbedingung benötigt, die das Feldgebiet begrenzt, dabei aber möglichst geringe unphysikalische Reflexionen verursacht. Eine Möglichkeit ist die Kopplung zu Integralgleichungsverfahren [LVZL05]. Diese sind zwar perfekt reflexionsfrei, führen aber auf eine voll besetzte Teilmatrix in einer ansonsten schwach besetzten Systemmatrix. Da damit der numerische Aufwand stark ansteigt, wird in dieser Arbeit auf *absorbierende Randbedingungen* erster

Ordnung zurückgegriffen [Pet88], [WK89]. Es gilt

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = -\hat{\mathbf{n}} \times \eta \frac{j}{\omega \mu_0} \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad \text{auf } \Gamma_R, \quad (2.33)$$

mit

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}. \quad (2.34)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird angenommen, dass die absorbierende Randbedingung an frequenzunabhängiges Material angrenzt, und somit η in (2.33) ebenfalls unabhängig von der Frequenz ist. Dies kann dadurch motiviert werden, dass mit (2.33) Abstrahlung in den Freiraum modelliert wird und Γ_R daher in der Regel an Luft angrenzt. Mathematisch gesehen entspricht (2.33) einer homogenen Robin'schen Randbedingung. Im Gegensatz zur Kopplung zu Integralgleichungsverfahren hat (2.33) den Vorteil eine lokale Randbedingung darzustellen, wodurch die schwache Besetzungsstruktur der Systemmatrizen erhalten bleibt. Der Preis dafür ist jedoch, dass, je nach Winkel der einfallenden Welle, vergleichsweise hohe Reflexionen auftreten können [Jin02, S. 351].

Die Speisung der betrachteten Mikrowellenstrukturen erfolgt über axial homogene Wellenleiter, die am Teilrand Γ_P in die Struktur münden. Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass der Rand Γ_P in N_P disjunkte Teilränder $\Gamma_{P,j}$ zerfällt,

$$\Gamma_P = \bigoplus_{j=1}^{N_P} \Gamma_{P,j}, \quad (2.35)$$

die jeweils die Mündung eines separaten Wellenleiters darstellen. Die Anregung wird über das Einprägen der tangentialen Komponenten der magnetischen Erregung $\overline{\mathbf{H}}_T$ an den Querschnitten der Wellenleiter realisiert:

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_T \quad \text{auf } \Gamma_P, \quad (2.36)$$

was einer inhomogenen Neumannschen Randbedingung entspricht.

Zusammenfassend ergibt sich damit das folgende Randwertproblem für die elektrische Feldstärke:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \kappa \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (2.37a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.37b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}}] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (2.37c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) + \hat{\mathbf{n}} \times \eta \frac{j}{\omega \mu_0} \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_R, \quad (2.37d)$$

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 \overline{\mathbf{H}}_T \quad \text{auf } \Gamma_P. \quad (2.37e)$$

2.4 Eigenschaften axial homogener Wellenleiter

Um die anregenden Felder $\overline{\mathbf{H}}_T$ weiter zu spezifizieren, werden in diesem Abschnitt die Eigenschaften der speisenden Wellenleiter näher analysiert. Axial homogene Wellenleiter zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Geometrie sowie die Eigenschaften der enthaltenen Materialien entlang einer Vorzugsrichtung konstant sind. O.B.d.A. wird diese Vorzugsrichtung im weiteren Verlauf der Arbeit mit der $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung identifiziert. Es wird angenommen, dass die Wellenleiter von perfekt elektrischen und perfekt magnetischen Leitern umschlossen sind, und somit nur die Randbedingungen (2.31) und (2.32) Anwendung finden. Offene Wellenleiter, die Abstrahlung in den Freiraum zulassen, werden im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt. Außerdem soll der perfekt elektrisch leitende Rand nicht verschwinden: $\Gamma_E \neq \emptyset$. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass in den Materialtensoren die transversale und axiale Richtung voneinander entkoppelt sind und die Tensoren somit folgende Darstellung besitzen:

$$\alpha = \begin{bmatrix} [\alpha_t] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha_z \end{bmatrix}, \quad \alpha \in [\varepsilon_r, \mu_r, \kappa], \quad (2.38)$$

wobei $[\alpha_t]$ den zweidimensionalen Materialtensor in der transversalen Ebene darstellt, während α_z das jeweilige skalarwertige Materialverhalten in axiale Richtung beschreibt. Da sich die Geometrie entlang der z -Achse nicht ändert, lässt sich die z -Abhängigkeit der Felder folgendermaßen angeben [Poz11, S. 97]:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_t(x, y) + \hat{\mathbf{e}}_z V_z(x, y))e^{-\gamma z} \quad \text{mit } \mathbf{V} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{J}\}. \quad (2.39)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{V}_t die Komponenten in transversaler Richtung, V_z die Komponente von \mathbf{V} in $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung und γ den Ausbreitungskoeffizienten. Einsetzen der Aufspaltung (2.39) in die Maxwell-Gleichungen (2.3) zusammen mit den Randbedingungen (2.31) und (2.32) führt auf ein zweidimensionales, frequenzabhängiges Eigenwertproblem. Für Details zur Aufstellung des Eigenwertproblems und dessen numerische Lösung sei auf Kapitel 3 verwiesen. An dieser Stelle sollen lediglich eine allgemeine Form der Lösungen sowie deren wichtigste Eigenschaften angegeben werden. Die Lösungen des Eigenwertproblems $(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{h}}_k, \gamma_k)$ werden als *Eigenmoden* des Wellenleiters bezeichnet, wobei $\hat{\mathbf{e}}_k$ und $\hat{\mathbf{h}}_k$ die transversalen Komponenten des modalen elektrischen Feldes bzw. der modalen magnetischen Erregung bezeichnen. Der zugehörige Eigenwert γ_k entspricht dem Ausbreitungskoeffizienten des k -ten Modes. Die hier betrachteten Wellenleiter besitzen unendlich viele Eigenmoden mit einem diskreten Eigenspektrum [Col91, S. 417 f.]. Die Eigenmoden $(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{h}}_k, \gamma_k)$ bilden ein vollständiges System von Funktionen. Außerhalb von Anregungsgebieten kann jede transversale elektrische und magnetische Feldverteilung im Inneren des Wellenleiters als Superposition unendlich vieler Eigenmoden dargestellt werden [Col91, S. 426 f.]:

$$\mathbf{E}_t = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \hat{\mathbf{e}}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^{\infty} i_k \hat{\mathbf{h}}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) \hat{\mathbf{h}}_k. \quad (2.40b)$$

Die komplexen Amplituden der jeweiligen Moden können dabei entweder über modale Spannungen u_k und modale Ströme i_k oder über die Amplituden einfallender und auslaufender Wellen a_k bzw. b_k ausgedrückt werden, wobei folgende Umrechnung gilt:

$$u_k = a_k + b_k, \quad (2.41a)$$

$$i_k = a_k - b_k. \quad (2.41b)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der modalen Felder ist die verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation. Um diese mathematisch beschreiben zu können, wird zunächst das Funktional

$$b(\mathbf{H}_t, \mathbf{E}_t) = \int_{\Gamma_P} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \, d\Gamma = - \int_{\Gamma_P} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (2.42)$$

eingeführt. Das negative Vorzeichen des zweiten Integrals rührt daher, dass vorlaufende Wellen in positive $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Richtung angenommen wurden, der Normalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ allerdings aus dem Feldgebiet heraus weist. Mit (2.42) lassen sich die modalen Felder so normieren, dass gilt [Col91, S. 416 ff.]:

$$b(\hat{\mathbf{h}}_k, \hat{\mathbf{e}}_l) = \delta_{k,l}, \quad (2.43)$$

wobei $\delta_{k,l}$ das Kronecker Symbol bezeichnet. Diese verallgemeinerte Orthogonalität der Eigenmoden ermöglicht es, die Amplituden einzelner Moden aus beliebigen transversalen Feldverteilungen zu extrahieren:

$$u_k = b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}_t), \quad (2.44a)$$

$$i_k = b(\mathbf{H}_t, \hat{\mathbf{e}}_k). \quad (2.44b)$$

2.5 Beschreibung mittels Netzwerkmatrizen

Nach (2.43) sind die Eigenmoden der Wellenleiter voneinander entkoppelt. Aus diesem Grund kann jeder Eigenmode auf Schaltungsebene als unabhängige Übertragungsleitung angesehen und als verallgemeinertes Tor bei der Beschreibung mittels Netzwerkmatrizen aufgefasst werden [Poz11, Kapitel 4]. Dazu müssen die betrachteten Moden im i -ten Wellenleitern auf eine endliche Anzahl M_i begrenzt werden. Dies ist damit zu rechtfertigen, dass bei endlicher Frequenz nur endliche viele Eigenmoden des Wellenleiters ausbreitungsfähig oder schwach gedämpft sind. Die restlichen Eigenmoden sind stark gedämpft und ihre Felder nehmen betragsmäßig entlang der Wellenleiterachse exponentiell ab. Werden die Querschnitte der Wellenleiter

so gewählt, dass diese ausreichend weit von auftretenden Diskontinuitäten entfernt sind, so können die Felder aller stark gedämpften Eigenmoden als abgeklungen angenommen werden. Somit müssen lediglich die ausbreitungsfähigen und die schwach gedämpften Eigenmoden berücksichtigt werden.

Die Anzahl M der anregenden Moden ist dann

$$M = \sum_{i=1}^{N_P} M_i. \quad (2.45)$$

Im Folgenden werden zwei Netzwerkmatrizen zur Beschreibung von Mikrowellenstrukturen unterschieden: zum einen die Impedanzmatrix \mathbf{Z} , zum anderen die Streumatrix \mathbf{S} . Um die Matrizen einführen zu können, werden zunächst folgende Vektoren definiert:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix}^T, \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_M \end{bmatrix}^T, \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_M \end{bmatrix}^T, \quad (2.46c)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_M \end{bmatrix}^T, \quad (2.46d)$$

wobei \mathbf{v}^T den zu \mathbf{v} transponierten Vektor darstellt. Die Impedanzmatrix ist die $M \times M$ Matrix, die den Vektor \mathbf{u} der modalen Spannungen mit dem Vektor \mathbf{i} der modalen Ströme in Beziehung setzt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i}. \quad (2.47)$$

Ihre Einträge berechnen sich gemäß

$$Z_{k,l} = \left. \frac{u_k}{i_l} \right|_{i_p=0, \forall p \neq l}. \quad (2.48)$$

Das Vorgehen zur Berechnung des Eintrags $Z_{k,l}$ der Impedanzmatrix einer passiven Mikrowellenstruktur ist folgendermaßen: Zunächst werden die Eigenmoden $(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{h}}_k, \gamma_k)$ und $(\hat{\mathbf{e}}_l, \hat{\mathbf{h}}_l, \gamma_l)$ in den anregenden Wellenleitern berechnet. Im Anschluss daran wird das Randwertproblem (2.37) mit Anregung $\overline{\mathbf{H}}_T = i_l \hat{\mathbf{h}}_l, i_l = 1$ nach der elektrischen Feldstärke gelöst. Daraus kann mit Hilfe von (2.44a) u_k berechnet werden, woraus $Z_{k,l}$ direkt folgt.

Alternativ zur Impedanzmatrix kann das modale Mehrtor auch über die Streumatrix \mathbf{S} beschrieben werden. Diese setzt die Amplituden von einfallenden und reflektierten Wellen in Beziehung:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}. \quad (2.49)$$

Die Einträge $S_{k,l}$ ergeben sich zu

$$S_{k,l} = \left. \frac{b_k}{a_l} \right|_{a_p=0, \forall p \neq l}. \quad (2.50)$$

Zur Berechnung von $S_{k,l}$ werden zunächst wieder die Eigenwertprobleme der Wellenleiter gelöst, um $(\hat{\mathbf{e}}_k, \hat{\mathbf{h}}_k, \gamma_k)$ sowie $(\hat{\mathbf{e}}_l, \hat{\mathbf{h}}_l, \gamma_l)$ zu erhalten. Um analog zur Berechnung der Impedanzmatrix vorgehen zu können und mit einer einzelnen vorlaufenden Welle der Amplitude $a_l = 1$ anregen zu können, muss die Randbedingung auf Γ_P (2.37e) umgeformt werden:

$$\mu_r^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^M (\delta_{l,k} - b_k) \hat{\mathbf{h}}_k \quad (2.51a)$$

$$= -jk_0\eta_0 \left(\hat{\mathbf{h}}_l - \sum_{k=1}^M b_k \hat{\mathbf{h}}_k \right) \quad (2.51b)$$

$$= -jk_0\eta_0 \left(2\hat{\mathbf{h}}_l - \sum_{k=1}^M (\delta_{k,l} + b_k) \hat{\mathbf{h}}_k \right) \quad (2.51c)$$

$$= -jk_0\eta_0 \left(2\hat{\mathbf{h}}_l - \sum_{k=1}^M u_k \hat{\mathbf{h}}_k \right). \quad (2.51d)$$

Umstellung der obigen Gleichung führt auf die gesuchte Randbedingung

$$\mu_r^{-1}(\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} - jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^M b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}) \hat{\mathbf{h}}_k = -2jk_0\eta_0 \hat{\mathbf{h}}_l a_l, \quad (2.52)$$

wobei es sich um eine inhomogene Robinsche Randbedingung handelt. Die Summe auf der linken Seite von (2.52) stellt eine Dämpfung dar, die dafür sorgt, dass die Struktur an den speisenden Wellenleitern für die betrachteten M Moden reflexionsfrei abgeschlossen sind. Damit wird die Nebenbedingung aus (2.50) sichergestellt. Das zu lösende Randwertproblem ist in diesem Fall also (2.37) mit (2.52) statt (2.37e). Aus der berechneten elektrischen Feldstärke wird das gesuchte b_k gemäß

$$b_k = u_k - a_k = b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}) - \delta_{l,k}, \quad (2.53)$$

berechnet.

Da die einfallenden und auslaufenden Wellen a_k, b_k nach (2.41) in direktem Zusammenhang mit den modalen Spannungen und Strömen u_k, i_k stehen, sind auch die resultierenden Netzwerkmatrizen \mathbf{Z} und \mathbf{S} nicht unabhängig voneinander. Vielmehr können diese entsprechend [Poz11, S. 181]

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{Z} - \mathbf{I}), \quad (2.54a)$$

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{I} + \mathbf{S}) (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1} \quad (2.54b)$$

ineinander überführt werden.

2.6 Funktionenräume

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen zur korrekten Darstellung der elektromagnetischen Felder vorgestellt. Dazu werden passende Funktionenräume eingeführt, in denen die Felder liegen, und die eine entscheidende Rolle bei deren Diskretisierung spielen. Den Anfang bildet der Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen,

$$L^2(\Omega) := \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N} \mid \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{L^2} < \infty\}, \quad (2.55)$$

wobei die Norm $\|\cdot\|_{L^2}$ durch das Skalarprodukt

$$(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}))_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} \mathbf{f}_2^*(\mathbf{x}) \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (2.56)$$

induziert wird. Dabei bezeichnet \mathbf{f}_2^* den zu \mathbf{f}_2 transponierten und konjugiert komplexen Vektor. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf eine Unterscheidung zwischen Funktionenräumen, die vektorielle Elemente enthalten und Funktionenräumen, die skalare Elemente enthalten, verzichtet. Für den Raum der quadratisch integrierbaren skalaren Funktionen wird demnach ebenfalls das Symbol $L^2(\Omega)$ verwendet.

Mithilfe des $L^2(\Omega)$ können die Funktionenräume eingeführt werden, die zur Beschreibung der elektromagnetischen Felder benötigt werden:

$$\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{\Phi}) := \{\phi \in L^2(\Omega) \mid \nabla \phi \in L^2(\Omega) \wedge \phi = 0 \text{ auf } \Gamma_{\Phi}\}, \quad (2.57a)$$

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) := \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \wedge \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_E\}, \quad (2.57b)$$

$$\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_B) := \{\mathbf{B} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{B} \in L^2(\Omega) \wedge \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \text{ auf } \Gamma_B\}, \quad (2.57c)$$

$$\mathcal{H}^0(\Omega) := \{\rho \in L^2(\Omega)\}. \quad (2.57d)$$

Durch Einführung angepasster Skalarprodukte nach

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_{\Phi})} := (\phi_1, \phi_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \phi_1, \nabla \phi_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.58a)$$

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)} := (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.58b)$$

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_B)} := (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot \mathbf{B}_1, \nabla \cdot \mathbf{B}_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.58c)$$

$$(\rho_1, \rho_2)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} := (\rho_1, \rho_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (2.58d)$$

werden die Räume (2.57) zu Hilberträumen.

Neben den Räumen an sich sind auch deren Beziehungen untereinander von großer Bedeutung für die korrekte Modellierung elektromagnetischer Felder. Die folgenden Darstellungen orientieren sich an [GK04, Kapitel 1]. Diese Beziehungen hängen

mit den Differentialoperatoren und deren Nullräumen zusammen. So bildet der Gradienten-Operator eine Funktion des $\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$ in den $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ ab:

$$\nabla V \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad \forall V \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E). \quad (2.59)$$

Der Nullraum des Gradienten-Operators ist von der Topologie des Feldgebietes Ω abhängig. Ist $\Gamma_E = \emptyset$, wird der Nullraum von den konstanten Funktionen gebildet:

$$\ker\{\text{grad}\} = \{\phi \in L^2(\Omega) \mid \phi = \text{const}\}. \quad (2.60)$$

Gilt andererseits $\Gamma_E \neq \emptyset$, ist der Nullraum des Gradienten die leere Menge. Wird der Rotationsoperator auf Funktionen des $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ angewendet, führt dies auf eine Funktion des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$:

$$\nabla \times \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (2.61)$$

Der Nullraum des Rotationsoperators setzt sich aus zwei Unterräumen zusammen. Der erste Unterraum ist von der Topologie des Feldgebietes unabhängig und besteht aus den Gradienten der Funktionen des $\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$. Der zweite Unterraum wiederum hängt von der Topologie ab und wird als *erste relative de Rham-Kohomologiegruppe* $H^1(\Omega, \Gamma_E)$ bezeichnet:

$$\ker\{\text{rot}\} = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{E} = \nabla\phi, \phi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)\} \oplus H^1(\Omega, \Gamma_E). \quad (2.62)$$

Bei $H^1(\Omega, \Gamma_E)$ handelt es sich um einen Quotientenraum, dessen Dimension über die *erste relative Betti-Zahl* β_1 gegeben ist. Diese entspricht der Anzahl der Schleifen, die nicht auf einen Punkt im Feldgebiet kontrahiert werden können. Bildung der Divergenz einer Funktion des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ wiederum führt auf eine Funktion des $\mathcal{H}^0(\Omega)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \in \mathcal{H}^0(\Omega) \quad \forall \mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E). \quad (2.63)$$

Ähnlich wie der Rotationsoperator, besitzt der Divergenzoperator einen Nullraum, der in einen von der Topologie abhängigen und einen von der Topologie unabhängigen Unterraum aufgespalten werden kann:

$$\ker\{\text{div}\} = \{\mathbf{B} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}, \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)\} \oplus H^2(\Omega, \Gamma_E). \quad (2.64)$$

Dabei ist $H^2(\Omega, \Gamma_E)$ die *zweite relative de Rham-Kohomologiegruppe*. Die Dimension von $H^2(\Omega, \Gamma_E)$ heißt *zweite relative Betti-Zahl* β_2 und entspricht der Anzahl der Kavitäten in $\Omega \setminus \Gamma_E$, die nicht selbst zu $\Omega \setminus \Gamma_E$ gehören. Neben den Nullräumen der Differentialoperatoren hängt auch die Zusammensetzung des $\mathcal{H}^0(\Omega)$ von der Topologie des Feldgebietes ab. Nimmt der Rand Γ_E nicht den gesamten Rand des Feldgebietes ein, gilt also $\partial\Omega \neq \Gamma_E$, so wird $\mathcal{H}^0(\Omega)$ lediglich von den Divergenzen der Funktionen des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ gebildet. Gilt andererseits $\Gamma_E = \partial\Omega$, müssen zusätzlich noch die Funktionen mit nicht verschwindendem Mittelwert zu $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ hinzugefügt werden [Bos88]. Dies kann folgendermaßen motiviert werden: Für Felder $\mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ gilt

$$\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E. \quad (2.65)$$

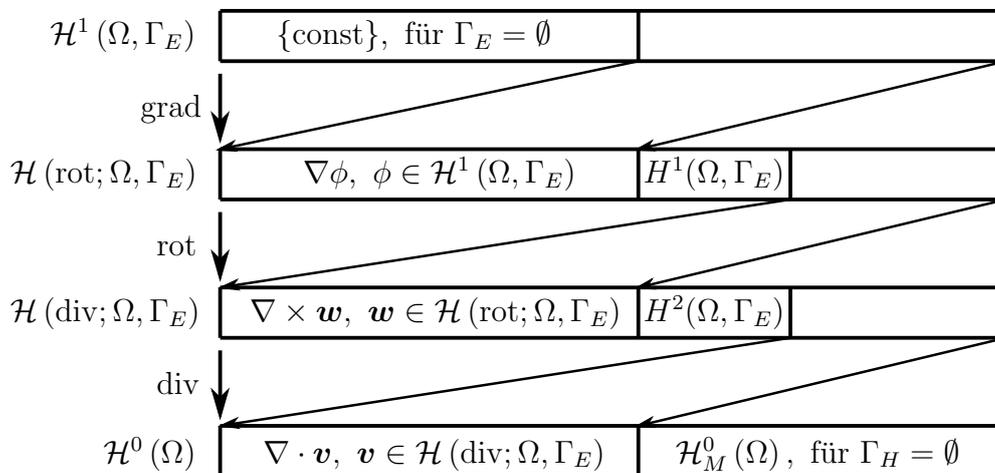


Abbildung 2.5: Der de Rham-Komplex.

Ist nun $\partial\Omega = \Gamma_E$, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{B} \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \oint_{\Gamma_E} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \stackrel{(2.65)}{=} 0. \quad (2.66)$$

Somit können Funktionen, deren Integral über Ω nicht verschwindet, nicht mittels der Divergenz einer Funktion des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$ ausgedrückt werden. Mit der Definition

$$\mathcal{H}_M^0(\Omega) := \left\{ \rho \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} \rho \, d\Omega \neq 0 \right\}, \quad (2.67)$$

lässt sich der $\mathcal{H}^0(\Omega)$ darstellen als [Bos88]

$$\mathcal{H}^0(\Omega) = \begin{cases} \{\nabla \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)\} & \text{für } \Gamma_H \neq \emptyset, \\ \{\nabla \cdot \mathbf{B}, \mathbf{B} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)\} \oplus \mathcal{H}_M^0(\Omega) & \text{für } \Gamma_H = \emptyset. \end{cases} \quad (2.68)$$

Die vorgestellten Funktionenräume bilden den *de Rham-Komplex* [Bos88], der in Abbildung 2.5 dargestellt ist und der die Beziehungen der Räume untereinander noch einmal zusammenfasst.

Den Funktionenräumen (2.57) kommt in der Beschreibung elektromagnetischer Felder deshalb eine so große Bedeutung zu, weil die Felder in diesen Räumen liegen. So ist das elektrische Skalarpotential in Abwesenheit elektrischer Doppelschichten eine stetige Funktion des Ortes [Jac01, S. 41] und somit eine Funktion von $\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_E)$. Die quadratische Integrierbarkeit des Gradienten stellt dabei die Stetigkeit sicher. Im Gegensatz dazu sind die tangentialen Komponenten der elektrischen Feldstärke sowie der magnetischen Erregung stetig, falls keine magnetischen oder elektrischen Flächenströme vorhanden sind [Poz11, S. 14]. Damit sind \mathbf{E} und \mathbf{H} Funktionen

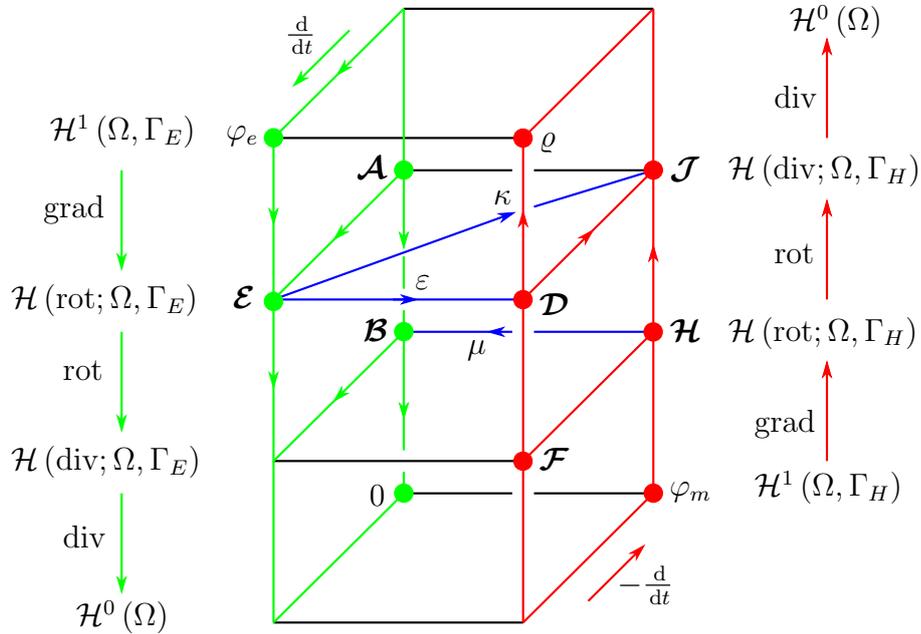


Abbildung 2.6: Struktur der Maxwell-Gleichungen.

des $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$, da die quadratische Integrierbarkeit der Rotation, die Stetigkeit der tangentialen Komponente gewährleistet [BBF13, S. 57]. Ähnlich verhält es sich mit der elektrischen und der magnetischen Flussdichte sowie der elektrischen Stromdichte. Diese weisen in Abwesenheit elektrischer und magnetischer Flächenladungen Stetigkeit in der normalen Komponente [Poz11, S. 14] auf und sind somit Funktionen des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_E)$. Analog zu den ersten beiden Fällen garantiert die quadratische Integrierbarkeit der Divergenz die Stetigkeit der normalen Komponenten [BBF13, S. 57]. Anders verhält es sich mit der elektrischen Ladung. Sie weist keinerlei Stetigkeit auf und liegt daher in $\mathcal{H}^0(\Omega)$.

Nach Abbildung 2.5 sind die einzelnen Funktionenräume lediglich über die Differentialoperatoren, nicht jedoch über die Materialbeziehungen miteinander verknüpft. Wird dies bei der Betrachtung der Maxwell-Gleichungen berücksichtigt, so wird deutlich, dass die elektromagnetischen Felder zwei zueinander duale Komplexe der Form von Abbildung 2.5 bilden, die über die Materialbeziehungen miteinander verknüpft sind [Bos98, S. 134]. Die Struktur der Maxwell-Gleichungen im Zeitbereich ist in Abbildung 2.6 graphisch dargestellt. Neben den bereits eingeführten Feldern sind darin zusätzlich das elektrische bzw. magnetische Skalarpotential φ_e und φ_m sowie das magnetische bzw. elektrische Vektorpotential \mathcal{A} und \mathcal{F} zu sehen. Diese sind wie folgt definiert:

$$\nabla \times \mathcal{A} = \mathcal{B}, \tag{2.69a}$$

$$-\nabla\varphi_e = \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{A}}, \quad (2.69b)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{F}} = -\boldsymbol{\mathcal{D}}, \quad (2.69c)$$

$$-\nabla\varphi_m = \boldsymbol{\mathcal{H}} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{F}}. \quad (2.69d)$$

Da diese Potentiale allerdings im weiteren Verlauf nicht weiter benötigt werden, wird an dieser Stelle nicht weiter auf sie eingegangen.

Die beiden Sequenzen der linken Seite in Abbildung 2.6, hier grün dargestellt, bilden den primalen Komplex, während die beiden rechten Sequenzen, hier rot dargestellt den dualen Komplex bilden. Die Verknüpfung der beiden Komplexe erfolgt mittels der Materialparameter durch die blau eingezeichneten Kanten. Die Wahl, welcher der beiden Komplexe der primale ist, ist rein willkürlich und hängt in der Regel davon ab, in welchen Feldern formuliert wird.

Kapitel 3

Eine Finite-Elemente-Formulierung zur Analyse axial homogener Wellenleiter

Soll die zu analysierende Mikrowellenstruktur, wie in Abschnitt 2.5 dargelegt, als modales Mehrtor aufgefasst und mittels Netzwerkmatrizen beschrieben werden, so kommt der Berechnung der Eigenmoden der anregenden Wellenleiter eine entscheidende Bedeutung zu. In diesem Kapitel wird dazu eine entsprechende FE-Formulierung vorgestellt. Es handelt sich dabei um eine niederfrequenzstabile Zweifeld-Formulierung, im Rahmen derer die elektrische Feldstärke und die magnetische Flussdichte diskretisiert werden. Im Gegensatz zu bestehenden niederfrequenzstabilen Formulierungen, wie beispielsweise [VD02], [LLL03] oder [FHDE04], führt die Zweifeld-Formulierung auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem, dessen Eigenwert direkt dem Ausbreitungskoeffizienten γ und nicht dessen Quadrat entspricht. Dies führt dazu, dass betragsmäßig sehr kleine Ausbreitungskoeffizienten um mehrere Größenordnungen besser aufgelöst werden können. Zu diesem Punkt sei auch auf die numerischen Beispiele in Abschnitt 3.4 verwiesen.

Der Aufbau des Kapitels ist wie folgt: Zunächst wird die elementare Zweifeld-Formulierung in Abschnitt 3.1 vorgestellt. Diese hat allerdings gegenüber konkurrierenden Ansätzen den Nachteil, dass sie für niedrige Frequenzen instabil wird und keine verlässlichen Ergebnisse liefert. Die Ursachen für diese Instabilität bei niedrigen Frequenzen werden in Abschnitt 3.2 analysiert und in Abschnitt 3.3 wird ein Verfahren zur Stabilisierung der Formulierung vorgestellt. Damit können selbst im statischen Grenzfall noch verlässliche Ergebnisse berechnet werden. Das Verfahren zur Stabilisierung entspricht dem aus [B7] und hat gegenüber der Alternative aus [A3] den Vorteil, dass die Stabilisierung zu keiner Erhöhung der Anzahl der Un-

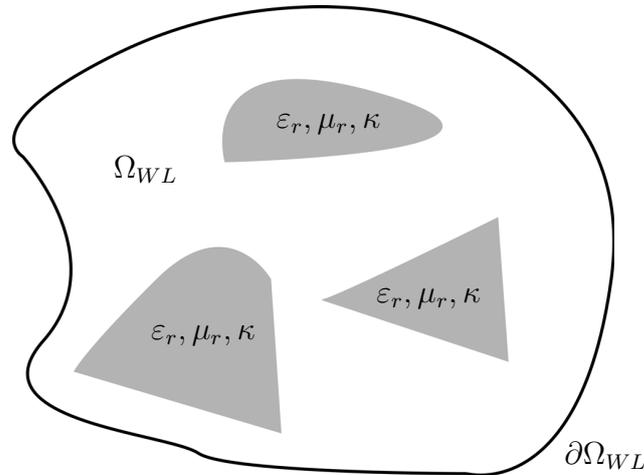


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung eines Wellenleiterquerschnitts.

bekanntes führt. Zum Abschluss des Kapitels werden in Abschnitt 3.4 numerische Beispiele sowie ein Vergleich mit der konkurrierenden Formulierung [FHDE04] gezeigt.

3.1 Elementare Zweifeld-Formulierung

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine Zweifeld-Formulierung zur modalen Analyse axial homogener Wellenleiter herzuleiten. Wie bereits in Abschnitt 2.4 dargestellt, zeichnen sich axial homogene Wellenleiter dadurch aus, dass sich Geometrie sowie Materialverhalten entlang einer Vorzugsrichtung, hier der \hat{e}_z -Richtung, nicht ändern. Somit ist die z -Abhängigkeit der elektromagnetischen Felder durch (2.39) gegeben. Zur Bestimmung der Eigenmoden sowie deren Ausbreitungskoeffizienten γ ist es daher ausreichend, den zweidimensionalen Querschnitt des Wellenleiters zu betrachten. Eine schematische Darstellung eines solchen Querschnitts ist in Abbildung 3.1 gegeben. Im Rahmen der modalen Wellenleiteranalyse entspricht das Feldgebiet dem Inneren des Wellenleiterquerschnitts. Dieses wird im Folgenden mit Ω_{WL} bezeichnet, während der eindimensionale Rand hier mit $\partial\Omega_{WL}$ bezeichnet wird. Im Rahmen der Herleitung der elementaren Zweifeld-Formulierung zur Analyse allgemeiner Wellenleiter wird zunächst das kontinuierliche Eigenwertproblem vorgestellt, welches im Anschluss mittels FE diskretisiert wird.

3.1.1 Mathematisches Modell

Ausgangspunkt für die Zweifeld-Formulierung ist der Durchflutungssatz sowie das Induktionsgesetz im Frequenzbereich (2.3b), (2.3a). Mit den Materialbeziehungen (2.4) lassen sich diese in der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} formulieren:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -jk_0 c_0 \mathbf{B}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B} = jk_0 \varepsilon_r \mathbf{E} + \eta_0 \kappa \mathbf{E}. \quad (3.1b)$$

Es sei angemerkt, dass die Materialparameter in (3.1) die frequenzabhängigen Modelle aus Abschnitt 2.2 beinhalten. Zur Vereinfachung der Notation wird die Frequenzabhängigkeit der Materialparameter im Folgenden jedoch nicht explizit angegeben.

Entsprechend (2.39) können \mathbf{E} und \mathbf{B} folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_t(x, y) + \hat{\mathbf{e}}_z E_z(x, y)) e^{-\gamma z}, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}_t(x, y) + \hat{\mathbf{e}}_z B_z(x, y)) e^{-\gamma z}. \quad (3.2b)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{E}_t und \mathbf{B}_t die Feldkomponenten transversal zur Wellenleiterachse und E_z, B_z die Komponenten der Felder entlang der Achse. Analog zu den Feldern kann auch der Differentialoperator aufgespalten werden:

$$\nabla = \nabla_t + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.3)$$

wobei ∇_t der transversale Anteil des Differentialoperators ist. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Unter Berücksichtigung der z -Abhängigkeit in (3.2), entspricht die Ableitung bzgl. z einer Multiplikation mit $-\gamma$. Damit wird (3.3) zu

$$\nabla = \nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (3.5)$$

Anwenden der Separation (3.2) und (3.5) auf (3.1) führt zu

$$(\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z) \times (\mathbf{E}_t + \hat{\mathbf{e}}_z E_z) = -jk_0 c_0 (\mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{e}}_z), \quad (3.6a)$$

$$(\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z) \times \mu_r^{-1} c_0 (\mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{e}}_z) = (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) (\mathbf{E}_t + \hat{\mathbf{e}}_z E_z). \quad (3.6b)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die gemeinsame Verwendung des Durchflutungssatzes und des Induktionsgesetzes dazu führt, dass lediglich räumliche Ableitungen erster Ordnung auftreten. Nach (3.5) wird klar, dass damit das Auftreten

des Quadrates des Ausbreitungskoeffizienten vermieden wird. Der Preis dafür ist, dass sowohl \mathbf{E} als auch \mathbf{B} diskretisiert werden müssen, was, im Vergleich zu alternativen Formulierungen, zu einer höheren Anzahl an Unbekannten im resultierenden verallgemeinerten Eigenwertproblem führt. Wird die axiale Separation auch auf die Gleichungen (3.6) angewendet, so ergibt sich das folgende kontinuierliche Eigenwertproblem in den axialen und transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte:

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times (-\nabla_t E_z - \gamma \mathbf{E}_t) = -jk_0 c_0 \mathbf{B}_t, \quad (3.7a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = -jk_0 c_0 B_z, \quad (3.7b)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times (-\nabla_t (\mu_r^{-1} c_0 B_z) - \gamma \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) = (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) \mathbf{E}_t \quad (3.7c)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) = (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) E_z, \quad (3.7d)$$

Analog zum Randwertproblem der Mikrowellenstruktur (2.37), werden auch hier geeignete Randbedingungen auf $\partial\Omega_{WL}$ benötigt. Wie in Abschnitt 2.4 dargestellt, werden als Randbedingungen nur perfekt elektrische bzw. perfekt magnetische Leiter zugelassen. Um zu verdeutlichen, dass es sich hier um eindimensionale Randbedingungen handelt, werden die Teilränder, die eine perfekt elektrische Leitfähigkeit tragen, mit τ_E und die Teilränder, die eine perfekt magnetische Leitfähigkeit tragen, mit τ_H bezeichnet. Der Rand von Ω_{WL} zerfällt also in

$$\partial\Omega_{WL} = \tau_E \oplus \tau_H, \quad (3.8)$$

wobei der Rand τ_E , nach Abschnitt 2.4 nicht leer sein soll:

$$\tau_E \neq \emptyset. \quad (3.9)$$

Wird die axiale Separation auf die Randbedingungen (2.31) und (2.32) angewendet, ergeben sich die benötigten Randbedingungen auf τ_E bzw. τ_H zu

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_t = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_t = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \tau_E, \quad (3.10a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_r^{-1} B_z = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mu_r^{-1} \mathbf{B}_t = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \tau_H. \quad (3.10b)$$

Die Gleichungen (3.7) zusammen mit den Randbedingungen (3.10) bilden das zu lösende Eigenwertproblem.

Um die elektromagnetischen Felder \mathbf{E}_t , E_z , \mathbf{B}_t , und B_z korrekt diskretisieren zu können, müssen diese in den passenden Funktionenräumen aus Abschnitt 2.6 dargestellt werden. Dazu wird die Stetigkeit des jeweiligen Feldes auf dem Querschnitt des Wellenleiters Ω_{WL} analysiert. Innerhalb des dreidimensionalen Wellenleiters ist

die tangentielle Komponente der elektrischen Feldstärke an Materialübergängen stetig. Aufgrund der Annahme der axialen Homogenität des Wellenleiters ist die \hat{e}_z -Richtung stets tangential zu möglichen Materialübergängen gerichtet. Daher muss E_z stetig sein. Weiterhin muss die Komponente von \mathbf{E}_t , die im Querschnitt Ω_{WL} tangential zum Materialübergang gerichtet ist, stetig sein. Im Gegensatz zur elektrischen Feldstärke ist die normale Komponente der magnetischen Flussdichte an Materialübergängen stetig. Mittels der obigen Überlegungen folgt somit, dass B_z unstetig ist, während die Komponente von \mathbf{B}_t , die in Ω_{WL} normal auf dem Materialübergang steht, stetig ist. Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.6 erfolgt damit die Zuordnung der betrachteten Felder zu den passenden Funktionenräumen:

$$E_z \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E), \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{E}_t \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E), \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{B}_t \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E), \quad (3.11c)$$

$$B_z \in \mathcal{H}^0(\Omega_{WL}). \quad (3.11d)$$

Bezüglich der in Abschnitt 2.6 beschriebenen Eigenschaften der Funktionenräume ergibt sich für den hier betrachteten zweidimensionalen Fall eine Vereinfachung: Um eine Funktion des $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E)$ auf eine Funktion des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E)$ zu transformieren, wird das Kreuzprodukt mit \hat{e}_z gebildet [ZC06, Kapitel 2]. Gleichung (2.61) muss dementsprechend durch

$$\hat{e}_z \times \mathbf{E}_t \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E) \quad \forall \mathbf{E}_t \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E) \quad (3.12)$$

ersetzt werden. Die übrigen Eigenschaften der Funktionenräume aus Abschnitt 2.6 bleiben weiterhin gültig. Ebenfalls unverändert bleiben die Nullräume der Differentialoperatoren.

3.1.2 Diskretisierung mittels finiter Elemente

Nachdem die gesuchten Felder den passenden Funktionenräumen zugeordnet sind, wird das Eigenwertproblem (3.7) zusammen mit den Randbedingungen (3.10) mittels finiter Elemente diskretisiert. Da die Gleichungen (3.7c) und (3.7d) Felder in Beziehung setzen, die dem dualen Gitter zugeordnet sind, müssen diese Gleichungen zunächst in die schwache Form überführt werden. Im Gegensatz dazu können (3.7a) und (3.7b) direkt diskretisiert werden.

Schwache Form

Die gesuchte schwache Form von (3.7c) und (3.7d) ergibt sich durch Multiplikation der Gleichungen mit geeigneten Testfunktionen, anschließende Integration über den gesamten Wellenleiterquerschnitt Ω_{WL} und die Forderung, dass das Integral zu Null

werden soll. Die Testfunktionen für (3.7c) sind Funktionen $\mathbf{w} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \Gamma_E)$. Damit berechnet sich die schwache Form von (3.7c) zu

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \mu_r^{-1} c_0 B_z) \, d\Omega - \gamma \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) \, d\Omega \\ & \qquad \qquad \qquad = jk_0 \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t \, d\Omega + \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot \eta_0 \kappa \mathbf{E}_t \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Das erste Integral auf der linken Seite wird umgeformt zu

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \mu_r^{-1} c_0 B_z) \, d\Omega \\ & \qquad = \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot (\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 B_z \hat{\mathbf{e}}_z) \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$= \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \times \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \mu_r^{-1} c_0 B_z \, d\Omega - \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \cdot (\mathbf{w} \times \hat{\mathbf{e}}_z \mu_r^{-1} c_0 B_z) \, d\Omega \quad (3.14b)$$

$$= \int_{\Omega_{WL}} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}) \mu_r^{-1} c_0 B_z \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_{WL}} (\mathbf{w} \times \hat{\mathbf{e}}_z \mu_r^{-1} c_0 B_z) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.14c)$$

Das Integral über die Oberfläche des Wellenleiters $\partial\Omega_{WL}$ zerfällt in zwei Integrale über τ_E bzw. τ_H . Da $\mathbf{w} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E)$ gilt, verschwindet \mathbf{w} auf τ_E . Entsprechend den Randbedingungen (3.10) verschwindet $\mu_r^{-1} B_z$ auf τ_H , sodass das gesamte Oberflächenintegral zu Null wird. Das zweite Integral der linken Seite von (3.13) wird zu

$$-\gamma \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) \, d\Omega = \gamma \int_{\Omega_{WL}} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}) \cdot \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega. \quad (3.15)$$

Damit ergibt sich die schwache Form von (3.7c) zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{WL}} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}) \mu_r^{-1} c_0 B_z \, d\Omega - \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot \eta_0 \kappa \mathbf{E}_t \, d\Omega \\ & \qquad - jk_0 \int_{\Omega_{WL}} \mathbf{w} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t \, d\Omega = -\gamma \int_{\Omega_{WL}} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}) \cdot \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Analog ergibt sich die schwache Form der Gleichung (3.7d) durch Multiplikation mit $\lambda \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$:

$$\int_{\Omega_{WL}} \lambda \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) \, d\Omega = jk_0 \int_{\Omega_{WL}} \lambda \varepsilon_r E_z \, d\Omega + \int_{\Omega_{WL}} \lambda \eta_0 \kappa E_z \, d\Omega. \quad (3.17)$$

Das Integral auf der linken Seite wird umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{WL}} \lambda \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) \, d\Omega \\ & \qquad = - \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \cdot (\lambda \hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) \, d\Omega + \int_{\Omega_{WL}} (\nabla_t \times \lambda \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$= - \int_{\partial\Omega_{WL}} \lambda \hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega - \int_{\Omega_{WL}} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \lambda) \cdot \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega. \quad (3.18b)$$

Genau wie in (3.14) zerfällt auch hier das Integral über $\partial\Omega_{WL}$ in Integrale über τ_E und τ_H . Da $\lambda \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ ist und somit auf τ_E verschwindet, und da $\mu_r^{-1} \mathbf{B}_t$ auf τ_H Null wird, liefert das Integral über $\partial\Omega_{WL}$ keinen Beitrag. Die schwache Form von (3.7d) ist demnach

$$- \int_{\Omega_{WL}} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \lambda) \cdot \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t \, d\Omega - \int_{\Omega_{WL}} \lambda \eta_0 \kappa E_z \, d\Omega - j k_0 \int_{\Omega_{WL}} \lambda \varepsilon_r E_z \, d\Omega = 0. \quad (3.19)$$

Die Gleichungen, die im nächsten Schritt diskretisiert werden, sind (3.7a), (3.7b), (3.16), sowie (3.19).

Diskretisierung

Ziel der Diskretisierung ist es, die oben genannten Gleichungen in ein verallgemeinertes algebraisches Eigenwertproblem zu überführen, das anschließend numerisch gelöst wird. Der erste Schritt ist die Diskretisierung der Geometrie mittels eines Netzes bestehend aus Dreiecken. Auf diesem Netz werden Ansatzfunktionen mit kompaktem Träger definiert, die polynomielle Basen endlich-dimensionaler Unterräume der Funktionenräume aus Abschnitt 2.6 bilden. Die elektromagnetischen Felder werden dann durch eine gewichtete Superposition der Ansatzfunktionen approximiert:

$$c_0 \mathbf{B}_t \approx \sum_{k=1}^{N_{Bt}} v_{Bt,k} \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \Gamma_E), \quad (3.20a)$$

$$c_0 B_z \approx \sum_{k=1}^{N_{Bz}} v_{Bz,k} W_k, \quad W_k \in \mathcal{V}^0(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}^0(\Omega_{WL}), \quad (3.20b)$$

$$\mathbf{E}_t \approx \sum_{k=1}^{N_{Et}} v_{Et,k} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \Gamma_E), \quad (3.20c)$$

$$E_z \approx \sum_{k=1}^{N_{Ez}} v_{Ez,k} \lambda_k, \quad \lambda_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \Gamma_E). \quad (3.20d)$$

Die Skalierung der magnetischen Flussdichte mit c_0 erfolgt dabei aus Gründen der numerischen Stabilität. Hierarchische Basen für die FE-Räume $\mathcal{V}^1(\Omega_{WL})$ und $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ sind in [Ing06] gegeben. Nach [ZC06, S. 23 f.] lassen sich aus der Basis des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$, Basen der Räume $\mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL})$ bzw. $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ ableiten. So gilt für $\mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL})$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{N_{Bt}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}_1 & \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}_{N_{Et}} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Zur Darstellung der Basisfunktionen des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ muss nach dem Polynomgrad der Ansatzfunktionen unterschieden werden. Die Ansatzfunktionen sind generell den Flächen des Netzes zugeordnet, und für niedrigste Ordnung ergeben sich die Funktionen, hier mit \hat{W}_k bezeichnet, zu

$$\left[\hat{W}_1 \quad \hat{W}_2 \quad \cdots \quad \hat{W}_{N_{Bz}} \right] = \left[\frac{1}{A_1} \quad \frac{1}{A_2} \quad \cdots \quad \frac{1}{A_{N_{Bz}}} \right]. \quad (3.22)$$

Werden Ansatzfunktionen höherer Ordnung verwendet, so werden die Funktionen aus (3.22) im Sinne des hierarchischen Ansatzes folgendermaßen erweitert

$$\begin{aligned} & \left[W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{N_{Bz}} \right] \\ &= \left[\hat{W}_1 \quad \cdots \quad \hat{W}_{N_F} \quad \mid \quad \nabla_t \cdot \mathbf{v}_{ng,1} \quad \cdots \quad \nabla_t \cdot \mathbf{v}_{ng,N_{Bz}-N_F} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= \left[\hat{W}_1 \quad \cdots \quad \hat{W}_{N_F} \quad \mid \quad -\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_{ng,1}) \quad \cdots \quad -\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_{ng,N_{Bz}-N_F}) \right], \quad (3.24)$$

wobei N_F die Anzahl der Flächen im Netz bezeichnet und $\mathbf{w}_{ng,i}$ für die i -te Basisfunktion des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ steht, die keinem Gradienten entspricht. Weiterhin ist $\mathbf{v}_{ng,i} = \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}_{ng,i}$. Auf die gleiche Weise wie die elektromagnetischen Felder werden auch die Testfunktionen zur Erzeugung der schwachen Formen (3.16) und (3.19) auf die jeweiligen endlich-dimensionalen Unterräume restringiert. Neben der diskreten Darstellung der Felder und der Testfunktionen werden weiterhin die diskreten Darstellungen der Differentialoperatoren grad, rot und div benötigt. Die folgenden Überlegungen orientieren sich an [ZC06, Kapitel 2.4].

Die Diskretisierung des Gradienten führt zu einer rein topologischen Matrix, die es ermöglicht, die Gradienten der Ansatzfunktionen des $\mathcal{V}^1(\Omega_{WL})$ aus den Basisfunktionen des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ zu extrahieren. Wird der diskrete Gradient mit \mathbf{G} bezeichnet, so gilt

$$\left[\nabla_t \lambda_1 \quad \nabla_t \lambda_2 \quad \cdots \quad \nabla_t \lambda_{N_{Ez}} \right] = \left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{N_{Et}} \right] \mathbf{G} \quad (3.25a)$$

$$\Rightarrow \left[\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \lambda_1 \quad \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \lambda_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \lambda_{N_{Ez}} \right] = \left[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{N_{Et}} \right] \mathbf{G}. \quad (3.25b)$$

Werden Ansatzfunktionen vom Polynomgrad $p = 1$ verwendet, so ergeben sich die Einträge des diskreten Gradienten zu

$$\hat{G}_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls Kante } i \text{ an Knoten } j \text{ beginnt,} \\ +1 & \text{falls Kante } i \text{ an Knoten } j \text{ endet,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Entsprechend [Ing06] sind für Ansatzfunktionen vom Polynomgrad $p > 1$ die Gradienten der Basisfunktionen des $\mathcal{V}^1(\Omega_{WL})$ explizit in den Basen des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ berücksichtigt. Bei entsprechender Sortierung der Basisfunktionen gilt also

$$\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{N_{Et}} \right] = \left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{N_{Et}-N_{Ez}} \quad \nabla_t \lambda_1 \quad \cdots \quad \nabla_t \lambda_{N_{Ez}} \right], \quad (3.27)$$

womit sich der diskrete Gradient für Ansatzfunktionen höherer Ordnung als

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{Ez}} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

darstellen lässt. Dabei ist $\mathbf{I}_{N_{Ez}}$ die Einheitsmatrix der Dimension N_{Ez} .

Im nächsten Schritt wird der Rotationsoperator diskretisiert. Analog zum diskreten Gradienten wird der diskrete Rotationsoperator dazu verwendet, um die negative $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Komponente der Rotation der Funktionen des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ aus dem $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ zu extrahieren:

$$\begin{aligned} \left[-\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_1) \quad -\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_2) \quad \cdots \quad -\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_{N_{Et}}) \right] \\ = \left[W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{Bz} \right] \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Werden Ansatzfunktionen erster Ordnung verwendet, sind die Einträge des diskreten Rotationsoperators folgendermaßen gegeben:

$$\hat{R}_{kl} = \begin{cases} +1 & \text{falls Kante } l \text{ Fläche } k \text{ begrenzt und positiv orientiert ist,} \\ -1 & \text{falls Kante } l \text{ Fläche } k \text{ begrenzt und negativ orientiert ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.30)$$

Für Ansatzfunktionen höherer Ordnung sind die Ausdrücke $-\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{w}_k)$ nach (3.24) explizit in der Basis des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ vorhanden und, eine entsprechende Sortierung der Basisfunktionen vorausgesetzt, der diskrete Rotationsoperator lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{R}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N_{Bz}-N_F} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

wobei $\mathbf{I}_{N_{Bz}-N_F}$ die Einheitsmatrix der Dimension $N_{Bz} - N_F$ darstellt.

Der diskrete Divergenzoperator \mathbf{D} erlaubt es, die Divergenz der Funktionen des $\mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL})$ aus den Funktionen des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ zu extrahieren:

$$\left[\nabla_t \cdot \mathbf{v}_1 \quad \nabla_t \cdot \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \nabla_t \cdot \mathbf{v}_{N_{Bt}} \right] = \left[W_1 \quad W_2 \quad \cdots \quad W_{Bz} \right] \mathbf{D}. \quad (3.32)$$

Ein Vergleich von (3.23) mit (3.24) sowie die Berücksichtigung von (3.29) zeigt, dass der diskrete Divergenzoperator identisch mit dem diskreten Rotationsoperator ist:

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}. \quad (3.33)$$

Eine wichtige Eigenschaft, die die diskreten Operatoren erhalten, ist, dass der Gradient im Nullraum der Rotation liegt. So gilt

$$\mathbf{R}\mathbf{G} = \mathbf{D}\mathbf{G} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

Nach diesen Überlegungen können die Gleichungen (3.7a), (3.7b), (3.16) sowie (3.19) diskretisiert werden. Das resultierende Eigenwertproblem lautet

$$\mathbf{G}\mathbf{v}_{Ez} - jk_0\mathbf{v}_{Bt} = -\gamma\mathbf{v}_{Et}, \quad (3.35a)$$

$$-\mathbf{R}\mathbf{v}_{Et} + jk_0\mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.35b)$$

$$-\mathbf{R}^T\mathbf{T}_{Bz}\mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{T}_{\kappa t}\mathbf{v}_{Et} - jk_0\mathbf{T}_{Et}\mathbf{v}_{Et} = -\gamma\mathbf{T}_{Bt}\mathbf{v}_{Bt}, \quad (3.35c)$$

$$\mathbf{G}^T\mathbf{T}_{Bt}\mathbf{v}_{Bt} + \mathbf{T}_{\kappa z}\mathbf{v}_{Ez} + jk_0\mathbf{T}_{Ez}\mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}. \quad (3.35d)$$

Dabei bezeichnen \mathbf{v}_{Bt} , \mathbf{v}_{Et} , \mathbf{v}_{Bz} , und \mathbf{v}_{Ez} die Vektoren, deren Einträge die Koeffizienten $v_{Bt,k}$, $v_{Et,k}$, $v_{Bz,k}$ bzw. $v_{Ez,k}$ aus (3.20) sind. Die Einträge der Matrizen sind

$$T_{Bz,k,l} = \int_{\Omega} W_k \mu_r^{-1} W_l \, d\Omega \quad \text{mit } W_k, W_l \in \mathcal{V}^0(\Omega_{WL}), \quad (3.36a)$$

$$T_{\kappa t,k,l} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_k \cdot \eta_0 \kappa \mathbf{w}_l \, d\Omega \quad \text{mit } \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL}), \quad (3.36b)$$

$$T_{Et,k,l} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_k \cdot \varepsilon_r \mathbf{w}_l \, d\Omega \quad \text{mit } \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL}), \quad (3.36c)$$

$$T_{Bt,k,l} = \int_{\Omega} \mathbf{v}_k \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{v}_l \, d\Omega \quad \text{mit } \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL}), \quad (3.36d)$$

$$T_{\kappa z,k,l} = \int_{\Omega} \lambda_k \eta_0 \kappa \lambda_l \, d\Omega \quad \text{mit } \lambda_k, \lambda_l \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}), \quad (3.36e)$$

$$T_{Ez,k,l} = \int_{\Omega} \lambda_k \varepsilon_r \lambda_l \, d\Omega \quad \text{mit } \lambda_k, \lambda_l \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}). \quad (3.36f)$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes verallgemeinertes algebraisches Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{A} + jk_0\mathbf{C})\mathbf{v}_I = \gamma\mathbf{B}\mathbf{v}_I \quad (3.37)$$

mit

$$\mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Bt} \\ \mathbf{v}_{Bz} \\ \mathbf{v}_{Et} \\ \mathbf{v}_{Ez} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}^T\mathbf{T}_{Bz} & -\mathbf{T}_{\kappa t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^T\mathbf{T}_{Bt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\kappa z} \end{bmatrix}, \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{T}_{Bt} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{Et} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{Ez} \end{bmatrix}. \quad (3.38b)$$

Es ist zu sehen, dass der Eigenwert in (3.37) wie gefordert direkt dem Ausbreitungskoeffizienten γ entspricht.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Matrizen in (3.36) im Allgemeinen frequenzabhängig sind. Diese Eigenschaft kommt direkt von den Materialparametern entsprechend Abschnitt 2.2. Da die Materialeigenschaften allerdings nach (2.12) räumlich stückweise konstant sind, nimmt die Frequenzabhängigkeit der Matrizen folgende, am Beispiel der Matrix \mathbf{T}_{Ez} gezeigte, Form an:

$$\mathbf{T}_{Ez}(k_0) = \sum_{j=0}^{N_{M,WL}} \varepsilon_{r,j}(k_0) \mathbf{T}_{Ez,j}, \quad (3.39)$$

wobei $N_{M,WL}$ die Anzahl der unterschiedlichen Materialien in Ω_{WL} beschreibt. Diese ist in der Regel sehr viel kleiner als die Dimension der Matrix \mathbf{T}_{Ez} . Die Teilmatrizen $\mathbf{T}_{Ez,k}$ sind konstant über der Frequenz und müssen daher nur einmal assembliert werden. Die Frequenzabhängigkeit steckt lediglich in den skalaren Koeffizienten.

Wie bereits eingangs des Kapitels angesprochen, ist die hergeleitete Formulierung für niedrige Frequenzen instabil. Um die Gründe für diese Instabilität zu identifizieren und entsprechende Gegenmaßnahmen zu entwickeln, wird im folgenden Abschnitt das Eigenwertproblem im statischen Grenzfall analysiert.

3.2 Analyse des statischen Grenzfalls

Im statischen Grenzfall $k_0 = 0$ vereinfacht sich das Eigenwertproblem (3.7) zu

$$-\nabla_t E_z = \gamma \mathbf{E}_t, \quad (3.40a)$$

$$\nabla_t \times \mathbf{E}_t = \mathbf{0}, \quad (3.40b)$$

$$-\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \mu_r^{-1} c_0 B_z - \kappa \eta_0 \mathbf{E}_t = \gamma \hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t, \quad (3.40c)$$

$$\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t - \kappa \eta_0 E_z \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}. \quad (3.40d)$$

Um die auftretende Instabilität korrekt beschreiben zu können, ist es notwendig, das Feldgebiet Ω_{WL} in zwei disjunkte Teilgebiete zu unterteilen. So wird das Teilgebiet $\Omega_\kappa \subset \Omega_{WL}$ eingeführt, in dem alle Materialien mit nicht verschwindender elektrischer Leitfähigkeit liegen. Das verbleibende Teilgebiet, das demzufolge alle elektrischen Nichtleiter enthält, wird mit Ω_\emptyset bezeichnet. Es gilt also

$$\Omega_{WL} = \Omega_\kappa \oplus \Omega_\emptyset, \quad (3.41)$$

wobei die beiden Spezialfälle $\Omega_\kappa = \emptyset$ und $\Omega_\emptyset = \emptyset$ zulässig sind.

Eine erste Klasse von Eigenlösungen von (3.40) basiert auf dem Nullraum des transversalen Rotationsoperators. Dieser setzt sich entsprechend (2.62) aus den Gradienten der Funktionen des $\mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ sowie den Funktionen der ersten relativen de Rham-Kohomologiegruppe $H^1(\Omega_{WL})$ zusammen. Wie sich durch einfaches Einsetzen leicht überprüfen lässt, sind die Gleichungen (3.40) für folgende Eigenvektoren

und Eigenwerte

$$\mathbf{v}_G = \begin{bmatrix} \mu_r^{-1} \mathbf{B}_{t,G} = \nabla_t \psi_M \\ \mu_r^{-1} B_{z,G} = -\gamma_G \psi_M \\ \mathbf{E}_{t,G} = \nabla_t \psi_E \\ E_{z,G} = -\gamma_G \psi_E \end{bmatrix}, \quad \gamma_G \text{ beliebig} \quad (3.42)$$

mit beliebigen Skalarpotentialen

$$\psi_M \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E), \quad \text{und} \quad \begin{cases} \psi_E \in \mathcal{H}^1(\Omega_{II}, \tau_E) & \text{in } \Omega_{II}, \\ \psi_E = 0 & \text{in } \Omega_{\kappa}. \end{cases} \quad (3.43)$$

erfüllt. Es kann also zu jedem beliebigen Wert γ_G mittels (3.42) eine Schar von passenden Eigenfunktionen konstruiert werden. Dass diese Lösungen nicht alle physikalisch sind, ist offensichtlich. Unter Berücksichtigung der Separation des Differentialoperators (3.5) wird deutlich, dass es sich bei \mathbf{v}_G um reine Gradientenfelder handelt. Die Ursache der unphysikalischen Lösungen wird deutlich, wenn man die transversale Divergenz von (3.7a) bildet und das Resultat von $\gamma \cdot$ (3.7b) abzieht. Dies führt nach kurzer Rechnung zu

$$\gamma \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) - \nabla_t \cdot [\hat{\mathbf{e}}_z \times (-\nabla_t E_z - \gamma \mathbf{E}_t)] = -jk_0 c_0 \gamma B_z + jk_0 c_0 \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t, \quad (3.44a)$$

$$\Leftrightarrow jk_0 c_0 (\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t - \gamma B_z) = 0. \quad (3.44b)$$

Dabei ist (3.44b) die mit der Wellenzahl k_0 skalierte Divergenzbedingung (2.3d), auf die die Separation nach (3.2b) und (3.5) angewendet wurde. Analog ergibt sich durch Bildung der transversalen Divergenz von (3.7c) und anschließender Subtraktion von $\gamma \cdot$ (3.7d)

$$\nabla_t \cdot [\hat{\mathbf{e}}_z \times (-\nabla_t (\mu_r^{-1} c_0 B_z) - \gamma \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t)] - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 \mathbf{B}_t) = \nabla_t \cdot [(jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) \mathbf{E}_t] - \gamma (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) E_z \quad (3.45a)$$

$$\Leftrightarrow jk_0 (\nabla_t \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t - \gamma E_z) = \begin{cases} 0, & \text{in } \Omega_{II}, \\ \eta_0 (\nabla_t \cdot \kappa \mathbf{E}_t - \gamma \kappa E_z), & \text{in } \Omega_{\kappa}. \end{cases} \quad (3.45b)$$

Auch hier entspricht die letzte Gleichung in Ω_{II} der mit der Wellenzahl k_0 skalierten Divergenzbedingung (2.3c). Das bedeutet, dass die Formulierung (3.7) die Divergenzbedingungen (2.3d) in Ω_{WL} und (2.3c) in Ω_{II} lediglich für $k_0 \neq 0$ beinhaltet. Im Fall $k_0 = 0$ sind die Divergenzbedingungen entsprechend (3.44b) und (3.45b) nicht in (3.7) enthalten und somit auch Eigenlösungen möglich, deren Felder die zugehörige Divergenzbedingung verletzen. Es sind also nur die Lösungen \mathbf{v}_G physikalische Lösungen, deren Felder zusätzlich noch die entsprechenden Divergenzbedingungen erfüllen.

Weiteren Lösungen, die auf dem Nullraum des Rotationsoperators basieren, liegt der Raum $H^1(\Omega_{WL}, \Gamma_E)$ zugrunde. So erfüllen auch die Eigenlösungen

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \mu_r^{-1} \mathbf{B}_{t,S} \in H^1(\Omega_{WL}, \Gamma_E) \\ \mu_r^{-1} B_{z,S} = 0 \\ \mathbf{E}_{t,S} \begin{cases} \in H^1(\Omega_{ll}, \Gamma_E) & \text{in } \Omega_{ll} \\ = \mathbf{0} & \text{in } \Omega_\kappa \end{cases} \\ E_{z,S} = 0 \end{bmatrix}, \quad (3.46a)$$

$$\gamma_S = 0 \quad (3.46b)$$

die Gleichungen (3.40), wie sich durch Einsetzen leicht überprüfen lässt. Die Anzahl dieser Nulleigenwerte entspricht der Dimension des $H^1(\Omega_{WL}, \Gamma_E)$, was die erste relative Betti-Zahl β_1 ist. Die Felder \mathbf{v}_S erfüllen die Divergenzbedingungen (2.3d) und (2.3c) [Fra97, S. 356] und entsprechen statischen TEM-Moden. Es handelt sich somit um physikalische Moden.

Eine zweite Klasse von Eigenlösungen basiert auf dem Nullraum des transversalen Gradienten und tritt nur dann auf, wenn sich der gesamte Rand des Wellenleiters aus perfekt elektrischen Leitern zusammensetzt, $\partial\Omega_{WL} = \tau_E$, und somit $\tau_H = \emptyset$ gilt. In diesem Fall kann $H_z = \mu^{-1}B_z$ konstante Werte ungleich Null annehmen und liegt im Nullraum des transversalen Gradienten:

$$\nabla_t \mu_r^{-1} c_0 B_z = 0, \quad \text{für } \mu_r^{-1} B_z = \text{const} \neq 0. \quad (3.47)$$

Eine mögliche Lösung von (3.40) ist somit durch

$$\mathbf{v}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{t,c} = \mathbf{0} \\ \mu_r^{-1} B_{z,c} = \text{const} \\ \mathbf{E}_{t,c} = \mathbf{0} \\ E_{z,c} = 0 \end{bmatrix}, \quad (3.48a)$$

$$\gamma_C \text{ beliebig,} \quad (3.48b)$$

gegeben. Einsetzen dieser Lösung in (3.40) zeigt, dass die Gleichungen für jeden beliebigen Wert von γ erfüllt sind und daher keine Aussage über den zugehörigen Eigenwert getroffen werden kann. Es sei angemerkt, dass eine analoge Lösung, $E_z = \text{const}$, für den Fall $\tau_E = \emptyset$ existieren würde, wäre dieser nicht ausgeschlossen. Die Tatsache, dass die Lösungen (3.48) nur im statischen Grenzfall existieren, obwohl der Nullraum des transversalen Gradienten unabhängig von der Frequenz ist, lässt sich folgendermaßen erklären: Die konstanten Felder $B_{z,c}$ liegen im Raum $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ aus (2.67). Nach Definition des $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ ist deren Integral über Ω_{WL} ungleich Null. Wird Gleichung (3.7b) für Frequenzen ungleich Null betrachtet, so ergibt sich

$$-jk_0 c_0 \int_{\Omega_{WL}} B_z \, d\Omega = \int_{\Omega_{WL}} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) \, d\Omega \quad (3.49a)$$

$$= - \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \cdot (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{E}_t) \, d\Omega \quad (3.49b)$$

$$= - \oint_{\partial\Omega_{WL}} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (3.49c)$$

$$= - \int_{\Gamma_E} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = 0. \quad (3.49d)$$

Damit ist also für $k_0 \neq 0$ sichergestellt, dass $B_z \notin \mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ gilt. Für den Fall $k_0 = 0$ hingegen entfällt diese Orthogonalisierung, und $B_z \in \mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ ist möglich. Es bleibt die Frage zu klären, ob \mathbf{v}_C eine physikalisch sinnvolle Lösung darstellt. Wie bereits am Anfang des Abschnitts gezeigt, ist die Divergenzbedingung für die magnetische Flussdichte im statischen Grenzfall nicht in der verwendeten Formulierung enthalten. Um also beurteilen zu können, ob \mathbf{v}_C physikalisch ist, muss überprüft werden, ob die Divergenzbedingung erfüllt ist. Einsetzen von \mathbf{v}_C in (2.3d) führt auf

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_{t,c} - \gamma_C B_{z,c} = -\gamma_C B_{z,c} = 0. \quad (3.50)$$

Damit die Divergenzbedingung erfüllt ist, muss demnach $\gamma_C = 0$ gelten. Die Lösung $(\mathbf{v}_C, \gamma_C = 0)$ stellt somit eine physikalische Lösung dar. Der gefundene Mode existiert dabei nur in Wellenleitern, die komplett mit perfekt elektrisch leitfähigem Material umschlossen sind. Das modale Feld besteht lediglich aus einem statischen Magnetfeld, welches entlang der Wellenleiterachse orientiert ist, und welches sowohl in der transversalen als auch in der axialen Richtung konstant ist. Dieser Mode genügt den Maxwell-Gleichungen, kann aber nur im statischen Fall auftreten und ist in praktischen Anwendungen von keinerlei Interesse. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt ein Verfahren vorgestellt, um das Auftreten dieser Eigenlösung zu verhindern.

3.3 Stabilisierung für niedrige Frequenzen

Zunächst wird das Eigenwertproblem bzgl. der Lösungen \mathbf{v}_C aus (3.48) stabilisiert: Für die konstanten, in $\hat{\mathbf{e}}_z$ gerichteten magnetischen Felder, die für die Lösungen (3.48) verantwortlich sind, gilt $B_{z,c} \in \mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$. Dieser Raum wird von den Funktionen gebildet, deren Integral über Ω_{WL} nicht verschwindet. Um das Auftreten dieser Lösungen zu verhindern, wird die Bedingung

$$\int_{\Omega_{WL}} B_z \, d\Omega = 0 \quad (3.51)$$

mittels eines Lagrange-Multiplikators p_c , ähnlich wie in [KMEK90], [DEPL00], in das Eigenwertproblem eingepreßt. Aufgrund der Konstruktion der Basisfunktionen des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$, werden die $B_{z,c}$ im Diskreten lediglich von den Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung gebildet. Da die Ansatzfunktionen höherer Ordnung nach (3.23)

den Divergenzen der Funktionen des $\mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL})$ entsprechen, können diese keine diskreten Funktionen des $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ darstellen. Die Diskretisierung von (3.51) führt somit auf

$$\mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_{Bz} = 0, \quad (3.52)$$

mit den Einträgen von \mathbf{v}_c definiert als

$$v_{c,j} = \begin{cases} \text{sign}(\det \mathbf{J}_j), & \text{falls } j \leq N_F, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.53)$$

wobei \mathbf{J}_j die Jacobi-Matrix des j -ten Flächenelements darstellt. Durch Einbringen des Lagrange-Multiplikators transformiert sich das diskrete Eigenwertproblem (3.35) zu

$$\mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 \mathbf{v}_{Bt} = -\gamma \mathbf{v}_{Et}, \quad (3.54a)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{v}_{Et} + p_c \mathbf{v}_c + jk_0 \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.54b)$$

$$-\mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{T}_{\kappa t} \mathbf{v}_{Et} - jk_0 \mathbf{T}_{Et} \mathbf{v}_{Et} = -\gamma \mathbf{T}_{Bt} \mathbf{v}_{Bt}, \quad (3.54c)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} \mathbf{v}_{Bt} + \mathbf{T}_{\kappa z} \mathbf{v}_{Ez} + jk_0 \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}, \quad (3.54d)$$

$$\mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_{Bz} = 0. \quad (3.54e)$$

Im nächsten Schritt wird bzgl. der unphysikalischen Gradienten-Felder \mathbf{v}_G aus (3.42) stabilisiert: Wie bereits in Abschnitt 3.2 festgestellt wurde, treten diese Lösungen auf, weil die Divergenzbedingungen der Flussdichten nur in frequenzskalierter Form in der Formulierung enthalten sind. Die Idee zur Stabilisierung ist dementsprechend, die Divergenzbedingungen in unskalierter Form

$$(\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot \varepsilon (\mathbf{E}_t + E_z \hat{\mathbf{e}}_z) = \nabla_t \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t - \gamma \varepsilon_r E_z = 0 \quad \text{in } \Omega_{ll}, \quad (3.55a)$$

$$(\nabla_t - \gamma \hat{\mathbf{e}}_z) \cdot (\mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{e}}_z) = \nabla_t \cdot \mathbf{B}_t - \gamma B_z = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.55b)$$

in das Eigenwertproblem einzubringen. Dazu wurden zwei unterschiedliche Verfahren entwickelt [A3], [B7]. Im Rahmen des ersten Verfahrens wurden die Bedingungen (3.55) ebenfalls mittels Lagrange-Multiplikatoren in das Eigenwertproblem eingepreßt [A3], [B7]. Dieses Vorgehen hat allerdings den Nachteil, dass die Anzahl an Unbekannten weiter erhöht wird.

Um diesen Anstieg an Unbekannten zu vermeiden, wurde ein zweites Verfahren entwickelt [B7]. Die Idee dieses Verfahrens ist, die transversalen Felder \mathbf{B}_t und \mathbf{E}_t , sowie die transversalen Gleichungen (3.7a) und (3.7c) weiter aufzuspalten. Dies erlaubt es, die frequenzskalierten Divergenzbedingungen zu extrahieren und in den entsprechenden Gebieten durch die unskalierten Versionen (3.55) zu ersetzen. Die Anzahl der Unbekannten bleibt dadurch konstant. Vom Raum $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E)$, in dem die transversale Komponente der elektrischen Feldstärke liegt, werden die

Gradienten des $\mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ abgespalten. Im verbleibenden Rest liegen zum einen Felder mit nicht verschwindender Rotation und zum anderen der Quotientenraum $H^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$. Entsprechend wird auch die transversale Komponente der elektrischen Feldstärke zerlegt. Der Anteil, der den Gradienten entspricht, wird im Folgenden mit $\mathbf{E}_{t,G}$ bezeichnet, während der verbleibende Anteil mit $\mathbf{E}_{t,c}$ bezeichnet wird. Es gilt also

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{t,G} + \mathbf{E}_{t,c} = \nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c}, \quad (3.56)$$

mit

$$\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E), \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{E}_{t,c} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E) \setminus \nabla_t \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E). \quad (3.57b)$$

Analog dazu wird der Raum $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E)$, in dem die transversale Komponente der magnetischen Flussdichte liegt, zerlegt in reine Wirbelfelder und einen Rest. Dieser Rest umfasst die Felder mit nicht verschwindender Divergenz sowie den $H^2(\Omega_{WL}, \tau_E)$. Es sei an dieser Stelle klargestellt, dass sich die Divergenz hier auf den transversalen Divergenzoperator bezieht, der auf die transversale Komponente der magnetischen Flussdichte wirkt. Die Tatsache, dass die gesamte magnetische Flussdichte $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ divergenzfrei ist, bleibt davon unberührt. Die transversale Komponente der magnetischen Flussdichte wird somit dargestellt als

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{t,W} + \mathbf{B}_{t,c} = -\nabla_t \times A_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{B}_{t,c} = \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t A_z + \mathbf{B}_{t,c}, \quad (3.58)$$

mit

$$A_z \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E), \quad (3.59a)$$

$$\mathbf{B}_{t,c} \in \mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E) \setminus \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E). \quad (3.59b)$$

Werden diese Aufspaltungen auf das Eigenwertproblem (3.7) angewendet, so ergibt sich

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times [-\nabla_t E_z - \gamma(\mathbf{E}_{t,c} + \nabla_t \psi)] = -jk_0 c_0 (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t A_z + \mathbf{B}_{t,c}), \quad (3.60a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_{t,c}) = -jk_0 c_0 B_z, \quad (3.60b)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_z \times [-\nabla_t(\mu_r^{-1} c_0 B_z) - \gamma \mu_r^{-1} c_0 (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t A_z + \mathbf{B}_{t,c})] \\ = (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c}), \end{aligned} \quad (3.60c)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z \cdot [\nabla_t \times \mu_r^{-1} c_0 (\hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t A_z + \mathbf{B}_{t,c})] = (jk_0 \varepsilon_r + \kappa \eta_0) E_z, \quad (3.60d)$$

während sich die Divergenzbedingungen (3.55) zu

$$\nabla_t \cdot \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c}) - \gamma \varepsilon_r E_z = 0 \quad \text{in } \Omega_u, \quad (3.61a)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_{t,c} - \gamma B_z = 0 \quad \text{in } \Omega_{WL} \quad (3.61b)$$

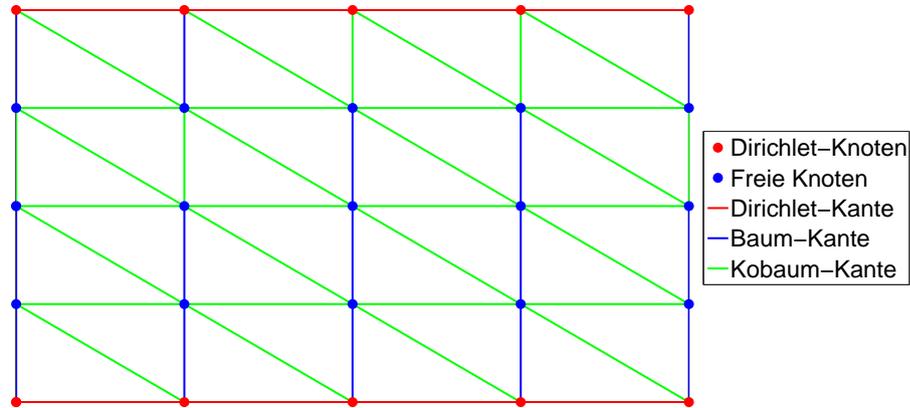


Abbildung 3.2: Baum-Kobaum-Zerlegung am Beispiel eines Parallelplattenwellenleiters.

transformieren. Die Randbedingungen (3.10) werden zu

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ \psi = 0 \\ A_z = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{t,c} = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_{t,c} = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \tau_E, \quad \left. \begin{array}{l} \mu_r^{-1} B_z = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \varepsilon_r \nabla_t \psi = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mu_r^{-1} \hat{\mathbf{e}}_z \times \nabla_t A_z = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mu_r^{-1} \mathbf{B}_t = \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_t = 0 \end{array} \right\} \text{ auf } \tau_H. \quad (3.62)$$

Im Folgenden wird die Aufspaltung der elektrischen Feldstärke nach (3.56) ins Diskrete übertragen. Dazu müssen die Gradienten aus dem endlich-dimensionalen Raum $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ entfernt werden.

Für Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung wird dazu eine Baum-Kobaum-Zerlegung [AR88] verwendet. Diese stammt aus der Graphentheorie [Cha85]. Die freien Knoten und freien Kanten des Netzes, also die, die nicht auf τ_E liegen, werden dazu als Graph angesehen. Ein Baum eines Graphen ist eine Menge von Kanten, die alle Knoten miteinander verbinden, dabei jedoch keine geschlossenen Schleifen bilden [Cha85, S. 80]. Eine besondere Rolle spielen die Knoten und Kanten, die auf dem Dirichletschen Rand τ_E liegen. Im Rahmen der Konstruktion des Baumes werden alle zusammenhängenden Knoten und Kanten auf τ_E zu jeweils einem einzelnen Knoten zusammengezogen. Für den Fall, dass der zu analysierende Wellenleiter N_{τ_E} voneinander getrennte Elektroden besitzt, werden N_{τ_E} nicht-zusammenhängende Bäume konstruiert, von denen jeder genau eine der Elektroden enthält. Man spricht auch von einem Wald [Cha85, S. 80]. Die verbleibenden Kanten bilden den Kobaum. Wird der Wald auf diese Weise konstruiert, dann entspricht die Anzahl der freien Baum-Kanten der Anzahl der freien Knoten im Netz. Die Realisierung der Zerlegung des Netzes erfolgt mittels des Kruskal-Algorithmus [CLRS01, S. 568 ff.]. In Abbildung 3.2 ist die Baum-Kobaum-Aufspaltung am Beispiel des Netzes eines Parallelplattenwellenleiters dargestellt. Da hier zwei getrennte Elektroden vorliegen, in

der Abbildung rot gekennzeichnet, wird das Netz in einen Wald, bestehend aus zwei Bäumen, sowie die verbleibenden Kobaum-Kanten aufgespalten. Um die Gradienten aus den Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ zu eliminieren, werden die Unbekannten, die den Baum-Kanten zugeordnet sind, zu Null gesetzt [AR88].

Im Gegensatz dazu ist nach (3.27) in den Ansatzfunktionen höherer Ordnung eine explizite Basis für die Gradienten vorhanden. Um die Gradienten zu eliminieren, werden die entsprechenden Unbekannten zu Null gesetzt. Im Folgenden wird der so erstellte FE-Raum mit $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL}, \Gamma_E) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \tau_E) \setminus \nabla_t \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ bezeichnet.

Die diskrete Darstellung der Zerlegung der transversalen Komponente der magnetischen Flussdichte ergibt sich aufgrund von (3.12) und (3.58) analog zur elektrischen Feldstärke. Die neu eingeführten Felder werden durch

$$c_0 A_z \approx \sum_k v_{Az,k} \lambda_k, \quad \lambda_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}), \quad (3.63a)$$

$$c_0 \mathbf{B}_{t,c} \approx \sum_k v_{Bc,k} \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}_c^{\text{div}}(\Omega_{WL}) = \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL}), \quad (3.63b)$$

$$\mathbf{E}_{t,c} \approx \sum_k v_{Ec,k} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL}), \quad (3.63c)$$

$$\psi \approx \sum_k v_{\psi,k} \lambda_k, \quad \lambda_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}). \quad (3.63d)$$

approximiert. Die Gleichungen des algebraischen Eigenwertproblem (3.35) transformieren sich durch die Aufspaltung zu

$$\mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{\psi}), \quad (3.64a)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + jk_0 \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.64b)$$

$$-\mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{\psi}) - jk_0 \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{\psi}) \\ = -\gamma \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \quad (3.64c)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) + \mathbf{T}_{\kappa z} \mathbf{v}_{Ez} + jk_0 \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}, \quad (3.64d)$$

wobei die Matrix \mathbf{I}_C die Unbekannten, die dem $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ bzw. dem $\mathcal{V}_c^{\text{div}}(\Omega_{WL})$ zugeordnet sind, auf alle Unbekannten, die dem $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ bzw. dem $\mathcal{V}^{\text{div}}(\Omega_{WL})$ zugeordnet sind, abbildet. Diese Matrix wird aus einer Einheitsmatrix konstruiert, deren Dimension der Dimension des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ entspricht. Aus dieser Einheitsmatrix entsteht \mathbf{I}_C durch die Streichung aller Spalten, deren Unbekannte reinen Gradienten zugeordnet sind. Um geeignete Gleichungen zu finden, die durch die unskalierten Divergenzbedingungen ersetzt werden können, werden die Gleichungen (3.64a) und (3.64c) ebenfalls entsprechend den jeweiligen Funktionenräumen aufgespalten. Dies geschieht durch Projektion der Gleichungen auf Basen der beiden diskreten Räume. Diese Basen sind zum einen der diskrete Gradient sowie die Matrix \mathbf{I}_C . Aus (3.64a)

wird somit

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.65a)$$

$$\mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{I}_C^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{I}_C^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.65b)$$

während (3.64c) in

$$\begin{aligned} -\mathbf{I}_C^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.66a)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.66b)$$

aufgespalten wird. Das bis zu diesem Zwischenschritt zu lösende verallgemeinerte algebraische Eigenwertproblem setzt sich aus (3.65a), (3.65b), (3.64b), (3.66a), (3.66b), sowie (3.64d) zusammen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass obwohl das algebraische Eigenwertproblem nun aus mehr Gleichungen besteht, die Anzahl der Unbekannten gleich geblieben ist und weiterhin der Anzahl an Unbekannten von (3.35) entspricht.

Bevor geeignete Gleichungen zum Ersetzen durch die Divergenzbedingungen (3.61) identifiziert werden, werden die Gleichungen (3.61) diskretisiert. Dazu wird (3.61a) zunächst in die schwache Form überführt. Dies geschieht durch Testen mit Testfunktionen $\lambda \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$:

$$\int_{\Omega_{WL}} \lambda \nabla_t \cdot \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c}) \, d\Omega = \gamma \int_{\Omega_{WL}} \lambda \varepsilon_r E_z \, d\Omega, \quad (3.67a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \cdot [\lambda \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c})] \, d\Omega - \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \lambda \cdot \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c}) \, d\Omega \\ = \gamma \int_{\Omega_{WL}} \lambda \varepsilon_r E_z \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.67b)$$

Das erste Integral auf der linken Seite wird zu

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{WL}} [\lambda \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\tau_E} [\lambda \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \\ + \int_{\tau_H} [\lambda \varepsilon_r (\nabla_t \psi + \mathbf{E}_{t,c})] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.68a)$$

$$= 0. \quad (3.68b)$$

Das Integral über τ_E verschwindet, da die Testfunktionen $\lambda \in \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ sind, während das Integral über τ_H wegen Randbedingung (3.62) zu Null wird. Damit ergibt sich die schwache Form von (3.61) zu

$$\int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \lambda \cdot \varepsilon_r \nabla_t \psi \, d\Omega + \int_{\Omega_{WL}} \nabla_t \lambda \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_{t,c} \, d\Omega = -\gamma \int_{\Omega_{WL}} \lambda \varepsilon_r E_z \, d\Omega. \quad (3.69)$$

Wird die schwache Form mit den Methoden aus Abschnitt 3.1 diskretisiert, ergibt sich

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi = -\gamma \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez}. \quad (3.70)$$

Im Gegensatz zu (3.61a) wird (3.61b) direkt diskretisiert zu

$$\mathbf{D} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{R} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.71)$$

Im nächsten Schritt werden geeignete Gleichungen gesucht, die durch (3.70) und (3.71) ersetzt werden können. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden an dieser Stelle die bis zu diesem Schritt vorhandenen Gleichungen nochmals angegeben:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.72a)$$

$$\mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{I}_C^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{I}_C^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{I}_C^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.72b)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + jk_0 \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.72c)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{I}_C^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.72d)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.72e)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) + \mathbf{T}_{\kappa z} \mathbf{v}_{Ez} + jk_0 \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}. \quad (3.72f)$$

Um geeignete Gleichungen zu finden, die durch die Divergenzbedingungen ersetzt werden, wird die lineare Abhängigkeit der Gleichungen (3.72), (3.70) und (3.71) untersucht. Wie sich durch Einsetzen leicht überprüfen lässt, gilt

$$\gamma \cdot (3.72f) - (3.72e) = jk_0 \cdot (3.70) \quad \text{in } \Omega_{ll}, \quad (3.73a)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{I}_C \cdot (3.72b) - \gamma \cdot (3.72c) = jk_0 \cdot (3.71) \quad \text{in } \Omega_{WL}. \quad (3.73b)$$

An Gleichung (3.73a) ist zu sehen, dass (3.72e) durch (3.70) direkt ersetzt werden kann und trotzdem weiterhin erfüllt bleibt. Die Restriktion auf Ω_{ll} bedeutet dabei, dass nur die Zeilen der Gleichung (3.72e) ersetzt werden, deren zugehörige Ansatzfunktionen in Ω_κ verschwinden. Da (3.72e) für $k_0 = 0, \gamma = 0$ verschwindet, stellt dieser Sonderfall keinerlei Probleme dar.

Das Finden einer geeigneten Gleichung, die durch (3.71) ersetzt wird, ist dagegen komplizierter. An (3.73b) ist zu erkennen, dass das Einbringen von (3.71) für (3.72c) dazu führen würde, dass (3.72c) für den Fall $\gamma = 0$ nicht länger erfüllt wäre. Damit könnten beispielsweise TEM-Moden bei $k_0 = 0$ nicht korrekt dargestellt werden. Somit wird (3.72b) ersetzt, wobei allerdings der Nullraum der Matrix $\mathbf{R} \mathbf{I}_C$ beachtet werden muss. Dieser besteht aus den Feldern des $H^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$, dessen Dimension der ersten relativen Betti-Zahl β_1 entspricht und der demzufolge nur dann auftritt,

wenn mindestens zwei voneinander getrennte Elektroden in der Struktur vorhanden sind. Aufgrund dieses Nullraumes wird der diskrete Raum $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega)$, in dem (3.72c) liegt, weiter zerlegt. Die Aufspaltung erfolgt zum einen in die Komponenten des diskreten $V^1(\Omega_{WL}) \subset H^1(\Omega_{WL}, \tau_E)$ und zum anderen in die Komponenten des $\mathcal{V}_t^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) = \mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) \setminus V^1(\Omega_{WL})$. Die benötigte Basis des $V^1(\Omega_{WL})$ wird von β_1 Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung gebildet, die beliebigen Kanten zugeordnet sind, die die einzelnen Bäume der getrennten Elektroden miteinander verbinden. Dies kann folgendermaßen erklärt werden: Nach [GK04, Kap. 1G] bilden Folgen von Kanten, die jeweils zwei Elektroden direkt miteinander verbinden, eine Basis für die erste relative Homologiegruppe. Weiterhin unterscheiden sich diese Folgen von Kanten und die Kanten, die die jeweiligen Bäume miteinander verbinden, lediglich durch Baum-Kanten. Die Ansatzfunktionen, die den Baum-Kanten zugeordnet sind, werden im Rahmen der Baum-Kobaum-Eichung zu Null gesetzt, sodass die Ansatzfunktionen der Kanten, die jeweils zwei getrennte Bäume miteinander verbinden, eine Basis des diskreten $V^1(\Omega_{WL})$ bilden.

Analog zur Matrix \mathbf{I}_C wird im Folgenden die Matrix \mathbf{B}_g konstruiert, die die Unbekannten der Funktionen des $V^1(\Omega_{WL})$ der Gesamtheit aller Unbekannten des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ zuordnet. Die Matrix, die die Unbekannten des $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) \setminus V^1(\Omega_{WL})$ der Gesamtheit der Unbekannten des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ zuweist, wird mit \mathbf{I}_T bezeichnet. Die Gleichung (3.72b) zerfällt damit in die folgenden zwei Gleichungen:

$$\mathbf{I}_T^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{I}_T^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{I}_T^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{I}_T^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{I}_T^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{\psi}), \quad (3.74a)$$

$$\mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{\psi}). \quad (3.74b)$$

Auf diese Weise ist sichergestellt, dass (3.74a) nicht im Nullraum der Matrix $\mathbf{R}\mathbf{I}_C$ liegt.

Allerdings kann (3.74a) nicht direkt durch (3.71) ersetzt werden. Zunächst muss gewährleistet werden, dass beide Gleichungen die gleiche Anzahl an Zeilen besitzen, um zu gewährleisten, dass die entstehende Matrix weiterhin quadratisch ist. Während die Anzahl der Zeilen von (3.74a) der Dimension des $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ minus β_1 entspricht, ist die Anzahl der Zeilen von (3.71) gleich der Dimension des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$. Für Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung entspricht die Dimension des $\mathcal{V}_c^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ der Anzahl der Kobaum-Kanten N_C , und die Dimension des $\mathcal{V}^0(\Omega_{WL})$ der Anzahl der Flächen N_F . Werden Ansatzfunktionen höherer Ordnung verwendet, erhöht sich die Dimension der beiden Räume gleichermaßen, sodass die Ersetzung dieser Anteile direkt durchgeführt wird. Kritisch sind also lediglich die Ansatzfunktionen niedrigster Ordnung.

Um den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Kobaum-Kanten, der Flächen sowie der ersten relativen Betti-Zahl analysieren zu können, werden zunächst weitere Größen eingeführt: So wird die Anzahl der freien Knoten mit N_N , die Anzahl aller freien Kanten mit N_E und die Anzahl der Baum-Kanten mit N_T bezeichnet. Nach

[GK04, S.138] gilt

$$N_F - N_E + N_N = N_F - N_C - N_T + N_N = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2, \quad (3.75)$$

wobei β_i die i -te relative Betti-Zahl ist. Für diese gilt nach [GK04, Kap. 1G]

$$\beta_0 = 0, \quad \text{da } \tau_E \neq \emptyset, \quad (3.76a)$$

$$\beta_1 = N_{\tau_E} - 1, \quad (3.76b)$$

$$\beta_2 = \begin{cases} 1, & \text{falls } \tau_H = \emptyset, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.76c)$$

wobei N_{τ_E} wieder die Anzahl der disjunkten Elektroden bezeichnet. Damit und mit $N_T = N_N$ folgt aus (3.75)

$$N_F - (N_C - \beta_1) = \beta_2. \quad (3.77)$$

Es müssen also zwei Fälle unterschieden werden: Wenn $\tau_h \neq \emptyset$ und somit $\beta_2 = 0$ gilt, stimmt die Anzahl der Zeilen von (3.74a) mit der Anzahl der Zeilen von (3.71) überein und (3.74a) wird direkt ersetzt. Gilt hingegen $\tau_h = \emptyset$ und $\beta_2 = 1$, dann besitzt die Divergenzbedingung (3.71) eine Zeile mehr als die zu ersetzende Gleichung (3.74a). Um dennoch ein quadratisches System zu erhalten, wird (3.71) im Sinne einer Normalengleichung auf den Bildraum von $\mathbf{T}_{Bz}\mathbf{R}\mathbf{I}_T$ projiziert:

$$\mathbf{I}_T^T \mathbf{D}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{D} \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{I}_T^T \mathbf{D}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{D} \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}. \quad (3.78)$$

Durch das Einprägen der obigen Gleichung anstelle der Divergenzbedingung (3.71) ist zunächst fraglich, ob (3.71) exakt erfüllt ist. Um dies zu untersuchen, wird das entstehende Residuum

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{R} \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{v}_{Bz} \quad (3.79)$$

betrachtet, das nach (3.78) orthogonal auf dem Bildraum von $\mathbf{T}_{Bz}\mathbf{R}\mathbf{I}_T$ steht:

$$\mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{r}_B = \mathbf{0}. \quad (3.80)$$

Durch einen Vergleich von (3.7c) mit (3.35c) wird deutlich, dass es sich bei $\mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz}$ um die Diskretisierung des Gradienten auf dem dualen Gitter handelt. Wie in Abschnitt 2.6 dargestellt wurde, besteht der Nullraum des Gradienten aus den Feldern des $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$. Damit ein Residuum \mathbf{r}_B ungleich Null entstehen kann, das aber dennoch im Nullraum der Matrix $\mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz}$ liegt, muss also \mathbf{r}_B ein diskretes Feld des $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ sein. Diese Felder können nach Abschnitt 2.6 nicht über die Divergenz eines Feldes des $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega_{WL}, \tau_E)$ dargestellt werden. Die einzige Möglichkeit, dass solch ein Residuum entsteht, ist demnach, dass \mathbf{v}_{Bz} ein diskretes Feld des $\mathcal{H}_M^0(\Omega_{WL})$ ist. Da allerdings das Auftreten dieser Felder mittels des Lagrange-Multiplikators p_c verhindert wurde, folgt daraus, dass \mathbf{r}_B nicht im Nullraum der Matrix $\mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz}$

liegen kann und somit $\mathbf{r}_B = \mathbf{0}$ gelten muss. Damit ist sichergestellt, dass die Divergenzbedingung (3.71) exakt erfüllt ist.

Damit sind alle benötigten Fälle abgedeckt, und es ist sichergestellt, dass die Zweifeld-Formulierung auch für niedrige Frequenzen bis hin zum statischen Grenzfall verlässliche Ergebnisse liefert. Der Übersichtlichkeit halber werden im Folgenden die finalen Gleichungen des diskreten Eigenwertproblems für den Fall $\tau_H \neq \emptyset$ sowie für den Fall $\tau_H = \emptyset$ zusammenfassend angegeben.

Für $\tau_H \neq \emptyset$ und somit $\beta_2 = 0$ muss folgendes Eigenwertproblem gelöst werden:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.81a)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.81b)$$

$$\mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.81c)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{v}_{Et} + jk_0 \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.81d)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{I}_C^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.81e)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi = -\gamma \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez}, \quad (3.81f)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} \mathbf{v}_{Bt} + \mathbf{T}_{\kappa z} \mathbf{v}_{Ez} + jk_0 \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}. \quad (3.81g)$$

Es sei angemerkt, dass (3.81c) entfällt, falls nur eine Elektrode vorhanden ist.

Gilt $\tau_H = \emptyset$, nimmt das Eigenwertproblem die folgende Form an:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{G}^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.82a)$$

$$\mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{D} \mathbf{v}_{Bc} - \gamma \mathbf{I}_T^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0} \quad (3.82b)$$

$$\mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Ez} - jk_0 (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}) = -\gamma (\mathbf{B}_g^T \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{B}_g^T \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi), \quad (3.82c)$$

$$-\mathbf{R} \mathbf{v}_{Et} + p_c \mathbf{v}_c + jk_0 \mathbf{v}_{Bz} = \mathbf{0}, \quad (3.82d)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{I}_C^T \mathbf{R}^T \mathbf{T}_{Bz} \mathbf{v}_{Bz} - \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{\kappa t} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) - jk_0 \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Et} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi) \\ = -\gamma \mathbf{I}_C^T \mathbf{T}_{Bt} (\mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Bc} + \mathbf{G} \mathbf{v}_{Az}), \end{aligned} \quad (3.82e)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{I}_C \mathbf{v}_{Ec} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Et} \mathbf{G} \mathbf{v}_\psi = -\gamma \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez}, \quad (3.82f)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{T}_{Bt} \mathbf{v}_{Bt} + \mathbf{T}_{\kappa z} \mathbf{v}_{Ez} + jk_0 \mathbf{T}_{Ez} \mathbf{v}_{Ez} = \mathbf{0}, \quad (3.82g)$$

$$\mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_{Bz} = 0. \quad (3.82h)$$

Im nächsten Abschnitt wird die Zuverlässigkeit der hergeleiteten Formulierung anhand numerischer Beispiele demonstriert.

3.4 Numerische Beispiele

Da die Stabilisierung der Formulierung maßgeblich von der Topologie des Feldgebietes abhängt, werden in diesem Abschnitt drei numerische Beispiele mit verschiede-

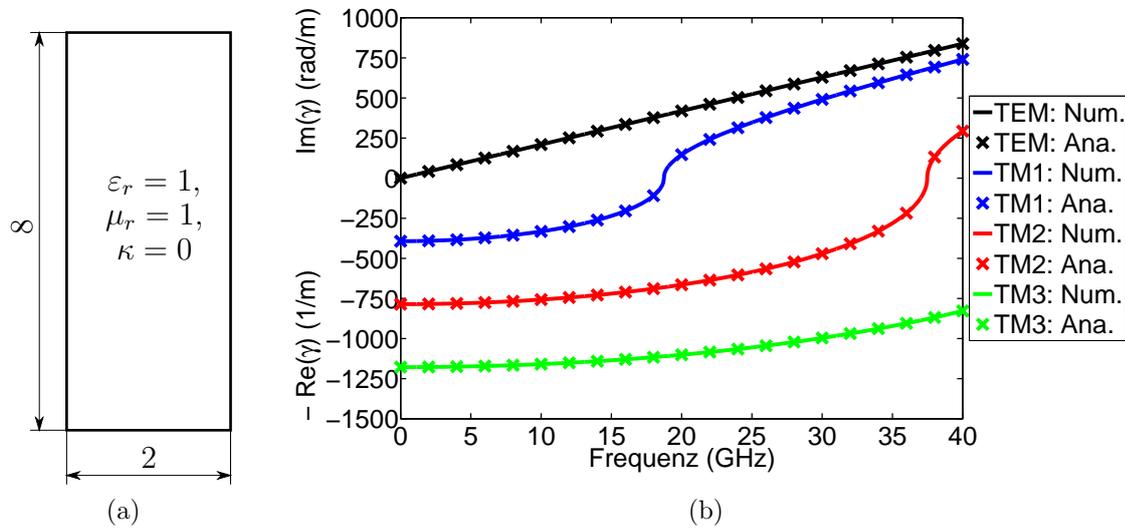


Abbildung 3.3: PPWL: (a) Geometrie, Abmessungen in mm, (b) Dispersions-Diagramm der vier dominanten Moden.

nen relativen Betti-Zahlen betrachtet. Die folgenden Simulationen wurden alle anhand einer Implementierung in MATLAB R2013b auf einem Intel[®] Core i5-3570K, 3,4 GHz Prozessor mit sowie 32 GB RAM durchgeführt. Zur Lösung der algebraischen Eigenwertprobleme wurde der interne MATLAB Eigenwertlöser für schwach besetzte verallgemeinerte Eigenwertprobleme verwendet.

3.4.1 Parallelplattenwellenleiter

Als erstes numerisches Beispiel wird der PPWL aus Abbildung 3.3a analysiert. Die Ober- und Unterseite der dargestellten Struktur werden als perfekt elektrische Leiter modelliert, während beide Seitenwände eine perfekt magnetisch leitende Randbedingung tragen. Somit besitzt die Struktur zwei Elektroden und der Rand τ_H ist nicht leer. Damit gilt: $\beta_1 = 1$ und $\beta_2 = 0$. Unter Verwendung von Ansatzfunktionen zweiter Ordnung werden die ersten vier Moden in einem Frequenzband von $[0, 40]$ GHz an 4001 diskreten Frequenzpunkten berechnet. Aufgrund der geringen Breite der Struktur sind die ersten vier Moden der TEM-, der TM1-, der TM2- sowie der TM3-Mode. Die berechneten Ausbreitungskoeffizienten sowie die nach [Poz11, Kapitel 3.2] analytisch berechneten Referenzwerte sind im Dispersions-Diagramm in Abbildung 3.3b dargestellt. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der Werte zu erkennen. Der relative Fehler in γ ,

$$e_\gamma = \frac{|\gamma_{Ref} - \gamma_{Num}|}{|\gamma_{Ref}|}, \quad (3.83)$$

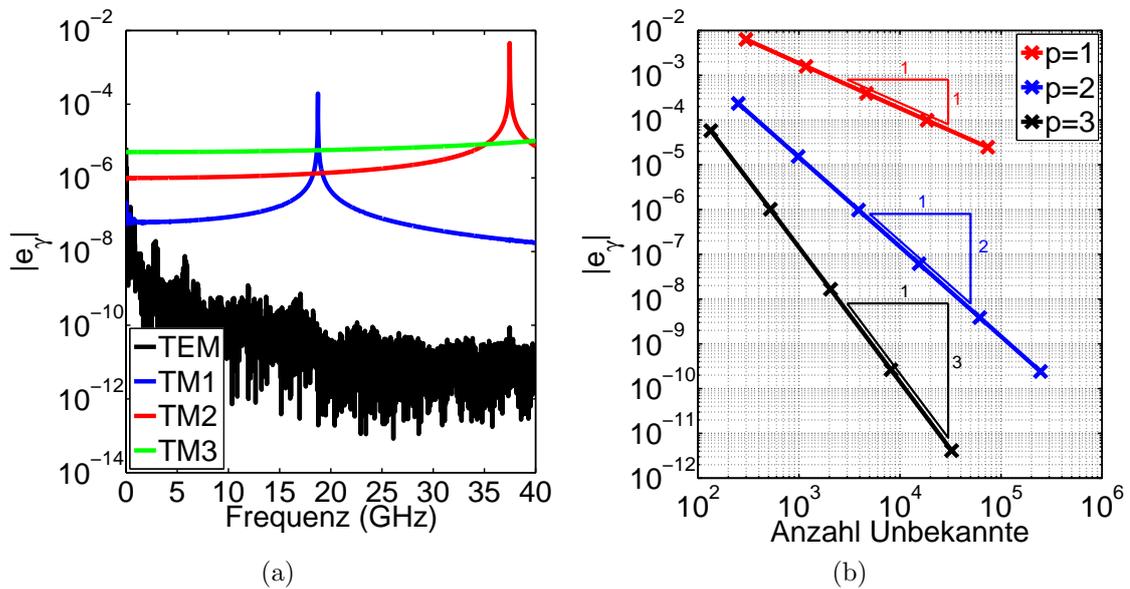


Abbildung 3.4: PPWL: (a) relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten über der Frequenz, (b) Fehler des Ausbreitungskoeffizienten des TM1-Modes über der Anzahl der Unbekannten.

ist für die vier berechneten Moden in Abbildung 3.4a gezeigt und liegt in dem gesamten betrachteten Frequenzband unter 10^{-2} , abseits der Grenzfrequenz sogar unter 10^{-5} . Der vergleichsweise hohe Fehler nahe der Grenzfrequenz lässt sich durch die hohe Sensitivität des Ausbreitungskoeffizienten [Poz11, S. 104]

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial k} \right|_{k=k_c} \rightarrow \infty. \quad (3.84)$$

erklären, wobei $k = k_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ die Wellenzahl und k_c die Grenzwellenzahl bezeichnen.

Um die Zuverlässigkeit der vorgeschlagenen Stabilisierung für niedrige Frequenzen zu demonstrieren, wird weiterhin eine h -Konvergenzanalyse bei 0 Hz für den TM1-Mode durchgeführt. Dazu wird das ursprüngliche Netz mehrfach gleichmäßig verfeinert und nach jedem Verfeinerungsschritt der Ausbreitungskoeffizient des TM1-Modes berechnet. Anschließend wird der Fehler bzgl. der analytischen Lösung im doppelt-logarithmischen Maßstab über der Anzahl der Unbekannten dargestellt. Das so erhaltene Diagramm ist in Abbildung 3.4b für Ansatzfunktionen bis zur Ordnung $p = 3$ dargestellt. Neben den numerisch berechneten Kurven sind auch Referenzkurven zu sehen, die die theoretisch erreichbare Steigung von $-p$ [VD02] aufweisen. An diesem Vergleich lässt sich eine gute Übereinstimmung mit der theoretischen Konvergenzrate ablesen, was die Zuverlässigkeit der Formulierung sowie der Stabilisierung für niedrige Frequenzen unterstreicht.

Abschließend wird die Zweifeld-Formulierung mit der Potential-Formulierung aus

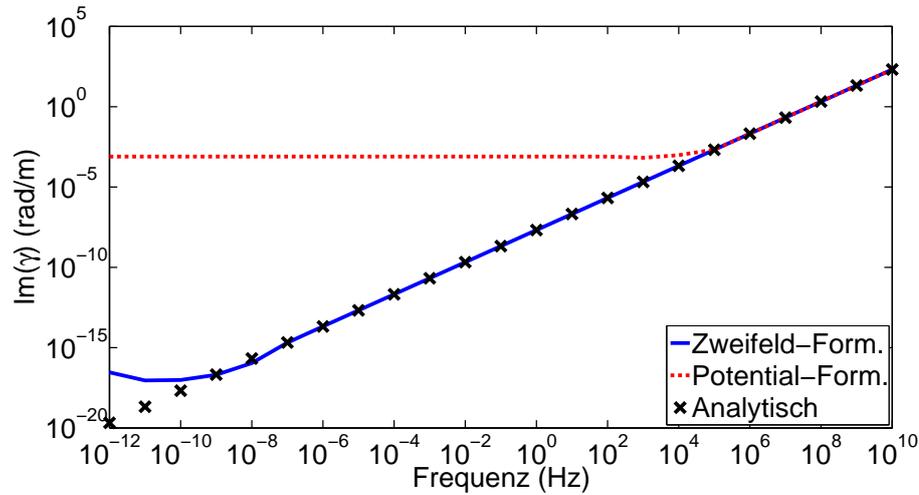


Abbildung 3.5: PPWL: Ausbreitungskoeffizient des TEM-Modes über der Frequenz.

[FHDE04] verglichen. Diese führt im Gegensatz zur vorgeschlagenen Formulierung auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem, dessen Eigenwert dem Quadrat des Ausbreitungskoeffizienten entspricht. Wie bereits am Anfang dieses Kapitels angedeutet, führt dies zu einer schlechteren Auflösung von Ausbreitungskoeffizienten mit sehr kleinem Betrag. Diese Behauptung wird nun am Fall des TEM-Modes verifiziert, dessen Ausbreitungskoeffizient für niedrige Frequenzen gegen Null strebt. Um die Vorteile der Zweifeld-Formulierung zu verdeutlichen, wird der PPWL mit beiden Formulierungen in dem Frequenzband $[10^{-12}, 10^{10}]$ Hz analysiert. Ein Vergleich der berechneten Ausbreitungskoeffizienten ist in Abbildung 3.5 gezeigt. Es ist zu sehen, dass die Ergebnisse für hohe Frequenzen identisch sind und auch mit den analytischen Ergebnissen sehr gut übereinstimmen. Wird die Frequenz jedoch immer weiter verringert, beginnt der Ausbreitungskoeffizient der Potential-Formulierung bei etwa 10^5 Hz zu stagnieren und nimmt auch für niedrigere Frequenzen nicht weiter ab. Im Gegensatz dazu liefert die Zweifeld-Formulierung bis zu einer Frequenz von 10^{-7} Hz noch verlässliche Ergebnisse. Dieser Gewinn an Genauigkeit lässt sich dadurch erklären, dass die Auflösung, mit der der betragsmäßig kleinste Eigenwert λ_1 numerisch dargestellt werden kann, von dem Verhältnis $|\lambda_1/\lambda_2|$ abhängt, wobei λ_2 der betragsmäßig zweitkleinste Eigenwert ist. Für den betrachteten PPWL bei 0 Hz entspricht der betragsmäßig kleinste Eigenwert dem Ausbreitungskoeffizienten des TEM-Modes, während der betragsmäßig zweitkleinste Eigenwert dem Ausbreitungskoeffizienten des TM1-Modes entspricht. Das Verhältnis $|\lambda_1/\lambda_2|$ strebt in diesem Fall also gegen Null. Da die Potential-Formulierung allerdings nach dem Quadrat des Ausbreitungskoeffizienten löst, gilt

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\gamma_{TEM}}{\gamma_{TM1}} \right|, & \text{für die Zweifeld-Formulierung,} \\ \left| \frac{\gamma_{TEM}^2}{\gamma_{TM1}^2} \right|, & \text{für die Potential-Formulierung.} \end{cases} \quad (3.85)$$

Aus diesem Grund ist für die Potential-Formulierung die kritische Frequenz, unter

Tabelle 3.1: PPWL: Simulationsdaten.

Formulierung	Zweifeld	Potential
Unbekannte	15 455	7 231
Rechenzeit (s)*	0,92	0,20

* In einem Frequenzpunkt.

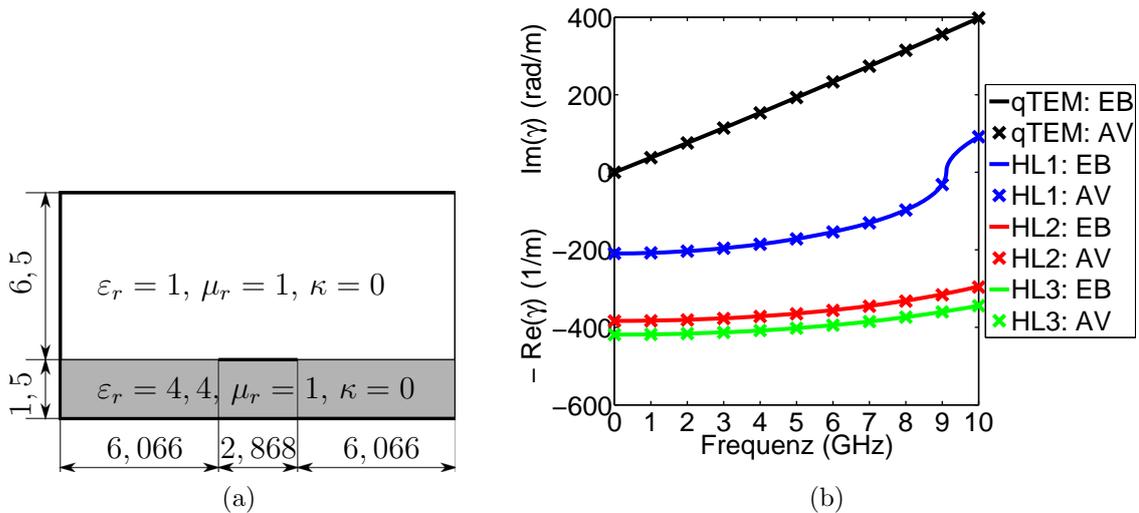


Abbildung 3.6: MSL : (a) Geometrie, Abmessungen in mm, (b) Dispersions-Diagramm der vier dominanten Moden.

der γ_{TEM} nicht mehr korrekt dargestellt werden kann, um einige Größenordnungen höher als für die Zweifeld-Formulierung.

Die Simulationsdaten in Tabelle 3.1 zeigen den Preis dieser besseren Auflösung: Im Vergleich zur Potential-Formulierung weisen die Matrizen der Zweifeld-Formulierung wesentlich höhere Dimension auf. Zudem ist die Rechenzeit, womit in Tabelle 3.1 die Zeit gemeint ist, die zum Lösen des verallgemeinerten Eigenwertproblems in einem Frequenzpunkt benötigt wird, für die Zweifeld-Formulierung wesentlich höher. Dies liegt zum einen an der bereits angesprochenen höheren Dimension der Matrizen, zum anderen sind die Matrizen der Potential-Formulierung symmetrisch, wohingegen die der Zweifeld-Formulierung unsymmetrisch sind.

3.4.2 Geschirmte Mikrostreifenleitung

Das zweite Beispiel bildet der Querschnitt der geschirmten Mikrostreifenleitung (MSL), die in Abbildung 3.6a dargestellt ist. Die Schirmung sowie der Leiter auf dem Substrat sind als perfekte elektrische Leiter modelliert. Die Struktur besitzt

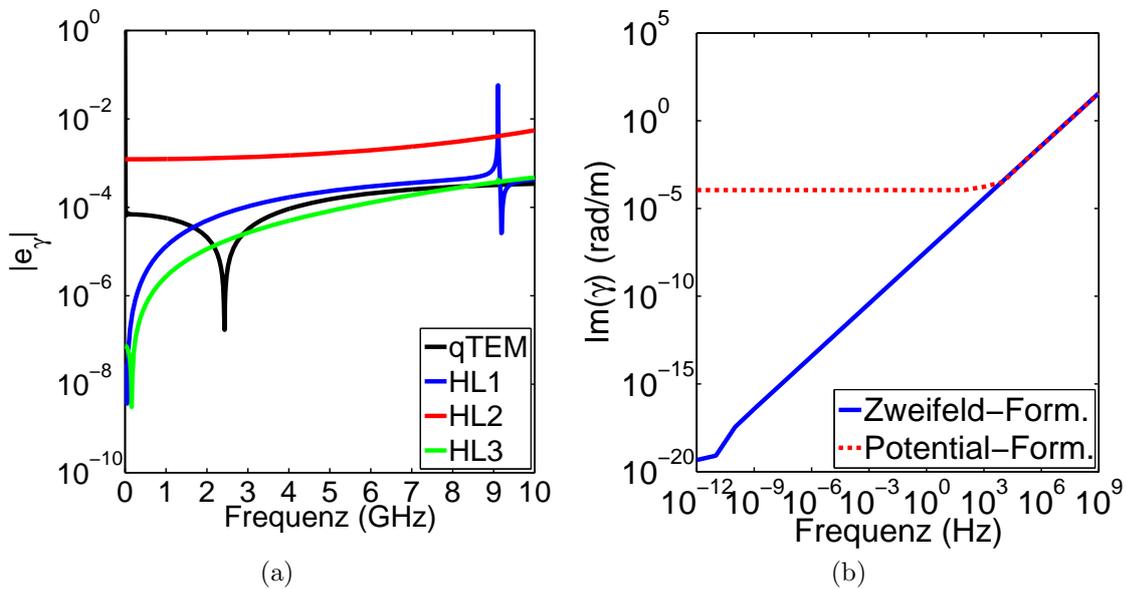


Abbildung 3.7: MSL: (a) relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten über der Frequenz, (b) Ausbreitungskoeffizient des quasi-TEM-Modes über der Frequenz.

zwei Elektroden, der Rand τ_H ist leer, und es gilt $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$. Da für diese Struktur ohne Weiteres keine analytische Lösung angegeben werden kann, werden die berechneten Ausbreitungskoeffizienten mit den Ergebnissen der Potential-Formulierung [FHDE04] verglichen. Um diese Referenzergebnisse zu erzeugen, wird das initiale Netz mehrfach gleichmäßig verfeinert, und es werden Ansatzfunktionen der Ordnung $p = 4$ verwendet. Ein Vergleich der berechneten Ausbreitungskoeffizienten der vier ersten Moden ist in Abbildung 3.6b gezeigt. Diese vier gezeigten Moden sind zum einen der dominante quasi-TEM-Mode sowie drei Hohlleitermoden, die aus der Schirmung resultieren. An Abbildung 3.6b ist eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse zu erkennen. Der Fehler, in Abbildung 3.7a dargestellt, liegt, mit Ausnahme des ersten Hohlleitermodes bei der Grenzfrequenz und für den quasi-TEM-Mode bei 0 Hz, unter 10^{-2} . Der Ausschlag in der Nähe der Grenzfrequenz des ersten Hohlleitermodes lässt sich mit der hohen Sensitivität der Lösung nahe der Grenzfrequenz und der Tatsache, dass hier Netze unterschiedlicher Verfeinerung verwendet wurden, erklären. Der hohe Fehler im Ausbreitungskoeffizienten des quasi-TEM-Modes liegt an der begrenzten Fähigkeit der Potential-Formulierung, betragsmäßig kleine Ausbreitungskoeffizienten aufzulösen.

Dieses Phänomen soll im Folgenden näher untersucht werden. Dazu wird der Ausbreitungskoeffizient des quasi-TEM-Modes, analog zum vorherigen Beispiel, im Frequenzband $[10^{-12}, 10^9]$ Hz analysiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.7b zu sehen. Auch hier stimmen die berechneten Ausbreitungskoeffizienten für hohe Frequenzen sehr gut überein. Wird die Frequenz reduziert, weichen die Ergebnisse der Potential-Formulierung ab einer Frequenz von 10^5 Hz von dem erwarteten linearen

Tabelle 3.2: MSL: Simulationsdaten.

Formulierung	Zweifeld	Potential
Unbekannte	23 041	10 656
Rechenzeit (s)*	11,29	0,31

* An einem Frequenzpunkt.

Verlauf ab. Im Gegensatz dazu folgen die Ausbreitungskoeffizienten der Zweifeld-Formulierung dem erwarteten Verlauf bis zu einer Frequenz von 10^{-9} Hz. Auch für den quasi-TEM-Mode der MSL kann mit der vorgestellten Formulierung eine höhere Auflösung für niedrige Frequenzen erreicht werden. An dieser Stelle wird auch deutlich, weshalb der relative Fehler im Ausbreitungskoeffizienten des quasi-TEM-Modes bei 0 Hz in Abbildung 3.7a so groß ist: Das berechnete Ergebnis der Zweifeld-Formulierung ist um viele Größenordnungen kleiner als das aus der Potential-Formulierung. Wird damit nun der relative Fehler nach (3.83) berechnet, ergibt sich ungefähr 1. Der Vergleich der Dimensionen der resultierenden Matrizen sowie der benötigten Rechenzeit, um das verallgemeinerte Eigenwertproblem in einem Frequenzpunkt zu lösen, ist in Tabelle 3.2 gegeben. Dieser unterstreicht die Feststellung des vorherigen Beispiels, dass nämlich der Preis für die höhere Auflösung betragsmäßig sehr kleiner Ausbreitungskoeffizienten größere Matrizen und wesentlich längere Rechenzeiten sind.

3.4.3 Rechteckhohlleiter mit dispersivem Material

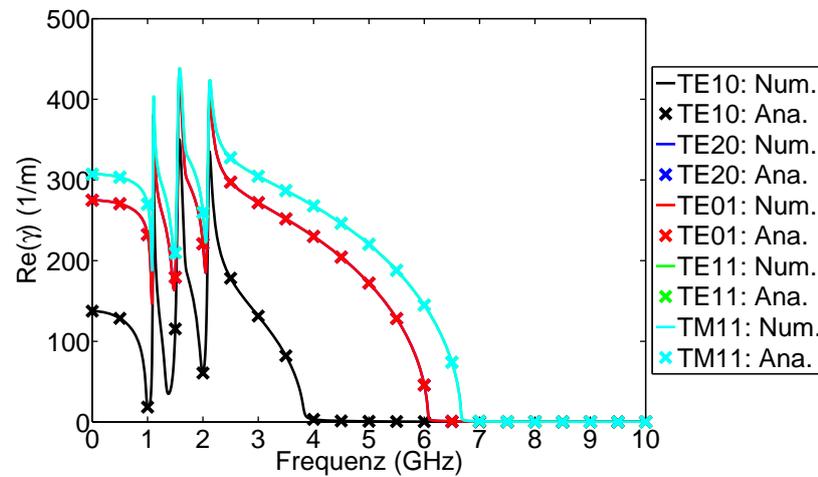
Das dritte und letzte Beispiel im Rahmen der Wellenleiter-Formulierung bildet der Querschnitt eines Rechteckhohlleiters (RHL) der Breite 22,86 mm und der Höhe 11,43 mm. Im Inneren des RHL befindet sich ein Material, dessen Permittivität und Permeabilität frequenzabhängig sind. Diese Frequenzabhängigkeit ist jeweils durch ein zweipoliges Lorentz-Modell gegeben [ASG15]. Es gilt

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{i_L=1}^2 \frac{G_{L,i_L} \Delta\varepsilon_{L,i_L} \omega_{e,i_L}^2}{\omega_{e,i_L}^2 + 2j\omega\delta_{e,i_L} - \omega^2}, \quad (3.86a)$$

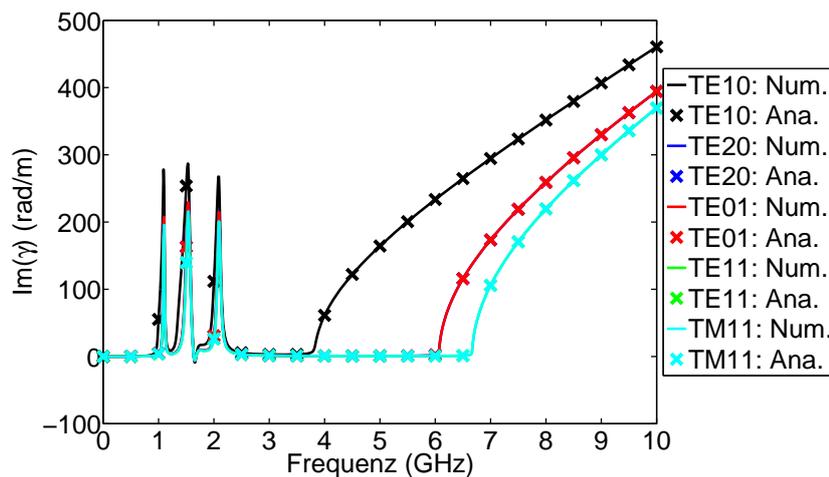
$$\mu_r(\omega) = \mu_\infty + \sum_{j_L=1}^2 \frac{F_{L,j_L} \Delta\mu_{L,j_L} \omega_{m,j_L}^2}{\omega_{m,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,j_L} - \omega^2}, \quad (3.86b)$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_\infty &= 3,1, \Delta\varepsilon_{L,1} = \Delta\varepsilon_{L,2} = 2,1, G_{L,1} = 0,2, G_{L,2} = 0,4, \omega_{e,1} = 3,1\pi \cdot 10^9, \\ \omega_{e,2} &= 2,2\pi \cdot 10^9, \delta_{e,1} = 0,025\omega_{e,1}, \delta_{e,2} = 0,01\omega_{e,2}, \Delta\mu_{L,1} = \Delta\mu_{L,2} = 1,9, \\ \mu_\infty &= 1,8, F_{L,1} = 0,9, F_{L,2} = 0,5, \omega_{m,1} = 3,3\pi \cdot 10^9, \omega_{m,2} = 4,2\pi \cdot 10^9, \\ \delta_{m,1} &= 0,003\omega_{m,1}, \delta_{m,2} = 0,015\omega_{m,2}. \end{aligned} \quad (3.86c)$$



(a)



(b)

Abbildung 3.8: RHL: Ausbreitungskoeffizienten der fünf dominanten Moden: (a) Realteil, (b) Imaginärteil.

Der Rand des RHLs wird als perfekt elektrischer Leiter modelliert. Der RHL besitzt nur eine Elektrode, und der Rand τ_H verschwindet. Es gilt also $\beta_1 = 0$ und $\beta_2 = 1$. Es werden die Ausbreitungskoeffizienten der fünf ersten Moden in dem Frequenzband $[0, 10]$ GHz berechnet und mit den analytischen Ergebnissen aus [Poz11, Kapitel 3.3] verglichen. Die ersten Moden sind der TE10-, der TE20-, der TE01-, der TE11- sowie der TM11-Mode. Aufgrund der dielektrischen und magnetischen Verluste, die aus der Frequenzabhängigkeit des Materials resultieren, sind die Ausbreitungskoeffizienten im betrachteten Frequenzband komplexwertig. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden Real- und Imaginärteil der Ausbreitungskoeffizienten getrennt voneinander in Abbildung 3.8a bzw. Abbildung 3.8b dargestellt. Dabei lie-

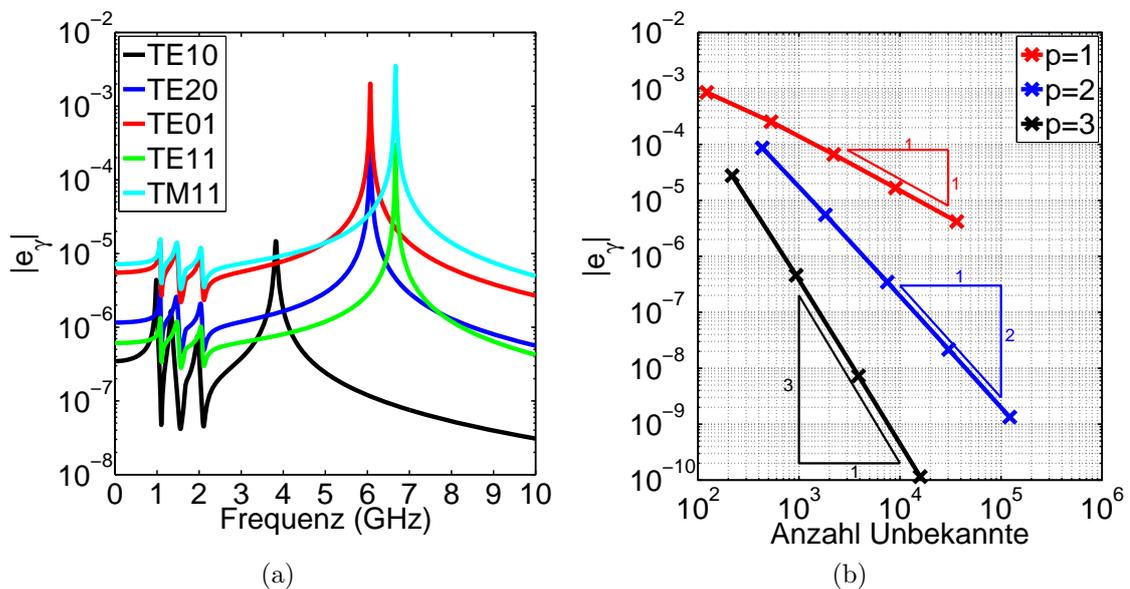


Abbildung 3.9: RHL: relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten: (a) der fünf dominanten Moden über der Frequenz, (b) des TE10-Modes über der Anzahl der Unbekannten bei 0 Hz.

gen die Ausbreitungskoeffizienten des TE20- bzw. des TE11- Modes unter denen des TE01- bzw. TM11-Modes und sind daher in den Abbildungen nicht zu sehen. In Abbildung 3.8a bzw. Abbildung 3.8b ist eine sehr gute Übereinstimmung der numerischen und analytischen Werte zu beobachten. Diese Beobachtung wird weiterhin von dem Fehler e_γ , in Abbildung 3.9a gezeigt, unterstützt, der in dem betrachteten Frequenzband unter 10^{-2} , abseits der Grenzfrequenzen, sogar unterhalb von 10^{-4} liegt. Da in der vorliegenden Implementierung der Potential-Formulierung keine frequenzabhängigen Materialparameter vorgesehen sind, sei im Rahmen dieses Beispiels auf einen Vergleich der beiden Formulierungen verzichtet. Die Dimension der aus der Zweifeld-Formulierung resultierenden Matrizen ist 30 338 und die Zeit, die zum Lösen des Eigenwertproblems an einem einzelnen Frequenzpunkt beträgt 27,53 s.

Um weiterhin zu zeigen, dass die vorgestellte Stabilisierung für niedrige Frequenzen auch für die Topologie des RHLs verlässliche Ergebnisse liefert, wird eine h -Konvergenzanalyse für den Ausbreitungskoeffizienten des TE10-Modes bei 0 Hz durchgeführt. Das Vorgehen ist dabei analog wie im ersten Beispiel und die resultierenden Kurven sind für Ansatzfunktionen bis zur Ordnung $p = 3$ in Abbildung 3.9b dargestellt. Auch hier sind zusätzlich die theoretisch erreichbaren Konvergenzraten eingezeichnet. Wie zu erkennen ist, werden diese auch für den RHL erreicht.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine Zweifeld-Formulierung zur modalen Analyse von axial homogenen Wellenleitern vorgestellt, die auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem in der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte führt. Allerdings ist diese Formulierung in ihrer Grundform für niedrige Frequenzen instabil. Der Grund für die Instabilität wurde analysiert und eine Methodik zur Stabilisierung entwickelt. Ein Vergleich mit einer konkurrierenden Potential-Formulierung hat gezeigt, dass der neue Ansatz in der Lage ist, betragsmäßig sehr kleine Ausbreitungskoeffizienten besser aufzulösen. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass der neue Ansatz auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem führt, dessen Eigenwert direkt dem gesuchten Ausbreitungskoeffizienten entspricht, während die Potential-Formulierung auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem führt, dessen Eigenwert dem Quadrat des Ausbreitungskoeffizienten entspricht. Der Preis, der für diese bessere Auflösung zu zahlen ist, ist, dass die Eigenwertprobleme des neuen Ansatzes wesentlich mehr Freiheitsgrade besitzen und somit die Zeit zum Lösen höher ist. Die theoretischen Überlegungen wurden an numerischen Beispielen überprüft, die auch die Korrektheit der Stabilisierung für niedrige Frequenzen demonstrieren.

Kapitel 4

Effiziente Analyse passiver Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich

Ziel dieses Kapitels ist es, eine effiziente Methode zur Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich mittels Netzwerkmatrizen herzuleiten. Ausgehend von den Modellen aus Kapitel 2 werden dazu zwei unterschiedliche FE-Formulierungen vorgestellt. Dies ist zum einen die weitverbreitete Z-Formulierung nach [DeP83], [WMF83], [WP86], die in Abschnitt 4.1.1 dargelegt wird. Diese Formulierung besticht durch ihre Einfachheit und die Tatsache, dass sie für verlustlose Strukturen auf rein reellwertige Matrizen führt, im resultierenden Gleichungssystem treten allerdings unphysikalische, innere Resonanzen auf. Diese resultieren aus der Art der Anregung und werden in Abschnitt 4.1.2 näher analysiert. Um deren Auftreten zu verhindern, wird in Abschnitt 4.1.3 eine alternative Formulierung, nämlich die S-Formulierung nach [A2], vorgestellt. Diese Formulierung vermeidet das Auftreten der inneren Resonanzen, führt allerdings auch für verlustfreie Strukturen auf komplexwertige Gleichungssysteme. Ein Vergleich beider Formulierungen anhand numerischer Beispiele ist in Abschnitt 4.1.4 durchgeführt.

Eine wichtige Gemeinsamkeit beider Formulierungen ist, dass beide auf ein lineares Gleichungssystem mit großen, schwach besetzten und frequenzabhängigen Matrizen führen. Das Berechnen der Netzwerkmatrizen über einen großen Frequenzbereich an viele Frequenzstützstellen erfordert daher das Lösen des Gleichungssystems in jedem Frequenzpunkt, was mit großem numerischem Aufwand verbunden ist. Um diesen Aufwand zu reduzieren und die Netzwerkmatrizen effizienter über breite Frequenzbänder berechnen zu können, werden Methoden der MOR angewendet. Diese Arbeit beschränkt sich dabei auf die RBM nach [PR06], [RHP07].

Eine entscheidende Voraussetzung zur Anwendung der RBM nach [PR06], [RHP07]

ist, dass das zugrunde liegende FE-System affin in der Frequenz parametrisiert ist. Dies ist dann der Fall, wenn die speisenden Wellenleiter in der transversalen Ebene homogenes Materialverhalten aufweisen und somit lediglich TE-, TM-, und TEM-Moden existieren. Eine kurze Zusammenfassung der Literatur zu diesem Fall wird in Abschnitt 4.2.1 gegeben. Diese bildet den Ausgangspunkt für den folgenden Teil der Arbeit, nämlich die Erweiterung der Methodik auf Strukturen, die von transversal inhomogenen Wellenleitern gespeist werden. Das resultierende FE-System ist in diesem Fall nicht affin in der Frequenz parametrisiert, sodass die Verfahren aus [PR06], [RHP07] nicht direkt angewendet werden können. Um diese Strukturen dennoch effizient analysieren zu können, wurde die RBM sowohl für die Z-Formulierung [B6] als auch für die S-Formulierung [A2], [B5] erweitert. Die Details dieser Erweiterungen sind in Abschnitt 4.2.2 gegeben.

Wie bereits erwähnt, führt die Z-Formulierung für verlustlose Strukturen auf reellwertige Matrizen, während die S-Formulierung selbst für verlustlose Strukturen komplexwertige Matrizen aufweist. Im Gegensatz dazu kommt es im Rahmen der Z-Formulierung zu inneren Resonanzen, die im Rahmen der S-Formulierung nicht auftreten. Im Rahmen der MOR können beide Formulierungen allerdings so kombiniert werden, dass ein Verfahren entsteht, das die Vorteile beider Formulierungen aufweist. Für Strukturen, die durch transversal homogene Wellenleiter gespeist werden, wurde diese Kombination in [FLDE10] vorgeschlagen. Die Erweiterung auf den allgemeinen Fall wurde in [B1] vorgestellt und ist ebenfalls in Abschnitt 4.2.2 angegeben.

Das in Abschnitt 4.2.3 vorgestellte selbst-adaptive Verfahren zur Erzeugung der reduzierten Modelle stellt eine Erweiterung der Methoden aus [FHMS11], [HSZ12], [dRM09], [KFK⁺11] dar und ist sowohl auf die Z- und die S-Formulierung als auch auf deren Kombination anwendbar. Den Abschluss dieses Kapitels bilden numerische Beispiele, anhand derer die theoretischen Überlegungen verifiziert werden.

4.1 Finite-Elemente Formulierungen zur Analyse passiver Mikrowellenstrukturen

Bei den folgenden Überlegungen wird davon ausgegangen, dass eine FE-Formulierung zur Analyse der speisenden Wellenleiter vorhanden ist. Dazu kann beispielsweise die Formulierung aus Kapitel 3 oder eine Formulierung aus der Literatur [FL91], [LSC91], [VD02], [LLL03], [FHDE04] verwendet werden. Da die entwickelte Methodik unabhängig von der Formulierung für die Analyse der Wellenleiter ist, wird im Folgenden auf die Wahl einer speziellen Formulierung verzichtet und die Methodik für eine allgemeine Wellenleiter-Formulierung präsentiert. Es wird davon ausgegangen, dass das verallgemeinerte Eigenwertproblem zur Bestimmung des i -ten Modes

des w -ten Wellenleiters, $i \in [1, \dots, M_w]$, $w \in [1, \dots, N_P]$ die folgende Form annimmt:

$$\left(\sum_{l=1}^{L^w} \alpha_l^w(k_0) \mathbf{A}_l^w \right) \mathbf{v}_i = \lambda_i \left(\sum_{k=1}^{K^w} \beta_k^w(k_0) \mathbf{B}_k^w \right) \mathbf{v}_i, \quad L^w, K^w \ll N_w, \quad (4.1)$$

wobei nur die skalaren Funktionen α_l^w, β_k^w von der Frequenz abhängen, während die Matrizen $\mathbf{A}_l^w, \mathbf{B}_k^w$ der Dimension N_w konstant sind. Der Eigenwert λ_i entspricht in der Regel dem Ausbreitungskoeffizienten γ_i bzw. dessen Quadrat. Es kann leicht überprüft werden, dass sowohl die Formulierung aus Kapitel 3 als auch alle zuvor zitierten Formulierungen diese Bedingung erfüllt. Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden davon ausgegangen, dass jeder speisende Wellenleiter mit der gleichen Formulierung analysiert wird. Außerdem wird angenommen, dass die Eigenvektoren \mathbf{v}_i so normiert sind, dass die Felder der Beziehung (2.43) genügen.

4.1.1 Die Impedanz-Formulierung

Im Rahmen der Z-Formulierung entsprechen die Eingänge des Systems den modalen Strömen, während die modalen Spannungen die Ausgänge darstellen. Die in praktischen Anwendungen wichtigen Streuparameter werden anschließend aus der Impedanzmatrix nach (2.54a) berechnet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier das zu lösende Randwertproblem zur Bestimmung des Eintrags $Z_{k,l}$ der Impedanzmatrix nochmals angegeben:

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l + jk_0 \eta_0 \kappa \mathbf{E}_l - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_l = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.2a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.2b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l) \times \hat{\mathbf{n}}] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.2c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) - \eta \frac{j}{k_0 \eta_0} \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}_l) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_R, \quad (4.2d)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) = -jk_0 \eta_0 \hat{\mathbf{h}}_l \quad \text{auf } \Gamma_P, \quad (4.2e)$$

mit dem Ausgang

$$Z_{k,l} = b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}_l). \quad (4.3)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{E}_l die elektrische Feldstärke, die sich durch die Anregung mittels $\hat{\mathbf{h}}_l$ einstellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in (4.2) auf die explizite Kennzeichnung der Frequenzabhängigkeit der Materialparameter verzichtet. Es wird jedoch weiterhin davon ausgegangen, dass diese den Materialmodellen aus Abschnitt 2.2 genügen.

Da (4.2a) Größen des dualen Gitters in Beziehung setzt, wird das Randwertproblem (4.2) zunächst in die schwache Form überführt. Dazu wird (4.2a) mit Funktionen

$\mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ multipliziert und gefordert, dass das Integral über Ω verschwindet:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \, d\Omega + jk_0 \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \eta_0 \kappa \mathbf{E}_l \, d\Omega \\ - k_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_l \, d\Omega = 0, \quad \forall \mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Das erste Integral lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{w}_j \cdot \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \, d\Omega \\ = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{w}_j \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_j \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \, d\Omega \end{aligned} \quad (4.5a)$$

$$= - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{w}_j \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_j \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \, d\Omega. \quad (4.5b)$$

Das Oberflächenintegral zerfällt in die Integrale über die Teilränder Γ_E , Γ_H , Γ_R und Γ_P . Aufgrund der Randbedingungen auf Γ_E (4.2b) und Γ_H (4.2c) verschwinden die Integrale über Γ_E und Γ_H . Somit gilt

$$\begin{aligned} - \oint_{\partial\Omega} (\mathbf{w}_j \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \\ = - \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_j \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_j \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} = jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_j \cdot \eta^{-1} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_P} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}} \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$= jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_R} (\mathbf{w}_j \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \eta^{-1} (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) \, d\Gamma + jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_P} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_j) \cdot \hat{\mathbf{h}}_l \, d\Gamma \quad (4.6c)$$

$$= jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_R} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_j) \cdot \eta^{-1} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_l) \, d\Gamma + jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_P} (\mathbf{w}_j \times \hat{\mathbf{h}}_l) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (4.6d)$$

Damit ergibt sich die schwache Form des Randwertproblems (4.2) zu

$$a_Z(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}_j) = jk_0 \eta_0 b(\hat{\mathbf{h}}_l, \mathbf{w}_j), \quad \forall \mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \quad (4.7)$$

mit

$$a_z(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) = s_\mu(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) + jk_0 \eta_0 t_\kappa(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) + jk_0 \eta_0 d_R(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) - k_0^2 t_\varepsilon(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}), \quad (4.8a)$$

$$s_\mu(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l \, d\Omega, \quad (4.8b)$$

$$t_\kappa(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \kappa \mathbf{E}_l \, d\Omega, \quad (4.8c)$$

$$d_R(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) = \int_{\Gamma_R} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}) \cdot \eta^{-1} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_l) \, d\Gamma, \quad (4.8d)$$

$$t_\varepsilon(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E}_l \, d\Omega, \quad (4.8e)$$

sowie $b(\hat{\mathbf{h}}_l, \mathbf{w}_j)$ nach (2.42).

Die Diskretisierung der schwachen Form (4.7) erfolgt analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.1.2: Es wird ein endlich-dimensionaler Unterraum $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ konstruiert und die elektrische Feldstärke auf diesen restringiert:

$$\mathbf{E}_l \approx \sum_{k=1}^N x_{Z,l,k} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (4.9)$$

Eine Basis des Unterraumes $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega)$ ist in [Ing06] gegeben. Die Testfunktionen zur Erzeugung der schwachen Form \mathbf{w}_j werden entsprechend einem Galerkin-Ansatz ebenfalls auf den diskreten Raum \mathcal{V}^{rot} restringiert. Wird der Vektor, dessen Einträge die Koeffizienten $x_{Z,l,k}$ bilden, mit $\mathbf{x}_{Z,l}$ bezeichnet, so ergibt sich das diskrete FE-System zu

$$\mathbf{A}_Z(k_0) \mathbf{x}_{Z,l} = \text{j}k_0 \eta_0 \mathbf{b}_l(k_0), \quad (4.10a)$$

$$Z_{k,l} = \mathbf{b}_k^T(k_0) \mathbf{x}_{Z,l} \quad (4.10b)$$

mit

$$\mathbf{A}_Z(k_0) = \mathbf{S}_\mu(k_0) + \text{j}k_0 \eta_0 \mathbf{T}_\kappa(k_0) + \text{j}k_0 \eta_0 \mathbf{D}_R - k_0^2 \mathbf{T}_\varepsilon(k_0), \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{S}_\mu(k_0) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \mu_{r,n}^{-1}(k_0) \mathbf{S}_{\mu,n}, \quad (4.11b)$$

$$\mathbf{T}_\kappa(k_0) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \kappa_n(k_0) \mathbf{T}_{D,n}, \quad (4.11c)$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon(k_0) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \varepsilon_{r,n}(k_0) \mathbf{T}_{D,n}. \quad (4.11d)$$

Entsprechend (4.8) sind die Einträge der Teilmatrizen

$$S_{\mu,n,k,l} = \int_{\Omega_n} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega), \quad (4.12a)$$

$$T_{D,n,k,l} = \int_{\Omega_n} \mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega), \quad (4.12b)$$

$$D_{R,k,l} = \int_{\Gamma_R} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_k) \cdot \eta^{-1} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_l) \, d\Gamma, \quad \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega), \quad (4.12c)$$

$$b_{l,k} = \int_{\Gamma_P} (\mathbf{w}_k \times \hat{\mathbf{h}}_l) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \, d\Gamma, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega). \quad (4.12d)$$

Der Anregungsvektor \mathbf{b}_l enthält die modale magnetische Erregung $\hat{\mathbf{h}}_l$, welche aus der Lösung des verallgemeinerten Eigenwertproblems (4.1) extrahiert wird. Die Abbildung, die die Eigenlösung $(\lambda_l, \mathbf{v}_l)$ auf den zugehörigen Anregungsvektor \mathbf{b}_l transformiert, hängt von der gewählten Formulierung zur Analyse der Wellenleiter ab. Diese Abbildung lässt sich für alle dem Autor bekannten Formulierungen in der Form

$$\mathbf{b}_l(k_0) = \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \xi_{w,p}(k_0, \lambda_l(k_0)) \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{v}_l(k_0) \quad (4.13)$$

darstellen, wobei w den Wellenleiter bezeichnet, der den Mode trägt, der der l -ten Anregung entspricht. Die skalaren Koeffizienten $\xi_{w,p}$ hängen von der Frequenz und dem Eigenwert λ_l ab, während die Matrizen $\mathbf{Q}_{w,p}$ für jeden Wellenleiter w konstant sind. Die Abhängigkeit der Matrizen $\mathbf{Q}_{w,p}$ vom Wellenleiter w rührt daher, dass diese eine Abbildung der Netzelemente des zwei-dimensionalen Wellenleiter-Netzes auf die Netzelemente des dreidimensionalen Netzes der Gesamtstruktur enthalten. Diese Abbildung ist offensichtlich für jeden Wellenleiter anders. Im Gegensatz dazu liegt die Abhängigkeit von $\xi_{w,p}$ vom Wellenleiter w im unterschiedlichen frequenzabhängigen Materialverhalten an den Wellenleitern begründet.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Vorgehen für die Berechnung der Einträge der Impedanzmatrix in einem beliebigen Frequenzpunkt: Zunächst muss das verallgemeinerte Eigenwertproblem (4.1) in diesem Frequenzpunkt gelöst werden. Im Anschluss werden die Anregungsvektoren nach (4.13) berechnet, woraufhin das Gleichungssystem (4.10) gelöst wird. Sind alle Einträge der Impedanzmatrix berechnet, ergeben sich die Streuparameter nach (2.54a).

4.1.2 Diskussion der Impedanz-Formulierung

Der Hauptgrund für die weite Verbreitung der Z-Formulierung ist ihre Einfachheit. Im Vergleich zur konkurrierenden TFE, bei der die Unbekannten an den Toren auf die betrachteten Modenformen restringiert werden, ist der Aufwand zur Implementierung der Z-Formulierung gering. Ein weiterer Vorteil ist, dass das resultierende Gleichungssystem (4.10) für verlustfreie Strukturen reellwertig ist. Dies führt im Vergleich zu S-Formulierungen, die selbst im verlustfreien Fall auf komplexwertige Matrizen führen, zu einer starken Reduktion der Rechenzeiten. Dazu sei auch auf Abschnitt 4.1.4 verwiesen.

Allerdings besitzt die Z-Formulierung auch Nachteile: Ein Problem stellen Strukturen dar, die sich wie ein Leerlauf verhalten. In diesem Fall gehen Einträge der Impedanzmatrix gegen unendlich, weshalb die Berechnung der relevanten Streumatrix nach (2.54a) unzuverlässig wird. Ein weiterer Nachteil der Z-Formulierung tritt bei Strukturen auf, die durch viele Wellenleiter gespeist werden, für die aber nur eine geringe Anzahl an Streuparametern relevant ist. Wird in diesem Fall die

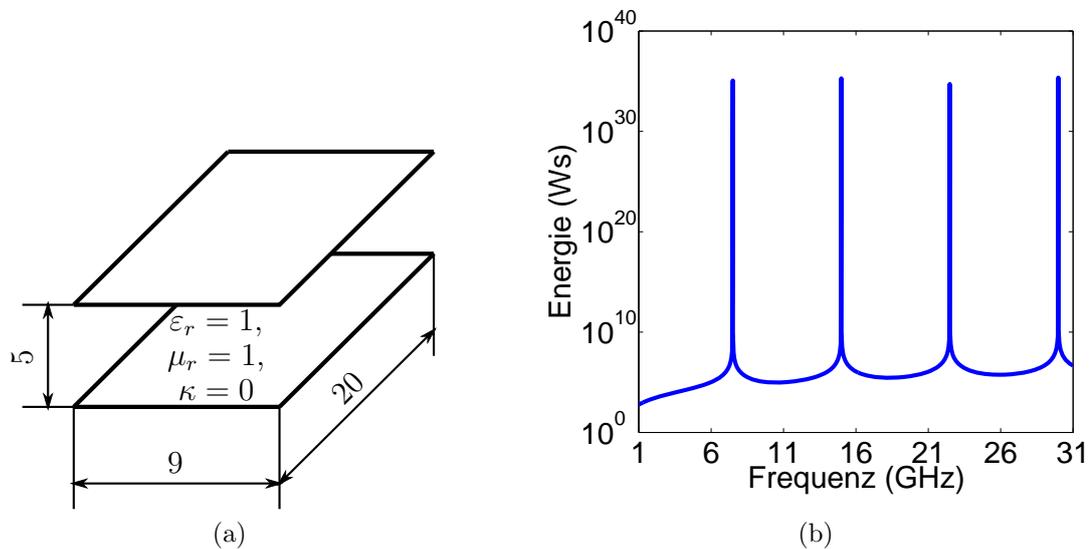


Abbildung 4.1: PPWL: (a) Geometrie, Abmessungen in mm, (b) Verlauf der elektromagnetischen Energie bei Verwendung der Z-Formulierung.

Z-Formulierung verwendet, so müssen dennoch alle Einträge der Impedanzmatrix berechnet werden, um die Streumatrix anschließend nach (2.54a) extrahieren zu können. Im Vergleich dazu erlauben S-Formulierungen gezielt einzelne Einträge der Streumatrix zu berechnen, was eine Reduktion der Rechenzeiten zur Folge hat. Ein weiterer Kritikpunkt an der Z-Formulierung ist das Auftreten künstlicher innerer Resonanzen. Dies sind scharfe, unphysikalische Resonanzen, die ein numerisches Artefakt der Formulierung darstellen. Grund für das Auftreten dieser Resonanzen ist die Anregung mittels der Randbedingung (4.2e) auf Γ_P . Dies soll im Folgenden anhand eines numerischen Beispiels verdeutlicht werden. Betrachtet wird dazu der Parallelplattenwellenleiter (PPWL) aus Abbildung 4.1a. Die Struktur wird über zwei Wellenleiter angeregt, die jeweils einen TEM-Mode tragen. Wird nur am ersten Tor angeregt, verhält sich die Randbedingung (4.2e) am zweiten Tor wie ein perfekt magnetischer Leiter. An diesem wird die einfallende Welle reflektiert, und es bildet sich eine stehende Welle aus. Ist die Frequenz so gewählt, dass die Länge der Leitung ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, kommt es zur Resonanz, und die gespeicherte elektromagnetische Energie wächst über alle Grenzen, wie auch in Abbildung 4.1b zu sehen ist. In dem betrachteten Beispiel geschieht dies bei etwa 7,5 GHz, 15 GHz, 22,5 GHz, sowie 30 GHz. Wird die Konditionszahl der Systemmatrix \mathbf{A}_Z bzgl. der euklidischen Norm betrachtet, Abbildung 4.2a, so fällt auf, dass diese in der Nähe der Resonanzen sehr groß ist: Die Matrix ist in dieser Frequenz singular. Die inneren Resonanzen entsprechen somit den Resonanzen des zugehörigen Resonatorproblems, das sich durch Ersetzen der Wellenleiter Γ_P durch perfekt magnetische Leiter Γ_H ergibt.

Der Einfluss der inneren Resonanzen auf die Streuparameter ist am Beispiel von

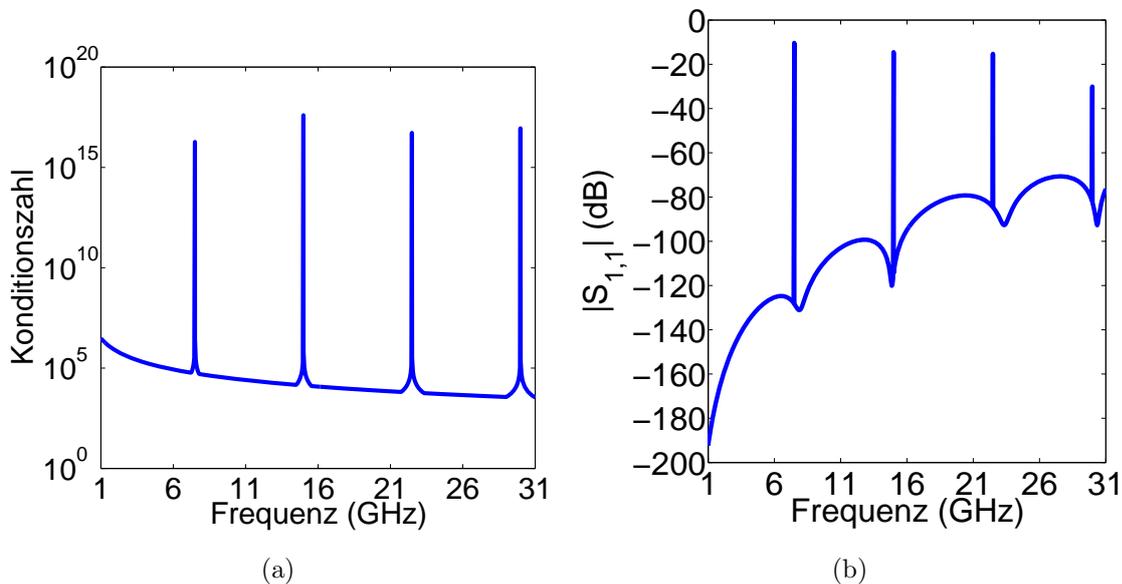


Abbildung 4.2: PPWL, Z-Formulierung: (a) Verlauf der Konditionszahl der Matrix \mathbf{A}_Z bzgl. der euklidischen Norm, (b) Verlauf von $|S_{1,1}|$.

S_{11} in Abbildung 4.2b zu sehen. Da es sich um eine einfache Leitung handelt, wird erwartet, dass der betrachtete TEM-Mode unabhängig von der Frequenz die Leitung reflexionsfrei passiert. Abseits der zuvor angesprochenen Frequenzen ist dies auch der Fall. In diesen Frequenzpunkten sind jedoch scharfe Resonanzen zu beobachten, die offensichtlich unphysikalisch sind. Während die hier betrachtete Struktur sehr einfach ist und es unmittelbar erkennbar ist, dass die Resonanzen unphysikalisch sind, ist dies bei komplexen Strukturen ohne Weiteres nicht möglich. Auch eine Analyse des Resonatorproblems zur nachträglichen Identifikation der inneren Resonanzen ist in der Regel wenig praktikabel.

4.1.3 Die Streuparameter-Formulierung

Um das Auftreten der inneren Resonanzen zu vermeiden, wird in diesem Abschnitt eine S-Formulierung hergeleitet, die im Gegensatz zur etablierten TFE auf eine Restriktion der Ansatzfunktionen an den Wellenleiterquerschnitten Γ_P verzichtet. Dies vereinfacht nicht nur die Implementierung, sondern bringt auch wesentliche Vorteile bei den anschließenden MOR-Verfahren.

Anders als bei der Z-Formulierung bilden einfallende sowie auslaufende Wellen hier die Ein- bzw. Ausgänge des Systems. Die Vorgehen zur Berechnung eines Eintrags $S_{k,l}$ der Streumatrix ist wie folgt: Es wird mit einer einfallenden Welle der Amplitude $a_l = 1$ angeregt und aus den sich einstellenden Feldern die auslaufende Welle b_k berechnet. Um dies realisieren zu können, muss die Randbedingung an Γ_P entspre-

chend (2.52) umgeschrieben werden. Das zu lösende Randwertproblem lautet somit

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l + jk_0 \eta_0 \kappa \mathbf{E}_l - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_l = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.14a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.14b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}_l) \times \hat{\mathbf{n}}] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (4.14c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{n}}) - \eta \frac{j}{k_0 \eta_0} \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}_l) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_R, \quad (4.14d)$$

$$\mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E}_l) \times \hat{\mathbf{n}} - jk_0 \eta_0 \sum_{k=1}^M b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}_l) \hat{\mathbf{h}}_k = -2jk_0 \eta_0 \hat{\mathbf{h}}_l a_l \quad \text{auf } \Gamma_P, \quad (4.14e)$$

mit dem Ausgang

$$S_{k,l} = b(\hat{\mathbf{h}}_k, \mathbf{E}_l) - \delta_{k,l}. \quad (4.15)$$

Die schwache Form des Randwertproblems ergibt sich analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.1.1 durch Testen von (4.14a) mit Testfunktionen $\mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$. Da die anschließenden Umformungen ähnlich zu denen aus Abschnitt 4.1.1 sind, sei an dieser Stelle auf eine detaillierte Darstellung verzichtet und lediglich das Ergebnis angegeben. Die schwache Form des Randwertproblems (4.14) ist

$$\begin{aligned} a_Z(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}_j) + jk_0 \eta_0 b \left(\sum_{m=1}^M b(\hat{\mathbf{h}}_m, \mathbf{E}_l), \mathbf{w}_j \right) \\ = 2jk_0 \eta_0 b(\hat{\mathbf{h}}_l, \mathbf{w}_j), \quad \forall \mathbf{w}_j \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit $a_Z(\mathbf{E}_l, \mathbf{w}_j)$ nach (4.8) und $b(\hat{\mathbf{h}}_l, \mathbf{w}_j)$ nach (2.42). Die Diskretisierung der elektrischen Feldstärke, sowie der Testfunktionen mittels Funktionen des $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega)$,

$$\mathbf{E}_l \approx \sum_{k=1}^N x_{S,l,k} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (4.17)$$

führt auf das FE-System der Form

$$(\mathbf{A}_Z(k_0) + jk_0 \eta_0 \mathbf{B}(k_0) \mathbf{B}^T(k_0)) \mathbf{x}_{S,l} = 2jk_0 \eta_0 \mathbf{b}_l(k_0), \quad (4.18a)$$

$$S_{k,l} = \mathbf{b}_k^T(k_0) \mathbf{x}_{S,l} - \delta_{k,l}, \quad (4.18b)$$

wobei die Matrizen in (4.11) bzw. (4.12) gegeben sind, und \mathbf{B} die Matrix ist, deren Spalten von den Vektoren $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_M$ gebildet werden:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_M \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Im Gegensatz zur Z-Formulierung tritt hier der Dämpfungsterm $jk_0 \eta_0 \mathbf{B} \mathbf{B}^T$ auf. In diesen Dämpfungsterm gehen die Modenformen aller betrachteter Moden ein, was

dafür sorgt, dass die Felder dieser Moden an den Querschnitten der speisenden Wellenleiter Γ_P absorbiert werden. Somit sind die Ränder Γ_P für die Felder der betrachteten Moden transparent und es können sich keine inneren Resonanzen ausbilden.

Der Term $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ ist aber gleichzeitig auch ein Problem der S-Formulierung in der vorliegenden Form (4.18). Während die Matrix $\mathbf{A}_Z(k_0)$ in der Regel von sehr hoher Dimension und nur schwach besetzt ist, weist die Matrix $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ einen voll besetzten Block auf. Dies führt, besonders beim Verwenden eines direkten Löser, zu einem starken Anstieg an Speicherbedarf und benötigter Rechenzeit. Dazu sei auch auf Abschnitt 4.1.4 verwiesen. Um das explizite Auftreten des Terms $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ zu umgehen, wird eine zusätzliche Variable

$$\mathbf{x}_{h,l} = \mathbf{j}\mathbf{B}^T \mathbf{x}_{S,l} \quad \Leftrightarrow \quad k_0\eta_0\mathbf{B}^T \mathbf{x}_{S,l} + \mathbf{j}k_0\eta_0\mathbf{x}_{h,l} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

eingeführt. Wird diese in (4.18a) eingesetzt, ergibt sich die erweiterte S-Formulierung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z(k_0) & k_0\eta_0\mathbf{B}(k_0) \\ k_0\eta_0\mathbf{B}^T(k_0) & \mathbf{j}k_0\eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S,l} \\ \mathbf{x}_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{j}k_0\eta_0\mathbf{b}_l(k_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.21a)$$

$$S_{k,l} = \mathbf{b}_k^T(k_0)\mathbf{x}_{S,l} - \delta_{k,l}. \quad (4.21b)$$

Im Gegensatz zu (4.18a) tritt hier der Term $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ nicht mehr explizit auf, und die Systemmatrix enthält keine voll besetzten Blöcke. Der Preis dafür ist eine Erhöhung der Anzahl der Unbekannten. Diese Erhöhung entspricht der Anzahl der anregenden Moden, die jedoch in der Regel sehr viel kleiner ist als die Dimension der Matrix \mathbf{A}_Z . Daher spielt diese Erhöhung der Anzahl der Unbekannten nur eine geringe Rolle.

Ein weiterer Nachteil der S-Formulierung gegenüber der Z-Formulierung ist die Tatsache, dass die Systemmatrix auch für verlustfreie Strukturen komplexwertig ist. Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems benötigt daher mehr Speicher sowie mehr Rechenzeit.

4.1.4 Vergleich der Formulierungen

Die bislang rein theoretischen Vergleiche der Z- und der S-Formulierung werden in diesem Abschnitt anhand numerischer Beispiele überprüft. In den folgenden Simulationen wird die Formulierung aus [FHDE04] zur modalen Wellenleiteranalyse verwendet. Wie in diesem konkreten Fall die Transformation (4.13) aussieht, also wie sich aus den Eigenlösungen des Wellenleiter-Eigenwertproblems die Anregungsvektoren \mathbf{b}_i ergeben, ist in Anhang B ausführlich beschrieben. Alle Berechnungen wurden in MATLAB Version R2013b auf einer Maschine mit Intel[®] Core i5-3570K, 3,4 GHz Prozessor sowie 32 GB RAM durchgeführt. Das Lösen der großen, schwach besetzten FE-Gleichungssysteme erfolgte mithilfe des PARDISO Löser der Intel[®] MKL Bibliothek, Version 2017.1.143.

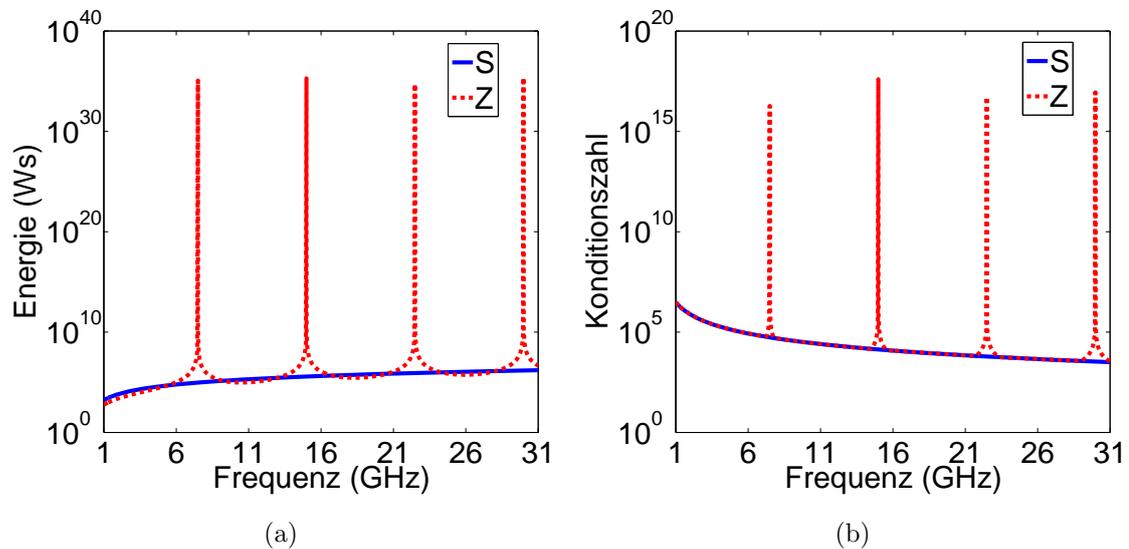


Abbildung 4.3: PPWL, Vergleich der Formulierungen: (a) Verlauf der elektromagnetischen Energie, (b) Verlauf der Konditionszahl der Systemmatrix bzgl. der euklidischen Norm.

Parallelplattenwellenleiter

Als erstes numerisches Beispiel wird der PPWL aus Abbildung 4.1a nochmals betrachtet, um zu zeigen, dass in der S-Formulierung keine inneren Resonanzen auftreten. Dazu wurden die Simulationen aus Abschnitt 4.1.2 noch einmal unter Verwendung der S-Formulierung wiederholt und die Ergebnisse mit denen aus Abschnitt 4.1.2 verglichen. Die Verläufe der elektromagnetischen Energie sowie der Konditionszahl der Systemmatrizen über der Frequenz sind in Abbildung 4.3 sowohl für die Z-Formulierung (4.10) als auch für die erweiterte S-Formulierung (4.21) dargestellt. Es ist zu sehen, dass bei Verwendung der S-Formulierung die Energie über das gesamte Frequenzband endlich bleibt. Die geänderten Randbedingungen an den Querschnitten der Wellenleiter sorgen dafür, dass aus der Struktur auslaufende Wellen nicht reflektiert, sondern absorbiert werden. Aus diesem Grund bilden sich im Inneren des PPWLs keine stehenden Wellen aus, die zu inneren Resonanzen führen können. Dies wird auch durch den Verlauf der Konditionszahl der Systemmatrix in Abbildung 4.3b verdeutlicht. Während die Systemmatrix der Z-Formulierung an den Resonanzen singulär wird, ändert sich die Konditionszahl der Systemmatrix der S-Formulierung nur unwesentlich über der Frequenz. Der Einfluss auf die Beträge der Streuparameter ist für beide Formulierungen in Abbildung 4.4 zu sehen. Im Gegensatz zur Z-Formulierung liefert die S-Formulierung in allen Frequenzpunkten das erwartete, reflexionsfreie Verhalten der Struktur.

In Tabelle 4.1 sind die Simulationsdaten für den PPWL angegeben. Dazu gehören die Anzahl der Unbekannten des resultierenden Gleichungssystems, die Anzahl der

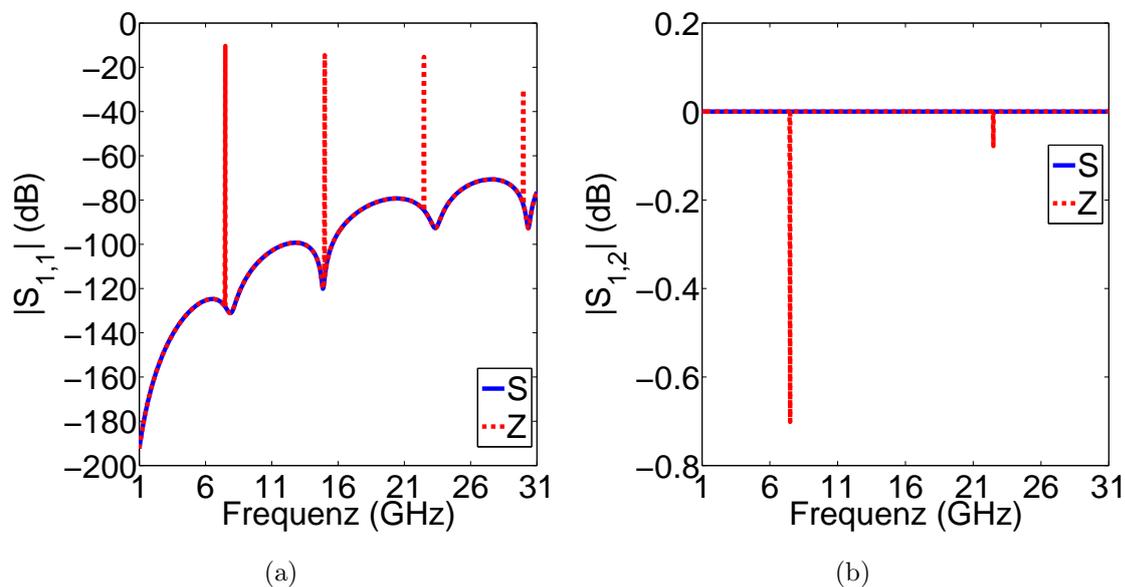


Abbildung 4.4: PPWL, Vergleich der Formulierungen: Betrag der Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{1,2}$.

Tabelle 4.1: PPWL: Simulationsdaten für Z- und S-Formulierungen.

FE-Formulierung	Z	Erw. S	Grundf. S
Unbekannte	5 602	5 604	5 602
NNZ Matrix	195 588	197 718	750 112
NNZ Faktoren	430 293	420 711	977 825
Speicherbedarf (kBytes)	12 008	16 451	49 488
Rechenzeit (s)*	26,94	29,3	82,64

* Ausgewertet an 605 Frequenzpunkten.

Nichtnulleinträge (NNZ) in den entsprechenden Systemmatrizen sowie in den berechneten Faktoren, der Speicherbedarf sowie die benötigte Rechenzeit zum Lösen des Gleichungssystems. Neben den Daten für die Z- und die erweiterte S-Formulierung sind auch die Daten für die Grundform der S-Formulierung (4.18) gezeigt, in der der Term $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ explizit auftritt. Ein Vergleich der beiden S-Formulierungen zeigt, dass die erweiterte S-Formulierung auf Matrizen mit wesentlich weniger Nichtnulleinträgen führt. Dadurch sind Speicherbedarf und Rechenzeit der Grundform der S-Formulierung 3- bzw. 2, 8-mal höher als die der erweiterten S-Formulierung. Wird weiterhin die erweiterte S-Formulierung mit der Z-Formulierung verglichen, so fällt auf, dass die Anzahl der Nichtnulleinträge in der gleichen Größenordnung liegt, der Speicherbedarf der erweiterten S-Formulierung allerdings höher ist. Dieser erhöhte Speicherbedarf bei ähnlicher Anzahl an Nichtnulleinträgen ist auf die komplexwertige Systemmatrix zurückzuführen. Dass sich dies jedoch nur unwesentlich auf die benötigte Rechenzeit auswirkt, liegt an der geringen Dimension der Gleichungssys-

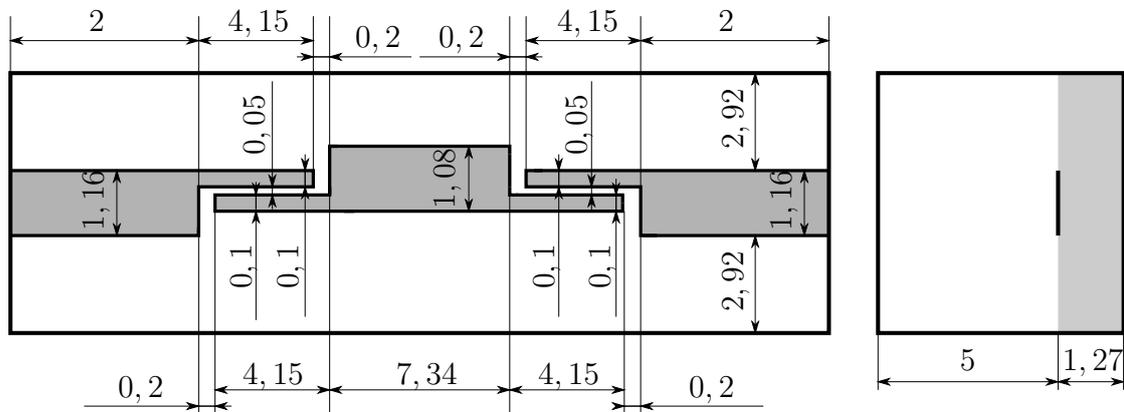


Abbildung 4.5: Bandpassfilter, Abmessungen in mm.

teme. Um diesen Effekt besser beobachten zu können, wird im nächsten Beispiel eine Struktur mit wesentlich mehr Unbekannten betrachtet.

Bandpassfilter

Als zweites numerisches Beispiel wird der Bandpassfilter aus [ZSM05] betrachtet, dessen Geometrie in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Die Leiterbahnen sind als perfekte elektrische Leiter modelliert. An den Stirnflächen wird die Struktur mittels zwei Wellenleiter gespeist, die jeweils einen quasi-TEM-Mode tragen. Die restlichen Ränder werden als perfekt elektrisch leitend angenommen, was physikalisch einer Schirmung der Struktur entspricht. Das Substrat wird verlustfrei mit einer relativen elektrischen Permittivität von $\varepsilon_r = 10,8$ sowie einer relativen magnetischen Permeabilität von $\mu_r = 1$ angenommen. Das über dem Substrat befindliche Material ist Luft ($\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$). Die Struktur wird in dem Frequenzband von $[1, 13]$ GHz mit den drei Formulierungen analysiert. Die Simulationsdaten sind in Tabelle 4.2 gegeben und bestätigen die Erkenntnisse des letzten Beispiels: Auch hier ist zu sehen, dass die Systemmatrix der Grundform der S-Formulierung wesentlich mehr Nichtnulleinträge als die der erweiterten S-Formulierung besitzt. Damit wurden mehr Speicher und Rechenzeit zum Lösen der Gleichungssysteme benötigt. Der Unterschied ist in diesem Beispiel weniger deutlich als im vorherigen Beispiel, da das Verhältnis von Unbekannten auf den Querschnitten der Wellenleiter zu der Gesamtzahl der Unbekannten hier geringer ist.

Werden die Daten der erweiterten S-Formulierung mit denen der Z-Formulierung verglichen, fällt auf, dass die Anzahl der Nichtnulleinträge in den Matrizen ungefähr gleich ist, während Speicherbedarf sowie benötigte Rechenzeit der erweiterten S-Formulierung um den Faktor 1,6 bzw. 1,5 höher sind. Um zu verdeutlichen, dass der höhere Bedarf an Speicher und Rechenzeit lediglich aus der komplexwertigen

Tabelle 4.2: Bandpassfilter: Berechnungsdaten der Formulierungen.

FE-Formulierung	Z	Erw. S	Grundf. S
Unbekannte	226 274	226 276	226 274
NNZ Matrix	9 467 930	9 475 592	17 040 548
NNZ Faktoren	72 126 577	71 535 043	78 957 053
Speicher ($\tan \delta = 0$) (kBytes)	909 913	1 485 488	1 795 455
Rechenzeit ($\tan \delta = 0$) (s)*	5 856,86	9 179,23	11 928,95
Speicher ($\tan \delta = 0.002$) (kBytes)	1 494 382	1 485 488	1 795 455
Rechenzeit ($\tan \delta = 0.002$) (s)*	9 672,76	9 194,94	11 693,51

* Ausgewertet an 1209 Frequenzpunkten.

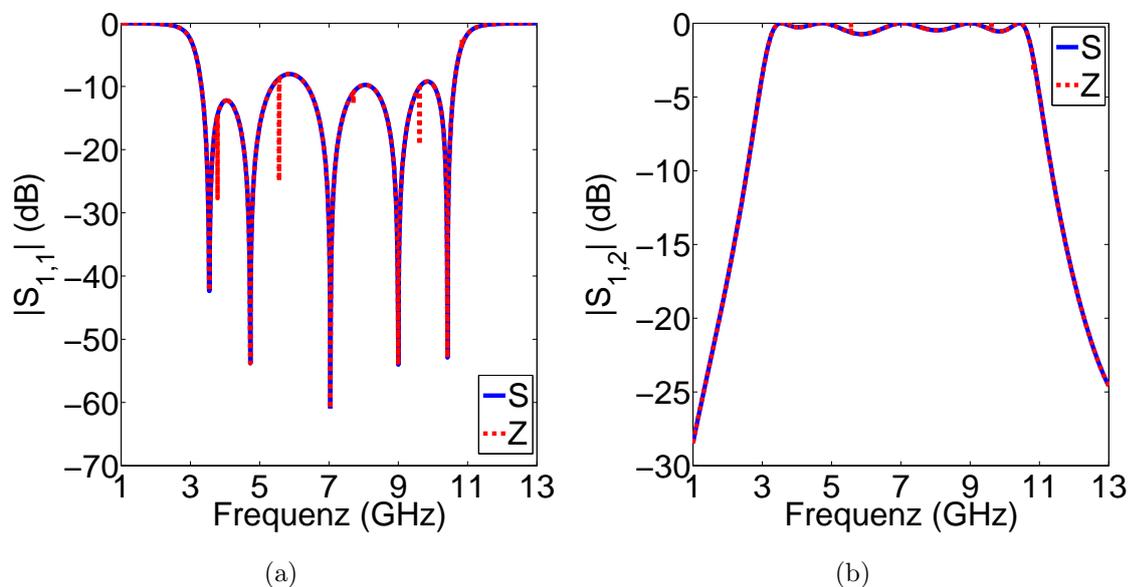


Abbildung 4.6: Bandpassfilter: Betrag der Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{1,2}$.

Systemmatrix der S-Formulierung rührt, wird die gleiche Struktur in einer zweiten Rechnung mit einem verlustbehafteten Substrat, $\tan \delta = 0.002$, versehen. Damit ist die Systemmatrix der Z-Formulierung ebenfalls komplexwertig und an Tabelle 4.2 lässt sich ablesen, dass Speicherbedarf und Rechenzeit für beide Formulierungen annähernd gleich groß sind.

Die Beträge der Streuparameter für die verlustfreie Struktur sind in Abbildung 4.6 gegeben. Zu sehen sind die Ergebnisse der Z- und der erweiterten S-Formulierung. Während die Ergebnisse der S-Formulierung sehr gut mit den Ergebnissen aus [ZSM05] übereinstimmen, sind in den Ergebnissen der Z-Formulierung wieder innere Resonanzen zu erkennen. Um zu zeigen, dass es sich bei diesen Resonanzen tatsächlich um unphysikalische innere Resonanzen handelt, wurde zusätzlich das

Tabelle 4.3: Bandpassfilter: Eigenfrequenzen des Resonatorproblems.

Eigenfrequenzen (GHz)				
3,7849	5,5618	7,7001	9,6145	10,8330

Resonatorproblem betrachtet. Dazu wurden die anregenden Wellenleiter in der Z-Formulierung durch perfekte magnetische Leiter ersetzt und das entstehende Eigenwertproblem gelöst. Die so berechneten Eigenfrequenzen im Bereich [1, 13] GHz sind in Tabelle 4.3 gegeben. Es ist zu sehen, dass diese den Resonanzen in Abbildung 4.6 entsprechen.

4.2 Modellordnungsreduktion

Werden die Netzwerkmatrizen über ein breites Frequenzband benötigt, kann die direkte Auswertung von (4.10) oder (4.21) zu hohen Rechenzeiten führen. Um die Berechnungen der gesuchten Netzwerkmatrizen zu beschleunigen, werden im Folgenden Verfahren der MOR, und hier speziell die RBM, angewendet. Eine entscheidende Voraussetzung für die direkte Anwendbarkeit der RBM nach [PR06], [RHP07] ist, dass das zugrunde liegende System affin in der Frequenz parametrisiert ist, d.h. dass eine Darstellung der Form

$$\left(\sum_{j=1}^{A^{AP}} \alpha_j^{AP}(k_0) \mathbf{A}_j^{AP} \right) \mathbf{x}_l = \left(\sum_{j=1}^{B^{AP}} \beta_{j,l}^{AP}(k_0) \mathbf{b}_{j,l}^{AP} \right) u_l, \quad (4.22a)$$

$$y_{k,l} = \left(\sum_{j=1}^{C^{AP}} \gamma_{j,k}^{AP}(k_0) \mathbf{c}_{j,k}^{AP} \right) \mathbf{x}_l + \delta_{k,l}^{AP}(k_0) u_l, \quad (4.22b)$$

mit $A^{AP}, B^{AP}, C^{AP} \ll N$ existiert, wobei nur die skalaren Funktionen $\alpha_j^{AP}(k_0)$, $\beta_{j,l}^{AP}(k_0)$, $\gamma_{j,k}^{AP}(k_0)$, $\delta_{k,l}^{AP}(k_0)$ von der Frequenz abhängen, während die Matrizen $\mathbf{A}_j^{AP} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, sowie die Vektoren $\mathbf{b}_{j,l}^{AP}, \mathbf{c}_{j,k}^{AP} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ konstant über der Frequenz sind.

Im nächsten Abschnitt werden die Ideen der verwendeten RBM für Strukturen vorgestellt, die durch Wellenleiter mit transversal homogenen Materialeigenschaften gespeist werden. Es wird gezeigt, dass in diesem Fall die FE-Systeme der Z-Formulierung und auch der erweiterten S-Formulierung affin in der Frequenz parametrisiert sind. Somit kann die RBM nach [PR06], [RHP07] direkt zum Einsatz kommen. Diese Verfahren bilden die Grundlage der Methodik zur Behandlung von Strukturen, die durch transversal inhomogene Wellenleiter gespeist werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden eine kurze Zusammenfassung angegeben.

4.2.1 Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Systeme

Wenn die speisenden Wellenleiter nicht nur in axialer Richtung homogen sind, sondern auch in transversaler Richtung homogenes Materialverhalten aufweisen, so treten nur TE-, TM- und, im Falle mehrerer Elektroden, TEM-Moden auf [Col91, Kap. 5]. Diese zeichnen sich dadurch aus, die Modenformen über der Frequenz konstant sind [Poz11, Kap. 3.1]. Mathematisch bedeutet dies, dass die Eigenvektoren \mathbf{v}_l aus (4.1) unabhängig von der Frequenz sind. Um sicherzustellen, dass die Moden weiterhin korrekt nach (2.43) normiert sind, ist ein frequenzabhängiger Skalierungsfaktor nötig. Mit diesem Skalierungsfaktor kann der Anregungsvektor $\mathbf{b}_l(k_0)$ in jedem Frequenzpunkt aus dem Anregungsvektor $\mathbf{b}_{R,l}$ in einer Referenzfrequenz k_R berechnet werden [RAZ01]:

$$\mathbf{b}_l(k_0) = d_l(k_0)\mathbf{b}_l(k_R) = d_l(k_0)\mathbf{b}_{R,l}, \quad (4.23)$$

mit

$$d_l(k_0) = \begin{cases} 1 & \text{für TEM-Moden,} \\ \sqrt{\frac{k_R \sqrt{k_{c,l}^2 - k_0^2}}{k_0 \sqrt{k_{c,l}^2 - k_R^2}}} & \text{für TE-Moden,} \\ \sqrt{\frac{k_0 \sqrt{k_{c,l}^2 - k_R^2}}{k_R \sqrt{k_{c,l}^2 - k_0^2}}} & \text{für TM-Moden,} \end{cases} \quad (4.24)$$

wobei $k_{c,l}$ die Grenzwellenzahl des jeweiligen Modes bezeichnet. Wird zusätzlich die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D}(k_0) = \text{diag}(d_1(k_0), \dots, d_M(k_0)) \quad (4.25)$$

eingeführt, so gilt für die Frequenzabhängigkeit der Matrix \mathbf{B}

$$\mathbf{B}(k_0) = \mathbf{B}_R \mathbf{D}(k_0), \quad \mathbf{B}_R = [\mathbf{b}_{R,1}, \dots, \mathbf{b}_{R,M}]. \quad (4.26)$$

Somit ist die Impedanz-Formulierung darstellbar als

$$\mathbf{A}_Z(k_0)\mathbf{x}_{Z,l} = jk_0\eta_0 d_l(k_0)\mathbf{b}_{R,l}, \quad (4.27a)$$

$$Z_{k,l} = d_k(k_0)\mathbf{b}_{R,k}^T \mathbf{x}_{Z,l}, \quad (4.27b)$$

während die Streuparameter-Formulierung die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z(k_0) & k_0\eta_0 \mathbf{B}_R \mathbf{D}(k_0) \\ k_0\eta_0 \mathbf{D}(k_0) \mathbf{B}_R^T & jk_0\eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S,l} \\ \mathbf{x}_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2jk_0\eta_0 d_l(k_0)\mathbf{b}_{R,l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.28a)$$

$$S_{k,l} = d_k(k_0)\mathbf{b}_k^T \mathbf{x}_{S,l} - \delta_{k,l} \quad (4.28b)$$

annimmt. In Anbetracht der Definition von $\mathbf{A}_Z(k_0)$ in (4.11) wird deutlich, dass die Matrix $\mathbf{A}_Z(k_0)$ unabhängig vom Materialverhalten eine affin in der Frequenz parametrisierte Darstellung aufweist:

$$\mathbf{A}_Z(k_0) = \sum_{k=1}^{A_Z} \alpha_{Z,k}(k_0) \mathbf{A}_{Z,k}, \quad A_Z \ll N, \quad (4.29)$$

wobei lediglich die skalaren Funktionen $\alpha_{Z,k}(k_0)$ von der Frequenz abhängen. Wird weiterhin folgende Zerlegung der Matrix $\mathbf{B}_R \mathbf{D}(k_0)$

$$\mathbf{B}_R \mathbf{D}(k_0) = \sum_{l=1}^M d_l(k_0) \mathbf{B}_{R0,l}, \quad \mathbf{B}_{R0,l} = \begin{bmatrix} \delta_{l,1} \mathbf{b}_{R,1} & \dots & \delta_{l,M} \mathbf{b}_{R,M} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

eingeführt, wird deutlich, dass sich sowohl (4.27), als auch (4.28) als ein affin in der Frequenz parametrisiertes System (4.22) darstellen lassen. Aus diesem Grund werden die folgenden Überlegungen anhand des allgemeinen Systems (4.22) durchgeführt und gelten entsprechend für beide Formulierungen.

Die grundlegende Idee der projektionsbasierten MOR ist es, den Suchraum für den Lösungsvektor \mathbf{x}_l auf den niedrig-dimensionalen Spaltenraum einer geeigneten Projektionsmatrix \mathbf{U} zu restringieren. Der Lösungsvektor \mathbf{x}_l aus (4.22) wird also durch eine Superposition der Spalten der Matrix \mathbf{U} approximiert:

$$\mathbf{x}_l \approx \mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}_l, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}}, \quad \tilde{N} \ll N. \quad (4.31)$$

Da der Vektor $\mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}_l$ lediglich eine Approximation für \mathbf{x}_l ist, wird er (4.22a) nicht exakt erfüllen, sondern es wird ein Residuum

$$\mathbf{r}_l = \left(\sum_{j=1}^{A^{AP}} \alpha_j^{AP}(k_0) \mathbf{A}_j^{AP} \right) \mathbf{U} \tilde{\mathbf{x}}_l - \left(\sum_{j=1}^{B^{AP}} \beta_{j,l}^{AP}(k_0) \mathbf{b}_{j,l}^{AP} \right) \quad (4.32)$$

entstehen. Wird nun im Sinne eines Galerkin-Verfahrens gefordert, dass das Residuum \mathbf{r}_l orthogonal auf dem Spaltenraum von \mathbf{U} steht,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{r}_l = \mathbf{0}, \quad (4.33)$$

so ergibt sich das reduzierte Modell zu

$$\left(\sum_j^{A^{AP}} \alpha_j^{AP}(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_j^{AP} \right) \tilde{\mathbf{x}}_l = \left(\sum_j^{B^{AP}} \beta_{j,l}^{AP}(k_0) \tilde{\mathbf{b}}_{j,l}^{AP} \right) u, \quad (4.34a)$$

$$\tilde{y}_{k,l} = \left(\sum_j^{C^{AP}} \gamma_{j,k}^{AP}(k_0) \tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{AP} \right) \tilde{\mathbf{x}}_l + \delta_{k,l}^{AP} u \quad (4.34b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_j^{AP} = \mathbf{U}^T \mathbf{A}_j^{AP} \mathbf{U}, \quad (4.35a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{j,l}^{AP} = \mathbf{U}^T \mathbf{b}_{j,l}^{AP}, \quad (4.35b)$$

$$\tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{AP} = \mathbf{c}_{j,k}^{AP} \mathbf{U} \quad (4.35c)$$

sowie dem reduzierten Ausgang $\tilde{y}_{k,l}$, der eine Approximation des Ausgangs $y_{k,l}$ aus (4.22b) darstellt. Da $\tilde{N} \ll N$ vorausgesetzt wird, ist die Dimension des reduzierten Modells (4.34) sehr viel kleiner als die des Originalsystems (4.22), und die Auswertung von (4.34) wird wesentlich effizienter durchgeführt als die Auswertung des Originalsystems. Die Genauigkeit, mit der der Ausgang des reduzierten Modells den Ausgang des Originalsystems approximiert, hängt maßgeblich von der Wahl der Projektionsmatrix \mathbf{U} ab.

Im Rahmen der RBM wird \mathbf{U} so erstellt, dass der Spaltenraum von \mathbf{U} dem Raum entspricht, der von den Lösungen \mathbf{x}_l an N_F unterschiedlichen Frequenzen aufgespannt wird:

$$\text{span}\{\mathbf{U}\} = \text{span}\{\mathbf{X}(k_{0,1}), \dots, \mathbf{X}(k_{0,N_F})\}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}}, \quad \tilde{N} \ll N, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{X}(k_{0,j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k_{0,j}) & \cdots & \mathbf{x}_M(k_{0,j}) \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Aus Gründen der numerischen Stabilität werden die Spalten der Matrix \mathbf{U} gegeneinander orthogonalisiert, sodass

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (4.38)$$

gilt. Zur Bestimmung von Anzahl und Lage der verwendeten Stützstellen $k_{0,j}$ stehen selbst-adaptive Verfahren zur Verfügung [dRM09], [KFK⁺11], [FHMS11], [HSZ12].

Die hohe Effizienz der RBM basiert auf der Möglichkeit, die Methodik in eine *Offline*- und eine *Online*-Phase zu zerlegen. In der Offline-Phase werden die Projektionsmatrix \mathbf{U} und die reduzierten Matrizen und Vektoren $\tilde{\mathbf{A}}_j^{AP}$, $\tilde{\mathbf{b}}_{j,l}^{AP}$ und $\tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{AP}$ erstellt. Dazu werden die Frequenzpunkte $k_{0,i}$ bestimmt, das FE-System an diesen Punkten gelöst, aus den Lösungen die Projektionsmatrix \mathbf{U} erstellt und schließlich die reduzierten Matrizen durch Projektion nach (4.35) berechnet. Die Offline-Phase beinhaltet also alle Schritte, bei denen Matrizen der Dimension des FE-Systems involviert sind. In der Online-Phase hingegen wird das reduzierte Modell (4.34) in den einzelnen Frequenzpunkten ausgewertet. Dazu müssen die zuvor erstellten reduzierten Matrizen und Vektoren mit den entsprechenden frequenzabhängigen, skalaren Faktoren multipliziert und im Anschluss aufaddiert werden. Das so erzeugte Gleichungssystem reduzierter Dimension (4.22a) wird gelöst und der Ausgang ausgewertet (4.22b). Besonders effizient wird die RBM, wenn die Netzwerkmatrizen an sehr vielen Frequenzpunkten berechnet werden müssen. Dazu muss lediglich das zuvor erstellte reduzierte Modell in den entsprechenden Frequenzpunkten gelöst werden, was aufgrund der geringen Dimension sehr effizient erfolgt. Die Erstellung des reduzierten

Modells, also die Offline-Phase, ist dagegen von der Anzahl der Frequenzen, an denen die Netzwerkmatrizen benötigt werden unabhängig. An dieser Stelle wird auch ersichtlich, weshalb die affine Parametrierung der Matrizen eine so große Rolle spielt: Ist eine Darstellung der FE-Matrizen nach (4.22) nicht möglich, kann auch die Zerlegung in eine Offline- und eine Online-Phase nicht vollzogen werden.

4.2.2 Anregung mit frequenzabhängigen Modenformen

In diesem Abschnitt wird die oben skizzierte Methodik der RBM so erweitert, dass damit auch Mikrowellenstrukturen behandelt werden können, deren anregende Wellenleiter in transversaler Richtung inhomogenes Materialverhalten aufweisen. Die Modenformen, die sich in diesen Wellenleitern ausbilden, ändern sich im Allgemeinen über der Frequenz. Dies führt dazu, dass auch die Eigenvektoren \mathbf{v}_i des verallgemeinerten Eigenwertproblems (4.1) nicht länger konstant über der Frequenz sind. Da in der Regel auch kein analytischer Ausdruck für den Verlauf der Modenformen über der Frequenz verfügbar ist, ist eine affine Parametrierung der Anregungsvektoren \mathbf{b}_l nicht möglich. Im Gegensatz zu Abschnitt 4.2.1 kann die RBM nicht direkt zur Anwendung kommen.

Um dieses Problem zu umgehen, wird ein reduziertes Modell des Eigenwertproblems (4.1) konstruiert, das es erlaubt, die anregenden Moden mit geringem numerischen Aufwand und hoher Genauigkeit über weite Frequenzbänder zu berechnen. Die Größe des Fehlers wird dabei über die Dimension des reduzierten Modells eingestellt. Der gewählte Ansatz zur Ordnungsreduktion des Eigenwertproblems (4.1) ist ebenfalls projektionsbasiert. Zu jedem speisenden Wellenleiter w wird eine Projektionsmatrix $\mathbf{R}_w \in \mathbb{C}^{N_w \times \tilde{N}_w}$, $\tilde{N}_w \ll N_w$ generiert, der Suchraum der Eigenvektoren wird auf den Spaltenraum von \mathbf{R}_w restringiert und gefordert, dass das entstehende Residuum orthogonal auf dem Spaltenraum von \mathbf{R}_w steht. Verschiedene Möglichkeiten zur Erzeugung der Projektionsmatrix stehen in der Literatur zur Verfügung [BPG⁺02], [LHW05], [SFDE08]. In [SFDE08] wurde zusätzlich eine affine Frequenzabhängigkeit der Projektionsmatrix eingeführt, um das Auftreten unphysikalischer Moden zu verhindern. Um diesen Fall abzudecken, wird im Folgenden von einer affin in der Frequenz parametrisierten Projektionsmatrix \mathbf{R}_w ausgegangen:

$$\mathbf{R}_w(k_0) = \sum_{q=1}^{N_R} \theta_q(k_0) \mathbf{R}_{w,q}. \quad (4.39)$$

Weiterhin wird angenommen, dass für jeden Wellenleiter das gleiche MOR-Verfahren verwendet wird. Somit sind die Skalierungsfaktoren $\theta_q(k_0)$ für jeden Wellenleiter gleich, die Matrizen $\mathbf{R}_{w,q}$ sind jedoch für unterschiedliche Wellenleiter verschieden. Somit nimmt das reduzierte Modell für Wellenleiter w folgende Form an:

$$\left(\sum_{l=1}^{L^w} \alpha_l^w(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_l^w \right) \tilde{\mathbf{v}}_i = \tilde{\lambda}_i \left(\sum_{k=1}^{K^w} \beta_k^w(k_0) \tilde{\mathbf{B}}_k^w \right) \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (4.40)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_l^w = \mathbf{R}_w^* \mathbf{A}_l^w \mathbf{R}_w = \sum_{p=1}^{N_R} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\theta}_p(k_0) \theta_q(k_0) \mathbf{R}_{w,p}^* \mathbf{A}_l^w \mathbf{R}_{w,q}, \quad (4.41a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^w = \mathbf{R}_w^* \mathbf{B}_k^w \mathbf{R}_w = \sum_{p=1}^{N_R} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\theta}_p(k_0) \theta_q(k_0) \mathbf{R}_{w,p}^* \mathbf{B}_k^w \mathbf{R}_{w,q}. \quad (4.41b)$$

Die Lösungen des ursprünglichen Eigenwertproblems werden durch

$$\mathbf{v}_i \approx \mathbf{R}_w \tilde{\mathbf{v}}_i = \sum_{q=1}^{N_R} \theta_q(k_0) \mathbf{R}_{w,q} \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (4.42a)$$

$$\lambda_i \approx \tilde{\lambda}_i \quad (4.42b)$$

approximiert. Auch hier wird die affine Parametrierung der Matrizen in der Frequenz ausgenutzt, um die Effizienz der Auswertung zu steigern. Sind die reduzierten Matrizen $\mathbf{R}_{w,p}^* \mathbf{A}_l^w \mathbf{R}_{w,q}$ sowie $\mathbf{R}_{w,p}^* \mathbf{B}_k^w \mathbf{R}_{w,q}$ der Dimension $\tilde{N}_w \times \tilde{N}_w$ erzeugt, werden zur Lösung des reduzierten Eigenwertproblems in einem bestimmten Frequenzpunkt lediglich Operation mit Matrizen der reduzierten Dimension benötigt.

Die resultierende Approximation für die Anregungsvektoren \mathbf{b}_l , ergibt sich durch Einsetzen der Näherung für die Eigenlösungen (4.42) in (4.13):

$$\mathbf{b}_l(k_0) \approx \check{\mathbf{b}}_l(k_0) = \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \xi_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l(k_0)) \theta_q(k_0) \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q} \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0). \quad (4.43)$$

Hier bezeichnet w den Wellenleiter, der den Mode führt, der Anregung l bildet. Mit diesen Approximationen wird die Z-Formulierung zu

$$\mathbf{A}_Z(k_0) \check{\mathbf{x}}_{Z,l} = j k_0 \eta_0 \check{\mathbf{b}}_l(k_0), \quad (4.44a)$$

$$\check{Z}_{k,l} = \check{\mathbf{b}}_k^T(k_0) \check{\mathbf{x}}_{Z,l}, \quad (4.44b)$$

während sich die erweiterte S-Formulierung zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z(k_0) & k_0 \eta_0 \check{\mathbf{B}}(k_0) \\ k_0 \eta_0 \check{\mathbf{B}}^T(k_0) & j k_0 \eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{\mathbf{x}}_{S,l} \\ \check{\mathbf{x}}_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j k_0 \eta_0 \check{\mathbf{b}}_l(k_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.45a)$$

$$\check{S}_{k,l} = \check{\mathbf{b}}_k^T(k_0) \check{\mathbf{x}}_{S,l} - \delta_{k,l} \quad (4.45b)$$

ergibt. Die Matrix $\check{\mathbf{B}}$ ist dabei die Matrix, deren Spalten von den Vektoren $\check{\mathbf{b}}_i$, $i = 1, \dots, M$ gebildet werden. Da die Vektoren $\check{\mathbf{b}}_i$ eine Approximation der Vektoren \mathbf{b}_i darstellen, sind auch die Vektoren $\check{\mathbf{x}}_{Z,l}$, $\check{\mathbf{x}}_{S,l}$, sowie die Ausgänge $\check{Z}_{k,l}$, $\check{S}_{k,l}$ Approximationen der entsprechenden Größen des FE-Systems.

An dieser Stelle wird der Vorteil der neuen S-Formulierung im Vergleich zur TFE deutlich. Während hier der Einfluss der frequenzabhängigen Moden auf die Anregungsvektoren \mathbf{b}_l , bzw. bei der S-Formulierung zusätzlich auf die Matrizen $\check{\mathbf{B}}$ beschränkt bleibt, betrifft diese Frequenzabhängigkeit im Fall der TFE Methode alle Matrizen.

Ordnungsreduktion für die Impedanz-Formulierung

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.2.1 wird für die Z-Formulierung (4.44) eine orthogonale Projektionsmatrix erstellt:

$$\text{span}\{\mathbf{U}_Z\} = \text{span}\{\mathbf{X}_Z(k_{0,1}), \dots, \mathbf{X}_Z(k_{0,N_F})\}, \quad \mathbf{U}_Z \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}}, \quad \tilde{N} \ll N, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{X}_Z(k_{0,j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{Z,1}(k_{0,j}) & \cdots & \mathbf{x}_{Z,M}(k_{0,j}) \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Frequenzabhängigkeit der Modenformen für die Lösung des FE-Systems keine Rolle spielt. Dieses wird entsprechend Abschnitt 4.1.1 gelöst. Auf die Wahl der Stützstellen $k_{0,1}, \dots, k_{0,N_F}$ wird in Abschnitt 4.2.3 eingegangen. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.2.1 wird der Suchraum des Lösungsvektors $\check{\mathbf{x}}_{Z,l}$ aus (4.44) auf den Spaltenraum der Matrix \mathbf{U}_Z restringiert,

$$\check{\mathbf{x}}_{Z,l} \approx \mathbf{U}_Z \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l}, \quad (4.48)$$

und anschließend gefordert, dass das Residuum

$$\mathbf{r}_{Z,l} = \mathbf{A}_Z(k_0) \mathbf{U}_Z \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l} - j k_0 \eta_0 \check{\mathbf{b}}_l(k_0) \quad (4.49)$$

orthogonal auf dem Spaltenraum von \mathbf{U}_Z steht. Das zugehörige reduzierte Modell ergibt sich zu

$$\sum_{j=1}^{A_Z} \alpha_{Z,j}(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_{Z,j} \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l} = j k_0 \eta_0 \tilde{\mathbf{b}}_{Z,l}(k_0), \quad (4.50a)$$

$$\tilde{Z}_{kl} = \tilde{\mathbf{b}}_{Z,k}^T(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l} \quad (4.50b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{Z,j} = \mathbf{U}_Z^T \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_Z, \quad (4.51a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{Z,j}(k_0) = \mathbf{U}_Z^T \check{\mathbf{b}}_j(k_0). \quad (4.51b)$$

Der Ausgang des reduzierten Modells stellt dabei eine Approximation des Ausgangs des FE-Systems dar: $Z_{k,l} \approx \tilde{Z}_{k,l}$. Mit der Definition von $\check{\mathbf{b}}_i(k_0)$ berechnen sich die reduzierten Anregungsvektoren gemäß

$$\tilde{\mathbf{b}}_{Z,j}(k_0) = \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \xi_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_j(k_0)) \theta_q(k_0) \mathbf{U}_Z^T \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q} \tilde{\mathbf{v}}_j(k_0). \quad (4.52)$$

Diese Gleichung stellt eine direkte Kopplung zwischen dem reduzierten Eigenwertproblem (4.40) und dem reduzierten Anregungsproblem (4.50) dar. Die Matrizen

$\mathbf{U}_Z^T \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q} \in \mathbb{C}^{\tilde{N} \times \tilde{N}_w}$ sind von der Dimension der reduzierten Modelle. Außerdem ist diese Kopplung affin in der Frequenz und dem Eigenwert λ_j parametrisiert: Während die Frequenzabhängigkeit in den skalaren Faktoren ξ_p, θ_q bzw. λ_j berücksichtigt wird, sind die Matrizen $\mathbf{U}_Z^T \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q}$ konstant. Zusammengenommen erlauben diese Eigenschaften wieder die Zerlegung in eine Offline- und eine Online-Phase. In der Offline-Phase werden die Projektionsmatrizen $\mathbf{R}_{w,q}$ und \mathbf{U}_Z , die reduzierten Matrizen des Eigenwertproblems nach (4.41), die reduzierten Matrizen des Anregungsproblems nach (4.51) sowie die Matrizen zur Kopplung nach (4.52) erstellt. Sind all diese Matrizen vorhanden, kann in der Online-Phase die Auswertung der reduzierten Modelle in den interessierenden Frequenzpunkten sehr effizient durchgeführt werden. Dazu wird zunächst das reduzierte Eigenwertproblem (4.40) gelöst. Mit den erhaltenen Eigenlösungen werden entsprechend (4.52) die Anregungsvektoren $\tilde{\mathbf{b}}_{Z,j}$ berechnet. Diese werden dann in (4.50) verwendet, um die Einträge der Impedanzmatrix auszuwerten. Da in der Online-Phase wiederum nur Operation mit Matrizen reduzierter Dimension involviert sind, kann diese sehr effizient durchgeführt werden.

Weiterhin sei angemerkt, dass das reduzierte Modell (4.50) genau wie das zugrunde liegende FE-Modell (4.10) innere Resonanzen enthält. Dazu sei auch auf Abschnitt 4.3 verwiesen.

Ordnungsreduktion für die Streuparameter-Formulierung

Die Ordnungsreduktion der S-Formulierung läuft analog zu dem Vorgehen für die Z-Formulierung. Es wird eine Projektionsmatrix \mathbf{U}_S entsprechend

$$\text{span}\{\mathbf{U}_S\} = \text{span}\{\mathbf{X}_S(k_{0,1}), \dots, \mathbf{X}_S(k_{0,N_F})\}, \quad \mathbf{U}_S \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}}, \quad \tilde{N} \ll N, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{X}_S(k_{0,j}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S,1}(k_{0,j}) & \cdots & \mathbf{x}_{S,M}(k_{0,j}) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

konstruiert. Die Berechnung der Lösungsvektoren $\mathbf{x}_{S,l}(k_{0,j})$ erfolgt nach (4.21). Analog zur Z-Formulierung wird der Suchraum des Vektors $\check{\mathbf{x}}_{S,l}$ auf den Spaltenraum der Projektionsmatrix \mathbf{U}_S restringiert:

$$\check{\mathbf{x}}_{S,l} \approx \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \quad (4.55)$$

Dadurch und mit der Definition von $\check{\mathbf{x}}_h$ (4.20) ergibt sich die Restriktion des Suchraums für $\check{\mathbf{x}}_h$ zu

$$\check{\mathbf{x}}_h \approx \mathbf{j} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_S. \quad (4.56)$$

Die Approximation für den gesamten Lösungsvektor der erweiterten S-Formulierung ist damit

$$\check{\mathbf{x}}_{SE} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{x}}_S(k_0) \\ \check{\mathbf{x}}_h(k_0) \end{bmatrix} \approx \mathbf{U}_{SE} \tilde{\mathbf{x}}_S \quad \text{mit } \mathbf{U}_{SE} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ \mathbf{j} \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{U}_S \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

Es wird gefordert, dass das entstehende Residuum

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{S,l} \\ \mathbf{r}_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z(k_0) & k_0\eta_0\check{\mathbf{B}}(k_0) \\ k_0\eta_0\check{\mathbf{B}}^T(k_0) & jk_0\eta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_S \\ j\check{\mathbf{B}}^T\mathbf{U}_S \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l} - \begin{bmatrix} 2jk_0\eta_0\check{\mathbf{b}}_l(k_0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

wobei per Konstruktion $\mathbf{r}_{h,l} = \mathbf{0}$ gilt, orthogonal auf dem Spaltenraum von \mathbf{U}_{SE} steht. Dies führt auf das reduzierte Modell

$$\left(\sum_{j=1}^{A_Z} \alpha_{Z,j}(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_{S,j} + jk_0\eta_0 \tilde{\mathbf{B}}_S(k_0) \tilde{\mathbf{B}}_S^T(k_0) \right) \tilde{\mathbf{x}}_{S,l} = 2jk_0\eta_0 \tilde{\mathbf{b}}_{S,l}(k_0), \quad (4.59a)$$

$$\tilde{S}_{k,l} = \tilde{\mathbf{b}}_{S,k}^T(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{S,l} - \delta_{k,l}, \quad (4.59b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{S,j} = \mathbf{U}_S^T \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_S, \quad (4.60a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{S,j}(k_0) = \mathbf{U}_S^T \check{\mathbf{b}}_j(k_0), \quad (4.60b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_S = \mathbf{U}_S^T \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_{S,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{b}}_{S,M} \end{bmatrix}. \quad (4.60c)$$

Im Gegensatz zum FE-System (4.18) bereitet das explizite Auftreten der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_S \tilde{\mathbf{B}}_S^T$ an dieser Stelle keine Probleme, da die reduzierten Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}_{S,j}$ ebenfalls voll besetzt sind. Das Vorgehen zur Auswertung des reduzierten Modells der S-Formulierung erfolgt analog zur Z-Formulierung: Zunächst wird das reduzierte Eigenwertproblem (4.40) gelöst. Mithilfe der Lösungen werden die reduzierten Anregungsvektoren $\tilde{\mathbf{b}}_{S,j}(k_0)$ sowie die reduzierte Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_S(k_0)$ nach (4.43) bzw. (4.60c) berechnet. Der Ausgang $\tilde{S}_{k,l}$ ergibt sich durch Lösen des reduzierten Systems (4.59). Wie bereits im Rahmen der Z-Formulierung ist auch für die Ordnungsreduktion der S-Formulierung eine Zerlegung in eine Offline- und eine Online-Phase möglich. Die Operationen der Online-Phase involvieren ausschließlich Matrizen reduzierter Dimension, weshalb diese sehr effizient durchgeführt werden kann.

Da im reduzierten Modell der S-Formulierung (4.59) der zusätzliche Dämpfungsterm $jk_0\eta_0 \tilde{\mathbf{B}}_S \tilde{\mathbf{B}}_S^T$ auftritt, ist auch das reduzierte Modell frei von inneren Resonanzen.

Kombination der Formulierungen im Rahmen der Ordnungsreduktion

Der Vergleich der Z-Formulierung mit der S-Formulierung in Abschnitt 4.1.4 hat gezeigt, dass die Z-Formulierung für verlustfreie Strukturen auf ein reellwertiges Gleichungssystem führt, während das resultierende Gleichungssystem der S-Formulierung komplexwertig ist. Dies führt dazu, dass die Systeme, die aus der Z-Formulierung resultieren, wesentlich weniger Speicher und kürzere Rechenzeiten benötigen. Dafür treten in der Z-Formulierung innere Resonanzen auf, und der Ausgang kann unbeschränkt werden. Diese Nachteile vermeidet die S-Formulierung. In

diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, das es erlaubt die beiden Formulierung im Zuge der MOR zu kombinieren und somit von den Vorteilen beider Formulierungen zu profitieren. Für affin in der Frequenz parametrisierte Systeme nach Abschnitt 4.2.1 existiert ein solches Verfahren bereits [FLDE10]. Dieses wird im Folgenden so erweitert, dass auch Strukturen, die mit frequenzabhängigen Moden angeregt werden, behandelt werden können.

Die Idee des Verfahrens ist, die Z-Formulierung zur Erstellung der Projektionsmatrix zu verwenden und mit dieser Projektionsmatrix die S-Formulierung zu reduzieren. Es wird also eine Projektionsmatrix \mathbf{U}_C analog zu (4.46) erstellt, deren Spaltenraum dem Raum entspricht, der von Lösungen $\mathbf{X}_Z(k_{0,j})$ der Z-Formulierung aufgespannt wird:

$$\text{span}\{\mathbf{U}_C\} = \text{span}\{\mathbf{X}_Z(k_{0,1}), \dots, \mathbf{X}_Z(k_{0,N_F})\}, \quad \mathbf{U}_C \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}}, \quad \tilde{N} \ll N. \quad (4.61)$$

Im Zuge der Ordnungsreduktion wird der Suchraum des Lösungsvektors $\check{\mathbf{x}}_{S,l}$ aus (4.45) auf den Spaltenraum von \mathbf{U}_C restringiert:

$$\check{\mathbf{x}}_{S,l} \approx \mathbf{U}_C \check{\mathbf{x}}_{C,l}. \quad (4.62)$$

Analog zum bisherigen Vorgehen zur Erstellung der reduzierten Modelle wird gefordert, dass das entstehende Residuum

$$\mathbf{r}_{C,l} = \mathbf{A}_Z(k_0) \mathbf{U}_C \check{\mathbf{x}}_{C,l} + j k_0 \eta_0 \check{\mathbf{B}}(k_0) \check{\mathbf{B}}^T(k_0) \mathbf{U}_C \check{\mathbf{x}}_{C,l} - 2j k_0 \eta_0 \check{\mathbf{b}}_l(k_0) \quad (4.63)$$

orthogonal auf dem Spaltenraum der Matrix \mathbf{U}_C steht. Das reduzierte Modell des kombinierten Ansatzes ergibt sich zu

$$\left(\sum_{j=1}^{A_Z} \alpha_{Z,j}(k_0) \tilde{\mathbf{A}}_{C,j} + j k_0 \eta_0 \tilde{\mathbf{B}}_C(k_0) \tilde{\mathbf{B}}_C^T(k_0) \right) \check{\mathbf{x}}_{C,l} = 2j k_0 \eta_0 \tilde{\mathbf{b}}_{C,l}(k_0), \quad (4.64a)$$

$$\tilde{S}_{k,l} = \tilde{\mathbf{b}}_{C,k}^T(k_0) \check{\mathbf{x}}_{C,l} - \delta_{k,l} \quad (4.64b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_{C,j} = \mathbf{U}_C^T \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_C, \quad (4.65a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{C,j}(k_0) = \mathbf{U}_C^T \check{\mathbf{b}}_j(k_0), \quad (4.65b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_C = \mathbf{U}_C^T \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_{C,1} & \dots & \tilde{\mathbf{b}}_{C,M} \end{bmatrix}. \quad (4.65c)$$

Wesentlich für die Durchführbarkeit des oben vorgestellten Verfahrens ist, dass der Raum, den die Lösungen der Z-Formulierung in einem Frequenzpunkt aufspannen, dem Raum entspricht, der von den Lösungen der S-Formulierung im gleichen Frequenzpunkt aufgespannt wird. Dies soll im Folgenden bewiesen werden. Das Vorgehen ist dabei ähnlich zu dem in [FLDE10], wo der Beweis bereits für affin in der Frequenz parametrisierte Systeme erbracht wurde. Zu zeigen ist, dass in einem beliebigen Frequenzpunkt \hat{k}_0 die Beziehung

$$\text{span}\{\mathbf{x}_{Z,1}(\hat{k}_0), \dots, \mathbf{x}_{Z,M}(\hat{k}_0)\} = \text{span}\{\mathbf{x}_{S,1}(\hat{k}_0), \dots, \mathbf{x}_{S,M}(\hat{k}_0)\} \quad (4.66)$$

gilt. Es ist daher zu zeigen, dass eine Matrix \mathbf{C} existiert, sodass

$$\mathbf{X}_Z(\hat{k}_0) = \mathbf{X}_S(\hat{k}_0)\mathbf{C}. \quad (4.67)$$

Für die Matrizen $\mathbf{X}_Z(\hat{k}_0)$ und $\mathbf{X}_S(\hat{k}_0)$ gilt

$$\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0)\mathbf{X}_Z(\hat{k}_0) = jk_0\eta_0\mathbf{B}(\hat{k}_0), \quad (4.68a)$$

$$\left(\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0) + jk_0\eta_0\mathbf{B}(\hat{k}_0)\mathbf{B}^T(\hat{k}_0)\right)\mathbf{X}_S(\hat{k}_0) = 2jk_0\eta_0\mathbf{B}(\hat{k}_0). \quad (4.68b)$$

Wird (4.68b) von links mit $\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0)^{-1}$ multipliziert, ergibt sich

$$\left(\mathbf{I} + jk_0\eta_0\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0)^{-1}\mathbf{B}(\hat{k}_0)\mathbf{B}^T(\hat{k}_0)\right)\mathbf{X}_S(\hat{k}_0) = 2jk_0\eta_0\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0)^{-1}\mathbf{B}(\hat{k}_0). \quad (4.69)$$

Nach (4.68a) ist $\mathbf{X}_Z(\hat{k}_0) = jk_0\eta_0\mathbf{A}_Z(\hat{k}_0)^{-1}\mathbf{B}(\hat{k}_0)$, und somit folgt aus (4.69)

$$\mathbf{X}_S(\hat{k}_0) - \mathbf{X}_Z(\hat{k}_0)\mathbf{B}^T(\hat{k}_0)\mathbf{X}_S(\hat{k}_0) = 2\mathbf{X}_Z(\hat{k}_0) \quad (4.70)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X}_S(\hat{k}_0) = \mathbf{X}_Z(\hat{k}_0)\left(2\mathbf{I} + \mathbf{B}^T(\hat{k}_0)\mathbf{X}_S(\hat{k}_0)\right). \quad (4.71)$$

Durch den Vergleich von (4.71) mit (4.67) lässt sich die gesuchte Matrix \mathbf{C} direkt bestimmen zu

$$\mathbf{C} = 2\mathbf{I} + \mathbf{B}^T(\hat{k}_0)\mathbf{X}_S(\hat{k}_0). \quad (4.72)$$

□

Damit ist gezeigt, dass auch im Fall der Anregung mit frequenzabhängigen Modenformen die Lösungsvektoren von Z- und S-Formulierung in einem Frequenzpunkt den gleichen Raum aufspannen, und es somit legitim ist, die Projektionsmatrix mithilfe der Z-Formulierung aufzubauen, und mit dieser Projektionsmatrix die S-Formulierung zu reduzieren.

Der vorgestellte Ansatz kombiniert dabei die Vorteile der beiden Formulierungen. So sind die Ausgänge des reduzierten Systems Streuparameter und daher betragsmäßig auf eins beschränkt. Das reduzierte Modell (4.64) enthält außerdem den Dämpfungsterm $jk_0\eta_0\tilde{\mathbf{B}}_C\tilde{\mathbf{B}}_C^T$, weshalb keine inneren Resonanzen entstehen. Weiterhin werden zur Erzeugung der Projektionsmatrix lediglich Lösungen der Z-Formulierung verwendet. Wann immer also ein volles FE-System gelöst werden muss, wird die Z-Formulierung herangezogen. Für verlustfreie Strukturen sind also alle zu lösenden Systeme hoher Dimension reellwertig. Im Vergleich zur reinen S-Formulierung aus Abschnitt 4.2.2 benötigt die Erzeugung der reduzierten Modelle dadurch deutlich weniger numerischen Aufwand. Für einen Vergleich anhand numerischer Beispiele sei auf Abschnitt 4.3 verwiesen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass der hier vorgestellte kombinierte Ansatz auch für verlustbehaftete Strukturen korrekte Ergebnisse liefert, dabei jedoch keinerlei Vorteil gegenüber der Verwendung der reinen S-Formulierung nach (4.59) aufweist.

4.2.3 Selbst-adaptives Verfahren zur Erstellung der Projektionsmatrix

Ein wichtiger Punkt bei der Erstellung der reduzierten Modelle wurde bisher ausgespart, nämlich die Wahl der Stützstellen $k_{0,j}$ in (4.46), (4.53) bzw. (4.61). Wie in Abschnitt 4.2.1 bereits angedeutet, existieren im Rahmenwerk der RBM Verfahren, die eine selbst-adaptive Wahl der Frequenzstützstellen zur Erzeugung der Projektionsmatrizen ermöglichen [dRM09], [KFK⁺11],[FHMS11], [HSZ12]. Diese sind allerdings auf affin in der Frequenz parametrisierte Systeme beschränkt. In diesem Abschnitt werden diese selbst-adaptiven Verfahren so erweitert, dass auch der Fall der Anregung mit frequenzabhängigen Modenformen behandelt werden kann. Das generelle Vorgehen ist dabei für die Z-, die S-Formulierung sowie die Kombination beider Formulierungen ähnlich.

Die grundlegende Idee ist, das reduzierte Modell sukzessive aufzubauen. Dazu wird der zu untersuchende Bereich der Freiraumwellenzahlen fein abgetastet. Die so entstandene Menge diskreter Freiraumwellenzahlen \mathcal{F}_s , wird auch als *Trainingsmenge* bezeichnet. Ausgehend von einer beliebigen Freiraumwellenzahl $k_{0,1} \in \mathcal{F}_s$ wird eine Projektionsmatrix konstruiert, deren Spaltenraum dem Raum der Lösungsvektoren für alle Anregungen in $k_{0,1}$ entspricht. Mittels dieser Projektionsmatrix wird ein reduziertes Modell der Dimension M erzeugt und für alle $k_0 \in \mathcal{F}_s$ gelöst. Die Norm des relativen Residuums, welches sich für die Z-Formulierung zu

$$\rho_{Z,l}(k_0) = \frac{1}{\eta_0 k_0} \frac{\|\mathbf{r}_{Z,l}(k_0)\|}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|}, \quad (4.73)$$

für die S-Formulierung zu

$$\rho_{S,l}(k_0) = \frac{1}{2\eta_0 k_0} \frac{\|\mathbf{r}_{S,l}(k_0)\|}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|}, \quad (4.74)$$

und für die Kombination beider Formulierungen zu

$$\rho_{C,l}(k_0) = \frac{1}{2k_0\eta_0} \frac{\|\mathbf{r}_{C,l}(k_0)\|}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|} \quad (4.75)$$

ergibt, wird in jedem $k_0 \in \mathcal{F}_s$ und für jede Anregung $l \in [1, \dots, M]$ berechnet. Anschließend wird die Freiraumwellenzahl bestimmt, für die die Norm des relativen Residuums maximal wird. An dieser Freiraumwellenzahl wird das Originalsystem gelöst und der Spaltenraum der Projektionsmatrix wird um die erhaltenen M Lösungsvektoren erweitert. Daraufhin wird mit der neuen Projektionsmatrix ein größeres reduziertes Modell konstruiert. Dies wird so lange wiederholt, bis das Residuum für alle $k_0 \in \mathcal{F}_s$ und für alle betrachteten Anregungen $l \in [1, \dots, M]$ unter einer vorher spezifizierten Schranke ρ_t liegt. Ist dies der Fall, ist die Erstellung der reduzierten Modelle abgeschlossen.

Im Verlauf dieses Verfahrens müssen $\rho_{Z,l}$, $\rho_{S,l}$ bzw. $\rho_{C,l}$ in jedem Schritt für alle Wellenzahlen der feinen Abtastung \mathcal{F}_s , sowie für alle Anregungen berechnet werden. Um eine effiziente Erstellung der reduzierten Modelle zu gewährleisten, ist es von großer Bedeutung, die Norm der relativen Residuen mit geringem numerischen Aufwand berechnen zu können. Allerdings sind die Residuen $\mathbf{r}_{Z,l}$, $\mathbf{r}_{S,l}$ und $\mathbf{r}_{C,l}$ Vektoren der Dimension des FE-Systems. Eine direkte Berechnung der Residuen und anschließende Bildung der Norm würde daher viel Zeit in Anspruch nehmen. Zur Beschleunigung der Berechnung bietet es sich an, die euklidische Norm zu verwenden. Damit gilt

$$\rho_{Z,l}(k_0) = \frac{1}{\eta_0 k_0} \frac{\|\mathbf{r}_{Z,l}(k_0)\|_2}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|_2} = \frac{1}{\eta_0 k_0} \frac{\sqrt{\mathbf{r}_{Z,l}^* \mathbf{r}_{Z,l}}}{\sqrt{\check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l}}, \quad (4.76a)$$

$$\rho_{S,l}(k_0) = \frac{1}{2\eta_0 k_0} \frac{\|\mathbf{r}_{S,l}(k_0)\|_2}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|_2} = \frac{1}{2\eta_0 k_0} \frac{\sqrt{\mathbf{r}_{S,l}^* \mathbf{r}_{S,l}}}{\sqrt{\check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l}}, \quad (4.76b)$$

$$\rho_{C,l}(k_0) = \frac{1}{2\eta_0 k_0} \frac{\|\mathbf{r}_{C,l}(k_0)\|_2}{\|\check{\mathbf{b}}_l(k_0)\|_2} = \frac{1}{2\eta_0 k_0} \frac{\sqrt{\mathbf{r}_{C,l}^* \mathbf{r}_{C,l}}}{\sqrt{\check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l}}. \quad (4.76c)$$

Der Vorteil dieser Darstellung wird deutlich, wenn die Ausdrücke in den Wurzeln näher betrachtet werden. So ergibt sich mit (4.43), (4.49) und (4.58)

$$\check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l = \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \left[\bar{\xi}_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \bar{\theta}_q(k_0) \xi_{w,i}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \theta_j(k_0) \right. \\ \left. \times \tilde{\mathbf{v}}_l^*(k_0) \mathbf{R}_{w,q}^* \mathbf{Q}_{w,p}^* \mathbf{Q}_{w,i} \mathbf{R}_{w,j} \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0) \right], \quad (4.77)$$

$$\mathbf{r}_{Z,l}^* \mathbf{r}_{Z,l} = \\ \mathbf{j} k_0 \eta_0 \sum_{j=1}^{A_Z} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\xi}_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \bar{\theta}_q(k_0) \alpha_{Z,j}(k_0) \tilde{\mathbf{v}}_l^*(k_0) \mathbf{R}_{w,q}^* \mathbf{Q}_{w,p}^* \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_Z \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l}(k_0) \\ - \mathbf{j} k_0 \eta_0 \sum_{j=1}^{A_Z} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\alpha}_{Z,j}(k_0) \xi_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \theta_q(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l}^*(k_0) \mathbf{U}_Z^* \mathbf{A}_{Z,j}^* \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q} \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0) \\ + \sum_{i=1}^{A_Z} \sum_{j=1}^{A_Z} \bar{\alpha}_{Z,j}(k_0) \alpha_{Z,i}(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l}^*(k_0) \mathbf{U}_Z^* \mathbf{A}_{Z,i}^* \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_Z \tilde{\mathbf{x}}_{Z,l}(k_0) + k_0^2 \eta_0^2 \check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l. \quad (4.78)$$

Um auch $\mathbf{r}_{S,l}^* \mathbf{r}_{S,l}$ kompakt darstellen zu können, werden zunächst folgende Hilfsmatrizen eingeführt:

$$\hat{\mathbf{R}}_{w,p,q} = \left[\mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{1,q} \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{N_P,q} \right] \in \mathbb{C}^{N \times \tilde{N}^W}, \quad \tilde{N}^W = \sum_{w=1}^{N_P} \tilde{N}_w, \quad (4.79a)$$

$$\mathbf{V}_{w,p}(k_0) = \left[\xi_{w,p}(k_0, \lambda_{w,1}) \tilde{\mathbf{v}}_{w,1}(k_0) \quad \cdots \quad \xi_{w,p}(k_0, \lambda_{w,M_w}) \tilde{\mathbf{v}}_{w,M_w} \right], \quad (4.79b)$$

$$\mathbf{V}_p(k_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{1,p}(k_0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{2,p}(k_0) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{V}_{N_P,p}(k_0) \end{bmatrix}, \quad (4.79c)$$

mit $w \in [1, \dots, N_P]$, $p \in [1, \dots, N_{w,Q}]$ und $q \in [1, \dots, N_R]$. Es sei angemerkt, dass die Anzahl der Spalten der Matrix $\hat{\mathbf{R}}_{w,p,q}$ der Summe der Dimensionen der reduzierten Wellenleiter-Modelle entspricht. Mit diesen Hilfsmatrizen ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{S,l}^* \mathbf{r}_{S,l} = & \sum_{i=1}^{A_Z} \sum_{j=1}^{A_Z} \bar{\alpha}_{Z,i}(k_0) \alpha_{Z,j}(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^* \mathbf{U}_S^* \mathbf{A}_{Z,i}^* \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l} \\ & + j k_0 \eta_0 \sum_{a=1}^{A_Z} \sum_{w=1}^{N_P} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_P} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \bar{\alpha}_{Z,a}(k_0) \theta_q(k_0) \theta_j(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^*(k_0) \mathbf{U}_S^* \mathbf{A}_{Z,a}^* \hat{\mathbf{R}}_{w,p,q} \mathbf{V}_p(k_0) \mathbf{V}_i^T(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{k,i,j}^T \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}(k_0) \\ & - 2j k_0 \eta_0 \sum_{j=1}^{A_Z} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\alpha}_{Z,j}(k_0) \xi_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \theta_q(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^*(k_0) \mathbf{U}_S^* \mathbf{A}_{Z,j}^* \mathbf{Q}_{w,p} \mathbf{R}_{w,q} \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0) \\ & - j k_0 \eta_0 \sum_{a=1}^{A_Z} \sum_{w=1}^{N_P} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_P} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \alpha_{Z,a}(k_0) \bar{\theta}_q(k_0) \bar{\theta}_j(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^*(k_0) \mathbf{U}_S^* \hat{\mathbf{R}}_{w,p,q} \bar{\mathbf{V}}_p(k_0) \mathbf{V}_i^*(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{k,i,j}^* \mathbf{A}_{Z,a} \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}(k_0) \\ & + k_0^2 \eta_0^2 \sum_{w=1}^{N_P} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_P} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \sum_{a=1}^{N_P} \sum_{b=1}^{N_{w,Q}} \sum_{c=1}^{N_R} \sum_{f=1}^{N_P} \sum_{g=1}^{N_{w,Q}} \sum_{h=1}^{N_R} \bar{\theta}_q(k_0) \bar{\theta}_j(k_0) \\ & \quad \times \bar{\theta}_c(k_0) \bar{\theta}_h(k_0) \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^*(k_0) \mathbf{U}_S^* \hat{\mathbf{R}}_{w,p,q} \bar{\mathbf{V}}_p(k_0) \mathbf{V}_i^*(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{k,i,j}^* \hat{\mathbf{R}}_{a,b,c} \\ & \quad \times \mathbf{V}_b(k_0) \mathbf{V}_g^T(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{f,g,h}^T \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l} \\ & - 2k_0^2 \eta_0^2 \sum_{r=1}^{N_P} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_P} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \sum_{a=1}^{N_{w,Q}} \sum_{b=1}^{N_R} \bar{\theta}_q(k_0) \bar{\theta}_j(k_0) \xi_{w,a}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \theta_b(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}^*(k_0) \mathbf{U}_S^* \hat{\mathbf{R}}_{r,p,q} \bar{\mathbf{V}}_p(k_0) \mathbf{V}_i^*(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{k,i,j}^* \mathbf{Q}_{w,a} \mathbf{R}_{w,b} \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0) \\ & + 2j k_0 \eta_0 \sum_{j=1}^{A_Z} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \bar{\xi}_{w,p}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \bar{\theta}_q(k_0) \alpha_{Z,j}(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{v}}_l^*(k_0) \mathbf{R}_{w,q}^* \mathbf{Q}_{w,p}^* \mathbf{A}_{Z,j} \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}(k_0) \\ & - 2k_0^2 \eta_0^2 \sum_{a=1}^{N_{w,Q}} \sum_{b=1}^{N_R} \sum_{r=1}^{N_P} \sum_{p=1}^{N_{w,Q}} \sum_{q=1}^{N_R} \sum_{k=1}^{N_P} \sum_{i=1}^{N_{w,Q}} \sum_{j=1}^{N_R} \bar{\xi}_{w,a}(k_0, \tilde{\lambda}_l) \bar{\theta}_b(k_0) \theta_q(k_0) \theta_j(k_0) \\ & \quad \times \tilde{\mathbf{v}}_l(k_0) \mathbf{R}_{w,b}^* \mathbf{Q}_{w,a}^* \hat{\mathbf{R}}_{r,p,q} \mathbf{V}_p(k_0) \mathbf{V}_i^T(k_0) \hat{\mathbf{R}}_{k,i,j}^T \mathbf{U}_S \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}(k_0) \end{aligned}$$

$$+ 4k_0^2 \eta_0^2 \check{\mathbf{b}}_l^* \check{\mathbf{b}}_l. \quad (4.80)$$

Der Ausdruck für $\mathbf{r}_{C,l}^* \mathbf{r}_{C,l}$ berechnet sich analog zu $\mathbf{r}_{S,l}^* \mathbf{r}_{S,l}$; es ist lediglich die Projektionsmatrix \mathbf{U}_S durch \mathbf{U}_C zu ersetzen. Aus diesem Grund sei hier auf eine explizite Angabe von $\mathbf{r}_{C,l}^* \mathbf{r}_{C,l}$ verzichtet. Die Matrizen, die in (4.77), (4.78) sowie (4.80) auftreten, sind konstant über der Frequenz und von der Dimension der reduzierten Modelle. Die Frequenzabhängigkeit geht lediglich durch skalare Koeffizienten, die reduzierten Eigenvektoren sowie durch die Lösungen der entsprechenden reduzierten Modelle ein. Da diese sehr effizient berechnet werden können, wird eine erhebliche Effizienzsteigerung bei der Auswertung der relativen Residuumsnorm und somit auch bei der Generierung der reduzierten Modelle erreicht. Eine Zusammenfassung des Generierungsprozesses ist in Abbildung 4.7 am Beispiel der kombinierten Formulierung gezeigt. Dabei wird das Vorhandensein der reduzierten Modelle für die speisenden Wellenleiter (4.40) vorausgesetzt.

Ein bekannter Nachteil der Berechnung der relativen Residuumsnorm nach (4.76) ist die Tatsache, dass diese bei etwa $\sqrt{\varepsilon_{\text{Comp}}}$ stagniert [CTU09], [Cas12], wobei $\varepsilon_{\text{Comp}}$ der Maschinengenauigkeit [Sto02, S. 6] entspricht. Dies ist durch die begrenzte Genauigkeit der Darstellung der Zahlen im Rechner bedingt. Wird eine höhere Genauigkeit für die relative Residuumsnorm benötigt, können die Verfahren aus [SFDE15] angewendet werden.

4.3 Numerische Beispiele

Bei den folgenden numerischen Beispielen wird, wie schon in Abschnitt 4.1.4, auf die Formulierung aus [FHDE04] zur modalen Analyse der Wellenleiter zurückgegriffen. Die reduzierten Modelle für die Wellenleiter werden entsprechend [SFDE08] erstellt. Die Rechnung in diesem Abschnitt wurden in MATLAB-R2013b auf einem Intel[®] Xeon E5620 Prozessor mit 2,4 GHz durchgeführt. Für die Lösung der hoch dimensionalen Gleichungssysteme wurde der PARDISO Löser für schwach besetzte Matrizen der Intel[®] MKL Bibliothek Version 2017.1.143 verwendet.

4.3.1 Gekoppelte Mikrostreifenleitungen

Das erste numerische Beispiel bilden die gekoppelten Mikrostreifenleitungen (gMSL) aus Abbildung 4.8. An den Stirnflächen der gezeigten Struktur befinden sich die Querschnitte der speisenden Wellenleiter, die jeweils zwei quasi-TEM-Moden führen. Die Struktur ist geschirmt, sodass auf den restlichen Rändern perfekt elektrisch leitende Randbedingungen liegen. Das Substrat wird verlustfrei mit $\varepsilon_r = 9,8$ und $\mu_r = 1$ angenommen, und für die sich darüber befindliche Luft gilt $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 0$. Das interessierende Frequenzband ist [1, 16] GHz. Entsprechend dem

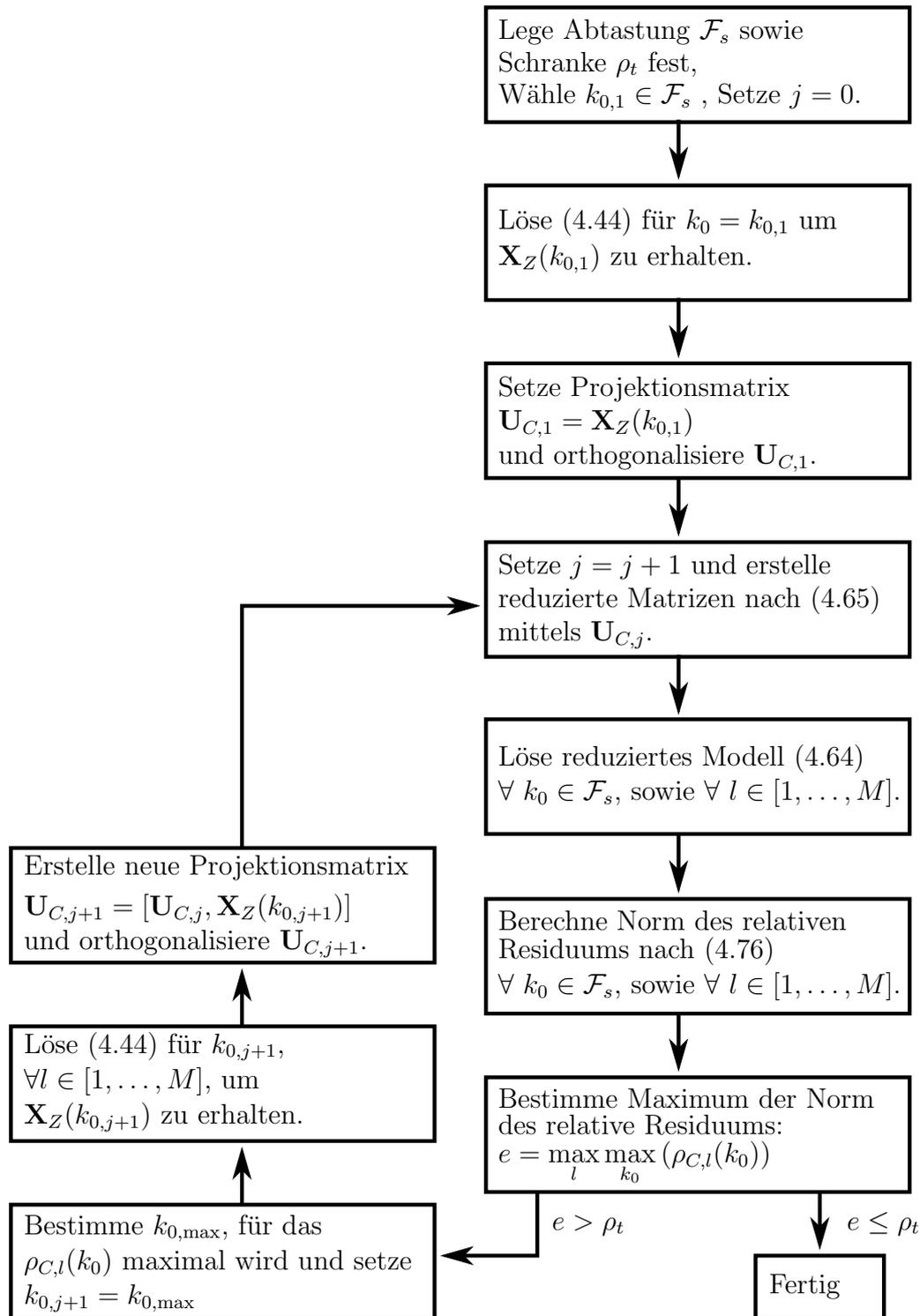


Abbildung 4.7: Ablaufdiagramm zur selbst-adaptiven Erstellung der reduzierten Modelle.

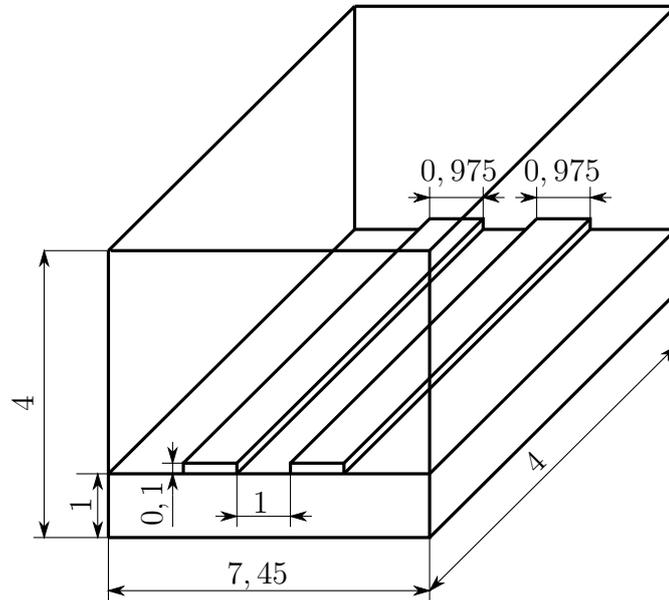


Abbildung 4.8: gMSL, Abmessungen in mm.

hergeleiteten Ansatz wird zunächst je ein reduziertes Modell für die beiden speisenden Wellenleiter nach [SFDE08] unter Verwendung des selbst-adaptiven Verfahrens aus [KFK⁺11] erstellt. Bei der Vorgabe einer Schranke von 10^{-4} für die Norm des relativen Residuums werden reduzierte Modelle der Dimension 22 erstellt. Da beide Wellenleiter in diesem Beispiel identisch sind, werden im Folgenden lediglich die Ergebnisse eines Wellenleiters vorgestellt. Die resultierenden Ausbreitungskoeffizienten der beiden quasi-TEM-Moden sind in Abbildung 4.9a zusammen mit den Lösungen der FE-Modelle, die als Referenz dienen, dargestellt. Mode 1 entspricht dabei dem Gleichtakt-Mode, während Mode 2 den Gegentakt-Mode bezeichnet. Es lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen des reduzierten Modells und denen des FE-Modells erkennen. Um die Abweichung quantifizieren zu können, wird der relative Fehler in der Ausbreitungskoeffizienten e_γ ,

$$e_\gamma = \frac{|\gamma_{FE} - \gamma_{red}|}{|\gamma_{FE}|}, \quad (4.81)$$

eingeführt, wobei γ_{FE} die Lösung des FE-Modells bezeichnet, während γ_{red} die Lösung des reduzierten Modells darstellt. Der Fehler e_γ ist in Abbildung 4.9b über der Frequenz dargestellt. Es ist zu sehen, dass dieser über dem betrachteten Frequenzband unter 10^{-9} liegt, was die hohe Genauigkeit des reduzierten Modells unterstreicht.

In einem ersten Schritt wird die hergeleitete Methodik für die S-Formulierung mit dem Ansatz aus [WMSW02] verglichen, in dem die Modenform als konstant über der Frequenz angenommen wird. Dazu werden die Anregungsvektoren $\mathbf{b}_i(k_0)$ in jedem

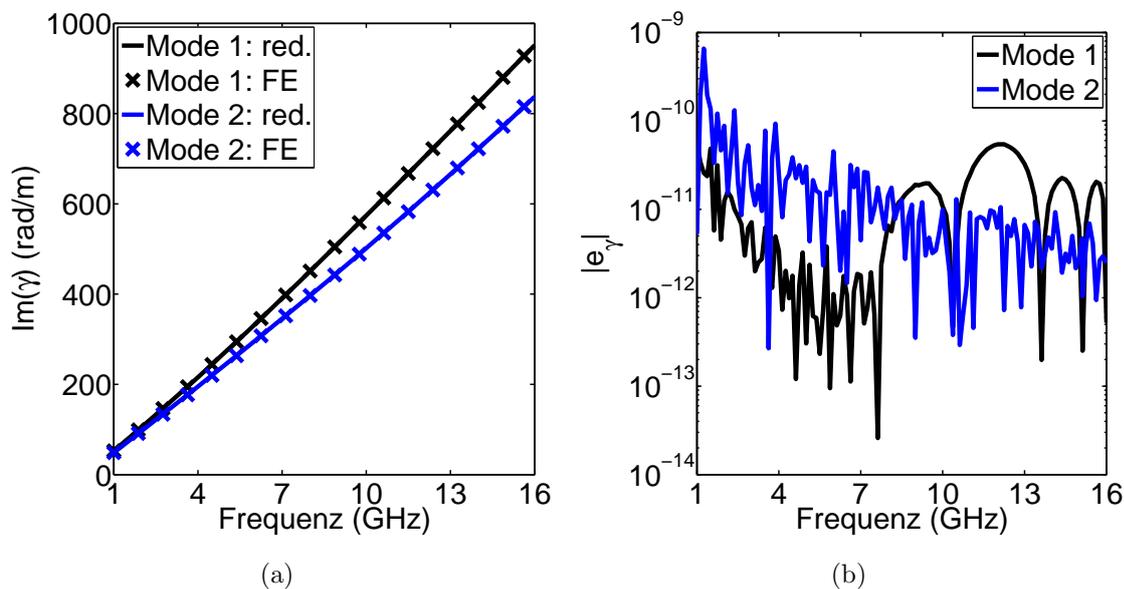


Abbildung 4.9: gMSL: (a) Verlauf Ausbreitungskoeffizienten der quasi-TEM-Moden, (b) Fehler des reduzierten Modells in den Ausbreitungskoeffizienten.

Frequenzpunkt mit dem Anregungsvektor bei der Mittenfrequenz, hier also 8,5 GHz, approximiert:

$$\mathbf{b}_i(k_0) \approx \mathbf{b}_i(k_{0,M}), \quad (4.82)$$

wobei $k_{0,M}$ die zur Mittenfrequenz zugehörige Freiraumwellenzahl bezeichnet. Auf diese Weise entsteht ein affin in der Frequenz parametrisiertes System, das die Anwendung der Methoden aus Abschnitt 4.2.1 erlaubt. Ein Vergleich der Beträge der Streuparameter für reduzierte Modelle der Dimension 20 aus beiden Ansätzen ist in Abbildung 4.10 gezeigt. Als Referenz sind die Ergebnisse des FE-Modells der S-Formulierung hinzugefügt. Wie zu erwarten sind die Lösungen beider Ansätze bei 8,5 GHz identisch. Je weiter die Frequenz von der Mitte entfernt ist, desto größer ist die Abweichung der Lösung des Ansatzes [WMSW02] von dem erwarteten reflexionsfreien Verhalten. Bei einer Frequenz von 16 GHz wird der Gleichtakt-Mode sogar größtenteils reflektiert. Im Gegensatz dazu liefert das neu entwickelte Verfahren über den gesamten Frequenzbereich das erwartete reflexionsfreie Verhalten. Der maximale Fehler in den Streuparametern e_{\max} ,

$$e_{\max}(k_0) = \max_{i,j=1\dots M} |S_{i,j,red}(k_0) - S_{i,j,FE}(k_0)|, \quad (4.83)$$

der hier bezüglich der Ergebnisse des FE-Modells der S-Formulierung berechnet wird, ist in Abbildung 4.11a dargestellt. Während er für das reduzierte Modell der neuen Methodik im Bereich von 10^{-8} liegt, nimmt er für das Verfahren aus [WMSW02] Werte bis zu 1 an. Um zu zeigen, dass dieser hohe Fehler nicht aus einer zu geringen Dimension des reduzierten Modells stammt, werden für beide Ansätze

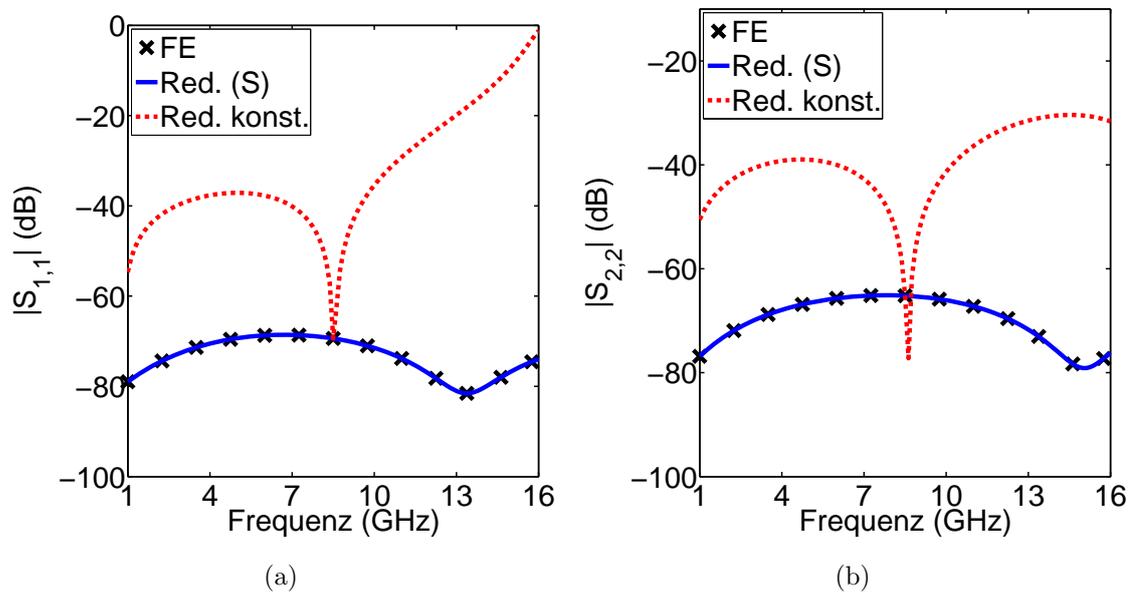


Abbildung 4.10: gMSL: Vergleich des Betrags der Streuparameter des Verfahrens von [WMSW02] mit der neuen Methode, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,2}$.

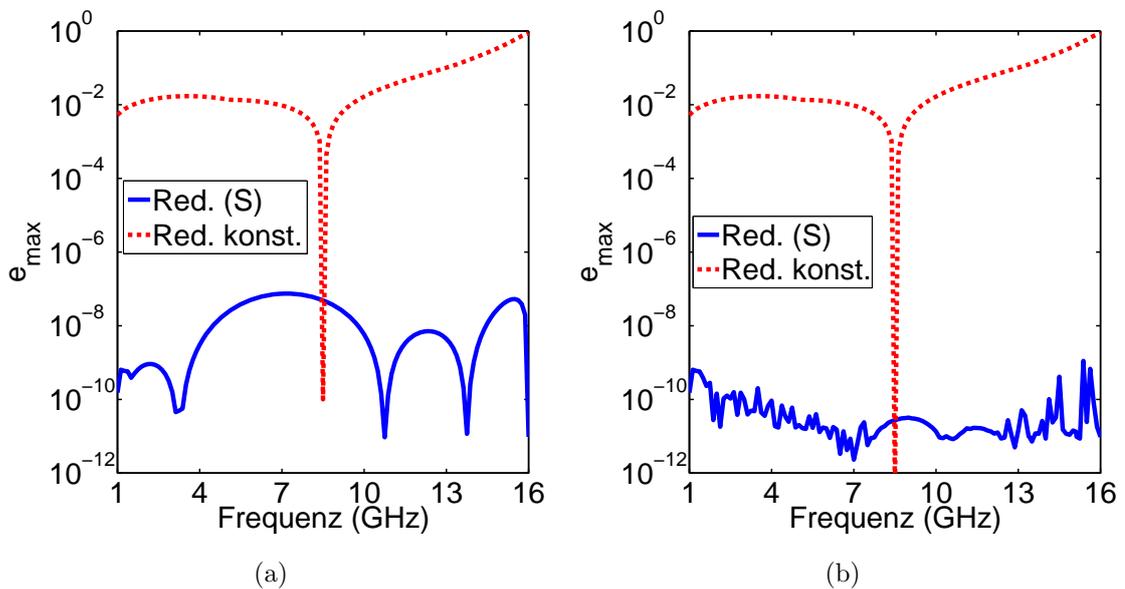


Abbildung 4.11: gMSL: Vergleich des Fehlers in den Streuparametern des Verfahrens von [WMSW02] mit der neuen Methode, für eine Dimension des reduzierten Modells von (a) 20, (b) 28.

reduzierte Modelle der Dimension 28 generiert. Der maximale Fehler e_{\max} der resultierenden Streuparameter ist Abbildung 4.11b dargestellt. Es ist zu sehen, dass der Fehler des neuen Ansatzes weiter abnimmt, während der Fehler des Verfahrens [WMSW02] konstant bleibt. Es handelt sich also um einen systematischen Fehler

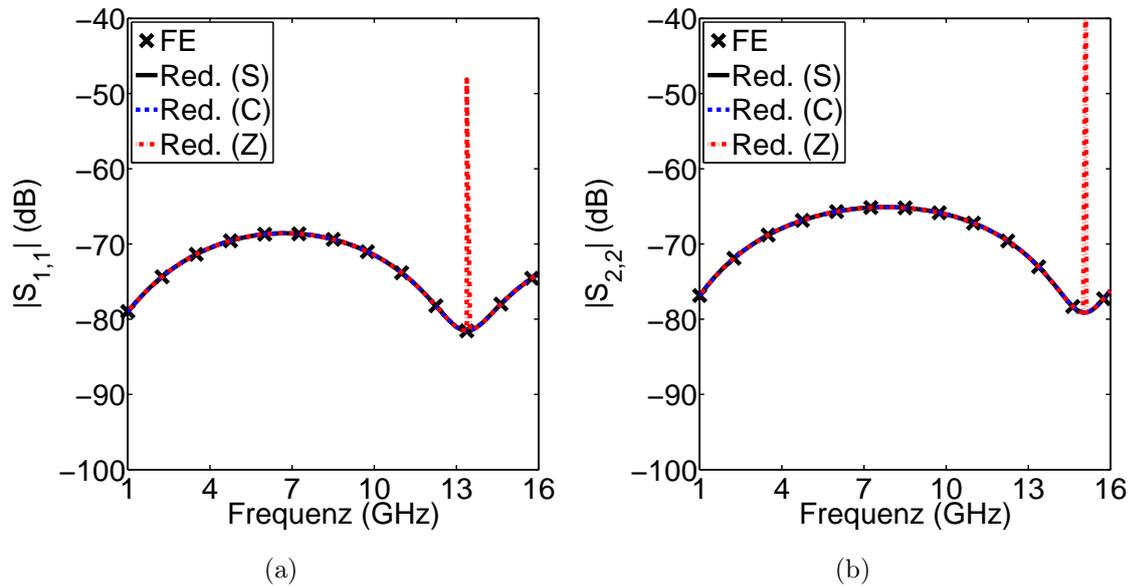


Abbildung 4.12: gMSL: Betrag der Streuparameter der reduzierten Modelle über der Frequenz (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,2}$.

des Verfahrens. Dies verdeutlicht, dass der Ansatz [WMSW02] auch für quasi-TEM-Moden in breitbandigen Anwendungen ungeeignet ist.

Im nächsten Schritt werden die reduzierten Modelle der Z- und S-Formulierung sowie des kombinierten Ansatzes, im Folgenden mit C-Formulierung bezeichnet, miteinander verglichen. Unter Verwendung des selbst-adaptiven Verfahrens aus Abschnitt 4.2.3 mit einer Schranke für das Residuum von $\rho_t = 10^{-4}$, wurden drei reduzierte Modelle der Dimension 28 erstellt. In Abbildung 4.12 sind die Beträge der Streuparameter $S_{1,1}$ und $S_{2,2}$, also die Reflexionen des Gleichtakt- und des Gegentakt-Moden, über dem betrachteten Frequenzbereich dargestellt. Als Referenz ist zusätzlich die Lösung des FE-Modells der S-Formulierung hinzugefügt. Es ist zu sehen, dass die Kurven über weite Teile des Frequenzbandes das erwartete reflexionsfreie Verhalten aufweisen. Lediglich bei Frequenzen von etwa 13,3 GHz bzw. 15,1 GHz weisen die Streuparameter des reduzierten Modells der Z-Formulierung scharfe Resonanzen auf. Werden diese Frequenzen mit den Eigenfrequenzen des zugehörigen Resonatorproblems in Tabelle 4.4 verglichen, so wird deutlich, dass es sich um innere Resonanzen der Z-Formulierung handelt. Ein Vergleich mit den Eigenfrequenzen des reduzierten Resonatorproblems zeigt, dass die inneren Resonanzen während der Ordnungsreduktion erhalten bleiben. In den Streuparametern der S-Formulierung sowie in denen des kombinierten Ansatzes sind diese Resonanzen, wie erwartet, nicht enthalten. Der maximale Fehler in den Streuparametern, e_{\max} , der hier mit Bezug auf die Lösung des FE-Modells der S-Formulierung berechnet ist, ist in Abbildung 4.13 gegeben. Abgesehen von den inneren Resonanzen der Z-Formulierung liegt e_{\max} über dem gesamten betrachteten Frequenzband im Bereich

Tabelle 4.4: gMSL: Eigenfrequenzen des Resonatorproblems.

Modell	Eigenfrequenzen (GHz)		
FE	13,3549	15,0753	16,0871
Red.	13,3779	15,1080	16,0911

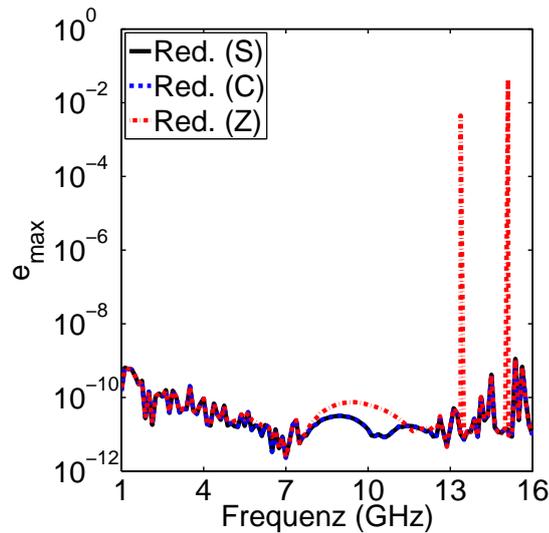


Abbildung 4.13: gMSL: Maximaler Fehler in den Streuparametern über der Frequenz.

von 10^{-9} , was die hohe Genauigkeit der reduzierten Modelle unterstreicht. Die Simulationsdaten zur Erstellung und Auswertung der reduzierten Modelle sowie zur Lösung der FE-Modelle sind in Tabelle 4.5 gegeben. Diese Daten zeigen ebenfalls das erwartete Verhalten: Die Zeit, die zum Lösen an einem einzelnen Frequenzpunkt benötigt wird, ist für das FE-Modell der S-Formulierung fast dreimal höher als die, die für das FE-Modell der Z-Formulierung benötigt wird. Dies hat zur Folge, dass die reduzierten Modelle der Z-Formulierung und des kombinierten Ansatzes sehr viel effizienter erstellt werden als die der S-Formulierung. Im Gegensatz dazu sind die benötigten Zeiten zum Auswerten der reduzierten Modelle in einem Frequenzpunkt ungefähr gleich, jedoch um Größenordnungen geringer als die, die zur Auswertung der FE-Modelle benötigt wird. Dies zeigt, dass die reduzierten Modelle, unabhängig der gewählten Formulierung, eine enorme Beschleunigung der Auswertung ermöglichen.

Um sicherzustellen, dass der größere Bedarf an Rechenzeit der S-Formulierung lediglich aus den komplexwertigen Matrizen herrührt, werden die obigen Simulationen noch einmal wiederholt, allerdings wird das Substrat der Struktur diesmal mit einem Verlusttangens von $\tan \delta = 10^{-4}$ versehen. Die dazugehörigen Simulationsdaten sind in Tabelle 4.6 gegeben. Da die Anzahl der Unbekannten identisch mit der der verlustfreien Struktur ist, wird auf eine Wiederholung der Angabe verzichtet. Es

Tabelle 4.5: gMSL: Simulationsdaten für die verlustfreie Struktur.

Unbekannte	red. Z	red. S	red. C	FE Z	FE S
Wellenleiter 1	22	22	22	13 852	13 852
Wellenleiter 2	22	22	22	13 962	13 962
Anregungsproblem	28	28	28	2 656 956	2 656 960
Zeit zur Generierung (h)					
Wellenleiter	0,18	0,18	0,18	-	-
Anregungsproblem	1,98	5,52	1,78	-	-
Gesamt	2,16	5,7	1,96	-	-
Zeit zum Lösen* (ms)					
Wellenleiter	0,99	0,99	0,99	35 864	35 864
Anregungsproblem	0,76	0,87	0,78	800 171	2 400 305
Gesamt	1,75	1,86	1,77	836 035	2 436 169

* Ausgewertet an einen Frequenzpunkt.

Tabelle 4.6: gMSL: Simulationsdaten für die verlustbehaftete Struktur.

Zeit zur Generierung (h)	red. Z	red. S	red. C	FE Z	FE S
Wellenleiter	0,33	0,33	0,33	-	-
Anregungsproblem	4,9	4,94	5,0	-	-
Gesamt	5,23	5,27	5,33	-	-
Zeit zum Lösen* (ms)					
Wellenleiter	1,86	1,86	1,86	44 519	44 519
Anregungsproblem	0,81	1,0	0,75	2 387 752	2 387 714
Gesamt	2,67	2,86	2,61	2 432 271	2 432 233

* Ausgewertet an einen Frequenzpunkt.

ist zu sehen, dass die Unterschiede in den Lösungszeiten der FE-Modelle minimal sind. Dementsprechend sind auch die Zeiten zur Generierung der reduzierten Modelle ähnlich. Daraus kann geschlossen werden, dass die großen Unterschiede in den Rechenzeiten in Tabelle 4.5 von der komplexwertigen Systemmatrix der S-Formulierung herrühren.

4.3.2 Übergang von Rechteckhohlleiter auf Rechteckhohlleiter mit dielektrischem Einsatz

Das zweite Beispiel bildet der Übergang eines leeren Rechteckhohlleiter (RHL) auf einen Rechteckhohlleiter mit dielektrischem Einsatz (RdE) aus [SA85], dessen Geo-

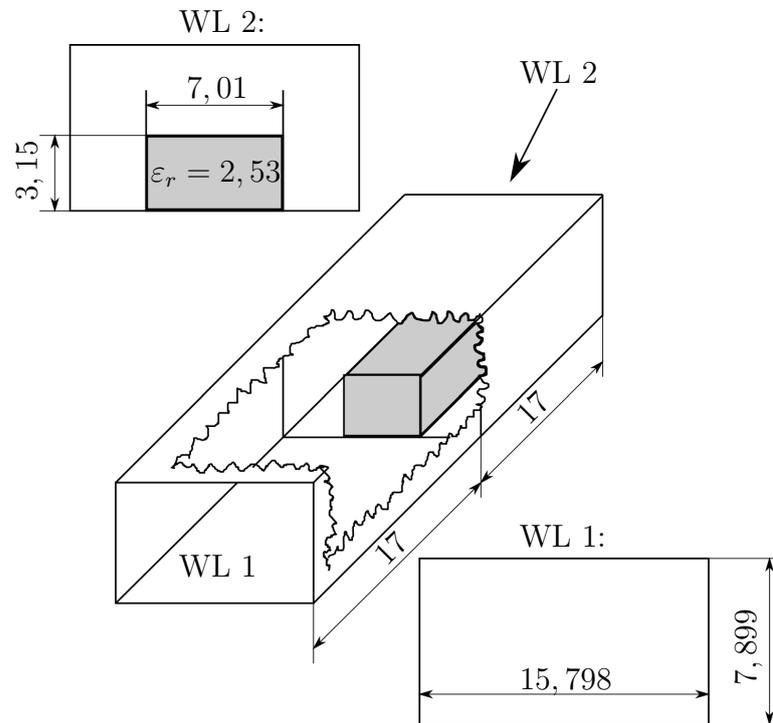
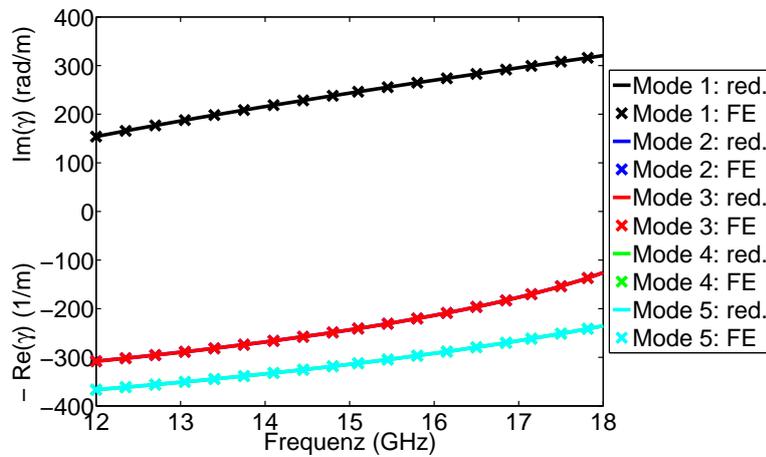


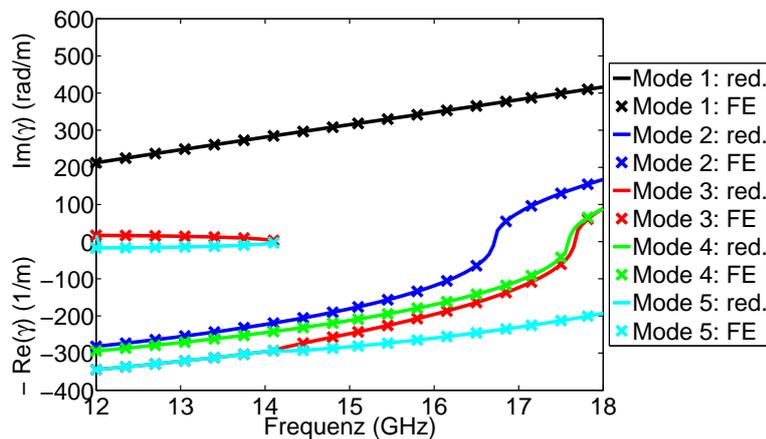
Abbildung 4.14: Übergang RHL-RdE, Abmessungen in mm.

metrie in Abbildung 4.14 dargestellt ist. Die metallische Hülle der Struktur wird als perfekt elektrisch leitend modelliert, und der dielektrische Einsatz wird als verlustfrei und nichtmagnetisch angenommen. Die Struktur wird an beiden Wellenleitern jeweils mit den fünf ersten Moden angeregt, und die Analyse erfolgt im Frequenzband [12, 18] GHz. Im ersten Schritt werden wieder reduzierte Modelle für die speisenden Wellenleiter erstellt. Dazu wird wie im vorherigen Beispiel das Verfahren aus [SFDE08] zusammen mit der selbst-adaptiven Wahl der Frequenzstützstellen nach [KFK⁺11] verwendet. Bei der Vorgabe einer Schranke von 10^{-4} für das Residuum ergeben sich reduzierte Modelle der Dimension 5 für den ersten Wellenleiter und der Dimension 25 für den zweiten Wellenleiter. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der erste Wellenleiter in transversaler Richtung homogenes Materialverhalten aufweist. Die Modenformen sind somit konstant, und somit reicht für jeden Mode ein Basisvektor in der Projektionsmatrix aus, um dessen Modenform korrekt über der Frequenz darzustellen. Für den zweiten Wellenleiter ist dies nicht der Fall, und es werden mehrere Basisvektoren pro Mode benötigt. Ein Vergleich der Ausbreitungskoeffizienten der reduzierten Modelle mit denen der FE-Modelle ist in Abbildung 4.15 gegeben. Es lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Verläufe erkennen. Auch der Fehler, der in Abbildung 4.16 dargestellt ist und über dem Frequenzband unter 10^{-11} bzw. 10^{-6} liegt, bestätigt diese sehr gute Übereinstimmung.

Nachdem die reduzierten Modelle für den Wellenleiter verfügbar sind, werden im



(a)



(b)

Abbildung 4.15: Übergang RHL-RdE: Ausbreitungskoeffizienten, (a) Wellenleiter 1, (b) Wellenleiter 2.

nächsten Schritt wieder reduzierte Modelle für die Z- und die S-Formulierung sowie für den kombinierten Ansatz erstellt. Die Vorgabe einer Schranke für das relative Residuum von $\rho_t = 2 \cdot 10^{-3}$ führt jeweils auf reduzierte Modelle der Dimension 60. Ein Vergleich der Streuparameter der drei reduzierten Modelle ist exemplarisch anhand der Beträge von $S_{1,1}$ und $S_{6,6}$, also anhand der Reflexionen der dominanten Moden der beiden Wellenleiter, in Abbildung 4.17 gezeigt. Als Referenz dient wieder die Lösung des FE-Modells der S-Formulierung. Abgesehen von zwei scharfen Resonanzen bei etwa 15,06 GHz und 17,9 GHz in den Lösungen der Z-Formulierung, ist eine gute Übereinstimmung der Kurven zu sehen. Um zu überprüfen, dass diese Resonanzen innere Resonanzen der Z-Formulierung sind, wird wieder das zugehörige Resonatorproblem betrachtet. Die berechneten Eigenfrequenzen im interessierenden Frequenzband sind in Tabelle 4.7 sowohl für das FE-Modell als auch für das redu-

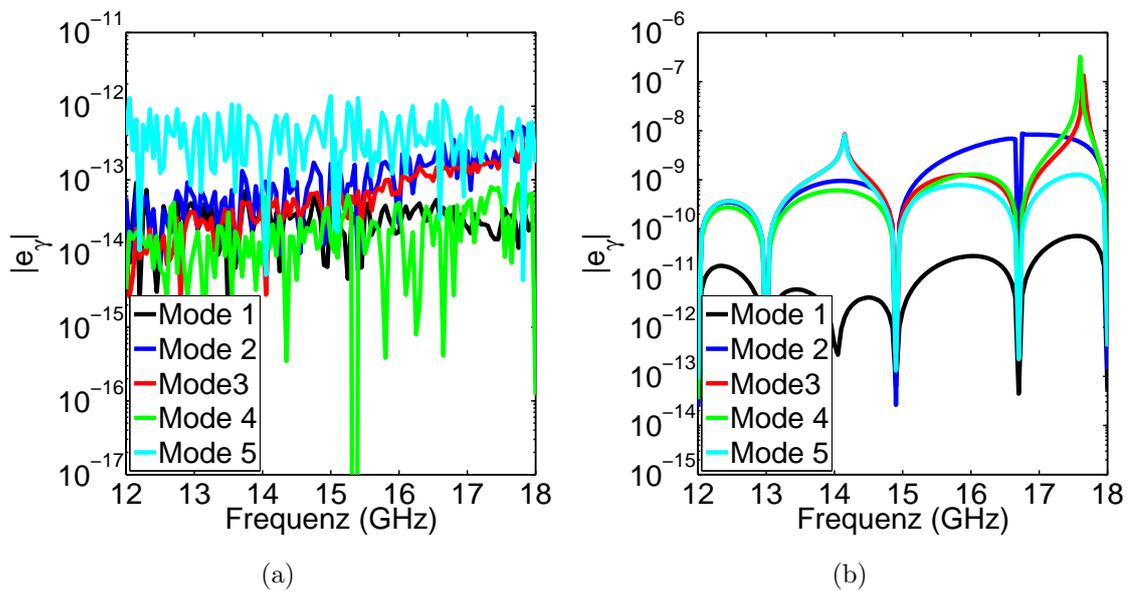


Abbildung 4.16: Übergang RHL-RdE: relativer Fehler der reduzierten Modelle in den Ausbreitungskoeffizienten, (a) Wellenleiter 1, (b) Wellenleiter 2.

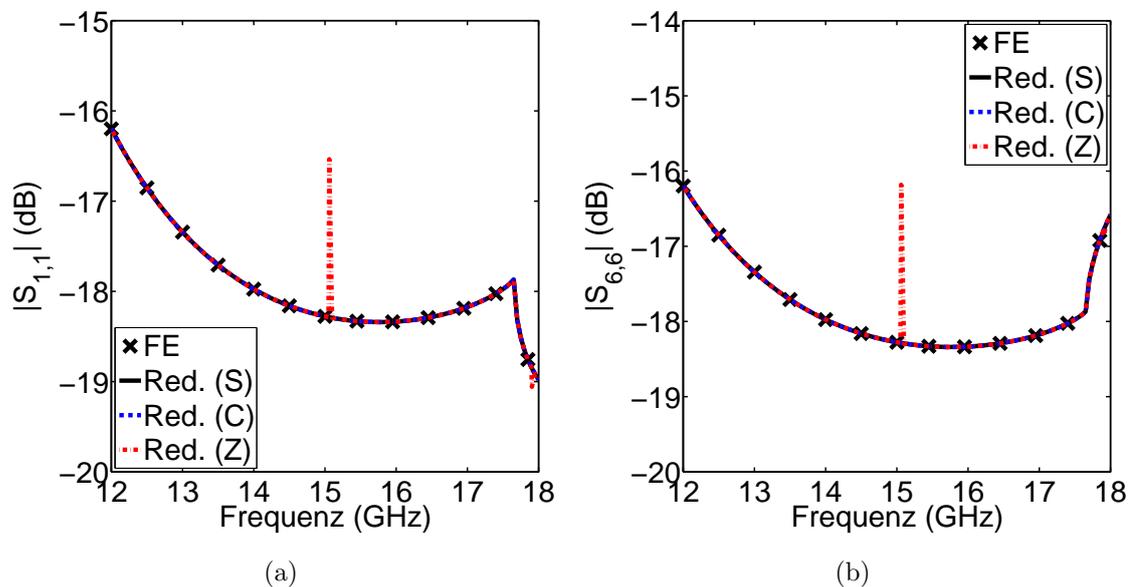


Abbildung 4.17: Übergang RHL-RdE: Reflexionen der dominanten Moden beider Wellenleiter, (a) Wellenleiter 1, (b) Wellenleiter 2.

zierte Modell dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass bei 15,06 GHz und 17,9 GHz Eigenfrequenzen des Resonatorproblems liegen. Somit ist sichergestellt, dass die beiden Resonanzen tatsächlich innere Resonanzen der Z-Formulierung sind. Außerdem wird deutlich, dass die Resonanzen des FE-Modells ebenfalls im reduzierten Modell

Tabelle 4.7: Übergang RHL-RdE: Eigenfrequenzen des Resonatorproblems.

Modell	Eigenfrequenzen (GHz)			
FE	15,0606	16,9505	17,8159	17,9058
Red.	15,0606	16,9505	17,8159	17,9058

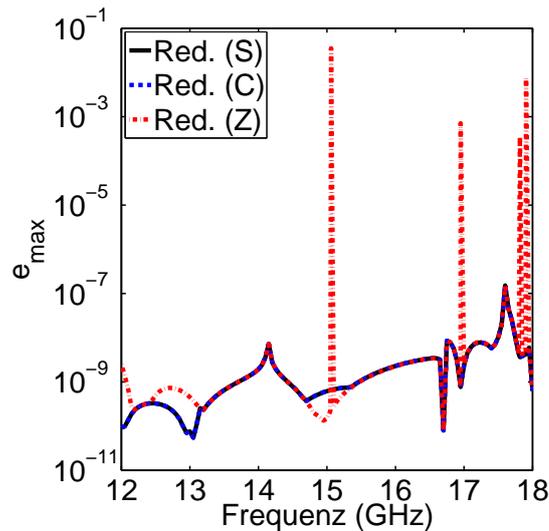


Abbildung 4.18: Übergang RHL-RdE: Maximaler Fehler in den Streuparametern über der Frequenz.

enthalten sind, was erklärt, weshalb auch das reduzierte Modell der Z-Formulierung innere Resonanzen aufweist. Neben den beiden angesprochenen Resonanzen liegen nach Tabelle 4.7 noch weitere Eigenfrequenzen im betrachteten Frequenzband, die allerdings in Abbildung 4.17 nicht zu sehen sind. Dies lässt sich damit erklären, dass diese Resonanzen nicht zu höheren Moden in den Wellenleitern gehören. Dies wird deutlich, wenn der maximale Fehler in den Streuparametern e_{\max} bzgl. der Lösung des FE-Modells der S-Formulierung betrachtet wird. Dieser ist in Abbildung 4.18 dargestellt und berücksichtigt alle Einträge der Streumatrix. Die verbleibenden beiden Resonanzen lassen sich im Fehler des reduzierten Modells der Z-Formulierung gut erkennen. Abgesehen von diesen Resonanzen liegt der Fehler der reduzierten Modelle der Z-Formulierung jedoch im Bereich von 10^{-9} - 10^{-7} . Für die S-Formulierung und den kombinierten Ansatz liegt der Fehler sogar überall in dieser Größenordnung, was deren hohe Genauigkeit unterstreicht. Die Simulationsdaten für dieses Beispiel sind in Tabelle 4.8 gegeben. Wie zu erwarten, ist die benötigte Zeit zum Lösen der FE-Modelle in einem einzelnen Frequenzpunkt für die S-Formulierung wesentlich höher als für die Z-Formulierung. Entsprechend ist auch die benötigte Zeit zum Erstellen der reduzierten Modelle für die Z-Formulierung und den kombinierten Ansatz wesentlich geringer. Werden die oben genannten Rechnungen nochmals für einen verlustbehafteten dielektrischen Einsatz, $\tan \delta = 550 \cdot 10^{-6}$ wiederholt, ergeben sich

Tabelle 4.8: Übergang RHL-RdE: Simulationsdaten für verlustfreie Struktur.

Unbekannte	red. Z	red. S	red. C	FE Z	FE S
Wellenleiter 1	5	5	5	1 537	1 537
Wellenleiter 2	25	25	25	1 612	1 612
Anregungsproblem	60	60	60	230 034	230 044
<hr/>					
Zeit zur Generierung (s)					
Wellenleiter	47,68	47,68	47,68	-	-
Anregungsproblem	199,43	321,06	213,79	-	-
Gesamt	247,11	368,74	261,47	-	-
<hr/>					
Zeit zum Lösen* (ms)					
Wellenleiter	1,55	1,55	1,55	6 363	6 363
Anregungsproblem	1,9	2,05	1,86	25 879	60 240
Gesamt	3,45	3,6	3,41	32 242	66 603

* Ausgewertet an einen Frequenzpunkt.

Tabelle 4.9: Übergang RHL-RdE: Simulationsdaten für verlustbehaftete Struktur.

Zeit zur Generierung (s)	red. Z	red. S	red. C	FE Z	FE S
Wellenleiter	54,79	54,79	54,79	-	-
Anregungsproblem	322,94	334,31	339,51	-	-
Gesamt	377,73	389,1	394,3	-	-
<hr/>					
Zeit zum Lösen* (ms)					
Wellenleiter	1,46	1,46	1,46	8 128	8 128
Anregungsproblem	1,38	1,68	1,59	59 087	60 346
Gesamt	2,84	3,14	3,05	67 215	68 474

* Ausgewertet an einen Frequenzpunkt.

die Simulationsdaten aus Tabelle 4.9. Es ist zu erkennen, dass die benötigte Zeit zur Auswertung des FE-Modells an einem einzelnen Frequenzpunkt für Z- und S-Formulierung annähernd gleich ist. Dementsprechend ist auch bei der Dauer der Generierung der reduzierten Modelle kaum ein Unterschied festzustellen.

4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Verfahren zur effizienten Bestimmung von Netzwerkmatrizen zur Beschreiben von passiven Mikrowellenstrukturen vorgestellt. Ausgangspunkt sind dabei FE-Modelle dieser Strukturen. Es wurde eine S-Formulierung hergelei-

tet, die anders als die weitverbreitete Z-Formulierung keine inneren Resonanzen beinhaltet. Im Gegensatz zur bekannten TFE wird auf eine Restriktion der Ansatzfunktionen auf den Querschnitten der speisenden Wellenleiter verzichtet, wodurch die Implementierung stark vereinfacht wird. Weitere Vorteile der hergeleiteten S-Formulierung ergeben sich in der anschließenden Ordnungsreduktion für Anregungen mit frequenzabhängigen Modenformen. Nachteil der S-Formulierung im Vergleich zur Z-Formulierung ist die Tatsache, dass die S-Formulierung auch für verlustlose Strukturen auf komplexwertige Matrizen führt, was im Rahmen der Lösung der Gleichungssysteme zu wesentlich höherem Bedarf an Speicher und Rechenzeit führt.

Außerdem wurde ein Verfahren zur Ordnungsreduktion vorgestellt, das im Gegensatz zu früheren Verfahren die Behandlung von Strukturen ermöglicht, die durch Wellenleiter mit transversal inhomogenen Materialeigenschaften angeregt werden. Dieses Verfahren wurde erfolgreich auf die Z- und die S-Formulierung angewendet. Weiterhin wurde eine Methodik entwickelt, die es erlaubt für verlustfreie Strukturen die Vorteile beider Formulierungen zu kombinieren.

Kapitel 5

Kompakte Zeitbereichsmodelle passiver Mikrowellenstrukturen

Im vorherigen Kapitel wurden Verfahren vorgestellt, die eine effiziente Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen mittels Netzwerkmatrizen im Frequenzbereich ermöglichen. Die Simulation im Frequenzbereich war möglich, da ausschließlich Mikrowellenstrukturen mit linearen und zeitinvarianten Materialien behandelt wurden. Sind diese linearen Bauteile allerdings Teil eines komplexeren Systems, das auch Komponenten mit nichtlinearem Verhalten enthält, so muss die Simulation des Gesamtsystems im Zeitbereich durchgeführt werden. Um die linearen Teilsysteme dennoch im Frequenzbereich analysieren zu können, wird in diesem Kapitel eine Methodik zur Transformation der Frequenzbereichsmodelle in den Zeitbereich vorgestellt. Dabei werden lediglich Strukturen betrachtet, die ausschließlich durch Moden vom Typ TEM angeregt werden, und deren anregenden Wellenleiter kein frequenzabhängiges Material enthalten.

Ausgangspunkt der Transformation ist die erweiterte S-Formulierung (4.21) im Frequenzbereich, für die ein reduziertes Modell nach Abschnitt 4.2.1 erstellt wird. Diese Modelle sind aus Gründen der Übersichtlichkeit in Abschnitt 5.1 nochmals angegeben. Weiterhin wird in Abschnitt 5.1 gezeigt, dass die reduzierten Frequenzbereichsmodelle beweisbar passiv sind, und somit die resultierenden Zeitbereichsmodelle garantiert kausales Verhalten aufweisen. In Abschnitt 5.2 wird die Transformation der Modelle durchgeführt. Diese Transformation wurde erstmals in [B5] für Strukturen mit frequenzunabhängigen Materialien durchgeführt und anschließend in [B2], [B3], [B2] um Materialien mit je einem Debye-, Drude- bzw. Lorentz-Pol erweitert. Strukturen, deren Materialmodelle entsprechend (2.29) mehrere Pole aufweisen, wurden in [A1], [B3] behandelt. Dabei kommt die Methode der *Auxiliary Differential Equations* (ADE) [OMS97] zum Einsatz, die auf Zeitbereichsmodelle Zustandsraumdarstellung führt. Dies hat den Vorteil, dass die Zeitbereichsmodelle durch Standard-Zeitintegratoren nach [HNW09] gelöst bzw. mit den Verfahren nach [AN01], [LM07]

direkt in Schaltungssimulatoren realisiert werden können. Verfahren zur Validierung der hergeleiteten Zeitbereichsmodelle werden in Abschnitt 5.3 vorgestellt, während Abschnitt 5.4 die Methoden zur Realisierung der Zeitbereichsmodelle in Schaltungssimulatoren zusammenfasst. Zum Abschluss des Kapitels werden die vorgestellten Methoden anhand von numerischen Beispielen in Abschnitt 5.5 verifiziert.

5.1 Modelle im Frequenzbereich

Die Zeitbereichsmodelle basieren auf der erweiterten S-Formulierung im Frequenzbereich. Im Gegensatz zu dem Vorgehen in Kapitel 4 ist das Ziel der Simulationen im Zeitbereich nicht zwangsweise die Bestimmung der Streumatrix der Struktur, sondern in vielen Fällen sind die Ausgangssignale für beliebige Eingangssignale von Interesse. Daher wird anders als in Abschnitt 2.5 im Frequenzbereichsmodell der Eingang, also die Amplitude der einfallenden Welle a_l , nicht auf 1 gesetzt, und dem entsprechend stellt der Ausgang nicht unmittelbar einen Eintrag der Streumatrix dar, sondern ist vielmehr die Amplitude der auslaufenden Welle b_k . Zur Vereinfachung der Notation wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Struktur lediglich mit einem Mode, im folgenden Mode l , angeregt wird. Die Verallgemeinerung auf gleichzeitige Anregung mit mehreren Modes ist jedoch einfach möglich. Um die Transformation in den Zeitbereich zu erleichtern, wird das System in der Kreisfrequenz ω anstatt der Freiraumwellenzahl k_0 parametrisiert. Das FE-Modell lautet dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_Z(\omega) & \omega\mu_0\mathbf{B} \\ \omega\mu_0\mathbf{B}^T & j\omega\mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{S,l} \\ \mathbf{x}_{h,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2j\omega\mu_0\mathbf{b}_l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} a_l \quad (5.1a)$$

$$b_k = \mathbf{b}_k^T \mathbf{x}_{S,l} - \delta_{k,l} a_l. \quad (5.1b)$$

Das Voraussetzen von TEM-Moden führt dazu, dass die Vektoren \mathbf{b}_i und somit auch die Matrix \mathbf{B} konstant über der Frequenz sind. Die Vektoren \mathbf{b}_i müssen somit lediglich in einem beliebigen Frequenzpunkt über (4.1) und (4.13) berechnet werden. Das System ist affin in der Frequenz parametrisiert, und das reduzierte Modell wird nach Abschnitt 4.2.1 erstellt. Dabei spielt es nach [FLDE10] keine Rolle, ob die Projektionsmatrix mittels der Lösungen der Z- oder S-Formulierung erstellt wird. Das reduzierte Modell ergibt sich zu

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_T(\omega) + j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{x}}_{T,l} = 2j\omega\mu_0\tilde{\mathbf{b}}_{T,l}a_l, \quad (5.2a)$$

$$\tilde{b}_k = \tilde{\mathbf{b}}_{T,k}^T \tilde{\mathbf{x}}_{T,l} - \delta_{k,l} a_l, \quad (5.2b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_T(\omega) = \mathbf{U}_T^T \mathbf{A}_Z(\omega) \mathbf{U}_T, \quad (5.3a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_T = \mathbf{U}_T^T \mathbf{B} \mathbf{U}_T, \quad (5.3b)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{T,i} = \mathbf{U}_T^T \mathbf{b}_i, \quad (5.3c)$$

wobei die Lösungen von (5.1) durch

$$\mathbf{x}_{S,l} \approx \mathbf{U}_T \tilde{\mathbf{x}}_{T,l}, \quad (5.4a)$$

$$b_k \approx \tilde{b}_k \quad (5.4b)$$

approximiert werden. Die Dimension des reduzierten Modells (5.2) wird im Folgenden mit \tilde{N}_S bezeichnet. Auf die Eigenschaften der Projektionsmatrix \mathbf{U}_T sowie deren Konstruktion wird an späterer Stelle näher eingegangen. Da die Frequenzabhängigkeit der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_T(\omega)$ eine entscheidende Rolle bei der Transformation in den Zeitbereich spielt, soll diese hier explizit angegeben werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_T(\omega) = & \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{1}{\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D}}{1+j\omega\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,j_L} - \omega^2}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \\ & - \frac{\omega^2}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D}}{1+j\omega\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2j\omega\delta_{e,n,i_L} - \omega^2} \right) \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \\ & + j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{D}}_R + j\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} K_{0,n,i_C}}{1+j\omega\tau_{c,n,i_C}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \end{aligned} \quad (5.5)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} = \mathbf{U}_T^T \mathbf{S}_{\mu,n} \mathbf{U}_T, \quad (5.6a)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{D,n} = \mathbf{U}_T^T \mathbf{T}_{D,n} \mathbf{U}_T, \quad (5.6b)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_R = \mathbf{U}_T^T \mathbf{D}_R \mathbf{U}_T. \quad (5.6c)$$

Wie bereits angesprochen ist es für die Transformation in den Zeitbereich von hoher Bedeutung, dass die zugrunde liegenden Modelle im Frequenzbereich passiv sind. Dazu wird die Passivität des reduzierten Modells (5.2) im Folgenden untersucht. Allgemein ist ein System genau dann passiv, wenn die Streumatrix im Laplace-Bereich $\mathbf{S}(s)$, $s = \sigma + j\omega$, die folgenden drei Bedingungen erfüllt [TGTN⁺07]:

Bd. 1: Jedes Element von $\mathbf{S}(s)$ ist analytisch für $\sigma > 0$,

Bd. 2: $\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s) \geq 0$, für alle s mit $\sigma > 0$,

Bd. 3: $\mathbf{S}(\bar{s}) = \overline{\mathbf{S}(s)}$.

Um diese drei Bedingungen untersuchen zu können, wird zunächst die Darstellung der Streumatrix von (5.2) im Laplace-Bereich benötigt. Diese ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{S}}(s) = 2s\mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I} \quad (5.7)$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}}_T(s) = & \\
& \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{1}{\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D}}{1+s\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \\
& + \frac{s^2}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D}}{1+s\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2} \right) \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \\
& + s\mu_0 \tilde{\mathbf{D}}_R + s\mu_0 \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} k_{0,n,i_C}}{1+s\tau_{c,n,i_C}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}. \tag{5.8}
\end{aligned}$$

Um sicherzustellen, dass das reduzierte Modell (5.2) passiv ist, muss gezeigt werden, dass (5.7) die Bedingungen **Bd. 1 - Bd. 3** erfüllt. Da die entsprechende Rechnung aufgrund der komplizierten Darstellung von $\tilde{\mathbf{A}}_T(s)$ lang und technisch ist, wird an dieser Stelle auf deren Angabe verzichtet und lediglich das Ergebnis präsentiert. Die detaillierte Rechnung ist in Anhang C dargestellt. Sie zeigt, dass die Streumatrix (5.7) genau dann die Bedingungen **Bd. 1 - Bd. 3** erfüllt, wenn die Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}$, und $\tilde{\mathbf{D}}_R$ aus (5.6) reellwertig sind. Dies ist eine unmittelbare Folge aus Bedingung **Bd. 3**. Während die FE-Matrizen $\mathbf{S}_{\mu,n}$, $\mathbf{T}_{D,n}$, und \mathbf{D}_R reellwertig sind, ist die Projektionsmatrix \mathbf{U}_S aus (4.53), bzw. \mathbf{U}_Z aus (4.61) in der Regel komplexwertig. Um dennoch die Passivität der reduzierten Modelle zu gewährleisten, wird die Projektionsmatrix \mathbf{U}_T so erstellt, dass ihr Spaltenraum den Realteil der Matrizen \mathbf{U}_S bzw. \mathbf{U}_C sowie deren Imaginärteil aufspannt [FBDE11]:

$$\text{span}\{\mathbf{U}_T\} = \text{Re}(\mathbf{U}_S) \cup \text{Im}(\mathbf{U}_S) \quad \text{bzw.} \quad \text{span}\{\mathbf{U}_T\} = \text{Re}(\mathbf{U}_C) \cup \text{Im}(\mathbf{U}_C). \tag{5.9}$$

Diese Art der Konstruktion sorgt dafür, dass \mathbf{U}_T und somit auch $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}$, und $\tilde{\mathbf{D}}_R$ reellwertig sind. Dadurch ist die Passivität der reduzierten Modelle (5.2) sichergestellt und somit auch garantiert, dass die zugehörigen Modelle in Zeitbereich kausales Verhalten aufweisen. Der Preis, der für die Passivität zu zahlen ist, ist eine Verdopplung der Dimension des reduzierten Modells.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Rechnungen in Anhang C nicht nur auf das reduzierte Modell zutreffen, sondern genauso auch auf das FE-Modell (5.1) anwendbar sind. Dies rührt daher, dass das FE-Modell und reduziertes Modell die gleiche Struktur aufweisen und durch die Projektion, (5.6) alle wichtigen Eigenschaften der Matrizen, wie Symmetrie und Definitheit, erhalten bleiben.

5.2 Transformation in den Zeitbereich

Nachdem sichergestellt ist, dass das reduzierte Modell (5.2) passiv ist, wird im Folgenden die Transformation in den Zeitbereich durchgeführt. Zur Behandlung der

Frequenzabhängigkeit der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_T(\omega)$ kommt die Methode der ADE zum Einsatz. Die grundlegende Idee dabei ist es, Hilfsvektoren so einzuführen, dass ein System höherer Dimension entsteht, das lediglich eine lineare Abhängigkeit in $j\omega$ aufweist. Dadurch wird die anschließende Transformation in den Zeitbereich erheblich vereinfacht. Folgende Hilfsvektoren werden benötigt:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{m,n} = \mu_r^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], \quad (5.10a)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{S,l} = \frac{j\omega}{c_0} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad (5.10b)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,i_C} = j\omega\mu_0 \frac{G_{c,n,i_C} k_{0,n,i_C}}{1 + j\omega\tau_{c,n,i_C}} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], i_C \in [1, \dots, N_{Dr,n}], \quad (5.10c)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,i_D} = \frac{j\omega}{c_0} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + j\omega\tau_{e,n,i_D}} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], i_D \in [1, \dots, N_{eD,n}], \quad (5.10d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,i_L} = \\ \frac{j\omega}{c_0} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta\varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2j\omega\delta_{e,n,i_L} - \omega^2} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}]. \end{aligned} \quad (5.10e)$$

Werden diese Hilfsvektoren in (5.2) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + \eta_0 \left(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{z}}_{S,l} + \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,i_C} \\ + \frac{j\omega}{c_0} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \varepsilon_{\infty,n} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \tilde{\mathbf{z}}_{S,l} + \frac{j\omega}{c_0} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,i_D} \\ + \frac{j\omega}{c_0} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,i_L} = 2j\omega\mu_0 \tilde{\mathbf{b}}_{T,l} a_l. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Um eine rein lineare Parametrierung zu erhalten, müssen einige der Gleichungen (5.10) umgeschrieben werden. Die Gleichungen (5.10a) werden zu:

$$\begin{aligned} \mu_{\infty,n} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + j\omega\tau_{m,n,j_D}} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} \\ + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,j_L} - \omega^2} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} = \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Wird (5.12) mit $1 + j\omega\tau_{m,n,1}$ multipliziert, ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mu_{\infty,n} + F_{D,n,1} \Delta\mu_{D,n,1}) \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + j\omega\mu_{\infty,n} \tau_{m,n,1} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + \sum_{j_D=2}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + j\omega\tau_{m,n,j_D}} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} \\ + j\omega\tau_{m,n,1} \sum_{j_D=2}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + j\omega\tau_{m,n,j_D}} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,j_L} - \omega^2} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} \end{aligned}$$

$$+ j\omega\tau_{m,n,1} \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,j_L} - \omega^2} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} = \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \quad (5.13)$$

Handelt es sich bei dem n -ten Material um ein Material, das keine magnetischen Debye-Pole besitzt, so wird (5.12) stattdessen mit $\omega_{m,n,1}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,1} - \omega^2$ multipliziert und die Summe über j_L startet entsprechend bei 2. Zur weiteren Vereinfachung werden zusätzliche Hilfsvektoren eingeführt:

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,j_D} = \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + j\omega\tau_{m,n,j_D}} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], j_D \in [1, \dots, N_{mD,n}], \quad (5.14a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,j_L} = \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2j\omega\delta_{m,n,j_L} - \omega^2} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], j_L \in [1, \dots, N_{mL,n}]. \quad (5.14b)$$

Damit transformiert sich (5.13) zu

$$\begin{aligned} & (\mu_{\infty,n} + F_{D,n,1} \Delta\mu_{D,n,1}) \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + j\omega\mu_{\infty,n} \tau_{m,n,1} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n} + \sum_{j_D=2}^{N_{mD,n}} \tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,j_D} \\ & + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,j_L} + j\omega\tau_{m,n,1} \left(\sum_{j_D=2}^{N_{mD,n}} \tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,j_D} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,j_L} \right) = \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Umstellen von (5.14) sowie Einführen weiterer Hilfsvektoren,

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mL,n,j_L} = \frac{j\omega}{c_0} \tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,j_L}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], j_L \in [1, \dots, N_{mL,n}], \quad (5.16)$$

führt auf

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,j_D} + j\omega\tau_{m,n,j_D} \tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,j_D} = F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n}, \quad (5.17a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,j_L} + \frac{2\delta_{m,n,j_L} c_0}{\omega_{m,n,j_L}^2} \tilde{\mathbf{v}}_{mL,n,j_L} + \frac{j\omega c_0}{\omega_{m,n,j_L}^2} \tilde{\mathbf{v}}_{mL,n,j_L} = F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \tilde{\mathbf{w}}_{m,n}. \quad (5.17b)$$

Des Weiteren werden die Gleichungen (5.10c) sowie (5.10d) umgeschrieben zu

$$\tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,i_C} + j\omega\tau_{c,n,i_C} \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,i_C} = j\omega\mu_0 G_{c,n,i_C} k_{0,n,i_C} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad (5.18a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,i_D} + j\omega\tau_{e,n,i_D} \tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,i_D} = \frac{j\omega}{c_0} G_{D,n,i_D} \Delta\varepsilon_{D,n,i_D} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \quad (5.18b)$$

Zur Vereinfachung von (5.10e) werden folgende Hilfsvektoren benötigt:

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eL,n,i_L} = \frac{j\omega}{c_0} \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,i_L}, \quad n \in [1, \dots, N_{Mat}], i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}]. \quad (5.19)$$

Damit wird (5.10e) zu

$$\tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,i_L} + \frac{2\delta_{e,n,i_L} c_0}{\omega_{e,n,i_L}^2} \tilde{\mathbf{v}}_{eL,n,i_L} + \frac{j\omega c_0}{\omega_{e,n,i_L}^2} \tilde{\mathbf{v}}_{eL,n,i_L} = \frac{j\omega}{c_0} G_{L,n,i_L} \Delta\varepsilon_{L,n,i_L} \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \quad (5.20)$$

Die im Folgenden benötigten Gleichungen sind: (5.11), (5.10b), (5.15), (5.17a), (5.17b), (5.16), (5.18a), (5.18b), (5.20) sowie (5.19). Wie gefordert weisen all diese Gleichungen eine lineare Abhängigkeit von $j\omega$ auf. Um eine kompakte Darstellung der obigen Gleichungen zu ermöglichen, werden folgende Matrizen definiert:

$$\hat{\mathbf{S}}_\mu = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_m = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{m,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{m,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T \quad (5.21a)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{C,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \end{bmatrix}}_{N_{Dr,n} \text{ - mal}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,n,N_{Dr,n}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.21b)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_C = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{C,1} & \cdots & \hat{\mathbf{T}}_{C,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{Dr} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{Dr,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.21c)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}_{D,\varepsilon} = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \varepsilon_{\infty,n} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}, \quad (5.21d)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{D,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \end{bmatrix}}_{N_{eD,n} \text{ - mal}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eD,n} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{eD,n,N_{eD,n}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.21e)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_D = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{D,1} & \cdots & \hat{\mathbf{T}}_{D,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eD} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{eD,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{eD,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.21f)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{L,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \end{bmatrix}}_{N_{eL,n} \text{ - mal}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{eL,n,N_{eL,n}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.21g)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_L = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{T}}_{L,1} & \cdots & \hat{\mathbf{T}}_{L,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{eL,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{eL,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T. \quad (5.21h)$$

Damit lässt sich (5.11) kompakt darstellen als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_\mu \tilde{\mathbf{w}}_m + \eta_0 \left(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{z}}_{S,l} + \hat{\mathbf{T}}_C \tilde{\mathbf{w}}_{Dr} + \frac{j\omega}{c_0} \tilde{\mathbf{T}}_{D,\varepsilon} \tilde{\mathbf{z}}_{S,l} + \frac{j\omega}{c_0} \hat{\mathbf{T}}_D \tilde{\mathbf{w}}_{eD} \\ + \frac{j\omega}{c_0} \hat{\mathbf{T}}_L \tilde{\mathbf{w}}_{eL} = 2j\omega \mu_0 \tilde{\mathbf{b}}_{T,l} a_l. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Um auch die übrigen Gleichungen in kompakter Form schreiben zu können, werden weitere Matrizen bzw. Vektoren benötigt:

$$\hat{\mathbf{M}}_{m,1} = \text{diag}\{(\mu_{\infty,1} + F_{D,1,1} \Delta \mu_{D,1,1}) \mathbf{I}, \dots, (\mu_{\infty,N_{Mat}} + F_{D,N_{Mat},1} \Delta \mu_{D,N_{Mat},1}) \mathbf{I}\}, \quad (5.23a)$$

$$\hat{\mathbf{M}}_{\tau,1} = \text{diag}\{(\mu_{\infty,1} \tau_{m,1,1}) \mathbf{I}, \dots, (\mu_{\infty,N_{Mat}} \tau_{m,N_{Mat},1}) \mathbf{I}\}, \quad (5.23b)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mD,n} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{mD,n,N_{mD,n}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.23c)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mD} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{mD,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{w}}_{mD,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.23d)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{D,n} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{N_{mD,n}-1 \text{ - mal}}, \quad (5.23e)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_D = \text{diag}\{\hat{\mathbf{S}}_{D,1}, \dots, \hat{\mathbf{S}}_{D,N_{Mat}}\}, \quad (5.23f)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mL,n} = \left[\tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,1}^T \cdots \tilde{\mathbf{w}}_{mL,n,N_{mL,n}}^T \right]^T, \quad (5.23g)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mL} = \left[\tilde{\mathbf{w}}_{mL,1}^T \cdots \tilde{\mathbf{w}}_{mL,N_{Mat}}^T \right]^T, \quad (5.23h)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{L,n} = \underbrace{\left[\mathbf{I} \cdots \mathbf{I} \right]}_{N_{mL,n} \text{ - mal}}, \quad (5.23i)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L = \text{diag}\{\hat{\mathbf{S}}_{L,1}, \dots, \hat{\mathbf{S}}_{L,N_{Mat}}\}, \quad (5.23j)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{D,\tau,1} = \text{diag}\{c_0\tau_{m,1,1}\hat{\mathbf{S}}_{D,1}, \dots, c_0\tau_{m,N_{Mat},1}\hat{\mathbf{S}}_{D,N_{Mat}}\}, \quad (5.23k)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{L,\tau,1} = \text{diag}\{c_0\tau_{m,1,1}\hat{\mathbf{S}}_{L,1}, \dots, c_0\tau_{m,N_{Mat},1}\hat{\mathbf{S}}_{L,N_{Mat}}\}, \quad (5.23l)$$

$$\mathbf{I}_x = \underbrace{\left[\mathbf{I} \cdots \mathbf{I} \right]^T}_{N_{Mat} \text{ - mal}}, \quad (5.23m)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix der Dimension \tilde{N}_S ist. Mithilfe dieser Abkürzungen wird (5.15) geschrieben als

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}}_{m,1}\tilde{\mathbf{w}}_m + \frac{j\omega}{c_0}\hat{\mathbf{M}}_{\tau,1}\tilde{\mathbf{w}}_m + \hat{\mathbf{S}}_D\tilde{\mathbf{w}}_{mD} + \frac{j\omega}{c_0}\hat{\mathbf{S}}_{D,\tau,1}\tilde{\mathbf{w}}_{mD} + \hat{\mathbf{S}}_L\tilde{\mathbf{w}}_{mL} + \frac{j\omega}{c_0}\hat{\mathbf{S}}_{L,\tau,1}\tilde{\mathbf{w}}_{mL} \\ = \mathbf{I}_x\tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Außerdem werden folgende Größen eingeführt:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\tau,n} = \text{diag}\{c_0\tau_{m,n,1}\mathbf{I}, \dots, c_0\tau_{m,n,N_{mD,n}}\mathbf{I}\}, \quad (5.25a)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\tau} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{\tau,1}, \dots, \bar{\mathbf{S}}_{\tau,N_{Mat}}\}, \quad (5.25b)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mD,n} = \begin{bmatrix} F_{D,n,1}\Delta\mu_{D,n,1}\mathbf{I} \\ \vdots \\ F_{D,n,N_{mD,n}}\Delta\mu_{D,n,N_{mD,n}}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.25c)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mD} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{M}}_{mD,1}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{mD,N_{Mat}}\}, \quad (5.25d)$$

womit die Gleichungen (5.17a) zu

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mD} + \frac{j\omega}{c_0}\bar{\mathbf{S}}_{\tau}\tilde{\mathbf{w}}_{mD} = \bar{\mathbf{M}}_{mD}\tilde{\mathbf{w}}_m \quad (5.26)$$

werden. Weitere benötigte Matrizen und Vektoren sind

$$\bar{\mathbf{S}}_{\delta,n} = \text{diag}\left\{\frac{2\delta_{m,n,1}c_0}{\omega_{m,n,1}^2}\mathbf{I}, \dots, \frac{2\delta_{m,n,N_{mL,n}}c_0}{\omega_{m,n,N_{mL,n}}^2}\mathbf{I}\right\}, \quad (5.27a)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\delta} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{\delta,1}, \dots, \bar{\mathbf{S}}_{\delta,N_{Mat}}\}, \quad (5.27b)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\omega,n} = \text{diag}\left\{\frac{c_0^2}{\omega_{m,n,1}^2}\mathbf{I}, \dots, \frac{c_0^2}{\omega_{m,n,N_{mL,n}}^2}\mathbf{I}\right\}, \quad (5.27c)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_\omega = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{\omega,1}, \dots, \bar{\mathbf{S}}_{\omega,N_{Mat}}\}, \quad (5.27d)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mL,n} = \begin{bmatrix} F_{L,n,1} \Delta\mu_{L,n,1} \mathbf{I} \\ \vdots \\ F_{L,n,N_{mL,n}} \Delta\mu_{L,n,N_{mL,n}} \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.27e)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{mL} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{M}}_{mL,1}, \dots, \bar{\mathbf{M}}_{mL,N_{Mat}}\}, \quad (5.27f)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mL,n} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{mL,n,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{mL,n,N_{mL,n}}^T \end{bmatrix}^T, \quad (5.27g)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_{mL,1}^T & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_{mL,N_{Mat}}^T \end{bmatrix}^T. \quad (5.27h)$$

Mit diesen lassen sich die Gleichungen (5.17b) umschreiben zu

$$\tilde{\mathbf{w}}_{mL} + \bar{\mathbf{S}}_\delta \tilde{\mathbf{v}}_{mL} + \frac{j\omega}{c_0} \bar{\mathbf{S}}_\omega \tilde{\mathbf{v}}_{mL} = \bar{\mathbf{M}}_{mL} \tilde{\mathbf{w}}_m, \quad (5.28)$$

und die Gleichungen (5.16) werden zu

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mL} = \frac{j\omega}{c_0} \tilde{\mathbf{w}}_{mL}. \quad (5.29)$$

Zur kompakten Darstellung der Gleichungen (5.18a) werden folgende Matrizen definiert:

$$\bar{\mathbf{T}}_{C,n} = \text{diag}\{c_0 \tau_{c,n,1} \mathbf{I}, \dots, c_0 \tau_{c,n,N_{Dr,n}} \mathbf{I}\}, \quad (5.30a)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_C = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{C,1}, \dots, \bar{\mathbf{T}}_{C,N_{Mat}}\}, \quad (5.30b)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{C,n} = \begin{bmatrix} \eta_0 G_{C,n,1} \kappa_{0,n,1} \\ \vdots \\ \eta_0 G_{C,n,N_{Dr,n}} \kappa_{0,n,N_{Dr,n}} \end{bmatrix}, \quad (5.30c)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_C = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{C,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}_{C,N_{Mat}} \end{bmatrix}. \quad (5.30d)$$

Damit wird (5.18a) zu

$$\tilde{\mathbf{w}}_{Dr} + \frac{j\omega}{c_0} \bar{\mathbf{T}}_C \tilde{\mathbf{w}}_{Dr} = \frac{j\omega}{c_0} \bar{\mathbf{M}}_C \tilde{\mathbf{x}}_{S,l}. \quad (5.31)$$

Weiterhin definiert werden

$$\bar{\mathbf{T}}_{\tau,n} = \text{diag}\{c_0 \tau_{e,n,1} \mathbf{I}, \dots, c_0 \tau_{e,n,N_{eD,n}} \mathbf{I}\}, \quad (5.32a)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_\tau = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{\tau,1}, \dots, \bar{\mathbf{T}}_{\tau,N_{Mat}}\}, \quad (5.32b)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{eD,n} = \begin{bmatrix} G_{D,n,1} \Delta\varepsilon_{D,n,1} \\ \vdots \\ G_{D,n,N_{eD,n}} \Delta\varepsilon_{D,n,N_{eD,n}} \end{bmatrix}, \quad (5.32c)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{eD} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{eD,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}_{eD,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad (5.32d)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\delta,n} = \text{diag}\left\{\frac{2\delta_{e,n,1}c_0}{\omega_{e,n,1}^2}\mathbf{I}, \dots, \frac{2\delta_{e,n,N_{eL,n}}c_0}{\omega_{e,n,N_{eL,n}}^2}\mathbf{I}\right\}, \quad (5.32e)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\delta} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{\delta,1}, \dots, \bar{\mathbf{T}}_{\delta,N_{Mat}}\}, \quad (5.32f)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\omega,n} = \text{diag}\left\{\frac{c_0^2}{\omega_{e,n,1}^2}\mathbf{I}, \dots, \frac{c_0^2}{\omega_{e,n,N_{eL,n}}^2}\mathbf{I}\right\}, \quad (5.32g)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{\omega} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{\omega,1}, \dots, \bar{\mathbf{T}}_{\omega,N_{Mat}}\}, \quad (5.32h)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{eL,n} = \begin{bmatrix} G_{L,n,1}\Delta\varepsilon_{L,n,1} \\ \vdots \\ G_{L,n,N_{eL,n}}\Delta\varepsilon_{L,n,N_{eL,n}} \end{bmatrix}, \quad (5.32i)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{eL} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{eL,1} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{M}}_{eL,N_{Mat}} \end{bmatrix}, \quad (5.32j)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eL,n} = \left[\tilde{\mathbf{v}}_{eL,n,1}^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{v}}_{eL,n,N_{eL,n}}^T \right]^T, \quad (5.32k)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eL} = \left[\tilde{\mathbf{v}}_{eL,1}^T \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{v}}_{eL,N_{Mat}}^T \right]^T. \quad (5.32l)$$

Damit können die Gleichungen (5.18b), (5.20) bzw. (5.19) dargestellt werden als

$$\tilde{\mathbf{w}}_{eD} + \frac{j\omega}{c_0}\bar{\mathbf{T}}_{\tau}\tilde{\mathbf{w}}_{eD} = \frac{j\omega}{c_0}\bar{\mathbf{M}}_{eD}\tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad (5.33)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{eL} + \bar{\mathbf{T}}_{\delta}\tilde{\mathbf{v}}_{eL} + \frac{j\omega}{c_0}\bar{\mathbf{T}}_{\omega}\tilde{\mathbf{v}}_{eL} = \frac{j\omega}{c_0}\bar{\mathbf{M}}_{eL}\tilde{\mathbf{x}}_{S,l}, \quad (5.34)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{eL} = \frac{j\omega}{c_0}\tilde{\mathbf{w}}_{eL}. \quad (5.35)$$

Eine kompakte Darstellung des Zeitbereichsmodells ergibt sich durch Zusammenfassung der folgenden Gleichungen in der angegebenen Reihenfolge: (5.22), (5.10b), (5.24), (5.26), (5.28), (5.29), (5.31), (5.33), (5.34) sowie (5.35). Dies führt auf

$$\frac{j\omega}{c_0}\tilde{\mathbf{W}}_{T,1}\tilde{\mathbf{x}}_{T,l} = \tilde{\mathbf{W}}_{T,0}\tilde{\mathbf{x}}_{T,l} + 2\frac{j\omega}{c_0}\eta_0\tilde{\mathbf{q}}_{T,l}a_l, \quad (5.36a)$$

$$\tilde{b}_k = \tilde{\mathbf{q}}_{T,k}^T\tilde{\mathbf{x}}_{T,l} - \delta_{k,l}a_l \quad (5.36b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{W}}_{T,0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\eta_0 \left(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) & -\hat{\mathbf{S}}_\mu & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{T}}_C & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_X & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{M}}_{m,1} & -\hat{\mathbf{S}}_D & -\hat{\mathbf{S}}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}_{mD} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{M}}_{mL} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -\overline{\mathbf{S}}_\delta & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & -\overline{\mathbf{T}}_\delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5.37a)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{T,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \hat{\mathbf{T}}_{D,\varepsilon} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{T}}_D & \hat{\mathbf{T}}_L & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}}_{\tau,1} & \hat{\mathbf{S}}_{D,\tau,1} & \hat{\mathbf{S}}_{L,\tau,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{S}}_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{S}}_\omega & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{M}}_C & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{T}}_C & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{M}}_{eD} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{T}}_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\overline{\mathbf{M}}_{eL} & \mathbf{0} & \overline{\mathbf{T}}_\omega \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.37b)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{T,l} = \left[\tilde{\mathbf{x}}_{S,l} \quad \tilde{\mathbf{z}}_{S,l} \quad \tilde{\mathbf{w}}_m \quad \tilde{\mathbf{w}}_{mD} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{mL} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{mL} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{Dr} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eD} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{eL} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{eL} \right]^T, \quad (5.37c)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{T,l} = \left[\tilde{\mathbf{b}}_{T,l} \quad \mathbf{0} \right]^T. \quad (5.37d)$$

Entsprechend den eingeführten Matrizen und Vektoren ist die Dimension des Systems (5.36)

$$N_{TD} = \left[2 + N_{Mat} + \sum_{n=1}^{N_{Mat}} (N_{mD,n} + 2N_{mL,n} + N_{Dr,n} + N_{eD,n} + 2N_{eL,n}) \right] \tilde{N}_S. \quad (5.38)$$

Ausgehend von der Darstellung (5.36) und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Matrizen und Vektoren $\tilde{\mathbf{W}}_{T,0}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{T,1}$ sowie $\tilde{\mathbf{q}}_{T,l}$ reellwertig und konstant sind, ergibt sich das zugehörige Zeitbereichsmodell direkt zu

$$\tilde{\mathbf{W}}_{T,1} \frac{1}{c_0} \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{x}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_{T,0} \hat{\mathbf{x}}_l + 2\eta_0 \tilde{\mathbf{q}}_{T,l} \frac{1}{c_0} \frac{d}{dt} \hat{a}_l(t), \quad (5.39a)$$

$$\hat{b}_k(t) = \tilde{\mathbf{q}}_{T,k}^T \hat{\mathbf{x}}_l - \delta_{k,l} \hat{a}_l(t). \quad (5.39b)$$

Dabei bezeichnen $\hat{\mathbf{x}}_l(t)$, $\hat{a}_l(t)$, sowie $\hat{b}_k(t)$ die zugehörigen Zeitbereichsgrößen zu $\tilde{\mathbf{x}}_{T,l}$, a_l , bzw. \tilde{b}_k . Aus Gründen der numerischen Stabilität wird im Folgenden eine skalierte Zeit \hat{t} entsprechend

$$\hat{t} = c_0 t \quad (5.40)$$

eingeführt. Damit transformiert sich (5.39) zu

$$\tilde{\mathbf{W}}_{T,1} \frac{d}{d\hat{t}} \hat{\mathbf{x}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_{T,0} \hat{\mathbf{x}}_l + 2\eta_0 \tilde{\mathbf{q}}_{T,l} \frac{d}{d\hat{t}} \hat{a}_l(\hat{t}), \quad (5.41a)$$

$$\hat{b}_k(\hat{t}) = \tilde{\mathbf{q}}_{T,k}^T \hat{\mathbf{x}}_l - \delta_{k,l} \hat{a}_l(\hat{t}). \quad (5.41b)$$

Aufgrund der Definitionen der in $\tilde{\mathbf{W}}_{T,1}$ enthaltenen Teilmatrizen hat $\tilde{\mathbf{W}}_{T,1}$ vollen Rang und kann invertiert werden. Dies erlaubt die Überführung von (5.41) in Zustandsraumdarstellung:

$$\frac{d}{d\hat{t}} \hat{\mathbf{x}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ} \hat{\mathbf{x}}_l + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l} \frac{d}{d\hat{t}} \hat{a}_l(\hat{t}), \quad (5.42a)$$

$$\hat{b}_k(\hat{t}) = \tilde{\mathbf{q}}_{T,k}^T \hat{\mathbf{x}}_l - \delta_{k,l} \hat{a}_l(\hat{t}), \quad (5.42b)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{W}}_{TZ} = \tilde{\mathbf{W}}_{T,1}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{T,0}, \quad (5.43a)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l} = 2\eta_0 \tilde{\mathbf{W}}_{T,1}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_{T,l}. \quad (5.43b)$$

An dieser Stelle wird der große Vorteil der Methode der ADE deutlich. Trotz komplizierter Frequenzabhängigkeit der Materialien ist das resultierende Modell im Zeitbereich in Zustandsraumdarstellung verfügbar und kann daher mit Standardverfahren der Zeitintegration [HNW09] gelöst oder direkt in Schaltungssimulatoren integriert werden [AN01], [LM07]. Der Preis, der dafür zu zahlen ist, ist eine Vervielfachung der Dimension des Modells. Da die Dimension des reduzierten Modells (5.2) in der Regel jedoch sehr gering ist, spielt dieser Nachteil lediglich eine geringe Rolle.

5.3 Validierung der Zeitbereichsmodelle

In diesem Abschnitt werden Verfahren zur Validierung der hergeleiteten Zeitbereichsmodelle vorgestellt. Die Idee dabei ist, die Streuparameter im Frequenzbereich aus den Zeitbereichsmodellen zu berechnen. Diese werden im Anschluss mit den Streuparametern des reduzierten Frequenzbereichsmodells (5.2) verglichen. Die Zeitbereichsmodelle (5.42) werden dazu mit einem Gaußschen Puls der Form

$$\hat{a}_l(\hat{t}) = e^{-c_G(\hat{t}-\hat{t}_0)^2} \quad (5.44)$$

angeregt. Die Differentialgleichung (5.42a) wird gelöst und die auslaufende Wellen $\hat{b}_k(\hat{t})$ nach (5.42b) berechnet. Diese werden zusammen mit der Anregung $\hat{a}_l(\hat{t})$ in den Frequenzbereich transformiert. Die Einträge der Streumatrix ergeben sich dann zu

$$S_{k,l}^{ZB} = \frac{\mathcal{F}(\hat{b}_k)}{\mathcal{F}(\hat{a}_l)}, \quad (5.45)$$

wobei

$$\mathcal{F}(\hat{b}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{b}_k(\hat{t}) e^{-j\omega t} d\hat{t} \quad (5.46)$$

die Fourier-Transformierte von \hat{b}_k bezeichnet. Ein Vergleich mit der Streumatrix, die direkt aus (5.2) berechnet wird, erlaubt den Fehler der Lösung des Zeitbereichsmodells zu quantifizieren. Damit kann das Konvergenzverhalten der Lösung berechnet werden und zur Validierung der Zeitbereichsmodelle mit den theoretisch erreichbaren Konvergenzraten des Lösungsverfahrens verglichen werden. Bei der Wahl der Parameter der Anregung (5.44), speziell bei der Wahl von c_G , ist darauf zu achten, dass die Fourier-Transformierte des Gaußschen Pulses, die ebenfalls wieder ein Gaußscher Puls ist, den interessierenden Frequenzbereich vollständig abdeckt. Weiterhin sei klargestellt, dass die Berechnung der Streumatrix aus den Zeitbereichsmodellen lediglich der Validierung des vorgestellten Verfahrens dient. Ist das eigentliche Ziel die Bestimmung der Streumatrix, so wird diese ohne den Umweg über den Zeitbereich direkt aus (5.2) berechnet. Auf die beiden wesentlichen Punkte im Rahmen dieses Vorgehens zur Validierung, nämlich das Lösen der Zeitbereichsmodelle, sowie die anschließende Transformation der Daten in den Frequenzbereich, wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

5.3.1 Lösung der Zustandsraummodelle

Im Rahmen dieser Arbeit werden expliziten Runge-Kutta-Verfahren [HNW09, Kap. 2] mit konstanter Zeitschrittweite zur Lösung der Differentialgleichung (5.42a) verwendet. Durch die Möglichkeit, die feste Schrittweite vorzugeben, eignen sich die Verfahren besonders gut zur Bestimmung von Konvergenzraten und somit zur Validierung der Zeitbereichsmodelle.

Im Allgemeinen werden Runge-Kutta-Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form:

$$\frac{d}{d\hat{t}} \hat{\mathbf{x}}_l(\hat{t}) = f(\hat{\mathbf{x}}_l(\hat{t}), \hat{t}), \quad \hat{\mathbf{x}}_l(\hat{t}_0) = \hat{\mathbf{x}}_{l,0} \quad (5.47)$$

im Intervall $\hat{t} \in [\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_1]$ mit vorgegebener Anfangsbedingung $\hat{\mathbf{x}}_{l,0}$ verwendet. Im Rahmen der hier betrachteten Verfahren wird das Intervall $[\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_1]$ mittels N_t äquidistant verteilten Knoten im Abstand $\Delta\hat{t} = \frac{\hat{t}_1 - \hat{t}_0}{N_t}$ abgetastet. Dabei wird die

Tabelle 5.1: Koeffizienten in expliziten Runge-Kutta-Verfahren.

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s

Schrittweite $\Delta\hat{t}$ vorgegeben. Die Lösung zum Zeitpunkt $\hat{t}_n = \hat{t}_0 + n\Delta\hat{t}$, im Folgenden mit $\hat{\mathbf{x}}_{l,n}$ bezeichnet, wird aus der Lösung im vorhergehenden Zeitpunkt $\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1}$ berechnet. Wie bereits erwähnt, beschränkt sich diese Arbeit auf explizite Runge-Kutta-Verfahren, weshalb sich die verwendete s -stufige Runge-Kutta-Iteration zur Lösung des Systems (5.47) mit $s \in \mathbb{N}$ folgendermaßen darstellen lässt [HNW09, S. 134]:

$$\hat{\mathbf{k}}_1 = f(\hat{t}_{n-1}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1}), \quad (5.48a)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_2 = f(\hat{t}_{n-1} + c_2\Delta\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}a_{21}\hat{\mathbf{k}}_1), \quad (5.48b)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_3 = f(\hat{t}_{n-1} + c_3\Delta\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}(a_{31}\hat{\mathbf{k}}_1 + a_{32}\hat{\mathbf{k}}_2)), \quad (5.48c)$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathbf{k}}_s = f(\hat{t}_{n-1} + c_s\Delta\hat{t}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}(a_{s1}\hat{\mathbf{k}}_1 + \cdots + a_{s,s-1}\hat{\mathbf{k}}_{s-1})), \quad (5.48d)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{l,n} = \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}(b_1\hat{\mathbf{k}}_1 + \cdots + b_s\hat{\mathbf{k}}_s). \quad (5.48e)$$

Die Genauigkeit der Lösung hängt entscheidend von s , sowie von den reellwertigen Koeffizienten $a_{i,j}$, b_i , und c_i ab. Zur besseren Übersichtlichkeit werden diese Koeffizienten üblicherweise in Form von Tableaus entsprechend Tabelle 5.1 angegeben. Mittels der Iteration (5.48) lässt sich $\hat{\mathbf{x}}_{l,n}$ direkt berechnen, ohne dass dazu ein Gleichungssystem gelöst werden muss. Daher der Name explizites Verfahren. Da außerdem zur Berechnung von $\hat{\mathbf{x}}_{l,n}$ lediglich auf $\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1}$ zurückgegriffen wird, und die Lösungen zu früheren Zeitpunkten $\hat{t} < \hat{t}_{n-1}$ keine Rolle spielen, handelt es bei (5.48) um ein Einschrittverfahren.

Ein Vergleich von (5.48) mit (5.42) zeigt, dass im Rahmen der betrachteten Zeitbereichsmodelle die Funktion $f(\hat{t}_{n-1}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1})$ folgende Form annimmt:

$$f(\hat{t}_{n-1}, \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1}) = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ}\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l}\frac{d}{d\hat{t}}\hat{a}_l(\hat{t}_{n-1}). \quad (5.49)$$

Die Iteration zur Lösung von (5.42) ergibt sich somit zu

$$\hat{\mathbf{k}}_1 = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ}\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l}\frac{d}{d\hat{t}}\hat{a}_l(\hat{t}_{n-1}), \quad (5.50a)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_2 = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ}\left(\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}a_{21}\hat{\mathbf{k}}_1\right) + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l}\frac{d}{d\hat{t}}\hat{a}_l(\hat{t}_{n-1} + c_2\Delta\hat{t}), \quad (5.50b)$$

$$\hat{\mathbf{k}}_3 = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ} \left(\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}(a_{31}\hat{\mathbf{k}}_1 + a_{32}\hat{\mathbf{k}}_2) \right) + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l} \frac{d}{d\hat{t}} \hat{a}_l(\hat{t}_{n-1} + c_3\Delta\hat{t}), \quad (5.50c)$$

⋮

$$\hat{\mathbf{k}}_s = \tilde{\mathbf{W}}_{TZ} \left(\hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t} \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} \hat{\mathbf{k}}_j \right) + \tilde{\mathbf{q}}_{TZ,l} \frac{d}{d\hat{t}} \hat{a}_l(\hat{t}_{n-1} + c_s\Delta\hat{t}), \quad (5.50d)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{l,n} = \hat{\mathbf{x}}_{l,n-1} + \Delta\hat{t}(b_1\hat{\mathbf{k}}_1 + \cdots + b_s\hat{\mathbf{k}}_s). \quad (5.50e)$$

Um die Genauigkeit der Approximation der nach (5.48) bzw. (5.50) berechneten Lösung zu quantifizieren, werden im Folgenden der *lokale Diskretisationsfehler* sowie der *globale Fehler* für explizite Runge-Kutta-Verfahren definiert [Sch97, S. 416]:

Definition 5.1. *Unter dem lokalen Diskretisationsfehler an der Stelle $\hat{t}_{n+1} = \hat{t}_0 + (n+1)\Delta\hat{t}$ versteht man den Wert*

$$\hat{\mathbf{d}}_{n+1} := \hat{\mathbf{x}}_l(t_{n+1}) - \hat{\mathbf{x}}_l(t_n) - \Delta t \sum_{i=1}^s b_i \hat{\mathbf{k}}_i. \quad (5.51)$$

Definition 5.2. *Als globalen Fehler an der Stelle $\hat{t}_n = \hat{t}_0 + n\Delta\hat{t}$ bezeichnet man die Differenz*

$$\hat{\mathbf{g}}_k := \hat{\mathbf{x}}_l(t_n) - \hat{\mathbf{x}}_{l,n}. \quad (5.52)$$

Dabei bezeichnet $\hat{\mathbf{x}}_l(t_{n+1})$ die exakte Lösung an der Stelle t_{n+1} , während $\hat{\mathbf{x}}_{l,n+1}$ die mittels (5.50) berechnete Näherungslösung beschreibt. Der lokale Diskretisationsfehler beschreibt den Fehler, der während eines einzelnen Zeitschritts, von t_n nach t_{n+1} entsteht, wenn davon ausgegangen wird, dass die Lösung im Zeitschritt t_n exakt ist. Für die hier verwendete Validierung der Modelle ist der globale Fehler allerdings von weit größerer Bedeutung, da er auch die Akkumulation des Fehlers über die Zeitschritte berücksichtigt. Ausgehend von den eingeführten Fehlern lässt sich entsprechend [Sch97, S. 419] die *Fehlerordnung* der vorgestellten Runge-Kutta-Methoden definieren:

Definition 5.3. *Ein Runge-Kutta-Verfahren nach (5.48) besitzt die Fehlerordnung p , falls für seinen lokalen Diskretisationsfehler $\hat{\mathbf{d}}_k$ die Abschätzung*

$$\max_{1 \leq k \leq N_t} \|\hat{\mathbf{d}}_k\| \leq D = \text{const}(\Delta\hat{t})^{p+1} = \mathcal{O}((\Delta\hat{t})^{p+1}) \quad (5.53)$$

gilt.

Es kann gezeigt werden, dass in diesem Fall für den globalen Fehler

$$\|\hat{\mathbf{g}}_n\| = \mathcal{O}((\Delta\hat{t})^p) \quad (5.54)$$

Tabelle 5.2: Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens nach Heun.

0			
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	
$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

gilt [Sch97, S. 417 ff.]. Ziel bei der Bestimmung der Koeffizienten der unterschiedlichen Runge-Kutta-Verfahren $a_{i,j}$, b_i , c_i ist es, ein Verfahren zu erhalten, das eine möglichst hohe Fehlerordnung und bei gleichzeitig möglichst geringem s aufweist. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zur Validierung der Zeitbereichsmodelle das 3-stufige Verfahren nach Heun [HNW09, S. 135], das eine Fehlerordnung von $p = 3$ aufweist, und dessen Koeffizienten in Tabelle 5.2 gegeben sind, herangezogen. Für einen Beweis, dass die Koeffizienten aus Tabelle 5.2 auf Verfahren mit der angegebenen Fehlerordnung führen sei an dieser Stelle auf die Literatur [HNW09, S. 145] verwiesen.

Ein weiterer wesentlicher Punkt, auf den bei der Anwendung expliziter Runge-Kutta-Verfahren geachtet werden muss, ist die Stabilität. Es kann gezeigt werden, dass explizite Runge-Kutta-Verfahren nur unter bestimmten Bedingungen stabil sind und gegen die korrekte Lösung konvergieren. Dies wird im Folgenden anhand des folgenden linearen Systems demonstriert

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{x}_0. \quad (5.55)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass \mathbf{A} diagonalisierbar ist und dass die Eigenwerte λ_i von \mathbf{A} einen negativen Realteil haben. Wird die Lösung mittels des Verfahrens nach Tabelle 5.2 berechnet, so ergibt sich die Lösung zum Zeitpunkt $t = n\Delta t$ zu

$$\mathbf{x}_n = R_S(\Delta t \mathbf{A})\mathbf{x}_{n-1} \quad (5.56)$$

mit

$$R_S(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}. \quad (5.57)$$

Wird weiterhin der Vektor \mathbf{x}_0 in die Eigenvektoren \mathbf{v}_i der Matrix \mathbf{A} entwickelt,

$$\mathbf{x}_0 = \sum_i \alpha_i \mathbf{v}_i, \quad (5.58)$$

so ergibt sich

$$\mathbf{x}_n = \sum_i (R_S(\Delta t \lambda_i))^n \alpha_i \mathbf{v}_i. \quad (5.59)$$

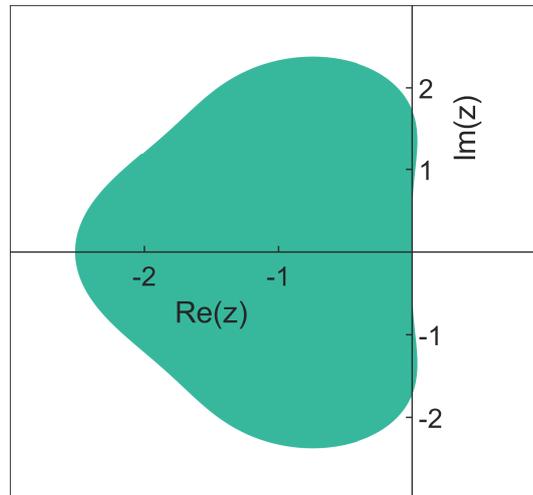


Abbildung 5.1: Stabilitätsgebiet des expliziten Runge-Kutta-Verfahren nach Heun.

Es ist offensichtlich, dass \mathbf{x}_n für große Werte $n \rightarrow \infty$ nur dann endlich bleibt, wenn $\Delta t \lambda_i$ für alle Eigenwerte λ_i in dem Gebiet

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} \mid |R_S(z)| \leq 1\} \quad (5.60)$$

liegen. Aus diesem Grund heißt \mathcal{S} *Stabilitätsgebiet* und $R_S(z)$ *Stabilitätsfunktion*.

Dementsprechend ist das Verfahren für das lineare System (5.50) dann stabil, wenn für alle Eigenwerte $\lambda_{T,i}$ der Matrix $\tilde{\mathbf{W}}_{TZ}$ gilt [HW10, S. 16]

$$\Delta \hat{t} \lambda_{T,i} \in \mathcal{S}, \quad \forall i \in [1, \dots, N_{TD}]. \quad (5.61)$$

Der Wert von $\Delta \hat{t} \lambda_{T,i}$ muss also für alle Eigenwerte $\lambda_{T,i}$ in dem Stabilitätsgebiet \mathcal{S} liegen. Die Bedingung (5.61) kann auch als obere Grenze für den zu wählenden Zeitschritt $\Delta \hat{t}$ interpretiert werden. Die Lage und Größe von \mathcal{S} hängt offensichtlich von der Stabilitätsfunktion $R(z)$ und somit maßgeblich von der Wahl des Runge-Kutta Verfahrens ab. Für das Verfahren nach Heun ist die Stabilitätsfunktion nach (5.57) gegeben. Das daraus resultierende Stabilitätsgebiet \mathcal{S} ist in Abbildung 5.3.1 dargestellt. Um Stabilität zu gewährleisten, kann es daher erforderlich sein, eine kleine Zeitschrittweite zu wählen, was die Gesamtzahl der Zeitschritte und somit die Rechenzeit erhöht. Da das Runge-Kutta-Verfahren im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich zur Validierung der Zeitbereichsmodelle herangezogen wird, spielt dies jedoch keine wesentliche Rolle.

5.3.2 Transformation in den Frequenzbereich

Der nächste Schritt zur Validierung der Zeitbereichsmodelle ist die Transformation der berechneten Ausgänge und des vorgegebenen Eingangs in den Frequenzbereich.

Im Rahmen der Validierung ist der Eingang in geschlossener Form, hier in der Regel als Gaußscher Puls (5.44), gegeben. Die zugehörige Darstellung im Frequenzbereich kann daher analytisch berechnet werden und lautet

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_G(\hat{t}-\hat{t}_0)^2} e^{-j\omega\hat{t}} d\hat{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{c_G} e^{-\frac{\omega^2}{4c_G}} e^{j\omega\hat{t}_0} \quad (5.62)$$

Im Gegensatz dazu sind die Werte der berechneten Ausgänge nicht in geschlossener Form, sondern lediglich an diskreten Zeitpunkten bekannt. Eine analytische Auswertung des Fourier-Integrals ist somit nicht möglich, und es muss auf numerische Methoden zurückgegriffen werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird dazu die diskrete Fourier-Transformation (DFT, *engl. Discrete Fourier Transform*) verwendet. Diese berechnet das diskrete Spektrum eines diskreten Zeitsignals. Da weiterhin mit der schnellen Fourier-Transformation (FFT, *engl. Fast Fourier Transform*) [BP85, Kapitel 2] effiziente Algorithmen zur Umsetzung der DFT existieren, ist diese bestens für die hier benötigten Aufgaben geeignet. Das mit der DFT berechnete Spektrum ist wie das zugrunde liegende Zeitsignal lediglich an diskreten Kreisfrequenzen $k\Delta\omega$, $k \in [0, \dots, N_t - 1]$ verfügbar. Der Zusammenhang zwischen den diskreten Kreisfrequenzen und den diskreten Zeiten ist im Rahmen der DFT durch

$$\Delta\omega\Delta\hat{t} = \frac{2\pi}{N_t} \quad (5.63)$$

gegeben. Mit den Abkürzungen

$$\hat{b}^n = \hat{b}(\hat{t} = n\Delta\hat{t}), \quad (5.64a)$$

$$b^k = b(\omega = k\Delta\omega), \quad (5.64b)$$

lässt sich Berechnungsvorschrift des diskreten Spektrums folgendermaßen darstellen [BP85, S. 14]:

$$b_{\text{DFT}}^k = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{b}^n e^{-j(2\pi/N)kn}. \quad (5.65)$$

Auf eine Darstellung der algorithmischen Umsetzung dieser Summe im Rahmen der FFT sei hier verzichtet und auf die ausführliche Literatur [CLRS01, S. 839 ff.] verwiesen.

5.4 Integration in Schaltungssimulatoren

Um die Zeitbereichsmodelle (5.42) gemeinsam mit nichtlinearen Teilsystemen simulieren zu können, sind Verfahren zur Realisierung der Modelle in Schaltungssimulatoren notwendig. Das Vorgehen entspricht dem aus [AN01], [LM07] und ist an dieser

Stelle noch einmal zusammengefasst. Die Idee ist, die einzelnen Zeilen von (5.42a) zu betrachten. Die j -te Zeile lautet

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_{l,j} = \sum_{i=1}^{N_{TD}} \tilde{W}_{TZ,j,i} \hat{x}_{l,i} + \tilde{q}_{TZ,l,j} \frac{d}{dt}\hat{a}_l(\hat{t}), \quad j \in [1, \dots, N_{TD}]. \quad (5.66)$$

Im Schaltungssimulator können diese N_{TD} Zeilen mittels Verschaltungen aus Widerständen, Kapazitäten, sowie spannungsgesteuerten Stromquellen entsprechend Abbildung 5.2a realisiert werden. Dabei wird die Zustand $\hat{x}_{l,j}$ mit der Spannung identifiziert, die zwischen den beiden gezeichneten Knoten abfällt. Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Anwendung der Kirchhoffschen Knotenregel [Pre01, S. 168] direkt auf (5.66) führt. Die Bereitstellung der Ableitung des Eingangs $\frac{d}{dt}\hat{a}_l(\hat{t})$ wird mittels einer Induktivität entsprechend Abbildung 5.2b realisiert. Auch hier lässt sich leicht überprüfen, dass die Spannung zwischen den beiden gezeichneten Knoten der gesuchten Ableitung entspricht. Die Berechnung des Ausgangs \hat{b}_l erfolgt nach Abbildung 5.2c, worin der gesuchte Ausgang dem eingezeichneten Strom entspricht. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die gezeigten Netzwerkelemente in Abbildung 5.2 keine realen Bauteile darstellen, sondern lediglich mathematische Hilfsgrößen sind, die dazu dienen, die Gleichungen (5.42) im Schaltungssimulator zu realisieren. Aus diesem Grund ist auch das Auftreten negativer Widerstände bzw. Kapazitäten zulässig. Da die Schaltungen aus Abbildung 5.2 das System (5.42) repräsentieren, und da dieses entsprechend Abschnitt 5.1 passiv ist, ist auch die Passivität der Schaltungen garantiert.

Die so aufgebaute Schaltung wird zur Berechnung der Streuparameter verwendet. Dies soll exemplarisch anhand eines Systems mit zwei Ein- und Ausgängen verdeutlicht werden. Ziel ist es, die Streuparameter $S_{1,1}$ und $S_{2,1}$ zu berechnen. Dazu wird das System wie in Abbildung 5.3 dargestellt verschaltet. Bei diesem Vorgehen werden die einfallenden Wellen $\hat{a}_1(\hat{t})$, und $\hat{a}_2(\hat{t})$ durch die Spannungen, die zwischen dem jeweiligen Tor und der Masse anliegen, und die auslaufenden Wellen $\hat{b}_1(\hat{t})$ und $\hat{b}_2(\hat{t})$ durch die Ströme in die jeweiligen Tore repräsentiert. Das Vorgehen zur Berechnung von $S_{1,1}$ und $S_{2,1}$ ist nun folgendermaßen: Als Anregung $\hat{a}_1(\hat{t})$ wird ein Gaußscher Puls nach (5.44) gewählt, während $\hat{a}_2(\hat{t})$ entsprechend den Nebenbedingungen in (2.50) zu Null gesetzt wird. Mittels der Schaltung aus Abbildung 5.3 werden $\hat{b}_1(\hat{t})$ und $\hat{b}_2(\hat{t})$ im Zeitintervall $\hat{t} \in [\hat{t}_0, \dots, \hat{t}_1]$ berechnet, anschließend zusammen mit der Anregung $\hat{a}_1(\hat{t})$ in den Frequenzbereich transformiert und die Streuparameter nach (5.45) ausgewertet.

5.5 Numerische Beispiele

Im Folgenden soll die Methodik anhand von numerischen Beispielen validiert werden. Die reduzierten Modelle werden nach den selbst-adaptiven Verfahren für affin in

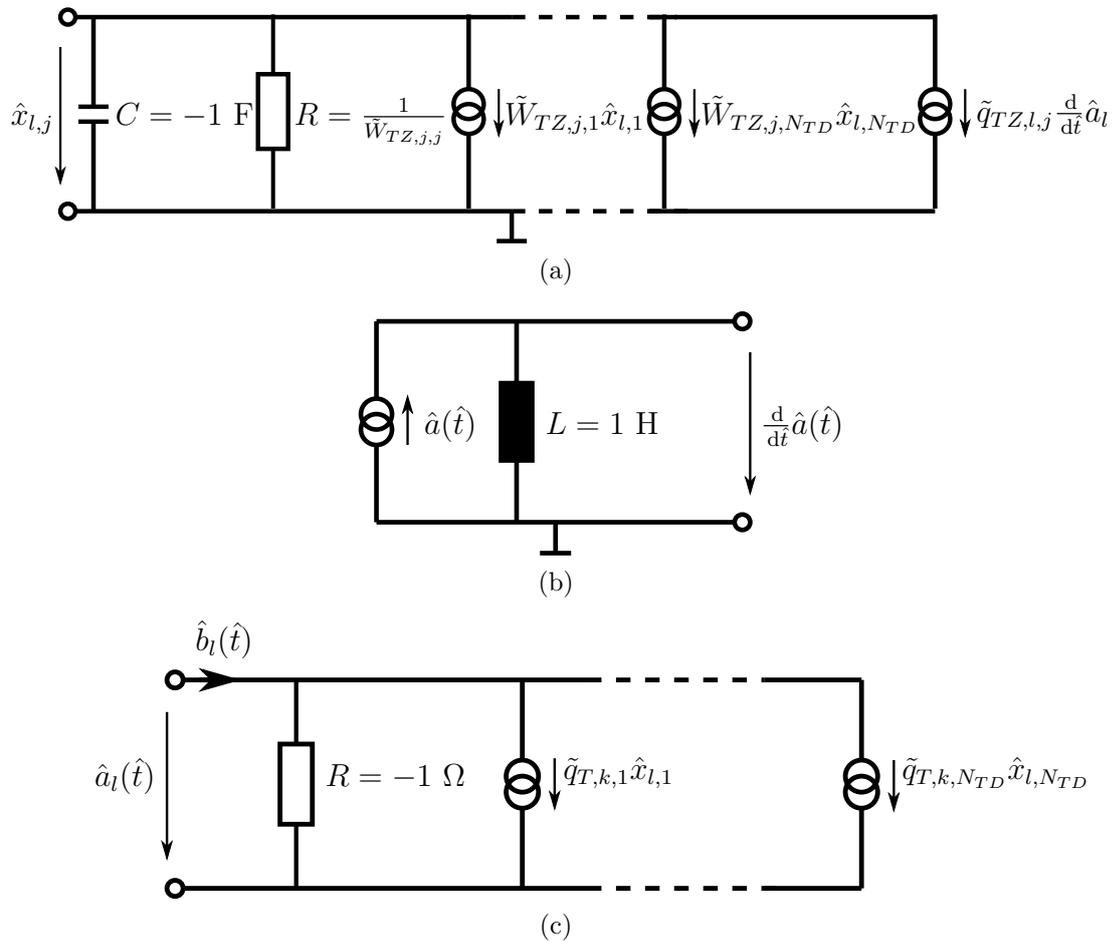


Abbildung 5.2: Realisierung der Zeitbereichmodelle im Schaltungssimulator: (a) j -ter Zustand, (b) Ableitung des Eingangs, (c) Ausgang.

der Frequenz parametrisierte Systeme [dRM09], [KFK⁺11] erstellt. Die Rechnungen wurden in MATLAB Version R2013b auf einer Maschine mit Intel[®] Core i5-3570K, 3,4 GHz Prozessor, sowie 32 GB RAM durchgeführt. Für die Validierung des Verfahrens zur Integration in Schaltungssimulatoren wurde das frei verfügbare LTspice Version 4.23l verwendet.

5.5.1 Parallelplattenstruktur

Das erste numerische Beispiel ist die Parallelplattenstruktur (PPS) aus [LJ13], die in Abbildung 5.4 dargestellt ist. Diese besteht aus zwei metallischen Platten, hier als perfekt elektrischer Leiter modelliert, zwischen denen sich ein Dielektrikum mit frequenzabhängiger Permittivität befindet. Für die Materialeigenschaften des Di-

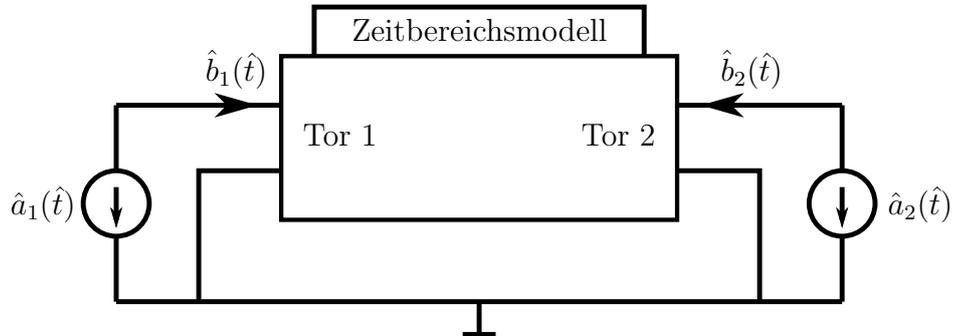


Abbildung 5.3: Verschaltung des Zeitbereichsmodells im Schaltungssimulator zur Berechnung der Streuparameter.

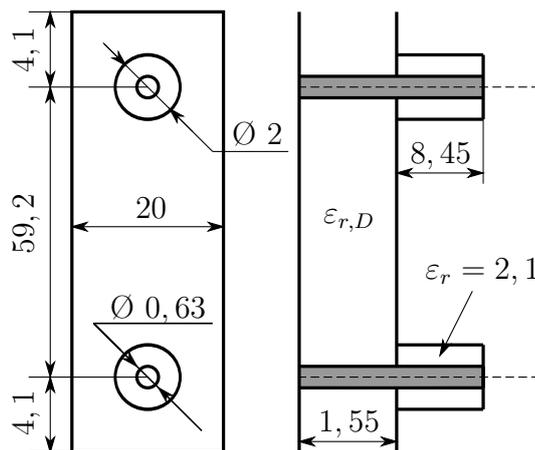


Abbildung 5.4: PPS: Geometrie, Abmessungen in mm.

elektrikums gilt

$$\epsilon_{r,D}(k_0) = \epsilon_\infty + \frac{\Delta\epsilon}{1 + jk_0 c_0 \tau_e}, \quad (5.67a)$$

$$\mu_r = 1, \quad (5.67b)$$

$$\kappa = 6,29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{S}}{\text{m}}, \quad (5.67c)$$

mit

$$\epsilon_\infty = 3,64, \quad \Delta\epsilon = 0,54, \quad \tau_e = 11,4 \cdot 10^{-12} \text{s}. \quad (5.68)$$

Angeregt wird die Struktur mittels zweier identischer Koaxialleitungen, deren Innen- und Außenleiter ebenfalls als perfekt elektrische Leiter modelliert werden, und deren

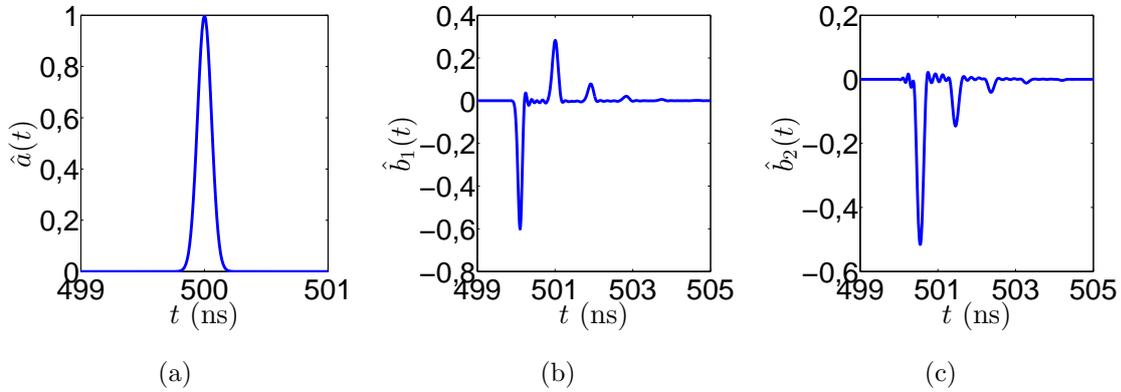


Abbildung 5.5: PPS: Zeitsignale, (a) einfallende Welle $\hat{a}_1(t)$, (b) auslaufende Welle $\hat{b}_1(t)$, (c) auslaufende Welle $\hat{b}_2(t)$.

Inneres von einem verlustfreien Dielektrikum mit $\varepsilon_r = 2,1$ gebildet wird. Die Struktur wird in einem Frequenzbereich von $[0,5, 3,2]$ GHz analysiert. Ausgangspunkt ist ein FE-Modell der Dimension 231984. Basierend auf diesem wird unter Verwendung einer Schranke für das relative Residuum von $\rho_t = 10^{-3}$ ein reellwertiges reduziertes Modell der Dimension 16 erstellt. Anwendung der Methode der ADE führt auf ein Zeitbereichsmodell in Zustandsraumdarstellung der Dimension 48. Zur Berechnung der Streuparameter im Frequenzbereich wird das Zeitbereichsmodell über den ersten Wellenleiter mit einem Gaußschen Puls

$$\hat{a}(\hat{t}) = e^{-c_G(\hat{t}-\hat{t}_0)^2} \quad (5.69)$$

mit den Parametern

$$c_G = (8 \cdot 10^{-11} c_0)^{-2}, \hat{t}_0 = 5 \cdot 10^{-7} c_0 \quad (5.70)$$

angeregt. Das anregende Zeitsignal $\hat{a}(t)$ über der unskalierten Zeit t ist in Abbildung 5.5a zu sehen. Die Lösung im Zeitbereich wird mittels des Runge-Kutta-Verfahrens nach Heun für Zeiten $\hat{t} \in [0, c_0 \cdot 10^{-6}]$ unter Verwendung einer festen Zeitschrittweite von $\Delta\hat{t} = c_0 \cdot 10^{-11}$ s berechnet. Die benötigte Rechenzeit zum Lösen des Systems beträgt 27,88s. Um die Stabilität des Verfahrens zu untersuchen, sind in Abbildung 5.6 zum einen das Stabilitätsgebiet des Verfahrens dargestellt und zum anderen die Eigenwerte der erstellten Matrix $\tilde{\mathbf{W}}_{TZ}$ skaliert mit der gewählten Zeitschrittweite $\Delta\hat{t}$. An der Abbildung lässt sich gut erkennen, dass das Verfahren für diese Schrittweite stabil ist. Dies ist auch an den auslaufenden Wellen an beiden Wellenleitern zu sehen, die in Abbildung 5.5b bzw. Abbildung 5.5c über der unskalierten Zeit t dargestellt sind, und nach endlicher Zeit gegen Null abklingen. Die auslaufenden Wellen werden mittels des in MATLAB integrierten FFT-Algorithmus in den Frequenzbereich transformiert. Aus den resultierenden Signalen werden anschließend die Streuparameter berechnet. Der Vergleich der so bestimmten Streuparameter mit denen, die direkt aus dem reduzierten Modell im Frequenzbereich berechnet wurden,

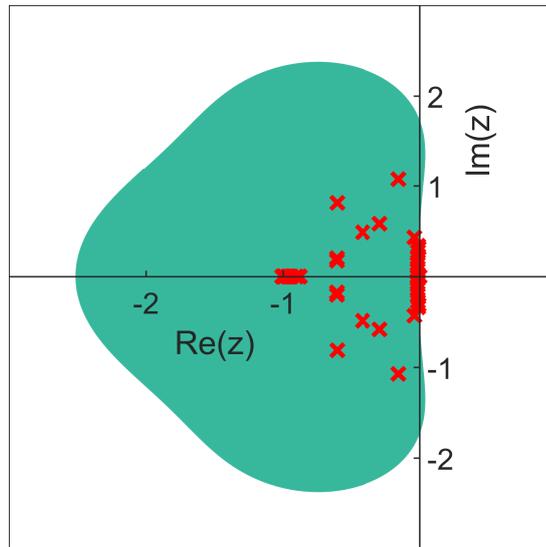


Abbildung 5.6: PPS: Stabilitätsgebiet des Verfahrens nach Heun sowie die mit Δt skalierten Eigenwerte der Systemmatrix $\tilde{\mathbf{W}}_{TZ}$.

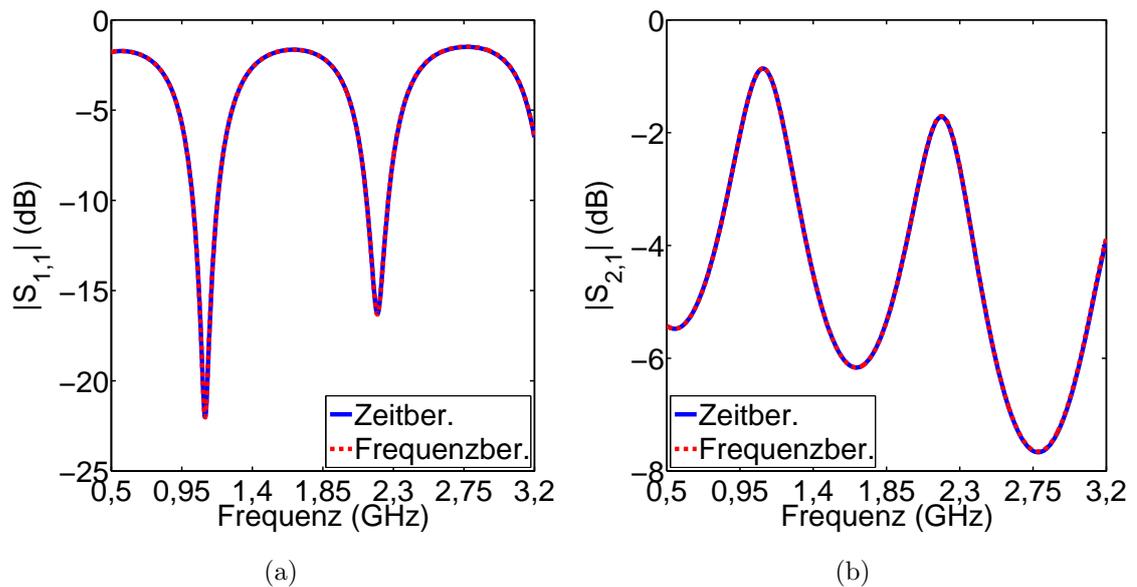


Abbildung 5.7: PPS: Betrag der Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,1}$.

ist in Abbildung 5.7 gegeben. Es lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung über das gesamte betrachtete Frequenzband beobachten. Um den Fehler der Streuparameter aus dem Zeitbereichsmodell bzgl. jener des reduzierten Modells im Frequenzbereich zu quantifizieren, wird folgende Größe eingeführt:

$$E_{i,j} = S_{i,j}^{FB} - S_{i,j}^{ZB}, \quad (5.71)$$

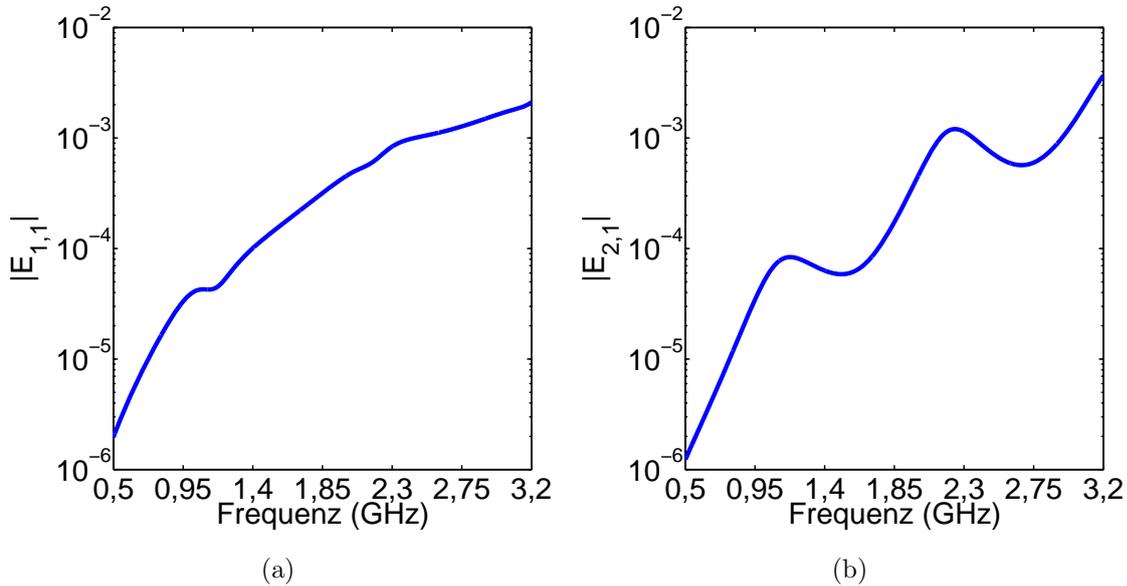


Abbildung 5.8: PPS: Betrag des Fehlers in den Streuparametern über der Frequenz, (a) $E_{1,1}$, (b) $E_{2,1}$.

wobei $S_{i,j}^{FB}$ der Eintrag i, j der Streumatrix des Frequenzbereichsmodells ist, während $S_{i,j}^{ZB}$ den Eintrag i, j der Streumatrix des Zeitbereichsmodells beschreibt. Der Fehler ist in Abbildung 5.8 dargestellt und liegt unter 10^{-2} , was die Genauigkeit des Verfahrens unterstreicht. Um zu zeigen, dass der Fehler bei Verkleinerung der Schrittweite geringer wird, ist in Abbildung 5.9 der Verlauf des Maximums von $|E_{1,1}|$ bzw. $|E_{2,1}|$ über der inversen Zeitschrittweite $\frac{\omega_0}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}$ angegeben. Dabei bezeichnet $E_{i,j,\max}$ den maximalen Fehler in $S_{i,j}$,

$$E_{i,j,\max} = \max_{k_0}(|E_{i,j}(k_0)|). \quad (5.72)$$

An Abbildung 5.9 lässt sich erkennen, dass die theoretisch erreichbare Konvergenz des Verfahrens dritter Ordnung realisiert wird.

Im nächsten Schritt soll das Verfahren zur Integration der Zeitbereichsmodelle in Schaltungssimulatoren validiert werden. Dazu wird das Zeitbereichsmodell entsprechend Abschnitt 5.4 im Schaltungssimulator realisiert und nach Abbildung 5.3 verschaltet. Das so verschaltete Modell wird mit dem Gaußschen Puls nach (5.69) angeregt, und die auslaufenden Wellen werden mittels des internen Löser berechnet. Da der verwendete Schaltungssimulator die Zeitschrittweiten adaptiv wählt, sind die Zeiten, an denen das Ergebnis vorliegt, nicht äquidistant verteilt. Um dennoch den FFT-Algorithmus zur Transformation in den Frequenzbereich verwenden zu können, werden die erzeugten Ergebnisse an äquidistant verteilten Stützstellen linear interpoliert. Als Abstand zwischen den Stützstellen wird $\Delta \hat{t} = c_0 \cdot 10^{-11}$ s verwendet.

Der Vergleich der so berechneten Streuparameter mit denen des reduzierten Modells

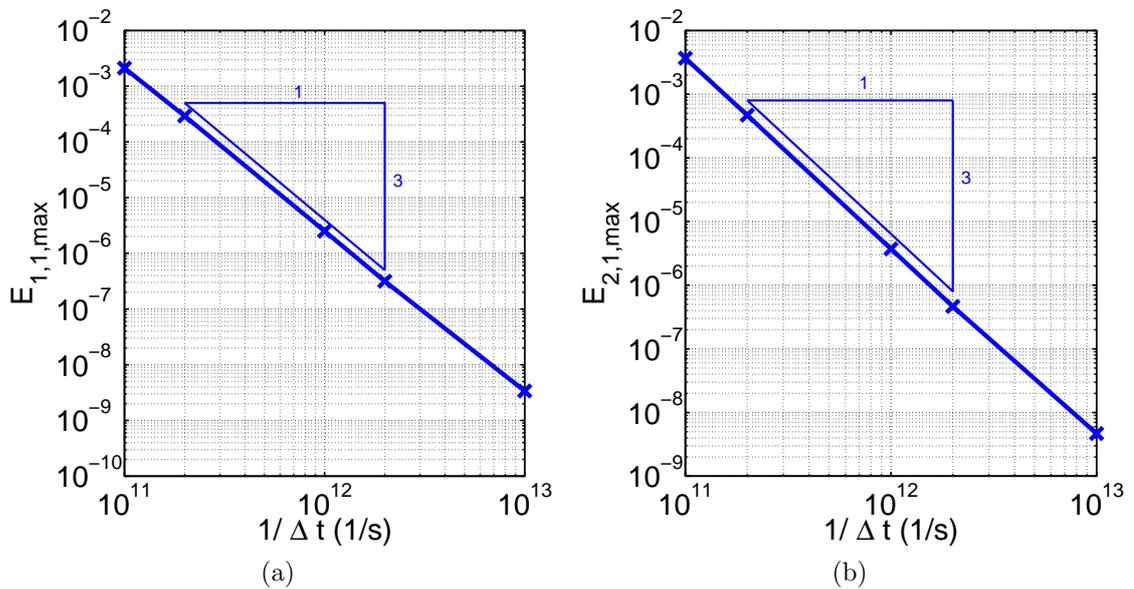


Abbildung 5.9: PPS: maximaler Fehler der Streuparameter über der Zeitschrittweite, (a) $E_{1,1,max}$, (b) $E_{2,1,max}$.

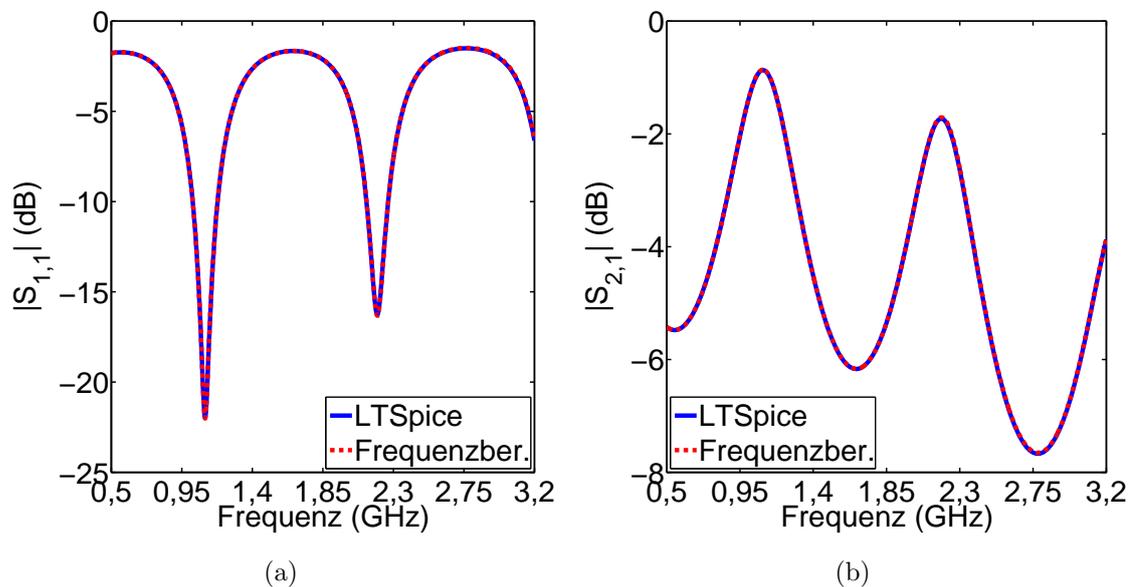


Abbildung 5.10: PPS: Betrag der mittels LTSpice berechneten Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,1}$.

im Frequenzbereich ist in Abbildung 5.10 zu sehen. Auch hier liegen die Kurven sehr gut übereinander, und der Fehler, in Abbildung 5.11 dargestellt, liegt unter 10^{-2} .

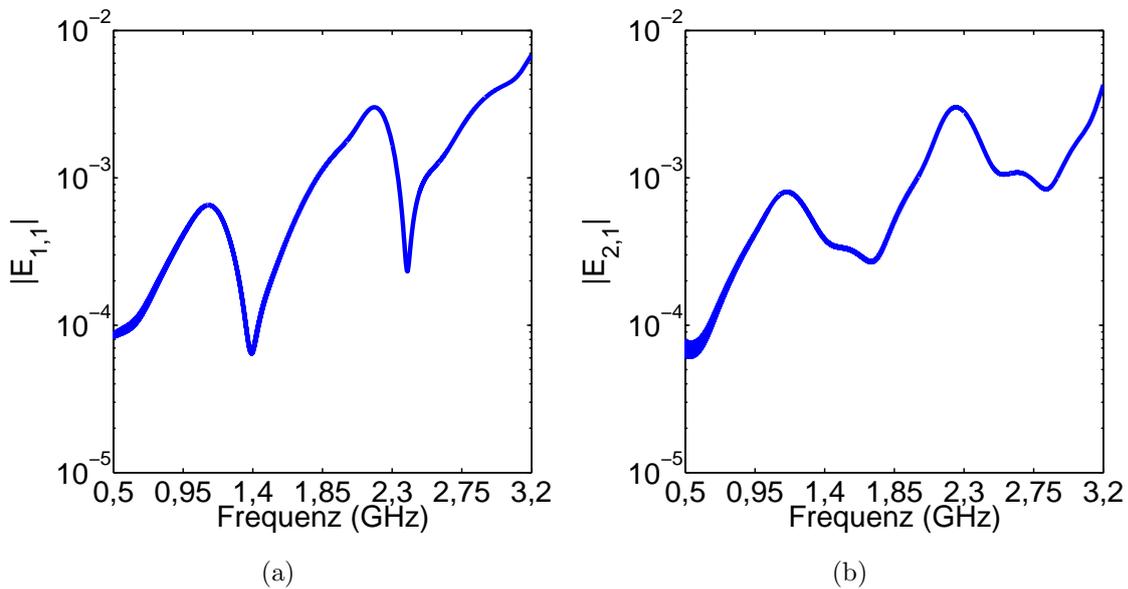


Abbildung 5.11: PPS: Fehler in den mittels LTSpice berechneten Streuparametern, (a) $E_{1,1}$, (b) $E_{2,1}$.

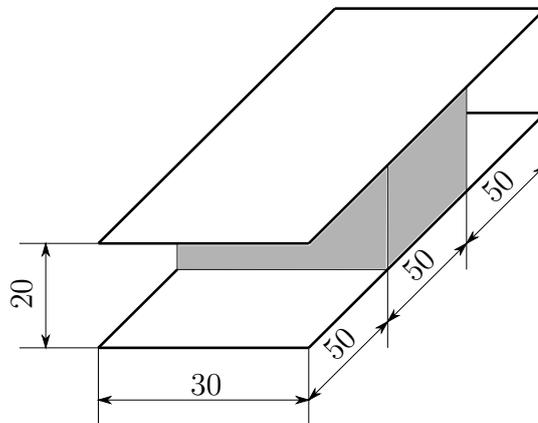


Abbildung 5.12: PPWLd, Abmessungen in mm.

5.5.2 Parallelplattenwellenleiter mit dispersivem Materialeinsatz

Als zweites Beispiel wird der Parallelplattenwellenleiter mit dispersivem Materialeinsatz (PPWLd) aus [ASG15] verwendet. Die Abmessungen der Struktur sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Die metallischen Platten der Struktur werden als perfekt elektrische Leiter modelliert, und die Materialeigenschaften des dispersiven Einsatz-

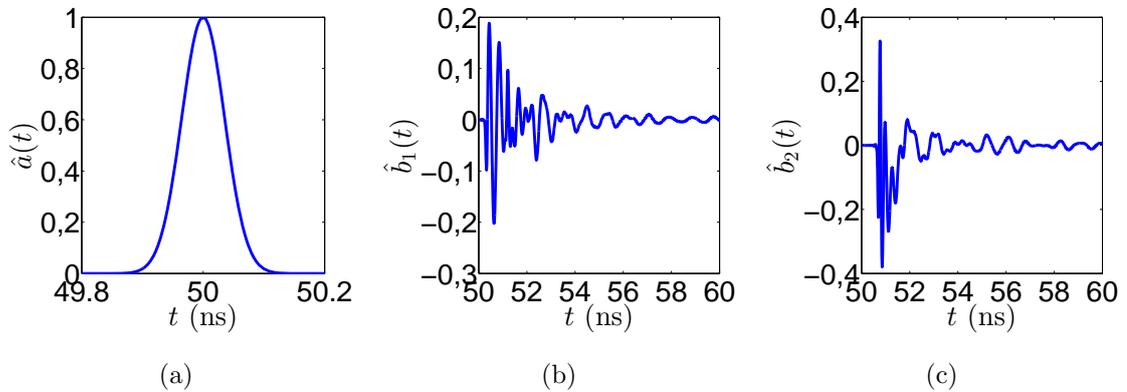


Abbildung 5.13: PPWLd: Zeitsignale, (a) einfallende Welle $\hat{a}_1(t)$, (b) auslaufende Welle $\hat{b}_1(t)$, (c) auslaufende Welle $\hat{b}_2(t)$.

zes genügen (3.86). In der restlichen Struktur befindet sich Luft mit $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$ und $\kappa = 0$. Ausgangspunkt für die Analyse der Struktur im Frequenzband von $[0, 03, 5]$ GHz bildet ein FE-Modell der Dimension 37494. Unter Verwendung einer Schranke für das relative Residuum von $\rho_t = 10^{-3}$ wird ein reduziertes Modell mit reellwertigen Matrizen der Dimension 88 erstellt. Anwendung der Methode der ADE führt auf ein Zeitbereichsmodell die Dimension 880. An dieser Stelle wird der Nachteil der Methode der ADE deutlich. Je komplizierter die Frequenzabhängigkeit der Materialien ist, desto größer wird das resultierende Modell. Das Zeitbereichsmodell wird mit einem Gaußschen Puls der Form

$$\hat{a}(\hat{t}) = e^{-c_G(\hat{t}-\hat{t}_0)^2} \quad (5.73)$$

mit

$$c_G = (5 \cdot 10^{-11} c_0)^{-2}, \hat{t}_0 = 5 \cdot 10^{-8} c_0 \quad (5.74)$$

angeregt, dessen Verlauf in Abbildung 5.13a dargestellt ist. Das Zeitbereichsmodell wird zunächst wieder mit dem Runge-Kutta-Verfahren nach Heun im Zeitintervall $[0, c_0 \cdot 10^{-7} \text{ s}]$ unter Verwendung der Zeitschrittweite $\Delta\hat{t} = c_0 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ gelöst. Die zum Lösen des Systems benötigte Rechenzeit betrug 6925 s. Neben der hohen Dimension des resultierenden Modells trägt auch das verwendete explizite Runge-Kutta-Verfahren maßgeblich zu dieser langen Rechenzeit bei. Da die Lösung mittels des Runge-Kutta-Verfahrens im Rahmen dieser Arbeit jedoch lediglich zur Validierung der Zeitbereichsmodelle verwendet wird, spielt die Rechenzeit keine Rolle. Um die Stabilität des Verfahrens bei Verwendung dieser Schrittweite zu untersuchen, sind in Abbildung 5.5.2 die mit $\Delta\hat{t}$ skalierten Eigenwerte der Matrix $\tilde{\mathbf{W}}_{TZ}$ zusammen mit dem Stabilitätsgebiet des Verfahrens nach Heun dargestellt. Es ist zu erkennen, dass alle skalierten Eigenwerte innerhalb des Gebiets liegen und das Verfahren somit stabil ist. Die berechneten auslaufenden Wellen, die in Abbildung 5.13b bzw. Abbildung 5.13c dargestellt sind, klingen nach endlicher Zeit gegen Null ab, was die

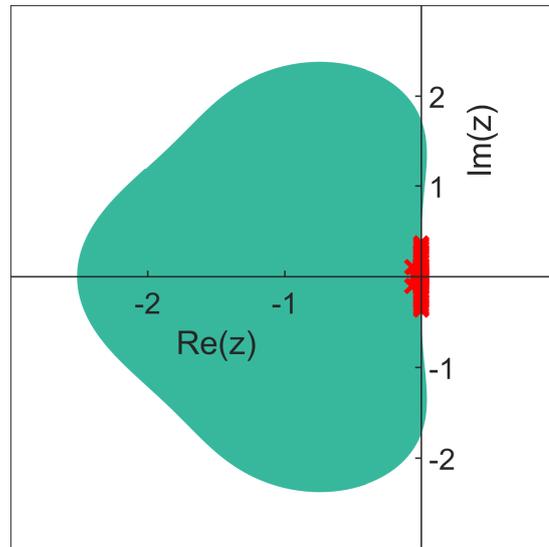


Abbildung 5.14: PPWLd: Stabilitätsgebiet des Verfahrens nach Heun sowie die mit Δt skalierten Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{W}_{TZ} .

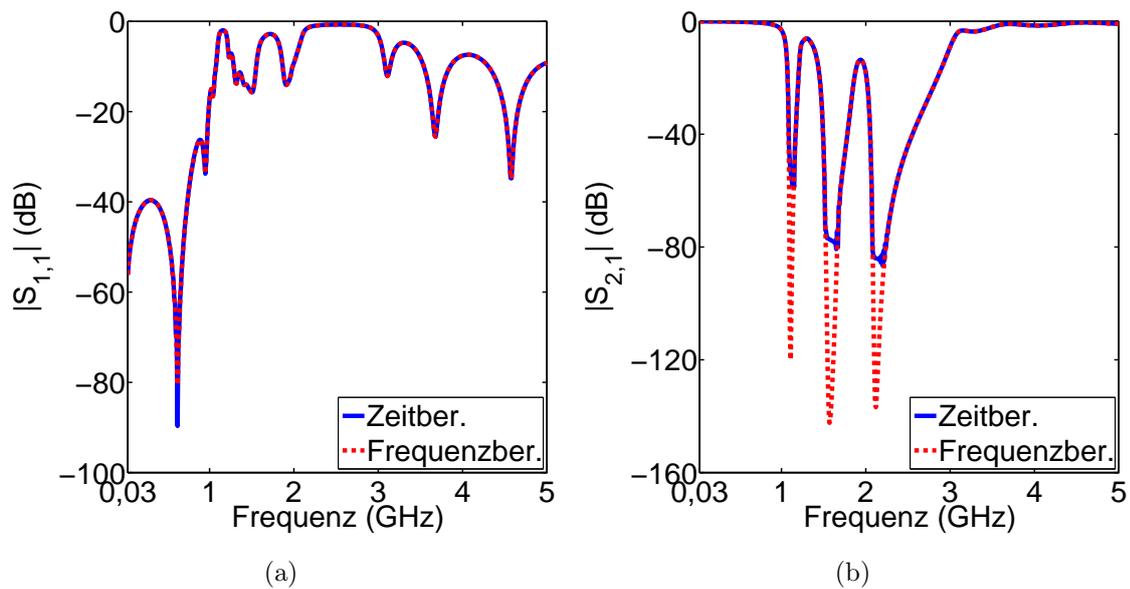


Abbildung 5.15: PPWLd: Betrag der Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,1}$.

Stabilität bestätigt. Werden diese Signale in den Frequenzbereich transformiert, so ergeben sich die Streuparameter entsprechend Abbildung 5.15. Als Referenz werden die Streuparameter verwendet, die sich direkt aus dem reduzierten Modell im Frequenzbereich ergeben. Abgesehen von den Resonanzen bei 1,17 GHz, 1,57 GHz und 2,12 GHz, lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Kurven erkennen. Allerdings werden auch die Streuparameter in den Resonanzen bis ungefähr -60 dB

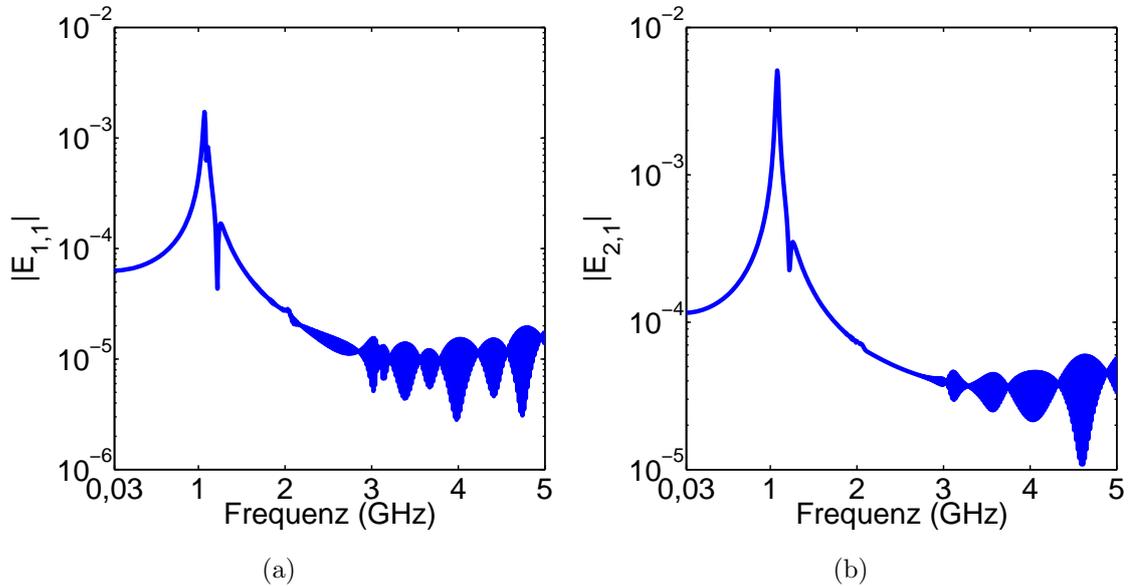


Abbildung 5.16: PPWLd: Fehler in den Streuparametern über der Frequenz, (a) $E_{1,1}$, (b) $E_{2,1}$.

korrekt dargestellt. Die Fehler $E_{1,1}$ und $E_{2,1}$, die in Abbildung 5.16 dargestellt sind, liegen über dem gesamten betrachteten Frequenzband unter 10^{-2} , abseits der ersten Resonanz sogar im Bereich von 10^{-4} . Dies unterstreicht die Fähigkeit der vorgestellten Methodik, auch Materialien mit komplizierten Frequenzabhängigkeiten verlässlich zu analysieren.

Im nächsten Schritt wird das Verfahren zur Integration der Zeitbereichsmodelle in Schaltungssimulatoren validiert. Dazu wird die Methodik aus Abschnitt 5.4 angewendet und das resultierende Modell entsprechend Abbildung 5.3 verschaltet. Die Anregung erfolgt mit dem Gaußschen Puls aus (5.73). Wie im vorherigen Beispiel werden die berechneten auslaufenden Wellen zunächst an äquidistant verteilten Stützstellen interpoliert. Diese befinden sich im Intervall $[0, c_0 \cdot 10^{-7} \text{ s}]$ im Abstand $\Delta \hat{t} = c_0 \cdot 10^{-12} \text{ s}$. Transformation der Zeitbereichssignale in den Frequenzbereich führt auf die in Abbildung 5.17 dargestellten Streuparameter. Abgesehen von den Resonanzfrequenzen lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Kurven beobachten. Die Resonanzen werden, ähnlich wie bei den Lösungen mittels des Runge-Kutta-Verfahrens nach Heun, bis ungefähr -60 dB korrekt dargestellt. Der Fehler in den Streuparametern, die mittels LTSpice berechnet wurden, bzgl. der Streuparameter des reduzierten Frequenzbereichsmodells ist in Abbildung 5.18 dargestellt. Es ist zu sehen, dass auch dieser über dem gesamten Frequenzbereich unterhalb von 10^{-2} liegt. Dies zeigt, dass die hergeleiteten Zeitbereichsmodelle auch für Strukturen, deren frequenzabhängiges Materialverhalten komplizierten Modellen genügt, mittels der Methodik aus Abschnitt 5.4 erfolgreich in Schaltungssimulatoren integriert werden können.

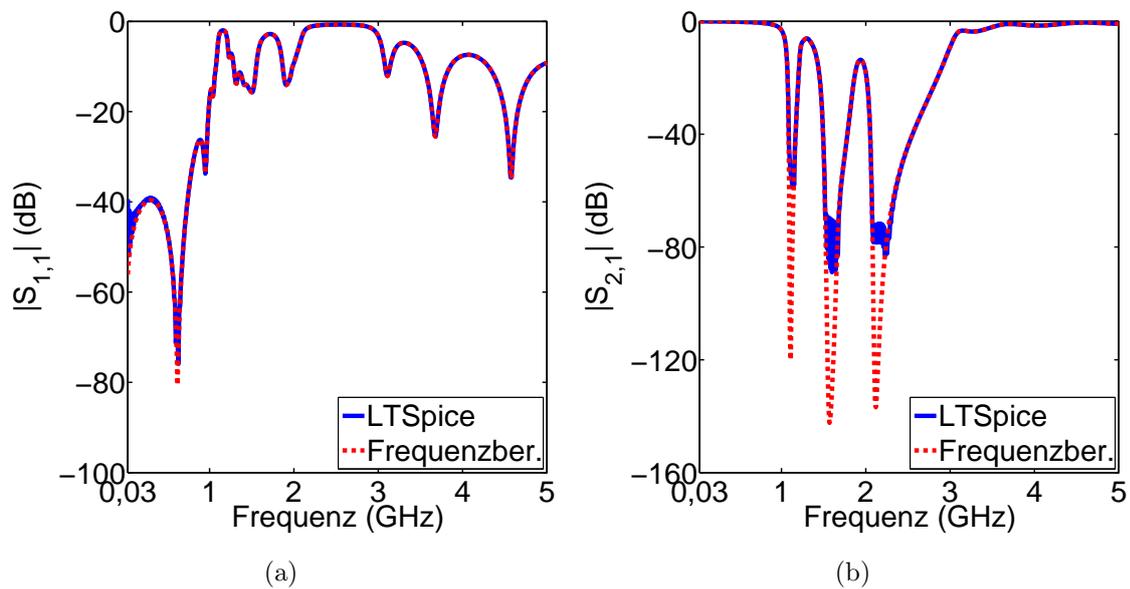


Abbildung 5.17: PPWLd: Betrag der mittels LTSpice berechneten Streuparameter über der Frequenz, (a) $S_{1,1}$, (b) $S_{2,1}$.

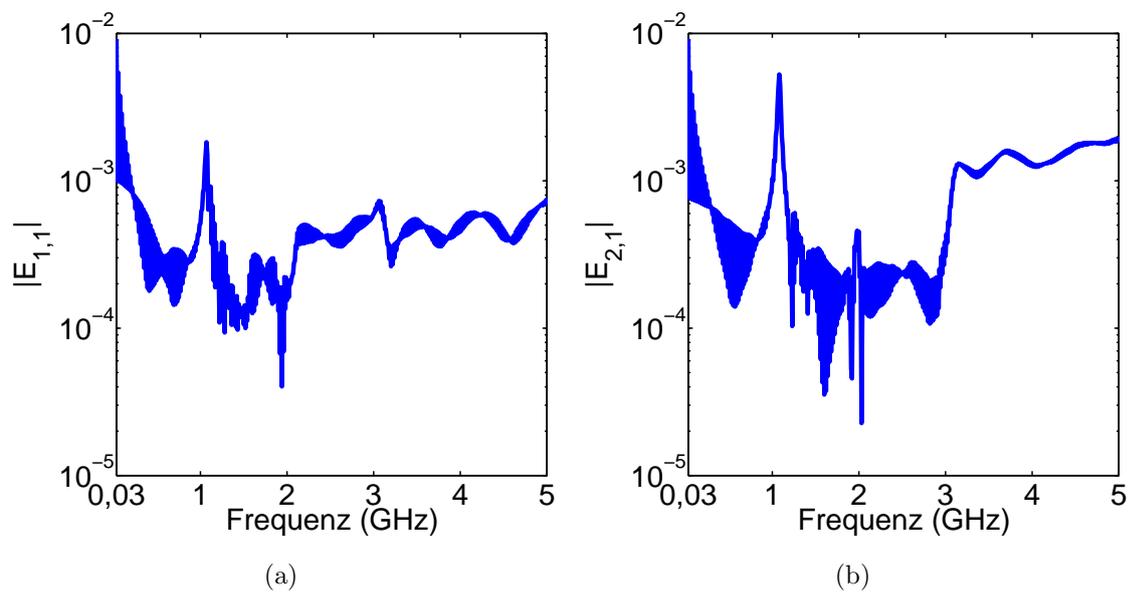


Abbildung 5.18: PPWLd: Fehler in den mittels LTSpice berechneten Streuparametern, (a) $E_{1,1}$, (b) $E_{2,1}$.

5.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine Methodik zur Transformation reduzierter Frequenzbereichsmodelle in den Zeitbereich vorgestellt. Dabei wurden Strukturen betrachtet,

die ausschließlich durch TEM-Moden angeregt werden, und deren speisenden Wellenleiter kein frequenzabhängiges Material beinhalten. Um die Frequenzabhängigkeit des Materials im Inneren der Struktur behandeln zu können, wurde die Methode der ADE angewendet. Die grundlegende Idee dabei ist, zusätzliche Unbekannte so einzuführen, dass ein linear in der Frequenz parametrisiertes System entsteht. Dies führt auf ein Zeitbereichsmodell in Zustandsraumdarstellung, welches mittels Standard-Zeitintegratoren gelöst oder direkt in Schaltungssimulatoren integriert werden kann. Der Nachteil der Methode der ADE ist jedoch, dass ihre Anwendung, besonders bei Materialien mit komplizierter Frequenzabhängigkeit, zu einer Vervielfachung der Anzahl der Unbekannten führt. Anhand von zwei numerischen Beispielen wurden die hergeleiteten Zeitbereichsmodelle sowie das Verfahren zur Integration in Schaltungssimulatoren validiert.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Methoden zur effizienten Charakterisierung passiver Mikrowellenstrukturen mittels Netzwerkmatrizen auf Basis elektromagnetischer Feldsimulation im Frequenzbereich vorgestellt. Die Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen der Mikrowellenstrukturen bilden die komplexen Amplituden der Eigenmoden der speisenden axial homogenen Wellenleiter. Die Hauptbeiträge der Arbeit sind eine neue FE-Formulierung zur modalen Analyse von axial homogenen Wellenleitern sowie eine neue FE-Formulierung zur Charakterisierung der Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich. Weiterhin wurde ein MOR-Verfahren vorgeschlagen, das die Behandlung von Strukturen ermöglicht, die mittels transversal inhomogenen Wellenleitern angeregt werden. Des Weiteren wurde eine neue Methodik zur Transformation der Frequenzbereichsmodelle in den Zeitbereich präsentiert. Diese ermöglicht eine effiziente Simulation von linearen und nichtlinearen Teilsystemen im Zeitbereich.

Um die speisenden Wellenleiter zu analysieren, wurde in Kapitel 3 eine neue FE-Formulierung hergeleitet, die die elektrische Feldstärke sowie die magnetische Flussdichte diskretisiert. Die neue Formulierung ist zum einen für niedrige Frequenzen bis hin zum statischen Grenzfall stabil und führt zum anderen auf ein verallgemeinertes Eigenwertproblem, dessen Eigenwert direkt dem modalen Ausbreitungskoeffizienten entspricht. Dies führt dazu, dass die neue Formulierung in der Lage ist, Ausbreitungskoeffizienten mit sehr kleinem Betrag um Größenordnungen besser aufzulösen als mit konkurrierenden Ansätzen. Der Preis für diese bessere Auflösung ist eine vergleichsweise hohe Anzahl an Unbekannten, wodurch sowohl der Bedarf an Speicher als auch an Rechenzeit stark erhöht wird. Damit die hergeleitete Formulierung im Rahmen der effizienten Analyse von Mikrowellenstrukturen nach Kapitel 4 verwendet werden kann, wird ein verlässliches MOR-Verfahren benötigt, das ähnlich wie in [SFDE08] das Auftreten unphysikalischer Eigenmoden verhindert.

In Kapitel 4 wurde zunächst eine neue S-Formulierung zur Charakterisierung von Mikrowellenstrukturen vorgestellt. Im Gegensatz zur weitverbreiteten Z-Formulierung

[DeP83], [WMF83], [WP86] vermeidet sie das Auftreten von inneren Resonanzen. Allerdings führt sie auch für verlustfreie Strukturen auf komplexwertige Matrizen. Anders als die TFE aus [CL88], [Lee90], bei der es sich ebenfalls um eine S-Formulierung handelt, findet im Rahmen der neuen Formulierung keine Restriktion der Ansatzfunktionen auf den Querschnitten der speisenden Wellenleiter statt. Dies erleichtert zum einen die Implementierung und führt zum anderen dazu, dass die Frequenzabhängigkeit der Systemmatrizen im Fall frequenzabhängiger Modenformen vereinfacht wird. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Gleichungssysteme sowohl für die Z- als auch für die S-Formulierung in der elektrischen Feldstärke formuliert. Dieses Vorgehen ist jedoch dafür bekannt, dass die resultierenden Gleichungen für niedrige Frequenzen instabil werden und keine verlässlichen Lösungen liefern [DEPL99]. Um dieses Problem zu umgehen, bietet sich die Erweiterung der vorgestellten Methodik auf die Potential-Formulierung nach [JFDE15], [B4] an.

Weiterhin wurde in Kapitel 4 ein MOR-Verfahren vorgestellt, das es erlaubt Strukturen zu analysieren, die durch transversal inhomogene Wellenleiter gespeist werden. Im Gegensatz zu bisherigen Ansätzen werden die frequenzabhängigen Modenformen mittels eines reduzierten Modells für die Wellenleiter berechnet. Die Genauigkeit der Approximation wird im Rahmen dieses Ansatzes durch die Dimension des reduzierten Modells gesteuert. Um den Fehler in den Ausgängen der reduzierten Modelle genauer quantifizieren zu können, bieten sich a-posteriori-Fehlerschranken nach dem Vorbild von [CHMR10] an. Diese sind für affin parametrisierte Systeme in der Literatur verfügbar, eine Herleitung für den hier vorgestellten allgemeinen Fall steht jedoch noch aus.

Damit elektromagnetische Teilsysteme mit linearem Materialverhalten, die in der Regel im Frequenzbereich simuliert werden, gemeinsam mit nichtlinearen Teilsystemen, die im Zeitbereich simuliert werden müssen, analysiert werden können, wurde in Kapitel 5 ein neues Verfahren zur Transformation der Frequenzbereichsmodelle in den Zeitbereich vorgestellt. Im Gegensatz zu früheren Ansätzen basiert dieses nicht auf der Transformation der Übertragungsfunktion, sondern die Frequenzbereichsmodelle werden direkt in den Zeitbereich transformiert. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf frequenzabhängige Materialien gelegt. Diese wurden mittels der Methode der ADE behandelt, was selbst für komplizierte Materialmodelle auf Zeitbereichsmodelle in Zustandsraumdarstellung führt, die mit den Methoden aus [AN01], [LM07] direkt in Schaltungssimulatoren integriert werden können. Außerdem wurde bewiesen, dass die Frequenzbereichsmodelle passiv sind, und die resultierenden Zeitbereichsmodelle somit garantiert kausales Verhalten aufweisen. Die Verwendung von projektionsbasierter MOR im Frequenzbereich führt weiterhin dazu, dass die resultierenden Zeitbereichsmodelle effizient ausgewertet werden können. Zudem erlaubt es eine Rekonstruktion der transienten elektromagnetischen Felder mit geringem numerischen Aufwand. Das hergeleitete Verfahren setzt zum aktuellen Zeitpunkt allerdings Strukturen voraus, die durch TEM-Moden angeregt werden. Eine Erweiterung auf allgemeine Modenformen, die zum einen die Herleitung entsprechender

Zeitbereichsmodelle und zum anderen den Beweis der Passivität umfasst, ist Gegenstand der aktuellen Forschung.

Anhang A

Beweis der Kausalität des Lorentz-Materialmodells

An dieser Stelle soll gezeigt werden, dass das Materialmodell nach Lorentz (2.21) die Kramers-Kronig-Beziehungen erfüllt, Real- und Imaginärteil also ein Hilbert-Transformationspaar darstellen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind Real- und Imaginärteil nochmals angegeben:

$$\varepsilon_r'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2(\omega_e^2 - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_e^2}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\varepsilon_r''(\omega) = -2\frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2\omega\delta_e}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\delta_e^2}. \quad (\text{A.1b})$$

Es soll nun gezeigt werden, dass diese Größen den folgenden Beziehungen genügen:

$$\varepsilon_r'(\omega) - \varepsilon_\infty = -\frac{1}{\pi}P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r''(x)}{x - \omega} dx, \quad (\text{A.2a})$$

$$\varepsilon_r''(\omega) = \frac{1}{\pi}P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_r'(x) - \varepsilon_\infty}{x - \omega} dx. \quad (\text{A.2b})$$

Aufgrund der Eigenschaften der Hilbertransformation [EMOT54, S. 243] reicht es aus, eine der obigen Bedingungen zu überprüfen. Hier wird die erste gewählt. Es muss also

$$\frac{1}{\pi}P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\Delta\varepsilon\omega_e^2x\delta_e}{(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4x^2\delta_e^2}}_{:=f(x)} \frac{1}{x - \omega} dx \quad (\text{A.3})$$

berechnet werden. Die Auswertung des obigen Integrals erfolgt mittels des Residuensatzes [Kön04, S. 216 ff.]. Demnach gilt

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = j\pi \sum_{k_R} R_{k_R} + 2j\pi \sum_{k_O} R_{k_O}. \quad (\text{A.4})$$

Dabei bezeichnen R_{k_R} die Residuen, deren zugehörige Polstellen auf der reellen Achse liegen, während die R_{k_O} die Residuen bezeichnen, deren Polstellen in der oberen Halbebene der komplexen Ebene liegen. Handelt es sich um eine einfache Polstelle, im Folgenden mit a bezeichnet, berechnet sich das zugehörige Residuum R_a zu

$$R_a = \lim_{x \rightarrow a} (x - a)f(x). \quad (\text{A.5})$$

Für zweifache Polstellen berechnet sich das Residuum zu

$$R_a = \lim_{x \rightarrow a} \frac{d}{dx} [(x - a)^2 f(x)]. \quad (\text{A.6})$$

Zur Auswertung des Integrals (A.3) müssen zunächst die Polstellen des Integranden bestimmt werden. Die erste Polstelle ergibt sich direkt zu

$$x_1 = \omega. \quad (\text{A.7})$$

Die verbleibenden Polstellen entsprechen den Nullstellen des folgenden Polynoms:

$$(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4x^2 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Ausmultiplizieren und Einführen von $y = x^2$ führt auf

$$x^4 + x^2(4\delta_e^2 - 2\omega_e^2) + \omega_e^4 = 0 \quad (\text{A.9a})$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y(4\delta_e^2 - 2\omega_e^2) + \omega_e^4 = 0. \quad (\text{A.9b})$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$y_{1,2} = -\frac{4\delta_e^2 - 2\omega_e^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4\delta_e^2 - 2\omega_e^2}{2}\right)^2 - \omega_e^4} \quad (\text{A.10a})$$

$$= \omega_e^2 - 2\delta_e^2 \pm \sqrt{4\delta_e^4 - 4\delta_e^2\omega_e^2} \quad (\text{A.10b})$$

$$= \omega_e^2 - 2\delta_e^2 \pm 2\delta_e \sqrt{\delta_e^2 - \omega_e^2} \quad (\text{A.10c})$$

$$= \omega_e^2 - 2\delta_e^2 \pm j2\delta_e \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} \quad (\text{A.10d})$$

$$= \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} \pm j\delta_e\right)^2. \quad (\text{A.10e})$$

Damit ergeben sich die vier Lösungen von (A.8) und damit die verbleibenden vier Polstellen der Integranden von (A.3) zu

$$x_2 = \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} + j\delta_e\right), \quad x_3 = -\left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} + j\delta_e\right), \quad (\text{A.11a})$$

$$x_4 = \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} - j\delta_e\right), \quad x_5 = -\left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} - j\delta_e\right). \quad (\text{A.11b})$$

Nach (A.4) werden zur Auswertung des Integrals lediglich die Residuen benötigt, deren zugehörige Polstellen auf der reellen Achse oder in der oberen Halbebene der komplexen Zahlenebene liegen. Um entscheiden zu können, welche Residuen benötigt

werden, muss die Lage der Polstellen (A.11) bestimmt werden. Dazu werden drei Fälle unterschieden:

Fall 1: $\delta_e = \omega_e$. In diesem Fall ergeben sich zwei doppelte, rein imaginäre Polstellen bei

$$x_2 = j\delta_e, \quad x_3 = -j\delta_e, \quad (\text{A.12a})$$

wobei lediglich die doppelte Polstelle bei $x_2 = j\delta_e$ in der oberen Halbebene liegt.

Fall 2: $\delta_e > \omega_e$. In diesem Fall ist der Ausdruck unter der Wurzel in (A.11) negativ und die gesuchten Polstellen sind daher rein imaginär. Es gilt:

$$x_2 = \left(j\sqrt{\delta_e^2 - \omega_e^2} + j\delta_e \right), \quad x_3 = - \left(j\sqrt{\delta_e^2 - \omega_e^2} + j\delta_e \right), \quad (\text{A.13a})$$

$$x_4 = \left(j\sqrt{\delta_e^2 - \omega_e^2} - j\delta_e \right), \quad x_5 = - \left(j\sqrt{\delta_e^2 - \omega_e^2} - j\delta_e \right). \quad (\text{A.13b})$$

Dabei sind die Wurzelausdrücke positiv, und damit ist leicht ersichtlich, dass lediglich x_2 und x_5 in der oberen Halbebene liegen.

Fall 3: $\delta_e < \omega_e$. Für diesen Fall sind die Ausdrücke unter der Wurzel in (A.11) positiv, und die Polstellen sind komplexwertig:

$$x_2 = \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} + j\delta_e \right), \quad x_3 = - \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} + j\delta_e \right), \quad (\text{A.14a})$$

$$x_4 = \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} - j\delta_e \right), \quad x_5 = - \left(\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} - j\delta_e \right). \quad (\text{A.14b})$$

In diesem Fall liegen also ebenfalls nur x_2 und x_5 in der oberen Halbebene. Während der erste Fall aufgrund der doppelten Polstellen separat analysiert werden muss, können die anderen beiden Fälle zusammen betrachtet werden.

Zunächst wird Fall 1, mit $\omega_e = \delta_e$ betrachtet. Die relevanten Polstellen sind die einfache Polstelle bei $x_1 = \omega$ sowie die doppelte Polstelle bei $x_2 = j\delta_e$. Unter Berücksichtigung von $\omega_e = \delta_e$ ergeben sich die entsprechenden Residuen zu

$$R_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) f(x) = \frac{\Delta \varepsilon \omega_e^2 2\delta_e \omega}{(\omega - j\delta_e)^2 (\omega + j\delta_e)^2}, \quad (\text{A.15a})$$

$$R_2 = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{d}{dx} [(x - a)^2 f(x)] = 2\Delta \varepsilon \omega_e^2 \delta_e \lim_{x \rightarrow j\delta_e} \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{(x + j\delta_e)^2 (x - \omega)} \right]. \quad (\text{A.15b})$$

Um R_2 berechnen zu können, wird zunächst die Ableitung ausgewertet. Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{(x + j\delta_e)^2 (x - \omega)} \right] = \frac{d}{dx} [x(x + j\delta_e)^{-2} (x - \omega)^{-1}] \quad (\text{A.16a})$$

$$= \frac{(x + j\delta_e)(x - \omega) - 2x(x - \omega) - x(x + j\delta_e)}{(x + j\delta_e)^3 (x - \omega)^2}. \quad (\text{A.16b})$$

Damit lässt sich das Residuum R_2 angeben:

$$R_2 = 2\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \frac{2j\delta_e(j\delta_e - \omega) - 2j\delta_e(j\delta_e - \omega) - j\delta_e(2j\delta_e)}{-8j\delta_e^3(j\delta_e - \omega)^2} \quad (\text{A.17a})$$

$$= 2\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \frac{2\delta_e^2}{-8j\delta_e^3(j\delta_e - \omega)^2} \quad (\text{A.17b})$$

$$= \frac{j\Delta\varepsilon\omega_e^2}{2(j\delta_e - \omega)^2}. \quad (\text{A.17c})$$

Das gesuchte Integral berechnet sich somit im Fall 1 zu

$$\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 x \delta_e}{(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4x^2\delta_e^2} \frac{1}{x - \omega} dx = jR_1 + 2jR_2 \quad (\text{A.18a})$$

$$= j \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e \omega}{(\omega - j\delta_e)^2(\omega + j\delta_e)^2} + 2j \frac{j\Delta\varepsilon\omega_e^2}{2(j\delta_e - \omega)^2} \quad (\text{A.18b})$$

$$= \frac{j\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e \omega - \Delta\varepsilon\omega_e^2(\omega + j\delta_e)^2}{(\omega - j\delta_e)^2(\omega + j\delta_e)^2} \quad (\text{A.18c})$$

$$= \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2(\delta_e^2 - \omega^2)}{(\omega - j\delta_e)^2(\omega + j\delta_e)^2}. \quad (\text{A.18d})$$

Unter Berücksichtigung von $\delta_e = \omega_e$ für den betrachteten Fall entspricht der obige Ausdruck genau dem Realteil aus (A.1). Für Fall 1 ist somit gezeigt, dass das Lorentz-Modell den Kramers-Kronig-Beziehungen genügt.

Im nächsten Schritt werden nun die beiden verbleibenden Fälle untersucht. Die relevanten Residuen sind dabei die der Polstellen x_1 , x_2 und x_5 . Diese Residuen werden im Folgenden mit R_1 , R_2 bzw. R_5 bezeichnet, und sie berechnen sich zu

$$R_1 = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1) f(x) = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e x_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)}, \quad (\text{A.19a})$$

$$R_2 = \lim_{x \rightarrow x_2} (x - x_2) f(x) = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e x_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)}, \quad (\text{A.19b})$$

$$R_5 = \lim_{x \rightarrow x_5} (x - x_5) f(x) = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e x_5}{(x_5 - x_1)(x_5 - x_2)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)}, \quad (\text{A.19c})$$

wobei ausgenutzt wurde, dass

$$(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4\delta_e^2 x^2 = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) \quad (\text{A.20})$$

gilt. Wird weiterhin ausgenutzt, dass $x_2 = -x_3$ und $x_5 = -x_4$ gilt, vereinfachen sich R_2 und R_5 zu

$$R_2 = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e x_2}{(x_2 - x_1)(2x_2)(x_2^2 - x_5^2)} = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 \delta_e}{(x_2 - x_1)(x_2^2 - x_5^2)}, \quad (\text{A.21a})$$

$$R_5 = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 2\delta_e x_5}{(x_5 - x_1)(2x_5)(x_5^2 - x_2^2)} = \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 \delta_e}{(x_5 - x_1)(x_5^2 - x_2^2)}. \quad (\text{A.21b})$$

Das Integral (A.3) ist damit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\Delta \varepsilon \omega_e^2 x \delta_e}{(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4x^2 \delta_e^2} \frac{1}{x - \omega} dx \\ & = jR_1 + 2jR_2 + 2jR_5 \end{aligned} \quad (\text{A.22a})$$

$$= \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e x_1}{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_5^2)} + \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e}{(x_2 - x_1)(x_2^2 - x_5^2)} + \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e}{(x_5 - x_1)(x_5^2 - x_2^2)} \quad (\text{A.22b})$$

$$= \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e x_1}{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_5^2)} - \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e}{(x_1 - x_2)(x_2^2 - x_5^2)} + \frac{2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e}{(x_1 - x_5)(x_2^2 - x_5^2)} \quad (\text{A.22c})$$

$$= 2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \frac{x_1(x_2^2 - x_5^2) - (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_5^2) + (x_1 + x_5)(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_5^2)(x_2^2 - x_5^2)} \quad (\text{A.22d})$$

$$= 2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \frac{x_2 x_5^2 - x_2 x_1^2 + x_5 x_1^2 - x_5 x_2^2}{(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 - x_5^2)(x_2^2 - x_5^2)}. \quad (\text{A.22e})$$

Einsetzen der Werte für die Polstellen x_1 , x_2 und x_5 führt auf

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} 2 \frac{\Delta \varepsilon \omega_e^2 x \delta_e}{(\omega_e^2 - x^2)^2 + 4x^2 \delta_e^2} \frac{1}{x - \omega} dx \\ & = 2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \left\{ \frac{(j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})(j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 - (j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})\omega^2}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] \left[(j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 - (j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 \right]} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\left[(j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})\omega^2 - (j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})(j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 \right]}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] \left[(j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 - (j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2})^2 \right]} \right\} \quad (\text{A.23a}) \end{aligned}$$

$$= 2j\Delta\varepsilon\omega_e^2\delta_e \left\{ \frac{[(j\delta_e)^2 - (\omega_e^2 - \delta_e^2)] [j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}] - 2\omega^2 \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] 4j\delta_e \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}} \right. \\ \left. - \frac{[(j\delta_e)^2 - (\omega_e^2 - \delta_e^2)] [j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}]}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] 4j\delta_e \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}} \right\} \quad (\text{A.23b})$$

$$= \Delta\varepsilon\omega_e^2 \frac{\omega_e^2 (j\delta_e + \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}) - \omega_e^2 (j\delta_e - \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}) - 2\omega^2 \sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] 2\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}} \quad (\text{A.23c})$$

$$= \Delta\varepsilon\omega_e^2 \frac{2\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2} (\omega_e^2 - \omega^2)}{[(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2] 2\sqrt{\omega_e^2 - \delta_e^2}} \quad (\text{A.23d})$$

$$= \frac{\Delta\varepsilon\omega_e^2 (\omega_e^2 - \omega^2)}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2\omega^2}. \quad (\text{A.23e})$$

Dies entspricht dem Realteil $\varepsilon'_r(\omega)$ aus (A.1), womit gezeigt ist, dass das Lorentz-Modell auch für Fall 2 und Fall 3 die Kramers-Kronig-Beziehungen erfüllt und somit kausal ist.

Anhang B

Bestimmung der Anregungsvektoren aus der Wellenleiter-Formulierung

An dieser Stelle sollen der konkrete Zusammenhang der Lösungen des Wellenleiter-Eigenwertproblems resultierend aus der Formulierung [FHDE04] und den Anregungsvektoren \mathbf{b}_l aus (4.10) dargelegt werden. Dazu wird zunächst die Potential-Formulierung für die Wellenleiteranalyse kurz vorgestellt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird verlustfreies Materialverhalten in den Wellenleitern vorausgesetzt. Ausgehend von der Divergenzfreiheit der magnetischen Flussdichte \mathbf{B} wird ein magnetisches Vektorpotential \mathbf{A} entsprechend

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (\text{B.1})$$

eingeführt. Wird das Vektorpotential in das Induktionsgesetz (2.3a) eingesetzt, ergibt sich

$$\nabla \times (\mathbf{E} + jk_0c_0\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (\text{B.2})$$

Dies erlaubt die Einführung eines elektrischen Skalarpotentials ϕ entsprechend

$$c_0\nabla\phi = -(\mathbf{E} + jk_0c_0\mathbf{A}). \quad (\text{B.3})$$

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 ergibt sich für die Abhängigkeit entlang der Wellenleiterachse, welche der $\hat{\mathbf{e}}_z$ -Achse entspricht,

$$\phi = V e^{-\gamma z}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_t + A_z \hat{\mathbf{e}}_z) e^{-\gamma z}, \quad (\text{B.4b})$$

wobei \mathbf{A}_t die Komponente in transversaler Richtung und A_z die Komponente in axialer Richtung bezeichnen. Der Differentialoperator ∇ wird entsprechend (3.3) aufgespalten. Weiterhin wird die transversale Komponente \mathbf{A}_t in reine Gradienten $\nabla_t\psi$

und Felder mit nicht verschwindender Rotation \mathbf{A}_t^c zerlegt:

$$\mathbf{A}_t = \nabla\phi + \mathbf{A}_t^c. \quad (\text{B.5})$$

Da bis zu diesem Punkt noch keine Aussagen über die Quellen des magnetischen Vektorpotentials getroffen wurden, wird eine Eichung benötigt. Entsprechend [FHDE04] wird hier die axiale Eichung $A_z = 0$ verwendet. Die magnetische Flussdichte sowie die elektrische Feldstärke lassen sich folgendermaßen durch die eingeführten Potentiale ausdrücken:

$$\mathbf{B} = [\nabla_t \times \mathbf{A}_t^c - \hat{\mathbf{e}}_z \times \gamma (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)] e^{-\gamma z}, \quad (\text{B.6a})$$

$$\mathbf{E} = -j c_0 [\hat{\mathbf{e}}_z \gamma (jV) - \nabla_t (jV) + k_0 (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)] e^{-\gamma z}. \quad (\text{B.6b})$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in den Durchflutungssatz (2.3b) sowie in die Divergenzbedingung für die elektrische Flussdichte (2.3c) führt auf

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \mu_r^{-1} \nabla_t \times \mathbf{A}_t^c - k_0 \varepsilon_r \nabla_t (k_0 \psi - jV) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{A}_t^c \\ = -\gamma^2 [\hat{\mathbf{e}}_z \times \mu_r^{-1} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)], \end{aligned} \quad (\text{B.7a})$$

$$\nabla_t \cdot \varepsilon_r [k_0 \mathbf{A}_t^c + \nabla_t (k_0 \psi - jV)] = \gamma^2 \varepsilon_r jV. \quad (\text{B.7b})$$

Die Randbedingungen auf Γ_E bzw. Γ_H lauten für die Potentiale

$$\left. \begin{array}{l} jV = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{ auf } \Gamma_E, \quad (\text{B.8a})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu_r^{-1} \nabla_t \times \mathbf{A}_t^c = \mathbf{0} \\ \gamma (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \text{ auf } \Gamma_H. \quad (\text{B.8b})$$

Die Gleichungen (B.7) zusammen mit den Randbedingungen (B.8) bilden das kontinuierliche Eigenwertproblem zur Analyse der Wellenleiterstrukturen. Zur Diskretisierung werden FE-Basen der endlich-dimensionalen Unterräume $\mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega_{WL}, \Gamma_E)$ und $\mathcal{V}^1(\Omega_{WL}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_{WL}, \Gamma_E)$ nach [Ing06] konstruiert. Die Potentiale werden entsprechend

$$\mathbf{A}_t^c = \sum_k v_{A_t^c, k} \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL}) \quad (\text{B.9a})$$

$$\psi = \sum_k v_{\psi, k} W_k, \quad W_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}), \quad (\text{B.9b})$$

$$jV = \sum_k v_{jV, k} W_k, \quad W_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL}), \quad (\text{B.9c})$$

diskretisiert. Die Anwendung eines Galerkin-Verfahrens führt auf das diskrete Eigenwertproblem

$$\mathbf{S}_{AV} \mathbf{v}_{AV} = \gamma^2 \mathbf{T}_{AV} \mathbf{v}_{AV} \quad (\text{B.10})$$

mit

$$\mathbf{S}_{AV} = \mathbf{S}_{AV0} + k_0 \mathbf{S}_{AV1} + k_0^2 \mathbf{S}_{AV2} \quad (\text{B.11})$$

und

$$\mathbf{S}_{AV0} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{AA}^\nu & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_{VV}^\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12a})$$

$$\mathbf{S}_{AV1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{AV}^\varepsilon \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{VV}^\varepsilon \\ \mathbf{C}_{AV}^{\varepsilon T} & \mathbf{S}_{VV}^{\varepsilon T} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12b})$$

$$\mathbf{S}_{AV2} = - \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\nu & \mathbf{C}_{AV}^\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{AV}^{\varepsilon T} & \mathbf{S}_{VV}^\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12c})$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{AA}^\nu & \mathbf{B}_{AV}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{AV}^{\nu T} & \mathbf{S}_{VV}^\nu & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{VV}^\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (\text{B.12d})$$

$$\mathbf{v}_{AV} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{A_c^c} \\ \mathbf{v}_\psi \\ \mathbf{v}_{jV} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12e})$$

Die Einträge der auftretenden Matrizen sind

$$S_{AA,ik}^\nu = \int_{\Gamma_P} \nabla_t \times \mathbf{w}_i \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t \times \mathbf{w}_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13a})$$

$$S_{VV,ik}^\nu = \int_{\Gamma_P} \nabla_t W_i \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t W_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13b})$$

$$C_{AV,ik}^\varepsilon = \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \varepsilon_r W_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13c})$$

$$S_{VV,ik}^\varepsilon = \int_{\Gamma_P} \nabla_t W_i \cdot \varepsilon_r \nabla_t W_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13d})$$

$$T_{AA,ik}^\varepsilon = \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \varepsilon_r \mathbf{w}_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13e})$$

$$B_{AV,ik}^\nu = \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t W_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13f})$$

$$T_{AA,ik}^\nu = \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{w}_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13g})$$

$$T_{VV,ik}^\varepsilon = \int_{\Gamma_P} W_i \cdot \varepsilon_r W_k \, d\Gamma, \quad (\text{B.13h})$$

mit $\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_k \in \mathcal{V}^{\text{rot}}(\Omega_{WL})$ sowie $W_i, W_k \in \mathcal{V}^1(\Omega_{WL})$. Wie in [SFDE08] gezeigt wird, führt die obige Formulierung (B.10) auf unphysikalische Nulleigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren können mittels

$$\mathbf{v}_{AV}^N = \mathbf{N}_{AV} \mathbf{v}_\psi, \quad \mathbf{N}_{AV} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ k_0 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

beschrieben werden. Um das Auftreten dieser Lösungen zu verhindern, wird die Orthogonalität der Eigenvektoren bzgl. der Matrix \mathbf{T}_{AV} ausgenutzt, und während des Lösungsprozesses wird die Nebenbedingung

$$\mathbf{N}_{AV}^T \mathbf{T}_{AV} \mathbf{v}_{AV} = \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

eingepreßt. Ausmultipliziert wird diese Bedingung zu

$$k_0 \mathbf{T}_{VV}^\varepsilon \mathbf{v}_{jV} = \mathbf{B}_{AV}^{\nu T} \mathbf{v}_{A_\varepsilon} + \mathbf{S}_{VV}^\nu \mathbf{v}_\psi. \quad (\text{B.16})$$

Bevor aus den Lösungen des Eigenwertproblems die Anregungsvektoren \mathbf{b}_l berechnet werden können, müssen die Eigenvektoren zunächst entsprechend (2.43) normiert werden. Es muss also gelten

$$\int_{\Gamma_P} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \stackrel{!}{=} -1. \quad (\text{B.17})$$

Einsetzen der Ausdrücke für die elektrische Feldstärke (B.6b) und der magnetischen Flussdichte (B.6a) führt auf

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_P} (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \\ &= j c_0 \gamma \int_{\Gamma_P} [(-\nabla_t(jV) + k_0(\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)) \times \mu_r^{-1} \hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.18a})$$

$$\begin{aligned} &= -j c_0 \gamma \int_{\Gamma_P} k_0 \nabla_t \psi \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t \psi - \nabla_t(jV) \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t \psi - \nabla_t(jV) \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{A}_t^c \, d\Gamma \\ &\quad - j c_0 \gamma \int_{\Gamma_P} k_0 \mathbf{A}_t^c \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{A}_t^c + k_0 \nabla_t \psi \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{A}_t^c + k_0 \mathbf{A}_t^c \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t \psi \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.18b})$$

Ein Vergleich mit der Definition der Matrix \mathbf{T}_{AV} sowie die Berücksichtigung von (B.16), führt auf die diskrete Version des obigen Integrals und somit auf den frequenzabhängigen Normierungsfaktor

$$\alpha = j c_0 \gamma k_0 \mathbf{v}_{AV}^T \mathbf{T}_{AV} \mathbf{v}_{AV}. \quad (\text{B.19})$$

Der normierte Eigenvektor hat somit die Form

$$\bar{\mathbf{v}}_{AV} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(k_0)}} \mathbf{v}_{AV}. \quad (\text{B.20})$$

Mittels dieses normierten Eigenvektors kann der Anregungsvektor \mathbf{b}_l berechnet werden. Für dessen i -te Komponente gilt

$$b_{l,i} = \int_{\Gamma_P} (\mathbf{w}_i \times \hat{\mathbf{h}}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (\text{B.21a})$$

$$= -\frac{\gamma}{\mu_0} \int_{\Gamma_P} [\mathbf{w}_i \times \mu_r^{-1} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi)] \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (\text{B.21b})$$

$$= -\frac{\gamma}{\mu_0} \int_{\Gamma_P} (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{w}_i) \cdot \mu_r^{-1} \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{A}_t^c + \nabla_t \psi) \, d\Gamma. \quad (\text{B.21c})$$

Wird weiterhin berücksichtigt, dass $\hat{\mathbf{e}}_z = -\hat{\mathbf{n}}$ ist, so lässt sich der Eintrag $b_{l,i}$ darstellen als

$$b_{l,i} = \frac{\gamma}{\mu_0} \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \mu_r^{-1} \mathbf{A}_t^c \, d\Gamma + \frac{\gamma}{\mu_0} \int_{\Gamma_P} \mathbf{w}_i \cdot \mu_r^{-1} \nabla_t \psi \, d\Gamma. \quad (\text{B.22})$$

Im Folgenden sei die Matrix $\hat{\mathbf{P}}_{2D3D}$ die Matrix, die den Freiheitsgraden des Anregungsproblems (4.10) die entsprechenden Freiheitsgrade des Wellenleiters zuordnet. Damit lässt sich der Vektor \mathbf{b}_l folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathbf{b}_l = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha} \mu_0} \hat{\mathbf{P}}_{2D3D} \mathbf{T}_{AA}^\nu \mathbf{v}_{A_T^c} + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha} \mu_0} \hat{\mathbf{P}}_{2D3D} \mathbf{B}_{AV}^\nu \mathbf{v}_\psi \quad (\text{B.23a})$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha} \mu_0} \hat{\mathbf{P}}_{2D3D} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{AV} \mathbf{v}_{AV} \quad (\text{B.23b})$$

$$= \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha} \mu_0} \mathbf{P}_{2D3D} \mathbf{T}_{AV} \mathbf{v}_{AV}, \quad (\text{B.23c})$$

mit

$$\mathbf{P}_{2D3D} = \hat{\mathbf{P}}_{2D3D} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Ein Vergleich mit der allgemeinen Darstellung (4.13) liefert folgende Identitäten:

$$N_{w,Q} = 1, \quad (\text{B.25a})$$

$$\xi_{w,1} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha(k_0)} \mu_0}, \quad (\text{B.25b})$$

$$\mathbf{Q}_{w,1} = \mathbf{P}_{2D3D} \mathbf{T}_{AV}. \quad (\text{B.25c})$$

Anhang C

Beweis zur Passivität der reduzierten Modelle

An dieser Stelle soll gezeigt werden, dass die Streumatrix nach (5.7) die Bedingungen **Bd. 1 - Bd. 3** erfüllt. Der Übersichtlichkeit halber wird der Ausdruck für die Streumatrix hier noch einmal angegeben:

$$\tilde{\mathbf{S}}(s) = 2s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I}, \quad (\text{C.1})$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_T(s) = & \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{1}{\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1+s\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \\ & + \frac{s^2}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1+s\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta\varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2} \right) \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \\ & + s\mu_0\tilde{\mathbf{D}}_R + s\mu_0 \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} K_{0,n,i_C}}{1+s\tau_{c,n,i_C}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Im Folgenden wird nachgewiesen, dass $\tilde{\mathbf{S}}(s)$ die Bedingungen **Bd. 1 - Bd. 3** erfüllt. Da die Beweise zu den einzelnen Bedingungen teils aufeinander aufbauen, ist es zweckmäßig die Bedingungen in umgekehrter Reihenfolge abzarbeiten:

Beweis von Bd. 3

Es ist zu zeigen, dass

$$\tilde{\mathbf{S}}(\bar{s}) = \overline{\tilde{\mathbf{S}}(s)} \quad (\text{C.3})$$

gilt. Der Term $\tilde{\mathbf{S}}(\bar{s})$ besitzt die Darstellung

$$\tilde{\mathbf{S}}(\bar{s}) = 2\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(\bar{s}) + \bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I}. \quad (\text{C.4})$$

$$(\text{C.5})$$

Dabei ist

$$\tilde{\mathbf{A}}_T(\bar{s}) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\mu_{r,n}(\bar{s})^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} + \bar{s}\kappa_n(\bar{s})\tilde{\mathbf{T}}_{D,n} + \frac{\bar{s}^2}{c_0^2} \varepsilon_{r,n}(\bar{s})\tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right) + \bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{D}}_R. \quad (\text{C.6})$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} & \mu_{r,n}(\bar{s}) \\ &= \mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + \bar{s}\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{m,n,j_L} + \bar{s}^2} \end{aligned} \quad (\text{C.7a})$$

$$= \mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + s\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2} \quad (\text{C.7b})$$

$$= \mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \overline{\left(\frac{F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + s\tau_{m,n,j_D}} \right)} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \overline{\left(\frac{F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2} \right)} \quad (\text{C.7c})$$

$$= \overline{\mu_{r,n}(s)} \quad (\text{C.7d})$$

sowie

$$\kappa_n(\bar{s}) = \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + \bar{s}\tau_{c,n,i_C}} = \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + s\tau_{c,n,i_C}} = \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \overline{\left(\frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + s\tau_{c,n,i_C}} \right)} \quad (\text{C.8a})$$

$$= \overline{\kappa_n(s)}, \quad (\text{C.8b})$$

$$(\text{C.8c})$$

und

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{r,n}(\bar{s}) \\ &= \varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D} \Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + \bar{s}\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L} \Delta\varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{e,n,i_L} + \bar{s}^2} \end{aligned} \quad (\text{C.9a})$$

$$= \varepsilon_{\infty, n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD, n}} \frac{G_{D, n, i_D} \Delta \varepsilon_{D, n, i_D}}{1 + s \tau_{e, n, i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL, n}} \frac{G_{L, n, i_L} \Delta \varepsilon_{L, n, i_L} \omega_{e, n, i_L}^2}{\omega_{e, n, i_L}^2 + 2s \delta_{e, n, i_L} + s^2} \quad (\text{C.9b})$$

$$= \varepsilon_{\infty, n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD, n}} \overline{\left(\frac{G_{D, n, i_D} \Delta \varepsilon_{D, n, i_D}}{1 + s \tau_{e, n, i_D}} \right)} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL, n}} \overline{\left(\frac{G_{L, n, i_L} \Delta \varepsilon_{L, n, i_L} \omega_{e, n, i_L}^2}{\omega_{e, n, i_L}^2 + 2s \delta_{e, n, i_L} + s^2} \right)} \quad (\text{C.9c})$$

$$= \overline{\varepsilon_{r, n}(s)} \quad (\text{C.9d})$$

lässt sich $\tilde{\mathbf{A}}_T(\bar{s})$ schreiben als

$$\tilde{\mathbf{A}}_T(\bar{s}) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\overline{\mu_{r, n}(s)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu, n} + s \kappa_n(s) \tilde{\mathbf{T}}_{D, n} + \frac{s^2}{c_0^2} \varepsilon_{r, n}(s) \tilde{\mathbf{T}}_{D, n}} \right) + \overline{s \mu_0 \tilde{\mathbf{D}}_R}. \quad (\text{C.10})$$

Unter der Bedingung, dass alle auftretenden Matrizen reellwertig sind, gilt

$$\tilde{\mathbf{A}}_T(\bar{s}) = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \overline{\left(\mu_{r, n}(s)^{-1} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu, n} + s \kappa_n(s) \tilde{\mathbf{T}}_{D, n} + \frac{s^2}{c_0^2} \varepsilon_{r, n}(s) \tilde{\mathbf{T}}_{D, n} \right)} + \overline{s \mu_0 \tilde{\mathbf{D}}_R} \quad (\text{C.11})$$

$$= \overline{\tilde{\mathbf{A}}_T(s)}, \quad (\text{C.12})$$

und damit auch

$$\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(\bar{s}) = \overline{\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(s)}. \quad (\text{C.13})$$

Die Bedingung, dass die Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu, n}$, $\tilde{\mathbf{T}}_{D, n}$, $\tilde{\mathbf{D}}_R$ reellwertig sein müssen, wird durch die Verwendung einer reellwertigen Projektionsmatrix erreicht. Die Einträge der zugrunde liegenden FE-Matrizen sind entsprechend (4.11) und (4.12) bereits reellwertig. Wird die komplexwertige Projektionsmatrix nach (5.9) in Real- und Imaginärteil aufgespalten, ist (C.13) gültig. An dieser Stelle wird auch deutlich, dass die Bedingung der Reellwertigkeit der Matrizen eine notwendige Bedingung zur Erfüllung der Bedingung **Bd. 3** ist. Wird außerdem berücksichtigt, dass die Anregung hier ausschließlich mit TEM Moden erfolgt, und \mathbf{B} und somit auch $\tilde{\mathbf{B}}_T$ reellwertig sind, ergibt sich der gesuchte Zusammenhang

$$\tilde{\mathbf{S}}(\bar{s}) = 2\bar{s} \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(\bar{s}) + \bar{s} \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I} \quad (\text{C.14a})$$

$$= 2\bar{s} \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\overline{\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(s)} + \overline{s \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T} \right) \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I} \quad (\text{C.14b})$$

$$= 2s \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T^{-1}(s) + s \mu_0 \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I} \quad (\text{C.14c})$$

$$= \overline{\tilde{\mathbf{S}}(s)}. \quad (\text{C.14d})$$

□

Beweis von Bd. 2

Es soll gezeigt werden, dass die Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s)$ positiv semi-definit für alle s mit positivem Realteil ist. Es muss also gelten

$$\mathbf{x}^* \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^*(s)\tilde{\mathbf{S}}(s) \right) \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}, \forall s \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (\text{C.15})$$

Wird berücksichtigt, dass die Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ reellwertig ist, ergibt sich $\tilde{\mathbf{S}}^*(s)$ zu

$$\tilde{\mathbf{S}}^*(s) = 2\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T^*(s) + \bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I} \quad (\text{C.16})$$

$$= 2\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-*} \tilde{\mathbf{B}}_T - \mathbf{I}. \quad (\text{C.17})$$

Wird dieser Ausdruck in (C.15) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^* \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^*(s)\tilde{\mathbf{S}}(s) \right) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^* \left[-4s\bar{s}\mu_0^2\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-*} \tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T \right. \\ & \quad + 2\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-*} \tilde{\mathbf{B}}_T \\ & \quad \left. + 2s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T^T \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T + \mathbf{I} - \mathbf{I} \right] \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Wird nun der Vektor

$$\mathbf{y} = \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_T \mathbf{x} \quad (\text{C.19})$$

eingeführt, so gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^* \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^*(s)\tilde{\mathbf{S}}(s) \right) \mathbf{x} \\ &= \mathbf{y}^* \left[-4s\bar{s}\mu_0^2\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T + 2\bar{s}\mu_0 \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \right. \\ & \quad \left. + 2s\mu_0 \left(\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + s\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T \right)^* \right] \mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$= \mathbf{y}^* \left[2\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{A}}_T(s) + 2s\mu_0\tilde{\mathbf{A}}_T^*(s) \right] \mathbf{y} \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{y}^* \left[2\bar{s}\mu_0 \left(s\mu_0\tilde{\mathbf{D}}_R + \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \mu_{r,n}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} + \frac{s^2}{c_0^2}\varepsilon_{r,n}(s)\tilde{\mathbf{T}}_{D,n} + s\mu_0\kappa_n(s)\tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2s\mu_0 \left(\bar{s}\mu_0\tilde{\mathbf{D}}_R^* + \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \mu_{r,n}^{-1}(\bar{s})\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}^* + \frac{\bar{s}^2}{c_0^2}\varepsilon_{r,n}(\bar{s})\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}^* + \bar{s}\mu_0\kappa_n(\bar{s})\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}^* \right) \right] \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Unter Beachtung der Reellwertigkeit sowie der Symmetrie der Matrizen $\tilde{\mathbf{D}}_R$, $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$, und $\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}$ führt dies auf

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^*(s) \tilde{\mathbf{S}}(s) \right) \mathbf{x} &= 4s\bar{s}\mu_0^2 \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left[2\mu_0 \left(\bar{s}\mu_{r,n}^{-1}(s) + s\mu_{r,n}^{-1}(\bar{s}) \right) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{y} \right. \\ &\quad \left. + 4s\bar{s}\mu_0^2 \left(\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s}) \right) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} + \frac{2\mu_0 s \bar{s}}{c_0^2} \left(s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s}) \right) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Die Summanden der obigen Gleichung werden nun näher untersucht: Die FE-Matrix \mathbf{D}_R ist nach (4.12) positiv semi-definit. Aufgrund der Projektion nach (4.35) erbt $\tilde{\mathbf{D}}_R$ diese Eigenschaft. Es gilt also

$$4s\bar{s}\mu_0^2 \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{y} = 4|s|^2 \mu_0^2 \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{D}}_R \mathbf{y} \geq 0. \quad (\text{C.24})$$

Im nächsten Schritt wird der Term $\bar{s}\mu_{r,n}^{-1}(s) + s\mu_{r,n}^{-1}(\bar{s})$ näher analysiert: Unter Verwendung von (C.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{s}\mu_{r,n}^{-1}(s) + s\mu_{r,n}^{-1}(\bar{s}) &= \frac{\bar{s}\mu_{r,n}(\bar{s}) + s\mu_{r,n}(s)}{\mu_{r,n}(s)\mu_{r,n}(\bar{s})} = \frac{\bar{s}\mu_{r,n}(\bar{s}) + s\mu_{r,n}(s)}{\mu_{r,n}(s)\mu_{r,n}(s)} \\ &= \frac{\bar{s}\mu_{r,n}(\bar{s}) + s\mu_{r,n}(s)}{|\mu_{r,n}(s)|^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Da der Nenner des obigen Ausdrucks positiv ist, wird im Folgenden lediglich der Zähler betrachtet. Für diesen gilt

$$\begin{aligned} &\bar{s}\mu_{r,n}(\bar{s}) + s\mu_{r,n}(s) \\ &= \bar{s}\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{\bar{s}F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + \bar{s}\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{\bar{s}F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{m,n,j_L} + \bar{s}^2} \\ &\quad + s\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{sF_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + s\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{sF_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

$$\begin{aligned} &= (\bar{s} + s)\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \left(\frac{\bar{s}F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + \bar{s}\tau_{m,n,j_D}} + \frac{sF_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + s\tau_{m,n,j_D}} \right) \\ &\quad + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \left(\frac{\bar{s}F_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{m,n,j_L} + \bar{s}^2} + \frac{sF_{L,n,j_L} \Delta\mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Mit $s = \sigma + j\omega$, $\sigma > 0$ nach Voraussetzung, folgt für die einzelnen Summanden der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} &(\bar{s} + s)\mu_{\infty,n} = 2\sigma\mu_{\infty,n} > 0, \quad (\text{C.28a}) \\ &\frac{\bar{s}F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + \bar{s}\tau_{m,n,j_D}} + \frac{sF_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D}}{1 + s\tau_{m,n,j_D}} = F_{D,n,j_D} \Delta\mu_{D,n,j_D} \frac{\bar{s} + s + 2\bar{s}s\tau_{m,n,j_D}}{|1 + s\tau_{m,n,j_D}|^2} \end{aligned}$$

$$= F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D} \frac{2\sigma + 2|s|^2 \tau_{m,n,j_D}}{|1 + s\tau_{m,n,j_D}|^2} > 0, \quad (\text{C.28b})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{s} F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{m,n,j_L} + \bar{s}^2} + \frac{s F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2} \\ &= F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2 \frac{(\bar{s} + s)\omega_{m,n,j_L}^2 + 4\bar{s}s\delta_{m,n,j_L} + \bar{s}s(\bar{s} + s)}{|\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2|^2} \end{aligned} \quad (\text{C.28c})$$

$$= F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2 \frac{2\sigma\omega_{m,n,j_L}^2 + 4|s|^2\delta_{m,n,j_L} + |s|^2 2\sigma}{|\omega_{m,n,j_L}^2 + 2s\delta_{m,n,j_L} + s^2|^2} > 0. \quad (\text{C.28d})$$

Damit ist gezeigt, dass (C.27) eine Summe über positive Werte und somit auch positiv ist. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$\bar{s}\mu_{r,n}^{-1}(s) + s\mu_{r,n}^{-1}(\bar{s}) > 0 \quad (\text{C.29})$$

gilt und da $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$ positiv semi-definit ist, gilt zudem

$$(\bar{s}\mu_{r,n}^{-1}(s) + s\mu_{r,n}^{-1}(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{y} \geq 0. \quad (\text{C.30})$$

Der nächste Summand aus (C.23), der analysiert wird, ist

$$4s\bar{s}\mu_0^2 (\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} = 4|s|^2 \mu_0^2 (\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y}. \quad (\text{C.31})$$

Da auch $\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}$ positiv semi-definit ist, muss lediglich $\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s})$ untersucht werden. Es gilt

$$\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s}) = \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + s\tau_{c,n,i_C}} + \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C}}{1 + \bar{s}\tau_{c,n,i_C}} \quad (\text{C.32a})$$

$$= \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \frac{1 + \bar{s}\tau_{c,n,i_C} + 1 + s\tau_{c,n,i_C}}{|1 + s\tau_{c,n,i_C}|^2} \quad (\text{C.32b})$$

$$= \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \frac{2 + 2\sigma\tau_{c,n,i_C}}{|1 + s\tau_{c,n,i_C}|^2} > 0. \quad (\text{C.32c})$$

Somit ist gezeigt, dass

$$4s\bar{s}\mu_0^2 (\kappa_n(s) + \kappa_n(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} \geq 0 \quad (\text{C.33})$$

ist. Der letzte zu untersuchende Term aus (C.23) ist

$$\frac{2\mu_0 s \bar{s}}{c_0^2} (s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} = \frac{2\mu_0 |s|^2}{c_0^2} (s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y}. \quad (\text{C.34})$$

Abgesehen von $(s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s}))$ sind alle Faktoren offensichtlich nicht-negativ. Außerdem gilt

$$s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s}) = s\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{sG_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + s\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{sG_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2} + \bar{s}\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{\bar{s}G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + \bar{s}\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{\bar{s}G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{e,n,i_L} + \bar{s}^2} \quad (\text{C.35a})$$

$$= (s + \bar{s})\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{sG_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + s\tau_{e,n,i_D}} + \frac{\bar{s}G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + \bar{s}\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{sG_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2} + \frac{\bar{s}G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{e,n,i_L} + \bar{s}^2}. \quad (\text{C.35b})$$

Wird an dieser Stelle wieder $s = \sigma + j\omega$, $\sigma > 0$ gesetzt, gilt für die einzelnen Summanden

$$(s + \bar{s})\varepsilon_{\infty,n} = 2\sigma\varepsilon_{\infty,n} > 0, \quad (\text{C.35c})$$

$$\frac{sG_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + s\tau_{e,n,i_D}} + \frac{\bar{s}G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + \bar{s}\tau_{e,n,i_D}} = G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D} \frac{s + 2\bar{s}\tau_{e,n,i_D} + \bar{s}}{|1 + s\tau_{e,n,i_D}|^2} = G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D} \frac{2\sigma + 2|s|^2\tau_{e,n,i_D}}{|1 + s\tau_{e,n,i_D}|^2} > 0 \quad (\text{C.35d})$$

sowie

$$\frac{sG_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2} + \frac{\bar{s}G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\bar{s}\delta_{e,n,i_L} + \bar{s}^2} = \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2 \frac{(s + \bar{s})\omega_{e,n,i_L}^2 + 4\bar{s}s\delta_{e,n,i_L} + s\bar{s}(s + \bar{s})}{|\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2|^2} \quad (\text{C.35e})$$

$$= \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2 \frac{2\sigma\omega_{e,n,i_L}^2 + 4|s|^2\delta_{e,n,i_L} + |s|^2 2\sigma}{|\omega_{e,n,i_L}^2 + 2s\delta_{e,n,i_L} + s^2|^2} > 0. \quad (\text{C.35f})$$

Die rechte Seite von (C.35b) stellt somit eine Summe über positive Zahlen dar, und somit ist auch $s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s})$ positiv. Daraus folgt unmittelbar

$$\frac{2\mu_0\bar{s}}{c_0^2} (s\varepsilon_{r,n}(s) + \bar{s}\varepsilon_{r,n}(\bar{s})) \mathbf{y}^* \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{y} \geq 0. \quad (\text{C.36})$$

Somit ist gezeigt, dass (C.23) eine Summe über nicht-negative Terme darstellt, weshalb die Summe ebenfalls nicht-negativ sein muss. Es gilt also

$$\mathbf{x}^* \left(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{S}}^*(s)\tilde{\mathbf{S}}(s) \right) \mathbf{x} \geq 0. \quad (\text{C.37})$$

Da bei der Wahl der Vektoren \mathbf{x} keine Einschränkung getroffen wurde, ist (C.37) für alle Vektoren \mathbf{x} gültig, und somit wurde die Bedingung **Bd. 2** bewiesen. \square

Beweis von Bd. 1

Zum Abschluss soll gezeigt werden, dass jedes Element von $\tilde{\mathbf{S}}(s)$ analytisch für $\text{Re}(s) > 0$ ist. Unter Berücksichtigung von (C.1) und der Tatsache, dass $\tilde{\mathbf{B}}_T$ konstant ist, muss also gezeigt werden, dass die Eigenwerte λ der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_T(\lambda) + \lambda\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T$ einen nicht-positiven Realteil aufweisen. Für die Eigenwerte λ und den zugehörigen Eigenvektor \mathbf{v} gilt

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_T(\lambda) + \lambda\mu_0\tilde{\mathbf{B}}_T\tilde{\mathbf{B}}_T^T\right)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.38})$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_T(\lambda) = & \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{1}{\mu_{\infty,n} + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} \frac{F_{D,n,j_D}\Delta\mu_{D,n,j_D}}{1+\lambda\tau_{m,n,j_D}} + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} \frac{F_{L,n,j_L}\Delta\mu_{L,n,j_L}\omega_{m,n,j_L}^2}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\lambda\delta_{m,n,j_L} + \lambda^2}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \\ & + \frac{\lambda^2}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \left(\varepsilon_{\infty,n} + \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} \frac{G_{D,n,i_D}\Delta\varepsilon_{D,n,i_D}}{1 + \lambda\tau_{e,n,i_D}} + \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} \frac{G_{L,n,i_L}\Delta\varepsilon_{L,n,i_L}\omega_{e,n,i_L}^2}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\lambda\delta_{e,n,i_L} + \lambda^2} \right) \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \\ & + \lambda\mu_0\tilde{\mathbf{D}}_R + \lambda\mu_0 \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} \frac{G_{c,n,i_C}\kappa_{0,n,i_C}}{1 + \lambda\tau_{c,n,i_C}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt wird ein Eigenwertproblem der Form

$$\mathbf{M}_1\mathbf{v}_0 + \lambda(\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3)\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \quad (\text{C.40})$$

mit $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}$, symmetrisch positiv semi-definit und $\mathbf{M}_3 = -\mathbf{M}_3^*$ betrachtet. Es wird gezeigt, dass die Eigenwerte des Eigenwertproblems (C.40) einen nicht-positiven Realteil aufweisen. Der zweite Schritt des Beweises besteht darin, (C.38) auf die Form (C.40) zu bringen und somit zu zeigen, dass die zugehörigen Eigenwerte ebenfalls einen nicht-positiven Realteil besitzen. Im weiteren Verlauf dieses Beweises werden Eigenwerte $\lambda = 0$ ausgeschlossen. Diese haben offensichtlich einen nicht-positiven Realteil und müssen daher nicht näher betrachtet werden.

Um die Eigenwerte von (C.40) zu analysieren, wird die Gleichung von links mit \mathbf{v}_0^* multipliziert. Dies führt auf

$$m_1 + \lambda m_2 + \lambda m_3 = 0 \quad (\text{C.41})$$

mit

$$m_i = \mathbf{v}_0^* \mathbf{M}_i \mathbf{v}_0. \quad (\text{C.42})$$

Entsprechend den Eigenschaften der Matrizen gilt $m_1 \geq 0$, und $m_2 \geq 0$. Außerdem gilt

$$\bar{m}_3 = m_3^* = \mathbf{v}_0^* \mathbf{M}_3^* \mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_0^* \mathbf{M}_3 \mathbf{v}_0 = -m_3. \quad (\text{C.43})$$

Daraus folgt, dass m_3 rein imaginär ist und somit als $m_3 = j\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, dargestellt werden kann. Auflösen von (C.41) nach λ führt auf

$$\lambda = -\frac{m_1}{m_2 + m_3} = -\frac{m_1}{m_2 + j\alpha} = -\frac{m_1 m_2}{|m_2 + j\alpha|^2} + j\frac{m_1 \alpha}{|m_2 + j\alpha|^2}. \quad (\text{C.44})$$

Der Realteil von λ entspricht dem ersten Summanden des Terms auf der rechten Seite. Dieser ist mit den gegebenen Eigenschaften der Matrizen endlich und nicht-positiv. Damit ist der erste Schritt des Beweises abgeschlossen.

Im Folgenden wird (C.38) durch Wahl geeigneter Hilfsvektoren auf die Form (C.40) gebracht. Da die Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$ und $\tilde{\mathbf{T}}_{D,n}$ keinen vollen Rang besitzen, werden zu jedem Eigenvektor \mathbf{v} aus (C.38) die folgenden Mengen eingeführt:

$$K_S(\mathbf{v}) := \left\{ n \in [1, \dots, N_{Mat}] \mid \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \right\}, \quad (\text{C.45a})$$

$$K_T(\mathbf{v}) := \left\{ n \in [1, \dots, N_{Mat}] \mid \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \right\}. \quad (\text{C.45b})$$

Da die Matrix

$$\tilde{\mathbf{T}}_{S,D} = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}, \quad (\text{C.46})$$

vollen Rang hat, ist die Menge $K_T(\mathbf{v})$ niemals leer. Im Gegensatz dazu ist $\sum_{n=1}^{N_{Mat}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$ nicht von vollem Rang und somit kann $K_S(\mathbf{v})$ die leere Menge sein. Nach diesen Überlegungen werden folgende Hilfsvektoren definiert:

$$\mathbf{z}^p = \lambda \mathbf{v}, \quad (\text{C.47a})$$

$$\mathbf{z}_{Dr,n,i_C}^p = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^2 \tau_{c,n,i_C}} \mathbf{v}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), i_C \in [1, \dots, N_{Dr,n}], \quad (\text{C.47b})$$

$$\mathbf{p}_{Dr,n,i_C}^p = \lambda \mathbf{z}_{Dr,n,i_C}^p, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), i_C \in [1, \dots, N_{Dr,n}], \quad (\text{C.47c})$$

$$\mathbf{z}_{eD,n,i_D}^p = \frac{\lambda}{1 + \lambda \tau_{e,n,i_D}} \mathbf{v}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), i_D \in [1, \dots, N_{eD,n}], \quad (\text{C.47d})$$

$$\mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p = \frac{\lambda}{\omega_{e,n,i_L}^2 + 2\lambda \delta_{e,n,i_L} + \lambda^2} \mathbf{v}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}], \quad (\text{C.47e})$$

$$\mathbf{p}_{eL,n,i_L}^p = \lambda \mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}], \quad (\text{C.47f})$$

$$\mathbf{z}_{m,n}^p = \frac{\lambda}{\lambda^2} \mu_{r,n}^{-1}(\lambda) \mathbf{v}, \quad n \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.47g})$$

$$\mathbf{p}_{m,n}^p = \lambda \mathbf{z}_{m,n}^p, \quad n \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.47h})$$

$$\mathbf{p}_{mD,n,j_D}^p = \frac{\lambda}{1 + \lambda \tau_{m,n,j_D}} \mathbf{z}_m^p, \quad n \in K_S(\mathbf{v}), j_D \in [1, \dots, N_{mD,n}], \quad (\text{C.47i})$$

$$\mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p = \frac{\lambda}{\omega_{m,n,j_L}^2 + 2\lambda \delta_{m,n,j_L} + \lambda^2} \mathbf{z}_m^p, \quad n \in K_S(\mathbf{v}), j_L \in [1, \dots, N_{mL,n}], \quad (\text{C.47j})$$

$$\mathbf{q}_{mL,n,j_L}^p = \lambda \mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p, \quad n \in K_S(\mathbf{v}), j_L \in [1, \dots, N_{mL,n}]. \quad (\text{C.47k})$$

Mittels dieser Definitionen lässt sich (C.40) darstellen als

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \varepsilon_{\infty,n} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}^p + \frac{\lambda}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_D=1}^{N_{eD,n}} G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}_{eD,n,i_D}^p \\
& + \frac{\lambda}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_L=1}^{N_{eL,n}} G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2 \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p + \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{z}_{m,n}^p \\
& + \lambda \mu_0 \left(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \mathbf{v} + \lambda \mu_0 \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \sum_{i_C=1}^{N_{Dr,n}} G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}_{Dr,n,i_C}^p = \mathbf{0}. \quad (\text{C.48})
\end{aligned}$$

Weiterhin führt das Umformen der Gleichungen (C.47) auf

$$\sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{\varepsilon_{\infty,n}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}^p - \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{\varepsilon_{\infty,n}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49a})$$

$$\mu_0 G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \left(\lambda \mathbf{z}_{Dr,n,i_C}^p + \lambda \tau_{c,n,i_C} \mathbf{p}_{Dr,n,i_C}^p - \lambda \mathbf{v} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49b})$$

$$\mu_0 G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \tau_{c,n,i_C} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \left(\mathbf{p}_{Dr,n,i_C}^p - \lambda \mathbf{z}_{Dr,n,i_C}^p \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49c})$$

$$\frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \left(\mathbf{z}_{eD,n,i_D}^p + \lambda \tau_{e,n,i_D} \mathbf{z}_{eD,n,i_D}^p - \lambda \mathbf{v} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49d})$$

$$\begin{aligned}
& \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \left(\omega_{e,n,i_L}^2 \mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p + 2\lambda \delta_{e,n,i_L} \mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p \right. \\
& \left. + \lambda \mathbf{p}_{eL,n,i_L}^p - \lambda \mathbf{v} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49e})
\end{aligned}$$

$$\frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \left(\mathbf{p}_{eL,n,i_L}^p - \lambda \mathbf{z}_{eL,n,i_L}^p \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49f})$$

$$\begin{aligned}
& \lambda \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \left(\mu_{\infty,n} \mathbf{p}_{m,n}^p + \sum_{j_D=1}^{N_{mD,n}} F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D} \mathbf{p}_{mD,n,j_D}^p \right. \\
& \left. + \sum_{j_L=1}^{N_{mL,n}} F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2 \mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p - \mathbf{v} \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49g})
\end{aligned}$$

$$\mu_{\infty,n} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{p}_{m,n}^p - \lambda \mu_{\infty,n} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{z}_{m,n}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49h})$$

$$F_{D,n,j_D} \Delta \mu_{D,n,j_D} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \left(\mathbf{p}_{mD,n,j_D}^p + \lambda \tau_{m,n,j_D} \mathbf{p}_{mD,n,j_D}^p - \lambda \mathbf{z}_{m,n}^p \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49i})$$

$$\begin{aligned}
& F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \left(\omega_{m,n,j_L}^2 \mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p + 2\lambda \delta_{m,n,j_L} \mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p \right. \\
& \left. + \lambda \mathbf{q}_{mL,n,j_L}^p - \lambda \mathbf{z}_{m,n}^p \right) = \mathbf{0}, \quad (\text{C.49j})
\end{aligned}$$

$$F_{L,n,j_L} \Delta \mu_{L,n,j_L} \omega_{m,n,j_L}^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \left(\mathbf{q}_{mL,n,j_L}^p - \lambda \mathbf{p}_{mL,n,j_L}^p \right) = \mathbf{0}. \quad (\text{C.49k})$$

Die Multiplikation der Gleichungen (C.47) mit den singulären Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$, $\mathbf{T}_{D,n}$ ist deshalb zulässig, da $n \in K_S(\mathbf{v})$ bzw. $n \in K_T(\mathbf{v})$ gilt. Es wird also nur jene Matrizen vormultipliziert, deren Produkt mit \mathbf{v} nicht verschwindet. Da zusätzlich die Hilfsvektoren aus (C.47) alle parallel zu \mathbf{v} liegen, befinden sich auch diese Hilfsvektoren nicht im Nullraum der Matrizen $\tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n}$ und $\mathbf{T}_{D,n}$. Somit ist sichergestellt, dass

die Gleichungen (C.49) äquivalent zu (C.47) sind. Zur kompakteren Darstellung der Gleichungen (C.48) und (C.49) werden folgende Matrizen bzw. Vektoren definiert:

$$\mathbf{z}_{Dr,n}^p = \left[(\mathbf{z}_{Dr,n,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{Dr,n,N_{Dr,n}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50a})$$

$$\mathbf{p}_{Dr,n}^p = \left[(\mathbf{p}_{Dr,n,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{Dr,n,N_{Dr,n}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50b})$$

$$\mathbf{z}_{eD,n}^p = \left[(\mathbf{z}_{eD,n,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{eD,n,N_{eD,n}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50c})$$

$$\mathbf{z}_{eL,n}^p = \left[(\mathbf{z}_{eL,n,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{eL,n,N_{eL,n}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50d})$$

$$\mathbf{p}_{eL,l}^p = \left[(\mathbf{p}_{eL,l,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{eL,l,N_{eL,l}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50e})$$

$$\mathbf{p}_{mD,l}^p = \left[(\mathbf{p}_{mD,l,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{mD,l,N_{mD,l}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50f})$$

$$\mathbf{p}_{mL,l}^p = \left[(\mathbf{p}_{mL,l,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{mL,l,N_{mL,l}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50g})$$

$$\mathbf{q}_{mL,l}^p = \left[(\mathbf{q}_{mL,l,1}^p)^T \cdots (\mathbf{q}_{mL,l,N_{mL,l}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.50h})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{C,n}^p = \mu_0 \left[G_{c,n,1} \kappa_{0,n,1} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \cdots G_{c,n,N_{Dr,n}} \kappa_{0,n,N_{Dr,n}} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right], \quad (\text{C.50i})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{D,n}^p = \left[\frac{G_{D,n,1} \Delta \varepsilon_{D,n,1}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \cdots \frac{G_{D,n,N_{eD,n}} \Delta \varepsilon_{D,n,N_{eD,n}}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right], \quad (\text{C.50j})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_{L,n}^p = \left[\frac{G_{L,n,1} \Delta \varepsilon_{L,n,1} \omega_{e,n,1}^2}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \cdots \frac{G_{L,n,N_{eL,n}} \Delta \varepsilon_{L,n,N_{eL,n}} \omega_{e,n,N_{eL,n}}^2}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right], \quad (\text{C.50k})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{D,l}^p = \left[F_{D,l,1} \Delta \mu_{D,l,1} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \cdots F_{D,l,N_{mD,l}} \Delta \mu_{D,l,N_{mD,l}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \right], \quad (\text{C.50l})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{L,l}^p = \left[F_{L,l,1} \Delta \mu_{L,l,1} \omega_{m,l,1}^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \cdots F_{L,l,N_{mL,l}} \Delta \mu_{L,l,N_{mL,l}} \omega_{m,l,N_{mL,l}}^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \right], \quad (\text{C.50m})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{C,n}^p = \text{diag}\{\mu_0 G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}\}, \quad i_C \in [1, \dots, N_{Dr,n}], \quad (\text{C.50n})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{C,n}^{p,\tau} = \text{diag}\{\mu_0 G_{c,n,i_C} \kappa_{0,n,i_C} \tau_{c,n,i_C} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}\}, \quad i_C \in [1, \dots, N_{Dr,n}], \quad (\text{C.50o})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{D,n}^p = \text{diag}\left\{ \frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right\}, \quad i_D \in [1, \dots, N_{eD,n}], \quad (\text{C.50p})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{D,n}^{p,\tau} = \text{diag}\left\{ \frac{G_{D,n,i_D} \Delta \varepsilon_{D,n,i_D} \tau_{e,n,i_D}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right\}, \quad i_D \in [1, \dots, N_{eD,n}], \quad (\text{C.50q})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^p = \text{diag}\left\{ \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right\}, \quad i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}], \quad (\text{C.50r})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\delta} = \text{diag}\left\{ \frac{2G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^2 \delta_{e,n,i_L}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right\}, \quad i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}], \quad (\text{C.50s})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\omega} = \text{diag}\left\{ \frac{G_{L,n,i_L} \Delta \varepsilon_{L,n,i_L} \omega_{e,n,i_L}^4}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \right\}, \quad i_L \in [1, \dots, N_{eL,n}], \quad (\text{C.50t})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{D,l}^p = \text{diag}\{F_{D,l,j_D} \Delta \mu_{D,l,j_D} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l}\}, \quad j_D \in [1, \dots, N_{mD,l}], \quad (\text{C.50u})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{D,l}^{p,\tau} = \text{diag}\{F_{D,l,j_D} \Delta \mu_{D,l,j_D} \tau_{m,l,j_D} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l}\}, \quad j_D \in [1, \dots, N_{mD,l}], \quad (\text{C.50v})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^p = \text{diag}\{F_{L,l,j_L} \Delta\mu_{L,l,j_L} \omega_{m,l,j_L}^2 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l}\}, \quad j_L \in [1, \dots, N_{mL,l}], \quad (\text{C.50w})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\delta} = \text{diag}\{2F_{L,l,j_L} \Delta\mu_{L,l,j_L} \omega_{m,l,j_L}^2 \delta_{m,l,j_L} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l}\}, \quad j_L \in [1, \dots, N_{mL,l}], \quad (\text{C.50x})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\omega} = \text{diag}\{F_{L,l,j_L} \Delta\mu_{L,l,j_L} \omega_{m,l,j_L}^4 \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l}\}, \quad j_L \in [1, \dots, N_{mL,l}], \quad (\text{C.50y})$$

wobei $n \in K_T(\mathbf{v})$, sowie $l \in K_S(\mathbf{v})$ gilt. Dadurch vereinfacht sich (C.48) zu

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{c_0^2} \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \varepsilon_{\infty,n} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}^p + \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \hat{\mathbf{T}}_{D,n}^p \mathbf{z}_{eD,n}^p + \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \hat{\mathbf{T}}_{L,n}^p \mathbf{z}_{eL,n}^p \\ & + \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,n} \mathbf{z}_{m,n}^p + \lambda \mu_0 \left(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T \right) \mathbf{v} + \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \hat{\mathbf{T}}_{C,n}^p \mathbf{z}_{Dr,n}^p = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

Weiterhin transformieren sich die Gleichungen (C.49) zu

$$\sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{\varepsilon_{\infty,n}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{z}^p - \lambda \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{\varepsilon_{\infty,n}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52a})$$

$$\lambda \bar{\mathbf{T}}_{C,n}^p \mathbf{z}_{Dr,n}^p + \lambda \bar{\mathbf{T}}_{C,n}^{p,\tau} \mathbf{p}_{Dr,n}^p - \lambda (\hat{\mathbf{T}}_{C,n}^p)^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52b})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{C,n}^{p,\tau} \mathbf{p}_{Dr,n}^p - \lambda \bar{\mathbf{T}}_{C,n}^{p,\tau} \mathbf{z}_{Dr,n}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52c})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{D,n}^p \mathbf{z}_{eD,n}^p + \lambda \bar{\mathbf{T}}_{D,n}^{p,\tau} \mathbf{z}_{eD,n}^p - \lambda (\hat{\mathbf{T}}_{D,n}^p)^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52d})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\omega} \mathbf{z}_{eL,n}^p + \lambda \bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\delta} \mathbf{z}_{eL,n}^p + \lambda \bar{\mathbf{T}}_{L,n}^p \mathbf{p}_{eL,n}^p - \lambda (\hat{\mathbf{T}}_{L,n}^p)^T \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52e})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^p \mathbf{p}_{eL,n}^p - \lambda \bar{\mathbf{T}}_{L,n}^p \mathbf{z}_{eL,n}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52f})$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \mu_{\infty,l} \mathbf{p}_{m,l}^p + \lambda \hat{\mathbf{S}}_{D,l}^p \mathbf{p}_{mD,l}^p + \lambda \hat{\mathbf{S}}_{L,l}^p \mathbf{p}_{mL,l}^p - \lambda \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52g})$$

$$\mu_{\infty,l} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \mathbf{p}_{m,l}^p - \lambda \mu_{\infty,l} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,l} \mathbf{z}_{m,l}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52h})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{D,l}^p \mathbf{p}_{mD,l}^p + \lambda \bar{\mathbf{S}}_{D,l}^{p,\tau} \mathbf{p}_{mD,l}^p - \lambda (\hat{\mathbf{S}}_{D,l}^p)^T \mathbf{z}_{m,l}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52i})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\omega} \mathbf{p}_{mL,l}^p + \lambda \bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\delta} \mathbf{p}_{mL,l}^p + \lambda \bar{\mathbf{S}}_{L,l}^p \mathbf{q}_{mL,l}^p - \lambda (\hat{\mathbf{S}}_{L,l}^p)^T \mathbf{z}_{m,l}^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.52j})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^p \mathbf{q}_{mL,l}^p - \lambda \bar{\mathbf{S}}_{L,l}^p \mathbf{p}_{mL,l}^p = \mathbf{0}. \quad (\text{C.52k})$$

Auch hier gilt wieder $n \in K_T(\mathbf{v})$ sowie $l \in K_S(\mathbf{v})$. Werden die Dimensionen der Mengen $K_T(\mathbf{v})$ und $K_S(\mathbf{v})$ mit n_{KT} bzw. n_{KS} bezeichnet, lassen sich weitere Vektoren entsprechend

$$\mathbf{z}_{Dr}^p = \left[(\mathbf{z}_{Dr,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{Dr,n_{KT}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53a})$$

$$\mathbf{p}_{Dr}^p = \left[(\mathbf{p}_{Dr,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{Dr,n_{KT}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53b})$$

$$\mathbf{z}_{eD}^p = \left[(\mathbf{z}_{eD,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{eD,n_{KT}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53c})$$

$$\mathbf{z}_{eL}^p = \left[(\mathbf{z}_{eL,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{eL,n_{KT}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53d})$$

$$\mathbf{p}_{eL}^p = \left[(\mathbf{p}_{eL,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{eL,n_{KT}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53e})$$

$$\mathbf{p}_{mD}^p = \left[(\mathbf{p}_{mD,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{mD,n_{KS}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53f})$$

$$\mathbf{p}_{mL}^p = \left[(\mathbf{p}_{mL,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{mL,n_{KS}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53g})$$

$$\mathbf{q}_{mL}^p = \left[(\mathbf{q}_{mL,1}^p)^T \cdots (\mathbf{q}_{mL,n_{KS}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53h})$$

$$\mathbf{z}_m^p = \left[(\mathbf{z}_{m,1}^p)^T \cdots (\mathbf{z}_{m,n_{KS}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53i})$$

$$\mathbf{p}_m^p = \left[(\mathbf{p}_{m,1}^p)^T \cdots (\mathbf{p}_{m,n_{KS}}^p)^T \right]^T, \quad (\text{C.53j})$$

$$(\text{C.53k})$$

bzw. Matrizen entsprechend

$$\hat{\mathbf{T}}_C^p = \left[\hat{\mathbf{T}}_{C,1}^p \cdots \hat{\mathbf{T}}_{C,n_{KT}}^p \right], \quad (\text{C.54a})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_D^p = \left[\hat{\mathbf{T}}_{D,1}^p \cdots \hat{\mathbf{T}}_{D,n_{KT}}^p \right], \quad (\text{C.54b})$$

$$\hat{\mathbf{T}}_L^p = \left[\hat{\mathbf{T}}_{L,1}^p \cdots \hat{\mathbf{T}}_{L,n_{KT}}^p \right], \quad (\text{C.54c})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_D^p = \left[\hat{\mathbf{S}}_{D,1}^p \cdots \hat{\mathbf{S}}_{D,n_{KS}}^p \right], \quad (\text{C.54d})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_L^p = \left[\hat{\mathbf{S}}_{L,1}^p \cdots \hat{\mathbf{S}}_{L,n_{KS}}^p \right], \quad (\text{C.54e})$$

$$\hat{\mathbf{S}}_\mu^p = \underbrace{\left[\tilde{\mathbf{S}}_\mu \cdots \tilde{\mathbf{S}}_\mu \right]}_{n_{KS}\text{-mal}}, \quad (\text{C.54f})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_C^p = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{C,n}^p\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54g})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_C^{p,\tau} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{C,n}^{p,\tau}\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54h})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_D^p = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{D,n}^p\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54i})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_D^{p,\tau} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{D,n}^{p,\tau}\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54j})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_L^p = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^p\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54k})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_L^{p,\delta} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\delta}\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54l})$$

$$\bar{\mathbf{T}}_L^{p,\omega} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{T}}_{L,n}^{p,\omega}\}, \quad n \in K_T(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54m})$$

$$\mathbf{T}_\varepsilon^p = \sum_{n=1}^{N_{Mat}} \frac{\varepsilon_{\infty,n}}{c_0^2} \tilde{\mathbf{T}}_{D,n}, \quad (\text{C.54n})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\mu,\infty}^p = \text{diag}\{\mu_{\infty,l} \tilde{\mathbf{S}}_{\mu,1}\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54o})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_D^p = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{D,l}^p\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54p})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_D^{p,\tau} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{D,l}^{p,\tau}\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54q})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_L^p = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^p\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54r})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_L^{p,\delta} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\delta}\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54s})$$

$$\bar{\mathbf{S}}_L^{p,\omega} = \text{diag}\{\bar{\mathbf{S}}_{L,l}^{p,\omega}\}, \quad l \in K_S(\mathbf{v}), \quad (\text{C.54t})$$

einführen. Damit sind (C.51) sowie (C.52) kompakt darstellbar als

$$\mathbf{M}_1^p \mathbf{v}_1^p + \lambda(\mathbf{M}_2^p + \mathbf{M}_3^p) \mathbf{v}_1^p = \mathbf{0}, \quad (\text{C.55})$$

mit

$$\mathbf{v}_1^p = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{z}^p \\ \mathbf{z}_{Dr}^p \\ \mathbf{p}_{Dr}^p \\ \mathbf{z}_{eD}^p \\ \mathbf{z}_{eL}^p \\ \mathbf{p}_{eL}^p \\ \mathbf{z}_m^p \\ \mathbf{p}_m^p \\ \mathbf{p}_{mD}^p \\ \mathbf{p}_{mL}^p \\ \mathbf{q}_{mL}^p \end{bmatrix}, \quad (\text{C.56a})$$

$$\mathbf{M}_1^p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_\varepsilon^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{T}}_C^{p,\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{T}}_D^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{T}}_L^{p,\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{T}}_L^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{S}_{\mu,\infty}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{S}}_D^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{S}}_L^{p,\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{S}}_L^p \end{bmatrix}, \quad (\text{C.56b})$$

$$\mathbf{M}_2^p = \begin{bmatrix} \mu_0(\tilde{\mathbf{D}}_R + \tilde{\mathbf{B}}_T \tilde{\mathbf{B}}_T^T) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{T}}_C^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{T}}_D^{p,\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{T}}_L^{p,\delta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_D^{p,\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_L^{p,\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.56c})$$

$$\mathbf{M}_3^p = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{T}_\varepsilon^p & \hat{\mathbf{T}}_C^p & 0 & \hat{\mathbf{T}}_D^p & \hat{\mathbf{T}}_L^p & 0 & \hat{\mathbf{S}}_\mu^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\mathbf{T}_\varepsilon^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\hat{\mathbf{T}}_C^p)^T & 0 & 0 & \bar{\mathbf{T}}_C^{p,\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\mathbf{T}}_C^{p,\tau} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\hat{\mathbf{T}}_D^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\hat{\mathbf{T}}_L^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{T}}_L^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathbf{T}}_L^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\hat{\mathbf{S}}_\mu^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_{\mu,\infty}^p & \hat{\mathbf{S}}_D^p & \hat{\mathbf{S}}_L^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_{\mu,\infty}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\hat{\mathbf{S}}_D^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\hat{\mathbf{S}}_L^p)^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{S}}_L^p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\mathbf{S}}_L^p & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.56d})$$

Aus den Definitionen der Matrizen geht hervor, dass die Matrizen \mathbf{M}_1^p sowie \mathbf{M}_2^p symmetrisch positiv semi-definit sind, sowie dass $\mathbf{M}_3^p = -(\mathbf{M}_3^p)^*$ gilt. Das Eigenwertproblem (C.55) besitzt also die Form des Eigenwertproblems (C.40). Daher kann gefolgert werden, dass alle Eigenwerte von (C.55) und somit auch von (C.40) einen nicht-positiven Realteil besitzen, womit der Beweis der Bedingung **Bd. 1** abgeschlossen ist.

Somit ist bewiesen, dass die reduzierten Modelle (5.2) die drei Bedingungen **Bd. 1** - **Bd. 3** dann erfüllen, wenn die Matrizen reellwertig sind.

Eigene Publikationen

Begutachtete Journal-Artikel

- [A1] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Compact and passive time-domain models including dispersive materials based on order-reduction in the frequency domain. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 65 (2017), August, Nr. 8, S. 2650–2660
- [A2] Baltes, R. ; Schultschik, A. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: A finite-element-based fast frequency sweep framework including excitation by frequency-dependent waveguide mode patterns. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 65 (2017), Juli, Nr. 7, S. 2249–2260
- [A3] Baltes, R. ; Al Ahmar, J. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: A mixed finite-element formulation for the modal analysis of electromagnetic waveguides featuring improved low-frequency resolution of transmission line modes. In: *Advances in Radio Science* 12 (2014), November, S. 13–19
- [A4] Farle O. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: Strukturerehaltende Diskretisierung verteiltparametrischer Port-Hamiltonscher Systeme mittels finiter Elemente. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Juli, Nr. 7, S. 500–511

Begutachtete Konferenz-Artikel

- [B1] Baltes R. ; Dyczij-Edlinger, R.: Robust and efficient model-order reduction for lossless microwave structures using the impedance formulation of the finite element method. In: *Proceedings of the 2017 International Applied Computational Electromagnetics Society (ACES) Symposium*. Florenz, Italien: März 26–30, 2017, S. 1–2
- [B2] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Time-domain simulation of electromagnetic fields based on frequency-domain reduced-order models including Debye materials. In: *Proceedings of the 2016 URSI International Symposium*

on *Electromagnetic Theory (EMTS)*. Espoo, Finland: August 14–18, 2016, S. 137–140

- [B3] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Compact time-domain models for Drude materials using order-reduction in the frequency domain. In: *Proceedings of the IEEE MTT-S International Conference on Numerical Electromagnetic and Multiphysics Modeling and Optimization (NEMO)*. Beijing, China: Juli 27–29, 2016, S. 1–2
- [B4] Jochum, M. ; Sommer, A. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: Low-frequency stable model-order reduction of finite-element models featuring lumped ports. In: *Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET)*. Lviv, Ukraine: Juli 5–7, 2016, S. 60–65
- [B5] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Time-domain simulation of electromagnetic fields based on reduced-order models residing in the frequency domain. In: *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Turin, Italien: September 7–11, 2015, S. 1068–1071
- [B6] Baltes, R. ; Sommer, A. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Adaptive model order reduction for structures fed by dispersive waveguide modes. In: *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Turin, Italien: September 7–11, 2015, S. 1072–1075
- [B7] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R. ; Al Ahmar, J.: A low-frequency stable finite-element formulation for modal waveguide analysis. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Electromagnetics (ICCEM)*. Hong Kong, China: Februar 2–5, 2015, S.344–346
- [B8] Lösch, M. ; Farle, O. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: Implicit h type finite-element error estimator for the vector Helmholtz equation. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Computational Electromagnetics (ICCEM)*. Hong Kong, China: Februar 2–5, 2015, S.335–337
- [B9] Sommer, A. ; Floch, O. ; Farle, O. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: An efficient parametric near-field-to-far-field transformation technique. In: *Proceedings of the 2013 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Turin, Italien: September 9–13, 2013, S. 332–335

-
- [B10] Floch, O. ; Farle, O. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: A simplified domain-decomposition preconditioner for the finite -element discretization of the time-harmonic Maxwell equations. In: *Proceedings of the 2013 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Turin, Italien: September 9–13, 2013, S. 456–459

Konferenzbeiträge

- [C1] Sommer, A. ; Bauer, T. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: A hierarchical greedy strategy for adaptive model-order reduction. *The IEEE 17th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Vortrag MP041-5. Miami, USA: November 13–16, 2016
- [C2] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Compact time-domain models including Lorentz materials based on reduced-order models in the frequency-domain. *The IEEE 17th Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, Vortrag TP041-4. Miami, USA: November 13–16, 2016
- [C3] Baltes, R. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Eine Methode zur Transformation von Frequenzbereichsdaten in den Zeitbereich unter Berücksichtigung frequenzabhängiger Materialien. *Kleinheubacher Tagung 2016*, Vortrag KH2016-B-02. Miltenberg, Deutschland: September 26–28, 2016
- [C4] Sommer, A. ; Baltes, R. ; Dyczij-Edlinger, R.: Parametrische Nahfeld-zu-Fernfeld Transformation mittels offline- und onlineeffizienter Empirischer Interpolation. *Kleinheubacher Tagung 2016*, Vortrag KH2016-B-03. Miltenberg, Deutschland: September 26–28, 2016
- [C5] Baltes, R. ; Sommer, A. ; Farle O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Model-order reduction for the simulation of devices fed by dispersive waveguides based on the finite-element scattering formulation. *The 13th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering (FEM)*, Vortrag S9-2. Florenz, Italien: Mai 16–18, 2016
- [C6] Floch, O. ; Baltes, R. ; Sommer, A. ; Dyczij-Edlinger, R.: A spurious-mode free Jacobi-Davidson method combined with domain decomposition for the modal analysis of electromagnetic structures. *The 13th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering (FEM)*, Vortrag S11-2. Florenz, Italien: Mai 16–18, 2016
- [C7] Baltes, R. ; Al Ahmar, J. ; Farle, O. ; Dyczij-Edlinger, R.: Eine niederfrequenzstabile Finite-Elemente-Formulierung für die Modalanalyse verlustbehafteter axial homogener Wellenleiter. *Kleinheubacher Tagung 2013*, Vortrag KHT2013-B.1-5. Miltenberg, Deutschland: September 23–25, 2013

- [C8] Farle, O. ; Baltes, R. ; Klis, D. ; Dyczij-Edlinger, R.: Eine Port-Hamiltonsche Formulierung zur Finite-Elemente-Diskretisierung der Maxwell'schen Gleichungen. *GMA-Fachausschuss 1.30 Workshop Modellbildung, Identifikation und Simulation in der Automatisierungstechnik*. Anif/Salzburg, Österreich: September 18–20, 2013

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispiel einer Mikrowellenstruktur.	8
2.2	Verlauf der elektrischen Permittivität nach dem Debye-Modell.	13
2.3	Verlauf der Permittivität nach dem Lorentz-Modell.	14
2.4	Verlauf der Leitfähigkeit nach dem Drude-Modell.	15
2.5	Der de Rham-Komplex.	24
2.6	Struktur der Maxwell-Gleichungen.	25
3.1	Schematische Darstellung eines Wellenleiterquerschnitts.	28
3.2	Baum-Kobaum-Zerlegung am Beispiel eines Parallelplattenwellenleiters.	43
3.3	PPWL: Geometrie und Dispersions-Diagramm.	50
3.4	PPWL: relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten und Konvergenz.	51
3.5	PPWL: Ausbreitungskoeffizient des TEM-Modes.	52
3.6	MSL: Geometrie und Dispersions-Diagramm.	53
3.7	MSL: relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten und Ausbreitungskoeffizient des quasi-TEM-Modes.	54
3.8	RHL: Real- und Imaginärteil der Ausbreitungskoeffizienten.	56
3.9	RHL: relativer Fehler in den Ausbreitungskoeffizienten.	57
4.1	PPWL: Geometrie und Verlauf der Energie für Z-Formulierung.	65

4.2	PPWL, Z-Formulierung: Konditionszahl und Reflexion.	66
4.3	PPWL, Vergleich der Formulierungen: Energie und Konditionszahl. . .	69
4.4	PPWL, Vergleich der Formulierungen: Betrag der Streuparameter. . .	70
4.5	Bandpassfilter.	71
4.6	Bandpassfilter: Betrag der Streuparameter.	72
4.7	Ablaufdiagramm zur selbst-adaptiven Erstellung der reduzierten Modelle.	88
4.8	gMSL.	89
4.9	gMSL: Ausbreitungskoeffizienten und Fehler des Ausbreitungskoeffizienten.	90
4.10	gMSL: Vergleich des Betrags der Streuparameter des Verfahrens von [WMSW02] mit denen der neuen Methode.	91
4.11	gMSL: Vergleich des Fehlers in den Streuparametern des Verfahrens von [WMSW02] mit der neuen Methode.	91
4.12	gMSL: Betrag der Streuparameter der reduzierten Modelle.	92
4.13	gMSL: Maximaler Fehler in den Streuparametern über der Frequenz.	93
4.14	Übergang RHL-RdE, Abmessungen in mm.	95
4.15	Übergang RHL-RdE: Ausbreitungskoeffizienten.	96
4.16	Übergang RHL-RdE: Relativer Fehler der reduzierten Modelle in den Ausbreitungskoeffizienten.	97
4.17	Übergang RHL-RdE: Reflexionen der dominanten Moden beider Wellenleiter.	97
4.18	Übergang RHL-RdE: Maximaler Fehler in den Streuparametern über der Frequenz.	98
5.1	Stabilitätsgebiet des expliziten Runge-Kutta-Verfahren nach Heun. . .	117
5.2	Realisierung der Zeitbereichmodelle im Schaltungssimulator.	120
5.3	Verschaltung des Zeitbereichsmodells im Schaltungssimulator zur Berechnung der Streuparameter.	121

5.4	PPS.	121
5.5	PPS: Zeitsignale.	122
5.6	PPS: Stabilitätsgebiet und skalierte Eigenwerte der Systemmatrix. . .	123
5.7	PPS: Betrag der Streuparameter.	123
5.8	PPS: Betrag des Fehlers in den Streuparametern.	124
5.9	PPS: maximaler Fehler der Streuparameter über der Zeitschrittweite.	125
5.10	PPS: Betrag der mittels LTSpice berechneten Streuparameter.	125
5.11	PPS: Betrag des Fehlers in den mittels LTSpice berechneten Streu- parametern.	126
5.12	PPWLd.	126
5.13	PPWLd: Zeitsignale.	127
5.14	PPWLd: Stabilitätsgebiet und skalierte Eigenwerte der Systemmatrix.	128
5.15	PPWLd: Betrag der Streuparameter.	128
5.16	PPWLd: Fehler in den Streuparametern.	129
5.17	PPWLd: Betrag der mittels LTSpice berechneten Streuparameter. . .	130
5.18	PPWLd: Fehler in den mittels LTSpice berechneten Streuparametern.	130

Tabellenverzeichnis

3.1	PPWL: Simulationsdaten.	53
3.2	MSL: Simulationsdaten.	55
4.1	PPWL: Simulationsdaten für Z- und S-Formulierungen.	70
4.2	Bandpassfilter: Berechnungsdaten der Formulierungen.	72
4.3	Bandpassfilter: Eigenfrequenzen des Resonantorproblems.	73
4.4	gMSL: Eigenfrequenzen des Resonantorproblems.	93
4.5	gMSL: Simulationsdaten für die verlustfreie Struktur.	94
4.6	gMSL: Simulationsdaten für die verlustbehaftete Struktur.	94
4.7	Übergang RHL-RdE: Eigenfrequenzen des Resonantorproblems. . . .	98
4.8	Übergang RHL-RdE: Simulationsdaten für verlustfreie Struktur. . . .	99
4.9	Übergang RHL-RdE: Simulationsdaten für verlustbehaftete Struktur. .	99
5.1	Koeffizienten in expliziten Runge-Kutta-Verfahren.	114
5.2	Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens nach Heun.	116

Literaturverzeichnis

- [ABM⁺04] ANDERSON, B. ; BRACKEN, J. E. ; MANGES, J. B. ; PENG, G. ; CENDES, Z. J.: Full-wave analysis in SPICE via model-order reduction. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 52 (2004), September, Nr. 9, S. 2314–2320
- [AN01] ACHAR, R. ; NAKHLA, M. S.: Simulation of high-speed interconnects. In: *Proc. IEEE* 89 (2001), Mai, Nr. 5, S. 693–728
- [Ant05] ANTOULAS, A. C.: *Approximation of large-scale dynamical systems*. Philadelphia : SIAM, 2005
- [AR88] ALBANESE, R. ; RUBINACCI, G.: Solution of three dimensional eddy current problems by integral and differential methods. In: *IEEE Trans. Magn.* 24 (1988), Januar, Nr. 1, S. 98–101
- [ASG15] AKBARZADEH-SHARBAF, A. ; GIANNACOPOULOS, D. D.: A stable and efficient direct time integration of the vector wave equation in the finite-element time-domain method for dispersive media. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 63 (2015), Januar, Nr. 1, S. 314–321
- [BB91] BARDI, I. ; BIRO, O.: An efficient finite-element formulation without spurious modes for anisotropic waveguides. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 39 (1991), Juli, Nr. 7, S. 1133–1139
- [BBF13] BOFFI, D. ; BREZZI, F. ; FORTIN, M.: *Mixed finite element methods and applications*. Berlin : Springer, 2013
- [Bos88] BOSSAVIT, A.: A rationale for 'edge-elements' in 3-D fields computations. In: *IEEE Trans. Magn.* 24 (1988), Januar, Nr. 1, S. 74–79
- [Bos98] BOSSAVIT, A.: *Computational Electromagnetism*. Boston : Academic Press, 1998
- [BP85] BURRUS, C. S. ; PARKS, T. W.: *DFT/FFT and Convolution Algorithms: Theory and Implementation*. New York : John Wiley & Sons, Inc., 1985

- [BPG⁺02] BERTAZZI, F. ; PEVERINI, O. A. ; GOANO, M. ; GHIONE, G. ; ORTA, R. ; TASCONE, R.: A fast reduced-order model for the full-wave FEM analysis of lossy inhomogeneous anisotropic waveguides. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 50 (2002), September, Nr. 9, S. 2108–2114
- [Bra95] BRAZIL, T. J.: Causal-convolution-a new method for the transient analysis of linear systems at microwave frequencies. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 43 (1995), Februar, Nr. 2, S. 315–323
- [Cas12] CASENAVE, F.: Accurate a posteriori error evaluation in the reduced basis method. In: *Comp. Rendus Mathematique* 350 (2012), Juni, Nr. 9–10, S. 539–542
- [Cha85] CHARTRAND, G.: *Introductory graph theory*. New York : Dover Publications, 1985
- [CHMR10] CHEN, Y. ; HESTHAVEN, J. S. ; MADAY, Y. ; RODRÍGUEZ, J.: Certified reduced basis methods and output bounds for the harmonic Maxwell's equations. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 32 (2010), März, Nr. 2, S. 970–996
- [CL88] CENDES, Z. J. ; LEE, J.-F.: The transfinite element method for modeling MMIC devices. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 36 (1988), Dezember, Nr. 12, S. 1639–1649
- [CLRS01] CORMEN, T. H. ; LEISERSON, C. E. ; RIVEST, R. L. ; STEIN, C.: *Introduction to algorithms*. 2. Auflage. Cambridge : The MIT Press, 2001
- [Col91] COLLIN, R. E.: *Field Theory of Guided Waves*. 2. Auflage. New York : IEEE Press, 1991
- [CTU09] CANUTO, C. ; TONN, T. ; URBAN, K.: A posteriori error analysis of the reduced basis method for nonaffine parametrized nonlinear PDEs. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 47 (2009), Juni, Nr. 3, S. 2001–2022
- [CW01] CLEMENS, M. ; WEILAND, T.: Discrete electromagnetism with the finite integration technique. In: *Prog. Electromagn. Res.* 32 (2001), S. 65–87
- [DDS09] DHAENE, T. ; DESCHRIJVER, D. ; STEVENS, N.: Efficient algorithm for passivity enforcement of S -parameter-based macromodels. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 57 (2009), Februar, Nr. 2, S. 415–420
- [DeP83] DEPOURCQ, M.: Field and power-density calculations by three-dimensional finite elements. In: *Microwaves, Optics and Antennas, IEE Proceedings H* 130 (1983), Oktober, Nr. 6, S. 377–384

- [DEPL99] DYCZIJ-EDLINGER, R. ; PENG, G. ; LEE, J.-F.: Efficient finite element solvers for the Maxwell equations in the frequency domain. In: *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.* 169 (1999), Februar, Nr. 3–4, S. 297–309
- [DEPL00] DYCZIJ-EDLINGER, R. ; PENG, G. ; LEE, J.-F.: Stability conditions for using TVFEMs to solve Maxwell equations in the frequency domain. In: *Int. J. Numer. Model., Electron. Netw., Devices Fields* 13 (2000), März, Nr. 2–3, S. 245–260
- [dRM09] DE LA RUBIA, V. ; RAZAFISON, U. ; MADAY, Y.: Reliable fast frequency sweep for microwave devices via the reduced-basis method. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 57 (2009), Dezember, Nr. 12, S. 2923–2937
- [DSH87] DJORDJEVIC, A. R. ; SARKAR, T. K. ; HARRINGTON, R. F.: Time-domain response of multiconductor transmission lines. In: *Proc. IEEE* 75 (1987), Juni, Nr. 6, S. 743–764
- [DZ12] DRUSKIN, V. ; ZASLAVSKY, M.: On convergence of Krylov subspace approximations of time-invariant self-adjoint dynamical systems. In: *Linear Algebra Appl.* 436 (2012), Mai, Nr. 10, S. 3883–3903
- [EMOT54] ERDELYI, A. ; MAGNUS, W. ; OBERHETTINGER, F. ; TRICOMI, F. G.: *Tables of Integral Transforms, Vol. 2.* New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1954
- [FBDE11] FARLE, O. ; BURGARD, S. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Passivity preserving parametric model-order reduction for non-affine parameters. In: *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.* 17 (2011), Mai, Nr. 3, S. 279–294
- [FF95] FELDMANN, P. ; FREUND, R. W.: Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process. In: *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.* 14 (1995), Mai, Nr. 5, S. 639–649
- [FHDE04] FARLE, O. ; HILL, V. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Finite-element waveguide solvers revisited. In: *IEEE Trans. Magn.* 40 (2004), März, Nr. 2, S. 1468–1471
- [FHMS11] FARES, M. ; HESTHAVEN, J. S. ; MADAY, Y. ; STAMM, B.: The reduced basis method for the electric field integral equation. In: *J. Comput. Phys.* 230 (2011), Juni, Nr. 14, S. 5532–5555
- [FL91] FERNANDEZ, F. A. ; LU, Y.: A variational finite element formulation for dielectric waveguides in terms of transverse magnetic fields. In: *IEEE Trans. Magn.* 27 (1991), September, Nr. 5, S. 3864–3867

- [FLDE10] FARLE, O. ; LÖSCH, M. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Efficient Fast Frequency Sweep Without Nonphysical Resonances. In: *Electromagnetics* 30 (2010), März, Nr. 1–2, S. 51–68
- [Fra97] FRANKEL, T.: *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge : Cambridge University Press, 1997
- [Gib08] GIBSON, W. C.: *The Method of Moments in Electromagnetics*. Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2008
- [GK04] GROSS, P. W. ; KOTIUGA, P. R.: *Electromagnetic theory and computation: a topological approach*. Cambridge : Cambridge University Press, 2004
- [GS99] GUSTAVSEN, B. ; SEMLYEN, A.: Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. In: *IEEE Trans. Power Del.* 14 (1999), Juli, Nr. 3, S. 1052–1061
- [GS01] GUSTAVSEN, B. ; SEMLYEN, A.: Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions. In: *IEEE Trans. Power Syst.* 16 (2001), Februar, Nr. 1, S. 97–104
- [GTU08] GRIVET-TALOCIA, S. ; UBOLLI, A.: A comparative study of passivity enforcement schemes for linear lumped macromodels. In: *IEEE Trans. Adv. Packag.* 31 (2008), November, Nr. 4, S. 673–683
- [HNW09] HAIRER, E. ; NØRSETT, S. P. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations I*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2009
- [Hsi06] HSIAO, G. C.: Boundary element methods—an overview. In: *Appl. Numer. Math.* 56 (2006), Juni, Nr. 10, S. 1356–1369
- [HSZ12] HESTHAVEN, J. S. ; STAMM, B. ; ZHANG, S.: Certified reduced basis method for the electric field integral equation. In: *SIAM J. Sci. Comput.* 34 (2012), Juni, Nr. 3, S. A1777–A1799
- [HW10] HAIRER, E. ; WANNER, G.: *Solving Ordinary Differential Equations II*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2010
- [Ing06] INGELSTRÖM, P.: A new set of H(curl)-conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 54 (2006), Januar, Nr. 1, S. 106–114
- [Jac01] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. 3. Auflage. Berlin : De Gruyter, 2001

- [JFDE15] JOCHUM, M. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A new low-frequency stable potential formulation for the finite-element simulation of electromagnetic fields. In: *IEEE Trans. Magn.* 51 (2015), März, Nr. 3, S. 1–4
- [Jin02] JIN, J.-M.: *The finite element method in electromagnetics*. 2. Auflage. New York : John Wiley & Sons, Inc., 2002
- [KFK⁺11] KONKEL, Y. ; FARLE, O. ; KÖHLER, A. ; SCHULTSCHIK, A. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Adaptive strategies for fast frequency sweeps. In: *COMPEL* 30 (2011), Dezember, Nr. 6, S. 1855–1869
- [KMEK90] KANAYAMA, H. ; MOTOYAMA, H. ; ENDO, K. ; KIKUCHI, F.: Three-dimensional magnetostatic analysis using Nedelec’s elements. In: *IEEE Trans. Magn.* 26 (1990), März, Nr. 2, S. 682–685
- [Kön04] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. 5. Auflage. Berlin : Springer, 2004
- [LA10] LEFTERIU, S. ; ANTOULAS, A. C.: A new approach to modeling multiport systems from frequency-domain data. In: *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.* 29 (2010), Januar, Nr. 1, S. 14–27
- [Lee90] LEE, J.-F.: Analysis of passive microwave devices by using three-dimensional tangential vector finite elements. In: *Int. J. Numer. Model., Electron. Netw., Devices Fields* 3 (1990), Dezember, Nr. 4, S. 235–246
- [LHW05] LEE, S.-H. ; HUANG, T.-Y. ; WU, R.-B.: Fast waveguide eigenanalysis by wide-band finite-element model-order reduction. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 53 (2005), August, Nr. 8, S. 2552–2558
- [LJ13] LI, X. ; JIN, J.-M.: Modeling of doubly lossy and dispersive media with the time-domain finite-element dual-field domain-decomposition algorithm. In: *Int. J. Numer. Model., Electron. Netw., Devices Fields* 26 (2013), Nr. 1, S. 28–40
- [LLC97] LEE, J.-F. ; LEE, R. ; CANGELLARIS, A.: Time-domain finite-element methods. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 45 (1997), März, Nr. 3, S. 430–442
- [LLL03] LEE, S.-C. ; LEE, J.-F. ; LEE, R.: Hierarchical vector finite elements for analyzing waveguiding structures. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 51 (2003), August, Nr. 8, S. 1897–1905
- [LM07] LAMECKI, A. ; MROZOWSKI, M.: Equivalent SPICE circuits with guaranteed passivity from nonpassive models. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 55 (2007), März, Nr. 3, S. 526–532

- [LSC91] LEE, J.-F. ; SUN, D.-K. ; CENDES, Z. J.: Full-wave analysis of dielectric waveguides using tangential vector finite elements. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 39 (1991), August, Nr. 8, S. 1262–1271
- [LVZL05] LEE, S.-C. ; VOUVAKIS, M. N. ; ZHAO, K. ; LEE, J.-F.: Analysing microwave devices using a symmetric coupling of finite and boundary elements. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 64 (2005), Juni, Nr. 4, S. 528–546
- [Moo81] MOORE, B.: Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 26 (1981), Februar, Nr. 1, S. 17–32
- [OMS97] OKONIEWSKI, M. ; MROZOWSKI, M. ; STUCHLY, M. A.: Simple treatment of multi-term dispersion in FDTD. In: *IEEE Microw. Guided Wave Lett.* 7 (1997), Mai, Nr. 5, S. 121–123
- [Pet88] PETERSON, A. F.: Absorbing boundary conditions for the vector wave equation. In: *Microw. Opt. Technol. Lett.* 1 (1988), April, Nr. 2, S. 62–64
- [PL95] POLSTYANKO, S. V. ; LEE, J.-F.: $H_1(\text{curl})$ tangential vector finite element method for modeling anisotropic optical fibers. In: *Journal of Lightwave Technology* 13 (1995), November, Nr. 11, S. 2290–2295
- [Poz11] POZAR, D. M.: *Microwave Engineering*. 4. Auflage. New York : Wiley, 2011
- [PR06] PATERA, A. T. ; ROZZA, G.: *Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for parametrized partial differential equations*. online verfügbar unter <http://augustine.mit.edu/methodology.htm>, 2006
- [Pre01] PREGLA, R.: *Grundlagen der Elektrotechnik*. 6. Auflage. Heidelberg : Hüthig Verlag, 2001
- [Pri03] PRIESTLEY, H. A.: *Introduction to complex analysis*. 2. Auflage. Oxford : Oxford University Press, 2003
- [RAZ01] RUBIO, J. ; ARROYO, J. ; ZAPATA, J.: SFELP-an efficient methodology for microwave circuit analysis. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 49 (2001), März, Nr. 3, S. 509–516
- [RC09] ROTHWELL, E. J. ; CLOUD, M. J.: *Electromagnetics*. 2. Auflage. Boca Raton : CRC press, 2009
- [RHP07] ROZZA, G. ; HUYNH, D. B. P. ; PATERA, A. T.: Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. In: *Arch. Comput. Methods Eng.* 15 (2007), Nr. 3, S. 1–47

- [SA85] STRUBE, J. ; ARNDT, F.: Rigorous hybrid-mode analysis of the transition from rectangular waveguide to shielded dielectric image guide. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 33 (1985), Mai, Nr. 5, S. 391–401
- [Sch97] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. 4. Auflage. Stuttgart : B. G. Teubner, 1997
- [SCL01] SUN, D. K. ; CENDES, Z. J. ; LEE, J. F.: ALPS-A new fast frequency-sweep procedure for microwave devices. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 49 (2001), Februar, Nr. 2, S. 398–402
- [SE06] SILVEIRINHA, M. ; ENGHETA, N.: Tunneling of electromagnetic energy through subwavelength channels and bends using ϵ -near-zero materials. In: *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), Oktober, S. 1–4
- [SF73] STRANG, G. ; FIX, G. F.: *An Analysis of the Finite Element Method*. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1973
- [SFDE08] SCHULTSCHIK, A. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A model order reduction method for the finite-element simulation of inhomogeneous waveguides. In: *IEEE Trans. Magn.* 44 (2008), Juni, Nr. 6, S. 1394–1397
- [SFDE09] SCHULTSCHIK, A. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: An adaptive multi-point fast frequency sweep for large-scale finite element models. In: *IEEE Trans. Magn.* 45 (2009), März, Nr. 3, S. 1108–1111
- [SFDE15] SOMMER, A. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A new method for accurate and efficient residual computation in adaptive model-order reduction. In: *IEEE Trans. Magn.* 51 (2015), März, Nr. 3, S. 1–4
- [SLC03] SUN, D.-K. ; LEE, J.-F. ; CENDES, Z.: The transfinite-element time-domain method. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 51 (2003), Oktober, Nr. 10, S. 2097–2105
- [SLL03] SLONE, R. D. ; LEE, R. ; LEE, J.-F.: Broadband model order reduction of polynomial matrix equations using single-point well-conditioned asymptotic waveform evaluation: derivations and theory. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 58 (2003), Dezember, Nr. 15, S. 2325–2342
- [Sto02] STOER, J.: *Numerische Mathematik 1*. 8. Auflage. Berlin : Springer, 2002
- [Sve89] SVEDIN, J. A. M.: A numerically efficient finite-element formulation for the general waveguide problem without spurious modes. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 37 (1989), November, Nr. 11, S. 1708–1715

- [TGTN⁺07] TRIVERIO, P. ; GRIVET-TALOCIA, S. ; NAKHLA, M. S. ; CANAVERO, F. G. ; ACHAR, R.: Stability, Causality, and Passivity in Electrical Interconnect Models. In: *IEEE Trans. Adv. Packag.* 30 (2007), November, Nr. 4, S. 795–808
- [TH00] TAFLOVE, A. ; HAGNESS, S. C.: *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 2. Auflage. Boston : Artech House, 2000
- [VD02] VARDAPETYAN, L. ; DEMKOWICZ, L.: Full-wave analysis of dielectric waveguides at a given frequency. In: *Math. Comp.* 72 (2002), Mai, Nr. 241, S. 105–129
- [VZ95] VALOR, L. ; ZAPATA, J.: Efficient finite element analysis of waveguides with lossy inhomogeneous anisotropic materials characterized by arbitrary permittivity and permeability tensors. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.* 43 (1995), Oktober, Nr. 10, S. 2452–2459
- [Wei96] WEILAND, T.: Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. In: *Int. J. Numer. Model., Electron. Netw., Devices Fields* 9 (1996), Juli, Nr. 4, S. 295–319
- [WK89] WEBB, J. P. ; KANELLOPOULOS, V. N.: Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation. In: *Microw. Opt. Technol. Lett.* 2 (1989), Oktober, Nr. 10, S. 370–372
- [WMF83] WEBB, J. P. ; MAILE, G. L. ; FERRARI, R. L.: Finite-element solution of three-dimensional electromagnetic problems. In: *Microwaves, Optics and Antennas, IEE Proceedings H* 130 (1983), März, Nr. 2, S. 153–159
- [WMSW02] WITTIG, T. ; MUNTEANU, I. ; SCHUHMAN, R. ; WEILAND, T.: Model order reduction and equivalent circuit extraction for FIT discretized electromagnetic systems. In: *Int. J. Numer. Model., Electron. Netw., Devices Fields* 15 (2002), September, Nr. 5-6, S. 517–533
- [WP86] WEBB, J. P. ; PARIHAR, S.: Finite element analysis of H-plane rectangular waveguide problems. In: *IEE Proceedings H - Microwaves, Antennas and Propagation* 133 (1986), April, Nr. 2, S. 91–94
- [Yee66] YEE, K.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14 (1966), Mai, Nr. 3, S. 302–307
- [ZC06] ZHU, Y. ; CANGELLARIS, A. C.: *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*. Piscataway, NJ : IEEE Press, 2006

-
- [ZD10] ZASLAVSKY, M. ; DRUSKIN, V.: Solution of time-convolutionary Maxwell's equations using parameter-dependent Krylov subspace reduction. In: *J. Comput. Phys.* 229 (2010), Juni, Nr. 12, S. 4831–4839
- [ZSM05] ZHU, L. ; SHENG, S. ; MENZEL, W.: Ultra-wideband (UWB) band-pass filters using multiple-mode resonator. In: *IEEE Microw. Wirel. Compon. Lett.* 15 (2005), November, Nr. 11, S. 796–798