

Algebraische Ableitungsschätzer  
in Theorie und Anwendung

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
des Doktors der Ingenieurwissenschaften  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität des Saarlandes

von

Lothar Kiltz

Saarbrücken

2017

Tag des Kolloquiums: 01.12.2017

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. G. Kickelbick

Mitglieder des

Prüfungsausschusses: Prof. Dr.-Ing. habil. St. Seelecke  
Prof. Dr.-Ing. habil. J. Rudolph  
Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack  
Dr. rer. nat. T. Sauerwald

## **Eidesstattliche Versicherung**

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

**Ort, Datum**

---

**Unterschrift**

---



# Kurzzusammenfassung

*Algebraische Ableitungsschätzer* sind lineare zeitinvariante Filter zur näherungsweise numerischen Differentiation gemessener Signale in Echtzeit. Wegen ihrer Robustheit gegen Messrauschen können algebraische Ableitungsschätzer vielfältige praktische regelungstechnische Problemstellungen vereinfachen, wie in dieser Arbeit anhand zahlreicher Beispiele und einer umfangreichen experimentellen Fallstudie demonstriert wird. Eine Herausforderung stellt die Wahl anwendungsspezifisch vorteilhafter Filterparameter dar. Hierzu werden in dieser Arbeit Empfehlungen basierend auf approximationstheoretischen Grundlagen sowie Filtereigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich hergeleitet. Ebenfalls von großer praktischer Bedeutung ist die effiziente Echtzeit-Implementierung. Hierfür werden verschiedene Verfahren zur Reduktion der Schätzverzögerung und der benötigten Rechenressourcen erörtert.

## Abstract

*Algebraic derivative estimators* are linear time-invariant filters for approximating numerical derivatives of measured signals in real-time. Since they are robust to measurement noise, algebraic derivative estimators may simplify a wide variety of practical control engineering tasks, as this thesis demonstrates through numerous examples and an extensive experimental case study. The selection of favorable filter parameters is a key challenge in the application of these estimators. To this end, parameter selection criteria are derived based on approximation theory fundamentals and filter performance in the frequency and time domains. As efficient real-time implementation of these methods is of great practical interest, various techniques to reduce estimation delay and computational effort are discussed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Stand der Technik . . . . .	1
1.2. Beitrag dieser Arbeit . . . . .	3
1.3. Gliederung dieser Arbeit . . . . .	4
<b>2. Tutorium: Algebraische Schätzung der ersten Ableitung</b>	<b>7</b>
2.1. Algebraische Ableitungsschätzung . . . . .	8
2.2. Filtereigenschaften . . . . .	10
2.3. Approximationsbasierte Ableitungsschätzung . . . . .	14
2.4. Implementierung . . . . .	18
2.5. Zusammenfassung . . . . .	22
<b>3. Algebraische Schätzung beliebiger Ableitungsordnungen</b>	<b>23</b>
3.1. Approximationstheoretische Eigenschaften . . . . .	23
3.1.1. Approximationstheoretische Interpretation . . . . .	24
3.1.2. Genauigkeitsgrad und Schätzverzögerung . . . . .	27
3.1.3. Schätzfehler . . . . .	27
3.2. Zeitbereichseigenschaften . . . . .	31
3.2.1. Impuls- und Sprungantwort . . . . .	31
3.2.2. Reihenschaltung . . . . .	34
3.2.3. Nicht-differenzierbare Eingangssignale . . . . .	36
3.3. Frequenzbereichseigenschaften . . . . .	39
3.3.1. Frequenzgang . . . . .	39
3.3.2. Tiefpass-Charakteristik . . . . .	40
3.3.3. Stoppbandwelligkeit . . . . .	45
3.4. Implementierung . . . . .	47
3.4.1. Abtastrate . . . . .	47
3.4.2. Zeitdiskretisierung . . . . .	49
3.4.3. Kürzung des Zeitfensters . . . . .	51
3.4.4. Rekursive Implementierung . . . . .	53
3.5. Zusammenfassung . . . . .	58
<b>4. Fallstudie: Modellbasierte Diagnose von Kollisionen</b>	<b>61</b>
4.1. Kollisionsdetektion und Rekonstruktion der Kollisionszeitpunkte . . . . .	62
4.2. Auswahl des Suchfilters . . . . .	65
4.3. Implementierung des Kollisionsindikators . . . . .	68
4.4. Zusammenfassung . . . . .	70

<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>73</b>
<b>A. Mathematische Grundlagen und Formelsammlung</b>	<b>77</b>
A.1. Operatorenkalkül und Fourier-Transformation . . . . .	77
A.1.1. Mikusiński's Operatorenkalkül . . . . .	77
A.1.2. Fourier-Transformation . . . . .	79
A.2. Lokale polynomiale Approximation . . . . .	81
A.2.1. Approximation in einem Hilbert-Raum . . . . .	81
A.2.2. Diskrete polynomiale Approximation . . . . .	82
A.2.3. Kontinuierliche polynomiale Approximation . . . . .	83
A.3. Stochastische Prozesse . . . . .	84
A.4. Spezielle Funktionen . . . . .	87
A.4.1. Gamma-Funktion und verwandte Funktionen . . . . .	87
A.4.2. Bessel-Funktion erster Gattung und Kummer'sche M-Funktion	88
A.4.3. Jacobi- und Legendre-Polynome . . . . .	89
<b>B. Herleitung von Eigenschaften algebraischer Ableitungsschätzer</b>	<b>95</b>
B.1. Approximationstheoretische Eigenschaften . . . . .	95
B.1.1. Polynomiale Approximation mit gleitendem Zeitfenster . . . . .	95
B.1.2. Genauigkeitsgrad und Schätzverzögerung . . . . .	96
B.1.3. Approximationsfehler . . . . .	96
B.2. Zeitbereichseigenschaften . . . . .	98
B.2.1. Algebraische Ableitungsschätzer als FIR-Filter . . . . .	98
B.2.2. Realisierbarkeit . . . . .	98
B.2.3. Impulsantwort . . . . .	99
B.2.4. Sprungantwort . . . . .	102
B.2.5. Momente . . . . .	103
B.3. Frequenzbereichseigenschaften . . . . .	104
B.3.1. Frequenzgang . . . . .	104
B.3.2. Numerische Auswertung des Frequenzgangs . . . . .	105
B.3.3. Asymptoten des Frequenzgangs . . . . .	107
B.3.4. Abhängigkeit der Fensterbreite von den Filterparametern . . . . .	111
B.4. Implementierung . . . . .	115
B.4.1. Approximation der Messgröße als Polygonzug . . . . .	115
B.4.2. Rekursive Implementierung . . . . .	115
B.4.3. Quantisierungsfehler bei rekursiver Implementierung . . . . .	116
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>119</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Algebraischer Ableitungsschätzer und Differenzenquotient . . . . .	7
2.2. Impuls- und Sprungantwort . . . . .	10
2.3. Filterausgang auf Sprung- und Rampenfunktion . . . . .	11
2.4. Tiefpassverhalten und Phasengang . . . . .	12
2.5. Vergleich mit Butterworth- und Besselfiltern . . . . .	14
2.6. Schätzverzögerung . . . . .	15
2.7. Reduktion der Schätzverzögerung durch asymmetrische Gewichtung .	17
2.8. Reduktion der Schätzverzögerung durch Erhöhung des Polynomgrades	17
2.9. Zur Quadratur nach der Mittelpunktregel . . . . .	19
2.10. Änderung des Frequenzgangs infolge Zeitdiskretisierung . . . . .	20
3.1. Approximationstheoretische Interpretation . . . . .	24
3.2. Verzögerte, verzögerungsfreie und prädizierende Schätzung . . . . .	25
3.3. Verzögerungsfreie Kompensation von Ausreißern . . . . .	26
3.4. Schätzverzögerung bei Erhöhung des Genauigkeitsgrades . . . . .	28
3.5. Verteilungsfunktion einer geschätzten Ableitung . . . . .	30
3.6. Impuls- und Sprungantworten . . . . .	32
3.7. Reihenschaltung linearphasiger Ableitungsschätzer . . . . .	36
3.8. Trajektoriengenerierung . . . . .	38
3.9. Detektion einer sprungförmigen Störkraft . . . . .	39
3.10. Betrags- und Phasengänge . . . . .	41
3.11. Knickfrequenz, Fensterbreite und Schätzverzögerung . . . . .	43
3.12. Asymptotische Hüllkurven . . . . .	46
3.13. Stoppbandsteigung und Knickfrequenz bei Elimination einer Frequenz	47
3.14. Abtastrate und Anzahl Abtastperioden . . . . .	48
3.15. Filterparametrierung unter Berücksichtigung der Abtastrate . . . . .	49
3.16. Vergleich der Diskretisierungsverfahren . . . . .	51
3.17. Kürzung des Zeitfensters . . . . .	52
3.18. Effizienzsteigerung durch rekursive Implementierung . . . . .	54
3.19. Relativer Quantisierungsfehler . . . . .	56
3.20. Rekursive Implementierung . . . . .	58
4.1. Magnetisch gelagerte Platte mit Tischtennisball . . . . .	62
4.2. Positionsverlauf und Kollisionsindikator während einer Kollision . . .	63
4.3. Detektionsdauer . . . . .	65
4.4. Minimal detektierbare Fallhöhen . . . . .	66
4.5. Spektren des Rauschens und der Ableitungsschätzer . . . . .	67

4.6. Ableitungen der Impulsantwort des Suchfilters . . . . .	69
4.7. Rekursive Implementierung des Kollisionsindikators . . . . .	70

# Notation

## Konstanten

$e$	Euler'sche Zahl: $e := \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \approx 2,718$
$\gamma$	Euler-Mascheroni-Konstante: $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \approx 0,5772$
$\iota$	Imaginäre Einheit: $\iota := \sqrt{-1}$

## Mengen

$\mathbb{N}$	Natürliche Zahlen $\{0, 1, \dots\}$
$\mathbb{N}^+$	Positive natürliche Zahlen $\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Ganze Zahlen $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	Negative ganze Zahlen $\{\dots, -2, -1\}$
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Positive reelle Zahlen $\{x \in \mathbb{R}   x > 0\}$
$\mathbb{R}^-$	Negative reelle Zahlen $\{x \in \mathbb{R}   x < 0\}$
$\mathbb{C}$	Komplexe Zahlen
$\mathcal{K}$	Absolut integrierbare Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen
$\mathcal{C}^p$	$p$ -fach stetig differenzierbare Funktionen
$\mathcal{L}^p$	Funktionen mit beschränkter $\mathcal{L}^p$ -Norm: $\mathcal{L}^p([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \left( \int_a^b  f(\tau) ^p d\tau \right)^{1/p} < \infty \right\}$
$\pi_n$	Polynomiale Funktionen $n$ -ten Grades:

$$\pi_n := \left\{ p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p(\tau) = \sum_{k=0}^n c_k \tau^k, c_k \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathcal{O}(\cdot)$	Asymptotische obere Schranke: $\mathcal{O}(g)$ für $x \rightarrow x_0$ $:= \{f \mid \exists c > 0 \exists x^* \forall x,  x - x_0  <  x - x^*  :  f(x)  \leq c  g(x) \}$
$\mathcal{J}_T(t)$	Gleitendes Zeitfenster: $\mathcal{J}_T(t) := [t - T, t]$

## Operatortnotation

$c, f(t)$	Zahlen, Funktionswerte
$\{c\}$	Konstante Funktion: $t \mapsto c$
$f, \{f(t)\}$	Funktion: $t \mapsto f(t)$
$s$	Ableitungsoperator
$(\cdot)^{-1}$	Inverse eines Operators
$\frac{d}{ds}$	Algebraische Ableitung

## Operationen

$\bar{z}$	Konjugiert komplexe Zahl: $\bar{z} := \Re(z) - \imath \Im(z)$
$A^\top$	Transponierte einer Matrix / eines Vektors: $(a_{ij})^\top := (a_{ji})$
$f \circ g$	Funktionsverkettung: $f \circ g(t) := f(g(t))$
$f \cdot g$	Punktweise Multiplikation: $f \cdot g(t) := f(t) g(t)$
$f g$	Faltungsprodukt: $f g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$
$\ f\ $	Norm von $f$
$d(f, g)$	Abstand zwischen $f$ und $g$
$\langle f, g \rangle$	Inneres Produkt (Skalarprodukt)
$m_k(f)$	$k$ -tes Moment: $m_k(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k f(\tau) d\tau$
$m_k^*(f)$	$k$ -tes zentrales Moment: $m_k^*(f) := \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - m_1(f))^k f(\tau) d\tau$
$\lceil x \rceil$	Runden zur nächsten ganzen Zahl
$\lfloor x \rfloor$	Abrunden zur nächsten ganzen Zahl
$\lceil x \rceil$	Aufrunden zur nächsten ganzen Zahl

$f = g$	Gleichheit: $f = g \iff d(f, g) = 0$
$f \equiv g$	Identität: $f \equiv g \iff \forall \tau : f(\tau) = g(\tau)$
$\mathcal{F}\{g\}$	Fourier-Transformierte: $\mathcal{F}\{g\}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$
$\mathcal{F}^{-1}\{g\}$	Inverse Fourier-Transformierte: $\mathcal{F}^{-1}\{g\}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$
$\hat{\mathcal{F}}\{\cdot\}$	Approximierte Fourier-Transformierte: $\hat{\mathcal{F}}\{\cdot\} \approx \mathcal{F}\{\cdot\}$
$r\{f\}$	Impulsautokorrelationsfunktion: $r\{f\}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau + t) \bar{f}(\tau) d\tau$
$\mathcal{E}\{X\}$	Erwartungswert der Zufallsvariable $X$
$\mathcal{P}\{A\}$	Wahrscheinlichkeit des Zufallsereignisses $A$
$R\{f\}$	Autokorrelationsfunktion: $R\{f\}(\tau) := \mathcal{E}\{f(t_0) f(t_0 + \tau)\}$
$P(f)$	Mittlere Leistung: $P(f) := R\{f\}(0)$
$S\{f\}$	Leistungsdichtespektrum: $S\{f\} := \mathcal{F}\{R\{f\}\}$
$\delta$	Verschiebeoperator: $\delta f(t) := f(t - 1)$ , $\delta^\theta f(t) := f(t - \theta)$
$\Delta$	Vorwärtsdifferenzoperator: $\Delta := \delta^{-1} - 1$
$\nabla$	Rückwärtsdifferenzoperator: $\nabla := 1 - \delta$

## Funktionen

$G$	Gauss-Funktion: $G(t) := e^{-\frac{t^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$
$\text{erf}$	Gauss'sches Fehlerintegral: $\text{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$
$H_\Theta$	Sprungfunktion (Heaviside-Funktion): $H_\Theta(t) := \begin{cases} 0, & t \leq \Theta \\ 1, & t > \Theta \end{cases}$
$R_\Theta$	Rampenfunktion: $R_\Theta(t) := \begin{cases} 0, & t \leq \Theta \\ t - \Theta, & t > \Theta \end{cases}$
$R$	Bei Null startende Rampen-Funktion: $R = R_0$
$\Gamma$	Gamma-Funktion: $\Gamma(x) := \int_0^\infty \tau^{x-1} e^{-\tau} d\tau$
$B$	Beta-Funktion: $B(x, y) := \int_0^1 \tau^{x-1} (1 - \tau)^{y-1} d\tau = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$
$B_t$	Unvollständige Beta-Funktion: $B_t(x, y) := \int_0^t \tau^{x-1} (1 - \tau)^{y-1} d\tau$
$I_t$	Regularisierte unvollständige Beta-Funktion: $I_t(x, y) := B_t(x, y) / B(x, y)$

$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} := \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n+1-k)}$
$t^{\underline{n}}$	Fallende Faktorielle: $t^{\underline{n}} := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}$
$t^{\overline{n}}$	Steigende Faktorielle: $t^{\overline{n}} := \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}$
$\Psi$	Digamma-Funktion: $\Psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma} = (\ln \Gamma)'$
$J_\nu$	Bessel-Funktion erster Gattung: $J_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+1+k)k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$
$j_{\nu,k}$	$k$ -te positive Nullstelle von $J_\nu$
$M$	Kummer'sche M-Funktion: $M(a, b, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}$
$M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$	Kummer'sche M-Funktion: $M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(z) := M(\alpha + i - k + 1, \alpha + \beta + i + 2, z)$
$t_{n,L}$	Diskretes Tschebischeff-Polynom $n$ -ten Grades: $t_{i,L} := i! \Delta^i g \quad \text{mit } g(x) := \binom{x}{i} \binom{x-L}{i}$
$w^{(\alpha,\beta)}$	Gewichtsfunktion der Jacobi-Polynome: $w^{(\alpha,\beta)}(\tau) := \begin{cases} (1-\tau)^\alpha (\tau+1)^\beta, & \tau \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$P_n$	Legendre-Polynom $n$ -ten Grades: $P_n(\tau) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^n} \binom{n}{k} (1-\tau)^{n-k} (\tau+1)^k$
$P_n^{(\alpha,\beta)}$	Jacobi-Polynom $n$ -ten Grades: $P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau) := \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^n} \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} (1-\tau)^{n-k} (\tau+1)^k$
$p_{n,k}^{(\alpha,\beta)}$	$k$ -te Nullstelle von $P_n^{(\alpha,\beta)}$
$R_{N,\tau}^{(\alpha,\beta)}$	Reproduzierender Kern von $\pi_N$ : $R_{N,\tau}^{(\alpha,\beta)} := \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\tau)}{\ P_i^{(\alpha,\beta)}\ ^2} P_i^{(\alpha,\beta)}$
$\phi_{T,t}$	Transformation von $J_T(t)$ auf $[-1, 1]$ : $\phi_{T,t}(\tau) := t - \frac{1-\tau}{2}T$
$\theta_T$	Transformation von $[0, T]$ auf $[-1, 1]$ : $\theta_T(\tau) := \phi_{T,t}^{-1}(t - \tau) = 1 - \frac{2}{T}\tau$

## Charakteristika algebraischer Ableitungsschätzer

$n$	Ableitungsordnung
$\gamma$	Genauigkeitsgrad
$\Delta t$	Schätzverzögerung
$N$	Polynomgrad der Approximation
$T$	Fensterbreite
$\vartheta$	Verzögerungsparameter
$\alpha, \beta$	Gewichtsfunktionspotenzen der Jacobi-Polynome
$\omega_c$	Knickfrequenz
$\mu$	Minimum der Gewichtsfunktionspotenzen: $\mu := \min\{\alpha, \beta\} + 1$
$\kappa$	Differenz der Gewichtsfunktionspotenzen: $\kappa :=  \beta - \alpha $
$\sigma$	Vorzeichen von $\beta - \alpha$ : $\sigma := \begin{cases} 1, & \beta \geq \alpha, \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$
$T_s$	Abtastperiode
$L$	Anzahl Abtastperioden je Fensterbreite: $L := T/T_s$
$\omega_N$	Nyquist-Frequenz: $\omega_N := \pi/T_s$
$\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$	Impulsantwort der algebraischen Ableitungsschätzer
$\mathbf{h}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$	Sprungantwort der algebraischen Ableitungsschätzer
$\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$	Frequenzgang: $\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := \mathcal{F}\left\{\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\right\}$
$\mathbf{r}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$	Impulsautokorrelationsfunktion: $\mathbf{r}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := \mathbf{r}\left\{\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\right\}$
$\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right _{\infty}^{-}$	Asymptotische untere Hüllkurve des Betragsgangs für $ \omega  \rightarrow \infty$
$\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right _{\infty}^{+}$	Asymptotische obere Hüllkurve des Betragsgangs für $ \omega  \rightarrow \infty$
$\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right _{\infty}$	Mittlere Asymptote des Betragsgangs für $ \omega  \rightarrow \infty$
$\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right _{\infty}^{\Delta}$	Asymptotische Welligkeit für $ \omega  \rightarrow \infty$
$\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right $	Approximation des Betragsgangs basierend auf $\left \hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}\right _{\infty}$



# 1. Einleitung

In vielen technischen Anwendungen ist die Kenntnis zeitlicher Ableitungen bestimmter Prozessgrößen wünschenswert, beispielsweise zur Verbesserung der Prozessführung oder zur Diagnose von Fehlfunktionen. Oft sind keine geeigneten Sensoren für die Ableitungen der Prozessgrößen verfügbar oder der Einsatz entsprechender Sensoren ist wirtschaftlich nicht sinnvoll. Auch erhöht jeder Sensor die Systemkosten und stellt selbst eine mögliche Fehlerquelle dar.

Daher wäre es oftmals vorteilhaft, die zeitlichen Ableitungen aus vorhandenen Messsignalen zu errechnen. Jedoch ist die Rekonstruktion von Ableitungen aus gemessenen Daten ein schlecht gestelltes inverses Problem (Engl et al., 1996; Hanke und Scherzer, 2001), so dass kleine Fehler in den Messdaten zu großen Fehlern in den rekonstruierten Ableitungen führen können. Dies äußert sich häufig in einer deutlichen Verstärkung von Messrauschen bei der Ableitungsschätzung.

In Mboup et al. (2007, 2009) wurden die sogenannten *algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster* oder, kurz, *algebraischen Ableitungsschätzer* eingeführt. Diese echtzeitfähigen Ableitungsschätzer basieren auf dem in Fliess und Sira-Ramírez (2003a); Fliess et al. (2003) eingeführten algebraischen Verfahren zur Parameteridentifikation dynamischer Systeme. Diese Identifikationsmethode und somit auch die algebraischen Ableitungsschätzer besitzen eine sehr gute Robustheit gegenüber Messrauschen, da die benötigten zeitlichen Ableitungen der Messgrößen in Integrale überführt werden, wie es für einen Spezialfall bereits in (Lanczos, 1956) als *Differentiation durch Integration* bezeichnet wurde.

Die Arbeiten Sidhom (2011), Listmann und Zhao (2013), Liu et al. (2014a) und Judalet et al. (2014) bestätigen die im Vergleich zu anderen echtzeitfähigen Ableitungsschätzverfahren, wie beispielsweise Gleitregime-Ableitungsschätzern höherer Ordnung und einem speziellen Kalman-Filter, effektivere Rauschunterdrückung der algebraischen Ableitungsschätzer. Jedoch mangelt es bis dato an praktikablen Verfahren zur zielgerichteten Wahl der Parameter der algebraischen Ableitungsschätzer. Dieser Umstand ist eine maßgebliche Motivation für die vorliegende Arbeit.

## 1.1. Stand der Technik

Die algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster wurden in den Original-Veröffentlichungen Mboup et al. (2007, 2009) mittels differentialalgebraischer Manipulationen einer abgeschnittenen Taylor-Reihe des Messsignals eingeführt. Diese Vorgehensweise ermöglicht es, Ableitungsschätzer mit Hilfe einfach anzuwendender Rechenregeln herzuleiten. Jedoch werden hierbei die resultierenden Filtereigenschaften

ten nicht ersichtlich, so dass die Parameter der Ableitungsschätzer in einer praktischen Anwendung per Versuch und Irrtum bestimmt werden müssen.

In Nöthen (2007); Mboup et al. (2007, 2009) wurde gezeigt, dass die algebraischen Ableitungsschätzer implizit bei jeder Ausführung ein Optimierungsproblem im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate lösen, nämlich eine gewichtete lokale polynomiale Bestapproximation des abzuleitenden Signals oder, synonym, der zu schätzenden Ableitung.<sup>1</sup> Diese approximationstheoretische Sichtweise verdeutlicht sehr gut die mit den algebraischen Ableitungsschätzern erzielbare sehr effektive Glättung von Messrauschen. Außerdem wird eine wesentliche Eigenschaft der kausalen algebraischen Ableitungsschätzer deutlich, nämlich die zeitliche Verzögerung der Schätzung. Dennoch wird auch beim approximationstheoretischen Zugang nicht unmittelbar klar, wie die Parameter der algebraischen Ableitungsschätzer in praktischen Anwendungen zweckmäßig gewählt werden sollten.

In Mboup et al. (2009) wurde gezeigt, dass die algebraischen Ableitungsschätzer als lineare zeitinvariante Filter mit endlich dauernder Impulsantwort interpretiert werden können. In Kiltz und Rudolph (2013) wurde eine explizite Darstellung des Frequenzgangs der algebraischen Ableitungsschätzer hergeleitet und es wurde gezeigt, dass die algebraischen Ableitungsschätzer als Tiefpassfilter interpretiert werden können, die auf der zu schätzenden Ableitung operieren, wobei die Tiefpasswirkung anhand der Knickfrequenz und der asymptotischen Stoppbandsteigung sehr anschaulich charakterisiert werden kann. Außerdem wurde in Kiltz und Rudolph (2013) gezeigt, wie aus einer gewünschten Knickfrequenz und einer gewünschten asymptotischen Stoppbandsteigung die erforderlichen Parameter der algebraischen Ableitungsschätzer berechnet werden können. Dies vereinfacht die Parameterwahl der algebraischen Ableitungsschätzer und ihren Vergleich mit anderen Filtern zur Ableitungsschätzung in der Praxis erheblich.

Zur Echtzeit-Implementierung werden die algebraischen Ableitungsschätzer als Faltungssummen approximiert. Nach Kenntnis des Autors wurde bisher nicht systematisch diskutiert, welche Abtaststrategie für die hinreichend genaue zeitdiskrete Approximation der algebraischen Ableitungsschätzer erforderlich ist. Außerdem führen nach Kenntnis des Autors die bisherigen zeitdiskreten Approximationen der algebraischen Ableitungsschätzer dazu, dass die resultierenden zeitdiskreten Filter langsam veränderliche Ableitungen systematisch falsch schätzen.

In den meisten Veröffentlichungen zu den algebraischen Ableitungsschätzern wird die Faltungssumme in jedem Abtastschritt nicht-rekursiv ausgewertet. Dies führt dazu, dass die Anzahl erforderlicher Rechenoperationen je Abtastschritt und die Anzahl der zu speichernden Filterkoeffizienten mit steigender Anzahl an Summanden

---

<sup>1</sup>Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass in der Literatur zahlreiche Verfahren zur Glättung bzw. näherungsweise numerischen Differentiation bekannt sind, die auf einer lokalen polynomialen Bestapproximation beruhen, siehe bspw. Savitzky und Golay (1964); Bromba (1978); Vasseur et al. (1979); Bromba (1981); Bromba und Ziegler (1983); Hamming (1989); Wand und Jones (1995); Fan und Gijbels (1996). Diese Verfahren wurden für zeitdiskrete Messdaten hergeleitet, während die algebraischen Ableitungsschätzer zeitkontinuierlich hergeleitet wurden.

der Faltungssumme linear ansteigt und somit sehr groß werden kann. Aus Lindert und Rudolph (2003); Gensior et al. (2007, 2008); Gensior (2008) ist ein Verfahren zur rekursiven Auswertung der algebraischen Ableitungsschätzer bekannt. Hierdurch kann die Rechenzeit- und Speicher-Effizienz der zeitdiskretisierten algebraischen Ableitungsschätzer wesentlich verbessert werden, da die Anzahl an Rechenoperationen je Abtastschritt und die Anzahl zu speichernder Filterkoeffizienten unabhängig von der Anzahl an Summanden der Faltungssumme wird. Jedoch ist das Verfahren aus Lindert und Rudolph (2003); Gensior et al. (2007, 2008); Gensior (2008) nicht für alle Parameterkombinationen der algebraischen Ableitungsschätzer anwendbar und die Genauigkeit der zeitdiskreten Approximation verschlechtert sich mit zunehmender Stoppbandsteigung.

## 1.2. Beitrag dieser Arbeit

Diese Arbeit liefert neue Resultate zur praktischen Anwendung der algebraischen Ableitungsschätzer, insbesondere zur Wahl ihrer Filterparameter und zur zeitdiskreten Implementierung. Der Einsatz der algebraischen Ableitungsschätzer wird anhand zahlreicher akademischer Beispiele und einer Fallstudie verdeutlicht.

Zum besseren Verständnis der Filterparameter werden die Eigenschaften der algebraischen Ableitungsschätzer im Zeit- und im Frequenzbereich ausführlicher als bisher erläutert. Zur Wahl der Filterparameter anhand einer gewünschten Filtercharakteristik werden die Ergebnisse aus Kiltz und Rudolph (2013) wesentlich erweitert; so werden beispielsweise neue Asymptoten des Betragsgangs angegeben, die eine Berücksichtigung der Stoppbandwelligkeit der algebraischen Ableitungsschätzer bei der Filtersynthese erlauben. Im Vergleich zu Kiltz und Rudolph (2013) wird genauer diskutiert, wie eine gewünschte Tiefpass-Charakteristik mit möglichst geringer Schätzverzögerung realisiert werden kann; dies ist für die Rückführung der geschätzten Ableitungen im geschlossenen Regelkreis wichtig. Außerdem wird gezeigt, wie mit den algebraischen Ableitungsschätzern ein im Sinne der Unschärferelation nahezu optimaler Kompromiss aus der Zeit- und der Frequenzauflösung bei der Ableitungsschätzung erzielt werden kann. Ein wichtiger Einsatzzweck der algebraischen Ableitungsschätzer ist die Detektion von Diskontinuitäten in den zeitlichen Ableitungen schwach stationär verrauschter Messsignale; hierzu wird beschrieben, wie ein hinsichtlich des Signal-Rausch-Verhältnisses optimales Suchfilter mit den algebraischen Ableitungsschätzern angenähert werden kann.

Zur zeitdiskreten Implementierung der algebraischen Ableitungsschätzer wird eine Abschätzung für die erforderliche Abtastrate auf der Basis des Abtasttheorems angegeben. Außerdem wird dargestellt, wie der bisher übliche systematische Schätzfehler der zeitdiskretisierten algebraischen Ableitungsschätzer bei langsam veränderlichen Ableitungen durch eine Normierung der Filterkoeffizienten kompensiert werden kann. Es wird gezeigt, dass bei algebraischen Ableitungsschätzern mit einer großen Stoppbandsteigung durch Kürzen des Zeitfensters eine wesentliche Verbesserung der

Schätzverzögerung und der Echtzeit-Effizienz erreicht werden kann, ohne die Genauigkeit der Schätzung wesentlich zu verschlechtern. Außerdem werden zwei neue Verfahren zur rekursiven Implementierung der algebraischen Ableitungsschätzer vorgeschlagen, wovon ein Verfahren für beliebige algebraische Ableitungsschätzer anwendbar ist; das zweite Verfahren eignet sich zwar nur für bestimmte algebraische Ableitungsschätzer, vermeidet aber einen Approximationsschritt des ersten Verfahrens und weist daher eine besonders hohe Genauigkeit auf.

### 1.3. Gliederung dieser Arbeit

Der verbleibende Teil dieser Arbeit ist wie folgt gegliedert. In Kapitel 2 werden wesentliche Aspekte der algebraischen Ableitungsschätzer anhand von Schätzern für die erste zeitliche Ableitung diskutiert. Obwohl die resultierenden mathematischen Ausdrücke besonders einfach sind, können dennoch die meisten Grundlagen motiviert werden, die für das Verständnis allgemeinerer algebraischer Ableitungsschätzer erforderlich sind. So werden, ausgehend von einer Herleitung eines Ableitungsschätzers in Analogie zu den Originalveröffentlichungen Mboup et al. (2007, 2009), dessen Filtereigenschaften im Zeit- und Frequenzbereich erörtert und die approximationstheoretische Interpretation inklusive der wichtigen Konzepte des Genauigkeitsgrades und der Schätzverzögerung motiviert. Es wird verdeutlicht, was es bedeutet, einen algebraischen Ableitungsschätzer auf ein nicht differenzierbares Signal anzuwenden, und worauf bei der Echtzeit-Implementierung geachtet werden sollte. Zum besseren Verständnis dieser Arbeit sollten auch diejenigen Leser, die mit den algebraischen Ableitungsschätzern bereits vertraut sind, Kapitel 2 zumindest überfliegen.

Kapitel 3 verallgemeinert die Betrachtungen aus Kapitel 2 auf Schätzer für beliebige ganzzahlige Ableitungsordnungen. Die approximationstheoretische Interpretation der algebraischen Ableitungsschätzer als Ausgangspunkt der Betrachtungen gestattet eine anschauliche Motivation aller Filterparameter und eine systematische Diskussion des bei der Ableitungsschätzung auftretenden Schätzfehlers. Anschließend werden die Zeit- und Frequenzbereichseigenschaften der algebraischen Ableitungsschätzer ausführlich diskutiert. Neben Hinweisen zur vorteilhaften Realisierung einer gewünschten asymptotischen Filtercharakteristik wird erläutert, warum die Hintereinanderschaltung mehrerer algebraischer Ableitungsschätzer vorteilhaft im Vergleich zur Verwendung eines einzelnen algebraischen Ableitungsschätzers sein kann und wie ein optimales Suchfilter für Diskontinuitäten in den Ableitungen verrauschter Messsignale mit den algebraischen Ableitungsschätzern angenähert werden kann. Anschließend wird die zeitdiskrete Implementierung der algebraischen Ableitungsschätzer ausgehend von der Wahl der Abtastrate über die Wahl des für die Zeitdiskretisierung erforderlichen Quadraturverfahrens bis hin zu verschiedenen Möglichkeiten zur Verbesserung der Echtzeit-Effizienz beschrieben.

Während in den vorherigen Kapiteln einzelne Eigenschaften der algebraischen Ableitungsschätzer an kurzen Beispielen verdeutlicht werden, wird in Kapitel 4 die

praktische Anwendung der algebraischen Ableitungsschätzer anhand einer umfangreicheren Fallstudie demonstriert, nämlich der modellbasierten Echtzeit-Diagnose von Kollisionen bei einem Laborexperiment. Wesentlich hierbei ist die Generierung eines hinsichtlich Messrauschens robusten Residuums, welches bis zum Auftreten einer Kollision näherungsweise verschwindet und durch eine Kollision deutlich angeregt wird. In Kiltz et al. (2013); Kiltz und Rudolph (2013) wurde gezeigt, dass sich die algebraischen Ableitungsschätzer prinzipiell sehr gut für diese Aufgabe eignen. Mit den neueren, in Kapitel 3 beschriebenen Empfehlungen zur Parameterwahl, insbesondere der näherungsweise Nachbildung optimaler Suchfilter für Diskontinuitäten, wird eine bessere Signalqualität des Residuums im Vergleich zu Kiltz et al. (2013); Kiltz und Rudolph (2013) erreicht, wodurch in der Praxis Kollisionen mit geringerem Aufprallimpuls detektiert werden können. Außerdem wird mit den in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren zur rekursiven Implementierung der algebraischen Ableitungsschätzer eine wesentliche Reduktion der Anzahl der für die Echtzeit-Berechnung des Residuums erforderlichen Rechenoperationen und des Speicherbedarfs erreicht.

Jedes der vorherigen Kapitel endet mit einer kurzen Zusammenfassung. Kapitel 5 fasst die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit, insbesondere die praktischen Hinweise zur Parameterwahl der algebraischen Ableitungsschätzer, nochmals zusammen und gibt einen kurzen Ausblick auf deren weitere mögliche Anwendungen. Zur Verbesserung der Nachvollziehbarkeit dieser Arbeit werden die wesentlichen erforderlichen mathematischen Grundlagen in Anhang A wiederholt, während die teilweise sehr technischen, für die praktische Anwendung der algebraischen Ableitungsschätzer nicht unbedingt erforderlichen Herleitungen der in den Kapiteln 2 und 3 benutzten Formeln in Anhang B zusammengefasst sind.



## 2. Tutorium: Algebraische Schätzung der ersten Ableitung

In diesem Kapitel wird die *algebraische Schätzung* der ersten Ableitung  $t \mapsto \dot{x}(t)$  eines Signals  $t \mapsto x(t)$  diskutiert. Zur Anwendung der algebraischen Identifikationsmethode aus Fliess et al. (2003); Fliess und Sira-Ramírez (2003a) ist ein mathematisches Modell erforderlich, in dem der gesuchte Schätzwert als Parameter auftritt. In Mboup et al. (2007, 2009) wurde hierzu als lokal gültiges Signalmodell das Taylor'sche<sup>2</sup> Polynom vorgeschlagen: Falls  $x$  stetige erste und zweite Ableitungen  $\dot{x}$  und  $\ddot{x}$  besitzt, gilt nach dem Satz von Taylor  $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \mathcal{O}(t^2)$  für  $t \rightarrow 0$ . Daher ist die gesuchte Ableitung von  $x$  für hinreichend kleine  $t$  näherungsweise konstant:

$$\dot{x}(t) \approx c. \quad (2.1)$$

Durch Integration von (2.1) auf dem Intervall  $[0, T]$  erhält man als Schätzwert für  $\dot{x}(T)$  den Differenzenquotienten  $c \approx (x(T) - x(0))/T$ . Um zu einer Schätzung  $t \mapsto \hat{x}(t)$  der Funktion  $\dot{x}$  zu gelangen, wird das Signal  $x$  synchron zu  $t$  verschoben:

$$\hat{x}(t) = \frac{x(t) - x(t - T)}{T}. \quad (2.2)$$

Diese Schätzung nutzt zu jedem Auswertzeitpunkt lediglich zwei Werte von  $x$  und ist daher empfindlich gegenüber Messrauschen. Im Gegensatz hierzu berücksichtigen *algebraische Ableitungsschätzer* nach Mboup et al. (2007, 2009) den Verlauf von  $x$  auf  $[t - T, t]$  und sind daher robuster gegenüber Messrauschen, siehe Abbildung 2.1.

<sup>2</sup>Brook Taylor (1685-1731)

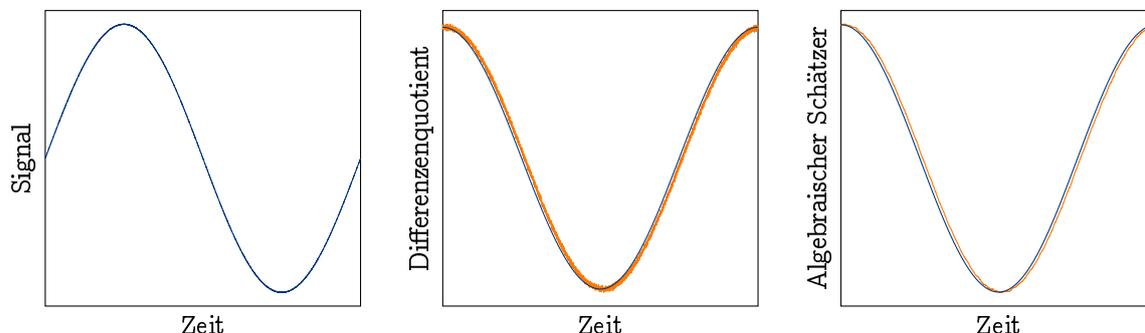


Abbildung 2.1.: Schätzung der ersten Ableitung eines mit einem bandbegrenzten Rauschen überlagerten sinusförmigen Signals mit dem Differenzenquotienten (2.2) und dem algebraischen Schätzer (2.8).

## 2.1. Algebraische Ableitungsschätzung

Einen sehr eleganten Formalismus zur Herleitung des in Abbildung 2.1 angewandten algebraischen Schätzers bietet Mikusiński<sup>3</sup> Operatorenkalkül, dessen für diese Arbeit wesentliche Eigenschaften in Anhang A.1.1 zusammengestellt sind. In Operatornotation lautet (2.1)  $sx - x(0) \approx c/s$ , weshalb durch *algebraische Differentiation*  $\frac{d}{ds}$  der Anfangswert  $x(0)$  eliminiert werden kann:

$$x + s \frac{dx}{ds} \approx -\frac{c}{s^2}. \quad (2.3)$$

Die linke Seite von (2.3) ist nicht realisierbar, da hierzu eine zeitliche Differentiation von  $x$  erforderlich wäre. Daher wird (2.3) zeitlich integriert, also in Operatornotation mit dem Integraloperator  $s^{-1}$  multipliziert:

$$\frac{x}{s} + \frac{dx}{ds} \approx -\frac{c}{s^3}. \quad (2.4)$$

Mit den Rechenregeln  $\frac{dx}{ds} = \{-t x(t)\}$  und  $1/s^3 = \{t^2/2\}$  liefert die Auswertung von (2.4) zum Zeitpunkt  $T$  die Schätzvorschrift

$$c \approx \frac{2}{T} x(T) - \frac{2}{T^2} \int_0^T x(\tau) d\tau. \quad (2.5)$$

Dieser Ausdruck kann realisiert werden, da keine zeitliche Differentiation von  $x$  vorkommt. Jedoch wirkt sich Messrauschen infolge des ersten Summanden auf der rechten Seite von (2.5) direkt auf das Schätzergebnis aus. Um zu einer gegenüber Messrauschen robusteren Schätzung zu gelangen, wird (2.4) ein weiteres Mal zeitlich integriert:

$$\frac{x}{s^2} + \frac{1}{s} \frac{dx}{ds} \approx -\frac{c}{s^4},$$

was, ausgewertet zum Zeitpunkt  $T$ , folgender Schätzvorschrift entspricht:

$$c \approx \frac{6}{T^3} \int_0^T (2\tau - T) x(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

Hierbei wirkt sich Messrauschen im Gegensatz zu (2.5) nur zeitlich integriert auf das Schätzergebnis aus, was sich in Abbildung 2.1 in der im Vergleich zum Differenzenquotienten wesentlich effektiveren Rauschunterdrückung äußert. Ausgehend von (2.6) kann eine Schätzung  $t \mapsto \hat{x}(t)$  der Funktion  $\dot{x}$  auf zwei Arten definiert werden:

1. Die rechte Seite von (2.6) wird als Funktion der unabhängigen Variablen  $T$  interpretiert:

$$\hat{x}(t) := \frac{6}{t^3} \int_0^t (2\tau - t) x(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Mit steigendem  $t$  wird die Integrationsdauer größer, weshalb (2.7) ein *algebraischer Ableitungsschätzer mit wachsendem Zeitfenster* ist. Der Schätzer (2.7)

---

<sup>3</sup>Jan Mikusiński (1913-1987)

ist ein lineares zeitvariantes Filter. Da mit steigendem  $t$  das Signalmodell (2.1) ungenauer wird, ist eine Strategie zum Zurücksetzen des Integrals erforderlich. Algebraische Ableitungsschätzer mit wachsendem Zeitfenster wurden in Fliess und Sira-Ramírez (2003b) eingeführt und werden in Fliess und Sira-Ramírez (2004); Reger et al. (2005, 2006); Reger und Jouffroy (2009); García-Rodríguez et al. (2009); de Brito Novaes und Pereira da Silva (2009); Lopez Murgueytio et al. (2013); Morales et al. (2014) diskutiert.

2. Die Integrationsdauer  $T$  wird beibehalten und  $x$  synchron zu  $t$  verschoben:

$$\hat{x}(t) := \frac{6}{T^3} \int_0^T (2\tau - T) x(t - T + \tau) d\tau. \quad (2.8)$$

In diesem Fall wird  $\hat{x}(t)$  aus dem Verlauf von  $x$  auf  $[t - T, t]$  berechnet, weshalb (2.8) ein *algebraischer Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster* ist. Der Schätzer (2.8) ist ein lineares zeitinvariantes Filter. Der *Fensterbreite*  $T$  kommt eine entscheidende Bedeutung zu: Eine große Fensterbreite bewirkt eine effektive Glättung von Messrauschen, führt jedoch auch zu einer ungenauen Rekonstruktion der interessierenden Ableitung. Algebraische Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster wurden in Mboup et al. (2007) eingeführt und werden in Mboup et al. (2009); Nöthen (2007); Barbot et al. (2007); Zehetner et al. (2007); Gensior et al. (2007); Mai und Hillermeier (2008); Gensior et al. (2008); Gensior (2008); Reger und Jouffroy (2008, 2009); Liu (2011); Liu et al. (2011a,b, 2012, 2014a,b); Kiltz et al. (2012, 2013, 2014); Kiltz und Rudolph (2013); Mboup und Riachy (2014); Judalet et al. (2014); Hu und Mao (2014); Tisserand et al. (2015); Schwalb Moraes und Pereira da Silva (2015a,b) diskutiert.

Im Gegensatz zu den algebraischen Ableitungsschätzern mit wachsendem Zeitfenster haben jene mit gleitendem Zeitfenster zu jedem Auswertzeitpunkt ein gleichbleibendes Übertragungsverhalten und für ihre Parametrierung kann auf mächtige Methoden für lineare zeitinvariante Systeme zurückgegriffen werden. Außerdem können die algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster sehr effizient und numerisch stabil in Echtzeitanwendungen implementiert werden. Daher werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich algebraische Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster betrachtet. Diese werden im Folgenden kurz als *algebraische Ableitungsschätzer* bezeichnet. Führt man in (2.8) die Substitution  $\bar{\tau} = \tau - T/2$  durch, so erhält man

$$\hat{x}(t) = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{T} \right)^3 \int_{-T/2}^{T/2} \bar{\tau} x \left( t - \frac{T}{2} + \bar{\tau} \right) d\bar{\tau}.$$

Dies entspricht der *Lanczos'schen*<sup>4</sup> *verallgemeinerten Ableitung* (Lanczos, 1956), ausgewertet zum Zeitpunkt  $t - T/2$ . Lanczos bezeichnete diese näherungsweise Differentiation treffend als *Differentiation durch Integration*.

---

<sup>4</sup>Cornelius Lanczos (1893-1974)

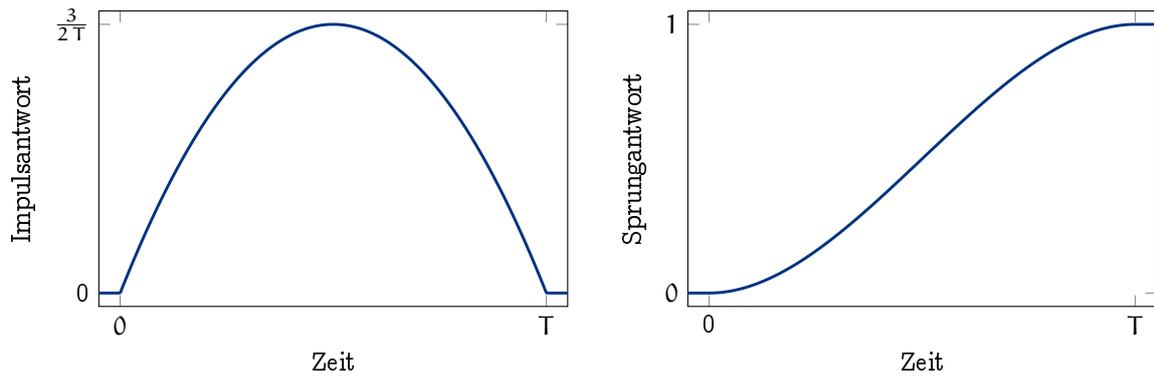


Abbildung 2.2.: Impuls- und Sprungantwort des algebraischen Ableitungsschätzers (2.9).

## 2.2. Filtereigenschaften

Zur Analyse der Filtereigenschaften wird (2.8) mittels partieller Integration in

$$\hat{\chi}(t) = \frac{6}{T^3} \int_0^T (T - \tau) \tau \dot{\chi}(t - T + \tau) d\tau \quad (2.9)$$

überführt. Man beachte, dass, unabhängig vom Verlauf des Messsignals  $\chi$ , die üblicherweise bei der partiellen Integration auftretenden Randterme in diesem Fall infolge der Nullstellen von  $(T - \tau) \tau$  an den Integrationsrändern verschwinden. Führt man in (2.9) die Substitution  $\bar{\tau} = t - T + \tau$  durch, so erhält man

$$\hat{\chi}(t) = \frac{6}{T^3} \int_{t-T}^t (t - \bar{\tau}) (T - t + \bar{\tau}) \dot{\chi}(\bar{\tau}) d\bar{\tau}. \quad (2.10)$$

Definiert man nun

$$g(t) := \begin{cases} \frac{6}{T^3} (T - t) t, & t \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.11)$$

so kann (2.10) in Operatornotation als Faltungsprodukt geschrieben werden:

$$\hat{\chi} = g \dot{\chi}. \quad (2.12)$$

Dies bedeutet, dass die Schätzung (2.8) der Anwendung eines linearen zeitinvarianten Filters mit der Impulsantwort  $g$  auf die gesuchte Ableitung  $\dot{\chi}$  entspricht und daher mit der Impulsantwort identifiziert werden kann (Oppenheim und Willsky, 1997). In Abbildung 2.5 sind die Impulsantwort  $g$  und die zugehörige Sprungantwort

$$h := \frac{g}{s} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left(3 - 2\frac{t}{T}\right), & 0 < t \leq T \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

dargestellt. Man erkennt die Achsensymmetrie von  $g(t)$  zu  $t = T/2$ , die zu einer Punktsymmetrie von  $h$  bezüglich des Punktes  $(T/2, 1/2)$  führt. Da  $g$  nur auf dem kompakten Intervall  $[0, T]$  von Null verschieden ist, ist der algebraische Ableitungsschätzer ein Filter mit endlicher Impulsantwortdauer, ein sogenanntes *FIR-Filter*

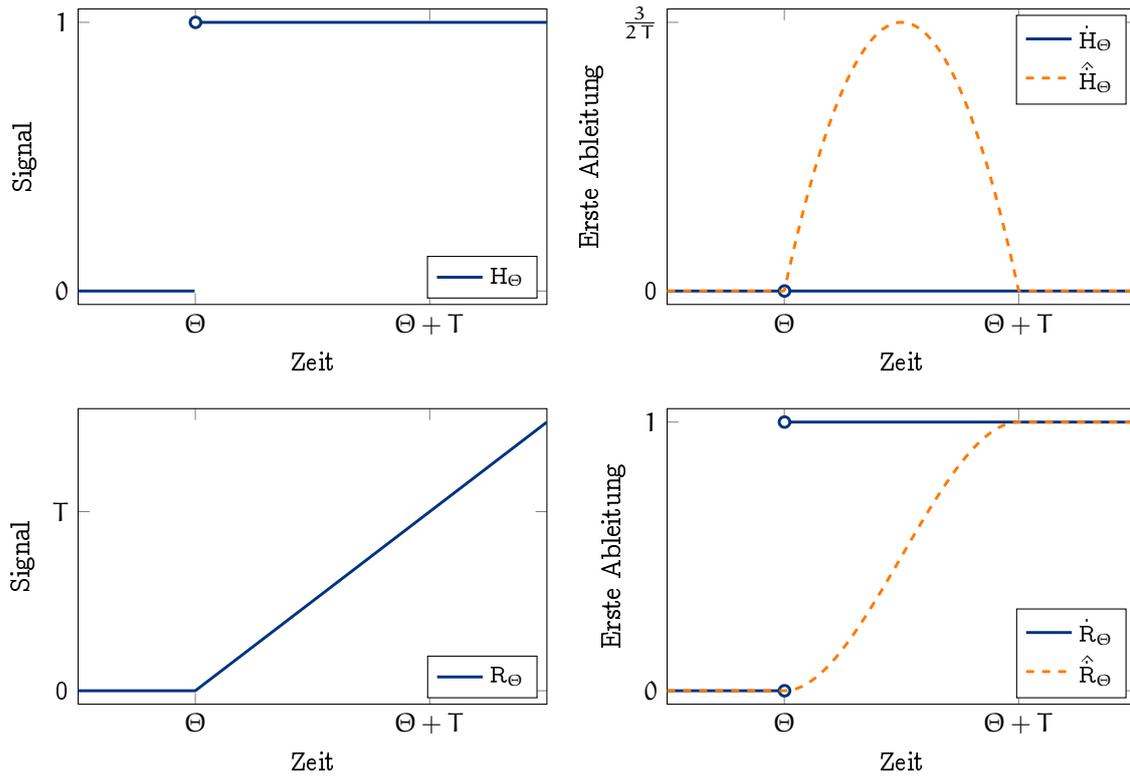


Abbildung 2.3.: Antwort des algebraischen Ableitungsschätzers (2.8) auf die Sprung- und die Rampenfunktion.

(engl. *finite impulse response*) (Oppenheim und Schaffer, 2009). Partielle Integration von (2.12) liefert

$$\hat{\chi}(t) = \int_{t-T}^t g(t-\tau) \dot{\chi}(\tau) d\tau = \underbrace{g(T)}_{=0} \chi(t-T) - \underbrace{g(0)}_{=0} \chi(t) + \int_{t-T}^t \dot{g}(t-\tau) \chi(\tau) d\tau,$$

so dass der algebraische Ableitungsschätzer (2.8) auch als Anwendung eines FIR-Filters mit der Impulsantwort  $\dot{g}$  auf das Signal  $\chi$  interpretiert werden kann:

$$\hat{\chi} = \dot{g} \chi. \quad (2.13)$$

Während sich die Darstellung (2.12) besonders zur Erläuterung der Filtereigenschaften des algebraischen Ableitungsschätzers und somit zur Herleitung von Parametrierungsregeln eignet, ist (2.13) die Grundlage seiner Echtzeit-Implementierung.

**Ausgangssignal bei nicht-differenzierbaren Eingangssignalen** Das Filter (2.8) antwortet auf die Sprungfunktion (A.4) mit seiner (zeitlich verschobenen) Impulsantwort:

$$\hat{H}_\Theta = s g H_\Theta = \delta^\Theta g, \quad (2.14)$$

und auf die Rampenfunktion

$$R_\Theta := \frac{H_\Theta}{s} = \begin{cases} 0, & t \leq \Theta \\ t - \Theta, & \text{sonst} \end{cases}$$

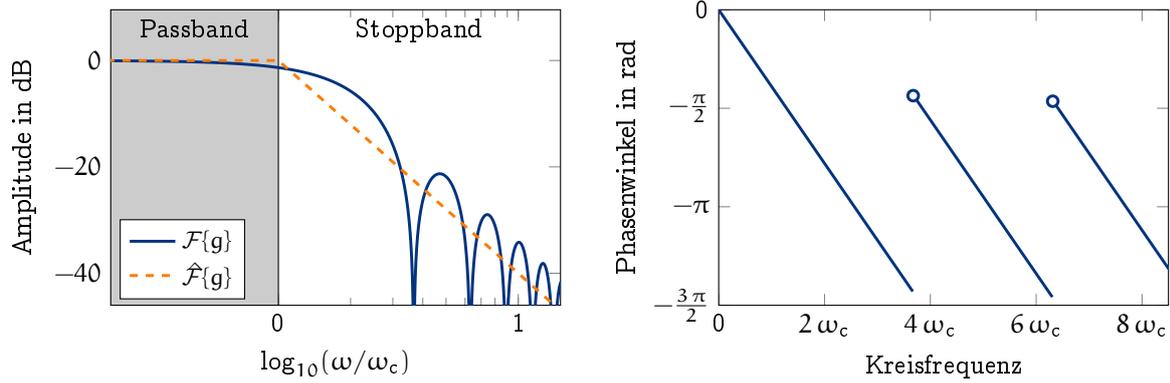


Abbildung 2.4.: Amplituden- und Phasengang des algebraischen Ableitungsschätzers (2.9) zusammen mit der Asymptote (2.17).

mit seiner Sprungantwort:

$$\hat{R}_\Theta = g H_\Theta = \delta^\Theta \frac{g}{s} = \delta^\Theta h,$$

siehe Abbildung 2.3. Obwohl weder die Sprung- noch die Rampenfunktion differenzierbar sind, ist das Ausgangssignal des Ableitungsschätzers in beiden Fällen stetig.

**Frequenzgang** Aus (2.12) folgt die Fourier-Transformierte<sup>5</sup> der Schätzung  $\hat{x}$  als

$$\mathcal{F}\{\hat{x}\}(\omega) = \mathcal{F}\{g\}(\omega)\mathcal{F}\{x\}(\omega) = \omega \mathcal{F}\{g\}(\omega)\mathcal{F}\{x\}(\omega). \quad (2.15)$$

Der Faktor  $\omega$  auf der rechten Seite von (2.15) entspricht der typischen Verstärkung um 20 dB je Frequenzdekade infolge zeitlicher Differentiation. Der Ableitungsschätzer muss diese Verstärkung bei hochfrequenten Signalanteilen überkompensieren, um Messrauschen zu unterdrücken. In Abschnitt 3.3 wird die Fourier-Transformierte von  $g$  hergeleitet:

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = e^{-\omega \frac{T}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{(\omega T)^{\frac{3}{2}}} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (2.16)$$

mit der Bessel-Funktion<sup>6</sup>  $J_{3/2}$  erster Gattung der Ordnung  $3/2$ , siehe Anhang A.4.2. Die Nullstellen  $j_{3/2,k}$  der Bessel-Funktion führen dazu, dass  $\mathcal{F}\{g\}$  Nullstellen  $\omega_k = 2j_{3/2,k}/T$  aufweist, siehe Abbildung 2.4. Hierdurch können harmonische Störungen ohne zusätzliche Filter eliminiert werden. Eine Asymptote von  $\mathcal{F}\{g\}$  ist gegeben durch

$$\hat{\mathcal{F}}\{g\}(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ \frac{6}{|\omega T|^2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \omega_c = \sqrt{6}/T, \quad (2.17)$$

siehe Abschnitt 3.3. Das bedeutet, dass Frequenzen  $\omega \leq \omega_c$  näherungsweise konstant verstärkt werden, während Frequenzen  $\omega > \omega_c$  mit steigender Frequenz näherungsweise um 40 dB je Frequenzdekade abgeschwächt werden. Insbesondere übersteigt die-

<sup>5</sup>Jean Baptiste Fourier (1768-1830)

<sup>6</sup>Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

se Abschwächung die Verstärkung infolge der Differentiation um 20 dB je Frequenzdekade. Der algebraische Ableitungsschätzer (2.9) hat also ausgeprägte Tiefpasseigenschaften. Der Bereich  $|\omega| \leq \omega_c$  wird *Passband* genannt,  $|\omega| > \omega_c$  *Stoppband* und  $\omega_c$  *Knickfrequenz*, siehe Abbildung 2.4. Der Phasengang des Ableitungsschätzers lautet nach Abschnitt 3.3

$$\arg \mathcal{F}\{g\}(\omega) = -\frac{T}{2}\omega + \frac{\pi}{T} \sum_{k \geq 0} H_{\omega_k}(\omega).$$

Da die Diskontinuitäten im Phasengang lediglich an den Nullstellen des Frequenzgangs auftreten, ist die *Gruppenlaufzeit* (Papoulis, 1962)

$$-\frac{d \arg \mathcal{F}\{g\}}{d\omega}(\omega) = \frac{T}{2}, \quad \omega \neq \omega_k, \quad (2.18)$$

mit Ausnahme der Nullstellen  $\omega_k$  konstant. Dies ist eine Konsequenz der Achsensymmetrie der Impulsantwort  $g$  (Papoulis, 1962). Filter mit konstanter Gruppenlaufzeit werden *linearphasig* oder, synonym, *phasenverzerrungsfrei* genannt, da sämtliche Frequenzanteile des Eingangssignals mit derselben Verzögerung (lediglich entsprechend dem Amplitudengang verstärkt) im Ausgangssignal sichtbar werden.

**Vergleich mit IIR-Filtern** Der Frequenzgang linearer zeitinvarianter Tiefpassfilter zweiter Ordnung, die einer Eingangs-Ausgangs-Differentialgleichung

$$\frac{1}{\omega_c^2} \frac{d^2 \hat{x}}{dt^2} + \frac{2\zeta}{\omega_c} \frac{d\hat{x}}{dt} + \hat{x} = \dot{x}, \quad \zeta \geq 0, \quad (2.19)$$

vom Eingang  $\dot{x}$  zum Ausgang  $\hat{x}$  genügen, besitzt ebenfalls die Asymptote (2.17) (Oppenheim und Willsky, 1997). Filter der Form (2.19) haben eine unendliche Impulsantwortdauer und werden daher *IIR-Filter* (engl. *infinite impulse response*) genannt (Oppenheim und Schaffer, 2009). Der *Dämpfungsgrad*  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  ergibt ein *Butterworth-Filter*<sup>7</sup>, welches sich durch einen möglichst flachen Betragsgang im Passband auszeichnet (Butterworth, 1930), und  $\zeta = \sqrt{3}/2$  ein *Bessel-Filter*, welches im Passband eine geringe Phasenverzerrung bietet (Thomson, 1949). Abbildung 2.5 bestätigt FIR- bzw. IIR-typische Eigenschaften des algebraischen bzw. des Bessel- sowie des Butterworth-Filters (Oppenheim und Schaffer, 2009): Während die IIR-Filter einen steileren Verstärkungsabfall im Übergang vom Passband zum Stoppband erreichen, zeichnet sich das algebraische Filter durch seine Phasenverzerrungsfreiheit sowie seine Sprungantwort ohne Überschwingen und mit endlicher Übergangsdauer aus. Bei der zeitdiskreten Implementierung mit endlicher Rechengenauigkeit ist zu beachten, dass IIR-Filter durch die erforderliche Rückführung vergangener Filterausgangswerte durch Rundungsfehler insbesondere bei schneller Abtastung im Verhältnis zur Filterdynamik numerisch instabil werden können,<sup>8</sup> während dies bei FIR-Filtern nicht der Fall ist.

<sup>7</sup>Stephen Butterworth (1885-1958)

<sup>8</sup>Kaiser (1966); Rader und Gold (1967) behandeln die zeitdiskrete Implementierung linearer zeitinvarianter IIR-Filter sowie die benötigte Rechengenauigkeit.

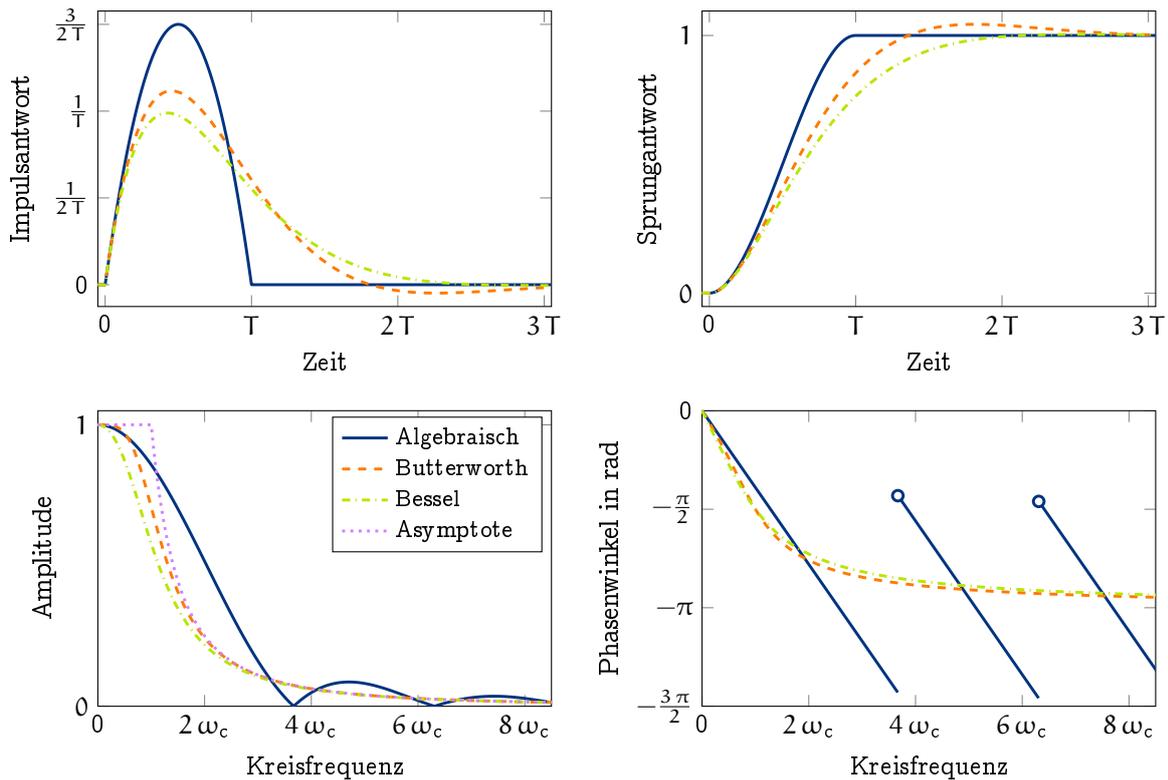


Abbildung 2.5.: Vergleich des algebraischen Ableitungsschätzers (2.9) mit Butterworth- und Besselfiltern mit derselben Frequenzgangasymptote (2.17).

## 2.3. Approximationsbasierte Ableitungsschätzung

Nöthen (2007) und Mboup et al. (2007) zeigten, dass die algebraischen Ableitungsschätzer implizit ein Optimierungsproblem im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate lösen. Optimierungsbasierte Ableitungsschätzer beruhen auf der Approximation der Messung durch eine Ansatzfunktion, deren Ableitung als Schätzwert verwandt wird. Häufig eignen sich hierzu Polynome, da jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall gleichmäßig durch Polynome approximiert<sup>9</sup> (Weierstraß, 1885; Courant und Hilbert, 1966) und die Ableitung eines Polynoms sehr effizient ausgewertet werden kann.

**Ableitungsschätzung als Optimierungsproblem** Um das Signal  $x$  auf  $[t - T, t]$  im quadratischen Mittel durch eine Gerade zu approximieren, wird das Funktional

$$\mathcal{J} := \int_0^T \left( \hat{x}(t) + \hat{\dot{x}}(t) \tau - x(t - T + \tau) \right)^2 d\tau \quad (2.20)$$

bezüglich  $\hat{x}(t)$  und  $\hat{\dot{x}}(t)$  minimiert. Löst man hierzu das Gleichungssystem

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{x}(t)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \hat{\dot{x}}(t)} = 0$$

<sup>9</sup>Durch Erhöhung des Polynomgrades wird der Approximationsfehler beliebig klein.

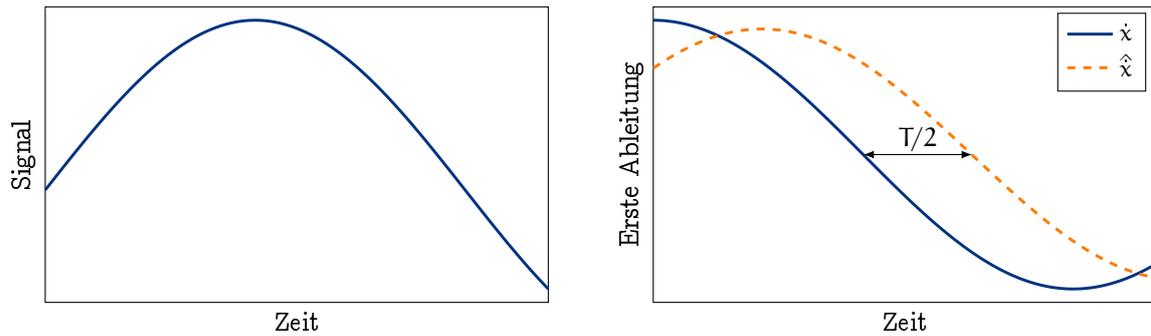


Abbildung 2.6.: Schätzverzögerung bei Anwendung des algebraischen Ableitungsschätzers (2.8) auf ein sinusförmiges Signal.

nach  $\hat{x}(t)$ , so erhält man den algebraischen Schätzer (2.8). Nun soll die Ableitung  $\dot{x}$  auf  $[t - T, t]$  durch eine Konstante approximiert werden. Minimiert man hierzu

$$\int_0^T (T - \tau) \tau \left( \hat{x}(t) - \dot{x}(t - T + \tau) \right)^2 d\tau, \quad (2.21)$$

also ein Funktional mit der nicht konstanten *Gewichtung*  $(T - \tau) \tau$  des quadrierten Fehlers, bezüglich  $\hat{x}(t)$ , so erhält man (2.9). Dies bedeutet, dass der Ableitungsschätzer (2.8) zu jedem Auswertzeitpunkt implizit ein Optimierungsproblem löst.<sup>10</sup> Durch die Wahl der Fensterbreite  $T$  wird das zugrunde liegende Gütefunktional (2.20) bzw. (2.21) parametrisiert, was nach Abschnitt 2.2 der Einstellung des Tiefpassverhaltens des Ableitungsschätzers durch Verschiebung seiner Knickfrequenz entspricht.

**Genauigkeitsgrad und Schätzverzögerung** Nöthen (2007) beobachtete bei der Anwendung von (2.8) eine zeitliche Verzögerung der Schätzwerte von etwa einer halben Fensterbreite, siehe Abbildung 2.6. Dies korrespondiert mit der Gruppenlaufzeit  $T/2$  in (2.18) (Papoulis, 1962). Mboup et al. (2007, 2009) lieferte hierfür eine approximationstheoretische Erklärung, die für diese Arbeit wesentlich ist und in vereinfachter Form für das Filter (2.8) wie folgt lautet: Ist das Signal  $x$  eine Parabel,  $x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2/2$ , so ergeben (2.8) und (2.9) zum Zeitpunkt  $t$  den Schätzwert

$$\hat{x}(t) = c_1 + c_2 (t - T/2) = \dot{x}(t - T/2).$$

Trotz einer Gerade als Ansatzfunktion wird also auch die erste Ableitung einer Parabel exakt rekonstruiert, jedoch mit einer zeitlichen Verzögerung von  $T/2$ . Bei dreifach stetig differenzierbaren Signalen  $x$  folgt dann aus dem Satz von Taylor

$$\hat{x}(t) = \dot{x}(t - T/2) + \mathcal{O}(T^2) \quad \text{für } T \rightarrow 0, \quad (2.22)$$

was Nöthens Beobachtung erklärt. Alle algebraischen Ableitungsschätzer geben Ableitungen polynomialer Signale bis zu einem bestimmten Grad exakt wieder, jedoch zeitlich verzögert (Mboup et al., 2007, 2009). Der Polynomgrad, bis zu dem ein algebraischer Ableitungsschätzer die gesuchte Ableitung eines polynomialen Signals

<sup>10</sup>Mboup (2009) vertieft diesen Aspekt für allgemeinere algebraische Schätzverfahren.

exakt wiedergibt, wird in dieser Arbeit als *Genauigkeitsgrad*<sup>11</sup>  $\gamma$  bezeichnet, die resultierende zeitliche Verzögerung als *Schätzverzögerung*  $\Delta t$ . Der Ableitungsschätzer (2.8) hat also den Genauigkeitsgrad  $\gamma = 2$  und die Schätzverzögerung  $\Delta t = T/2$ .

**Verringerung der Schätzverzögerung** Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten zur Verringerung der Schätzverzögerung unter Beibehaltung der Fensterbreite aufgezeigt werden. Die verwendeten Gleichungen werden in Kapitel 3 hergeleitet.

Minimiert man statt (2.21) das Funktional

$$\int_0^T (T - \tau) \tau^\beta \left( \hat{x}(t) - \dot{x}(t - T + \tau) \right)^2 d\tau, \quad \beta > 0,$$

bezüglich  $\hat{x}(t)$ , so ergibt sich der Ableitungsschätzer  $\hat{x} = g_\beta \dot{x}$  mit der Impulsantwort

$$g_\beta(t) := \begin{cases} \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{T^{\beta+2}} (T-t)^\beta t, & t \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.23)$$

siehe Abbildung 2.7. Die Schätzverzögerung  $\Delta t = \frac{2}{\beta+3}T$  kann durch Vergrößerung von  $\beta$  verringert werden, wodurch die Sprungantwort schneller ansteigt. Eine Asymptote des Frequenzgangs lautet

$$\hat{\mathcal{F}}\{g_\beta\}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{|\omega T|^2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \omega_c = \frac{\sqrt{(\beta+1)(\beta+2)}}{T}.$$

Daher führt eine Vergrößerung von  $\beta$  zu einer Verbreiterung des Passbands. Zudem ist in Abbildung 2.7 zu sehen, dass dann ein flacherer Abfall des Betragsgangs beim Übergang vom Passband zum Stoppband in Kauf genommen werden muss.

Ersetzt man  $\hat{x}(t)$  in (2.21) durch  $c_0(t) + c_1(t) \tau$ , verwendet also eine Ansatzfunktion mit höherem Polynomgrad, so erhält man

$$\int_0^T (T - \tau) \tau (c_0(t) + c_1(t) \tau - \dot{x}(t - T + \tau))^2 d\tau.$$

Dieses Funktional nimmt sein Minimum bezüglich  $c_0(t)$  und  $c_1(t)$  für

$$c_0(t) = \frac{12}{T^4} \int_0^T (T - \tau) \tau (3T - 5\tau) \dot{x}(t - T + \tau) d\tau,$$

$$c_1(t) = \frac{60}{T^5} \int_0^T (T - \tau) \tau (2\tau - T) \dot{x}(t - T + \tau) d\tau$$

<sup>11</sup>Der *Genauigkeitsgrad* (engl. *degree of precision*, *degree of exactness* oder *degree of accuracy*) bezeichnet bei der numerischen Integration üblicherweise den Grad eines polynomialen Integranden, bis zu dem ein Quadraturverfahren den exakten Wert des Integrals liefert (Krylov, 1962; Stroud und Secrest, 1966; Stroud, 1974; Davis und Rabinowitz, 1984; Krommer und Ueberhuber, 1998). Entsprechend wurde der Genauigkeitsgrad hier auf die algebraischen Ableitungsschätzer übertragen. Eng mit dem Genauigkeitsgrad ist die (*Fehler-*)*Ordnung* verbunden (Freund und Hoppe, 2007). Bei den algebraischen Ableitungsschätzern sollte zwischen dem Genauigkeitsgrad und der Fehlerordnung unterschieden werden, da der Genauigkeitsgrad eine Eigenschaft allein des algebraischen Schätzers ist, während die Fehlerordnung im Sinne von (2.22) auch von der Differenzierbarkeit des Eingangssignals abhängt. Für eine ausführlichere Diskussion sei auf Abschnitt 3.1.2 verwiesen.

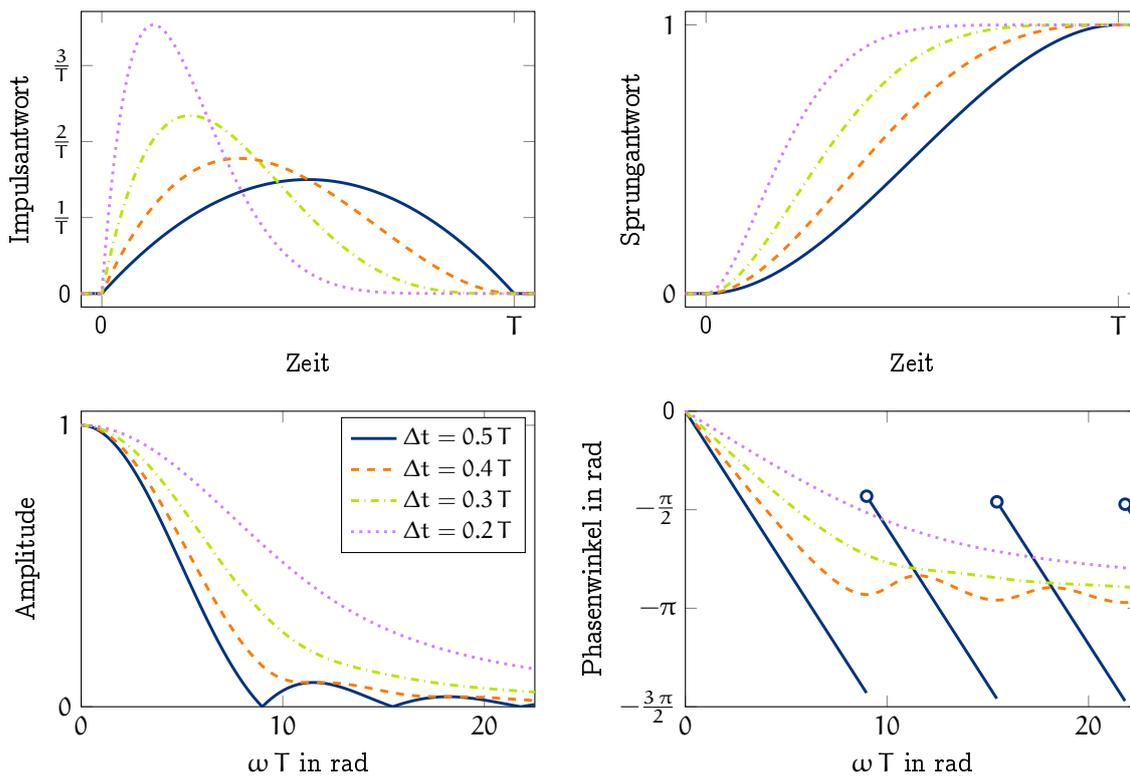


Abbildung 2.7.: Vergleich von  $g_\beta$  nach (2.23) für verschiedene Schätzverzögerungen.

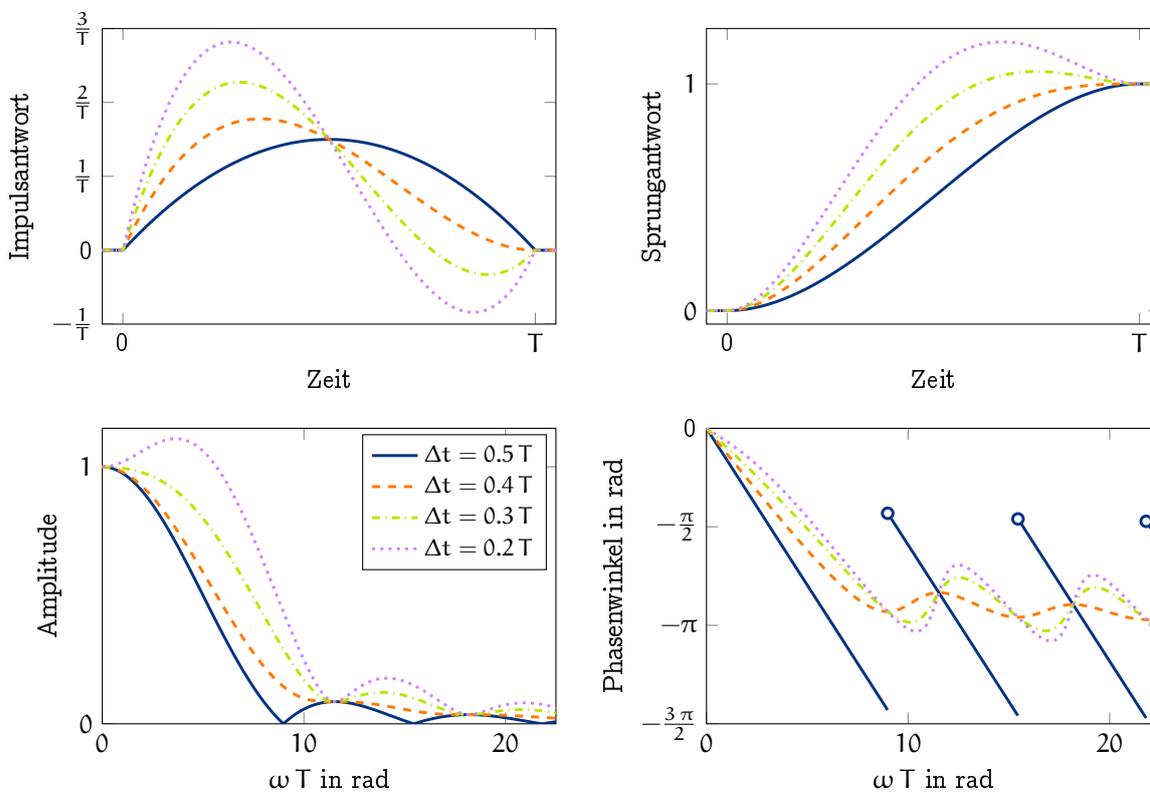


Abbildung 2.8.: Vergleich von  $g_\Delta$  nach (2.25) für verschiedene Schätzverzögerungen.

an. Zur Berechnung von  $\hat{x}(t)$  wird die Ansatzfunktion bei  $T - T_\Delta$  ausgewertet:

$$\hat{x}(t) = c_0(t) + c_1(t) (T - T_\Delta) = \int_0^T g_\Delta(T - \tau) \dot{x}(t - T + \tau) d\tau \quad (2.24)$$

mit der Impulsantwort

$$g_\Delta(t) := \begin{cases} \frac{12}{T^4} (T - t) t (5 (2 \frac{T_\Delta}{T} - 1) t + 3 T - 5 T_\Delta), & t \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.25)$$

siehe Abbildung 2.8. Hier kann die Schätzverzögerung  $\Delta t = T_\Delta$  beliebig vorgegeben werden. Für  $T_\Delta = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{5}} T$  erhöht sich der Genauigkeitsgrad auf  $\gamma = 3$ , ansonsten gilt  $\gamma = 2$ . Für  $T_\Delta = 0$  erhält man eine *verzögerungsfreie* Schätzung, während für  $T_\Delta < 0$  sogar zukünftige Werte von  $\dot{x}$  *prädiziert* werden. Jedoch zeigt Abbildung 2.8, dass eine kleine Schätzverzögerung zu einer überschwingenden Sprungantwort sowie einem Frequenzgang mit deutlicher Amplitudenüberhöhung und Phasenverzerrung führt.

## 2.4. Implementierung

Ist die Messgröße  $x$  nur zu diskreten Abtastzeitpunkten  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  bekannt, muss zur Implementierung des Filters (2.13) das Faltungsintegral approximiert werden. Die näherungsweise numerische Integration von Funktionen einer Variablen wird (*numerische*) *Quadratur* genannt. Im Folgenden wird von einer äquidistanten Abtastung  $t_{i+1} = t_i + T_s$  ausgegangen.

**Mittelpunktregel** Die *Mittelpunktregel* (engl. *midpoint rule*), siehe bspw. Krommer und Ueberhuber (1998), ist ein besonders einfaches Quadraturverfahren, das bei hinreichend großer Anzahl  $L := T/T_s$  von Abtastperioden je Fensterbreite eine gute Approximation des zeitkontinuierlichen Ableitungsschätzers liefert. Ist  $L$  ganzzahlig, so kann das Faltungsintegral in (2.13) als Summe von Integralen der Breite  $T_s$  dargestellt werden:

$$\hat{x}(t) = \int_0^T \dot{g}(\tau) x(t - \tau) d\tau = \sum_{k=0}^{L-1} \int_{k T_s}^{(k+1) T_s} \dot{g}(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (2.26)$$

Wenn sich die Abtastzeitpunkte in der Mitte der Integrationsintervalle befinden,  $t_{i-k} = t - (k + 1/2) T_s$ , kann jeder Summand in (2.26) durch ein Rechteck der Breite  $T_s$  und der Höhe  $\dot{g}((k + 1/2) T_s) x(t_{i-k})$  angenähert werden, siehe Abbildung 2.9. Dann kann zum Abtastzeitpunkt  $t_i$  der Wert von  $\hat{x}$  zum Zeitpunkt  $t_i + T_s/2$  näherungsweise als gewichtete Summe der  $L$  aktuellsten Messwerte berechnet werden:

$$\hat{x}_{i+\frac{1}{2}} \approx \sum_{k=0}^{L-1} w_k x_{i-k}, \quad w_k := T_s \dot{g}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{6(L-1-2k)}{L^2 T}. \quad (2.27)$$

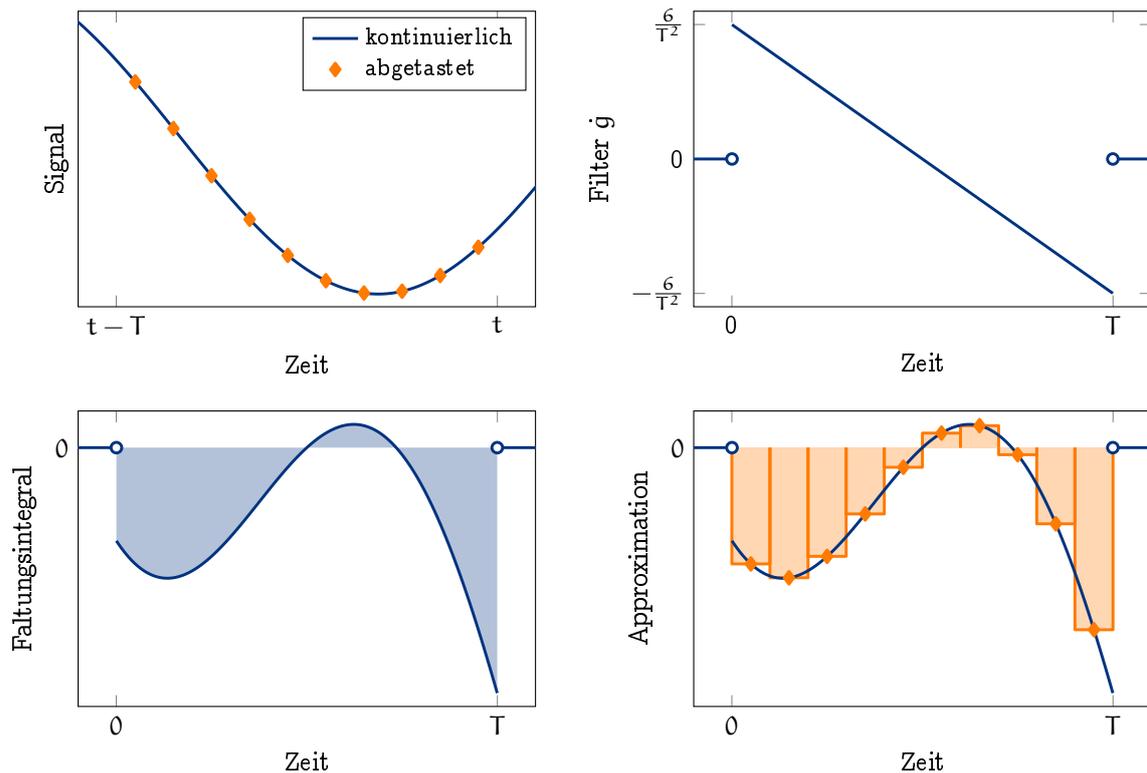


Abbildung 2.9.: Zur Quadratur nach der Mittelpunkregel.

Hierbei wurde die Notation  $f_k := f(k T_s)$  benutzt. Die Mittelpunkregel approximiert den zeitkontinuierlichen Ableitungsschätzer also durch ein lineares verschiebeinvariantes FIR-Filter und kompensiert eine halbe Abtastperiode der Schätzverzögerung.

**Wahl der Abtastperiode** In Operatornotation kann (2.27) als  $\delta^{-\frac{1}{2}} \hat{x} \approx \sum_{k=0}^{L-1} w_k \delta^k x$  geschrieben werden. Vergleicht man dies mit (2.12), so approximiert der Operator

$$g_s := \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{s} \sum_{k=0}^{L-1} w_k \delta^k \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}\{g_s\}(\omega) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \omega T_s}}{1 - e^{-\omega T_s}} \sum_{k=0}^{L-1} w_k e^{-k \omega T_s} \quad (2.28)$$

den algebraischen Ableitungsschätzer  $g$ . Gemäß dem *Abtasttheorem*<sup>12</sup> (Nyquist, 1928; Kotelnikov, 1933; Shannon, 1948, 1949) muss die Nyquist-Frequenz<sup>13</sup>  $\omega_N := \pi/T_s$  zur Vermeidung von Aliasing-Effekten hinreichend groß im Verhältnis zur Knickfrequenz  $\omega_c$  sein. Um ein Verhältnis  $\omega_N/\omega_c$  zu erreichen, sind infolge (2.17)

$$L = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \frac{\omega_N}{\omega_c} \approx 0,78 \frac{\omega_N}{\omega_c}$$

Abtastperioden je Fensterbreite erforderlich. Daher ist bereits bei einer Abtastperiode von  $T_s = T/8$  die Nyquist-Frequenz um mehr als eine Dekade größer als die

<sup>12</sup>Als interessante Abhandlung über die Historie des Abtasttheorems sei auf (Lüke, 1999) hingewiesen.

<sup>13</sup>Harry Nyquist (1889-1976)

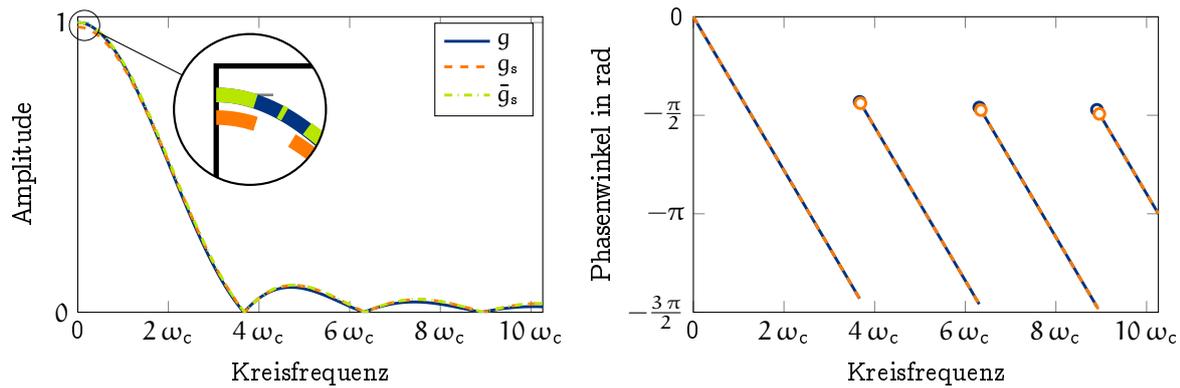


Abbildung 2.10.: Frequenzgänge des algebraischen Ableitungsschätzers  $g$  nach (2.11), dessen zeitdiskreter Approximation  $g_s$  nach (2.28) und des Savitzky-Golay-Filters  $\bar{g}_s$  nach (2.30) für  $L = 8$ .

Knickfrequenz, was sich in einer guten Übereinstimmung der Frequenzgänge von  $g$  und  $g_s$  in Abbildung 2.10 äußert. Eine weitere Reduktion der Abtastperiode gleicht die Frequenzgänge von  $g_s$  und  $g$  weiter an. Dies rechtfertigt, die Fensterbreite  $T$  in einer praktischen Anwendung weitgehend unabhängig von der Diskretisierung zu wählen, beispielsweise durch die Vorgabe einer gewünschten Knickfrequenz  $\omega_c$  und Anwendung von (2.17).

*Bemerkung 1.* Kaiser (1966) vergleicht zeitdiskrete FIR-Schätzfilter für die erste Zeitableitung hinsichtlich ihrer nutzbaren Bandbreite in dem Sinne, bis zu welchem Anteil der Nyquist-Frequenz die Filter den Betragsgang eines idealen Differentiators näherungsweise nachbilden. Demnach weist der zeitdiskretisierte algebraische Ableitungsschätzer (2.28) bei der vorgeschlagenen Wahl von  $\omega_N \approx 10 \omega_c$  eine nutzbare Bandbreite von lediglich ca. 10 % der Nyquist-Frequenz auf, während andere FIR-Filter in Kaisers Vergleich bis zu ca. 80 % nutzbarer Bandbreite erreichen. Die vergleichsweise geringe nutzbare Bandbreite des algebraischen Ableitungsschätzers (2.28) liegt daran, dass sein Betragsgang im Stopband lediglich um 20 dB je Dekade stärker abfällt, als derjenige des idealen Differentiators ansteigt; daher erfordert das Abtasttheorem einen großen Abstand zwischen der Knickfrequenz und der Nyquist-Frequenz. Prinzipiell können algebraische Ableitungsschätzer mit beliebig großer asymptotischer Stopbandsteigung und somit wesentlich größerer nutzbarer Bandbreite realisiert werden, siehe Kapitel 3.

**Normierung** Abbildung 2.10 zeigt, dass  $g_s$  im Gegensatz zu  $g$  den Gleichanteil von  $\dot{x}$  abschwächt. Die zeitdiskrete Approximation hat also zu einer Reduktion des Genauigkeitsgrades von 2 auf 0 geführt. Die Abschwächung des Gleichanteils soll nun berechnet werden, um sie zu kompensieren. Nach Krommer und Ueberhuber (1998, S. 132) beträgt der Quadraturfehler bei Anwendung der Mittelpunkregel, sofern  $x$

zweifach stetig differenzierbar ist,

$$\hat{\chi}_{i+\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{L-1} w_k x_{i-k} = -\frac{L T_s^3}{24} \ddot{f}(\xi) \quad \text{mit } f(\xi) := \dot{g}(\xi) x(t - \xi) \quad (2.29)$$

und einem geeigneten  $\xi \in [0, T]$ . Für  $x(t) = c_0 + c_1 t$  ist  $\ddot{f} \equiv -\frac{24 c_1}{L^3 T_s^3}$ . Außerdem gilt dann  $\hat{\chi}_{i+1/2} = c_1$  wegen des Genauigkeitsgrades  $\gamma = 2$  von  $g$ . Einsetzen von  $\ddot{f}$  und  $\hat{\chi}_{i+1/2}$  in (2.29) ergibt  $c_1 = \frac{L^2}{L^2-1} \sum_{k=0}^{L-1} w_k x_{i-k}$ . Dies motiviert den Ableitungsschätzer

$$\hat{\hat{\chi}}_{i+\frac{1}{2}} := \frac{1}{\Xi} \sum_{k=0}^{L-1} w_k x_{i-k}, \quad \Xi := \frac{L^2 - 1}{L^2}, \quad (2.30)$$

mit dem zugehörigen Operator  $\bar{g}_s := g_s/\Xi$ . Abbildung 2.10 bestätigt die korrekte Wiedergabe des Gleichanteils in der ersten Ableitung durch  $\bar{g}_s$ . Falls  $x$  eine Parabel ist, gilt  $\hat{\hat{\chi}}_{i+1/2} = \dot{x}_{i-L/2}$ , so dass der diskrete Ableitungsschätzer (2.30) den Genauigkeitsgrad  $\gamma = 2$  und die Schätzverzögerung  $\Delta t = (T - T_s)/2$  hat.

**Beziehung zum Savitzky-Golay-Filter** Auch die Minimierung des Funktionals

$$\sum_{k=0}^{L-1} \left( \hat{\chi}_{i+\frac{1}{2}} + k T_s \hat{\hat{\chi}}_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-(L-1)+k} \right)^2$$

bezüglich  $\hat{\chi}_{i+1/2}$  und  $\hat{\hat{\chi}}_{i+1/2}$  liefert den Ableitungsschätzer (2.30), weshalb dieser ein *Savitzky-Golay-Filter*<sup>14,15</sup> ist (Savitzky und Golay, 1964; Persson und Strang, 2003; Luo et al., 2005; Schafer, 2011). Das Savitzky-Golay-Filter  $\bar{g}_s$  kann also als diskrete Approximation des algebraischen Ableitungsschätzers  $g$  interpretiert werden. Die Bedeutung der Savitzky-Golay-Filter wird anhand folgenden Zitats aus Riordon et al. (2000) deutlich, welches sich auf die Original-Arbeit Savitzky und Golay (1964) bezieht: „It can be argued that the dawn of the computer-controlled analytical instrument can be traced to this article“. Mai und Hillermeier (2008) bezeichnen die Savitzky-Golay-Filter als *Least-Squares-Ableitungsschätzer* und zeigen deren Optimalität hinsichtlich der Robustheit gegenüber Gauß'schem<sup>16</sup> weißen Rauschen.

**Rekursive Implementierung** Da die Filterkoeffizienten  $w_k$  polynomial in  $k$  sind, kann (2.30) in die äquivalente Rekursion<sup>17</sup>

$$y_i = c_1 (x_i - x_{i-L-1}) - c_2 (x_{i-1} - x_{i-L}) + 2 y_{i-1} - y_{i-2} \quad (2.31)$$

mit  $c_1 := \frac{6}{(L+1)T}$ ,  $c_2 := \frac{6}{(L-1)T}$  überführt werden (Blum, 1957; Bromba und Ziegler, 1979). Der Schätzwert beträgt dann  $\hat{\chi}_{i+\frac{1}{2}} \approx y_i$ . Dies wird in Abschnitt 3.4.4 erläutert.

<sup>14</sup>Abraham Savitzky (1919-1999)

<sup>15</sup>Marcel Jules Edouard Golay (1902-1989)

<sup>16</sup>Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

<sup>17</sup>Zur Veranschaulichung betrachte man den gleitenden Mittelwert  $y_i = \sum_{k=0}^{L-1} x_{i-k}/L$ , welcher auch als Rekursion  $y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-L})/L$  implementiert werden kann (Smith, 1999).

Um eine numerische Instabilität infolge einer endlichen Wortbreite zu vermeiden, empfehlen Bromba und Ziegler (1979) die Implementierung von (2.31) in der Form

$$z_i = d_1 (x_i - x_{i-L-1}) - d_2 (x_{i-1} - x_{i-L}) + 2z_{i-1} - z_{i-2} \quad (2.32)$$

mit  $d_1 := L - 1$ ,  $d_2 := L + 1$ . Der Schätzwert lautet dann  $\hat{x}_{i+\frac{1}{2}} \approx \frac{6z_i}{(L^2-1)T}$ . Wichtig an (2.32) ist, dass sämtliche Koeffizienten ganzzahlig sind. Sind die Abtastwerte  $x_i$  ebenfalls ganzzahlig, beispielsweise als Ausgangssignal eines Analog-Digital-Wandlers, können die Werte  $z_i$  fehlerfrei in Ganzzahl-Arithmetik berechnet werden. Während (2.27) in jedem Abtastschritt  $2L - 1$  Rechenoperationen ( $L$  Multiplikationen,  $L - 1$  Additionen) zur Ausführung des Ableitungsschätzers erfordert, benötigt die Auswertung von (2.32) unabhängig von der Filterbreite  $L$  lediglich 9 Rechenoperationen je Abtastschritt (4 Multiplikationen, 5 Additionen bzw. Subtraktionen). Es kann also eine deutlich verbesserte Rechenzeiteffizienz erreicht werden.

## 2.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden anhand algebraischer Schätzer für die erste Ableitung verschiedene Sachverhalte erörtert, die für alle im Folgenden behandelten algebraischen Ableitungsschätzer gültig sind. Algebraische Ableitungsschätzer (mit gleitendem Zeitfenster) sind lineare zeitinvariante Filter mit endlicher Impulsantwort. Sie rekonstruieren zeitliche Ableitungen gemessener Signale und können als zeitlich verzögerte Auswertung einer gleitenden lokalen polynomialen Approximation der zu schätzenden Ableitung interpretiert werden. Die polynomialen Approximation führt zu einem ausgeprägten Tiefpassverhalten der algebraischen Ableitungsschätzer. Insbesondere übersteigt die Abschwächung hoher Frequenzen deren Verstärkung infolge der Differentiation, so dass Messrauschen effektiv unterdrückt wird. Eine Betrachtung im Frequenzbereich ermöglicht eine systematische Wahl der Filterparameter. Je nach den gewählten Filterparametern sind algebraische Ableitungsschätzer phasenverzerrungsfrei, weisen eine Sprungantwort ohne Überschwingen auf und erlauben die Elimination harmonischer Störungen ohne zusätzliche Filter. Bekannte Filter können als Sonderfälle der algebraischen Ableitungsschätzer betrachtet werden, beispielsweise die Lanczos'sche verallgemeinerte Ableitung als Sonderfall der zeitkontinuierlichen Ableitungsschätzer oder auch die Savitzky-Golay-Filter als Sonderfall der zeitdiskreten Approximation.

# 3. Algebraische Schätzung beliebiger Ableitungsordnungen

Nachdem im vorhergehenden Kapitel wesentliche Aspekte der algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster exemplarisch anhand von Schätzern für die erste Ableitung diskutiert wurden, werden nun Filter zur Schätzung beliebiger ganzzahliger Ableitungsordnungen untersucht.<sup>18</sup> Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die gleitende lokale polynomiale Approximation der gesuchten Ableitung, vergleiche Abschnitt 2.3. Dieses den algebraischen Ableitungsschätzern zugrunde liegende Optimierungsproblem verfügt über zahlreiche Parameter, deren Auswirkung auf die für die Praxis wichtigen Filtereigenschaften nicht unmittelbar ersichtlich ist. Daher wird in diesem Kapitel gezeigt, wie aus der Vorgabe eines gewünschten Übertragungsverhaltens im Frequenzbereich die erforderlichen Filterparameter ermittelt werden können. Um die Filter in einer praktischen Anwendung einsetzen zu können, werden abschließend Näherungsverfahren zur Zeitdiskretisierung vorgestellt. Durch eine geschickte Vorgehensweise können hierbei die Speicherplatz- und Rechenzeiteffizienz sowie die effektive Schätzverzögerung der resultierenden zeitdiskreten Ableitungsschätzer wesentlich verbessert werden.

## 3.1. Approximationstheoretische Eigenschaften

Einen besonders anschaulichen Zugang zu den algebraischen Ableitungsschätzern bietet deren Interpretation als polynomiale Approximation der zu schätzenden Ableitung (bzw., synonym, der polynomialen Approximation des nicht abgeleiteten Signals und anschließenden Berechnung der zeitlichen Ableitung des Approximationspolynoms als Schätzwert für die gesuchte Ableitung, siehe Abschnitt 2.3). Sollen die algebraischen Ableitungsschätzer in einer Echtzeitanwendung eingesetzt werden, so kann stets nur ein Kompromiss aus der Unterdrückung unerwünschten Rauschens und der genauen Nachbildung auch schneller Änderungen der interessierenden Ableitung sowie einer geringen Schätzverzögerung erzielt werden. Daher werden, als Grundlage für die weiteren Ausführungen in dieser Arbeit, in diesem Abschnitt die für den praktischen Einsatz der algebraischen Ableitungsschätzer wichtigen Konzepte des Genauigkeitsgrades und der Schätzverzögerung sowie die wesentlichen Komponenten des resultierenden Schätzfehlers erörtert.

---

<sup>18</sup>Siehe Liu et al. (2012); Liu und Laleg-Kirati (2015) für die Erweiterung der algebraischen Ableitungsschätzer auf fraktionale zeitliche Ableitungen und Chesne (2014) für die Anwendung der algebraischen Ableitungsschätzer zur Rekonstruktion der Ortsableitungen einer örtlich verteilten Größe.

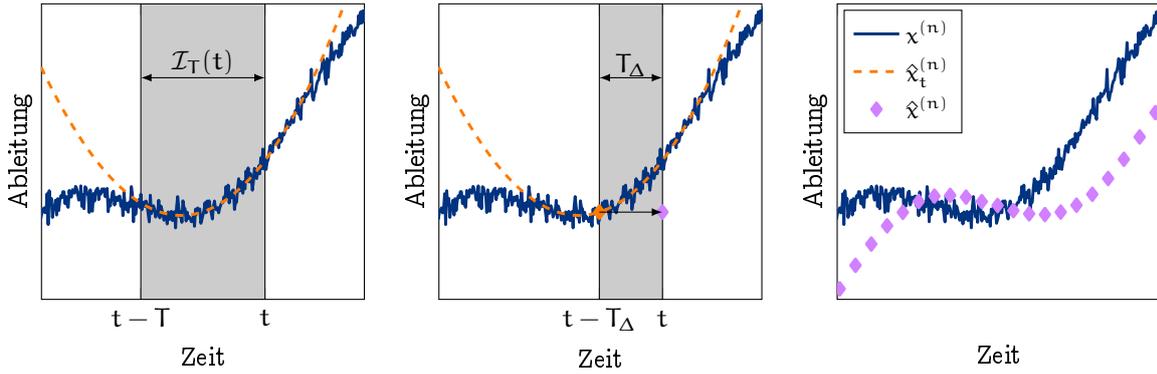


Abbildung 3.1.: Approximationstheoretische Interpretation der algebraischen Ableitungsschätzer: Zum Zeitpunkt  $t$  wird die zu schätzende Ableitung lokal durch ein Polynom approximiert (links). Das Polynom wird zeitlich verzögert ausgewertet (Mitte). Dies wird zu jedem Auswertzeitpunkt wiederholt, wobei das Approximationsintervall verschoben wird (rechts). Die Approximation bewirkt eine effektive Glättung von Rauschen.

### 3.1.1. Approximationstheoretische Interpretation

Im Folgenden soll ein Schätzwert  $\hat{x}^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der  $n$ -ten Zeitableitung eines Signals  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ermittelt werden. Es wird davon ausgegangen, dass die gesuchte Ableitung  $x^{(n)}$  auf jedem kompakten Intervall  $\mathcal{J}_T(t) := [t-T, t]$  quadratisch Lebesgueintegrierbar ist. Dann können die algebraischen Ableitungsschätzer als Anwendung der in Anhang A.2.3 zusammengefassten Methoden zur lokalen polynomialen Approximation in drei Schritten aufgefasst werden, siehe auch Abbildung 3.1:

1. Zum Zeitpunkt  $t$  wird  $x^{(n)}$  auf  $\mathcal{J}_T(t)$  durch ein Polynom  $\hat{x}_t^{(n)}$  des Grades  $N$  approximiert (Abbildung 3.1 links). Dieses Approximationspolynom kann nach Abschnitt A.2.3 durch Projektion von  $x^{(n)}$  auf den reproduzierenden Kern  $R_{N,\tau}^{(\alpha,\beta)}$  von  $\pi_N$  berechnet werden und lautet nach (B.3a)

$$\hat{x}_t^{(n)}(\tau) := \langle x^{(n)} \circ \phi_{T,t}, R_{N,\phi_{T,t}^{-1}(\tau)}^{(\alpha,\beta)} \rangle$$

mit dem inneren Produkt (A.30). Siehe (A.35) und (B.1) für explizite Darstellungen von  $R_{N,\tau}^{(\alpha,\beta)}$ ,  $\phi_{T,t}$  und  $\phi_{T,t}^{-1}$ .

2. Um einen Schätzwert  $\hat{x}^{(n)}(t)$  von  $x^{(n)}(t)$  zu erhalten, wird die Approximation  $\hat{x}_t^{(n)}$  zum Zeitpunkt  $t-T_\Delta$  ausgewertet (Abbildung 3.1 Mitte):  $\hat{x}^{(n)}(t) := \hat{x}_t^{(n)}(t-T_\Delta)$ . Nach (B.3b) lautet der gesuchte Schätzwert

$$\hat{x}^{(n)}(t) = \langle x^{(n)} \circ \phi_{T,t}, R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \rangle \quad \text{mit } \vartheta := \theta_T(T_\Delta) = 1 - 2T_\Delta/T. \quad (3.1)$$

Der Parameter  $T_\Delta$  (bzw.  $\vartheta$ ) hat einen wesentlichen Einfluss auf die Qualität der Schätzung – an dieser Stelle sei an den Schätzer  $g_\Delta$  in Abschnitt 2.3 erinnert, bei dem eine spezielle Wahl von  $T_\Delta$  eine Erhöhung des Genauigkeitsgrades bewirkte. Prinzipiell kann  $T_\Delta$  auch zu Null bzw. negativ (oder entsprechend  $\vartheta = 1$

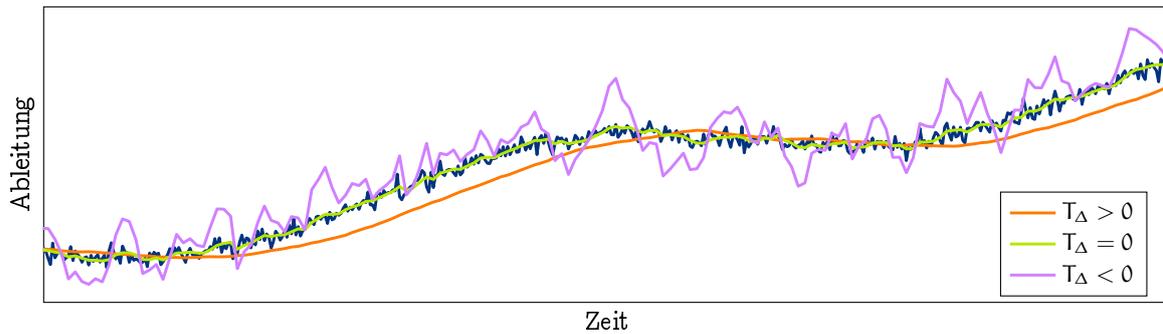


Abbildung 3.2.: Vergleich einer verzögerten Schätzung ( $T_\Delta > 0$ ) mit einer verzögerungsfreien ( $T_\Delta = 0$ ) und einer prädizierenden Schätzung ( $T_\Delta < 0$ ) bei ansonsten unveränderten Schätzparametern. Im dargestellten Fall führt die Verringerung der Schätzverzögerung bis hin zur Prädiktion zu einer deutlichen Verschlechterung des Schätzergebnisses.

bzw.  $\vartheta > 1$ ) gewählt werden, so dass sich eine *verzögerungsfreie Schätzung* bzw. *Prädiktion* ergibt. Diese prinzipiell wünschenswerte Verringerung der Verzögerung kann jedoch zu einer Verschlechterung des Schätzergebnisses führen, wie in Abbildung 3.2 exemplarisch gezeigt wird.

- Die ersten beiden Schritte werden in jedem Auswertezeitpunkt  $t$  unter Beibehaltung des Polynomgrades  $N$ , der Fensterbreite  $T$ , des Parameters  $\vartheta$  sowie der Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$ ,  $\beta$  des inneren Produkts (A.30) wiederholt (Abbildung 3.1 rechts). Sukzessive erhält man die gesuchte Schätzung  $t \mapsto \hat{x}^{(n)}(t)$ . Da das Approximationsintervall  $J_T(t)$  synchron zum Auswertezeitpunkt verschoben wird, wird es auch als *gleitendes Zeitfenster* bezeichnet und die Intervalllänge  $T$  als *Fensterbreite*.

Die algebraischen Ableitungsschätzer lösen also zu jedem Auswertezeitpunkt ein Optimierungsproblem. Die praktische Herausforderung besteht darin, dieses Optimierungsproblem so zu formulieren, dass ein guter Kompromiss zwischen der Schätzgenauigkeit und der Störunterdrückung erreicht wird. So müssen der Funktionenraum der Approximation durch Festlegung des Polynomgrades  $N$ , das zu minimierende Gütefunktional durch Festlegung der Fensterbreite  $T$  und der Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$ ,  $\beta$  des inneren Produkts (A.30) sowie der Verzögerungsparameter  $\vartheta$  geeignet gewählt werden.

*Bemerkung 2.* Mboup et al. (2007, 2009) leiteten die algebraischen Ableitungsschätzer basierend auf einer Taylor-Entwicklung und elementaren differentialalgebraischen Manipulationen mittels Mikusińskis Operatoralkül her, wie in Abschnitt 2.1 demonstriert. Daher kommt die Bezeichnung *algebraische Ableitungsschätzer*. Die approximationstheoretische Interpretation geht ebenfalls auf Mboup et al. (2007, 2009) und auf Nöthen (2007) zurück, wurde dort jedoch primär zur Erläuterung der Schätzverzögerung und der exakten Rekonstruktion der Ableitung polynomialer Signale verwandt. In den neueren Arbeiten Liu et al. (2011a,b); Liu (2011); Kiltz

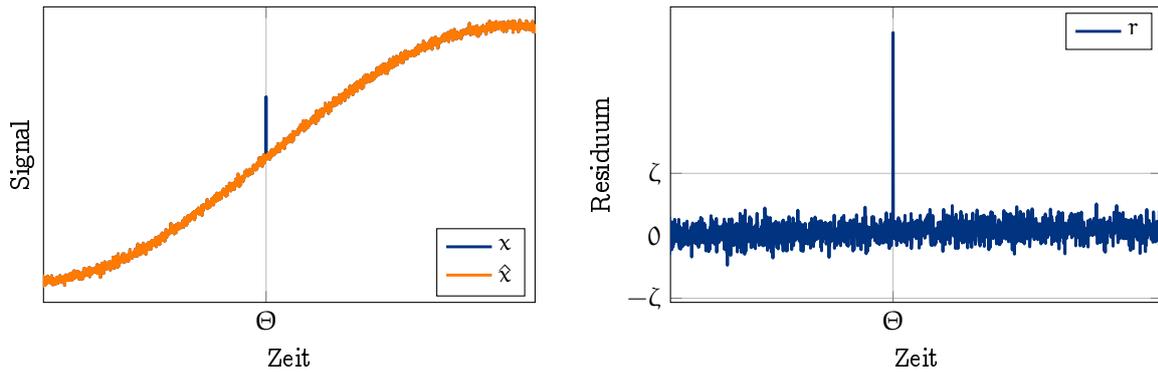


Abbildung 3.3.: Zur verzögerungsfreien Kompensation von Ausreißern wird aus dem Messsignal  $x$  die Prädiktion  $\hat{x}$  nach (3.2) berechnet. Im dargestellten Beispiel führt der Ausreißer zum Zeitpunkt  $\Theta$  dazu, dass das Residuum  $r := x - \hat{x}$  den Schwellwert  $\zeta$  überschreitet, weshalb der Messwert zu diesem Zeitpunkt durch den prädizierten Wert ersetzt wird.

und Rudolph (2013) diene hingegen der approximationstheoretische Zugang als Ausgangspunkt. Im Vergleich zum algebraischen Zugang bietet der approximationstheoretische Zugang wesentliche technische Vorteile (Kiltz et al., 2014):

- Die Anforderung hinreichender Differenzierbarkeit für die Taylor-Entwicklung beim algebraischen Zugang reduziert sich auf lokale quadratische Lebesgue-Integrierbarkeit. Hierdurch bleibt der approximationstheoretische Zugang auch bei Ableitungen mit abzählbar vielen Diskontinuitätsstellen gültig.
- Es ergibt sich auf natürliche Weise die Möglichkeit, die Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  und  $\beta$  des inneren Produkts (A.30) nicht-ganzzahlig zu wählen. Dies ist beispielsweise zur Unterdrückung harmonischer Störungen wesentlich, siehe Abschnitt 3.3.3.
- Die zeitliche Verzögerung der Ableitungsschätzung wird unmittelbar klar.

**Beispiel 3** (Verzögerungsfreie Kompensation von Ausreißern). Zur verzögerungsfreien Erkennung und Kompensation „unphysikalischer Ausreißer“ in nicht zu stark verrauschten Messsignalen kann mit Hilfe des Schätzers (3.1) der Messwert  $x(t)$  basierend auf vergangenen Messwerten aus dem Intervall  $\mathcal{J}_T(t - T_s)$  prädiziert werden:

$$\hat{x}(t) := \langle x \circ \phi_{T,t-T_s}, \mathbf{R}_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \rangle \quad \text{mit } \vartheta := \theta_T(-T_s). \quad (3.2)$$

Hierbei sollte ein niedriger Polynomgrad gewählt werden, beispielsweise  $N = 1$ . Überschreitet das *Residuum*  $r(t) := x(t) - \hat{x}(t)$  einen Schwellwert  $\zeta$ , so wird  $x(t)$  als Ausreißer gewertet und durch  $\hat{x}(t)$  ersetzt (Abbildung 3.3). Eine vergleichbare Methode wurde in Kiltz et al. (2012) zur Identifikation sprungförmiger Sensorfehler angewandt.

### 3.1.2. Genauigkeitsgrad und Schätzverzögerung

In Abschnitt 2.3 wurden der *Genauigkeitsgrad*  $\gamma$  als derjenige Polynomgrad eingeführt, bis zu dem die Ableitungsschätzung noch exakt ist, und die *Schätzverzögerung*  $\Delta t$  als die hierbei resultierende Verzögerung. Diese Kenngrößen wurden für den algebraischen Ableitungsschätzer (3.1) in Anhang B.1.2 hergeleitet:

$$\gamma = \begin{cases} n + N + 1, & N = 0 \vee \vartheta = p_{N+1,k}^{(\alpha,\beta)}, \\ n + N, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \Delta t = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} T, & N = 0, \\ \frac{1-\vartheta}{2} T, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Hierbei bezeichnet  $p_{N+1,k}^{(\alpha,\beta)}$  die  $k$ -te Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}$ .

Die Schätzverzögerung kann also, sofern für die lokale Approximation ein Polynomgrad  $N > 0$  gewählt wurde, mit dem Parameter  $\vartheta$  beliebig vorgegeben werden. Bemerkenswert ist, dass in diesem Fall die Wahl von  $\vartheta$  als Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $(N + 1)$ -ten Grades den Genauigkeitsgrad erhöht (Mboup et al., 2007). Da die Nullstellen der Jacobi-Polynome im Intervall  $(-1, 1)$  liegen, siehe Anhang A.4.3, impliziert  $\vartheta = p_{N+1,k}^{(\alpha,\beta)}$  eine Schätzverzögerung  $\Delta t \in (0, T)$ . Es ist also in diesem Fall keine verzögerungsfreie oder präzisierende Schätzung möglich.

Einen Sonderfall stellt  $N = 0$  dar. Hier wird die Schätzverzögerung durch die Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $P_1^{(\alpha,\beta)}$  und somit durch die Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt. Nach (B.6) wird  $\Delta t$  dann mit steigendem  $\alpha$  größer und mit steigendem  $\beta$  kleiner.

In Abbildung 3.4 sind verschiedene Schätzverzögerungen gegenübergestellt, wobei jeweils der Parameter  $\vartheta$  als größte Nullstelle des zugehörigen Jacobi-Polynoms  $(N + 1)$ -ten Grades gewählt wurde. Dies entspricht der kleinsten möglichen Schätzverzögerung unter Ausnutzung der Erhöhung des Genauigkeitsgrades. Es bestätigen sich für  $N = 0$  die Erhöhung der Schätzverzögerung mit steigenden  $\alpha$  und die Verringerung mit steigendem  $\beta$ . Eine besonders deutliche Verringerung der Schätzverzögerung wird durch Erhöhung des Polynomgrades von  $N = 0$  auf  $N = 1$  erzielt.

### 3.1.3. Schätzfehler

Der Schätzwert  $\hat{\chi}^{(n)}$  ist gegenüber der gesuchten Ableitung  $\chi^{(n)}$  mit einem Fehler behaftet, der im Wesentlichen folgende Ursachen hat (Mboup et al., 2007, 2009):

1. Die polynomiale Approximation führt zu einer Glättung schneller Änderungen der interessierenden Ableitung (*Approximationsfehler*  $\tilde{\chi}_\gamma^{(n)} := \hat{\chi}^{(n)} - \delta^{\Delta t} \chi^{(n)}$ ).
2. Infolge der Schätzverzögerung hat sich die Ableitung zum Auswertzeitpunkt bereits weiterentwickelt (*Verzögerungsfehler*  $\tilde{\chi}_{\Delta t}^{(n)} := (\delta^{\Delta t} - 1) \chi^{(n)}$ ).
3. Das zugrunde liegende Signal ist verrauscht (*unsystematischer Schätzfehler*  $\tilde{\chi}_\omega^{(n)}$ ).

Der Approximations- und der Verzögerungsfehler zusammen werden in dieser Arbeit als *systematischer Schätzfehler* bezeichnet. Überdies treten bei einer Echtzeitimplementierung mit endlicher Wortbreite Zeit- und Wertdiskretisierungsfehler auf; hierauf

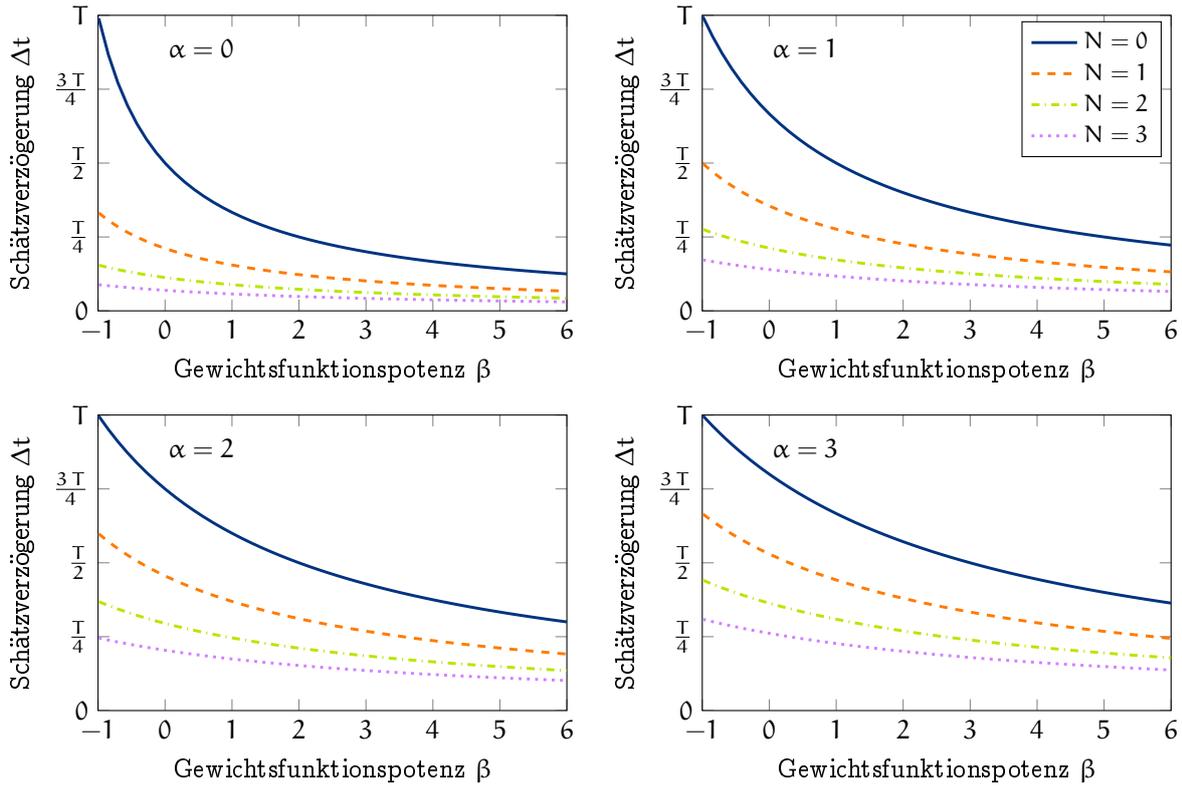


Abbildung 3.4.: Vergleich resultierender Schätzverzögerungen für verschiedene Gewichtungsfunktionspotenzen  $\alpha$ ,  $\beta$  und Polynomgerade  $N$  für  $\vartheta = p_{N+1, N+1}^{(\alpha, \beta)}$ .

wird in Abschnitt 3.4 eingegangen. Daher sollen an dieser Stelle nur die Schätzfehler infolge der polynomialen Approximation, der Schätzverzögerung und des Messrauschens diskutiert werden.

**Systematischer Schätzfehler** Ist  $\Delta t \in [0, T]$  und  $x^{(n)} \in \mathcal{C}^1([t - \Delta t, t])$ , so liefert der Taylor'sche Satz

$$|\tilde{x}_{\Delta t}^{(n)}(t)| \leq \sup_{\xi \in [t - \Delta t, t]} |x^{(n+1)}(\xi)| \Delta t = \mathcal{O}(T) \quad \text{für } T \rightarrow 0. \quad (3.3a)$$

Für  $x^{(n)} \in \mathcal{C}^{m+1}([t - T, t])$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , folgt aus (B.13)

$$|\tilde{x}_{\gamma}^{(n)}(t)| \leq \frac{M}{p!} \left(\frac{T}{2}\right)^{p+1} \sup_{\tau \in [t - T, t]} |x^{(n+p+1)}(\tau)| = \mathcal{O}(T^{p+1}) \quad \text{für } T \rightarrow 0 \quad (3.3b)$$

mit  $p := \min\{m, \gamma - n\}$  und der von den Parametern des algebraischen Ableitungsschätzers abhängigen Konstante  $M$ . Die Fensterbreite  $T$  sollte also möglichst klein sein, um einen geringen systematischen Schätzfehler zu gewährleisten.

Bei hinreichend glatten Signalen ( $m > \gamma - n$ ) verbessert sich der Approximationsfehler nach (B.5) um eine Ordnung, sofern  $\vartheta$  eine Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $(N + 1)$ -ten Grades ist. Dies erklärt die herausragende Bedeutung einer derartigen Wahl von  $\vartheta$  für den praktischen Einsatz der algebraischen Ableitungsschätzer. So

empfahl bereits Mboup et al. (2007), eine Schätzverzögerung entsprechend der letzten Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $(N + 1)$ -ten Grades zu wählen. Man erkennt in Abbildung 3.4, dass auf diese Weise bei praktikablen Parameterkombinationen Schätzverzögerungen deutlich unter der halben Fensterbreite möglich sind.

**Unsystematischer Schätzfehler** Zunächst betrachte man eine harmonische Störung  $\varpi(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Da die algebraischen Ableitungsschätzer lineare zeitinvariante Filter sind, ist der durch  $\varpi$  hervorgerufene Schätzfehler ebenfalls harmonisch,  $\tilde{x}_\varpi^{(n)} = A \sin(\omega_0 t + \Phi_0)$ , wobei die Amplitude gegenüber der von  $\varpi$  um

$$A/a = \omega_0^n |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega_0) \quad (3.4)$$

verstärkt wird. Hierbei ist  $\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  der Frequenzgang des Ableitungsschätzers (Abschnitt 3.3.1) und der Faktor  $\omega_0^n$  entspricht der Verstärkung bei zeitlicher Differentiation um 20 dB je Frequenzdekade und Ableitungsordnung (Oppenheim und Willsky, 1997). Soll die Amplitude von  $\tilde{x}_\varpi^{(n)}$  einen Schwellwert  $\zeta$  nicht überschreiten, so muss  $|\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega_0) \leq \zeta / (a \omega_0^n)$  erfüllt sein. Folglich sollte der Betragsgang eines linearen zeitinvarianten Ableitungsschätzers bei hohen Frequenzen um mindestens  $n$ -mal 20 dB je Frequenzdekade abfallen, um hochfrequente Rauschanteile genügend abzuschwächen.

Üblicherweise resultiert Messrauschen aus der Überlagerung vieler Phänomene, so dass es schwierig ist, die Amplitude des unsystematischen Schätzfehlers exakt zu prognostizieren. Daher wurden in Liu (2011); Liu et al. (2011b, 2014a) die algebraischen Ableitungsschätzer statistisch analysiert. Im Rahmen dieser Arbeit hat es sich als zweckmäßig herausgestellt, das Übertragungsverhalten der algebraischen Ableitungsschätzer im Frequenzbereich zu beschreiben, da wesentliche, in der Praxis häufig dominante Störungen auf natürliche Weise im Frequenzbereich beschrieben (man denke etwa an elastische Vibrationen mechanischer Strukturen, elektromagnetische Wechselfelder oder Pumpenpulsationen) und die Filtereigenschaften der algebraischen Ableitungsschätzer elegant im Frequenzbereich quantifiziert und für die Filtersynthese angenähert werden können (siehe Abschnitt 3.3).

Im Folgenden wird stets davon ausgegangen, dass das Messrauschen  $\varpi$  mittelwertfrei, schwach stationär, dem abzuleitenden Nutzsignal  $x$  additiv überlagert und mit diesem unkorreliert ist.<sup>19</sup> Die Varianz  $\sigma_y^2$  des unsystematischen Schätzfehlers  $y = \tilde{x}_\varpi^{(n)}$  entspricht dann seiner mittleren Leistung und beträgt nach (A.40)

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|^2 \cdot \mathcal{S}\{\varpi\}(\omega) d\omega \quad (3.5)$$

mit dem Leistungsdichtespektrum  $\mathcal{S}\{\varpi\}$  des Rauschens.

Beispielsweise hat das eingangs erwähnte sinusförmige Signal die Varianz  $\sigma_\varpi^2 = a^2/2$  und das Leistungsdichtespektrum  $\mathcal{S}\{\varpi\} = \pi a^2 (\delta^{-\omega_0} + \delta^{\omega_0})/2$  (Papoulis, 1962).

<sup>19</sup>Für eine Einführung in die Grundlagen stochastischer Prozesse sei bspw. auf (Parzen, 2015) verwiesen. Für diese Arbeit wesentliche Formeln sind in Anhang A.3 zusammengefasst.

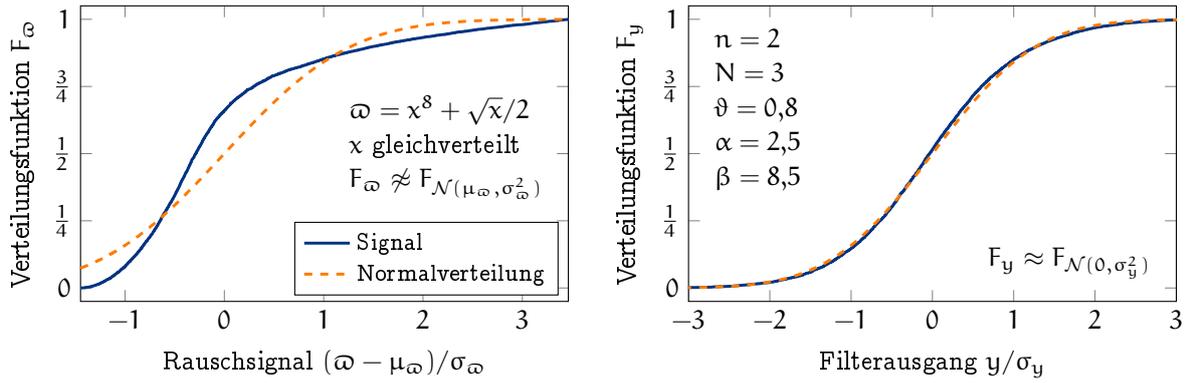


Abbildung 3.5.: Bei Anwendung eines algebraischen Ableitungsschätzers auf ein Rauschsignal mit asymmetrischer, von einer Normalverteilung deutlich abweichender Verteilungsfunktion (links) ist das Ausgangssignal häufig dennoch näherungsweise normalverteilt (rechts).

Die mittlere Leistung der harmonischen Störung wird daher durch den Ableitungsschätzer um  $\sigma_y^2/\sigma_\omega^2 = \omega_0^{2n} |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega_0)|^2$  verstärkt. Verglichen mit (3.4) wird deutlich, dass die Verstärkung der Signalamplitude auch aus der Verstärkung der Standardabweichung errechnet werden kann:  $A/a = \sigma_y/\sigma_x$ .

Für allgemeinere Rauschsignale  $\omega$  kann zumindest die Wahrscheinlichkeit, dass der unsystematische Schätzfehler im Zeitraum  $[a, b]$  den Schwellwert  $\zeta$  nicht überschreitet, mit der Tschebischeff-Ungleichung

$$\mathcal{P}\{\sup_{t \in [a,b]} |y(t)| \leq \zeta\} \geq 1 - (\sigma_y/\zeta)^2 (1 + (b-a) \sigma_y/\sigma_y) \quad (3.6)$$

für stochastische Prozesse abgeschätzt werden (Parzen, 2015).<sup>20</sup> Dies rechtfertigt die Filtersynthese im Frequenzbereich mit dem Ziel einer Verringerung der Rauschleistung am Filterausgang in der Erwartung einer Verringerung der Rauschamplitude.

Die Tschebischeff-Ungleichung (3.6) ist für beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen gültig und liefert daher konservative Schätzungen für die zu erwartende mittlere Rauschleistung. Oft ist jedoch die Antwort eines algebraischen Ableitungsschätzers auf das Messrauschen näherungsweise normalverteilt. Ein Beispiel hierfür ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Verteilungsfunktion  $F_y(x) = \mathcal{P}\{y \leq x\}$  des unsystematischen Schätzfehlers genügt dann näherungsweise  $F_y \approx F_{\mathcal{N}(0, \sigma_y^2)}$  mit der Verteilungsfunktion

$$F_{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) := \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{x - \mu}{\sqrt{2} \sigma} \right) \right), \quad \operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau, \quad (3.7a)$$

der Gauß'schen Normalverteilung (Papoulis und Pillay, 2002). Dies ergibt

$$\mathcal{P}\{|y| \leq \zeta\} \approx F_{\mathcal{N}(0, \sigma_y^2)}(\zeta) - F_{\mathcal{N}(0, \sigma_y^2)}(-\zeta) = \operatorname{erf} \left( \frac{\zeta}{\sqrt{2} \sigma_y} \right) \quad (3.7b)$$

und somit beispielsweise für  $\zeta = 3 \sigma_y$  die Wahrscheinlichkeit von ca. 99,7 % dafür, dass der unsystematische Schätzfehler den Schwellwert  $\zeta$  nicht überschreitet. Soll also

<sup>20</sup>Voraussetzung für die Gültigkeit von (3.6) ist die zweifache Differenzierbarkeit der Autokorrelationsfunktion von  $\omega$  (Parzen, 2015).

der unsystematische Schätzfehler bei ca. 99,7% der Schätzwerte den Schwellwert  $\zeta$  nicht überschreiten, so muss der Ableitungsschätzer nach (3.5) entsprechend

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|^2 \cdot \mathcal{S}\{\omega\}(\omega) d\omega \approx (\zeta/3)^2$$

an das Messrauschen angepasst werden (wie diese Anpassung in der Praxis näherungsweise bewerkstelligt werden kann, wird in Abschnitt 3.3.2 demonstriert). Im Vergleich hierzu resultiert für dasselbe Szenario aus der Tschebischeff-Ungleichung (3.6) bereits für  $a = b$  die wesentlich konservativere Anforderung  $\sigma_y^2 \geq (\zeta/19,25)^2$ .

## 3.2. Zeitbereichseigenschaften

### 3.2.1. Impuls- und Sprungantwort

Die algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster können als lineare zeitinvariante Filter interpretiert werden, die auf der zu schätzenden Ableitung operieren (Kiltz und Rudolph, 2013). Daher kann der Ableitungsschätzer (3.1) mit seiner Impulsantwort  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  identifiziert und  $\hat{x}^{(n)}$  als Faltungsprodukt angeschrieben werden (Oppenheim und Willsky, 1997):

$$\hat{x}^{(n)} = g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \chi^{(n)}. \quad (\text{B.17})$$

In Anhang B.2.3 wurden verschiedene Ausdrücke für  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  hergeleitet, siehe (B.22). Exemplarisch sei hier folgende Variante wiedergegeben:

$$g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} (w^{(\alpha,\beta)} \cdot P_i^{(\alpha,\beta)}) \circ \theta_T \quad (\text{B.22a})$$

mit der Zeittransformation  $\theta_T$  nach (B.1b), der Gewichtsfunktion  $w^{(\alpha,\beta)}$  nach (A.31) und  $P_i^{(\alpha,\beta)}$  dem zugehörigen Jacobi-Polynom  $i$ -ten Grades, siehe (A.64a). Die Sprungantwort  $h_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}/s$  wurde in Anhang B.2.4 hergeleitet:

$$h_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ I_{\frac{t}{T}}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \left( \frac{w^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} P_{i-1}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) \circ \theta_T(t), & 0 < t \leq T, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.36})$$

mit  $\bar{\alpha} := \alpha + 1$ ,  $\bar{\beta} := \beta + 1$  und  $I_\tau$  der regularisierten unvollständigen Beta-Funktion (A.48). Da  $w^{(\alpha,\beta)}$  nur auf dem Intervall  $[-1, 1]$  von 0 verschieden ist, verschwindet  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  außerhalb von  $[0, T]$ . Algebraische Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster sind also Filter mit zeitlich beschränkter Impulsantwort (*FIR-Filter*) und berechnen daher zum Zeitpunkt  $t$  einen gewichteten Mittelwert von  $x^{(n)}$  auf  $[t - T, t]$ . Entsprechend besitzt die Sprungantwort die endliche Übergangsdauer  $T$ . Abbildung 3.6 illustriert verschiedene Eigenschaften der Impuls- und Sprungantwort der algebraischen Ableitungsschätzer, die im Folgenden vertieft werden.

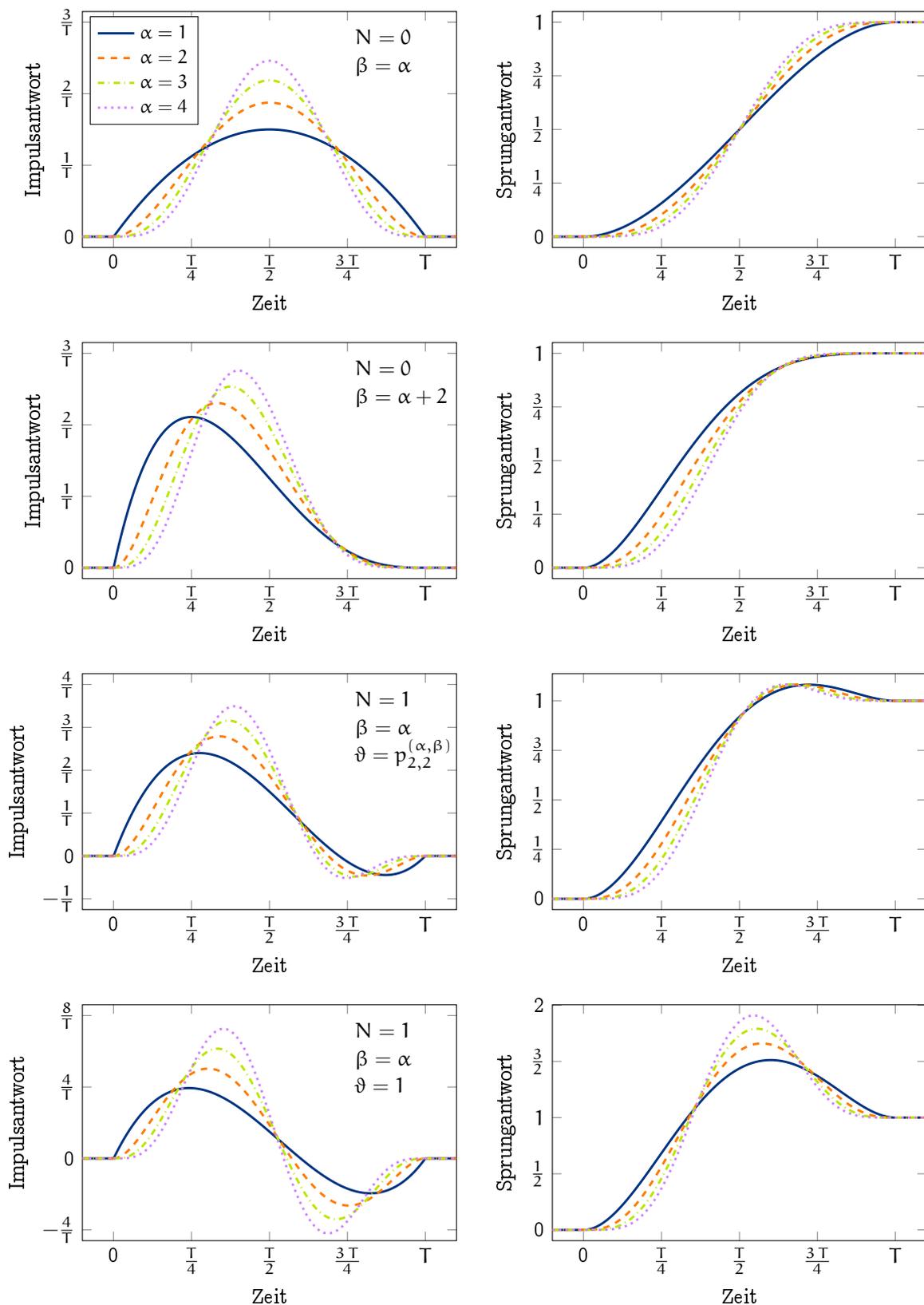


Abbildung 3.6.: Impuls- (links) und zugehörige Sprungantworten (rechts) algebraischer Ableitungsschätzer.

Für  $N = 0$  ist die Impulsantwort nicht-negativ, da sie in diesem Fall, bis auf eine konstante Skalierung, der Gewichtsfunktion der Jacobi-Polynome entspricht:

$$g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^\alpha (T-\tau)^\beta}{B(\alpha+1,\beta+1)T^{\alpha+\beta+1}}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.22b})$$

mit  $B(\alpha + 1, \beta + 1)$  der Beta-Funktion (A.46). Daher schwingt die Sprungantwort für  $N = 0$  nicht über, was in (B.36) wegen  $0 \leq I_\tau(\alpha + 1, \beta + 1) \leq 1$  für  $\tau \in [0, 1]$  klar wird. Da des Weiteren nach (B.38a)  $m_0(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = 1$  gilt, ist die Impulsantwort für  $N = 0$  stets eine Dichtefunktion im Sinne von (A.20).

Im Fall  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$  ist die Impulsantwort eine Rechteckfunktion. Eine simultane Erhöhung von  $\alpha$  und  $\beta$  bewirkt eine stärkere Gewichtung der Werte von  $\chi^{(n)}$  in der Mitte des gleitenden Zeitfensters. Eine Erhöhung von  $\beta$  im Vergleich zu  $\alpha$  bewirkt eine stärkere Gewichtung der Impulsantwort in Richtung 0. Dies bedeutet eine stärkere Gewichtung jüngerer Werte von  $\chi^{(n)}$  und korrespondiert mit der Verringerung der Schätzverzögerung nach (B.5). Im Gegensatz hierzu führt eine Erhöhung von  $\alpha$  im Vergleich zu  $\beta$  zu einer stärkeren Gewichtung der Impulsantwort in Richtung  $T$ , was einer stärkeren Gewichtung älterer Werte von  $\chi^{(n)}$  und somit einer Vergrößerung der Schätzverzögerung entspricht.

Bei einem Polynomgrad  $N > 0$  kann die Impulsantwort auch negative Werte annehmen, was zum Überschwingen der Sprungantwort führt. Eine Verringerung der Schätzverzögerung durch Erhöhung von  $\vartheta$  führt dann tendenziell zu einer stärkeren negativen Gewichtung älterer Werte von  $\chi^{(n)}$  innerhalb des gleitenden Zeitfensters.

Für  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta$  ist die Impulsantwort achsensymmetrisch bezüglich  $T/2$ . Nach (B.21) gilt allgemeiner: Vertauscht man bei beliebigem Polynomgrad  $N$  die Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  und  $\beta$  und spiegelt die Schätzverzögerung  $\Delta t$  an  $T/2$ , ändert also das Vorzeichen von  $\vartheta$ , so geht die resultierende Impulsantwort aus der ursprünglichen Impulsantwort durch Spiegelung an  $T/2$  hervor:

$$\delta^{-\frac{T}{2}} g_{N,T,\vartheta}^{(\beta,\alpha)}(\tau) = \delta^{\frac{T}{2}} g_{N,T,-\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(-\tau). \quad (\text{3.8a})$$

Daher ist die Impulsantwort für  $\alpha = \beta$  und  $\Delta t = T/2$ , also  $\vartheta = 0$ , sogar für beliebige Polynomgrade  $N$  achsensymmetrisch bezüglich  $T/2$ , also

$$\delta^{-\frac{T}{2}} g_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}(\tau) = \delta^{\frac{T}{2}} g_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}(-\tau), \quad (\text{3.8b})$$

und die zugehörige Sprungantwort punktsymmetrisch bezüglich  $(T/2, 1/2)$ . Derartige Filter werden auch *linearphasig* genannt, siehe Abschnitt 3.3.1.

Aus (3.8a) folgt, dass die Impulsautokorrelationsfunktion  $r_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := r\{g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\}$  der algebraischen Ableitungsschätzer nach (A.40b) dem um die Fensterbreite  $T$  verschobenen Faltungsprodukt von  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  mit dem an  $T/2$  gespiegelten Ableitungsschätzer  $g_{N,T,-\vartheta}^{(\beta,\alpha)}$  entspricht:

$$r_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = \delta^{-T} g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} g_{N,T,-\vartheta}^{(\beta,\alpha)}, \quad (\text{3.9a})$$

was sich im linearphasigen Fall  $\alpha = \beta$ ,  $\Delta t = T/2$  zu

$$r_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)} = \delta^{-T} \left( g_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)} \right)^2 \quad (\text{3.9b})$$

vereinfacht.

Mit Erhöhung von  $\alpha$  bzw.  $\beta$  wird die Impulsantwort  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  der algebraischen Ableitungsschätzer bei 0 bzw. bei  $T$  häufiger differenzierbar. Dies ist grundlegend für die *Realisierbarkeit* der algebraischen Ableitungsschätzer: In dieser Arbeit wird  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  als *realisierbar zur Schätzung der n-ten Zeitableitung* (oder kurz *realisierbar*) bezeichnet, wenn das Faltungsprodukt (B.17) in eine Form überführt werden kann, in der die Messgröße in der resultierenden Schätzvorschrift nur in integrierter Form auftritt, siehe auch Abschnitt 2.1. Nach Anhang B.2.2 ist dies für  $\alpha, \beta > n - 1$  gegeben, da dann die Ableitung im Faltungsprodukt (B.17) von der Messgröße zum Ableitungsschätzer verschoben werden kann:

$$\hat{x}^{(n)} = \left(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\right)^{(n)} x. \quad (3.10)$$

Ein realisierbarer algebraischer Ableitungsschätzer kann daher auch als lineares zeitinvariantes Filter mit der Impulsantwort  $\left(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\right)^{(n)}$  interpretiert werden, welches auf das Signal  $x$  angewandt wird. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird stets Realisierbarkeit der algebraischen Ableitungsschätzer vorausgesetzt.

*Bemerkung 4* (Zusammenhang mit Lanczos' verallgemeinerter Ableitung und mit Legendre-Ableitungsschätzern). Für  $\alpha = \beta = n$  und  $N = 0$  kann die  $n$ -te Ableitung (B.20) der Impulsantwort der algebraischen Ableitungsschätzer mit Hilfe von (A.70) als  $\left(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}\right)^{(n)} = \frac{2^{2n} n!}{T^{n+1}} (P_n \circ \theta_T)$  mit  $P_n = P_n^{(0,0)}$  dem Legendre-Polynom  $n$ -ten Grades dargestellt werden. Für  $n = 1$  wurde diese Art der näherungsweise Differentiation von Lanczos (1956) beschrieben und wird daher auch *Lanczos' verallgemeinerte Ableitung* genannt. Blackman (1965) leitete schließlich Schätzfilter für beliebige Ableitungsordnungen her, basierend auf einer gleitenden Projektion auf die Legendre-Polynome. Diese Ableitungsschätzer werden auch in Mai und Hillermeier (2008) untersucht.

### 3.2.2. Reihenschaltung

Mboup und Riachy (2014) beobachteten, dass die Reihenschaltung zweier algebraischer Schätzer für die erste Ableitung zu günstigeren Filtereigenschaften führen kann als ein einzelner algebraischer Schätzer für die zweite Ableitung. Zur Erläuterung dieses Sachverhaltes wird die Reihenschaltung  $p$  algebraischer Ableitungsschätzer mit den Impulsantworten  $g_i := g_{N_i, T_i, \vartheta_i}^{(\alpha_i, \beta_i)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , betrachtet. Es wird davon ausgegangen, dass alle  $g_i$  *Dichtefunktionen* im Sinne von (A.20) sind, was nach Abschnitt 3.2.1 beispielsweise für  $N = 0$  stets erfüllt ist.

Die Impulsantwort  $\bar{g}_p$  der Reihenschaltung ergibt sich als Faltungsprodukt  $\bar{g}_p = g_1 g_2 \cdots g_p$  der Impulsantworten der beteiligten algebraischen Ableitungsschätzer und hat den kompakten Träger  $[0, \bar{T}_p]$ ,  $\bar{T}_p := \sum_{i=1}^p T_i$ . Da die Impulsantworten  $g_i$  Dichtefunktionen sind, ergeben sich der Mittelwert  $\mu_p := m_1(\bar{g}_p)$  und die Varianz  $\sigma_p^2 := m_2^*(\bar{g}_p)$  der Reihenschaltung durch Summation der Mittelwerte beziehungsweise

se Varianzen der beteiligten Ableitungsschätzer (Papoulis, 1962):

$$\mu_p = \sum_{i=1}^p m_1(g_i), \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^p m_2^*(g_i). \quad (3.11)$$

Explizite Darstellungen für den Mittelwert und die Varianz der algebraischen Ableitungsschätzer wurden in Anhang B.2 hergeleitet, siehe (B.38b) und (B.39).

Nach einem *zentralen Grenzwertsatz* konvergiert  $\bar{g}_p$  mit steigender Anzahl  $p$  beteiligter Ableitungsschätzer gegen die Dichtefunktion der Gauß'schen Normalverteilung (Papoulis, 1962):

$$\bar{g}_p(t) \rightarrow G_p(t) := \frac{1}{\sigma_p} G\left(\frac{t - \mu_p}{\sigma_p}\right) \quad \text{für } p \rightarrow \infty \quad (3.12)$$

mit der Gauß-Funktion  $G(t) := e^{-t^2/2}/\sqrt{2\pi}$ . Definiert man die *Breite* einer Funktion  $f$  als  $w(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 |f(\tau)|^2 d\tau$  und ihre *Energie* als  $E(f) := \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|^2 d\tau$ , so gilt, sofern  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sqrt{t}f(t) = 0$  erfüllt ist, die *Unschärferelation* (Papoulis, 1962)

$$\frac{w(f) w(\mathcal{F}\{f\})}{E(f)} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (3.13)$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für Funktionen der Form  $f(t) = a e^{b t^2/2}$  erfüllt ist. Daher konvergiert  $\bar{g}_p$  entsprechend (3.12) gegen einen im Sinne von (3.13) optimalen Kompromiss zwischen der Breite der Impulsantwort, also einer deutlichen Konzentration zu filternder Werte und somit einer hohen Schätzgenauigkeit, und der Breite des Frequenzgangs, was einer effektiven Tiefpasswirkung entspricht.

Dies erklärt die eingangs erwähnte Feststellung in Mboup und Riachy (2014). Ebenso kann das in Hu und Mao (2014) vorgeschlagene modifizierte algebraische Ableitungsschätzverfahren als Reihenschaltung eines algebraischen Ableitungsschätzers mit einer Rechteckfunktion, also dem algebraischen Ableitungsschätzer für  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , interpretiert werden.

Neben der Konvergenz gegen eine Gauß-Funktion konvergiert  $\bar{g}_p$  auch gegen die Dichtefunktion der Betaverteilung (Papoulis, 1962), welche der Impulsantwort eines algebraischen Ableitungsschätzers mit dem Polynomgrad  $N = 0$  entspricht:

$$\bar{g}_p \rightarrow g_{0, \bar{T}_p, \vartheta}^{(\bar{\alpha}_p, \bar{\beta}_p)} \quad \text{für } p \rightarrow \infty. \quad (3.14a)$$

Damit  $g_{0, \bar{T}_p, \vartheta}^{(\bar{\alpha}_p, \bar{\beta}_p)}$  den Mittelwert  $\mu_p$  und die Varianz  $\sigma_p^2$  besitzt, müssen die Gewichtsfunktionspotenzen  $\bar{\alpha}_p$  und  $\bar{\beta}_p$  nach (A.21) und (B.38b) zu

$$\bar{\alpha}_p = \left(\frac{\mu_p}{\sigma_p}\right)^2 \left(1 - \frac{\mu_p}{\bar{T}_p}\right) - \left(1 + \frac{\mu_p}{\bar{T}_p}\right), \quad \bar{\beta}_p = \left(\left(\frac{\mu_p}{\sigma_p}\right)^2 + 1\right) \left(\frac{\mu_p}{\bar{T}_p} - 2\right) + \frac{\bar{T}_p \mu_p}{\sigma_p^2} \quad (3.14b)$$

gewählt werden. Zusammen mit (3.12) folgt, dass der algebraische Ableitungsschätzer (3.14) als FIR-Approximation einer Gauß-Funktion verwendet werden kann.

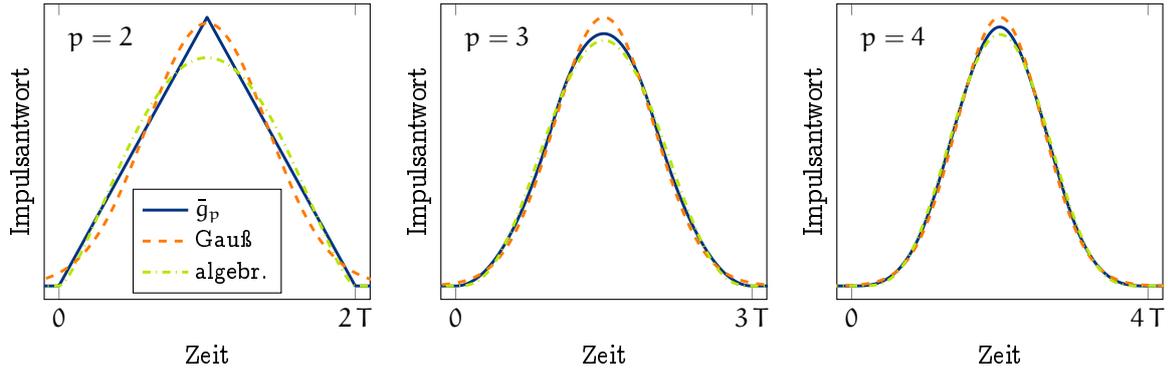


Abbildung 3.7.: Approximation der Reihenschaltung von Rechteckfunktionen  $g_{0,T,\vartheta}^{(0,0)}$  durch die Gauß-Funktion (3.12) und durch den algebraischen Ableitungsschätzer (3.14) für  $p = 2, 3, 4$  in Reihe geschaltete Filter.

**Beispiel 5** (Reihenschaltung linearphasiger Ableitungsschätzer). Der Mittelwert und die Varianz einer Reihenschaltung von  $p$  identischen Ableitungsschätzern  $g_i = g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$  lauten nach (3.11) und (B.40)

$$\mu_p = \frac{pT}{2}, \quad \sigma_p^2 = \frac{pT^2}{4(2\alpha + 3)}.$$

Die Approximation nach (3.14) ist  $g_{0,pT,\vartheta}^{(\bar{\alpha}_p, \bar{\alpha}_p)}$  mit  $\bar{\alpha}_p = p(\alpha + 3/2) - 3/2$ . Abbildung 3.7 demonstriert die rasche Annäherung der Reihenschaltung von Rechteckfunktionen  $g_{0,T,\vartheta}^{(0,0)}$  sowohl an die Approximation  $g_{0,pT,\vartheta}^{(\bar{\alpha}_p, \bar{\alpha}_p)}$  als auch an die Gauß-Funktion (3.12). Folglich kann die Impulsautokorrelationsfunktion von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$  nach (3.9b) für hinreichend große Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  als

$$r_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)} \approx \delta^{-T} g_{0,2T,\vartheta}^{(\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2)} \quad (3.15)$$

angenähert werden.

### 3.2.3. Nicht-differenzierbare Eingangssignale

Es wird angenommen, dass die  $n$ -te Ableitung eines Signals  $x$  mit einem algebraischen Ableitungsschätzer  $g := g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  geschätzt werden soll. Wegen  $\alpha, \beta > n - 1$  (Realisierbarkeit) ist  $g \in \mathcal{C}^{n-1}$ , so dass der Filterausgang  $\hat{x}^{(n)}$  in Operatornotation als

$$\hat{x}^{(n)} = s^n g x$$

angeschrieben werden kann.

Hat  $x$  eine Sprungstelle der Höhe  $\xi$  zum Zeitpunkt  $\Theta$  in der  $k$ -ten Ableitung,  $k \in \{0, \dots, n\}$ , ist aber ansonsten überall  $n$ -fach stetig differenzierbar, so kann es in einen Anteil  $x_c \in \mathcal{C}^n$  und einen  $k$ -fach integrierten Sprung zerlegt werden:

$$x = x_c + \xi \frac{H_\Theta}{s^k} = x_c + \xi \frac{\delta^\Theta}{s^{k+1}}$$

mit der Sprungfunktion  $H_\Theta$  und dem Verschiebeoperator  $\delta^\Theta$  nach (A.4) bzw. (A.5). Infolge des Superpositionsprinzips beträgt der Filterausgang dann

$$\hat{x}^{(n)} = s^n g x_c + \delta^\Theta s^{n-k-1} g. \quad (3.16)$$

Für  $k = n$  antwortet das Filter also, zusätzlich zur geschätzten Ableitung von  $x_c$ , mit seiner zum Sprungzeitpunkt  $\Theta$  einsetzenden Sprungantwort, für  $k = n - 1$  mit seiner Impulsantwort und für  $k \in \{0, \dots, n - 2\}$  mit einer Ableitung der Impulsantwort:

$$\hat{x}^{(n)} = \hat{x}_c^{(n)} + \xi \delta^\Theta g^{(n-1-k)}, \quad (3.17)$$

wobei im Fall  $k = n$  die Sprungantwort  $g^{(-1)} := h_{N,T,\Theta}^{(\alpha,\beta)}$  des Ableitungsschätzers zu verwenden ist. Das Ausgangssignal des Filters ist also wegen  $g \in \mathcal{C}^{n-1}$  stetig.

Oft besteht die Aufgabe, eine Diskontinuität in einer zeitlichen Ableitung eines mit einem mittelwertfreien Rauschen  $\omega$  überlagerten Signals  $y := x + \omega$  automatisiert zu detektieren und zu lokalisieren, beispielsweise zur Segmentierung stückweise stetig differenzierbarer Signale oder für Diagnosezwecke. Sofern der stetige Anteil  $\hat{x}_c^{(n)}$  in (3.17) näherungsweise verschwindet, was wie in Beispiel 7 oder der Fallstudie in Kapitel 4 häufig durch zusätzliche Differentiationen erreicht werden kann, kann der Schätzwert des abgeleiteten Messsignals näherungsweise als

$$r := \hat{y}^{(n)} \approx s^p g (\xi \delta^\Theta s^q + \omega) = \xi \delta^\Theta g^{(p+q)} + g^{(p)} \omega \quad (3.18)$$

dargestellt werden. Er wird also neben dem Messrauschen nur von der Diskontinuität angeregt und eignet sich somit als Grundlage für deren automatisierte Detektion. Das Signal  $r$  wird daher in dieser Arbeit als *Diskontinuitätsindikator* bezeichnet.

Um Diskontinuitäten mit möglichst kleinem Gewicht  $\xi$  mit hoher Wahrscheinlichkeit detektieren zu können und gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit von Fehlalarmen infolge des Rauschens gering zu halten, muss  $g^{(p+q)}$  möglichst „groß“ im Vergleich zu  $g^{(p)} \omega$  sein. Von einem *optimalen Suchfilter* (auch als *angepasstes Suchfilter* oder, engl., *matched filter* bezeichnet) spricht man, wenn das *normierte Signal-Rausch-Verhältnis*

$$\text{SNR} := \frac{|g^{(p+q)}(t)|^2}{P(g^{(p)} \omega)}, \quad (3.19a)$$

also das Verhältnis der Augenblicksleistung des normierten Nutzsignals  $g^{(p+q)}$  zur mittleren Leistung  $P(g^{(p)} \omega)$  des Rauschsignals, maximal wird. Den in diesem Sinne optimalen Diskontinuitätsindikator erhält man für

$$g = h^{(q)} \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \frac{\lambda e^{i\omega\tau}}{S\{\omega\}(\omega)} \quad (3.19b)$$

mit  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\tau \in \mathbb{R}$  beliebig, also wenn das Filter  $g$  die  $q$ -te Ableitung eines linearphasigen Filters  $h$  ist, dessen Betragsgang das Leistungsdichtespektrum des Rauschens kompensiert (Scheithauer, 1998; Ohm und Lüke, 2010). Hierbei wurde davon ausgegangen, dass das Rauschen  $\omega$  als Musterfunktion eines schwach stationären stochastischen Prozesses modelliert werden kann. Außerdem müssen  $g^{(p+q)}$

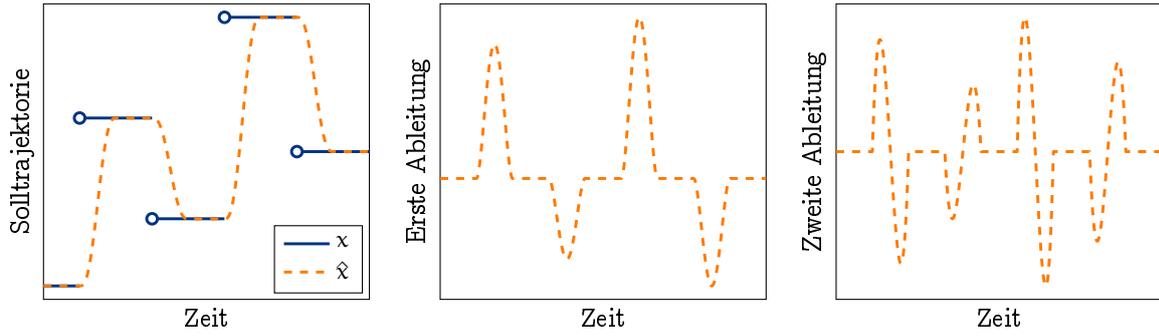


Abbildung 3.8.: Generierung einer zweifach stetig differenzierbaren Solltrajektorie sowie ihrer ersten beiden Ableitungen aus einer Treppenfunktion.

und  $g^{(p)} \omega$  bandbegrenzt sein, was bei den algebraischen Ableitungsschätzern durch die Vorgabe einer hinreichend ausgeprägten Tiefpass-Charakteristik, wie in Abschnitt 3.3.2 erläutert, näherungsweise erreicht werden kann.

Die den algebraischen Ableitungsschätzern für  $\alpha = \beta$ ,  $\Delta t = T/2$  innewohnende Linearphasigkeit sowie die in Abschnitt 3.3.2 diskutierte Anpassbarkeit ihrer Tiefpass-Charakteristik sind also vorteilhaft für die Diskontinuitätsdetektion.

**Beispiel 6** (Trajektoriengenerierung). FIR-Filter können zur Echtzeit-Generierung stetig differenzierbarer Solltrajektorien sowie ihrer Ableitungen aus nicht differenzierbaren Eingangssignalen verwendet werden, siehe bspw. Biagiotti und Melchiorri (2012). Dies ist beispielsweise dann nützlich, wenn bei einer Positionierung mit Hilfe eines Trajektorienfolgereglers durch die übergeordnete Steuerung lediglich stückweise konstante Sollpositionen vorgegeben werden. Als Beispiel betrachte man die Treppenfunktion  $\chi = \sum_i \xi_i H_{\Theta_i}$  mit Sprunghöhen  $\xi_i$  und Sprungzeitpunkten  $\Theta_i$ . Mit dem algebraischen Ableitungsschätzer  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$ ,  $\alpha, \beta > n - 1$ , kann eine  $n$ -fach stetig differenzierbare Approximation  $\hat{\chi}$  von  $\chi$  mit zugehörigen Ableitungen generiert werden:

$$\hat{\chi}^{(k)} = \left(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}\right)^{(k)} \chi, \quad k = 0, \dots, n, \quad (3.20)$$

siehe Abbildung 3.8. Die Symmetrieeigenschaft (3.8b) kann sich günstig auf die maximal erforderlichen Stellgrößen auswirken. Im Fall  $N = 0$  ist durch die überschwingungsfreie Sprungantwort sichergestellt, dass die generierten Solltrajektorien die stückweise vorgegebenen Sollpositionen niemals überschreiten. Auch kann die in Abschnitt 3.3.3 erläuterte Ausblendeigenschaft diskreter Frequenzen vorteilhaft genutzt werden, um etwa die Anregung von Resonanzfrequenzen zu vermeiden.<sup>21</sup>

**Beispiel 7** (Modellbasierte Erkennung einer sprungförmigen Störkraft (Kiltz et al., 2014)). Ein Körper der Masse  $m$  wird mit Hilfe eines Aktors positioniert, welcher die Kraft  $f$  einprägt. Außerdem wirken auf den Körper die unbekannte langsam veränderliche Kraft  $g$ ,  $\dot{g} \approx 0$ , sowie die unbekannte sprungförmige Störkraft  $h := \xi H_{\Theta}$ . Zur Erkennung von  $h$  aus der Kraft  $f$  und der Position  $x$  wird die Bewegungsgleichung

<sup>21</sup>Die Vermeidung ungewünschter Anregungsfrequenzen bereits bei der Trajektoriengenerierung wird in der englischsprachigen Literatur auch als *command shaping* bezeichnet (Singhose, 2009).

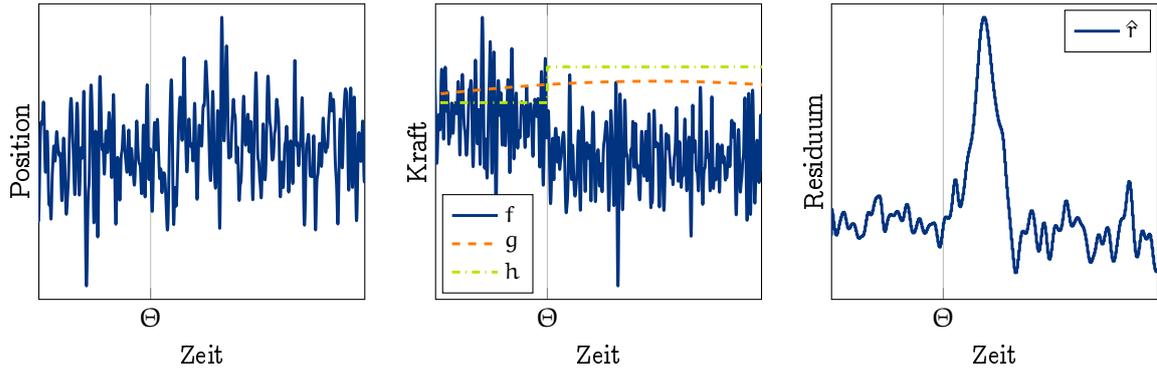


Abbildung 3.9.: Zur Detektion einer sprungförmigen Störkraft im geschlossenen Positionsregelkreis. Während aus dem stark verrauschten Positions- (links) bzw. Kraftsignal (Mitte) keine automatisierte Erkennung der Störkraft möglich ist, unterdrückt das modellbasierte Residuum (3.21) (rechts) effektiv das Rauschen im Vergleich zum Kraftsprung und erlaubt somit dessen Detektion.

$m\ddot{x} - f = g + h$  zunächst nach der Zeit abgeleitet, um die langsam veränderliche Störung zu unterdrücken:

$$r := m\dot{x}^{(3)} - \dot{f} \approx \xi\delta^\Theta.$$

Einen Schätzwert  $\hat{r}$  des Residuums  $r$  erhält man durch Anwendung eines algebraischen Ableitungsschätzers mit Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha, \beta > 2$ :

$$\hat{r} := m \left( g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)^{(3)} x - \left( g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)^{(1)} f \approx \xi\delta^\Theta g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}. \quad (3.21)$$

Der Schätzer antwortet also auf die sprungförmige Störung im Wesentlichen mit einer zum Sprungzeitpunkt  $\Theta$  beginnenden Impulsantwort des algebraischen Ableitungsschätzers. Das geschätzte Residuum  $\hat{r}$  erlaubt eine zuverlässige Erkennung der sprungförmigen Störkraft (Abbildung 3.9). Da die zeitliche Verzögerung der Detektion durch die Impulsantwort bestimmt und somit bekannt ist, kann anwendungsspezifisch leicht entschieden werden, ob die Verzögerung tolerierbar ist.

## 3.3. Frequenzbereichseigenschaften

### 3.3.1. Frequenzgang

In Kiltz und Rudolph (2013) wurde folgende Darstellung des Frequenzgangs der algebraischen Ableitungsschätzer vorgeschlagen, deren Herleitung in Anhang B.3 wiedergegeben ist:

$$\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega) = \sum_{i=0}^N \frac{(\alpha + \beta + 2i + 1) P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\alpha + \beta + i + 1} \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-i\omega T). \quad (B.45)$$

Hierbei bezeichnet  $M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$  die Kummer'sche M-Funktion (B.43), siehe Anhang A.4.2. Abbildung 3.10 verdeutlicht das ausgeprägte Tiefpassverhalten der algebraischen Ab-

leitungsschätzer, welches im folgenden Abschnitt 3.3.2 diskutiert wird.<sup>22</sup>

Die Symmetrieeigenschaft (3.8a) der Impulsantwort lautet im Frequenzbereich

$$e^{i\frac{\omega T}{2}} \mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\beta,\alpha)}(\omega) = e^{-i\frac{\omega T}{2}} \mathcal{F}_{N,T,-\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(-\omega). \quad (3.22)$$

Bildet man auf beiden Seiten von (3.22) den Betrag, so folgt mit der Symmetrieeigenschaft (A.12c) der Fourier-Transformierten reellwertiger Funktionen

$$|\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\beta,\alpha)}| = |\mathcal{F}_{N,T,-\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|. \quad (3.23)$$

Vertauscht man also bei einem algebraischen Ableitungsschätzer die Gewichtsfunktionspotenzen und spiegelt die Schätzverzögerung an  $T/2$ , so weist der resultierende Ableitungsschätzer denselben Betragsgang auf. Daher wurden in Abbildung 3.10 lediglich Frequenzgänge für  $\alpha \leq \beta$  dargestellt.

Die Schätzverzögerung (B.5) stimmt mit dem ersten Moment (B.38b) des algebraischen Ableitungsschätzers überein:  $\Delta t = m_1(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})$ . Daher genügt der Phasengang der algebraischen Ableitungsschätzer (Papoulis, 1962)

$$\arg \mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega) \approx -\omega \Delta t \quad \text{für } |\omega| \rightarrow 0.$$

Die Gruppenlaufzeit entspricht also für niedrige Frequenzen der Schätzverzögerung (Papoulis, 1962). D. h., niedrige Frequenzen werden um  $\Delta t$  verzögert am Ausgang des Ableitungsschätzers wiedergegeben.

Im Fall  $\alpha = \beta$ ,  $\Delta t = T/2$  ist die um die Schätzverzögerung verschobene Impulsantwort  $\delta^{-\Delta t} g_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}$  nach (3.8b) eine gerade Funktion mit einer reellwertigen Fourier-Transformierten, siehe Anhang A.1.2. Daher weist  $g_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}$  den Phasengang

$$\arg \mathcal{F}_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}(\omega) = -\omega \frac{T}{2} - \begin{cases} 0, & e^{i\omega \Delta t} \mathcal{F}_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}(\omega) \geq 0, \\ \pi, & \text{sonst,} \end{cases}$$

auf, hat also fast überall die konstante Gruppenlaufzeit  $T/2$ . Lediglich bei Frequenzen mit  $|\mathcal{F}_{N,T,0}^{(\alpha,\alpha)}(\omega)| = 0$ , also bei Signalanteilen, die durch den Ableitungsschätzer eliminiert werden, ist die Gruppenlaufzeit nicht definiert. Daher sind algebraische Ableitungsschätzer für  $\alpha = \beta$  und  $\Delta t = T/2$  stets *linearphasig* (Papoulis, 1962), siehe auch das Beispiel in Abschnitt 2.2.

### 3.3.2. Tiefpass-Charakteristik

Für  $N = 0$  ist  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  wegen (B.22b) und (B.36) eine *Dichtefunktion* im Sinne von Anhang A.1.2, so dass der Betragsgang nach (A.22) keine Überhöhung besitzt:

<sup>22</sup>Man beachte, dass zur numerischen Auswertung der Kummer'schen M-Funktion eine an die jeweiligen Parameter, den Wertebereich und die erforderliche Genauigkeit angepasste Vorgehensweise erforderlich ist (Olver, 1991; Nardin et al., 1992; Muller, 2001; Gil et al., 2007; Pearson, 2009). In Anhang B.3.2 wird eine Methode erläutert, die sich im Rahmen dieser Arbeit als praktikabel zur graphischen Darstellung von (B.45), wie beispielsweise in Abbildung 3.10, herausgestellt hat.

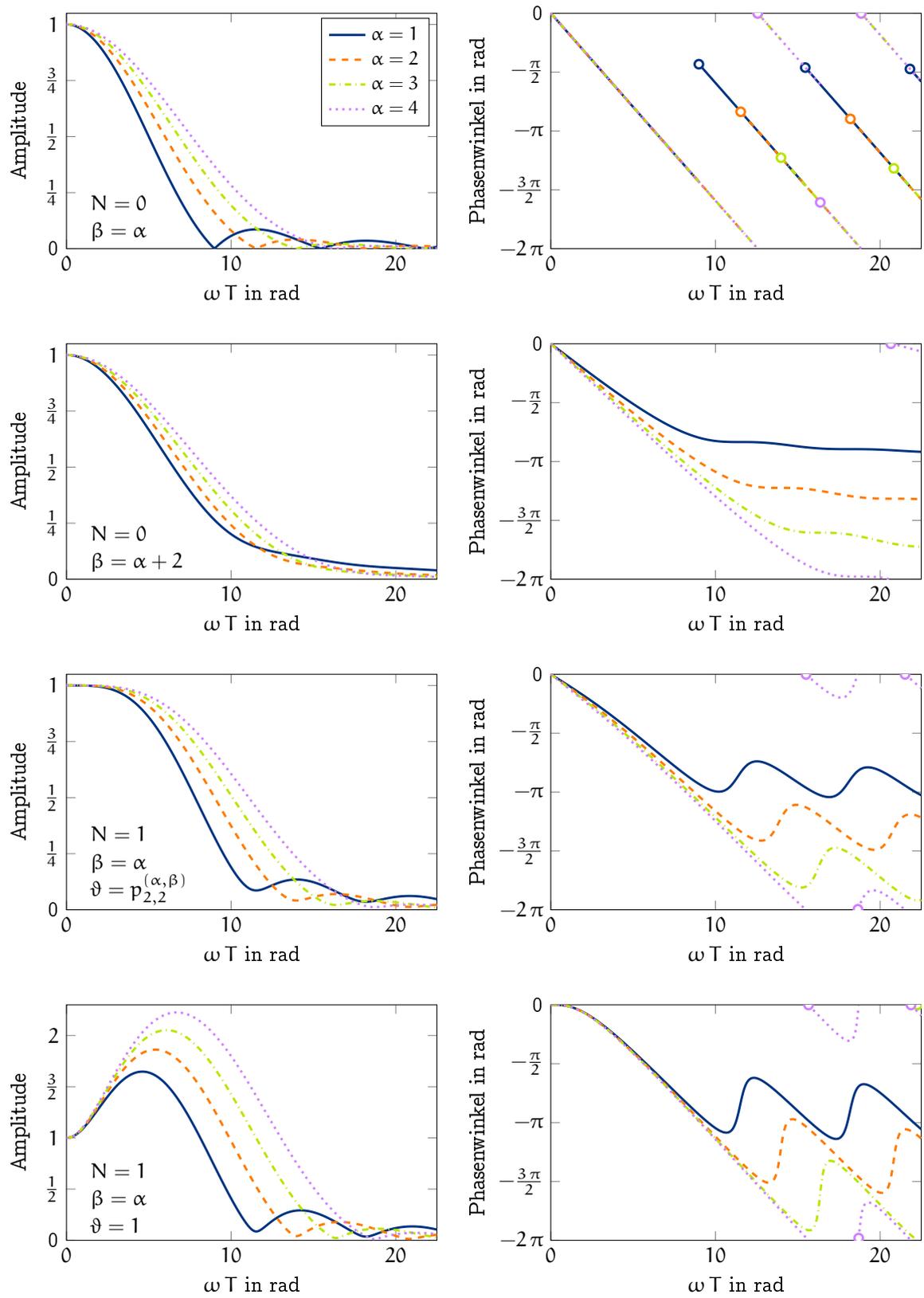


Abbildung 3.10.: Betrags- und Phasengänge der Ableitungsschätzer aus Abbildung 3.6.

$|\mathcal{F}_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega) \leq 1$ . Für  $N > 0$  kann der Betragsgang hingegen eine deutliche Überhöhung aufweisen. In jedem Fall folgt aus (A.15) und (B.38a) die Gleichanteilverstärkung zu  $\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(0) = 1$ .

Zusammen mit der in Anhang B.3.3 hergeleiteten mittleren Asymptote  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}$  (B.58b) des Betragsgangs für hohe Frequenzen erhält man folgende Approximation des Betragsgangs der algebraischen Ableitungsschätzer (Kiltz und Rudolph, 2013):

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ \left|\frac{\omega_c}{\omega}\right|^{\mu}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{mit } \omega_c := \frac{1}{T} \left( \frac{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa)} \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad (3.24)$$

$\mu := \min\{\alpha, \beta\} + 1$ ,  $\kappa := |\beta - \alpha|$ ,  $\sigma = 1$  für  $\beta \geq \alpha$ ,  $\sigma = -1$  für  $\alpha > \beta$  sowie dem Koeffizienten  $q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}$  gemäß (B.57b). Die Frequenz  $\omega_c$  wird in dieser Arbeit *Knickfrequenz* genannt, da sie die Frequenzen  $|\omega| < \omega_c$  mit nahezu konstanter Verstärkung (*Passband*) von den Frequenzen  $|\omega| > \omega_c$  trennt, die mit steigender Frequenz asymptotisch um  $20 \mu$  dB je Frequenzdekade abgeschwächt werden (*Stoppband*), siehe Abbildung 2.4. Die Tiefpass-Charakteristik der algebraischen Ableitungsschätzer kann also näherungsweise durch die Knickfrequenz  $\omega_c$  und die Stoppbandsteigung  $\mu$  beschrieben werden. Wegen  $\mu > n$  (Realisierbarkeit) dominiert die Stoppbandabschwächung die Verstärkung hochfrequenter Signalanteile infolge  $n$ -facher Differentiation.

Nach (3.3) ist eine geringe Fensterbreite wünschenswert, um den systematischen Schätzfehler gering zu halten. Daher wurde in Kiltz und Rudolph (2013) vorgeschlagen, die Filterparameter so zu wählen, dass ein gewünschtes Tiefpassverhalten im Sinne von (3.24) bei möglichst geringer Fensterbreite erreicht wird. Im Folgenden soll eine Lösung für dieses Problem für  $\alpha \leq \beta$  und  $\vartheta > p_{N,N}^{(\alpha,\beta)}$  angegeben werden. Zur Einschränkung  $\alpha \leq \beta$  sei daran erinnert, dass die Ergebnisse nach (3.23) durch Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  und Spiegelung der Schätzverzögerung an  $T/2$  auf den Fall  $\beta < \alpha$  übertragen werden können. Die zweite Einschränkung  $\vartheta > p_{N,N}^{(\alpha,\beta)}$  umfasst neben dem Fall  $\vartheta = p_{N+1,N+1}^{(\alpha,\beta)}$ , bei welchem die in Abschnitt 3.1.2 erläuterte Verbesserung des Genauigkeitsgrades mit der kleinstmöglichen Schätzverzögerung erreicht wird, beispielsweise auch die verzögerungsfreie Schätzung für  $N > 0$  und  $\vartheta = 1$ .

Aus (B.70) folgt, dass dann die kleinste Fensterbreite stets für den Polynomgrad  $N = 0$  erreicht wird. Des Weiteren gelten nach (B.72) und (B.73)

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right|_{N=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \mu} \right|_{N=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial \kappa} \right|_{N=0} > 0, \quad (3.25)$$

so dass die Fensterbreite dann minimal ist, wenn die Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  und  $\beta$  identisch und möglichst klein gewählt werden. Dies entspricht dem Ergebnis in Kiltz und Rudolph (2013) für den wesentlich restriktiveren Fall  $\vartheta = p_{N+1,N+1}^{(\alpha,\beta)}$ . Die resultierende Linearphasigkeit des Ableitungsschätzers korrespondiert ebenfalls mit dem wichtigen Ergebnis aus Blackman (1965), dass die bestmögliche Unterdrückung schwach stationärer Rauschsignale unter allen linearen zeitinvarianten FIR-Filtern gegebener Fensterbreite  $T$  und gegebener Fläche durch ein linearphasiges Filter erreicht

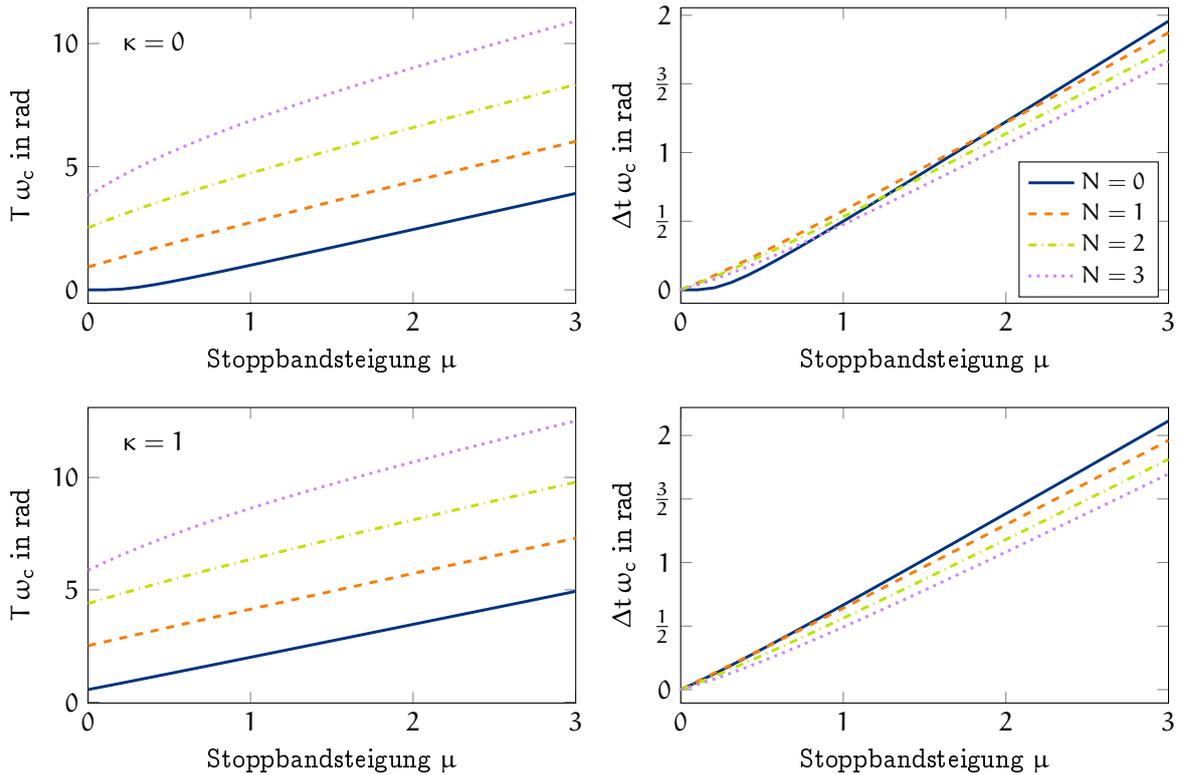


Abbildung 3.11.: Zusammenhang zwischen Knickfrequenz, Fensterbreite und Schätzverzögerung für verschiedene algebraische Ableitungsschätzer ( $\vartheta = p_{N+1, N+1}^{(\alpha, \beta)}$ ).

wird.<sup>23</sup> Es sei an dieser Stelle auch an die in Abschnitt 3.2.3 erörterte Optimalität linearphasiger Filter zur Diskontinuitätsdetektion erinnert.

Abbildung 3.11 bestätigt den Anstieg der Fensterbreite bei Erhöhung des Polynomgrades oder von  $\mu$  bzw.  $\kappa$ . Jedoch wird das Verhältnis zwischen der für  $N > 0$  erforderlichen Fensterbreite und jener für  $N = 0$  mit Erhöhung von  $\mu$  immer kleiner. Wählt man beispielsweise  $\mu = 3$ , um eine Stopbandsteigung von 60 dB je Frequenzdekade zu erzielen (die entsprechenden Schätzer sind für Ableitungen bis zur zweiten Ordnung realisierbar), so ist für  $\kappa = 0$  die bei derselben Knickfrequenz im Fall  $N = 1$  benötigte Fensterbreite lediglich um ca. 53 % größer als die entsprechende für  $N = 0$  benötigte Fensterbreite. Infolge des höheren Genauigkeitsgrades kann daher der Schätzer mit  $N = 1$  trotz der größeren Fensterbreite zu einem geringeren Approximationsfehler führen als der Schätzer mit  $N = 0$ . Zusätzlich ist die Schätzverzögerung für  $N = 1$  um ca. 4 % geringer als für  $N = 0$ , weshalb ein geringerer Verzögerungsfehler zu erwarten ist.

Je nach Anwendung können jedoch auch spezifische Eigenschaften des Schätzers

<sup>23</sup>Genauer gesagt zeigt Blackman (1965), dass dasjenige lineare zeitinvariante FIR-Filter mit der Impulsantwort  $g$  bei gegebener Fensterbreite  $T$  und gegebener Fläche, also nullem Moment  $m_0(g)$ , die mittlere Ausgangsrauschleistung  $\sigma_y^2$  bei Anregung mit einem schwach stationären Rauschen  $\omega$  minimiert, bei dem das Faltungsprodukt aus  $g$  und der Autokorrelationsfunktion  $R\{\omega\}$  des Rauschens eine Rechteckfunktion ist:  $g R\{\omega\} = k(H_0 - H_T)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , und dass hierfür die Achsensymmetrie von  $g$  zu  $T/2$  notwendig ist, also  $g(t) = g(T - t)$ .

mit  $N = 0$  von entscheidendem Vorteil sein, wie beispielsweise die Phasenverzerrungsfreiheit für  $\alpha = \beta$  und die damit einhergehenden Symmetrieeigenschaften im Zeitbereich, die Sprungantwort ohne Überschwinger oder die im folgenden Abschnitt 3.3.3 diskutierte Möglichkeit, harmonische Störungen ohne zusätzliche Filter zu unterdrücken.

**Beispiel 8** (Bandbegrenzttes weißes Rauschen). Ein wichtiges Rauschmodell ist das mittelwertfreie *bandbegrenzte weiße Rauschen*. Dieses ist durch sein rechteckförmiges Leistungsdichtespektrum

$$S\{\omega\} = (H_{-\Omega} - H_{\Omega}) \frac{\sigma_{\omega}^2 \pi}{\Omega} \quad (3.26)$$

charakterisiert und wird daher nach (3.5) durch einen algebraischen Ableitungsschätzer um

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\omega}^2} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \omega^{2n} |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|^2(\omega) d\omega \quad \text{mit } \sigma_y^2 := P((g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(n)} \omega) \quad (3.27)$$

verstärkt. Einen Schätzwert hierfür liefert die Betragsgangapproximation (3.24):

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\omega}^2} \approx \begin{cases} \frac{\Omega^{2n}}{2^{n+1}}, & \Omega < \omega_c, \\ \frac{\omega_c^{2n+1}}{(2^{\mu-2n-1})\Omega} \left( \frac{2^{\mu}}{2^{n+1}} - \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^{2^{\mu-2n-1}} \right), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Für  $\Omega < \omega_c$  liegt die gesamte Leistung des Rauschsignals im Passband des Ableitungsschätzers, so dass das Rauschen entsprechend seiner Bandbreite und der Ableitungsordnung verstärkt wird. Hingegen befindet sich für  $\Omega \geq \omega_c$  ein Teil der Rauschleistung im Stoppband des Ableitungsschätzers und wird daher abgeschwächt.

Damit der Ableitungsschätzer realisierbar ist, muss  $\mu > n$  gelten, siehe Abschnitt 3.2.1. In einer Echtzeitanwendung wird  $\mu$  oft sogar wesentlich größer als  $n$  sein, um das Abtasttheorem nicht zu verletzen, siehe Abschnitt 3.4.1. Für  $\mu > n + 1/2$  folgt aus (3.28) näherungsweise

$$\sigma_y^2 \rightarrow \frac{2^{\mu} \omega_c^{2n+1} \sigma_{\omega}^2}{(2^{n+1})(2^{\mu-2n-1})\Omega} \quad \text{für } \Omega \rightarrow \infty. \quad (3.29a)$$

Dies bestätigt, dass durch Verringerung der Knickfrequenz  $\omega_c$  und Erhöhung der Stoppbandteilheit  $\mu$  das bandbegrenzte weiße Rauschen zunehmend stärker abgeschwächt wird, wobei die Verringerung der Knickfrequenz den unsystematischen Schätzfehler für  $n > 0$  besonders deutlich verringert. Des Weiteren verringert sich der unsystematische Schätzfehler bei Vergrößerung der Bandbreite des Rauschsignals, da dann ein größerer Anteil der Rauschleistung im Stoppband des Ableitungsschätzers liegt und daher abgeschwächt wird.

Ist der unsystematische Schätzfehler näherungsweise normalverteilt (vergleiche Abschnitt 3.1.3), so kann ein  $k$ -faches der Standardabweichung  $\sigma_y$  sehr anschaulich als Schwellwert interpretiert werden, der vom Schätzfehler mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird (üblich sind bspw. die 3- oder 4-fache Standardabweichung entsprechend einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99,73 % bzw. 99,99 %,

dass eine normalverteilte Zufallsvariable den Schwellwert  $k \sigma_y$  nicht überschreitet). Soll dieser Schwellwert einem vorgegebenen Wert  $\zeta$  entsprechen, so müssen nach (3.29a) die Knickfrequenz und Stoppbandsteigung zu

$$\frac{\mu \omega_c^{2n+1}}{2\mu - 2n - 1} \approx \left(\frac{\zeta}{k}\right)^2 \frac{(2n+1)\Omega}{2\sigma_\omega^2} \quad (3.29b)$$

gewählt werden.

**Beispiel 9** (Quantisierungsrauschen). In einer digitalen Signalverarbeitungskette werden wertkontinuierliche Sensorsignale quantisiert, also durch Anwendung einer Treppenfunktion auf eine endliche Anzahl diskreter Werte abgebildet. Bei äquidistanter Abtastung (Abtastperiode  $T_s$ ) und Quantisierung (Stufenhöhe  $q$ ) kann die Differenz zwischen dem wertkontinuierlichen und dem quantisierten Signal, das sogenannte *Quantisierungsrauschen*, in vielen praktischen Anwendungen näherungsweise als gleichverteiltes bandbegrenzttes weißes Rauschen mit der Bandbreite  $\Omega = \pi/T_s = \omega_N$ , der mittleren Leistung  $\sigma_\omega^2 = q^2/12$  und der Dichtefunktion  $f_\omega = (H_{-q/2} - H_{q/2})/q$  modelliert werden (Bennett, 1948; Oppenheim und Schaffer, 2009). Die mittlere Leistung des Quantisierungsrauschens am Ausgang eines algebraischen Ableitungsschätzers beträgt nach (3.29a) näherungsweise

$$\sigma_y^2 \rightarrow \frac{\mu \omega_c^{2n+1} q^2}{6(2n+1)(2\mu - 2n - 1)\omega_N} \quad \text{für } \omega_N \rightarrow \infty.$$

Der unsystematische Schätzfehler infolge des Quantisierungsrauschens verringert sich also bei Verdoppelung der Abtastrate um ca. 3 dB (*Überabtastung*, engl. *oversampling*) und bei Erhöhung der Auflösung der Quantisierung um 1 bit, also bei Halbierung der Stufenhöhe  $q$ , um ca. 6 dB.

### 3.3.3. Stoppbandwelligkeit

Der Betragsgang der algebraischen Ableitungsschätzer weist im Stoppband eine mit steigender Frequenz abklingende Welligkeit auf, die insbesondere für kleine  $\kappa$  deutlich ausgeprägt ist (Kiltz und Rudolph, 2013; Mboup und Riachy, 2014), siehe Abbildung 3.12. Zur Abschätzung der Welligkeit werden in dieser Arbeit die *asymptotischen Hüllkurven*  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_\infty^+$  und  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_\infty^-$  (B.54a) vorgeschlagen, siehe Anhang B.3.3. Abbildung 3.12 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den asymptotischen Hüllkurven und dem Betragsgang an dessen lokalen Extrema. Nach (B.56) kann der Abstand zwischen den asymptotischen Hüllkurven für hohe Frequenzen in der Form

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_\infty^\Delta(\omega) = p_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^{\mu+\kappa}$$

angeschrieben werden. Folglich führt eine Erhöhung von  $\mu$  (Vergleich der ersten mit der zweiten Zeile in Abbildung 3.12) oder von  $\kappa$  (Vergleich der linken mit der rechten Spalte in Abbildung 3.12) zu einem schnelleren Abklingen der Welligkeit.

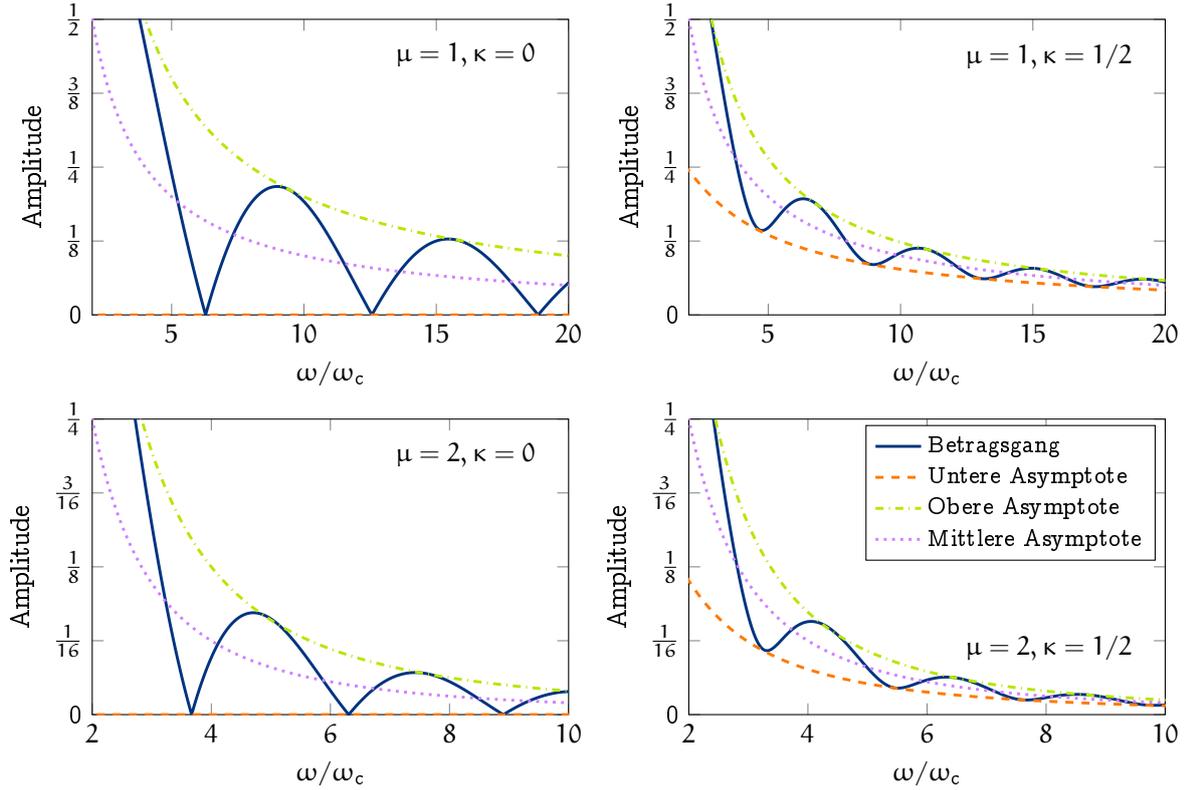


Abbildung 3.12.: Approximation der Stopbandwelligkeit des Betragsgangs mit den asymptotischen Hüllkurven ( $N = 0$ ).

Für  $N = 0$  und  $\alpha = \beta$ , also  $\kappa = 0$ , ist die Stopbandwelligkeit so deutlich ausgeprägt, dass der Betragsgang Nullstellen besitzt (Abbildung 3.12 linke Spalte). Die Amplitudenberge werden dann auch als *Keulen* bezeichnet, wobei die Keule um die Frequenz 0 *Hauptkeule* und die übrigen Keulen *Nebenkeulen* genannt werden. Die Ausbildung der Nullstellen kommt daher, dass sich in diesem Fall der Frequenzgang (B.45) zu  $\mathcal{F}_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}(\omega) = M_{0,0}^{(\alpha,\alpha)}(-\imath \omega T)$  vereinfacht, was mit Hilfe von (A.63) zu

$$\mathcal{F}_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}(\omega) = e^{-\imath \frac{\omega T}{2}} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{\omega T}\right)^{\alpha + \frac{1}{2}} J_{\alpha + \frac{1}{2}}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (3.30)$$

mit der Bessel-Funktion  $J_{\alpha+1/2}$  erster Gattung der Ordnung  $\alpha + 1/2$  umgeschrieben werden kann, siehe Anhang A.4.2. Die Bessel-Funktion  $J_{\alpha+1/2}$  hat positive Nullstellen  $(j_{\alpha+1/2,i})_{i=0}^{\infty}$ , so dass der Frequenzgang von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$  die Nullstellen  $(2j_{\alpha+1/2,i}/T)_{i=0}^{\infty}$  aufweist. Diese Nullstellen gestatten die Unterdrückung harmonischer Störungen ohne zusätzliche Filter (Kiltz und Rudolph, 2013; Kiltz et al., 2013, 2014). Soll beispielsweise eine Frequenz  $\omega_r$  eliminiert werden, so müssen die Filterparameter  $T$  und  $\alpha$  gemäß

$$2j_{\alpha+1/2,i} = T \omega_r, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (3.31)$$

gewählt werden, siehe Abbildung 3.13.

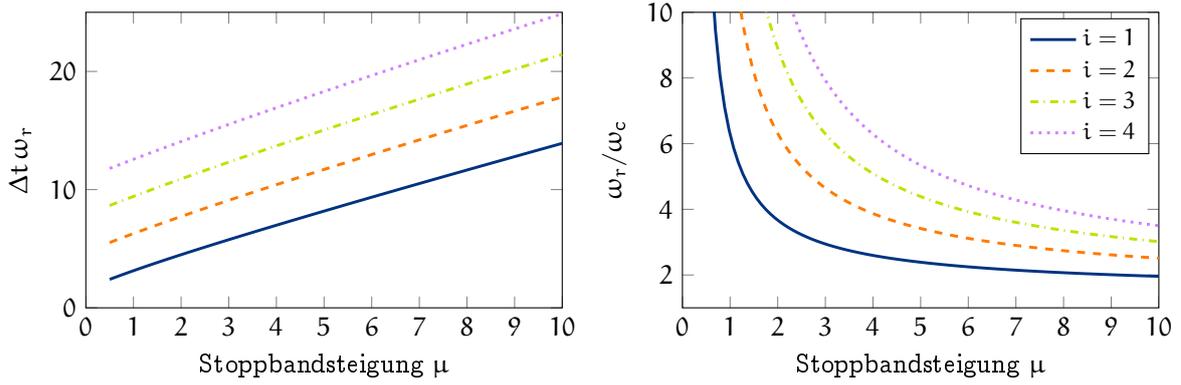


Abbildung 3.13.: Zusammenhang zwischen Stoppbandsteigung, Schätzverzögerung und Knickfrequenz bei Elimination einer Frequenz  $\omega_r$  nach (3.31).

## 3.4. Implementierung

In einer praktischen Anwendung sind die Messgrößen üblicherweise nur zu den diskreten Abtastzeitpunkten  $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  bekannt, weshalb die zeitkontinuierliche Schätzvorschrift (3.10) approximiert werden muss. Neben der Wahl eines hinreichend genauen Verfahrens zur näherungsweise numerischen Integration (*Quadratur*) muss auch dem Abtasttheorem Rechnung getragen werden. Überdies sollte der resultierende Algorithmus möglichst rechenzeit- und speichereffizient sein. In der folgenden Diskussion wird von einer äquidistanten Abtastung  $t_{i+1} = t_i + T_s$  ausgegangen sowie von einer Fensterbreite  $T = L T_s$ , die ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode  $T_s$  ist.

### 3.4.1. Abtastrate

Als Konsequenz des Abtasttheorems (Nyquist, 1928; Kotelnikov, 1933; Shannon, 1948, 1949) sollte bei der Synthese eines zeitdiskreten Filters durch Approximation eines zeitkontinuierlichen Filters darauf geachtet werden, dass dessen Verstärkung bei der Nyquist-Frequenz  $\omega_N = \pi/T_s$  hinreichend klein ist, um Schwebungen (engl. *aliasing*) gering zu halten, siehe auch (A.11). Nach (3.24) beträgt das Verhältnis der Verstärkung bei  $\omega_N$  und jener bei der Knickfrequenz

$$k_N := \frac{\omega_N^n |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega_N)|}{(\omega_c)^n |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega_c)|} \approx \left( \frac{\omega_c}{\omega_N} \right)^{\mu-n}. \quad (3.32)$$

Um bei der Nyquist-Frequenz mindestens die relative Abschwächung  $k_N$  zu erreichen, sollte also diese Frequenz gemäß

$$\frac{\omega_N}{\omega_c} \geq \left( \frac{1}{k_N} \right)^{\frac{1}{\mu-n}} \quad (3.33)$$

gewählt werden. Abbildung 3.14 zeigt, dass kleine Differenzen  $\mu - n$  zu einem starken Anstieg der nach (3.33) erforderlichen Nyquist-Frequenz führen können. Für  $\mu \rightarrow \infty$  wird die durch das Abtasttheorem gegebene theoretische Grenze  $\omega_N = \omega_c$  erreicht.

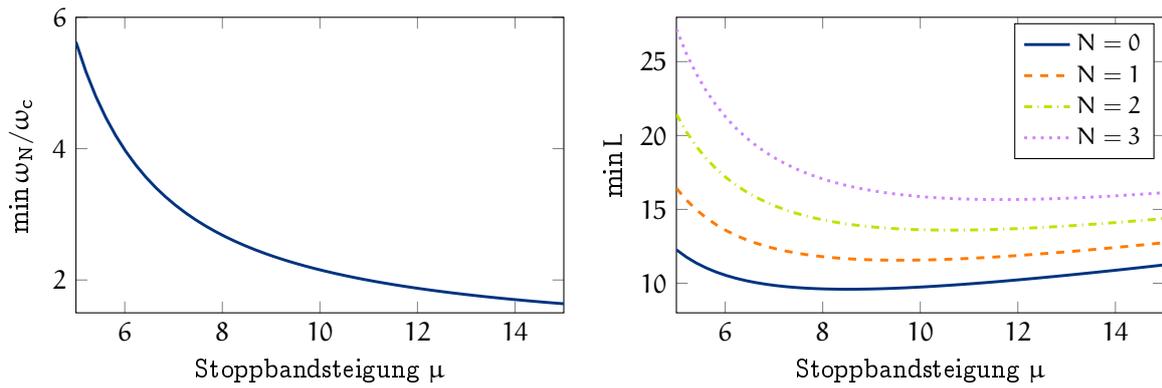


Abbildung 3.14.: Minimale Nyquist-Frequenz und Anzahl Abtastperioden nach (3.33) bzw. (3.34) für  $k_N = -60$  dB,  $n = 1$ ,  $\kappa = 0$  und  $\vartheta = p_{N+1, N+1}^{(\alpha, \beta)}$ .

Neben einer niedrigen Nyquist-Frequenz und somit einer geringen Abtastrate ist eine geringe Anzahl  $L$  von Abtastperioden je Fensterbreite wünschenswert, um wenige Messwerte und Filterkoeffizienten speichern zu müssen und, je nach Implementierung, den Filterausgang mit einer geringen Anzahl von Rechenoperationen in jedem Abtastschritt berechnen zu können. Die Nyquist-Frequenz in (3.33) entspricht nach (3.24) einer Fensterbreite von

$$L = \frac{T \omega_N}{\pi} \geq \frac{1}{\pi} \left( \frac{q_{N, \vartheta}^{(\mu, \kappa, \sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa)} \right)^{\frac{1}{\mu}} \left( \frac{1}{k_N} \right)^{\frac{1}{\mu-n}} \quad (3.34)$$

Abtastperioden. Man erkennt in Abbildung 3.14, dass auch die Anzahl erforderlicher Abtastperioden für geringe Differenzen  $\mu - n$  infolge des rapiden Anstiegs der erforderlichen Nyquist-Frequenz stark ansteigen kann.

Zur effizienten Implementierung ist also eine hinreichend große Differenz zwischen der Stoppbandsteigung  $\mu$  und der Ableitungsordnung  $n$  erforderlich, während aus der zeitkontinuierlichen Analyse lediglich die Realisierbarkeitsanforderung  $\mu > n$  folgte.

**Beispiel 10.** Es soll ein Schätzer für die erste Ableitung bei einer Nyquist-Frequenz  $\omega_N = 1,2 \omega_c$  und einer relativen Abschwächung  $k_N \leq -60$  dB bei  $\omega_N$  implementiert werden. Aus (3.33) folgt die minimal erforderliche Stoppbandsteigung zu

$$\mu_{\min} = n - \frac{\ln k_N}{\ln(\omega_N / \omega_c)} \approx 38,89.$$

Zur Implementierung sollte die Fensterbreite ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode sein. Mit Hilfe von (3.34) ermittelt man beispielsweise, dass für  $N = 2$ ,  $\vartheta = p_{N+1, N+1}^{(\alpha, \beta)}$ ,  $\mu = \mu_{\min}$  und  $\kappa \approx 1,527$  die minimale Zahl von Abtastperioden je Fensterbreite  $L = 25$  beträgt. Abbildung 3.15 bestätigt die Konformität der resultierenden Tiefpass-Charakteristik mit der Vorgabe.

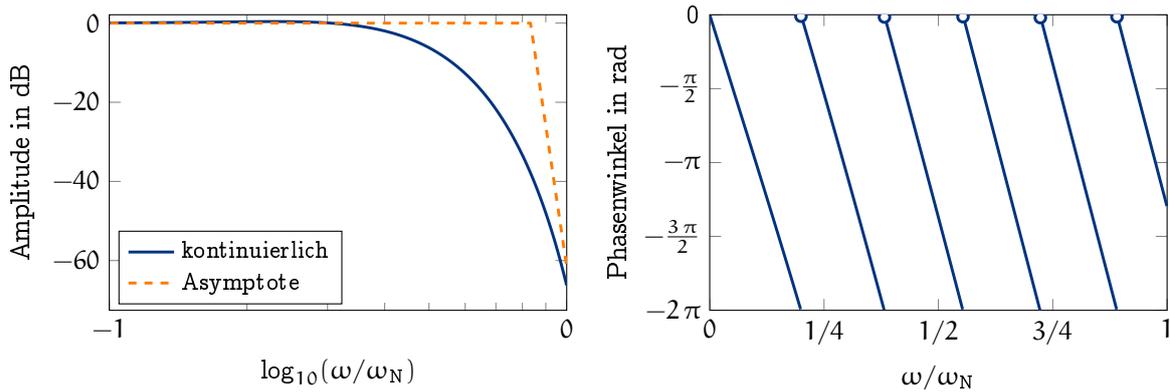


Abbildung 3.15.: Frequenzgang des Ableitungsschätzers aus Beispiel 10.

### 3.4.2. Zeitdiskretisierung

Zur Implementierung muss das Faltungsintegral (3.10), welches als

$$\hat{\chi}^{(n)}(t) = \int_0^T g^{(n)}(\tau) \chi(t - \tau) d\tau \quad \text{mit } g := g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \quad (3.35)$$

angeschrieben werden kann, in jedem Abtastschritt näherungsweise unter Verwendung der zeitdiskreten Messwerte  $\chi_i := \chi(t_i)$  berechnet werden. Die im Folgenden vorgestellten Quadraturverfahren<sup>24</sup> approximieren den Ableitungsschätzer (3.35) durch lineare verschiebe-invariante Filter der Form

$$\hat{\chi}_{i+\vartheta}^{(n)} \approx \frac{1}{\Xi} \sum_{k=0}^{n_k-1} w_k \chi_{i-k} \quad (3.36a)$$

mit der *Filterbreite*  $n_k$ . In Abschnitt 2.4 wurde demonstriert, dass durch die Diskretisierung die unverfälschte Wiedergabe des Gleichanteils der zu schätzenden Ableitung verloren gehen kann. Um dies zu kompensieren, wurde in (3.36a) der Normierungsparameter  $\Xi$  eingeführt. Setzt man beispielsweise  $\chi(t) = t^n$  mit der konstanten  $n$ -ten Ableitung  $\chi^{(n)}(t) = n!$  in (3.36a) ein, so erhält man

$$\Xi = \frac{T_s^n}{n!} \sum_{k=0}^{n_k-1} w_k (-k)^n. \quad (3.36b)$$

Zum Vergleich verschiedener Quadraturverfahren ist ein Gütekriterium erforderlich. Gemäß (3.36a) approximiert der Operator  $\hat{g}^{(n)} := \frac{\delta^\vartheta}{\Xi} \sum_{k=0}^{n_k-1} w_k \delta^k$  mit dem Frequenzgang  $\mathcal{F}\{\hat{g}^{(n)}\}(\omega) = \frac{1}{\Xi} \sum_{k=0}^{n_k-1} w_k e^{-i\omega(k+\vartheta)T_s}$  den algebraischen Ableitungsschätzer  $g^{(n)}$  in (3.35). Da in dieser Arbeit die Erhaltung der Frequenzbereichseigenschaften des Ableitungsschätzers von primärem Interesse ist, wird zur Beurteilung der Quadraturgüte das Gütefunktional

$$\mathcal{J} := \frac{\int_0^\Omega |\mathcal{F}\{\tilde{g}^{(n)}\}|^2(\omega) d\omega}{\int_0^\Omega |\mathcal{F}\{g^{(n)}\}|^2(\omega) d\omega} \quad \text{mit } \tilde{g} := \hat{g} - g \quad (3.37)$$

<sup>24</sup>Siehe beispielsweise die Lehrbücher Krylov (1962); Stroud und Secrest (1966); Stroud (1974); Davis und Rabinowitz (1984); Krommer und Ueberhuber (1998); Freund und Hoppe (2007); Schwarz und Köckler (2011) für eine Einführung in die numerische Integration.

verwandt, wobei  $\Omega$  als obere Grenze des interessierenden Frequenzbereichs gewählt wird (beispielsweise die Nyquist-Frequenz  $\omega_N = \pi/T_s$ ). Ist  $\varpi$  ein bandbegrenzt weißes Rauschen mit der Bandbreite  $\Omega$ , dann folgt aus (3.27)

$$\mathcal{J} = \frac{\sigma_{\tilde{g}^{(n)}}^2 \varpi}{\sigma_{g^{(n)}}^2 \varpi}.$$

D. h., das Gütefunktional (3.37) setzt die Verstärkung der mittleren Rauschleistung durch den Diskretisierungsfehler  $\tilde{g}^{(n)}$  in Relation zu deren Verstärkung durch den kontinuierlichen Ableitungsschätzer  $g^{(n)}$  und liefert so eine Abschätzung, ob der Diskretisierungsfehler im Vergleich zur Rauschverstärkung des kontinuierlichen Ableitungsschätzers vernachlässigt werden kann.

In Abschnitt 2.4 wurde die Mittelpunkregel vorgestellt, bei der der Integrand als Treppenfunktion angenähert wird. Übertragen auf (3.35) ergibt sich (3.36a) mit

$$\theta = 1/2, \quad w_k = T_s g_{k+\theta}^{(n)}, \quad n_k = L. \quad (3.38)$$

D. h., es wird eine halbe Abtastperiode der Schätzverzögerung kompensiert. Die Ausführung von (3.38) erfordert  $2L - 1$  Rechenoperationen ( $L$  Multiplikationen,  $L - 1$  Additionen) sowie die Speicherung von je  $L$  Filterkoeffizienten und Messwerten.

In den Original-Veröffentlichungen Mboup et al. (2007, 2009) wurden die algebraischen Ableitungsschätzer mit der Trapezregel implementiert, bei der der Integrand in (3.35) durch einen Polygonzug angenähert wird. Man erhält (3.36a) mit

$$\theta = 0, \quad w_k = \begin{cases} T_s g_k^{(n)}/2, & k = 0, L, \\ T_s g_k^{(n)}, & k = 1, \dots, L-1, \end{cases} \quad n_k = L + 1. \quad (3.39)$$

Hier wirkt sich die Schätzverzögerung vollumfänglich aus. Außerdem werden zwei Rechenoperationen mehr benötigt als bei der Mittelpunkregel und es müssen ein Filterkoeffizient sowie ein Messwert mehr gespeichert werden.

Nutzt man aus, dass  $g^{(n)}$  in (3.35) analytisch integriert werden kann, ist eine verbesserte Quadraturgenauigkeit zu erwarten, da nur die Messgröße approximiert wird. Nähert man  $\chi$  durch eine Treppenfunktion an,  $\chi(\tau) \approx \chi_i$  für  $\tau \in (t_{i-1/2}, t_{i+1/2}]$ , so folgt  $\hat{\chi}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \approx \frac{1}{\Xi} \sum_{k=0}^{L-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{(n)}(\tau) \chi_{i-k} d\tau$ , also (3.36a) mit

$$\theta = 1/2, \quad w_k = g_{k+1}^{(n-1)} - g_k^{(n-1)}, \quad n_k = L. \quad (3.40)$$

Wie bei der Mittelpunkregel wird eine halbe Abtastperiode der Schätzverzögerung kompensiert und es werden dieselbe Anzahl Rechenoperationen und derselbe Speicher benötigt. Ist  $g^{(n)}$  wie in Abschnitt 2.4 eine Gerade, so sind (3.38) und (3.40) identisch.

Die obige Treppenfunktion kann als stückweise Interpolation von  $\chi$  durch Polynome nullten Grades interpretiert werden. Bei Erhöhung des Grades der Interpolationspolynome ist eine weitere Steigerung der Quadraturgenauigkeit zu erwarten. Beispielsweise ergibt sich für die Approximation von  $\chi$  als Polygonzug,

$$\chi(t_i - \tau) \approx \chi_i - \frac{\chi_i - \chi_{i-1}}{T_s} \tau \quad \text{für } \tau \in [0, T_s), \quad (3.41)$$

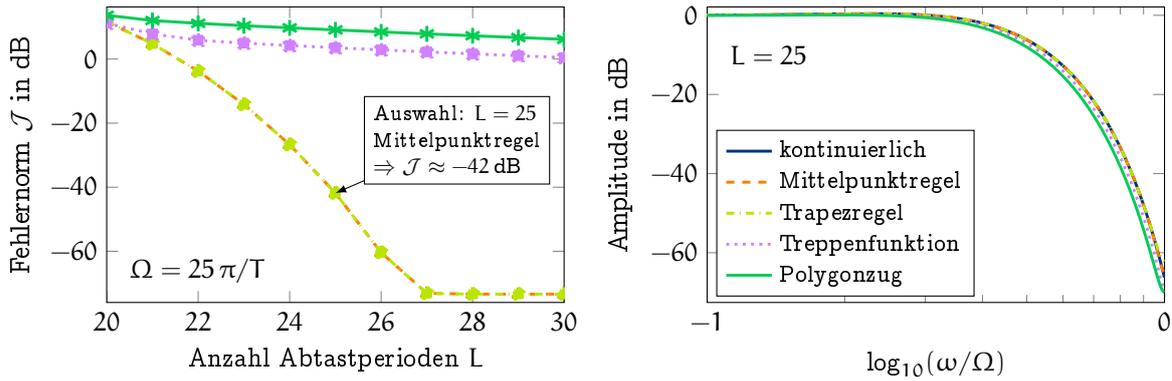


Abbildung 3.16.: Vergleich der vorgestellten Diskretisierungsverfahren anhand des Ableitungsschätzers aus Beispiel 10.

nach (B.74) ein Ausdruck der Form (3.36a) mit

$$\theta = 0, \quad w_k = \begin{cases} \frac{g_{k+1}^{(n-2)} - g_k^{(n-2)}}{T_s} - g_k^{(n-1)}, & k = 0, \\ \frac{g_{k+1}^{(n-2)} - 2g_k^{(n-2)} + g_{k-1}^{(n-2)}}{T_s}, & k = 1, \dots, L-1, \quad n_k = L+1, \\ g_k^{(n-1)} + \frac{g_{k-1}^{(n-2)} - g_k^{(n-2)}}{T_s}, & k = L, \end{cases} \quad (3.42)$$

siehe Anhang B.4. Die effektive Schätzverzögerung sowie der Rechenzeit- und Speicherbedarf sind identisch zur Trapezregel.

**Beispiel 11.** Beim Filter aus Beispiel 10 wird der Frequenzgang bei der Mittelpunkt- und der Trapezregel genauer erhalten als bei der Approximation der Messgröße durch eine Treppenfunktion oder einen Polygonzug (Abbildung 3.16 links). Als obere Grenze im Gütefunktional wurde die Nyquist-Frequenz entsprechend der in Beispiel 10 ermittelten minimal erforderlichen Abtastrate von  $L = 25$  Abtastperioden je Fensterbreite verwandt. Bei dieser Abtastrate reproduzieren insbesondere die Mittelpunkt- und die Trapezregel die Tiefpass-Charakteristik des kontinuierlichen Filters bereits sehr gut (Abbildung 3.16 rechts). Wegen der besseren Rechenzeit- und Speichereffizienz sowie der Kompensation einer halben Abtastperiode der Schätzverzögerung bietet sich eine Implementierung mit der Mittelpunktregel an.

### 3.4.3. Kürzung des Zeitfensters

Für große Stoppbandsteigungen  $\mu$  ist der Faltungskern  $g^{(n)}$  in (3.35) typischerweise am Anfang und am Ende des Approximationsintervalls sehr klein (Abbildung 3.17 oben links). Daher können der Anfang und das Ende des Faltungsintegrals (3.35) näherungsweise vernachlässigt werden:

$$\hat{\chi}^{(n)}(t) \approx \int_{\tau^-}^{\tau^+} g^{(n)}(\tau) \chi(t - \tau) d\tau \quad \text{mit } 0 \leq \tau^- < \tau^+ \leq T. \quad (3.43)$$

Zur Implementierung wird das Integral (3.43) anstelle von (3.35) diskretisiert. Bei Anwendung der Mittelpunktregel ergibt sich ein Filter der Form (3.36a) mit  $\theta =$

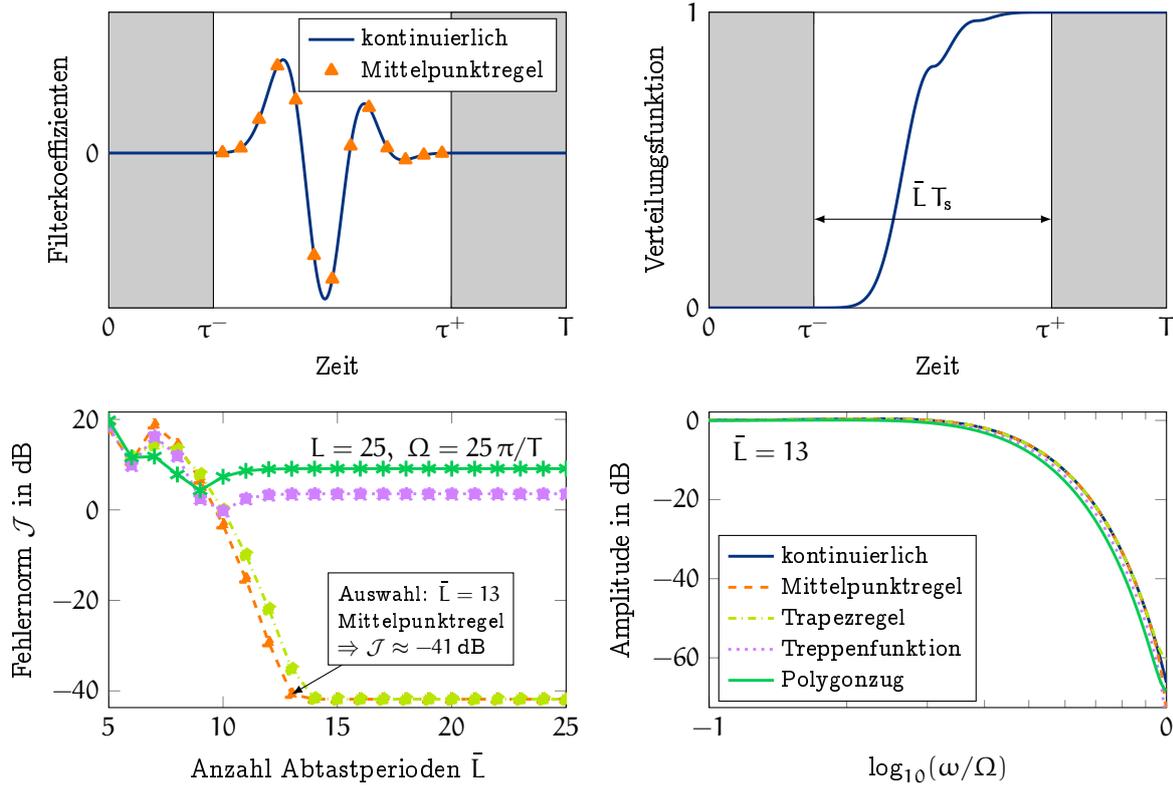


Abbildung 3.17.: Zur Kürzung des Zeitfensters beim Ableitungsschätzer aus Beispiel 10.

$1/2 + \tau^-/T_s$ ,  $w_k = T_s g_{k+\theta}^{(n)}$  und  $n_k = \bar{L}$ . Neben einer Verringerung des Rechenzeit- und Speicherbedarfs wurde also auch die effektive Schätzverzögerung um  $\tau^-$  verkürzt.

Zur Bestimmung von  $\tau^-$  und  $\tau^+$  wird die *Verteilungsfunktion*<sup>25</sup>

$$\Phi(t) := \frac{\int_0^t |g^{(n)}|(\tau) d\tau}{m_0(|g^{(n)}|)} \quad \text{mit } g := g_{N,T,\theta}^{(\alpha,\beta)} \quad (3.44)$$

eingeführt (Abbildung 3.17 oben rechts). Wählt man  $\Phi(\tau^-) = 1 - \Phi(\tau^+)$ , so ist der vernachlässigte Beitrag zu Beginn und zum Ende des Integrationsintervalls näherungsweise gleich groß. Sofern  $\chi$  stetig ist, kann dann der resultierende Approximationsfehler mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung zu

$$\left| \hat{\chi}^{(n)}(t) - \int_{\tau^-}^{\tau^+} g^{(n)}(\tau) \chi(t - \tau) d\tau \right| \leq 2 \max_{\tau \in [t-T, t]} |\chi(\tau) m_0(|g^{(n)}|) \Phi(\tau^-)$$

abgeschätzt werden. Der Approximationsfehler ist also  $\mathcal{O}(\Phi(\tau^-))$  für  $\tau^- \rightarrow 0$ . Des Weiteren sollte die reduzierte Fensterbreite im Hinblick auf die Zeitdiskretisierung wiederum ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastperiode sein:  $\tau^+ - \tau^- = \bar{L} T_s$ .

**Beispiel 12.** Zur Kürzung des Zeitfensters des Ableitungsschätzers aus Beispiel 10 eignen sich die Mittelpunkt- und die Trapezregel, analog zu Beispiel 11, besser als

<sup>25</sup>Siehe Anhang A.1.2 für die Definition einer Verteilungsfunktion.

die Approximationen der Messgröße als Treppenfunktion bzw. als Polygonzug (Abbildung 3.17 unten links). Bereits für  $\bar{L} = 13$  wird das Tiefpassverhalten des kontinuierlichen Filters mit der Mittelpunkregel sehr gut reproduziert (Abbildung 3.17 unten rechts). Die Schätzverzögerung verkürzt sich von ca. 0,376 T auf ca. 0,147 T.

### 3.4.4. Rekursive Implementierung

Zur Überführung der zeitdiskretisierten algebraischen Ableitungsschätzer (3.36a) in eine in vielen Fällen hinsichtlich Rechenzeit und Speicherplatz effizientere Rekursion werden zunächst lineare verschiebe-invariante FIR-Filter

$$\underline{y} = \underline{z}, \quad z := \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \varphi_l(k) \delta^k \chi, \quad \varphi_l \in \pi_r, \quad 0 = k_0 < k_1 < \dots < k_q = n_k. \quad (3.45)$$

mit stückweise definierten polynomialen Koeffizienten betrachtet. Da bei Polynomen  $r$ -ten Grades die  $(r+1)$ -te Rückwärtsdifferenz  $\nabla^{r+1} \varphi_l$  mit dem Rückwärtsdifferenzoperator  $\nabla := 1 - \delta$  verschwindet (Hamming, 1986; Graham et al., 1994), kann die Faltungssumme in (3.45) in die äquivalente Rekursion

$$z = - \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} (-1)^j \delta^j y + \sum_{l=0}^q \sum_{j=0}^r c_{l,j} \delta^{k_l+j} \chi \quad (B.79)$$

mit Koeffizienten  $c_{l,j}$  gemäß (B.78) überführt werden (Blum, 1957; Bromba und Ziegler, 1979), siehe Anhang B.4.2.

Während die Anzahl  $2n_k - 1$  benötigter Rechenoperationen zur Auswertung der Faltungssumme in (3.45) mit steigender Filterbreite  $n_k$  immer größer wird, beträgt sie bei der Darstellung (B.79)  $(q+1)(2r+1)+2$  und hängt somit nur von der Anzahl  $q$  und dem Grad  $r$  der Polynome  $\varphi_l$  ab. Außerdem ist die Anzahl  $(q+2)(r+1)$  zu speichernder Filterkoeffizienten bei (B.79) im Gegensatz zu  $n_k$  bei (3.45) von der Filterbreite unabhängig.<sup>26</sup> Daher wird bei großen Filterbreiten eine Effizienzsteigerung durch die Rekursion (B.79) erreicht, siehe Abbildung 3.18.

Bei einem mit der Mittelpunkregel (3.38) diskretisierten algebraischen Ableitungsschätzer können die Filterkoeffizienten  $w_k$  im Fall  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  nach (B.25) als

$$w_k = \frac{2^{\beta-n+1}}{\Gamma_s^n \Gamma^{\alpha+1}} \sum_{i=0}^{\alpha+\beta+N-n} \sum_{j=R(n-\alpha+i)}^{\beta+N} \frac{(\alpha+j)^{n+i} c_j}{2^{j-i} i! \Gamma^j} k^i \quad (3.46)$$

mit  $c_j$  gemäß (B.24) angeschrieben werden. Der Schätzer (3.36a) für  $y_i = \hat{x}_{i+\theta}^{(n)}$  liegt dann also bereits in der Form (3.45) mit  $q = 1$ ,  $r = \alpha + \beta + N - n$  und  $\varphi_0(k) = w_k$  vor. Die Rekursion (B.79) benötigt dann  $4r + 3$  Rechenoperationen sowie die Speicherung von  $3(r+1)$  Filterkoeffizienten und somit für  $n_k > 2(r+1)$  weniger

<sup>26</sup>Zusätzlich müssen beim rekursiven Filter (B.79) noch  $n_k + r$  vergangene Messwerte sowie  $r+1$  vergangene Ausgangswerte des Filters gespeichert werden. Die Gesamtzahl der benötigten Speicherplätze beträgt also  $(q+4)(r+1) + n_k - 1$  im Vergleich zu  $2n_k$  bei (3.45).

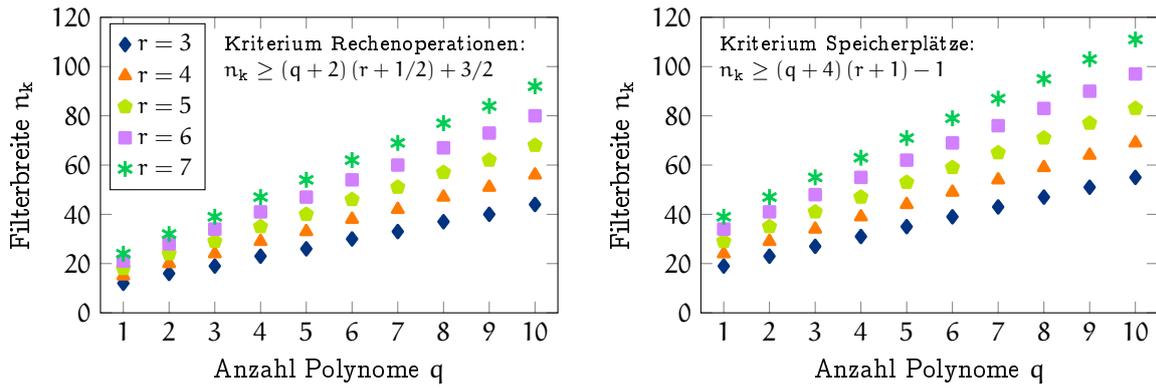


Abbildung 3.18.: Filterbreite, ab der die Rekursion (B.79) weniger Rechenoperationen (links) bzw. Speicherplätze (rechts) erfordert als (3.45).

Rechenoperationen sowie für  $n_k > 3(r+1)$  weniger zu speichernde Filterkoeffizienten als die Darstellung (3.36a). Im Gegensatz hierzu können bei keiner der übrigen in Abschnitt 3.4.2 erläuterten Diskretisierungsverfahren die Filterkoeffizienten durch ein einzelnes Polynom ausgedrückt werden, was den Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf der resultierenden Rekursionen (B.79) vergrößert.

Sind die Filterkoeffizienten  $w_k$  nicht-polynomial in  $k$ , können sie stückweise polynomial approximiert werden. Zunächst werden die Übergangsstellen  $k_1, \dots, k_{q-1}$  näherungsweise äquidistant als  $k_l = \lceil n_k l/q \rceil$  verteilt, wobei  $\lceil \cdot \rceil$  Aufrunden zur nächst größeren Ganzzahl bedeutet. Dann werden die Polynome  $\varphi_l$  als Bestapproximationen von  $w_k$  bezüglich der inneren Produkte  $\langle f, g \rangle_l := \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} f(k)g(k)$  bestimmt und lauten daher nach (A.29)

$$\varphi_l = \sum_{i=0}^r \frac{\langle w_k, \delta^{k_l} t_{i,L_l} \rangle_l}{\|t_{i,L_l}\|^2} \delta^{k_l} t_{i,L_l}, \quad L_l := k_{l+1} - 1 - k_l \quad (3.47)$$

mit  $t_{i,L}$  den diskreten Tschebischeff-Polynomen, siehe Anhang A.2.2.

Zur Vermeidung numerischer Instabilität sollte die Rekursion (B.79) in Ganzzahl-Arithmetik implementiert werden (Bromba und Ziegler, 1979). Nach Anhang B.4.2 sind die Eingangsverstärkungen  $c_{l,j}$  in (B.79) genau dann ganzzahlig, wenn die Koeffizienten  $d_{l,i}$  der Polynome  $\varphi_l(k) = \sum_{i=0}^r d_{l,i} (k - k_l)^i$  in (3.45) ganzzahlig sind. Um auch bei nicht-ganzzahligen Polynomkoeffizienten eine stabile Rekursion zu erhalten, kann der Filterausgang  $y$  als

$$y \approx \frac{z}{\Gamma(\frac{n}{s})}, \quad z := \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \hat{\varphi}_l(k) \delta^k x, \quad \hat{\varphi}_l(k) := \sum_{i=0}^r [\Lambda d_{l,i}] (k - k_l)^i \quad (3.48a)$$

mit  $\Lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  approximiert werden, wobei  $[\cdot]$  Runden zur nächsten Ganzzahl bedeutet. Da die Polynome  $\hat{\varphi}_l$  ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten aufweisen, kann die skalierte Approximation  $z_i$  rekursiv in Ganzzahl-Arithmetik berechnet werden. Zur Ableitungsschätzung wird die Normierung  $\hat{\Xi}$  analog zu (3.36b) berechnet:

$$\hat{\Xi} = \frac{T_s^n}{n!} \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \hat{\varphi}_l(k) (-k)^n. \quad (3.48b)$$

Um den darstellbaren Zahlenbereich des Ganzzahl-Datentyps möglichst gut auszunutzen und somit die Quantisierungsfehler durch die Rundung der Polynomkoeffizienten möglichst gering zu halten, kann deren Skalierung  $\Lambda$  als

$$\Lambda = \frac{n_{\max}}{d_{\max}} \quad \text{mit } d_{\max} := \max_{l,i} |d_{l,i}| \quad (3.48c)$$

gewählt werden, wobei  $n_{\max}$  die größte darstellbare Zahl des Ganzzahldatentyps bezeichnet. Beispielsweise können bei binärer Zweierkomplement-Repräsentation mit einer Wortbreite von  $n_b$  Bits die Werte  $-2^{n_b-1}, \dots, 2^{n_b-1} - 1$  dargestellt werden (Oppenheim und Schafer, 2009), so dass dann  $n_{\max} = 2^{n_b-1} - 1$  gilt. Im Folgenden wird stets von einer binären Zweierkomplement-Repräsentation ausgegangen.

Die Quantisierung (3.48) der Polynomkoeffizienten führt zum Quantisierungsfehler

$$\tilde{y} := \frac{\hat{z}}{\hat{\Xi}} - \frac{z}{\Xi} = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \sum_{i=0}^r \tilde{d}_{l,i} (k - k_l)^i \delta^k x \quad \text{mit } \tilde{d}_{l,i} := \frac{[\Lambda d_{l,i}]}{\Lambda \hat{\Xi}} - \frac{d_{l,i}}{\Xi} \quad (3.49)$$

im Filterausgang, der als Antwort eines linearen verschiebe-invarianten Filters auf  $x$  interpretiert werden kann. Zur Abschätzung des Quantisierungsfehlers wird angenommen, dass  $x$  ein mittelwertfreies weißes Rauschen ist, also einem schwach stationären und unkorrelierten stochastischen Prozess entstammt (Hayes, 1996). Nach (B.87) gilt dann für hinreichend große Filterbreiten  $n_k$  näherungsweise

$$\hat{\mathcal{J}} := \frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} \approx \frac{q}{12 \Lambda^2 (r+1)^2} \left( \frac{n_k}{q} \right)^{2(r+1)}. \quad (3.50)$$

Anhand des *relativen Quantisierungsfehlers*  $\mathcal{J}_{\text{rel}} := \hat{\mathcal{J}}/\mathcal{J}$  mit  $\mathcal{J}$  der Quadraturgüte (3.37) des zeitdiskretisierten, nicht quantisierten Ableitungsschätzers kann dann beurteilt werden, ob der Quantisierungsfehler im Verhältnis zum Fehler infolge der Zeitdiskretisierung des Ableitungsschätzers vernachlässigt werden kann.

Abbildung 3.19 verdeutlicht, dass der relative Quantisierungsfehler  $\mathcal{J}_{\text{rel}}$  maßgeblich vom Polynomgrad  $r$  bestimmt wird, während die Filterbreite  $n_k$  in den dargestellten Beispielen eine untergeordnete Rolle spielt. So erfordern beispielsweise die in Abbildung 3.19 dargestellten Schätzer für die erste Ableitung mit  $N = 0$  und  $\alpha = \beta = 4$ , also polynomialen Filterkoeffizienten der Form (3.46) mit dem Polynomgrad  $r = 7$ , Wortbreiten von 56 bit bei  $L = 100$  bzw. 61 bit bei  $L = 200$ , um einen relativen Quantisierungsfehler von  $-60$  dB nicht zu überschreiten. Im Vergleich hierzu genügen im Fall  $\alpha = \beta = 1$ , also  $r = 1$ , jeweils Wortbreiten von 15 bit. Des Weiteren bestätigt Abbildung 3.19, dass sich (3.50) zur Abschätzung der erforderlichen Wortbreite eignet. Soll also ein relativer Quantisierungsfehler  $\mathcal{J}_{\text{rel}}$  erzielt werden, so ist bei binärer Zweierkomplement-Repräsentation der Polynomkoeffizienten eine Wortbreite von circa

$$n_b \approx \log_2 \left( \sqrt{\frac{q}{3 \mathcal{J}_{\text{rel}} \mathcal{J}}} \frac{\max_{l,i} |d_{l,i}|}{2(r+1)} \left( \frac{n_k}{q} \right)^{r+1} \right) + 1 \quad (3.51)$$

Binärstellen erforderlich.

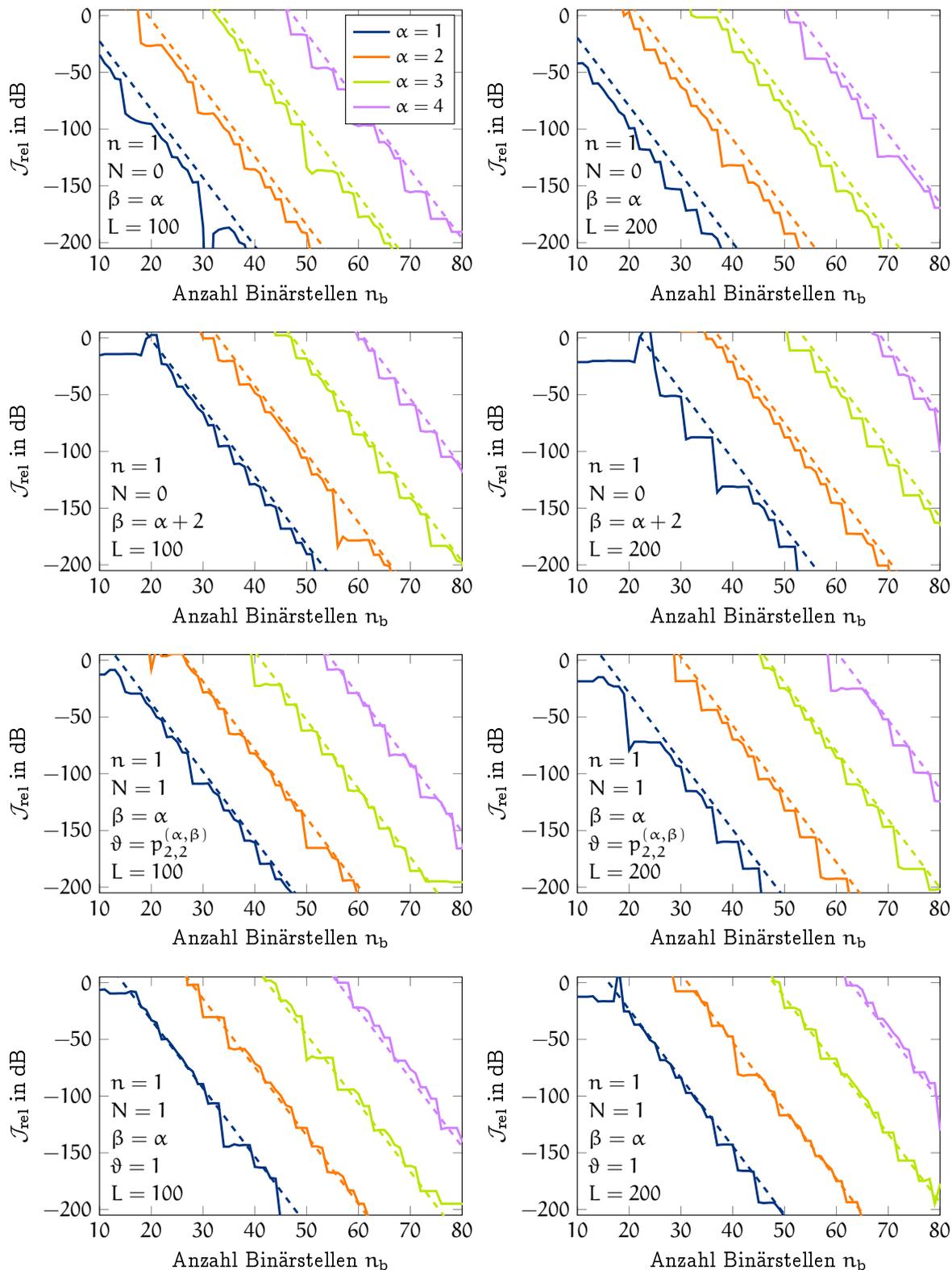


Abbildung 3.19.: Relativer Quantisierungsfehler für die Ableitungsschätzer aus Abbildung 3.6 bei Filterbreiten  $L = 100$  und  $L = 200$  (durchgezogene Linien: numerisch ausgewertet bei Anregung mit einem mittelwertfreien weißen Rauschen, gestrichelte Linien: Approximation (3.50)).

Die Filterkoeffizienten (3.46) des mit der Mittelpunktregel (3.38) diskretisierten algebraischen Ableitungsschätzers mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  können exakt in die Form  $w_k = \varphi_0(k) / \Xi$  mit einem Polynom  $\varphi_0(k)$  mit ganzzahligen Polynomkoeffizienten überführt werden, sofern  $\vartheta$  eine rationale Zahl ist, also  $\vartheta = Z_\vartheta / N_\vartheta$  mit  $Z_\vartheta \in \mathbb{Z}$  und  $N_\vartheta \in \mathbb{N}^+$ , vergleiche das einführende Beispiel in Abschnitt 2.4. Die Polynomkoeffizienten von  $\varphi_0$  stimmen dann mit den Koeffizienten  $q_i$  aus (B.29b) für  $Z_\vartheta = 1$ ,  $N_\vartheta = 2$  überein. Jedoch können die ganzzahligen Polynomkoeffizienten in diesem Fall sehr groß werden, so dass eine exakte Implementierung mit einem Ganzzahldatentyp praktischer Wortbreite nicht möglich ist. Folgende wesentlichen Einflüsse der Parameter des Ableitungsschätzers auf die Größe der Polynomkoeffizienten  $q_i$  können direkt angegeben werden:

- Anhand des Faktors  $L^{\beta+N}$  in (B.28) erkennt man, dass eine verhältnismäßig schnelle Abtastung in Kombination mit einer hohen Stoppbandsteigung oder einem hohen Polynomgrad  $N$  zu großen Polynomkoeffizienten  $q_i$  führt.
- Durch die Faktoren  $N_\vartheta^N$  in (B.27) und  $(N_\vartheta - Z_\vartheta)^{m-l} (Z_\vartheta + N_\vartheta)^l$  in (B.26) wird deutlich, dass große Zähler  $Z_\vartheta$  und Nenner  $N_\vartheta$  von  $\vartheta$  in Kombination mit einem hohen Polynomgrad zu großen Polynomkoeffizienten  $q_i$  führen.
- Für  $N = 0$  verschwinden die von  $Z_\vartheta$  und  $N_\vartheta$  abhängigen Terme in  $q_i$ , da dann die Impulsantwort der algebraischen Ableitungsschätzer unabhängig von  $\vartheta$  ist.

Eine Reduktion des Polynomgrades  $N$  wirkt sich also günstig auf die Größe der Polynomkoeffizienten  $q_i$  aus.

Ein nicht-rationaler Parameter  $\vartheta$  kann mit der Rekursion

$$b_k = \left\lfloor \frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} \right\rfloor, \quad r_k = r_{k-2} - b_k r_{k-1}, \quad p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (3.52a)$$

mit den Anfangswerten

$$r_{-2} = \vartheta, \quad r_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \quad q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0 \quad (3.52b)$$

in beliebiger Genauigkeit rational approximiert werden (Khinchin, 1964). Die Rekursion (3.52) wird bei Erreichen von  $|\vartheta - p_k/q_k| < \text{tol}$  mit einer Fehlerschranke  $\text{tol}$  abgebrochen und  $Z_\vartheta = p_k$ ,  $N_\vartheta = q_k$  gesetzt. Die resultierende rationale Approximation ist optimal in dem Sinn, dass sie zur gegebenen Fehlerschranke  $\text{tol}$  die rationale Approximation von  $\vartheta$  mit dem kleinsten Nenner liefert, da sie auf einer Entwicklung von  $\vartheta$  in einen endlichen Kettenbruch mit den ganzzahligen Nennerkoeffizienten  $b_0, \dots, b_k$  basiert (Khinchin, 1964). Wie zuvor erwähnt wirkt sich der möglichst kleine Nenner positiv auf die Größe der Polynomkoeffizienten  $q_i$  aus. Für Polynomgrade  $N > 0$  kann es daher auch vorteilhaft sein, zu einem rationalen Parameter  $\vartheta$  mit der Rekursion (3.52) eine Approximation mit kleinerem Nenner zu berechnen.

*Bemerkung 13.* In Lindert und Rudolph (2003); Gensior et al. (2007, 2008); Gensior (2008) wurde eine weitere Methode zur rekursiven Implementierung algebraischer

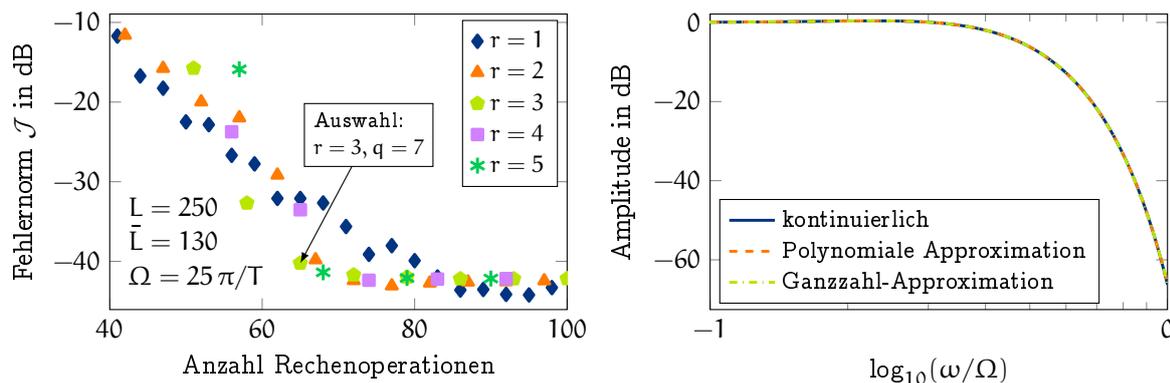


Abbildung 3.20.: Zur rekursiven Implementierung des Filters aus Beispiel 10.

Schätzer vorgeschlagen, die jedoch nur bei ganzzahligen Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  und  $\beta$  angewandt werden kann. Hierbei werden, in Abhängigkeit des Polynomgrades der Impulsantwort des Schätzfilters, in jedem Abtastschritt mehrere Rekursionen ausgewertet. Überdies sind Strategien erforderlich, um bei Implementierung in Ganzzahlarithmetik einen Überlauf des Wertebereichs zu verhindern. Des Weiteren ist, insbesondere bei Impulsantworten höheren Polynomgrades, eine Verschlechterung der Approximationsgenauigkeit zu erwarten. Wegen der genannten Nachteile wird das Verfahren im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

**Beispiel 14.** Das Filter aus Beispiel 10 wird mit einer Abtastrate entsprechend  $L = 250$  Abtastperioden je Fensterbreite implementiert. Gemäß Beispiel 12 werden das Zeitfenster auf  $\bar{L} = 130$  Abtastperioden verkürzt und das Filter mit der Mittelpunkregel diskretisiert. Da  $\alpha$  und  $\beta$  nicht ganzzahlig sind, muss das diskrete Filter zur rekursiven Implementierung zunächst stückweise polynomiale approximiert werden. Als Kompromiss zwischen einem geringen Diskretisierungsfehler und der Anzahl benötigter Rechenoperationen wurden  $r = 3$  und  $q = 7$  gewählt (Abbildung 3.20 links). Die polynomiale Approximation mit Gleitkomma-Koeffizienten gibt das Tiefpassverhalten des kontinuierlichen Filters sehr gut wieder (Abbildung 3.20 rechts) und eignet sich somit als Grundlage für die Ganzzahl-Approximation (3.48a). Für  $\mathcal{J}_{\text{rel}} < -30$  dB liefert (3.51) eine erforderliche Anzahl von mindestens  $n_b = 27$  bit für die Ganzzahldarstellung der Polynomkoeffizienten. Abbildung 3.20 rechts bestätigt den Erhalt der Filtercharakteristik auch für die entsprechende Ganzzahl-Approximation. Die resultierende rekursive Implementierung benötigt 65 Rechenoperationen im Vergleich zu 259 Rechenoperationen bei nicht-rekursiver Implementierung.

### 3.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden algebraische Filter zur Schätzung beliebiger ganzzahliger Ableitungsordnungen erläutert. Die phänomenologische Beschreibung als gleitende polynomiale Approximation der zu schätzenden Ableitung erlaubt eine anschauliche

Interpretation der algebraischen Ableitungsschätzer. Zur Parameterwahl bietet es sich an, die algebraischen Ableitungsschätzer als lineare zeitinvariante Tiefpassfilter zu betrachten, die auf der zu schätzenden Ableitung operieren. Zur Filtersynthese können dann nach der Wahl einer Knickfrequenz und einer Stoppbandsteigung die erforderlichen Filterparameter berechnet werden, wobei auch linearphasige Filter realisiert sowie harmonische Störungen ohne zusätzliche Filter gezielt unterdrückt werden können. Zur Implementierung werden die algebraischen Ableitungsschätzer als lineare verschiebe-invariante FIR-Filter approximiert. Bei geeigneter Diskretisierung verringert sich die Schätzverzögerung und es wird eine sehr gute Speicher- und Rechenzeiteffizienz erreicht, insbesondere bei rekursiver Implementierung.

Wie die Beispiele 10, 11 und 12 zeigen, können mit algebraischen Ableitungsschätzern sehr hohe asymptotische Stoppbandabschwächungen numerisch stabil mit einer geringen Anzahl an Rechenoperationen realisiert werden. (In den genannten Beispielen wurde ein Schätzer für die erste zeitliche Ableitung mit einer asymptotischen Stoppbandabschwächung von circa 750 dB je Frequenzdekade bei einer FIR-Filterbreite von 13 Abtastperioden und einer Schätzverzögerung von circa 4 Abtastperioden erzielt.) Als Anwendungen algebraischer Ableitungsschätzer wurden die verzögerungsfreie Echtzeitdetektion von Unstetigkeiten in verrauschten Messsignalen (Beispiel 3), die Echtzeitgenerierung differenzierbarer Solltrajektorien und ihrer Ableitungen aus unstetigen Sollsignalen (Beispiel 6) sowie die modellbasierte Echtzeitdiagnose sprungförmiger Aktorfehler bei stark verrauschten Messdaten (Beispiel 7) diskutiert.



## 4. Fallstudie: Modellbasierte Diagnose von Kollisionen

In Kiltz et al. (2013) wird das automatisierte Jonglieren eines Tischtennisballs mit der in Abbildung 4.1 gezeigten im magnetischen Feld vierer Elektromagnete frei beweglich gelagerten Platte beschrieben. Die Platte ist mit dem in Kiltz et al. (2012, 2014) beschriebenen Regler in der Lage, schnellen Solltrajektorien für die Vertikalposition mit hoher Genauigkeit zu folgen. Um den Ball am Springen zu halten, muss dessen bei den Kollisionen dissipierte Energie kompensiert werden. Hierzu muss sich die Platte während der Kollision mit dem Tischtennisball in einer Aufwärtsbewegung befinden. D. h., die Aufwärtsbewegung der Platte muss synchron zu zukünftigen Kollisionszeitpunkten gestartet werden, wie in dem unter Rudolph und Kiltz (2013) on-line abrufbaren Video der jonglierenden Platte gut zu sehen ist.

Zur Planung der Solltrajektorien der Plattenposition ist somit eine Prädiktion der Kollisionszeitpunkte des Balls mit der Platte erforderlich. Hierzu wird in Kiltz et al. (2013) kein dedizierter Sensor für die Ballposition benötigt. Stattdessen werden die Kollisionszeitpunkte aus der gemessenen Vertikalposition der Platte und den geschätzten Magnetkräften mit einem modellbasierten Diagnoseverfahren unter Nutzung algebraischer Ableitungsschätzer in Echtzeit geschätzt. Aus zwei vergangenen Kollisionszeitpunkten wird dann mit elementaren mathematischen Modellen für die Kollision und den Ballflug der folgende Kollisionszeitpunkt prädiziert.

Die praktische Herausforderung besteht in der genauen Echtzeitrekonstruktion der Kollisionszeitpunkte. Dies ist schwierig, da die Masse des Tischtennisballs von circa 2,7 g sehr gering im Verhältnis zur Masse der Platte von circa 4,7 kg ist und die Platte infolge ihrer Elastizität deutlich hörbar vibriert; daher ist beim Positionsverlauf in Abbildung 4.2 links mit dem bloßen Auge kaum zu erkennen, wann die Kollision stattgefunden hatte. Eine Kollision führt also bei der schwebenden Platte nur zu einer geringen Auslenkung, deren Beginn aus stark verrauschten Messsignalen in hoher Genauigkeit in Echtzeit rekonstruiert werden muss. Gleichzeitig sollen natürlich, wie bei jedem Diagnoseverfahren, Fehlalarme, also in diesem Fall fehlerhaft detektierte Kollisionen, vermieden werden.

Daher wird in diesem Kapitel als herausforderndes Anwendungsbeispiel für die algebraischen Ableitungsschätzer die robuste modellbasierte Echtzeitrekonstruktion der Zeitpunkte von Kollisionen des Tischtennisballs mit der schwebenden Platte erläutert. Die grundsätzliche Vorgehensweise entspricht derjenigen in Kiltz et al. (2013); Kiltz und Rudolph (2013) und ist eng verwandt mit der modellbasierten Diagnose sprungförmiger Aktorfehler in Kiltz et al. (2014) und Beispiel 7. Als Erweiterung zu



Abbildung 4.1.: Magnetisch gelagerte Platte mit Tischtennisball (Foto: Universität des Saarlandes, Oliver Dietze).

Kiltz et al. (2013); Kiltz und Rudolph (2013) werden die verbesserten Verfahren zur Parameterwahl und effizienten Echtzeitimplementierung aus Kapitel 3 genutzt. Hierdurch wird eine nochmals feinfühligere Detektion von Kollisionen ermöglicht und die Anzahl der benötigten Rechenoperationen deutlich reduziert.

## 4.1. Kollisionsdetektion und Rekonstruktion der Kollisionszeitpunkte

Als Messsignale stehen ein Schätzwert der Vertikalposition der Platte sowie die vom Positionsregler berechneten Sollwerte der Magnetkräfte zur Verfügung, nicht aber die Position des Balls (Kiltz et al., 2012, 2013, 2014). Die Kollisionen müssen also indirekt aus der Reaktion der Platte beziehungsweise des Positionsreglers detektiert und zeitlich lokalisiert werden. Hierzu soll nun aus den Messsignalen ein Signal generiert werden, welches näherungsweise verschwindet, solange noch keine Kollision stattgefunden hatte, aber durch die Kollision deutlich angeregt wird, siehe Abbildung 4.2 rechts. Dieses Signal wird in dieser Arbeit *Kollisionsindikator* genannt, wie in (Kiltz et al., 2013) vorgeschlagen.

Zur Herleitung des Kollisionsindikators wird eine Kollision des Balls mit der schwebenden Platte zum Zeitpunkt  $\Theta$  betrachtet. Die Bewegung der Platte in vertikaler

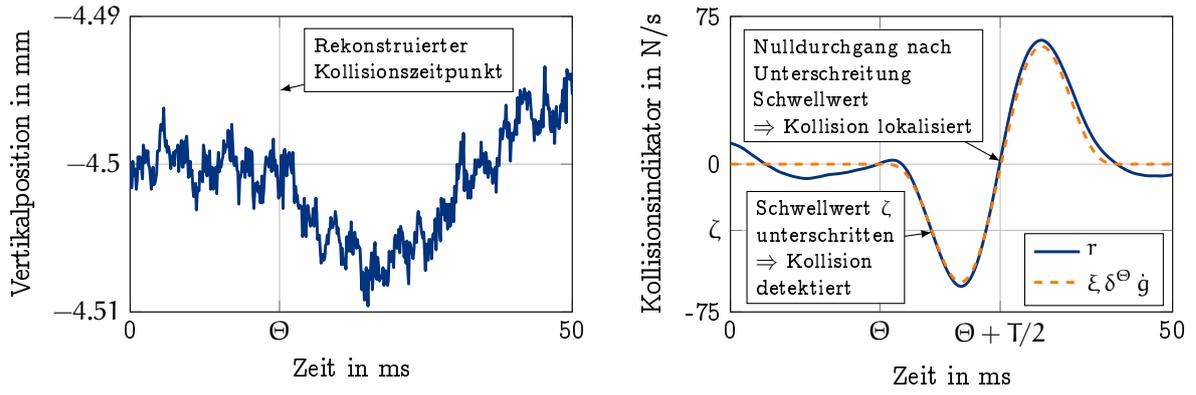


Abbildung 4.2.: Links: Positionsverlauf der schwebenden Platte (Sollposition  $-4,5$  mm) bei einer Kollision des Balls aus einer Fallhöhe von circa 3 cm. Rechts: Zugehöriger Kollisionsindikator (4.4) und dessen Nominalverlauf  $\xi \delta^\Theta \dot{g}$  mit  $g$  einem algebraischen Ableitungsschätzer ( $T = 27,4$  ms,  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta = 5$ ).

Richtung kann in Operatorschreibweise näherungsweise durch

$$M s^2 \chi = \phi - \xi \delta^\Theta - M \Gamma \quad \text{mit } \xi \approx m (1 + \varepsilon) \sqrt{2 \Gamma H}. \quad (4.1)$$

beschrieben werden (Kiltz et al., 2013). Hierbei bezeichnen  $M = 4,691$  kg die Masse der Platte,  $\chi$  die Vertikalposition ihres Massenmittelpunktes,  $\phi$  die Summe der eingprägten Magnetkräfte,  $\Gamma = 9,8091$  m/s<sup>2</sup> die Erdbeschleunigung,  $m = 2,7$  g die Masse des Balls,  $\varepsilon = 0,9314$  die Stoßzahl und  $H$  die Fallhöhe des Balls.<sup>27</sup> Differenziert man die Bewegungsgleichung (4.1) einmal nach der Zeit und gruppiert sie so um, dass gemessene Größen und deren zeitliche Ableitungen auf einer Seite der Gleichung stehen und die unbekanntes Terme auf der anderen Seite der Gleichung, so erhält man

$$M s^3 \chi - s \phi = -\xi s \delta^\Theta. \quad (4.2)$$

Durch die zeitliche Differentiation wurden langsam veränderliche Modellunbestimmtheiten, wie beispielsweise Fehler der im Positionsregler hinterlegten Magnetkraftkennfelder, näherungsweise eliminiert.

Ersetzt man in (4.2) die Istposition  $\chi$  der Platte durch den Messwert  $y$  und die Magnetkraft  $\phi$  durch den Sollwert  $f$ , so erhält man

$$M s^3 y - s f = s (-\xi \delta^\Theta + \omega) \quad (4.3a)$$

mit dem Messrauschen

$$\omega := M s^2 (y - \chi) - (f - \phi). \quad (4.3b)$$

Die Anwendung eines kausalen linearen zeitinvarianten Filters mit mindestens dreifach differenzierbarer Impulsantwort  $g$  auf (4.3a) liefert das realisierbare Residuum

$$r := g (M s^3 y - s f) = M g^{(3)} y - \dot{g} f. \quad (4.4a)$$

<sup>27</sup>Fällt der Ball aus der Höhe  $H$ , so kollidiert er in etwa mit der Geschwindigkeit  $-\sqrt{2 \Gamma H}$  mit der Platte und hebt anschließend in etwa mit der Geschwindigkeit  $\varepsilon \sqrt{2 \Gamma H}$  von der Platte ab. Das Kollisionsgewicht  $\xi$  in (4.1) entspricht also der Impulsänderung des Balls infolge der Kollision.

Die Antwort des Residuums auf die Kollision und das Messrauschen beträgt

$$r = s g (-\xi \delta^\Theta + \varpi) = -\xi \delta^\Theta \dot{g} + \dot{g} \varpi. \quad (4.4b)$$

Sie setzt sich also aus einer mit dem unbekanntem Kollisionsgewicht  $\xi$  skalierten, zum unbekanntem Kollisionszeitpunkt  $\Theta$  beginnenden zeitlichen Ableitung der Impulsantwort des Filters und dem mit  $\dot{g}$  gefilterten Messrauschen zusammen und eignet sich folglich als Kollisionsindikator. Es handelt sich also bei der Kollisionsdiagnose um die Detektion und Lokalisation einer Diskontinuität in einem verrauschten Signal, wie sie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben wurde. Daher wird der Ableitungsschätzer  $g$  auch als *Suchfilter* bezeichnet.

Wie in Abbildung 4.2 rechts demonstriert, ist die Detektion und Lokalisation von Kollisionen anhand des Kollisionsindikators (4.4) sehr einfach möglich. Solange noch keine Kollision stattgefunden hat, verschwindet der Kollisionsindikator mit Ausnahme des mittelwertfreien gefilterten Rauschens  $\dot{g} \varpi$  in (4.4b). Die Mittelwertfreiheit wurde durch die zeitliche Differentiation beim Übergang von (4.2) zu (4.3) erreicht. Zur Vermeidung von Fehlalarmen genügt es daher, den Kollisionsindikator mit einem konstanten Schwellwert  $\zeta$  zu vergleichen, der so groß gewählt werden muss, dass er mit ausreichend hoher Wahrscheinlichkeit vom gefilterten Messrauschen  $\dot{g} \varpi$  nicht unterschritten wird. Im Umkehrschluss muss der Ball aus einer bestimmten Mindesthöhe  $H_{\min}$  auf die Platte gefallen sein, damit die Anregung des Kollisionsindikators durch die Kollision groß genug für die Schwellwertunterschreitung ist; die Fallhöhe  $H_{\min}$  wird daher in dieser Arbeit als *minimal detektierbare Fallhöhe* bezeichnet. In der Praxis wird die minimal detektierbare Fallhöhe maßgeblich von der Anpassung des Suchfilters  $g$  im Kollisionsindikator an das Messrauschen bestimmt. Hierauf wird im Detail im folgenden Abschnitt 4.2 eingegangen.

Solange der Schwellwert nicht unterschritten wurde, wird davon ausgegangen, dass keine Kollision stattgefunden hat. Zum Kollisionszeitpunkt  $\Theta$  wird dann die mit dem Kollisionsgewicht  $\xi$  skalierte Ableitung  $\dot{g}$  der Impulsantwort des Suchfilters als a priori bekannte Signalform im Kollisionsindikator sichtbar. Bei guter Anpassung des Suchfilters  $g$  an das Messrauschen  $\varpi$  hebt sich das Nutzsignal  $\xi \dot{g}$  bereits bei geringen Fallhöhen des Balls, also kleinen Kollisionsgewichten  $\xi$ , deutlich vom Messrauschen ab (man beachte die Fallhöhe von lediglich circa 3 cm in Abbildung 4.2) und führt somit zu einem Unterschreiten des Schwellwerts  $\zeta$  durch den Kollisionsindikator. Das Unterschreiten von  $\zeta$  kann also zur Detektion einer Kollision genutzt werden, weshalb die Dauer zwischen der Kollision und dem Unterschreiten des Schwellwerts in dieser Arbeit als *Detektionsdauer* bezeichnet wird.

Die Detektionsdauer hängt, insbesondere für kleine Fallhöhen, sehr stark von der Fallhöhe des Balls ab, wie in Abbildung 4.3 zu sehen ist. Daher erlaubt der Detektionszeitpunkt im Allgemeinen keinen genauen Rückschluss auf den gesuchten Kollisionszeitpunkt. Hingegen ist die zeitliche Verzögerung des auf die Kollision folgenden Nulldurchgangs von  $\xi \dot{g}$  unabhängig von der Fallhöhe und hängt, mit Ausnahme des gefilterten Messrauschens, nur vom bekannten Verlauf von  $\dot{g}$  ab, ist also näherungsweise bekannt. Beispielsweise entspricht diese Verzögerung im Fall des linearphasigen

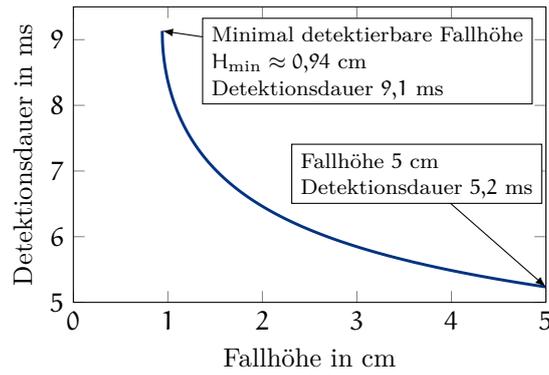


Abbildung 4.3.: Detektionsdauer für den Nominalverlauf  $\xi \delta^\ominus \dot{g}$  des Kollisionsindikators in Abhängigkeit der Fallhöhe des Balls (Ableitungsschätzer und Schwellwert wie in Abbildung 4.2).

Ableitungsschätzers in Abbildung 4.2 infolge der Achsensymmetrie von  $g$  genau der Hälfte der Fensterbreite  $T$ , siehe Abschnitt 3.2.1. Als geschätzter Kollisionszeitpunkt wird dann der Zeitpunkt des Nulldurchgangs abzüglich dessen bekannter Verzögerung in  $\dot{g}$  genutzt.

Die primäre verbleibende Herausforderung besteht also in der Auswahl eines an das Messrauschen  $\omega$  gut angepassten Suchfilters  $g$ , damit Kollisionen aus möglichst geringer Fallhöhe detektiert und deren Zeitpunkte mit hoher Genauigkeit rekonstruiert werden können. Für die Echtzeitimplementierung des Kollisionsindikators (4.4a) sind überdies hinreichend genaue, hinsichtlich Speicherplatz und Rechenzeit effiziente zeitdiskrete Approximationen der Operatoren  $\dot{g}$  und  $g^{(3)}$  erforderlich.

## 4.2. Auswahl des Suchfilters

Wählt man den für die Kollisionsdetektion maßgeblichen Schwellert  $\zeta$  in Abbildung 4.2 als  $\zeta_{\text{rel}}$ -faches der Standardabweichung  $\sigma_{\dot{g} \omega}$  des Rauschanteils im Kollisionsindikator (4.4), so beträgt das minimal zum Unterschreiten des Schwellwerts erforderliche Kollisionsgewicht

$$\xi_{\min} \approx \frac{\zeta_{\text{rel}} \sigma_{\dot{g} \omega}}{\max_{\tau \in \mathbb{R}} \dot{g}(\tau)},$$

was nach (4.1) einer minimal detektierbaren Fallhöhe

$$H_{\min} \approx \frac{1}{2\Gamma} \left( \frac{\zeta_{\text{rel}} \sigma_{\dot{g} \omega}}{m(1+\varepsilon) \max_{\tau \in \mathbb{R}} \dot{g}(\tau)} \right)^2 \quad (4.5)$$

des Tischtennisballs entspricht.

Abbildung 4.4 zeigt exemplarisch, wie deutlich sich die Wahl des Suchfilters auf die minimal detektierbare Fallhöhe (4.5) auswirkt. Während der auch in Abbildung 4.2 verwendete vorteilhafte algebraische Ableitungsschätzer  $T = 27,4 \text{ ms}$ ,  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta = 5$  für  $\zeta_{\text{rel}} = 5$  die aus Abbildung 4.3 bekannte minimal detektierbare Fallhöhe von circa 1 cm ergibt, führt eine Vergrößerung der Fensterbreite auf 30,3 ms bei

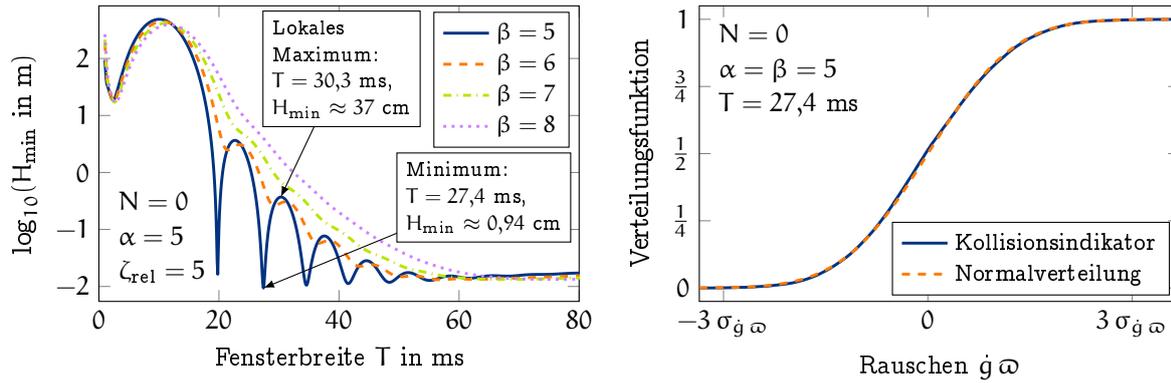


Abbildung 4.4.: Links: Minimal detektierbare Fallhöhen (4.5) für verschiedene algebraische Ableitungsschätzer  $g$ . Die Standardabweichung  $\sigma_{\dot{g} \omega}$  des Messrauschens wurde analog zu (Kiltz et al., 2014) aus Messwerten  $y$  und  $f$  bei der kollisionsfreien schwebenden Platte geschätzt – in diesem Fall gilt nach (4.4)  $\dot{g} \omega = r$ . Rechts: Resultierende Verteilungsfunktion des Rauschens und deren Approximation durch eine mittelwertfreie Normalverteilung für den besonders vorteilhaften Ableitungsschätzer aus dem linken Bild (vergleiche Abschnitt 3.1.3).

ansonsten unveränderten Filterparametern dazu, dass erst Kollisionen ab einer Fallhöhe von 37 cm detektiert werden können; die verhältnismäßig geringe Vergrößerung der Fensterbreite um 10,6 % verschlechtert also die minimal detektierbaren Fallhöhe in etwa um den Faktor 37. Für die in Abbildung 4.4 links ebenfalls ausgewerteten algebraischen Ableitungsschätzer mit von  $\alpha$  verschiedenen Gewichtsfunktionspotenzen  $\beta$  werden minimal detektierbare Fallhöhen nahe 1 cm erst für Fensterbreiten  $T > 55$  ms erreicht; die zeitliche Verzögerung der Detektion ist daher wesentlich größer als beim vorteilhaften algebraischen Ableitungsschätzer für  $\beta = \alpha$ . Außerdem vergrößern sich der in der Echtzeit-Hardware benötigte Speicherplatz und – im Fall der nicht-rekursiven Implementierung (3.36) – die Anzahl benötigter Rechenoperationen je Abtastschritt auf mehr als das Doppelte.

Neben der zuverlässigen Detektion von Kollisionen aus möglichst geringer Fallhöhe ist es wichtig, dass die Wahrscheinlichkeit von fehlerhaft detektierten Kollisionen möglichst klein ist, das modellbasierte Diagnoseverfahren also möglichst keine Fehlalarme generiert. Hierzu muss ein besonderes Augenmerk darauf gelegt werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Kollisionsindikator (4.4a) den Schwellwert  $\zeta$  alleine durch den Rauschanteil  $\dot{g} \omega$  überschreitet, da zur Berechnung des Kollisionsindikators die einfache beziehungsweise dreifache numerische (näherungsweise) Differentiation verrauschter Messsignale erforderlich ist. Für den vorteilhaften algebraischen Ableitungsschätzer  $T = 27,4$  ms,  $N = 0$ ,  $\alpha = \beta = 5$  zeigt Abbildung 4.4 rechts, dass der Rauschanteil in guter Näherung mittelwertfrei und normalverteilt ist. Daher können für den Schwellwert  $\zeta = 5 \sigma_{\dot{g} \omega}$ , also für eine minimal detektierbare Fallhöhe von circa 1 cm, Fehlalarme infolge des Rauschens nahezu ausgeschlossen werden.<sup>28</sup>

<sup>28</sup>Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert einer mittelwertfreien normalverteilten Zufallsvariable ihre fünffache Standardabweichung überschreitet, ist geringer als  $0,6 \cdot 10^{-4} \%$ .

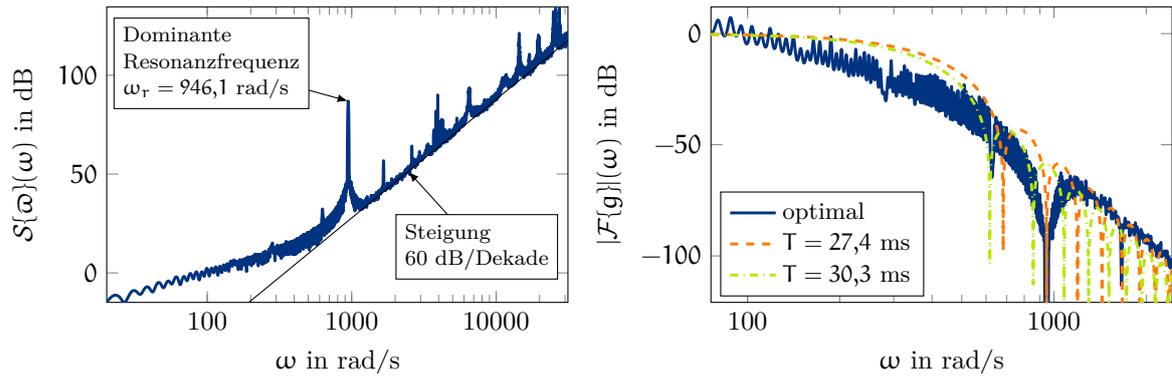


Abbildung 4.5.: Links: Geschätztes Leistungsdichtespektrum (4.6b) des Rauschens. Rechts: Betragsgänge des aus dem geschätzten Leistungsdichtespektrum resultierenden optimalen Suchfilters (4.6a) und der beiden in Abbildung 4.4 links hervorgehobenen algebraischen Ableitungsschätzer.

Die Wahl des Suchfilters  $g$  ist also von sehr großer Bedeutung für die vorliegende Anwendung. Wesentlich ist hierbei das Leistungsdichtespektrum  $S\{\omega\}$  des Messrauschens, vergleiche Kiltz et al. (2014). Nach (3.19) ist das optimale Suchfilter  $g$  linearphasig mit dem Betragsgang

$$|\mathcal{F}\{g\}|(\omega) = \frac{\lambda}{S\{\omega\}(\omega)}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.6a)$$

Im Fall der kollisionsfrei schwebenden Platte kann das Leistungsdichtespektrum des Rauschens gemäß (4.4b) mit (A.40d) als

$$S\{\omega\}(\omega) = \frac{S\{M \bar{g}^{(3)} y - \dot{\bar{g}} f\}(\omega)}{\omega^2 |\mathcal{F}\{\bar{g}\}|^2(\omega)} \quad (4.6b)$$

aus den Messgrößen berechnet werden.<sup>29</sup> Hierbei ist  $\bar{g}$  ein beliebiger realisierbarer linearer zeitinvarianter Ableitungsschätzer mit mindestens dreifach differenzierbarer Impulsantwort, dessen Frequenzgang keine Nullstellen im interessierenden Frequenzbereich aufweisen sollte.

Abbildung 4.5 links zeigt, dass das Leistungsdichtespektrum des Messrauschens für hohe Frequenzen um 60 dB je Frequenzdekade ansteigt. Dies kann durch die dreifache zeitliche Differentiation der gemessenen Plattenposition erklärt werden, die zur Berechnung des Kollisionsindikators erforderlich ist. Nach (4.6a) sollte der Betragsgang des Ableitungsschätzers daher für hohe Frequenzen um 120 dB je Frequenzdekade abfallen,<sup>30</sup> was nach Abschnitt (3.3.2) für  $\min\{\alpha, \beta\} = 5$  der Fall ist. Außerdem erkennt man im Leistungsdichtespektrum eine ausgeprägte Resonanzüberhöhung bei

<sup>29</sup>Siehe beispielsweise Oppenheim und Schafer (2009); Stoica und Moses (2005); Vaseghi (2008); Hayes (1996); Kay (1988) für eine Einführung in die Schätzung von Leistungsdichtespektren aus gemessenen Signalen.

<sup>30</sup>Es sei daran erinnert, dass Leistungsgrößen, wie beispielsweise Leistungsdichtespektren, per  $10 \log_{10}(\cdot)$  in dB umgerechnet werden, während bei Leistungswurzelgrößen, wie etwa Betragsgängen, die Umrechnung per  $20 \log_{10}(\cdot)$  erfolgt.

der Frequenz  $\omega_r \approx 941$  rad/s infolge der deutlich hörbaren elastischen Vibrationen der Platte. Die Resonanzüberhöhung kann nach Abschnitt 3.3.3 für  $N = 0$  und  $\alpha = \beta$  dank der Nullstellen im Frequenzgang der algebraischen Ableitungsschätzer eliminiert werden. Abbildung 4.5 rechts verdeutlicht, dass hierdurch der große Unterschied in der minimal detektierbaren Fallhöhe zwischen den beiden in Abbildung 4.4 links hervorgehobenen Ableitungsschätzern erklärt werden kann – während bei dem vorteilhaften Filter mit der Fensterbreite  $T = 27,4$  ms die zweite Nullstelle des Frequenzgangs mit der Resonanzfrequenz zusammenfällt, besitzt der Betragsgang des wesentlich unvorteilhafteren Filters mit der Fensterbreite  $T = 30,3$  ms ein lokales Maximum bei der Resonanzfrequenz. Überdies implizieren  $N = 0$  und  $\alpha = \beta$  nach Abschnitt 3.2.1 die für das optimale Suchfilter erforderliche Linearphasigkeit.

Zusammengenommen stellt der algebraische Ableitungsschätzer mit den Parametern  $N = 0$ ,  $T = 27,4$  ms,  $\alpha = \beta = 5$  eine gute Annäherung an ein optimales Suchfilter für die Kollisionen dar, wie in Abbildung 4.5 rechts zu erkennen. Dies erklärt die als sehr gut zu bewertende Erkennbarkeit von Kollisionen des Tischtennisballs mit der circa 1700-fach schwereren, deutlich vibrierenden Platte aus einer Fallhöhe von 1 cm bei gleichzeitig nahezu vernachlässigbarer Wahrscheinlichkeit von Fehlalarmen.

### 4.3. Implementierung des Kollisionsindikators

Nachdem der algebraische Ableitungsschätzer mit den Parametern  $N = 0$ ,  $T = 27,4$  ms,  $\alpha = \beta = 5$  als Suchfilter für die Kollisionsdetektion bestimmt wurde, müssen die Operatoren  $\dot{g}$  und  $g^{(3)}$  zur Echtzeitimplementierung des Kollisionsindikators zeitdiskretisiert werden. Vorab soll jedoch, wie in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, eine mögliche Verletzung des Abtasttheorems überprüft werden. Der algebraische Ableitungsschätzer besitzt nach (3.24) die Knickfrequenz  $\omega_c \approx 303,8$  rad/s, woraus nach (3.32) bei einer Abtastrate von 10 kHz Verstärkungen bei der Nyquist-Frequenz von  $k_N \approx -201$  dB für  $\dot{g}$  beziehungsweise  $k_N \approx -121$  dB für  $g^{(3)}$  folgen. Signalanteile jenseits der Nyquist-Frequenz werden also jeweils derart stark abgeschwächt, dass keine relevante Verfälschung der Filtercharakteristiken durch die Zeitdiskretisierung zu befürchten ist.

Dies spiegelt sich in den Gütekriterien (3.37) von  $\mathcal{J} \approx 5,05 \cdot 10^{-14}$  beziehungsweise  $\mathcal{J} \approx 2,47 \cdot 10^{-9}$  wider, die man bei der Zeitdiskretisierung von  $\dot{g}$  beziehungsweise  $g^{(3)}$  mit der Mittelpunktregel (3.38) erhält. Der Fehler infolge der Zeitdiskretisierung mit der hinsichtlich benötigter Echtzeitressourcen, effektiver Schätzverzögerung und Eignung für die rekursive Implementierung vorteilhaften Mittelpunktregel kann also bei beiden im Kollisionsindikator benötigten Filtern vernachlässigt werden. Daher erübrigt sich ein Vergleich mit den sonstigen in Abschnitt 3.4.2 erläuterten Diskretisierungsverfahren.

In Abschnitt 3.4.3 wurde als Maßnahme zur Steigerung der Rechenzeit- und Speichereffizienz sowie zur Reduktion der effektiven Schätzverzögerung vorgeschlagen, bei algebraischen Ableitungsschätzern mit sehr steilflankigem Stopppband den Be-

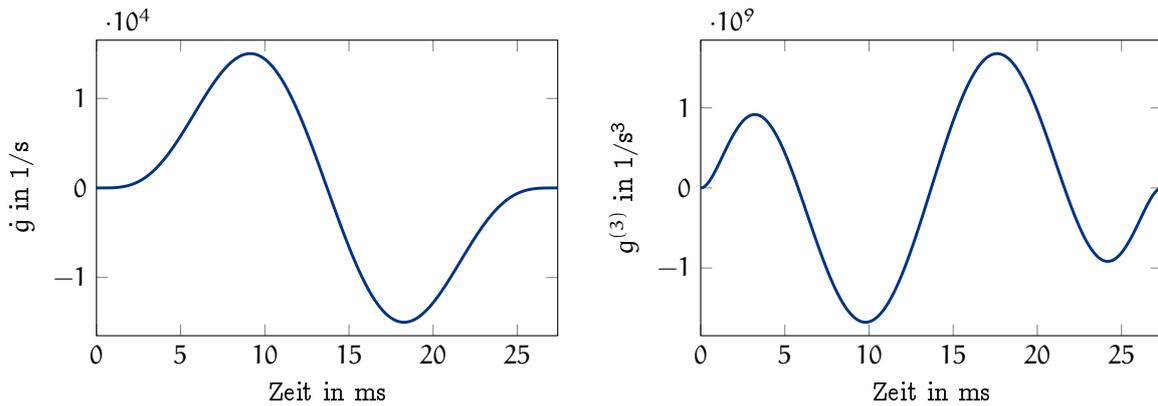


Abbildung 4.6.: Erste und dritte Ableitung der Impulsantwort des Suchfilters.

ginn und das Ende des gleitenden Zeitfensters zu vernachlässigen. Im Vergleich zum dort behandelten Ableitungsschätzer, dessen abgeleitete Impulsantwort in Abbildung 3.17 dargestellt ist, steigen die für den Kollisionsindikator benötigten zeitlichen Ableitungen der Impulsantwort des Suchfilters wesentlich schneller an, siehe Abbildung 4.6. Besonders gut zu sehen ist dies bei der dritten Ableitung in Abbildung 4.6 rechts. Folglich ist die Kürzung des Zeitfensters aus Abschnitt 3.4.3 für den Kollisionsindikator nicht sinnvoll anwendbar und wird daher nicht weiter untersucht.

Die nicht-rekursive Implementierung (3.36a) der mit der Mittelpunkregel (3.38) diskretisierten Operatoren  $\dot{g}$  und  $g^{(3)}$  in (4.4a) erfordern jeweils 547 Rechenoperationen je Abtastschritt und jeweils die Speicherung von 274 Filterkoeffizienten. Insgesamt benötigt die nicht-rekursive Implementierung also 1094 Rechenoperationen je Abtastschritt für die beiden Ableitungsschätzer und die Speicherung von 548 Filterkoeffizienten. Daher erscheint die in Abschnitt 3.4.4 vorgeschlagene rekursive Implementierung vielversprechend.

Wegen der ganzzahligen Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha, \beta$  und der Diskretisierung per Mittelpunkregel sind die Koeffizienten des zeitdiskreten FIR-Filters nach (3.46) bereits Polynome der Form (B.29) mit ganzzahligen Polynomkoeffizienten. Für  $\dot{g}$  hat das Polynom in (B.29a) den Polynomgrad  $r = 9$ , wobei die binäre Zweierkomplement-Repräsentation der ganzzahligen Polynomkoeffizienten (B.29b) eine Wortbreite von  $n_b = 51$  bit erfordert, und für  $g^{(3)}$  den Polynomgrad  $r = 7$  mit einer Wortbreite von  $n_b = 47$  bit für die binäre Zweierkomplement-Repräsentation der ganzzahligen Polynomkoeffizienten. Für die rekursive Implementierung von  $\dot{g}$  sind daher 59 Rechenoperationen je Abtastschritt erforderlich und es müssen 49 Filterkoeffizienten gespeichert werden, während  $g^{(3)}$  bei rekursiver Implementierung 47 Rechenoperationen je Abtastschritt und die Speicherung von 39 Filterkoeffizienten erfordert. In Summe kann also, bei im Vergleich zur nicht-rekursiven Implementierung identischen Filterausgangswerten, die Anzahl an Rechenoperationen je Abtastschritt auf 106 und die Anzahl zu speichernder Filterkoeffizienten auf 88 reduziert werden, was einer Reduktion der Anzahl benötigter Rechenoperationen um 90,3 % und einer Reduktion der Anzahl zu speichernder Filterkoeffizienten um 83,9 % entspricht.

Eine Reduktion der erforderlichen Wortbreite für die ganzzahligen Polynomkoeffi-

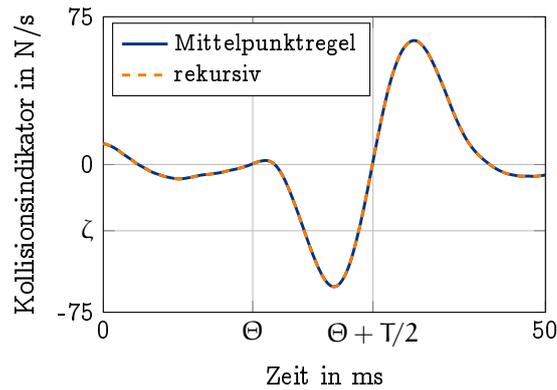


Abbildung 4.7.: Vergleich des mit der Mittelpunkregel diskretisierten Kollisionsindikators mit einer rekursiven Ganzzahl-Approximation ( $\dot{g}$ :  $r = 3$ ,  $q = 6$ ,  $n_b = 26$  bit,  $g^{(3)}$ :  $r = 3$ ,  $q = 8$ ,  $n_b = 33$  bit) für die Kollision aus Abbildung 4.2 rechts.

zienten kann durch die in Abschnitt 3.4.4 beschriebene stückweise polynomiale Approximation mit ganzzahligen Polynomkoeffizienten erreicht werden. Im vorliegenden Fall ergeben für das Filter  $\dot{g}$  der Polynomgrad  $r = 3$ , die Anzahl  $q = 6$  an Polynomen und die Wortbreite  $n_b = 26$  bit für die Zweierkomplement-Repräsentation der Polynomkoeffizienten und für das Filter  $g^{(3)}$  die Approximationsparameter  $r = 3$ ,  $q = 8$ ,  $n_b = 33$  bit eine sehr gute Approximationsgenauigkeit, siehe Abbildung 4.7. Dann benötigt die rekursive Implementierung von  $\dot{g}$  in jedem Abtastschritt 58 Rechenoperationen und die Speicherung von 39 Filterkoeffizienten, während 72 Rechenoperationen je Abtastschritt für  $g^{(3)}$  erforderlich sind und 47 Filterkoeffizienten gespeichert werden müssen. Insgesamt müssen also 130 Rechenoperationen je Abtastschritt ausgeführt und 86 Filterkoeffizienten gespeichert werden, was eine Reduktion der Anzahl an Rechenoperationen von 88,1 % und zu speichernder Filterkoeffizienten von 84,3 % im Vergleich zur nicht-rekursiven Implementierung bedeutet.

## 4.4. Zusammenfassung

In dieser Fallstudie wurde die Echtzeit-Detektion von Kollisionen eines Tischtennisballs mit einer schwebenden Platte anhand von verrauschten Messwerten für die Plattenposition und die eingeprägte Kraft demonstriert. Durch den modellbasierten Diagnoseansatz für den Kollisionsindikator wurde die Problemstellung auf die Detektion und Lokalisierung einer Diskontinuität in einer zeitlichen Ableitung eines verrauschten Signals zurückgeführt, wie sie in Abschnitt 3.2.3 erläutert wurde. Mit einem geeignet parametrisierten algebraischen Ableitungsschätzer konnte der entsprechend Abschnitt 3.2.3 optimale Kollisionsindikator gut angenähert werden. Als wesentlich hat sich hierbei die in Abschnitt 3.3.3 erläuterte Möglichkeit der algebraischen Ableitungsschätzer herausgestellt, die dominante Resonanzfrequenz der Platte ohne zusätzliche Filter zu eliminieren, ebenso wie die in Abschnitt 3.3.2 erläuterte freie Wahl der Stoppbandsteigung und die entsprechend Abschnitt 3.2.3 für optimale Suchfilter erforderliche Linearphasigkeit, die beispielsweise mit linearen zeitinvarian-

ten IIR-Filtern nicht realisierbar ist.

Im Vergleich zu den früheren Publikationen Kiltz et al. (2013); Kiltz und Rudolph (2013) konnte durch die Annäherung des Ableitungsschätzers an ein optimales Suchfilter eine nochmals deutlich verbesserte Signalqualität des Kollisionsindikators erzielt werden. Überdies wurde durch die rekursive Implementierung aus Abschnitt 3.4.4 eine wesentliche Verbesserung der Echtzeit-Effizienz erreicht, nämlich eine Reduktion der Anzahl an Rechenoperationen je Abtastschritt um ca. 90 % bei gleichzeitiger Reduktion der Anzahl zu speichernder Filterkoeffizienten um ca. 84 %.



## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden verschiedene Aspekte einer Klasse von echtzeitfähigen linearen zeitinvarianten Filtern zur Tiefpassfilterung und näherungsweise numerischen Differentiation beliebiger ganzzahliger Ordnung von Signalen behandelt, die sogenannten algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster, die in dieser Arbeit kurz als algebraische Ableitungsschätzer bezeichnet werden.

Während die algebraischen Ableitungsschätzer in den Originalveröffentlichungen Mboup et al. (2007, 2009) anhand von differentialalgebraischen Manipulationen einer Taylor-Entwicklung des Eingangssignals hergeleitet wurden, wie in Abschnitt 2.1 demonstriert, wurde in dieser Arbeit der in Abschnitt 3.1 beschriebene approximationstheoretische Zugang gewählt. Aus der Sicht des Autors gestattet der approximationstheoretische Zugang eine wesentlich anschaulichere Interpretation der algebraischen Ableitungsschätzer und ihrer Parameter als die abstrakte differentialalgebraische Vorgehensweise. Außerdem rechtfertigt die approximationstheoretische Herleitung formal die Anwendbarkeit der algebraischen Ableitungsschätzer auf diskontinuierliche Signale, während dieser wesentliche Einsatzfall bei der Herleitung basierend auf einer Taylor-Entwicklung zunächst nicht klar ist.

Da die algebraischen Ableitungsschätzer lineare zeitinvariante Filter sind, liegt eine Analyse ihrer Filtereigenschaften im Zeitbereich und im Frequenzbereich nahe, also anhand ihrer Impuls- bzw. Sprungantwort und ihres Frequenzgangs. Dies wurde in den Abschnitten 3.2 bzw. 3.3 erläutert. Ebenso ermöglicht diese Betrachtungsweise einen Vergleich mit anderen bekannten linearen zeitinvarianten Filtern zur näherungsweise numerischen Differentiation, wie in Abschnitt 2.2 exemplarisch gezeigt. Zur anschaulichen Interpretation der Filtereigenschaften eignet sich insbesondere die Sichtweise, dass die algebraischen Ableitungsschätzer Tiefpassfilter sind, die auf der zu schätzenden Ableitung operieren; in diesem Sinne wurde in dieser Arbeit die Impulsantwort der algebraischen Ableitungsschätzer eingeführt.

Bei den algebraischen Ableitungsschätzern handelt es sich um FIR-Filter, also Filter mit einer endlich andauernden Impulsantwort. Daher können die algebraischen Ableitungsschätzer linearphasig ausgelegt werden, was mit kausalen linearen zeitinvarianten Filtern mit einer unendlich andauernden Impulsantwort, wie sie häufig durch gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten oder durch gebrochene rationale Übertragungsfunktionen beschrieben werden, nicht möglich ist.

Die Linearphasigkeit ist vorteilhaft zur Annäherung optimaler Suchfilter zur Detektion und Lokalisation von Diskontinuitäten in den zeitlichen Ableitungen verrauschter Messsignale, wie sie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben und zur modellbasierten Diagnose in Kapitel 4 angewandt wurde, zur Echtzeit-Trajektorien-generierung, wie

in Beispiel 6 diskutiert, und allgemein zur möglichst effizienten Unterdrückung von schwach stationärem Rauschen bei möglichst geringer Fensterbreite des verwendeten Tiefpassfilters, siehe Abschnitt 3.3.2. In Abschnitt 3.2.2 wurde gezeigt, dass die algebraischen Ableitungsschätzer sogar zur FIR-Approximation eines hinsichtlich der Unschärferelation optimalen Kompromisses aus der Auflösung im Zeit- und im Frequenzbereich genutzt werden können, also eine besonders effiziente Tiefpasswirkung bei besonders geringer effektiver Breite der Impulsantwort bieten können.

Die Tiefpass-Charakteristik der algebraischen Ableitungsschätzer, die anhand ihrer Knickfrequenz und ihrer Stoppbandsteigung im Sinne von Abschnitt 3.3.2 quantifiziert werden kann, kann beliebig vorgegeben werden. Umgekehrt ermöglicht die Vorgabe einer gewünschten Knickfrequenz und einer gewünschten Stoppbandsteigung eine besonders anschauliche Synthese der algebraischen Ableitungsschätzer. Da die algebraischen Ableitungsschätzer jedoch neben der zu schätzenden Ableitungsordnung noch fünf weitere Parameter aufweisen, müssen über die Knickfrequenz und die Stoppbandsteigung hinaus noch weitere Vorgaben getroffen werden, um einen anwendungsspezifisch vorteilhaften algebraischen Ableitungsschätzer eindeutig zu bestimmen. Dies ist im Allgemeinen ein nicht-triviales Problem. Dennoch können aus den Abschnitten 3.2 und 3.3 sowie der Fallstudie in Kapitel 4 folgende Empfehlungen als Faustregeln abgeleitet werden:

1. Soll bei der Ableitungsschätzung eine dominante konstante Resonanzfrequenz ohne zusätzliche Filter eliminiert werden, so werden die Parameter des algebraischen Ableitungsschätzers wie in Abschnitt 3.3.3 beschrieben gewählt, insbesondere entsprechend (3.31). Dies war in dieser Arbeit wesentlich zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses des modellbasierten Kollisionsindikators für die elastisch vibrierende schwebende Platte in Abschnitt 4.2.
2. Zur Rückführung der geschätzten Ableitung in einem geschlossenen Regelkreis ist es wichtig, dass die Schätzverzögerung bei gegebener Tiefpass-Charakteristik besonders gering ist. Wie in Abbildung 3.11 zu sehen ist, kann es sich dann je nach gewünschter Stoppbandsteigung lohnen, den Polynomgrad  $N$  der dem Ableitungsschätzer zugrunde liegenden Polynomapproximation der zu schätzenden Ableitung größer als Null und den Verzögerungsparameter  $\vartheta$  als letzte Nullstelle des Jacobi-Polynoms  $(N + 1)$ -ten Grades zu wählen, vergleiche auch die Diskussion des systematischen Schätzfehlers in Abschnitt 3.1.3. Im Hinblick auf die für die Implementierung erforderlichen Echtzeit-Ressourcen ist eine geringe Fensterbreite  $T$  vorteilhaft, weshalb der Parameter  $\kappa$  nur so groß gewählt werden sollte, dass die Welligkeit des Betragsgangs des Ableitungsschätzers im Stoppband akzeptabel ist. In vielen Anwendungen sollte  $\kappa = 0$  genügen, wodurch die kleinst mögliche Fensterbreite und somit die beste Echtzeit-Effizienz erreicht wird.
3. Ist die zeitliche Verzögerung der Ableitungsschätzung von sekundärem Interesse, so bietet sich wegen des nahezu optimalen Kompromisses aus Zeit- und

---

Frequenzauflösung und der Vorteile linearphasiger Filter eine linearphasige Approximation der Gauß-Funktion entsprechend Beispiel 5 an.

Für die Echtzeit-Implementierung müssen die algebraischen Ableitungsschätzer zeitdiskret approximiert werden. Hierzu empfiehlt es sich, die algebraischen Ableitungsschätzer derart zu interpretieren, dass die Ableitung ihrer Impulsantwort als lineares zeitinvariantes FIR-Filter auf das zu differenzierende Signal angewandt wird.

Für die Zeitdiskretisierung ist wichtig, welche Abtastrate erforderlich ist, damit der zeitkontinuierliche Ableitungsschätzer hinreichend genau durch das zeitdiskrete Filter angenähert wird. Nach Kenntnis des Autors existierten hierzu bisher in der Literatur keine praktikablen Näherungsformeln. Anhand der Tiefpass-Charakteristik aus Abschnitt 3.3.2 kann nun überprüft werden, inwieweit das Abtasttheorem durch die Zeitdiskretisierung verletzt würde. So kann in der Praxis recht anschaulich entschieden werden, ob die beabsichtigte Abtastrate ausreicht. Dies wird in Abschnitt 3.4.1 erläutert und wurde bei der Fallstudie in Abschnitt 4.3 angewandt. Ebenso wurde in dieser Arbeit nach Kenntnis des Autors erstmalig darauf hingewiesen, dass sich durch die Zeitdiskretisierung der Genauigkeitsgrad der algebraischen Ableitungsschätzer verschlechtern kann, was sich umso deutlicher auswirkt, je geringer die Abtastrate ist, siehe Abschnitt 3.4.2; ein Erhalt des Genauigkeitsgrades ist mit der ebenfalls in diesem Abschnitt angegebenen Normierung möglich.

Ein wichtiges Vergleichsmerkmal zeitdiskreter Ableitungsschätzfilter ist, bis zu welcher Frequenz relativ zur Nyquist-Frequenz sie den idealen, nicht realisierbaren Differentiator entsprechender Ordnung gut nachbilden. In den Beispielen 10, 11 und 12 wurde demonstriert, dass algebraische Ableitungsschätzer mit hoher asymptotischer Stoppbandsteigung mit verhältnismäßig geringer Abtastrate implementiert werden können. So können auch auf Basis der algebraischen Ableitungsschätzer numerisch stabile differenzierende Filter entworfen werden, die das nach der Zeitdiskretisierung nutzbare Frequenzband gut ausnutzen.

Bisher wurden die zeitdiskretisierten algebraischen Ableitungsschätzer üblicherweise als Faltungssumme implementiert. Dies hat den Nachteil, dass die in jedem Abtastschritt zur Ausführung des Filters benötigte Anzahl an Rechenoperationen sowie die Anzahl an zu speichernden Filterkoeffizienten mit der Anzahl an Abtastperioden je Fensterbreite des Ableitungsschätzers linear ansteigen und somit sehr groß werden können. Mit folgenden Maßnahmen konnte in dieser Arbeit die Echtzeit-Effizienz der algebraischen Ableitungsschätzer gesteigert werden:

1. Während in den Original-Veröffentlichungen Mboup et al. (2007, 2009) die zeitdiskreten Filter mit Hilfe der Trapezregel synthetisiert wurden, konnten in der vorliegenden Arbeit sehr gute Ergebnisse mit der Mittelpunkregel erzielt werden, siehe die Abschnitte 3.4.2 und 4.3. Auf diese Weise können bei jeder Ausführung des Filters zwei Rechenoperationen eingespart werden und es muss ein Filterkoeffizient weniger gespeichert werden. Zusätzlich verringert sich die Schätzverzögerung um eine halbe Abtastperiode.

2. Bei algebraischen Ableitungsschätzern mit großer Stoppbandsteigung kann ein bedeutender Anteil des Zeitfensters weggeschnitten werden, ohne dass sich das Schätzergebnis wesentlich verschlechtert, siehe Abschnitt 3.4.3. Auf diese Weise können gegebenenfalls etliche Rechenoperationen je Abtastschritt sowie Filterkoeffizienten eingespart werden. Außerdem ist eine erhebliche Verringerung der Schätzverzögerung möglich, etwa in Beispiel 12 um ca. 61 %.
3. In Abschnitt 3.4.4 wurden zwei Verfahren zur rekursiven Implementierung der algebraischen Ableitungsschätzer vorgeschlagen, wodurch die Anzahl an Rechenoperationen und Filterkoeffizienten unabhängig von der Anzahl an Abtastperioden je Fensterbreite wird. Hiermit kann eine erhebliche Steigerung der Echtzeit-Effizienz erreicht werden. (Bei der Fallstudie in Abschnitt 4.3 konnte die Anzahl an Rechenoperationen um ca. 90 % und die Anzahl der Filterkoeffizienten um ca. 84 % gegenüber der Implementierung als Faltungssumme reduziert werden.) Dies hat keine Auswirkung auf die Schätzverzögerung.

Beispiele für regelungstechnische Anwendungen von echtzeitfähigen Ableitungsschätzern und somit prinzipiell auch der algebraischen Ableitungsschätzer sind die Zustandsregelung, die modellbasierte Fehlerdiagnose, die Identifikation von Modellparametern oder auch adaptive Regler bzw. Beobachter. Die Ergebnisse dieser Arbeit können dazu genutzt werden, die algebraischen Ableitungsschätzer mit gleitendem Zeitfenster zukünftig bei derartigen Anwendungen zielgerichteter mit anderen Verfahren zur näherungsweise Echtzeit-Differentiation verrauschter Messsignale bzw. zur Zustandsrekonstruktion vergleichen zu können, als dies bisher möglich war.

# A. Mathematische Grundlagen und Formelsammlung

## A.1. Operatorenkalkül und Fourier-Transformation

### A.1.1. Mikusiński's Operatorenkalkül

Der Operatorenkalkül nach Mikusiński (1983) ermöglicht, wie die Laplace-Transformation<sup>31</sup>, die Überführung linearer zeitinvarianter Differentialoperatoren in algebraische Ausdrücke. Außerdem ergibt sich, wie bei der Distributionentheorie nach Schwartz (1950), ein verallgemeinerter Ableitungsbegriff, welcher auch für unstetige Funktionen gültig ist. Dieser Abschnitt fasst die für diese Arbeit wesentlichen Grundlagen aus Mikusiński (1983) zusammen und führt die verwendete Operatornotation ein.

**Funktionen und Zahlen** Funktionen und Zahlen werden strikt unterschieden. Die Funktion  $t \mapsto f(t)$  wird als  $f$  oder  $\{f(t)\}$  geschrieben, während für den Funktionswert von  $f$  an der Stelle  $t$  die übliche Schreibweise  $f(t)$  verwendet wird. Entsprechend wird die Zahl  $c \in \mathbb{C}$  dargestellt als  $c$ , während die konstante Funktion  $t \mapsto c$  dargestellt wird als  $\{c\}$ . Es werden ausschließlich Funktionen mit linksseitig beschränktem Träger behandelt, es wird also implizit stets  $f(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$  vorausgesetzt.

**Addition und Faltung als grundlegende Operationen** Im Folgenden werden Funktionen  $f, g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$  betrachtet. Grundlegende Operationen auf  $\mathcal{C}^0([0, \infty))$  sind die Addition  $f + g := \{f(t) + g(t)\}$  und die *Faltung*  $f g := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right\}$ , welche sich für  $f(\tau) = g(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$  zu  $f g = \left\{ \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right\}$  vereinfacht. Die wiederholte Faltung wird abkürzend  $f^n := f f^{n-1}$ ,  $f^0 := 1$ , geschrieben. Die Integration einer Funktion kann als Faltungsprodukt  $\left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} = \{1\} f$  geschrieben werden. Für die  $n$ -fache Integration folgt die Cauchy-Formel<sup>32</sup> für wiederholte Integration

$$\left\{ \int_0^t \int_0^{\tau_n} \cdots \int_0^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1} d\tau_n \right\} = \{1\}^n f = \left\{ \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und distributiv bezüglich der Addition. Weiterhin ist  $\mathcal{C}^0([0, \infty))$  bezüglich der Faltung nach dem Satz von Titchmarsh<sup>33</sup> nulltei-

<sup>31</sup>Pierre-Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

<sup>32</sup>Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

<sup>33</sup>Edward Charles Titchmarsh (1899-1963)

lerfrei:  $f g = 0$  ist äquivalent dazu, dass gilt  $f = 0$  oder  $g = 0$ .

**Operatoren** *Operatoren* sind Quotienten  $h = f/g$  mit  $f, g \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$ ,  $g \neq 0$ . Es gilt dann  $f = g h$ . Hierbei ist  $h$  infolge des Satzes von Titchmarsh eindeutig, kann jedoch im Allgemeinen nicht als Funktion dargestellt werden. Jede Zahl  $c \in \mathbb{C}$  ist wegen  $c = \{c\}/\{1\}$  und jede Funktion  $f \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$  ist wegen  $f = (f g)/g$ ,  $g \neq 0$ , ein Operator. Für Operatoren  $h_i = f_i/g_i$ ,  $i = 1, 2$ , gilt

$$h_1 = h_2 \iff f_1 g_2 = f_2 g_1, \quad h_1 h_2 = \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}, \quad h_1 + h_2 = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 g_2}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{f_1 g_2}{f_2 g_1}.$$

Auch hier wird die Schreibweise  $h^n = h h^{n-1}$ ,  $h^0 = 1$ , verwendet. Ein Operator  $h \neq 0$  besitzt einen inversen Operator  $1/h = h^{-1}$ . Es gilt der *binomische Lehrsatz*

$$(h_1 + h_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h_1^{n-k} h_2^k. \quad (\text{A.2})$$

**Ableitungsoperator** Der Ableitungsoperator  $s$  ist die Inverse des Integraloperators:  $s = \{1\}^{-1}$ . Daher wird der  $n$ -fache Integraloperator auch dargestellt als  $s^{-n}$ . Für eine Funktion  $f$  mit Ableitung  $\dot{f} \in \mathcal{C}^0([0, \infty))$  folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung  $s f = \dot{f} + f(0)$  und somit

$$s^n f = f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0), \quad (\text{A.3})$$

sofern  $f$   $n$ -fach differenzierbar ist. Die Anwendung von  $s$  auf einen Operator ergibt wieder einen Operator und kann daher als verallgemeinerte Ableitung interpretiert werden. Jeder Operator hat verallgemeinerte Ableitungen beliebiger Ordnung.

**Unstetige Funktionen** Die Menge  $\mathcal{K}$  umfasst die Funktionen  $f$ , die in jedem kompakten Intervall  $[a, b] \subset [0, \infty)$  höchstens eine endliche Anzahl von Diskontinuitätsstellen aufweisen und für die  $\int_0^t |f(\tau)| d\tau < \infty$  für alle  $t > 0$  gilt. Ein Beispiel für eine Funktion aus  $\mathcal{K}$  ist die *Heaviside*-<sup>34</sup> oder *Sprungfunktion*

$$H_\Theta(t) := \begin{cases} 0, & t \leq \Theta, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Die Sprungfunktion ermöglicht die Definition des *Verschiebeoperators*

$$\delta^\Theta := s H_\Theta. \quad (\text{A.5})$$

Für  $f \in \mathcal{K}$  gilt  $\delta^\Theta f = \{f(t - \Theta)\}$  und somit  $\delta^\Theta \delta^\Phi = \delta^{\Theta+\Phi}$ . Bei Abtastvorgängen wird die Schreibweise  $\delta f := \delta^1 f$  verwandt.

<sup>34</sup>Oliver Heaviside (1850-1925)

**Algebraische Ableitung** Seien  $f, g \in \mathcal{K}$ ,  $h = f/g$  und  $\alpha$  eine Zahl. Die *algebraische Ableitung*  $\frac{d}{ds}$  erfüllt:

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0, \quad \frac{d(\alpha f)}{ds} = \alpha \frac{df}{ds}, \quad \frac{d(f+g)}{ds} = \frac{df}{ds} + \frac{dg}{ds}, \quad \frac{d(fg)}{ds} = \frac{df}{ds}g + f \frac{dg}{ds}$$

sowie

$$\frac{dh}{ds} = \left( \frac{df}{ds}g - f \frac{dg}{ds} \right) / g^2, \quad \frac{d(s^n)}{ds} = n \frac{d(s^{n-1})}{ds}, \quad \frac{df}{ds} = \{-t f(t)\}.$$

Die algebraische Ableitung wird also formal wie die klassische Ableitung angewandt.

### A.1.2. Fourier-Transformation

Die im Folgenden angegebenen Eigenschaften der Fourier-Transformation sind beispielsweise in Papoulis (1962) hergeleitet. In dieser Arbeit wird folgende Definition der *Fourier-Transformierten* sowie der *inversen Fourier-Transformierten* verwendet:

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad \mathcal{F}^{-1}\{g\}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{A.6})$$

Die Fourier-Transformation ist von großem Nutzen zur Analyse der algebraischen Ableitungsschätzer, da ein Faltungsprodukt durch Fourier-Transformation in ein punktweises Produkt überführt wird:

$$\mathcal{F}\{f g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}. \quad (\text{A.7a})$$

Umgekehrt wird ein punktweises Produkt in eine Faltung überführt:

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\}. \quad (\text{A.7b})$$

Für achsensymmetrische Funktionen  $g_1(T+t) = g_2(T-t)$  gilt

$$e^{i\omega T} \mathcal{F}\{g_1\}(\omega) = e^{-i\omega T} \mathcal{F}\{g_2\}(-\omega). \quad (\text{A.8})$$

Außerdem gilt für  $g(\omega) = e^{-i\mu f(\sigma\omega)}$  mit  $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}^{-1}\{g\}(t) = \frac{1}{|\sigma|} \mathcal{F}^{-1}\{f\}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right). \quad (\text{A.9})$$

**Abtastfolgen** Für die äquidistante Abtastfolge  $\hat{g} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \delta^{kT_s}$ ,  $g_k := g(kT_s)$ , vereinfacht sich (A.6) zu

$$\mathcal{F}\{\hat{g}\}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k e^{-i\omega k T_s}, \quad g_k = \frac{1}{2\omega_N} \int_{-\omega_N}^{\omega_N} \mathcal{F}\{\hat{g}\}(\omega) e^{i\omega k T_s} d\omega \quad (\text{A.10})$$

mit der Nyquist-Frequenz  $\omega_N = \pi/T_s$ . Sofern  $g$  stetig ist, sind die Fourier-Transformierten von  $g$  und  $\hat{g}$  per

$$\mathcal{F}\{\hat{g}\}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{g\}(\omega + 2\omega_N k) \quad (\text{A.11})$$

miteinander verknüpft.

**Reellwertige Funktionen** Die Fourier-Transformierte einer reellwertigen Funktion  $g$  lautet

$$\mathcal{F}\{g\}(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cos(\omega \tau) \, d\tau}_{=\Re(\mathcal{F}\{g\})(\omega)} - \mathfrak{i} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \sin(\omega \tau) \, d\tau}_{=-\Im(\mathcal{F}\{g\})(\omega)}, \quad (\text{A.12a})$$

so dass der Realteil von  $\mathcal{F}\{g\}$  gerade und ihr Imaginärteil ungerade ist:

$$\Re(\mathcal{F}\{g\})(\omega) = \Re(\mathcal{F}\{g\})(-\omega), \quad \Im(\mathcal{F}\{g\})(\omega) = -\Im(\mathcal{F}\{g\})(-\omega). \quad (\text{A.12b})$$

Entsprechend ist der Betragsgang gerade und der Phasengang ungerade:

$$|\mathcal{F}\{g\}|(-\omega) = |\mathcal{F}\{g\}|(\omega), \quad \arg \mathcal{F}\{g\}(-\omega) = -\arg \mathcal{F}\{g\}(\omega). \quad (\text{A.12c})$$

Des Weiteren ist die Fourier-Transformierte gerader reellwertiger Funktionen rein reell und diejenige ungerader reellwertiger Funktionen rein imaginär:

$$g(\tau) = g(-\tau) \Rightarrow \Im(\mathcal{F}\{g\})(\omega) = 0, \quad g(\tau) = -g(-\tau) \Rightarrow \Re(\mathcal{F}\{g\})(\omega) = 0. \quad (\text{A.12d})$$

**Momente einer Funktion** Das  $k$ -te *Moment* einer Funktion  $f$  ist als

$$m_k(f) := \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k f(\tau) \, d\tau, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.13})$$

definiert. Das erste Moment wird auch *Mittelwert* genannt. Wenn die Funktion  $g$  durch Skalierung des Arguments aus  $f$  hervorgeht,  $g(\tau) = f(\tau/\sigma)$  mit  $\sigma > 0$ , dann ergibt sich das  $k$ -te Moment von  $g$  aus dem  $k$ -ten Moment von  $f$  gemäß

$$m_k(g) = \sigma^{k+1} m_k(f). \quad (\text{A.14})$$

Wenn sämtliche Momente von  $f$  existieren, können diese aus den Ableitungen der Fourier-Transformierten von  $f$  berechnet werden:

$$m_k(f) = \mathfrak{i}^k (\mathcal{F}\{f\})^{(k)}(0). \quad (\text{A.15})$$

Daher beträgt das  $k$ -te Moment des Faltungsprodukts zweier Funktionen  $f$  und  $g$ , deren Momente sämtlich existieren,

$$m_k(fg) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} m_i(f) m_{k-i}(g). \quad (\text{A.16})$$

Das  $k$ -te *zentrale Moment* einer Funktion  $f$  ist

$$m_k^*(f) := \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - m_1(f))^k f(\tau) \, d\tau. \quad (\text{A.17})$$

Die *Varianz* von  $f$  ist deren zweites zentrales Moment. Das  $k$ -te zentrale Moment entspricht dem um den Mittelwert von  $f$  verschobenen  $k$ -ten Moment:

$$m_k^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^k f(\tau + m_1(f)) \, d\tau = m_k(\delta^{-m_1(f)} f). \quad (\text{A.18})$$

Sofern die Momente von  $f$  bis zum  $k$ -ten Moment existieren, kann (A.17) durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes  $(x + y)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i}$  aus den Momenten von  $f$  berechnet werden:

$$m_k^*(f) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i (m_1(f))^i (m_{k-i}(f)). \quad (\text{A.19})$$

**Dichte- und Verteilungsfunktionen** Eine reellwertige Funktion  $f$  wird in Anlehnung an die Wahrscheinlichkeitstheorie *Dichtefunktion* genannt, wenn sie

$$f(t) \geq 0, \quad m_0(f) = 1, \quad (\text{A.20})$$

erfüllt (Papoulis, 1962), vergleiche Anhang A.3. Aus (A.19) folgt, dass die Varianz einer Dichtefunktion aus ihrem Mittelwert und ihrem zweiten Moment berechnet werden kann:

$$m_2^*(f) = m_2(f) - (m_1(f))^2. \quad (\text{A.21})$$

Ist  $f$  eine Dichtefunktion, so gilt wegen (A.15) und (A.20)

$$\mathcal{F}\{f\}(0) = 1, \quad |\mathcal{F}\{f\}(\omega)| \leq 1, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.22})$$

Das Integral  $\Phi(t) := \int_{-\infty}^t f(\tau) \, d\tau$  ist die mit der Dichtefunktion  $f$  assoziierte *Verteilungsfunktion*.

## A.2. Lokale polynomiale Approximation

Die folgenden approximationstheoretischen Grundlagen erleichtern das Verständnis der algebraischen Ableitungsschätzer im Zeitbereich (Abschnitt 3.1.1) und werden zur rekursiven Implementierung (Abschnitt 3.4.4) benötigt.

### A.2.1. Approximation in einem Hilbert-Raum

Sei  $H$  ein  $N$ -dimensionaler Hilbert-Raum<sup>35</sup> (wobei auch  $N = \infty$  zulässig ist) mit dem inneren Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $V$  ein endlichdimensionaler linearer Unterraum von  $H$ . Das innere Produkt induziert die Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  und das Abstandsmaß  $d(x, y) := \|x - y\|$ . Ein Element  $\hat{f} \in V$  heißt *Bestapproximation* von  $f \in H$  bezüglich  $V$ , wenn  $d(f, \hat{f}) \leq d(f, g)$  für alle  $g \in V$ . Eine derartige Bestapproximation existiert unter den genannten Voraussetzungen stets und ist eindeutig (*Projektionstheorem*)

<sup>35</sup>David Hilbert (1862-1943)

(Luenberger, 1969; Meinardus, 1967). Wenn  $\{v_i\}_{i=0,\dots,N}$  eine orthogonale Basis von  $V$  ist, also  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  für  $i \neq j$  gilt, dann kann  $\hat{f}$  als

$$\hat{f} = \sum_{i=0}^N \frac{\langle f, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i. \quad (\text{A.23})$$

berechnet werden. Der Abstand zwischen  $f$  und  $\hat{f}$  beträgt (Luenberger, 1969; Meinardus, 1967)

$$d(f, \hat{f}) = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{i=0}^N \frac{|\langle f, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2}} \geq 0. \quad (\text{A.24})$$

Aus (A.24) folgt die *Bessel'sche Ungleichung*

$$\sum_{i=0}^N \frac{|\langle f, v_i \rangle|^2}{\|v_i\|^2} \leq \|f\|^2. \quad (\text{A.25})$$

Wichtig ist des Weiteren die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung (Luenberger, 1969)

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (\text{A.26})$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn  $x$  ein Vielfaches von  $y$  ist, also  $x = \lambda y$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , oder  $x = 0$  und  $y$  beliebig bzw.  $y = 0$  und  $x$  beliebig.

## A.2.2. Diskrete polynomiale Approximation

Es wird die Menge  $\mathcal{L}^\infty([0, L-1])$ ,  $L \in \mathbb{N}$ , der auf dem kompakten Intervall  $[0, L-1]$  beschränkten Funktionen betrachtet. Mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{L-1} f(k) g(k) \quad (\text{A.27})$$

ist  $\mathcal{L}^\infty([0, L-1])$  ein  $L$ -dimensionaler Hilbert-Raum (Luenberger, 1969). Die Menge  $\pi_N$  der Polynomfunktionen  $N$ -ten Grades,  $N < L$ , ist ein  $(N+1)$ -dimensionaler linearer Unterraum von  $\mathcal{L}^\infty([0, L-1])$ . Eine orthogonale Basis von  $\pi_N$  bezüglich (A.27) bilden die *Tschebischeff-Polynome einer diskreten Veränderlichen* (Szegő, 1959; Erdélyi, 1953b)

$$t_{i,L} := i! \Delta^i g \quad \text{mit } g(x) := \binom{x}{i} \binom{x-L}{i}, \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (\text{A.28a})$$

mit der Norm

$$\|t_{i,L}\|^2 = \frac{L \prod_{j=1}^i (L^2 - j^2)}{2i+1} \quad (\text{A.28b})$$

(abkürzend wird in dieser Arbeit von *diskreten Tschebischeff-Polynomen* gesprochen). Die polynomiale Bestapproximation  $N$ -ten Grades von  $f \in \mathcal{L}^\infty([0, L-1])$  bezüglich des inneren Produkts (A.27) kann daher nach (A.23) als Linearkombination

$$\hat{f} = \sum_{i=0}^N \frac{\langle f, t_{i,L} \rangle}{\|t_{i,L}\|^2} t_{i,L} \quad (\text{A.29})$$

diskreter Tschebischeff-Polynome bis zum Grad  $N$  angeschrieben werden.

### A.2.3. Kontinuierliche polynomiale Approximation

Mit  $\mathcal{L}^2([a, b])$  wird die Menge der Funktionen bezeichnet, die auf dem Intervall  $[a, b]$  quadratisch Lebesgue-integrierbar<sup>36</sup> sind (wobei in dieser Arbeit ausschließlich kompakte Intervalle  $[a, b]$  betrachtet werden):

$$\mathcal{L}^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(\tau)|^2 d\tau < \infty \right\}.$$

Es wird nun das Intervall  $[-1, 1]$  betrachtet. Mit dem inneren Produkt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 w^{(\alpha, \beta)}(\tau) f(\tau) \overline{g(\tau)} d\tau \quad (\text{A.30})$$

mit der *Gewichtsfunktion*

$$w^{(\alpha, \beta)}(\tau) := \begin{cases} (1 - \tau)^\alpha (1 + \tau)^\beta, & \tau \in [-1, 1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \alpha, \beta > -1, \quad (\text{A.31})$$

ist  $\mathcal{L}^2([-1, 1])$  ein unendlichdimensionaler Hilbert-Raum (Luenberger, 1969; Meinardus, 1967).

**Gleichheit und Identität** Infolge des durch (A.30) induzierten Abstandsmaßes ist es wichtig, die Begriffe *Gleichheit* und *Identität* zu unterscheiden. *Gleichheit*  $f = g$  bedeutet, dass der Abstand  $d(f, g) = 0$  ist. Hierzu genügt es, dass  $f(\tau)$  und  $g(\tau)$  *fast überall* auf  $[a, b]$  übereinstimmen, sich also auf einer Nullmenge innerhalb  $[a, b]$  unterscheiden dürfen. Im Gegensatz hierzu wird mit  $f \equiv g$  die *Identität* von  $f$  und  $g$  auf  $[a, b]$  bezeichnet, also die Übereinstimmung  $f(\tau) = g(\tau)$  an allen Punkten  $\tau \in [a, b]$ .

**Reihenentwicklung auf Basis der Jacobi-Polynome** Die *orthogonalen Jacobi-Polynome*<sup>37</sup>  $\{P_i^{(\alpha, \beta)}\}_{i=0}^\infty$  bilden eine orthogonale Basis von  $\mathcal{L}^2([-1, 1])$  bezüglich des inneren Produkts (A.30) (Szegő, 1959; Tricomi, 1955). Daher kann jede Funktion  $f \in \mathcal{L}^2([-1, 1])$  in eine konvergente *verallgemeinerte Fourier-Reihe* von Jacobi-Polynomen entwickelt werden:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|} \quad \text{mit } c_i := \frac{\langle f, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|}. \quad (\text{A.32})$$

Explizite Darstellungen der Jacobi-Polynome sind in Anhang A.4.3 zu finden. Aus der Bessel'schen Ungleichung (A.25) folgt mit (A.32) die Konvergenz der Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2 = \|f\|^2 < \infty$ . Daher ist die Folge  $(|c_i|^2)_{i=0}^\infty$  und somit auch die Folge  $(|c_i|)_{i=0}^\infty$  eine Nullfolge:

$$\forall \epsilon > 0 \exists i_0 \in \mathbb{N} \forall i \geq i_0 : |c_i| < \epsilon.$$

<sup>36</sup>Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

<sup>37</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Für  $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ , also falls  $f$  auf  $[-1, 1]$  stetig ist, ist die Konvergenz in (A.32) nach dem Approximationssatz von Weierstraß (Weierstraß, 1885; Courant und Hilbert, 1966) gleichmäßig:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall N \geq N_0 : \sup_{\tau \in [-1, 1]} \left| f(\tau) - \sum_{i=0}^N c_i \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}(\tau)}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|} \right| < \epsilon. \quad (\text{A.33})$$

In diesem Fall ist  $f$  zu ihrer verallgemeinerten Fourier-Reihe auf  $[-1, 1]$  sogar identisch:

$$f \equiv \sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|}. \quad (\text{A.34})$$

**Lokale polynomiale Approximation im quadratischen Mittel** Die Polynomfunktionen  $N$ -ten Grades  $\pi_N$  bilden einen  $(N + 1)$ -dimensionalen linearen Unterraum von  $\mathcal{L}^2([-1, 1])$  mit  $\{P_i^{(\alpha, \beta)}\}_{i=0}^N$  als orthogonaler Basis. Die Bestapproximation  $\hat{f}_N$  von  $f \in \mathcal{L}^2([-1, 1])$  bezüglich  $\pi_N$  kann nach (A.23) als

$$\hat{f}_N = \sum_{i=0}^N \frac{\langle f, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)} = \langle f, R_{N, \tau}^{(\alpha, \beta)} \rangle \quad \text{mit} \quad R_{N, \tau}^{(\alpha, \beta)} := \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}(\tau)}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.35})$$

dargestellt werden. Wegen

$$p \equiv \langle p, R_{N, \tau}^{(\alpha, \beta)} \rangle \quad \text{für } p \in \pi_N \quad (\text{A.36})$$

wird  $R_{N, \tau}^{(\alpha, \beta)}$  *reproduzierender Kern* (engl. *reproducing kernel*) von  $\pi_N$  genannt (Luenberger, 1969). Vertauscht man im inneren Produkt (A.30) die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$ , so ergibt sich mit (A.72a) und (A.74) folgende nützliche Symmetrieeigenschaft:

$$R_{N, \tau}^{(\beta, \alpha)}(t) = \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\beta, \alpha)}(\tau)}{\|P_i^{(\beta, \alpha)}\|^2} P_i^{(\beta, \alpha)}(t) = \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}(-\tau)}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)}(-t) = R_{N, -\tau}^{(\alpha, \beta)}(-t). \quad (\text{A.37})$$

Aus (A.24) und (A.32) folgt, dass der Abstand zwischen  $f$  und  $\hat{f}_N$  mit steigendem Polynomgrad monoton fällt und beliebig klein gemacht werden kann:

$$0 \leq d(f, \hat{f}_{N+1}) \leq d(f, \hat{f}_N), \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall N > N_0 : d(f, \hat{f}_N) < \epsilon.$$

### A.3. Stochastische Prozesse

Häufig wird Messrauschen als Zufallssignal, also als Beobachtung eines *stochastischen Prozesses*, modelliert. Siehe beispielsweise (Parzen, 2015; Papoulis und Pillay, 2002) für eine Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse. Zufallssignale besitzen im Allgemeinen keine Fourier-Transformierte (Papoulis, 1962), können aber teilweise im Frequenzbereich durch ihr Leistungsdichtespektrum beschrieben werden. Im Folgenden sollen die für diese Arbeit wesentlichen Eigenschaften stochastischer Prozesse wiederholt werden.

**Zufallsvariablen** Eine reelle *Zufallsvariable*  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bildet den Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$ , also die Menge aller möglichen Ergebnisse eines als zufällig ablaufend erachteten Phänomens, auf die reellen Zahlen ab.

**Verteilungs- und Dichtefunktion** Die *Verteilungsfunktion*  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  einer Zufallsvariable  $X$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von  $X$  einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet:  $F_X(t) := \mathcal{P}\{X \leq t\}$ . Eine Verteilungsfunktion ist monoton steigend, rechtsseitig stetig und besitzt die Grenzwerte  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$ . Die *Dichtefunktion*  $f_X$  von  $X$  ist die (verallgemeinerte) Ableitung der Verteilungsfunktion:  $f_X := F'_X$ .

**Erwartungswerte** Der *Erwartungswert*  $\mathcal{E}\{g(X)\}$  einer Funktion  $g$ , angewandt auf die Zufallsvariable  $X$ , lautet

$$\mathcal{E}\{g(X)\} := \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f_X(\tau) d\tau. \quad (\text{A.38})$$

Wichtige Erwartungswerte sind der *Mittelwert*  $\mu_X := \mathcal{E}\{X\}$ , die *Varianz*  $\sigma_X^2 := \mathcal{E}\{(X - \mu_X)^2\} = \mathcal{E}\{X^2\} - \mu_X^2$  sowie die *Standardabweichung*  $\sigma_X := \sqrt{\sigma_X^2}$ .

**Zusammenhang zwischen mehreren Zufallsvariablen** Der Erwartungswert einer Funktion mehrerer Zufallsvariablen  $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , berechnet sich zu

$$\mathcal{E}\{g(X_1, \dots, X_n)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1, \dots, \tau_n) f_{X_1, \dots, X_n}(\tau_1, \dots, \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n.$$

mit der *gemeinsamen Dichtefunktion*  $f_{X_1, \dots, X_n} := \frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} F_{X_1, \dots, X_n}$  und der *gemeinsamen Verteilungsfunktion*  $F_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) := \mathcal{P}\{X_1 \leq t_1, \dots, X_n \leq t_n\}$ . Die Zufallsvariablen  $X, Y$  sind *statistisch unabhängig*, wenn ihre gemeinsame Dichtefunktion separierbar ist, also wenn  $f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y$  erfüllt ist. Eine gewichtete Summe  $Y = \sum_i a_i X_i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , von Zufallsvariablen  $X_i$  hat den Mittelwert

$$\mu_Y = \sum_i a_i \mu_{X_i} \quad (\text{A.39a})$$

und die Varianz

$$\sigma_Y^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i \neq j} a_i a_j c_{X_i X_j} \quad (\text{A.39b})$$

mit der *Kovarianz*  $c_{XY} := \mathcal{E}\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$ . Wenn die Zufallsvariablen *unkorreliert* sind, vereinfacht sich (A.39b) zu

$$\sigma_Y^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_{X_i}^2. \quad (\text{A.39c})$$

**Stochastische Prozesse** Ein reeller *stochastischer Prozess*  $x : \Theta \ni t \mapsto X(t)$  ist eine indizierte Menge reeller Zufallsvariablen  $X(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf der Indexmenge  $\Theta$ . Ein stochastischer Prozess  $x$  ist *mittelwertfrei*, wenn  $\mu_x \equiv 0$  erfüllt ist. Ein stochastischer Prozess  $x$  ist *schwach stationär*<sup>38</sup>, wenn sein Mittelwert und seine Varianz konstant sind,  $\mu_x := \mathcal{E}\{x(t)\} = \text{const}$ ,  $\sigma_x^2 := \mathcal{E}\{(x(t) - \mu_x)^2\} = \text{const}$ . Sei nun  $x$  ein schwach stationärer stochastischer Prozess. Dann hängt seine *Autokorrelationsfunktion*

$$R\{x\}(\tau) := \mathcal{E}\{x(t_0)x(t_0 + \tau)\}$$

nur von  $\tau$  ab, nicht aber vom Bezugsindex  $t_0$ , und ist eine gerade Funktion,  $R\{x\}(\tau) = R\{x\}(-\tau)$ . Die *mittlere Leistung*  $P(x) := \mathcal{E}\{(x(t_0))^2\}$  von  $x$  berechnet sich zu

$$P(x) = R\{x\}(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2.$$

Das *Leistungsdichtespektrum*  $S\{x\} := \mathcal{F}\{R\{x\}\}$  von  $x$  beschreibt gemäß dem *Wiener-Khintchine-Theorem*<sup>39,40</sup> (Wiener, 1930; Khinchin, 1934) die Verteilung der Leistung von  $x$  im Frequenzbereich.

**Antwort linearer zeitinvarianter Filter** Bei Anwendung eines stabilen linearen zeitinvarianten Filters mit der Impulsantwort  $g$  auf eine Musterfunktion eines schwach stationären stochastischen Prozesses  $x$  ist das Ausgangssignal  $y = g x$  ebenfalls ein Zufallssignal mit dem Erwartungswert

$$\mathcal{E}\{y(t)\} = \mathcal{E}\{g x(t)\} = \mu_x \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau. \quad (\text{A.40a})$$

Die Faltung und die Bildung des Erwartungswertes dürfen also vertauscht werden. Die Autokorrelationsfunktion des Filterausgangs kann durch Faltung der Autokorrelationsfunktion von  $x$  mit der *Impulsautokorrelationsfunktion*

$$r\{g\}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + t) g(\tau) d\tau \quad (\text{A.40b})$$

des Filters berechnet werden:

$$R\{y\}(\tau) = \mathcal{E}\{y(t_0)y(t_0 + \tau)\} = r\{g\} R\{x\}(\tau), \quad t_0 \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.40c})$$

Die Fourier-Transformierte von  $r\{g\}$  wird *Energiedichtespektrum* genannt und entspricht seinem quadrierten Betragsgang. Daher kann das Leistungsdichtespektrum des Filterausgangs nach (A.7a) als punktweises Produkt

$$S\{y\} = |\mathcal{F}\{g\}|^2 \cdot S\{x\} \quad (\text{A.40d})$$

aus dem Energiedichtespektrum des Filters und dem Leistungsdichtespektrum des Zufallssignals angeschrieben werden.

<sup>38</sup>In der Literatur sind für schwach stationär auch die Begriffe *stationär im weiteren Sinne* (engl. *wide-sense stationary*, oft abgekürzt mit *WSS*) oder *kovarianz-stationär* gebräuchlich.

<sup>39</sup>Norbert Wiener (1894-1964)

<sup>40</sup>Alexander Jakovlevich Khintchine (1894-1959)

## A.4. Spezielle Funktionen

### A.4.1. Gamma-Funktion und verwandte Funktionen

Die folgenden Eigenschaften der Gamma-Funktion sowie einiger mit ihr verwandter Funktionen sind beispielsweise in Erdélyi (1953a); Tricomi (1955); Abramowitz und Stegun (1965); Magnus et al. (1966); Nikiforov und Uvarov (1988) dargestellt.

**Gamma-Funktion** Die *Euler'sche*<sup>41</sup> *Gamma-Funktion* ist für  $z \notin \mathbb{Z}^-$  als

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau \quad (\text{A.41})$$

definiert. Sie genügt der Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  und kann für natürliche Argumente  $n \in \mathbb{N}$  als Fakultät

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.42})$$

angeschrieben werden. Die Gamma-Funktion genügt der *Legendre'schen Verdopplungsformel*

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z+1/2) \quad (\text{A.43})$$

und ermöglicht die Definition des *Binomialkoeffizienten* als

$$\binom{x}{y} := \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1) \Gamma(x-y+1)}. \quad (\text{A.44})$$

**Steigende und fallende Faktorielle** Die *steigende Faktorielle*  $t^{\overline{n}}$  (in der Literatur oft auch als *Pochhammer-Symbol*<sup>42</sup>  $(t)_n$  bezeichnet) und die *fallende Faktorielle*  $t^{\underline{n}}$  sind als

$$t^{\overline{n}} := \frac{\Gamma(t+n)}{\Gamma(t)}, \quad t^{\underline{n}} := \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-n)}. \quad (\text{A.45})$$

definiert.

**Beta-Funktion** Die *Euler'sche Beta-Funktion* lautet

$$B(x, y) := \int_0^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (\text{A.46})$$

die *unvollständige Beta-Funktion*

$$B_t(x, y) := \int_0^t \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau = \frac{1}{\Gamma(x+y-1)} \int_0^{\Gamma t} \tau^{x-1} (\Gamma - \tau)^{y-1} d\tau, \quad (\text{A.47})$$

und die *regularisierte unvollständige Beta-Funktion*

$$I_t(x, y) := \frac{B_t(x, y)}{B(x, y)}. \quad (\text{A.48})$$

<sup>41</sup>Leonhard Euler (1707-1783)

<sup>42</sup>Leo August Pochhammer (1841-1920)

Für natürliche Argumente  $m, n \in \mathbb{N}$  kann die Beta-Funktion nach (A.46) und (A.42) als Quotient von Fakultäten angeschrieben werden:

$$B(m+1, n+1) = \frac{m! n!}{(m+n+1)!}. \quad (\text{A.49})$$

Für identische Argumente  $x = y$  vereinfacht sich (A.46) mit (A.43) zu

$$B(x, x) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(x)}{2^{2x-1} \Gamma(x+1/2)}. \quad (\text{A.50})$$

**Digamma- und Trigamma-Funktion** Die *Digamma-Funktion* ist die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Psi := \frac{\Gamma'}{\Gamma} = (\ln \Gamma)'. \quad (\text{A.51})$$

Für  $z \notin \mathbb{Z}^-$  kann die Digamma-Funktion als Reihe

$$\Psi(z+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{z+k} \right) \quad (\text{A.52})$$

mit  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right) \approx 0,5772$  der *Euler-Mascheroni-Konstante* dargestellt werden und genügt der Rekursionseigenschaft

$$\Psi(z+n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z+k} + \Psi(z). \quad (\text{A.53})$$

Die Ableitung der Digamma-Funktion wird auch als *Trigamma-Funktion* bezeichnet. Sie besitzt die Reihendarstellung

$$\Psi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \quad (\text{A.54})$$

#### A.4.2. Bessel-Funktion erster Gattung und Kummer'sche M-Funktion

Für die folgenden Eigenschaften der Bessel-Funktion erster Gattung sowie der Kummer'schen M-Funktion siehe Erdélyi (1953a,b); Abramowitz und Stegun (1965); Magnus et al. (1966); Nikiforov und Uvarov (1988); Whittaker und Watson (1927).

**Bessel-Funktion erster Gattung** Die *Bessel-Funktion erster Gattung der Ordnung*  $\nu$  ist für  $z \in \mathbb{C}$  als

$$J_{\nu}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\nu+1+k) k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k+\nu} \quad (\text{A.55})$$

definiert. Sie hat unendlich viele einfache positive Nullstellen  $j_{\nu,i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ :  $0 < j_{\nu,0} < j_{\nu,1} < \dots$ . Die Nullstellen sind streng monoton steigend in der Ordnung  $\nu$  der Bessel-Funktion:  $j_{\nu,i} < j_{\kappa,i}$  für  $\nu < \kappa$ .

**Kummer'sche M-Funktion** Die *Kummer'sche*<sup>43</sup> *M-Funktion*

$$M(a, b, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\bar{k}} z^k}{b^{\bar{k}} k!} \quad (\text{A.56})$$

wird in dieser Arbeit als Funktion des dritten Arguments  $z \in \mathbb{C}$  aufgefasst, während die ersten zwei Argumente als Parameter betrachtet werden. Die Kummer'sche M-Funktion genügt der *Kummer'schen Differentialgleichung*

$$f'' + (b/z - 1) f' - a f/z = 0. \quad (\text{A.57})$$

Der Funktionswert an der Stelle 0 beträgt stets

$$M(a, b, 0) = 1. \quad (\text{A.58})$$

Die n-te Ableitung nach z lautet

$$M^{(n)}(a, b, z) = \frac{a^{\bar{n}}}{b^{\bar{n}}} M(a + n, b + n, z). \quad (\text{A.59})$$

Die Kummer'sche M-Funktion besitzt die Integraldarstellung

$$M(a, b, z) = \frac{2^{1-b} e^{\frac{z}{2}}}{B(b-a, a)} \int_{-1}^1 w^{(a-1, b-a-1)}(\tau) e^{-\frac{z}{2} \tau} d\tau, \quad (\text{A.60})$$

die Symmetrieeigenschaft

$$M(a, b, z) = e^z M(b-a, b, -z) \quad (\text{A.61})$$

und für  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $-\pi < \arg z < \pi$ , die asymptotische Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{M(a, b, z)}{\Gamma(b)} &= \frac{e^{1/\pi a \operatorname{sign} \Im(z)}}{\Gamma(b-a) z^a} \sum_{k=0}^P \frac{(-1)^k a^{\bar{k}} (a-b+1)^{\bar{k}}}{k! z^k} + \mathcal{O}(|z|^{-(a+P+1)}) \\ &+ \frac{e^z}{\Gamma(a) z^{b-a}} \sum_{k=0}^Q \frac{(b-a)^{\bar{k}} (1-a)^{\bar{k}}}{k! z^k} + \mathcal{O}(|e^z z^{-(b-a+Q+1)}|). \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Sie hängt für  $b = 2a$  wie folgt mit der Bessel-Funktion erster Gattung zusammen:

$$M(a, 2a, 2iz) = e^{1/2 z} \frac{\Gamma(a+1/2)}{(z/2)^{a-1/2}} J_{a-1/2}(z). \quad (\text{A.63})$$

### A.4.3. Jacobi- und Legendre-Polynome

Ausführliche Einführungen in die orthogonalen Jacobi-Polynome und andere orthogonale Polynome sind in Szegő (1959); Erdélyi (1953b); Tricomi (1955) zu finden. Eine Übersicht über wichtige Formeln findet sich in Abramowitz und Stegun (1965).

<sup>43</sup>Ernst Eduard Kummer (1810-1893)

**Jacobi-Polynome und ihre Norm** Die *orthogonalen Jacobi-Polynome*  $P_i^{(\alpha,\beta)}$  und ihre durch (A.30) induzierte Norm besitzen folgende explizite Darstellungen:

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(\tau) := \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k}}{2^i} \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} (1-\tau)^{i-k} (\tau+1)^k, \quad (\text{A.64a})$$

$$\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(i+\alpha+1) \Gamma(i+\beta+1)}{i! (2i+\alpha+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1)}. \quad (\text{A.64b})$$

Aus (A.31) und (A.64a) folgt, dass die Jacobi-Polynome auf dem Intervall  $[-1, 1]$  als Linearkombinationen von Gewichtsfunktionen dargestellt werden können:

$$\tau \in [-1, 1]: \quad P_i^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k}}{2^i} \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} w^{(i-k,k)}(\tau). \quad (\text{A.65})$$

Eine weitere Darstellung der Jacobi-Polynome ist

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{\Gamma(\alpha+i+1) \Gamma(\alpha+\beta+i+j+1)}{2^j i! \Gamma(\alpha+\beta+i+1) \Gamma(\alpha+j+1)} (\tau-1)^j. \quad (\text{A.66})$$

Die Jacobi-Polynome nullten und ersten Grades lauten

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(\tau) = 1, \quad P_1^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \frac{\alpha+\beta+2}{2} \tau + \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (\text{A.67})$$

Die Norm von  $P_0^{(\alpha,\beta)}$  kann unter Verwendung der Euler'schen Beta-Funktion (A.46) als

$$\|P_0^{(\alpha,\beta)}\|^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) \quad (\text{A.68})$$

dargestellt werden. Im wichtigen Sonderfall  $\alpha = \beta$  ist die Gewichtsfunktion (A.31) der Jacobi-Polynome achsensymmetrisch zu 0:  $w^{(\alpha,\alpha)}(\tau) = w^{(\alpha,\alpha)}(-\tau)$ . Aus (A.64b) und (A.43) folgt in diesem Fall die Norm der Jacobi-Polynome als

$$\|P_i^{(\alpha,\alpha)}\|^2 = \frac{\sqrt{\pi} (2\alpha+i+1)^{\bar{i}} \Gamma(i+\alpha+1)}{4^i i! \Gamma(i+\alpha+3/2)}, \quad \|P_0^{(\alpha,\alpha)}\|^2 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)} \quad (\text{A.69})$$

mit dem Pochhammer-Symbol  $x^{\bar{n}}$  nach (A.45).

**Legendre-Polynome** Für  $\alpha = \beta = 0$ , also bei konstanter Gewichtung  $w^{(\alpha,\beta)}(\tau) = 1$  für  $\tau \in [-1, 1]$ , heißen die Jacobi-Polynome auch *Legendre-Polynome*<sup>44</sup>. Setzt man  $\alpha = \beta = 0$  in (A.64) ein, so ergibt sich

$$P_i(\tau) := \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k}}{2^{i-1}} \binom{i}{k} (1-\tau)^{i-k} (\tau+1)^k, \quad \|P_i\|^2 = \frac{2}{2i+1}. \quad (\text{A.70})$$

<sup>44</sup>Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

**Symmetrieeigenschaften der Jacobi-Polynome und der Gewichtsfunktion** Aus der Definition (A.31) folgt die Symmetrie der Gewichtsfunktion in den Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$ ,  $\beta$ :

$$\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)}(-\tau) = \mathbf{w}^{(\beta,\alpha)}(\tau). \quad (\text{A.71})$$

Die Jacobi-Polynome weisen folgende Symmetrie in  $\alpha$  und  $\beta$  auf:

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(-\tau) = (-1)^i P_i^{(\beta,\alpha)}(\tau). \quad (\text{A.72a})$$

Hieraus folgt, dass  $P_i^{(\alpha,\alpha)}$  für gerade  $i$  eine gerade Funktion ist und für ungerade  $i$  eine ungerade Funktion:

$$P_i^{(\alpha,\alpha)}(\tau) = \begin{cases} P_i^{(\alpha,\alpha)}(-\tau), & i \text{ gerade,} \\ -P_i^{(\alpha,\alpha)}(-\tau), & i \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (\text{A.72b})$$

Aus (A.66) und (A.72a) folgen die Werte der Jacobi-Polynome an den Rändern des Orthogonalitätsintervalls zu

$$P_i^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{i+\alpha}{i}, \quad P_i^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^i \binom{i+\beta}{i}. \quad (\text{A.73})$$

Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  in (A.64b) liefert die Symmetrie der Norm der Jacobi-Polynome

$$\|P_i^{(\alpha,\beta)}\| = \|P_i^{(\beta,\alpha)}\|. \quad (\text{A.74})$$

**Ableitungen der Jacobi-Polynome** Die Jacobi-Polynome genügen der *Rodrigues-Formel*<sup>45</sup>

$$(\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)})^{(n)} = (-2)^n n! \mathbf{w}^{(\alpha-n,\beta-n)} \cdot P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}. \quad (\text{A.75})$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}^{(\alpha+i,\beta+i)})^{(i+n)} &= (-2)^i i! (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot P_i^{(\alpha,\beta)})^{(n)} \\ &= (-2)^{i+n} (i+n)! \mathbf{w}^{(\alpha-n,\beta-n)} \cdot P_{i+n}^{(\alpha-n,\beta-n)} \end{aligned}$$

und somit der für diese Arbeit wichtige Ausdruck für die  $n$ -te Ableitung des punktweisen Produkts aus Gewichtsfunktion und Jacobi-Polynom nach dem Argument:

$$(\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot P_i^{(\alpha,\beta)})^{(n)} = \frac{(-2)^n (i+n)!}{i!} \mathbf{w}^{(\alpha-n,\beta-n)} \cdot P_{i+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}. \quad (\text{A.76})$$

Die  $n$ -fache Ableitung der Jacobi-Polynome nach dem Argument beträgt

$$(P_i^{(\alpha,\beta)})^{(n)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha + \beta + i + 1)_n P_{i-n}^{(\alpha+n,\beta+n)}, & n \leq i, \\ 0, & n > i. \end{cases} \quad (\text{A.77})$$

---

<sup>45</sup>Olinde Rodrigues (1795-1851)

Die Ableitungen von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  nach  $\alpha$  bzw.  $\beta$  lauten für  $\tau \in [-1, 1]$  (Fröhlich, 1994)

$$\frac{\partial P_i^{(\alpha, \beta)}}{\partial \alpha} = \sum_{k=0}^i d_{i,k}^{(\alpha, \beta)} \frac{\Gamma(\beta + 1 + i)}{\Gamma(\beta + 1 + k)} P_k^{(\alpha, \beta)}, \quad (\text{A.78a})$$

$$\frac{\partial P_i^{(\alpha, \beta)}}{\partial \beta} = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} d_{i,k}^{(\alpha, \beta)} \frac{\Gamma(\alpha + 1 + i)}{\Gamma(\alpha + 1 + k)} P_k^{(\alpha, \beta)} \quad (\text{A.78b})$$

mit

$$d_{i,k}^{(\alpha, \beta)} := \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{\alpha + \beta + i + j}, & i > 0 \wedge k = i, \\ \frac{1}{i-k} \frac{\alpha + \beta + 1 + 2k}{\alpha + \beta + 1 + k + i} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1 + k)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1 + i)}, & i > 0 \wedge k < i, \\ 0, & i = k = 0. \end{cases} \quad (\text{A.78c})$$

**Nullstellen** Die  $j$ -te Nullstelle,  $j \in \{1, \dots, i\}$ , des Jacobi-Polynoms  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  wird mit  $p_{i,j}^{(\alpha, \beta)}$  bezeichnet, diejenige der Ableitung  $(P_i^{(\alpha, \beta)})'$  mit  $p_{i,j}'^{(\alpha, \beta)}$ ,  $j \in \{1, \dots, i-1\}$ . Die Nullstellen von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  sind einfach und liegen innerhalb des offenen Intervalls  $(-1, 1)$ :

$$-1 < p_{i,1}^{(\alpha, \beta)} < \dots < p_{i,i}^{(\alpha, \beta)} < 1. \quad (\text{A.79})$$

Daher befindet sich nach dem Satz von Rolle<sup>46</sup> (Heuser, 2001) zwischen je zwei Nullstellen von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$ ,  $i > 1$ , genau eine Nullstelle der Ableitung  $(P_i^{(\alpha, \beta)})'$ :

$$i > 1: \quad p_{i,j}^{(\alpha, \beta)} < p_{i,j}'^{(\alpha, \beta)} < p_{i,j+1}^{(\alpha, \beta)}, \quad j \in \{1, \dots, i-1\}. \quad (\text{A.80})$$

Hieraus folgt insbesondere, dass die Nullstellen von  $(P_i^{(\alpha, \beta)})'$  durch die Nullstellen von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  beschränkt sind:

$$i > 1: \quad p_{i,j}'^{(\alpha, \beta)} \in (p_{i,1}^{(\alpha, \beta)}, p_{i,i}^{(\alpha, \beta)}), \quad j \in \{1, \dots, i-1\}. \quad (\text{A.81})$$

Die Nullstellen aufeinanderfolgender Jacobi-Polynome trennen sich gegenseitig:

$$p_{i+1,j}^{(\alpha, \beta)} < p_{i,j}^{(\alpha, \beta)} < p_{i+1,j+1}^{(\alpha, \beta)}, \quad j \in \{1, \dots, i\}. \quad (\text{A.82})$$

Daher ist die Folge der größten Nullstellen (bei festgehaltenen Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha, \beta$ ) streng monoton steigend:

$$p_{i,i}^{(\alpha, \beta)} > p_{j,j}^{(\alpha, \beta)}, \quad j \in \{1, \dots, i-1\}. \quad (\text{A.83})$$

Wegen (A.73), (A.81) und (A.83) sind alle Jacobi-Polynome  $P_j^{(\alpha, \beta)}$ ,  $j > 0$ , ab der letzten Nullstelle von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$ ,  $i \geq j$ , streng monoton steigend und vor der ersten Nullstelle von  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  je nach Polynomgrad streng monoton steigend oder fallend:

$$i \geq j > 0: \quad (P_j^{(\alpha, \beta)})'(\tau) \Big|_{\tau \geq p_{i,i}^{(\alpha, \beta)}} > 0, \quad (-1)^{j+1} (P_j^{(\alpha, \beta)})'(\tau) \Big|_{\tau \leq p_{i,1}^{(\alpha, \beta)}} > 0. \quad (\text{A.84})$$

<sup>46</sup>Michel Rolle (1652-1719)

Aus (A.73), (A.82) und (A.84) folgt insbesondere

$$i \geq j > 0: \quad P_j^{(\alpha, \beta)}(\tau) \Big|_{\tau \geq p_{i,i}^{(\alpha, \beta)}} > 0, \quad (-1)^j P_j^{(\alpha, \beta)}(\tau) \Big|_{\tau \leq p_{i,1}^{(\alpha, \beta)}} > 0. \quad (\text{A.85})$$

Eine Konsequenz aus der Symmetrie (A.72a) der Jacobi-Polynome ist, dass Vertauschen von  $\alpha$  und  $\beta$  zur Spiegelung der Nullstellen an 0 führt:

$$p_{i,j}^{(\alpha, \beta)} = -p_{i, i+1-j}^{(\beta, \alpha)}. \quad (\text{A.86a})$$

Insbesondere folgt für  $i = 1$  zusammen mit (A.67)

$$p_{1,1}^{(\alpha, \beta)} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 2} = -p_{1,1}^{(\beta, \alpha)}, \quad \text{sign } p_{1,1}^{(\alpha, \beta)} = \text{sign}(\beta - \alpha). \quad (\text{A.86b})$$

Der Wert des Jacobi-Polynoms zweiten Grades an der Nullstelle des Jacobi-Polynoms ersten Grades beträgt

$$P_2^{(\alpha, \beta)}(p_{1,1}^{(\alpha, \beta)}) = -\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(\alpha + \beta + 4)}{2(\alpha + \beta + 2)^2}. \quad (\text{A.87})$$



# B. Herleitung von Eigenschaften algebraischer Ableitungsschätzer

## B.1. Approximationstheoretische Eigenschaften

### B.1.1. Polynomiale Approximation mit gleitendem Zeitfenster

Zur Erweiterung der kontinuierlichen polynomialen Approximation aus Anhang A.2.3 vom Orthogonalitätsintervall  $[-1, 1]$  der Jacobi-Polynome auf das *gleitende Zeitfenster*

$$\mathcal{J}_T(t) := [t - T, t] \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R}^+$$

werden zunächst folgende Variablentransformationen eingeführt:

1. Die Funktion  $\phi_{T,t}$ , die das Orthogonalitätsintervall  $[-1, 1]$  der Jacobi-Polynome auf  $\mathcal{J}_T(t)$  abbildet, sowie ihre Inverse  $\phi_{T,t}^{-1}$ :

$$\phi_{T,t}(\tau) := t + \frac{\tau - 1}{2}T, \quad \phi_{T,t}^{-1}(\tau) = 1 + 2\frac{\tau - t}{T}, \quad (\text{B.1a})$$

2. die Funktion  $\theta_T$ , die den Punkt  $t - \tau$  auf den zugehörigen Punkt von  $[-1, 1]$  abbildet, sowie ihre Inverse  $\theta_T^{-1}$ :

$$\theta_T(\tau) := \phi_{T,t}^{-1}(t - \tau) = 1 - \frac{2}{T}\tau, \quad \theta_T^{-1}(\tau) = \frac{T}{2}(1 - \tau). \quad (\text{B.1b})$$

Zur Entwicklung einer Funktion  $f$  auf  $\mathcal{J}_T(t)$  in eine verallgemeinerte Fourier-Reihe auf Basis der Jacobi-Polynome genügt es dann, in (A.32) bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $c_i$  die Funktion  $f$  durch  $f \circ \phi_{T,t}$  zu ersetzen, um weiterhin das innere Produkt (A.30) verwenden zu können und die Reihe bei  $\phi_{T,t}^{-1}(\tau)$  anstelle von  $\tau$  auszuwerten:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \frac{P_i^{(\alpha,\beta)} \circ \phi_{T,t}^{-1}}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|} \quad \text{mit } c_i := \frac{\langle f \circ \phi_{T,t}, P_i^{(\alpha,\beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|}. \quad (\text{B.2})$$

Hierbei bezeichnet  $f \circ g(\tau) := f(g(\tau))$  die Funktionsverkettung. Die Bestapproximation  $\hat{f}_N$  von  $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{J}_T(t))$  bezüglich  $\pi_N$  lautet daher

$$\hat{f}_N(\tau) = \langle f \circ \phi_{T,t}, R_{N, \phi_{T,t}^{-1}(\tau)}^{(\alpha,\beta)} \rangle, \quad (\text{B.3a})$$

und der Wert von  $\hat{f}_N$  bei  $t - \tau$  kann mit Hilfe von  $\theta_T$  als

$$\hat{f}_N(t - \tau) = \langle f \circ \phi_{T,t}, R_{N, \vartheta}^{(\alpha,\beta)} \rangle \quad \text{mit } \vartheta := \theta_T(\tau) \quad (\text{B.3b})$$

dargestellt werden.

### B.1.2. Genauigkeitsgrad und Schätzverzögerung

Für  $x^{(n)} \in \pi_N$ , also  $x \in \pi_{n+N}$ , liefert die Anwendung der Reproduktionseigenschaft (A.36) von  $R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  auf (3.1)

$$\hat{x}^{(n)}(t) = x^{(n)} \circ \phi_{T,t}(\vartheta) = x^{(n)}\left(t - \frac{1-\vartheta}{2}T\right). \quad (\text{B.4})$$

Wenn  $\vartheta$  eine Nullstelle  $p_{N+1,k}^{(\alpha,\beta)}$  des Jacobi-Polynoms  $P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}$  ist, folgt aus der Definition (A.35) von  $R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  unmittelbar  $R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = R_{N+1,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$ , so dass (B.4) sogar für  $x \in \pi_{n+N+1}$  gilt. Für  $N = 0$  ist  $R_{0,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  wegen  $P_0^{(\alpha,\beta)} \equiv 1$  unabhängig von  $\vartheta$ . Jedoch gilt  $R_{0,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = R_{1,p_{1,1}^{(\alpha,\beta)}}$ , so dass (B.4) auch in diesem Fall mit  $\vartheta = p_{1,1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$  für  $x \in \pi_{n+1}$  gilt.

Zusammengefasst lauten der Genauigkeitsgrad  $\gamma$  und die Schätzverzögerung  $\Delta t$  des algebraischen Ableitungsschätzers (3.1)

$$\gamma = \begin{cases} n + N + 1, & N = 0 \vee \vartheta = p_{N+1,k}^{(\alpha,\beta)}, \\ n + N, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \Delta t = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}T, & N = 0, \\ \frac{1-\vartheta}{2}T, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Für  $N = 0$  führt eine Erhöhung von  $\alpha$  zu einer Vergrößerung der Schätzverzögerung, während eine Erhöhung von  $\beta$  die Schätzverzögerung verringert:

$$\left. \frac{\partial \Delta t}{\partial \alpha} \right|_{N=0} = \frac{\beta+1}{(\alpha+\beta+2)^2} T > 0, \quad \left. \frac{\partial \Delta t}{\partial \beta} \right|_{N=0} = -\frac{\alpha+1}{(\alpha+\beta+2)^2} T < 0. \quad (\text{B.6})$$

### B.1.3. Approximationsfehler

Sei  $f \in \mathcal{C}^{m+1}([-1, 1])$  und  $\hat{f}$  die Bestapproximation von  $f$  bezüglich  $\pi_N$ . Der Approximationsfehler  $\tilde{f} := f - \hat{f}$  auf  $[-1, 1]$  beträgt nach (A.32) und (A.35)

$$\tilde{f}(\vartheta) = \sum_{i=\bar{N}+1}^{\infty} \langle f, P_i^{(\alpha,\beta)} \rangle \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2}, \quad \bar{N} := \begin{cases} N + 1, & \vartheta \in \{p_{N+1,l}^{(\alpha,\beta)}\}, \\ N, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

mit  $p_{N+1,l}^{(\alpha,\beta)}$  den Nullstellen von  $P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}$ . Nach dem Taylor'schen Satz kann  $f$  auf  $[-1, 1]$  als

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (\tau-1)^k + \int_{-1}^{\tau} \frac{f^{(p+1)}(\theta)}{p!} (\tau-\theta)^p d\theta, \quad p \in \{0, \dots, m\} \quad (\text{B.8})$$

dargestellt werden (Forster, 2008; Stroud, 1974). Mit Hilfe der Funktion<sup>47</sup>

$$\tau \mapsto (\tau - \theta)_+^p := \begin{cases} (\tau - \theta)^p, & \tau > \theta, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

<sup>47</sup>Die Funktion (B.9) ist für den Satz von Peano (nach Giuseppe Peano, 1858-1932) wesentlich, welcher zur Fehlerabschätzung bei der numerischen Integration genutzt wird (Forster, 2008; Stroud, 1974).

kann das Restglied in (B.8) als Integral mit konstanten Grenzen ausgedrückt werden:

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^p \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (\tau-1)^k + \int_{-1}^1 \frac{f^{(p+1)}(\theta)}{p!} (\tau-\theta)_+^p d\theta. \quad (\text{B.10})$$

Die Projektion von  $f$  auf das Jacobi-Polynom  $i$ -ten Grades kann daher als

$$\langle f, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle = \sum_{k=i}^p \frac{f^{(k)}(1) \langle (\tau-1)^k, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{k!} + \int_{-1}^1 \frac{f^{(p+1)}(\zeta) \langle (\tau-\zeta)_+^p, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{p!} d\zeta \quad (\text{B.11})$$

dargestellt werden. Hierbei wurde ausgenutzt, dass  $P_i^{(\alpha, \beta)}$  zu jedem Polynom niedrigeren Grades orthogonal ist (Szegő, 1959; Tricomi, 1955) und durch die Funktion  $(\tau-\theta)_+^p$  das innere Produkt und die Integration vertauscht werden können. Für  $i \geq \bar{N}+1$  und  $p = \max\{\bar{N}, m\}$  verschwindet zusätzlich die Summe in (B.11), so dass dann der Approximationsfehler (B.7) zu

$$\tilde{f}(\vartheta) = \sum_{i=\bar{N}+1}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{f^{(p+1)}(\zeta) \langle (\tau-\zeta)_+^p, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{p!} d\zeta \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} \quad (\text{B.12})$$

umgeformt werden kann. Infolge (A.33) konvergiert die Reihe in (B.12) gleichmäßig, so dass Summation und Integration vertauscht werden dürfen:

$$\tilde{f}(\vartheta) = \int_{-1}^1 \frac{f^{(p+1)}(\zeta)}{p!} \sum_{i=\bar{N}+1}^{\infty} \frac{\langle (\tau-\zeta)_+^p, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta) d\zeta.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung kann  $\tilde{f}(\vartheta)$  auf  $[-1, 1]$  wie folgt abgeschätzt werden:

$$|\tilde{f}(\vartheta)| \leq \frac{\sup_{\xi \in [-1, 1]} |f^{(p+1)}(\xi)|}{p!} \int_{-1}^1 \left| \sum_{i=\bar{N}+1}^{\infty} \frac{\langle (\tau-\zeta)_+^p, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta) \right| d\zeta. \quad (\text{B.13})$$

Eine Übertragung von (B.13) auf das gleitende Zeitfenster  $\mathcal{J}_T(t)$  ist mit Hilfe der Variablentransformation (B.1a) einfach möglich. Für  $f \in \mathcal{C}^{m+1}(\mathcal{J}_T(t))$  kann so der Approximationsfehler  $\tilde{f} = f - \hat{f}_N$  auf  $\mathcal{J}_T(t)$  zu

$$|\tilde{f}(\vartheta)| \leq \left(\frac{T}{2}\right)^{p+1} \frac{\sup_{\xi \in \mathcal{J}_T(t)} |f^{(p+1)}(\xi)|}{p!} \int_{-1}^1 \left| \sum_{i=\bar{N}+1}^{\infty} \frac{\langle (\tau-\zeta)_+^p, P_i^{(\alpha, \beta)} \rangle}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta) \right| d\zeta \quad (\text{B.14})$$

mit  $\vartheta = \phi_{T,i}^{-1}(\theta)$  abgeschätzt werden. Die Fehlerordnung beträgt daher

$$\tilde{f}(\vartheta) = \mathcal{O}(T^{p+1}) \quad \text{für } T \rightarrow 0, \vartheta \in \mathcal{J}_T(t). \quad (\text{B.15})$$

## B.2. Zeitbereichseigenschaften

### B.2.1. Algebraische Ableitungsschätzer als FIR-Filter

Setzt man in die Schätzvorschrift (3.1) die Definition (A.30) des inneren Produkts ein, so erhält man

$$\hat{\chi}^{(n)}(t) = \int_{-1}^1 (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot \mathbf{R}_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})(\tau) (\chi^{(n)} \circ \phi_{T,t})(\tau) d\tau. \quad (\text{B.16})$$

Hierbei bezeichnet  $f \cdot g(\tau) := f(\tau)g(\tau)$  das punktweise Produkt zweier Funktionen. Nun wird in (B.16) die Substitution  $\bar{\tau} = \phi_{T,t}(\tau)$  durchgeführt und ausgenutzt, dass nach (B.1b)  $\phi_{T,t}^{-1}(\tau) = \theta_T(t - \tau)$  ist:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}^{(n)}(t) &= \int_{\phi_{T,t}(-1)}^{\phi_{T,t}(1)} \frac{2}{T} (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot \mathbf{R}_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) \circ \phi_{T,t}^{-1}(\bar{\tau}) \chi^{(n)}(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ &= \int_{t-T}^t \frac{2}{T} (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot \mathbf{R}_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) \circ \theta_T(t - \tau) \chi^{(n)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Faltungsprodukt

$$\hat{\chi}^{(n)} = \mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \chi^{(n)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := \frac{2}{T} (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot \mathbf{R}_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) \circ \theta_T. \quad (\text{B.17})$$

Algebraische Ableitungsschätzer können also als zeitkontinuierliche FIR-Filter interpretiert werden, die auf die zu schätzende Ableitung angewandt werden.

### B.2.2. Realisierbarkeit

Durch wiederholte partielle Integration kann (B.17) als

$$\hat{\chi}^{(n)} = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)}(t - \tau) \chi^{(n-1-k)}(\tau) \right]_{\tau=t-T}^t + (\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(n)} \chi \quad (\text{B.18})$$

dargestellt werden. Damit  $\chi$  in (B.18) nur in integrierter Form auftritt, müssen die Randterme unabhängig vom Verlauf von  $\chi$  verschwinden. Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$$(\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)}(0) = (\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)}(T) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (\text{B.19})$$

gilt. Aus (B.22a) folgt die  $k$ -te Ableitung von  $\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  als

$$(\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)} = (-1)^k \left( \frac{2}{T} \right)^{k+1} \sum_{i=0}^N \frac{\mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|\mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} (\mathbf{w}^{(\alpha,\beta)} \cdot \mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)})^{(k)} \circ \theta_T.$$

Dieser Ausdruck kann mit (A.76) zu

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)} &= \frac{2^{2k+1}}{T^{k+1}} \sum_{i=0}^N \frac{(i+k)! \mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{i! \|\mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} (\mathbf{w}^{(\alpha-k,\beta-k)} \cdot \mathbf{P}_{i+k}^{(\alpha-k,\beta-k)}) \circ \theta_T \\ &= \frac{2^{2k+1}}{T^{k+1}} \left( \mathbf{w}^{(\alpha-k,\beta-k)} \cdot \sum_{i=0}^N \frac{(i+1)^{\bar{k}} \mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|\mathbf{P}_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} \mathbf{P}_{i+k}^{(\alpha-k,\beta-k)} \right) \circ \theta_T \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

mit dem Pochhammer-Symbol  $(i+1)^{\bar{k}}$ , siehe (A.45), umgeschrieben werden. Um die in (B.19) geforderten Nullstellen der Impulsantwort und ihrer Ableitungen an den Randpunkten des Integrationsintervalls zu erzielen, wird daher

$$w^{(\alpha-k, \beta-k)}(-1) = w^{(\alpha-k, \beta-k)}(1) = 0 \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1$$

gefordert. Aus (A.31) wird ersichtlich, dass dies genau für  $\alpha, \beta > n-1$  gilt, so dass in diesem Fall auf der rechten Seite von (B.18) nur das Faltungsprodukt verbleibt.

### B.2.3. Impulsantwort

**Symmetrie der Impulsantwort** Vertauscht man in (B.17) die Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha$  und  $\beta$ , so folgt aus den Symmetrieeigenschaften (A.37) und (A.71) von  $R_{N, \vartheta}^{(\alpha, \beta)}$  und  $w^{(\alpha, \beta)}$  sowie  $\theta_T(T/2 + \tau) = -\theta_T(T/2 - \tau)$ :

$$\begin{aligned} g_{N, T, \vartheta}^{(\beta, \alpha)}\left(\frac{T}{2} + \tau\right) &= \frac{2}{T} w^{(\alpha, \beta)} \cdot R_{N, -\vartheta}^{(\alpha, \beta)}\left(-\theta_T\left(\frac{T}{2} + \tau\right)\right) \\ &= \frac{2}{T} w^{(\alpha, \beta)} \cdot R_{N, -\vartheta}^{(\alpha, \beta)}\left(\theta_T\left(\frac{T}{2} - \tau\right)\right) = g_{N, T, -\vartheta}^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{T}{2} - \tau\right). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

**Spezielle Darstellungen der Impulsantwort** Setzt man die Definition (A.35) von  $R_{N, \vartheta}^{(\alpha, \beta)}$  in (B.17) ein, so erhält man

$$g_{N, T, \vartheta}^{(\alpha, \beta)} = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} (w^{(\alpha, \beta)} \cdot P_i^{(\alpha, \beta)}) \circ \theta_T. \quad (\text{B.22a})$$

Für  $N = 0$  vereinfacht sich (B.22a) mit (A.67) und (A.68) zu

$$g_{0, T, \vartheta}^{(\alpha, \beta)}(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^\alpha (\Gamma - \tau)^\beta}{B(\alpha+1, \beta+1) T^{\alpha+\beta+1}}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.22b})$$

Hierbei bezeichnet  $B$  die Beta-Funktion, siehe Anhang A.4.1. Für  $\alpha = \beta$  vereinfacht sich (B.22b) mit (A.69) weiter zu

$$g_{0, T, \vartheta}^{(\alpha, \alpha)}(\tau) = \begin{cases} \left(\frac{2}{T}\right)^{2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+\frac{3}{2}) \tau^\alpha (\Gamma - \tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \sqrt{\pi}}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.22c})$$

mit  $\Gamma$  der Gamma-Funktion, siehe Anhang A.4.1. Mit Hilfe der Rodrigues-Formel (A.75) kann (B.22a) als Linearkombination von Ableitungen der Gewichtsfunktion dargestellt werden:

$$g_{N, T, \vartheta}^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{T} \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta)}{2^{i-1} i! \|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} (w^{(\alpha+i, \beta+i)})^{(i)} \circ \theta_T. \quad (\text{B.22d})$$

Einsetzen von (A.65) in (B.22a) liefert die Darstellung

$$g_{N, T, \vartheta}^{(\alpha, \beta)} = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} \frac{(-1)^{i-k} P_i^{(\alpha, \beta)}(\vartheta)}{2^{i-1} T \|P_i^{(\alpha, \beta)}\|^2} w^{(\alpha+i-k, \beta+k)} \circ \theta_T, \quad (\text{B.22e})$$

woraus mit  $w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T(\tau) = \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha+\beta} \tau^\alpha (T-\tau)^\beta$  der Ausdruck

$$g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\tau) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} \frac{(-1)^{i-k} 2^{\alpha+\beta+1} P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{T^{\alpha+\beta+1+i} \|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} \tau^{\alpha+i-k} (T-\tau)^{\beta+k} \quad (\text{B.22f})$$

folgt.

**Impulsantwort für ganzzahlige Gewichtsfunktionspotenzen** Für  $k \in \mathbb{N}$  ergibt der binomische Lehrsatz  $(T-\tau)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} T^j (-\tau)^{k-j}$ . Setzt man dies in (B.22f) ein, so erhält man nach Substitution der Summationsvariable  $j$  durch  $\beta+i-j$  und Vertauschen der Summationsreihenfolge

$$g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \Big|_{\beta \in \mathbb{N}}(\tau) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{T} \sum_{j=0}^{\beta+N} c_j \left(\frac{\tau}{T}\right)^{\alpha+j} \quad (\text{B.23})$$

mit den Koeffizienten

$$c_j = (-1)^j \sum_{m=R(j-\beta)}^N \frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|P_m^{(\alpha,\beta)}\|^2} \sum_{k=R(m-j)}^m C_{j,m,k} \quad (\text{B.24})$$

mit  $C_{j,m,k} := \binom{m+\alpha}{k} \binom{m+\beta}{m-k} \binom{\beta+k}{\beta+m-j}$  und  $R(x) := \max\{0, x\}$  der bei Null beginnenden Rampenfunktion. Für ganzzahlige Gewichtsfunktionspotenzen  $\alpha, \beta$  folgt aus (B.23) die  $n$ -te Ableitung von  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+\theta} = (k+\theta) T_s$  zu

$$(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}}^{(n)}(t_{k+\theta}) = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \sum_{i=0}^{\alpha+\beta+N-n} p_i k^i}{T_s^{n+1} L^{\alpha+\beta+N+1}}. \quad (\text{B.25a})$$

mit  $L := T/T_s$  und den Polynomkoeffizienten

$$p_i = \sum_{j=R(n-\alpha+i)}^{\beta+N} \binom{\alpha+j-n}{i} (\alpha+j)^n L^{\beta+N-j} c_j \theta^{\alpha-n-i+j} \quad (\text{B.25b})$$

mit  $c_j$  aus (B.24). Für  $\vartheta = Z_\vartheta/N_\vartheta$  folgt aus (A.64)

$$\frac{P_m^{(\alpha,\beta)}(Z_\vartheta/N_\vartheta)}{\|P_m^{(\alpha,\beta)}\|^2} = \frac{(2m+\alpha+\beta+1)}{2^{m+\alpha+\beta+1} N_\vartheta^m} \sum_{l=0}^m D_{m,l}$$

mit

$$D_{m,l} := (-1)^{m-l} \binom{m}{l} \binom{m+\alpha+\beta}{m+\alpha-l} (N_\vartheta - Z_\vartheta)^{m-l} (Z_\vartheta + N_\vartheta)^l \quad (\text{B.26})$$

und somit aus (B.24)

$$c_j = \frac{(-1)^j}{2^{\alpha+\beta+N+1} N_\vartheta^N} \sum_{m=R(j-\beta)}^N B_m \sum_{k=R(m-j)}^m C_{j,m,k} \sum_{l=0}^m D_{m,l}$$

mit

$$B_m := (2m + \alpha + \beta + 1) (2N_\vartheta)^{N-m}. \quad (\text{B.27})$$

Für  $\theta = Z_\theta/N_\theta$  liefert dann (B.25b)

$$p_i = \frac{\sum_{j=\mathcal{R}(n-\alpha+i)}^{\beta+N} A_{i,j} \sum_{m=\mathcal{R}(j-\beta)}^N B_m \sum_{k=\mathcal{R}(m-j)}^m C_{j,m,k} \sum_{l=0}^m D_{m,l}}{2^{\alpha+\beta+N+1} N_\vartheta^N N_\theta^{\alpha+\beta+N-n-i}}$$

mit

$$A_{i,j} := (-1)^j \binom{\alpha+j-n}{i} (\alpha+j)^n (LN_\theta)^{\beta+N-j} Z_\theta^{\alpha-n-i+j}. \quad (\text{B.28})$$

Daher lautet (B.25a) dann

$$\left( g_{N,T,Z_\vartheta/N_\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}}^{(n)} (t_{k+Z_\theta/N_\theta}) = \frac{\sum_{i=0}^{\alpha+\beta+N-n} q_i k^i}{T_s^{n+1} L^{\alpha+\beta+N+1} N_\theta^{\alpha+\beta+N-n} (2N_\vartheta)^N} \quad (\text{B.29a})$$

mit den Polynomkoeffizienten

$$q_i := N_\theta^i \sum_{j=\mathcal{R}(n-\alpha+i)}^{\beta+N} A_{i,j} \sum_{m=\mathcal{R}(j-\beta)}^N B_m \sum_{k=\mathcal{R}(m-j)}^m C_{j,m,k} \sum_{l=0}^m D_{m,l}. \quad (\text{B.29b})$$

**Maximum der Impulsantwort für  $N = 0$**  Die  $k$ -te Zeitableitung von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  kann mit (B.20), (A.68), (B.1b) und (A.31) für  $\alpha, \beta > k - 1$  als

$$\left( g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)^{(k)} (\tau) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k) \tau^{\alpha-k} (T-\tau)^{\beta-k} P_k^{(\alpha-k,\beta-k)} (1-2\tau/T)}{2^k T^{\alpha+\beta-k+1} B(\alpha+1,\beta+1)}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.30a})$$

angeschrieben werden. Dies vereinfacht sich für  $k = 1$ , also  $\alpha, \beta > 0$ , mit (A.67) zu

$$\left( g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)^{(1)} (\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^{\alpha-1} (T-\tau)^{\beta-1} (\alpha(T-\tau) - \beta\tau)}{2 T^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1,\beta+1)}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.30b})$$

und im Speziellen für  $\alpha = \beta$  zu

$$\left( g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)} \right)^{(1)} (\tau) = \begin{cases} \frac{4^\alpha \alpha \Gamma(\alpha + \frac{3}{2}) \tau^{\alpha-1} (T-\tau)^{\alpha-1} (T-2\tau)}{T^{2\alpha+1} \Gamma(\alpha+1) \sqrt{\pi}}, & \tau \in [0, T], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.30c})$$

Die einzige Nullstelle von  $\left( g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \right)^{(1)}$  innerhalb von  $(0, T)$  ist  $\frac{\alpha T}{\alpha+\beta}$ . Daher lauten die Maxima von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  bzw.  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$

$$\max_{\tau} g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} (\tau) = g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \left( \frac{\alpha T}{\alpha + \beta} \right) = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha + \beta)^{\alpha+\beta} B(\alpha + 1, \beta + 1) T}, \quad (\text{B.31a})$$

$$\max_{\tau} g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)} (\tau) = g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)} \left( \frac{T}{2} \right) = \frac{2 \Gamma(\alpha + \frac{3}{2})}{T \Gamma(\alpha + 1) \sqrt{\pi}}. \quad (\text{B.31b})$$

Die Impulsantwort  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  ist auf  $\left(0, \frac{\alpha T}{\alpha+\beta}\right)$  streng monoton steigend, auf  $\left[0, \frac{\alpha T}{\alpha+\beta}\right]$  stetig und somit dort invertierbar. Für  $\alpha = \beta$  kann die Inverse analytisch bestimmt werden. Vergleicht man (B.22c) mit (B.31b), so kann  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$  auf  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  auch als

$$g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}(\tau) \Big|_{\tau \in [0, T/2]} = g_{\max} \left(\frac{2}{T}\right)^{2\alpha} (f(\tau))^\alpha \quad \text{mit } f(\tau) := \tau(T-\tau), \quad g_{\max} := g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}\left(\frac{T}{2}\right)$$

angeschrieben werden. Die Inverse von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$  auf  $\left[0, \frac{T}{2}\right]$  lautet daher

$$\left(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}\right)^{-1}(\zeta) = \frac{T}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{g_{\max}}\right)^{1/\alpha}}\right), \quad \zeta \in [0, \xi_0]. \quad (\text{B.32a})$$

Dies kann leicht auf ein  $p$ -faches von  $g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}$ ,  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , verallgemeinert werden:

$$\left(p g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}\right)^{-1}(\zeta) = \frac{T}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta}{p g_{\max}}\right)^{1/\alpha}}\right), \quad \zeta \in \begin{cases} [0, p g_{\max}], & p > 0, \\ [p g_{\max}, 0], & p < 0. \end{cases} \quad (\text{B.32b})$$

## B.2.4. Sprungantwort

Die Sprungantwort  $h_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}/s$  kann nach (B.22d) als

$$h_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{T} \left( \frac{2}{\|P_0^{(\alpha,\beta)}\|^2} \frac{w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^i P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{2^{i-1} i! \|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} \frac{(w^{(\alpha+i,\beta+i)})^{(i)} \circ \theta_T}{s} \right) \quad (\text{B.33})$$

dargestellt werden. Für  $i \geq 1$  liefert die Rodrigues-Formel (A.75)

$$\begin{aligned} \frac{(w^{(\alpha+i,\beta+i)})^{(i)} \circ \theta_T}{s} &= -\frac{T}{2} (w^{(\alpha+i,\beta+i)})^{(i-1)} \circ \theta_T \\ &= (-1)^i T 2^{i-2} (i-1)! (w^{(\alpha+1,\beta+1)} \cdot P_{i-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}) \circ \theta_T. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Für  $i = 0$  lautet (B.34)

$$\begin{aligned} \frac{w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T}{s} &= \frac{1}{s} \left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha+\beta} t^\alpha (T-t)^\beta, & 0 < t \leq T \\ 0, & \text{sonst} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha+\beta} \int_0^t \tau^\alpha (T-\tau)^\beta d\tau, & 0 < t \leq T \\ \left(\frac{2}{T}\right)^{\alpha+\beta} \int_0^T \tau^\alpha (T-\tau)^\beta d\tau, & \text{sonst} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Vergleicht man die hierbei auftretenden Integrale mit den Definitionen (A.46) bzw. (A.47) der Beta-Funktion bzw. der unvollständigen Beta-Funktion, so erhält man

$$\frac{w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T}{s} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \leq 0 \\ 2^{\alpha+\beta} T B_{\frac{t}{T}}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), & 0 < t \leq T \\ 2^{\alpha+\beta} T B(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{B.35})$$

mit  $\bar{\alpha} := \alpha + 1$ ,  $\bar{\beta} := \beta + 1$ . Einsetzen von (B.34) und (B.35) in (B.33) ergibt

$$h_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t \leq 0 \\ I_{\frac{t}{T}}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \left( \frac{w^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})}}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{i \|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} P_{i-1}^{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})} \right) \circ \theta_T(t), & 0 < t \leq T \\ 1, & \text{sonst} \end{array} \right\} \quad (\text{B.36})$$

mit der regularisierten unvollständigen Beta-Funktion  $I_\tau$  nach (A.48).

### B.2.5. Momente

Das  $k$ -te Moment eines algebraischen Ableitungsschätzers mit der Impulsantwort  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  lautet nach (A.13)

$$m_k(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = \int_0^T \tau^k g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\tau) d\tau.$$

Einsetzen von (B.22a) liefert die Darstellung

$$\begin{aligned} m_k(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) &= \int_0^T \tau^k \frac{2}{T} \sum_{i=0}^N \frac{P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} (w^{(\alpha,\beta)} \cdot P_i^{(\alpha,\beta)}) \circ \theta_T(\tau) d\tau \\ &= \int_{-1}^1 w^{(\alpha,\beta)}(\tau) (\theta_T^{-1}(\tau))^k R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\tau) d\tau = \langle (\theta_T^{-1})^k, R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

mit  $R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  gemäß (A.35),  $\theta_T$  und  $\theta_T^{-1}$  nach (B.1b) sowie dem inneren Produkt (A.30). Zur Auswertung von (B.37) ist es sinnvoll, die Fälle  $k \leq N$  und  $k > N$  zu unterscheiden.

- Für  $k \leq N$  gilt  $(\theta_T^{-1})^k \in \pi_N$ , so dass in diesem Fall aus der Reproduktionseigenschaft (A.36) von  $R_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  folgt  $m_k(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = (\theta_T^{-1}(\vartheta))^k = \left(\frac{1-\vartheta}{2}T\right)^k$ .
- Für  $k > N$  wird (B.46) zusammen mit (A.58) in (A.15) eingesetzt:

$$\begin{aligned} m_k(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) &= \mathfrak{I}^k(\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(k)}(0) \\ &= T^k \sum_{i=0}^N \frac{(\alpha + \beta + 2i + 1) P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{(\alpha + \beta + i + 1)^{k+1}} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} (\alpha + i - j + 1)^{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich für  $N = 0$  bzw.  $N = 1$  zu

$$\begin{aligned} m_k(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) &= \frac{(\alpha + 1)^{\bar{k}}}{(\alpha + \beta + 2)^{\bar{k}}} T^k, \\ m_k(g_{1,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1 + k) \Gamma(\alpha + \beta + 4)}{2 \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 3 + k)} \left( \frac{(2 - k) \alpha + \beta k + 2 + k}{\alpha + \beta + 3} - k\vartheta \right) T^k. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergeben sich folgende Ausdrücke für das nullte bis zweite Moment:

$$m_0(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = 1, \quad m_1(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} T, & N = 0, \\ \frac{1-\vartheta}{2} T, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (\text{B.38a})$$

$$m_2(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+3)} T^2, & N = 0, \\ \frac{\alpha+2}{\alpha+\beta+4} \left( \frac{\beta+2}{\alpha+\beta+3} - \vartheta \right) T^2, & N = 1, \\ \frac{(1-\vartheta)^2}{4} T^2, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.38b})$$

Die Varianz lautet nach (A.21), sofern  $g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(t) \geq 0$  ist,

$$m_2^*(g_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}) = \begin{cases} \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)} T^2, & N = 0, \\ \frac{\alpha+\beta+4 - ((\alpha+\beta)^2 + 7(\alpha+\beta) + 12)\vartheta^2 - (\alpha-\beta)(4(2\alpha-\beta)\vartheta + \alpha-\beta)}{4(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)} T^2, & N = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.39})$$

Für  $N = 0$  und  $\alpha = \beta$  lauten daher das erste Moment und die Varianz

$$m_1(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}) = \frac{T}{2}, \quad m_2^*(g_{0,T,\vartheta}^{(\alpha,\alpha)}) = \frac{T^2}{4(2\alpha+3)}. \quad (\text{B.40})$$

## B.3. Frequenzbereichseigenschaften

### B.3.1. Frequenzgang

**Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion der Jacobi-Polynome** Nach (A.6) lautet die Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion  $w^{(\alpha,\beta)}$  der Jacobi-Polynome

$$\mathcal{F}\{w^{(\alpha,\beta)}\}(\omega) = \int_{-1}^1 w^{(\alpha,\beta)}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Integraldarstellung (A.60) für die Kummer'sche M-Funktion, so erhält man

$$\mathcal{F}\{w^{(\alpha,\beta)}\}(\omega) = e^{-i\omega} 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1) M(\alpha+1, \alpha+\beta+2, 2i\omega).$$

Die Fourier-Transformierte von  $w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T$ ,  $\theta_T$  gemäß (B.1b), lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T\}(\omega) &= \int_0^T w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\frac{\omega}{2}T} \int_{-1}^1 w^{(\alpha,\beta)}(\tau) e^{i\frac{\omega}{2}\tau} d\tau \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}T} \mathcal{F}\{w^{(\alpha,\beta)}\}\left(-\frac{\Omega}{2}\right) \\ &= 2^{\alpha+\beta} T B(\alpha+1, \beta+1) M(\alpha+1, \alpha+\beta+2, -i\Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

mit der skalierten Frequenz  $\Omega := \omega T$ .

**Frequenzgang** Nach (B.22e) kann  $\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}$  als Linearkombination von Fourier-Transformierten von  $w^{(\alpha,\beta)} \circ \theta_T$  dargestellt werden:

$$\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} \frac{(-1)^{i-k} P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{2^{i-1} T \|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2} \mathcal{F}\{w^{(\alpha+i-k,\beta+k)} \circ \theta_T\}.$$

Einsetzen von (B.41) in diesen Ausdruck liefert

$$\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega) = \sum_{i=0}^N \sum_{k=0}^i a_{i,k} (-1)^{i-k} P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta) M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-\imath \Omega) \quad (\text{B.42})$$

mit den Kummer'schen M-Funktionen

$$M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(z) := M(\alpha + i - k + 1, \alpha + \beta + i + 2, z) \quad (\text{B.43})$$

sowie

$$a_{i,k} := 2^{\alpha+\beta+1} \binom{i+\alpha}{k} \binom{i+\beta}{i-k} \frac{B(\alpha + i - k + 1, \beta + k + 1)}{\|P_i^{(\alpha,\beta)}\|^2}. \quad (\text{B.44})$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke (A.44), (A.46) und (A.44) für den Binomial-Koeffizienten, die Beta-Funktion und die Norm der Jacobi-Polynome vereinfachen sich die Koeffizienten  $a_{i,k}$  nach (B.44) zu  $a_{i,k} = \binom{i}{k} \frac{\alpha+\beta+2i+1}{\alpha+\beta+i+1}$ , so dass sich schließlich folgender Ausdruck für den Frequenzgang der algebraischen Ableitungsschätzer ergibt:

$$\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}(\omega) = \sum_{i=0}^N \frac{(\alpha + \beta + 2i + 1) P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{\alpha + \beta + i + 1} \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-\imath \Omega). \quad (\text{B.45})$$

Die n-te Ableitung des Frequenzgangs lautet mit (A.59) unter Verwendung der Pochhammer-Symbole (A.45)

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)})^{(n)}(\omega) &= (-\imath T)^n \sum_{i=0}^N \frac{(\alpha + \beta + 2i + 1) P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta)}{(\alpha + \beta + i + 1)^{\overline{n+1}}} \\ &\quad \cdot \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} (\alpha + i - k + 1)^{\overline{n}} M_{i+n,k}^{(\alpha,\beta)}(-\imath \Omega). \quad (\text{B.46}) \end{aligned}$$

### B.3.2. Numerische Auswertung des Frequenzgangs

Zur graphischen Darstellung des Frequenzgangs (B.45) müssen die Kummer'schen M-Funktionen in (B.45) an Stützstellen  $(-\imath \Omega_l)_{l=0}^r$ ,  $0 \leq \Omega_0 < \dots < \Omega_r$  ausgewertet werden. Hierzu werden im Folgenden die drei Fälle  $\Omega_0 = 0$ ,  $0 < \Omega_l \leq \Omega_{\text{sep}}$  und  $\Omega_{\text{sep}} < \Omega_l \leq \Omega_r$  unterschieden. Die Frequenz  $\Omega_{\text{sep}}$  ergibt sich während der Ausführung.

1. Im Fall  $\Omega_0 = 0$  folgt aus (A.58) unmittelbar  $M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-\imath \Omega_0) = 1$ .

2. Für die auf den Fall 1 folgenden Frequenzen  $\Omega_l$  wird ausgenutzt, dass die  $j$ -te Partialsumme der hypergeometrischen Reihe (A.56) wie folgt rekursiv berechnet werden kann (Nardin et al., 1992; Pearson, 2009):

$$\sum_{k=0}^j \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!} = \frac{\xi_j + \eta_j}{\zeta_j} =: \theta_j \quad (\text{B.47a})$$

mit den Startwerten  $\xi_0 = 0$ ,  $\eta_0 = 1$  und  $\zeta_0 = 1$  und den Rekursionsschritten

$$\xi_j = j(b+j-1)(\xi_{j-1} + \eta_{j-1}), \quad \eta_j = z(a+j-1)\eta_{j-1}, \quad (\text{B.47b})$$

$$\zeta_j = j(b+j-1)\zeta_{j-1}. \quad (\text{B.47c})$$

Die Rekursion wird abgebrochen, sobald die relative „Verbesserung“ des Schätzwertes eine Schranke unterschreitet,

$$\left| \frac{\theta_{j_0} - \theta_{j_0-1}}{\theta_{j_0-1}} \right| < \text{tol}, \quad (\text{B.47d})$$

wobei hier  $\text{tol} = 10^{-16}$  verwendet wurde, und dann  $M(a, b, z) \approx \theta_{j_0}$  angenommen. Die Rekursion (B.47) vermeidet Rundungsfehler, die sich bei einer summandenweisen Berechnung von Partialsummen von (A.56) durch die Division betragslich sehr unterschiedlicher Werte ergeben würden. Auf diese Weise werden  $M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-1, \Omega_l)$  und  $M_{i+1,k}^{(\alpha,\beta)}(-1, \Omega_l)$  bis zu jener Frequenz  $\Omega_{l_0}$  berechnet, bei der  $\xi_j$ ,  $\eta_j$  oder  $\zeta_j$  den zur Verfügung stehenden Wertebereich überschreitet und daher (B.47d) nicht mehr erfüllt wird. Dann wird  $\Omega_{\text{sep}} = \Omega_{l_0-1}$  gewählt.

3. Für die verbleibenden Frequenzen  $\Omega_l > \Omega_{\text{sep}}$  wird die Kummer'sche Differentialgleichung (A.57) numerisch gelöst. Zur numerischen Auswertung von  $M(a, b, \cdot)$  an Punkten  $\varphi(t_i)$ , die sich auf der Geraden  $\varphi: [A, B] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \mapsto \sigma x$ , befinden, kann (A.57) zunächst in die Zustandsdarstellung

$$\mathbf{x}' = f(z, \mathbf{x}) \quad \text{mit } f(z, \mathbf{x}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{a}{z} & 1 - \frac{b}{z} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{B.48})$$

mit  $\mathbf{x}(z) := (M(a, b, z), M'(a, b, z))^T$  überführt werden. Ausgehend vom Anfangswert  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(\varphi(A))$  hat sich im Rahmen dieser Arbeit das in Dormand und Prince (1980) eingeführte eingebettete Runge-Kutta-Verfahren<sup>48,49</sup> zur numerischen Lösung von (B.48) bewährt:

$$\hat{\mathbf{x}}_{p,q+1} = \hat{\mathbf{x}}_{6,q} + \sigma h_q \sum_{k=0}^p c_{p,k} \mathbf{f}_{k,q}, \quad p = 5, 6, \quad (\text{B.49a})$$

mit  $\hat{\mathbf{x}}_{6,0} = \mathbf{x}_0$ ,

$$\mathbf{f}_{k,q} := \mathbf{f} \left( \sigma(\theta_q + \alpha_k h_q), \hat{\mathbf{x}}_{6,q} + \sigma h_q \sum_{l=0}^{k-1} \beta_{k,l} \mathbf{f}_{l,q} \right) \quad (\text{B.49b})$$

k	0	1	2	3	4	5	6
$\alpha_k$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{9}$	1	1
$\beta_{k,0}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{44}{45}$	$\frac{19372}{6561}$	$\frac{9017}{3168}$	$\frac{35}{384}$
$\beta_{k,1}$			$\frac{9}{40}$	$-\frac{56}{15}$	$-\frac{25360}{2187}$	$-\frac{355}{33}$	0
$\beta_{k,2}$				$\frac{32}{9}$	$\frac{64448}{6561}$	$\frac{46732}{5247}$	$\frac{500}{1113}$
$\beta_{k,3}$					$-\frac{212}{729}$	$\frac{49}{176}$	$\frac{125}{192}$
$\beta_{k,4}$						$-\frac{5103}{18656}$	$-\frac{2187}{6784}$
$\beta_{k,5}$							$\frac{11}{84}$
$\beta_{k,6}$							
$c_{5,k}$	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2187}{6784}$	$\frac{11}{84}$	
$c_{6,k}$	$\frac{5179}{57600}$	0	$\frac{7571}{16695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92097}{339200}$	$\frac{187}{2100}$	$\frac{1}{40}$

Tabelle B.1.: Koeffizienten des eingebetteten Runge-Kutta-Verfahrens (B.49) nach Dormand und Prince (1980).

und den Koeffizienten  $\alpha_k$ ,  $\beta_{k,l}$  sowie  $c_{p,k}$  entsprechend Tabelle B.1. Hierbei sind  $\hat{x}_{5,q}$  bzw.  $\hat{x}_{6,q}$  Näherungen lokaler vierter bzw. fünfter Fehlerordnung von  $x(\varphi(\theta_q))$ ,  $\theta_0 = A$ ,  $\theta_{q+1} = \theta_q + h_q$ . Die Schrittweite wird gemäß

$$h_{q+1} = \frac{9}{10} h_q \left( \frac{\text{tol } h_q}{\|\hat{x}_{6,q} - \hat{x}_{5,q}\|_\infty} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{B.49c})$$

aktualisiert, wobei mittels tol der relative Approximationsfehler in jedem Lösungsschritt vorgegeben wird. Die Stützstellen  $\theta_q$  unterscheiden sich im Allgemeinen von den interessierenden Stützstellen  $t_i$ , weshalb  $M(a, b, \varphi(t_i))$ ,  $t_i \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$ , durch lineare Interpolation berechnet wird:

$$M(a, b, \varphi(t_i)) \approx \hat{x}_{6,q,1} + \frac{\hat{x}_{6,q+1,1} - \hat{x}_{6,q,1}}{h_q} (t_i - \theta_q). \quad (\text{B.49d})$$

Für den Anfangswert  $x_0 = (M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-1 \Omega_{\text{sep}}), \frac{\alpha+i-k+1}{\alpha+\beta+i+2} M_{i+1,k}^{(\alpha,\beta)}(-1 \Omega_{\text{sep}}))^T$  werden die Näherungswerte aus dem zweiten Fall verwendet, weshalb in Fall 2 neben  $M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$  auch  $M_{i+1,k}^{(\alpha,\beta)}$  berechnet wurde. In dieser Arbeit wurde  $\text{tol} = 10^{-13}$  für die Schrittweitensteuerung (B.49c) verwendet.

### B.3.3. Asymptoten des Frequenzgangs

**Betrag der Summe zweier komplexer Zahlen** Sei  $x(\theta) := a e^{i\theta/2} + b e^{-i\theta/2}$  mit  $a, b, \theta \in \mathbb{R}$ . Wegen  $a^2 + 2 a b \cos \theta + b^2 = (a \pm b)^2$  für  $\cos \theta = \pm 1$  vereinfacht sich der

<sup>48</sup>Carl David Tolmé Runge (1856-1927)

<sup>49</sup>Martin Wilhelm Kutta (1867-1944)

Betrag  $|x(\theta)| = \sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}$  für  $\theta = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , zu

$$|x(\theta)| = \begin{cases} |a + b|, & \theta = 2k\pi, \\ |a - b|, & \theta = (2k + 1)\pi, \end{cases} \quad (\text{B.50a})$$

und es gilt die Abschätzung

$$\underbrace{\min\{|a - b|, |a + b|\}}_{=:A} < |x(\theta)| < \underbrace{\max\{|a - b|, |a + b|\}}_{=:B}, \quad \theta \neq k\pi. \quad (\text{B.50b})$$

Der Betrag  $|x(\theta)|$  liegt also stets innerhalb des Intervalls  $[A, B]$  und erreicht die Intervallgrenzen, wenn  $\theta$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  ist. Der Mittelpunkt und die Breite des Intervalls  $[A, B]$  betragen

$$\frac{A + B}{2} = \max\{|a|, |b|\}, \quad B - A = 2 \min\{|a|, |b|\}, \quad (\text{B.50c})$$

so dass die Intervallgrenzen auch als

$$A = ||a| - |b||, \quad B = |a| + |b| \quad (\text{B.50d})$$

berechnet werden können.

**Asymptotische Hüllkurven** Im Folgenden werden die Abkürzungen  $\bar{\alpha} := \alpha + 1$ ,  $\bar{\beta} := \beta + 1$ ,  $j := i - k$  sowie  $\Omega := \omega T$  verwendet. Für  $P = Q = 0$ ,  $z = -\iota\Omega$ ,  $a = \bar{\beta} + k$  und  $b = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + i$  lautet (A.62)

$$\frac{M_{i,k}^{(\alpha,\beta)}(-\iota\Omega)}{\Gamma(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + i)} = \frac{e^{-\iota\frac{\pi}{2}(\bar{\alpha}+j)}}{\Gamma(\bar{\beta} + k) \Omega^{\bar{\alpha}+j}} + \frac{e^{\iota(\frac{\pi}{2}(\bar{\beta}+k)-\Omega)}}{\Gamma(\bar{\alpha} + i - k) \Omega^{\bar{\beta}+k}} + \mathcal{O}(\omega^{-\min\{\bar{\beta}+k, \bar{\alpha}+j\}-1})$$

für  $\omega \rightarrow \infty$ . Setzt man dies in (B.45) ein und wendet man die Symmetrieeigenschaft (A.12c) der Fourier-Transformierten reellwertiger Funktionen an, so kann der Betragsgang der algebraischen Ableitungsschätzer für  $|\omega| \rightarrow \infty$  als

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega) &= \left| \sum_{i=0}^N (\alpha + \beta + 2i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + i + 1) P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta) \sum_{k=0}^i (-1)^j \binom{i}{k} \right. \\ &\quad \cdot \left. \left( \frac{e^{-\iota\frac{\pi}{2}(\bar{\alpha}+j)}}{\Gamma(\bar{\beta} + k) \Omega^{\bar{\alpha}+j}} + \frac{e^{\iota(\frac{\pi}{2}(\bar{\beta}+k)-\Omega)}}{\Gamma(\bar{\alpha} + j) \Omega^{\bar{\beta}+k}} \right) \right| + \mathcal{O}(|\omega|^{-\min\{\bar{\beta}, \bar{\alpha}\}-1}) \quad (\text{B.51}) \end{aligned}$$

dargestellt werden. Für  $|\omega| \rightarrow \infty$  gilt ferner

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{(-1)^j e^{-\iota\frac{\pi}{2}(\bar{\alpha}+i-k)}}{\Gamma(\bar{\beta} + k) \Omega^{\bar{\alpha}+i-k}} &= \frac{e^{-\iota\frac{\pi}{2}\bar{\alpha}}}{\Gamma(\bar{\beta} + i) \Omega^{\bar{\alpha}}} + \mathcal{O}(\omega^{-\bar{\alpha}-1}), \\ \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \frac{(-1)^j e^{\iota(\frac{\pi}{2}(\bar{\beta}+k)-\Omega)}}{\Gamma(\bar{\alpha} + i - k) \Omega^{\bar{\beta}+k}} &= \frac{(-1)^i e^{\iota(\frac{\pi}{2}\bar{\beta}-\Omega)}}{\Gamma(\bar{\alpha} + i) \Omega^{\bar{\beta}}} + \mathcal{O}(\omega^{-\bar{\beta}-1}), \end{aligned}$$

so dass (B.51) unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft (A.72a) der Jacobi-Polynome zu

$$|\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega) = |f|(\omega) + \mathcal{O}(|\Omega|^{-\min\{\bar{\beta}, \bar{\alpha}\}-1}) \quad (\text{B.52a})$$

mit

$$f(\omega) := \frac{p_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} e^{-i\frac{\pi}{2}\bar{\alpha}}}{\Omega^{\bar{\alpha}}} + \frac{p_{N,-\vartheta}^{(\beta,\alpha)} e^{i(\frac{\pi}{2}\bar{\beta}-\Omega)}}{\Omega^{\bar{\beta}}}, \quad (\text{B.52b})$$

$$p_{N,\vartheta}^{(\alpha,\beta)} := \sum_{i=0}^N \frac{(\alpha + \beta + 2i + 1) \Gamma(\alpha + \beta + i + 1)}{\Gamma(\beta + i + 1)} P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta) \quad (\text{B.52c})$$

vereinfacht werden kann. Mit den Abkürzungen

$$\mu := \min\{\bar{\alpha}, \bar{\beta}\}, \quad \kappa := |\beta - \alpha|, \quad \sigma := \begin{cases} 1, & \beta \geq \alpha, \\ -1, & \alpha > \beta, \end{cases} \quad (\text{B.53a})$$

sowie  $\varphi(\Omega) := \Omega - \pi(\mu + \kappa/2)$ ,  $c_i^{(\mu,\kappa)} := (2\mu + \kappa + 2i - 1) \Gamma(2\mu + \kappa + i - 1)$ ,

$$r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} := p_{N,\sigma\vartheta}^{(\mu-1,\mu+\kappa-1)} = \sum_{i=0}^N \frac{c_i^{(\mu,\kappa)}}{\Gamma(\mu + \kappa + i)} P_i^{(\mu-1,\mu+\kappa-1)}(\sigma\vartheta), \quad (\text{B.53b})$$

$$s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} := p_{N,-\sigma\vartheta}^{(\mu+\kappa-1,\mu-1)} = \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i c_i^{(\mu,\kappa)}}{\Gamma(\mu + i)} P_i^{(\mu-1,\mu+\kappa-1)}(\sigma\vartheta) \quad (\text{B.53c})$$

kann  $f(\omega)$  als

$$f(\omega) = \left( \frac{r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Omega^\mu} e^{i\frac{\sigma\varphi(\Omega)}{2}} + \frac{s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Omega^{\mu+\kappa}} e^{-i\frac{\sigma\varphi(\Omega)}{2}} \right) e^{\frac{1}{2}(\sigma\pi\frac{\kappa}{2}-\Omega)} \quad (\text{B.53d})$$

dargestellt werden. Für  $N = 0$  bzw.  $N = 1$  können  $r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}$  und  $s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}$  als

$$r_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \frac{\Gamma(2\mu + \kappa)}{\Gamma(\mu + \kappa)}, \quad \frac{r_{1,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{r_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} = \frac{(2\mu + \kappa)}{2(\mu + \kappa)} (1 - \kappa + (2\mu + \kappa + 1)\sigma\vartheta), \quad (\text{B.53e})$$

$$s_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \frac{\Gamma(2\mu + \kappa)}{\Gamma(\mu)}, \quad \frac{s_{1,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{s_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} = \frac{(2\mu + \kappa)}{2\mu} (1 - \kappa - ((2\mu + \kappa + 1)\sigma\vartheta)) \quad (\text{B.53f})$$

dargestellt werden, was sich für  $\kappa = 0$  (und somit  $\sigma = 1$ ) mit (A.43) weiter zu

$$r_{0,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)} = s_{0,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)} = \frac{4^\mu}{2\sqrt{\pi}} \Gamma(\mu + 1/2), \quad (\text{B.53g})$$

$$\frac{r_{1,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}}{r_{0,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}} = 1 + (2\mu + 1)\vartheta, \quad \frac{s_{1,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}}{s_{0,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}} = 1 - (2\mu + 1)\vartheta \quad (\text{B.53h})$$

vereinfacht. Der Betrag von  $f$  besitzt nach (B.50) die Hüllkurven

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{-}(\omega) := \left| \frac{|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|}{|\Omega|^\mu} - \frac{|s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|}{|\Omega|^{\mu+\kappa}} \right|, \quad |\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{+}(\omega) := \frac{|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|}{|\Omega|^\mu} + \frac{|s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|}{|\Omega|^{\mu+\kappa}}. \quad (\text{B.54a})$$

Im Fall  $N = 0$ ,  $\kappa = 0$  vereinfacht sich (B.54a) mit (B.53g) zu

$$|\hat{\mathcal{F}}_{0,T,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}|_{\infty}^{-}(\omega) = 0, \quad |\hat{\mathcal{F}}_{0,T,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}|_{\infty}^{+}(\omega) = \frac{4^{\mu}\Gamma(\mu + 1/2)}{\sqrt{\pi}|\Omega|^{\mu}}. \quad (\text{B.54b})$$

Wegen der Konvergenzeigenschaft (B.52a) werden  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{-}$  bzw.  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{+}$  in dieser Arbeit als *asymptotische untere* bzw. *obere Hüllkurve* des Betragsgangs der algebraischen Ableitungsschätzer für hohe Frequenzen bezeichnet.

**Abstand der asymptotischen Hüllkurven** Nach (B.54a), (B.50c) und (B.53) berechnet sich der Abstand zwischen oberer und unterer asymptotischer Hüllkurve zu

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{\Delta}(\omega) := |\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{+}(\omega) - |\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{-}(\omega) = \frac{2 \min\{|\Omega^{\kappa}r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|, |s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|\}}{|\Omega|^{\mu+\kappa}}.$$

Dies kann mit Einführung der Knickfrequenz  $\omega_c$  (3.24) zu

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{\Delta}(\omega) = 2 \underbrace{\frac{\min\{|\Omega^{\kappa}r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|, |s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|\}}{(\omega_c T)^{\mu+\kappa}}}_{=:g(\omega)} \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^{\mu+\kappa} \quad (\text{B.55})$$

umgeschrieben werden. Einsetzen von (3.24) zusammen mit (B.57b) liefert

$$g(\omega) = \begin{cases} \min\{k, 1/k\}, & \kappa = 0, \\ |\Omega/r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|^{\kappa}, & \kappa > 0 \wedge |\Omega|^{\kappa} < k, \\ k/|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|^{\kappa}, & \kappa > 0 \wedge |\Omega|^{\kappa} \geq k. \end{cases}$$

mit  $k := |s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|/r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}$ . Daher vereinfacht sich (B.55) für  $\kappa = 0$  oder  $|\Omega|^{\kappa} \geq k$  zu

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}^{\Delta}(\omega) = p_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} \left| \frac{\omega_c}{\omega} \right|^{\mu+\kappa} \quad \text{mit } p_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} := \begin{cases} 2 \min\{k, 1/k\}, & \kappa = 0, \\ 2k/|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|^{\kappa}, & \kappa > 0. \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

**Mittlere Asymptote** Für  $\kappa > 0$  kann der Betrag von  $f(\omega)$  gemäß (B.53d) als

$$|f(\omega)| = \frac{|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|}{|\Omega|^{\mu}} + \mathcal{O}(|\omega|^{-\mu-\kappa}) \quad \text{für } |\omega| \rightarrow \infty$$

dargestellt werden. Für  $\kappa = 0$  folgt zusammen mit (B.50) für  $|\omega| \rightarrow \infty$

$$|f(\omega)| = \frac{|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} e^{i\frac{\varphi(\Omega)}{2}} + s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} e^{-i\frac{\varphi(\Omega)}{2}}|}{|\Omega|^{\mu}} = \frac{\max\{|r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|, |s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|\}}{|\Omega|^{\mu}} + \mathcal{O}(|\omega|^{-\mu}).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$|f(\omega)| = \frac{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa)|\Omega|^{\mu}} + \mathcal{O}(|\omega|^{-\mu-\kappa}) \quad \text{für } |\omega| \rightarrow \infty \quad (\text{B.57a})$$

mit

$$q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} := \begin{cases} \Gamma(\mu) \max\left\{ |r_{N,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}|, |s_{N,\vartheta}^{(\mu,0,\sigma)}| \right\}, & \kappa = 0, \\ \Gamma(\mu + \kappa) |r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|, & \kappa > 0, \end{cases} \quad (\text{B.57b})$$

und im Speziellen für  $N = 0$  bzw.  $N = 1$

$$q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \Gamma(2\mu + \kappa), \quad q_{1,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2\mu+1} + |\vartheta| \right) \Gamma(2\mu + 1), & \kappa = 0, \\ \left| \frac{1-\kappa}{2\mu+\kappa+1} + \sigma\vartheta \right| \frac{\Gamma(2\mu+\kappa+2)}{2(\mu+\kappa)}, & \kappa > 0. \end{cases} \quad (\text{B.57c})$$

Setzt man dies in (B.52a) ein, so erhält man schließlich

$$|\mathcal{F}_{N,T,\vartheta}^{(\alpha,\beta)}|(\omega) = |\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}(\omega) + \mathcal{O}\left(|\omega|^{-\mu - \min\{\kappa,1\}}\right) \quad \text{für } |\omega| \rightarrow \infty \quad (\text{B.58a})$$

mit

$$|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}(\omega) := \frac{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa) |\Omega|^{\mu}}. \quad (\text{B.58b})$$

Für den Quotienten  $q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}/\Gamma(\mu + \kappa)$  sollen wiederum die Spezialfälle  $N = 0$  bzw.  $N = 1$  angegeben werden:

$$\frac{q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa)} = \begin{cases} \frac{4^{\mu} \Gamma(\mu+1/2)}{2\sqrt{\pi}}, & \kappa = 0, \\ \frac{\Gamma(2\mu+\kappa)}{\Gamma(\mu+\kappa)}, & \kappa > 0, \end{cases} \quad \frac{q_{1,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu + \kappa)} = \begin{cases} \left( \frac{1}{2\mu+1} + |\vartheta| \right) \frac{4^{\mu} \Gamma(\mu+3/2)}{\sqrt{\pi}}, & \kappa = 0, \\ \left| \frac{1-\kappa}{2\mu+\kappa+1} + \sigma\vartheta \right| \frac{\Gamma(2\mu+\kappa+2)}{2\Gamma(\mu+\kappa+1)}, & \kappa > 0. \end{cases} \quad (\text{B.58c})$$

Für  $\kappa = 0$  oder  $|\Omega|^{\kappa} > |s_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}/r_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|$  ist  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}$  nach (B.50c) das arithmetische Mittel der asymptotischen unteren und oberen Hüllkurve. Daher wird  $|\hat{\mathcal{F}}_{N,T,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}|_{\infty}$  in dieser Arbeit als *mittlere Asymptote* des Betragsgangs der algebraischen Ableitungsschätzer für hohe Frequenzen bezeichnet.

### B.3.4. Abhängigkeit der Fensterbreite von den Filterparametern

**Abschätzungen der Digamma- und Trigamma-Funktion** Für die folgenden Herleitungen sollen zunächst zwei nützliche Sachverhalte wiederholt werden.

- Integralkriterium (Heuser, 2001): Sei  $f : [k_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k_0 \in \mathbb{Z}$ , nicht-negativ und monoton fallend. Dann gilt

$$\int_{k_0}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} f(k) \leq f(k_0) + \int_{k_0}^{\infty} f(x) dx. \quad (\text{B.59})$$

- Abschätzung der ln-Funktion (Abramowitz und Stegun, 1965): Sei  $x > -1$  und  $x \neq 0$ . Dann gilt

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \quad (\text{B.60})$$

Gesucht ist nun eine Abschätzung für die Differenz  $\Psi(x+y) - \Psi(x)$  der Digamma-Funktion (A.51) für  $x, y > 0$ . Aus der Reihendarstellung (A.52) folgt

$$\Psi(x+y) - \Psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left( \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+y+k} \right)}_{=:f(k)}. \quad (\text{B.61})$$

Die Funktion  $f$  in (B.61) erfüllt die Voraussetzungen des Integralkriteriums (B.59). Wegen  $\int_0^{\infty} f(k) dk = \ln(1+y/x)$  folgt daher

$$\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right) \leq \Psi(x+y) - \Psi(x) \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} + \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

Nach (B.60) gilt ferner  $y/(x+y) < \ln(1+y/x) < y/x$ , was schließlich auf

$$\frac{y}{x+y} < \Psi(x+y) - \Psi(x) < \frac{1+y}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{(x+y+1)y}{(x+y)x} \quad (\text{B.62})$$

führt.

Als Nächstes soll die Trigamma-Funktion  $\Psi'(x)$  für  $x > 0$  abgeschätzt werden. Die Grundlage hierzu bildet die Reihendarstellung (A.54). Die Funktion  $f(k) = 1/(x+k)^2$  genügt den Voraussetzungen von (B.59) und es gilt  $\int_0^{\infty} f(k) dk = 1/x$ . Daher liefert die Anwendung von (B.59) auf (A.54)

$$\frac{1}{x} \leq \Psi'(x) \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}. \quad (\text{B.63})$$

Die Abschätzung (B.63) kann nun zur Abschätzung des Integrals  $\int_a^b x \Psi'(x+y) dx$  mit  $b > a > 0$  und  $y \geq 0$  genutzt werden. Aus (B.63) folgt

$$\int_a^b \frac{x}{x+y} dx \leq \int_a^b x \Psi'(x+y) dx \leq \int_a^b \frac{x}{x+y} dx + \int_a^b \frac{x}{(x+y)^2} dx. \quad (\text{B.64})$$

Die beiden Integrale auf der linken bzw. rechten Seite von (B.64) lauten

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{x}{x+y} dx &= b - a - y \ln\left(1 + \frac{b-a}{a+y}\right), \\ \int_a^b \frac{x}{(x+y)^2} dx &= \frac{(a-b)y}{(a+y)(b+y)} + \ln\left(1 + \frac{b-a}{a+y}\right). \end{aligned}$$

Somit kann (B.64) in

$$\begin{aligned} b - a - y \ln\left(1 + \frac{b-a}{a+y}\right) &\leq \int_a^b x \Psi'(x+y) dx \\ &\leq \left(1 - \frac{y}{(a+y)(b+y)}\right) (b-a) + (1-y) \ln\left(1 + \frac{b-a}{a+y}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

umgeformt werden. Der hierbei auftretende ln-Ausdruck ist infolge (B.60) durch

$$\frac{b-a}{b+y} < \ln\left(1 + \frac{b-a}{a+y}\right) < \frac{b-a}{a+y}$$

beschränkt. Setzt man diese Abschätzung in (B.65) ein, so erhält man schließlich

$$\frac{(b-a)a}{a+y} < \int_a^b x \Psi'(x+y) dx < \begin{cases} \frac{b-a}{a+y} \left(a + \frac{b}{b+y}\right), & y \leq 1, \\ \frac{b-a}{b+y} \left(b + \frac{a}{a+y}\right), & y > 1. \end{cases} \quad (\text{B.66})$$

**Abhängigkeit der Fensterbreite von den Filterparametern** Die Fensterbreite  $T$  kann nach (3.24) als

$$T = \frac{1}{\omega_c} \left( \frac{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu+\kappa)} \right)^{\frac{1}{\mu}} \quad (\text{B.67})$$

dargestellt werden. Mit den Ableitungsregeln

$$(f^g)' = f^g \left( g \frac{f'}{f} + g' \ln f \right), \quad \left( \left( \frac{f}{g} \right)^k \right)' = k \left( \frac{f}{g} \right)^k \left( \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \quad (\text{B.68})$$

ergeben sich die partiellen Ableitungen von  $T$  nach  $q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}$  sowie den Parametern  $\vartheta$ ,  $\mu$  und  $\kappa$  zu

$$\frac{\partial T}{\partial q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} = \frac{T}{\mu q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}, \quad \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = \frac{T}{\mu q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} \frac{\partial q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \vartheta}, \quad (\text{B.69a})$$

sowie

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \frac{T}{\mu} \left( \frac{1}{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} \frac{\partial q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \mu} - \Psi(\mu+\kappa) - \frac{1}{\mu} \ln \frac{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\Gamma(\mu+\kappa)} \right), \quad (\text{B.69b})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} = \frac{T}{\mu} \left( \frac{1}{q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} \frac{\partial q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \kappa} - \Psi(\mu+\kappa) \right), \quad (\text{B.69c})$$

mit der Digamma-Funktion  $\Psi$  entsprechend (A.51).

Sei  $\alpha \leq \beta$ , so dass  $\mu = \alpha + 1$ ,  $\kappa = \beta - \alpha$  und  $\sigma = 1$  gelten. Sei ferner eine monoton steigende Folge  $(\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit  $\vartheta_i > p_{i,i}^{(\alpha,\beta)}$  für  $i > 0$  gegeben. Dann folgen aus (A.85), (A.72b) und (A.84) für  $j \in \{1, \dots, i\}$

$$P_j^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_i) > 0, \quad P_j^{(\alpha,\alpha)}(\vartheta_i) \geq P_j^{(\alpha,\alpha)}(-\vartheta_i), \quad P_j^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_{i+1}) > P_j^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_i).$$

Daher vereinfacht sich (B.57b) zu

$$q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \sum_{i=0}^N s_i P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta) > 0 \quad \text{mit } s_i := \frac{(2\mu + \kappa + 2i - 1) \Gamma(2\mu + \kappa + i - 1)}{(\mu + \kappa)^{\bar{i}}} > 0,$$

so dass

$$q_{N+1,\vartheta_{N+1}}^{(\mu,\kappa,\sigma)} - q_{N,\vartheta_N}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = s_{N+1} P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_{N+1}) + \sum_{i=1}^N s_i \left( P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_{N+1}) - P_i^{(\alpha,\beta)}(\vartheta_N) \right) > 0$$

folgt. Nach (B.69a) ist ferner  $\partial T / \partial q_{N,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} > 0$ , woraus

$$T|_{N+1,\vartheta_{N+1}} > T|_{N,\vartheta_N} \tag{B.70}$$

resultiert.

Für den Polynomgrad  $N = 0$  gilt  $q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)} = \Gamma(2\mu + \kappa)$  und somit

$$\frac{\partial q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{1}{q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} \frac{\partial q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \mu} = 2\Psi(2\mu + \kappa), \quad \frac{1}{q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}} \frac{\partial q_{0,\vartheta}^{(\mu,\kappa,\sigma)}}{\partial \kappa} = \Psi(2\mu + \kappa). \tag{B.71}$$

Einsetzen von (B.71) in (B.69) ergibt

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} \Big|_{N=0} = 0 \tag{B.72a}$$

sowie

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} \Big|_{N=0} = \frac{T}{\mu^2} \left( 2\mu\Psi(2\mu + \kappa) - \mu\Psi(\mu + \kappa) - \ln \frac{\Gamma(2\mu + \kappa)}{\Gamma(\mu + \kappa)} \right), \tag{B.72b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \kappa} \Big|_{N=0} = \frac{T}{\mu} (\Psi(2\mu + \kappa) - \Psi(\mu + \kappa)). \tag{B.72c}$$

Zur Abschätzung von (B.72b) wird der Klammerterm auf der rechten Seite als Integral dargestellt:

$$\begin{aligned} 2\mu\Psi(2\mu + \kappa) - \mu\Psi(\mu + \kappa) - \ln \frac{\Gamma(2\mu + \kappa)}{\Gamma(\mu + \kappa)} &= [x\Psi(x + \kappa) - \ln \Gamma(x + \kappa)]_{x=\mu}^{2\mu} \\ &= \int_{\mu}^{2\mu} x\Psi'(x + \kappa) dx. \end{aligned}$$

Daher liefert (B.66) für  $a = \mu$ ,  $b = 2\mu$  und  $y = \kappa$  die Abschätzung

$$\frac{T}{\mu + \kappa} < \frac{\partial T}{\partial \mu} \Big|_{N=0} < \begin{cases} \frac{(2\mu + \kappa + 2)T}{(2\mu + \kappa)(\mu + \kappa)}, & \kappa \leq 1, \\ \frac{(2\mu + 2\kappa + 1)T}{(2\mu + \kappa)(\mu + \kappa)}, & \kappa > 1. \end{cases} \tag{B.73a}$$

Eine entsprechende Abschätzung von (B.72c) liefert (B.62) für  $x = \mu + \kappa$  und  $y = \mu$ :

$$\frac{T}{2\mu + \kappa} < \frac{\partial T}{\partial \kappa} \Big|_{N=0} < \frac{(2\mu + \kappa + 1)T}{(2\mu + \kappa)(\mu + \kappa)}. \tag{B.73b}$$

## B.4. Implementierung

### B.4.1. Approximation der Messgröße als Polygonzug

Ersetzt man im Faltungsintegral (3.35) die Messgröße  $x$  durch den Polygonzug (3.41), so erhält man

$$\begin{aligned}\hat{x}^{(n)}(t_i) &= \sum_{k=0}^{L-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{(n)}(\tau) x(t_i - \tau) d\tau = \sum_{k=0}^{L-1} \int_0^{T_s} g^{(n)}(\tau + t_k) x(t_{i-k} - \tau) d\tau \\ &\approx \sum_{k=0}^{L-1} \left( x_{i-k} \int_0^{T_s} g^{(n)}(\tau + t_k) d\tau - \frac{x_{i-k} - x_{i-k-1}}{T_s} \int_0^{T_s} g^{(n)}(\tau + t_k) \tau d\tau \right) \\ &= \sum_{k=0}^{L-1} (a_k - b_k) x_{i-k} + \sum_{k=1}^L b_{k-1} x_{i-k}\end{aligned}\quad (\text{B.74a})$$

mit den Abkürzungen

$$a_k := \int_0^{T_s} g^{(n)}(\tau + t_k) d\tau = g_{k+1}^{(n-1)} - g_k^{(n-1)}, \quad (\text{B.74b})$$

$$b_k := \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} g^{(n)}(\tau + t_k) \tau d\tau = g_{k+1}^{(n-1)} + \frac{g_k^{(n-2)} - g_{k+1}^{(n-2)}}{T_s}. \quad (\text{B.74c})$$

### B.4.2. Rekursive Implementierung

Gleichung (3.45) lautet abgekürzt

$$y = \frac{1}{z} \sum_{l=0}^{q-1} f_l x \quad \text{mit } f_l := \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \varphi_l(k) \delta^k. \quad (\text{B.75})$$

Anwendung des Rückwärtsdifferenzoperators  $\nabla := 1 - \delta$  auf  $f_l$  liefert

$$\begin{aligned}\nabla f_l &= \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \varphi_l(k) \delta^k - \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \varphi_l(k) \delta^{k+1} = \sum_{k=k_l}^{k_{l+1}-1} \varphi_l(k) \delta^k - \sum_{k=k_{l+1}}^{k_{l+1}} \varphi_l(k-1) \delta^k \\ &= [\varphi_l(k) \delta^k]_{k=k_{l+1}}^{k_l} + \sum_{k=k_{l+1}}^{k_{l+1}} (\nabla \varphi_l)(k) \delta^k.\end{aligned}$$

Wiederholt man dies  $p$ -mal, so erhält man sukzessive

$$\nabla^p f_l = \left[ \sum_{i=0}^{p-1} (\Delta^i \varphi_l)(k) \nabla^{p-1-k} \delta^{k+i} \right]_{k=k_{l+1}}^{k_l} + \sum_{k=k_{l+1}+p}^{k_{l+1}-1+p} (\nabla^p \varphi_l)(k) \delta^k \quad (\text{B.76})$$

mit dem Vorwärtsdifferenzoperator  $\Delta := \delta^{-1} - 1$ . Wegen  $\varphi_l \in \pi_r$  gilt  $\nabla^{r+1} h \equiv 0$  (Hamming, 1986; Graham et al., 1994), so dass für  $p = r + 1$  die zweite Summe in (B.76) verschwindet:

$$\nabla^{r+1} f_l = \left[ \sum_{i=0}^r (\Delta^i \varphi_l)(k) \nabla^{r-i} \delta^{i+k} \right]_{i=k_{l+1}}^{k_l}.$$

Der binomische Lehrsatz liefert  $\nabla^{r-i} \delta^{i+k} = \sum_{j=0}^{r-i} (-1)^{r-i-j} \binom{r-i}{j} \delta^{k+r-j}$  und somit

$$\begin{aligned} \nabla^{r+1} f_l &= \left[ \sum_{i=0}^r (\Delta^i \varphi_l)(k) \sum_{j=0}^{r-i} (-1)^{r-i-j} \binom{r-i}{j} \delta^{k+r-j} \right]_{k=k_{l+1}}^{k_l} \\ &= \left[ \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{r-i}{r-j} (\Delta^i \varphi_l)(k) \delta^{k+j} \right]_{k=k_{l+1}}^{k_l}. \end{aligned}$$

Folglich kann der Operator  $f_l$  als Quotient

$$f_l = \frac{\sum_{j=0}^r b_{k_l,j}(\varphi_l) \delta^{k_l+j} - \sum_{j=0}^r b_{k_{l+1},j}(\varphi_l) \delta^{k_{l+1}+j}}{\nabla^{r+1}} \quad (\text{B.77})$$

mit  $b_{k,j}(\varphi_l) := \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} \binom{r-i}{r-j} (\Delta^i \varphi_l)(k)$  dargestellt werden. Setzt man (B.77) in den Übertragungsoperator in (B.75) ein, so ergibt sich

$$\sum_{l=0}^{q-1} f_l = \frac{\sum_{l=0}^{q-1} \left( \sum_{j=0}^r b_{k_l,j}(\varphi_l) \delta^{k_l+j} - \sum_{j=0}^r b_{k_{l+1},j}(\varphi_l) \delta^{k_{l+1}+j} \right)}{\nabla^{r+1}}.$$

Dies kann durch Gruppieren der Zählerterme mit identischen Potenzen von  $\delta$  zu

$$\sum_{l=0}^{q-1} f_l = \frac{\sum_{l=0}^{q-1} \sum_{j=0}^r c_{l,j} \delta^{k_l+j}}{\nabla^{r+1}} \quad \text{mit } c_{l,j} := \begin{cases} b_{k_0,j}(\varphi_0), & l = 0, \\ b_{k_l,j}(\varphi_l) - b_{k_l,j}(\varphi_{l-1}), & l = 1, \dots, q-1, \\ -b_{k_q,j}(\varphi_{q-1}), & l = q, \end{cases} \quad (\text{B.78})$$

umgeformt werden. Mit  $\nabla^{r+1} = 1 + \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} (-1)^j \delta^j$  kann (3.45) als

$$y = - \sum_{j=1}^{r+1} \binom{r+1}{j} (-1)^j \delta^j y + \frac{1}{\Xi} \sum_{l=0}^q \sum_{j=0}^r c_{l,j} \delta^{k_l+j} \chi \quad (\text{B.79})$$

realisiert werden.

### B.4.3. Quantisierungsfehler bei rekursiver Implementierung

Da der Quantisierungsfehler (3.49) als Antwort eines linearen verschiebe-invarianten FIR-Filters auf  $\chi$  interpretiert werden kann, folgt aus der Annahme der schwachen Stationarität von  $\chi$  auch die schwache Stationarität des Quantisierungsfehlers  $\tilde{y}$  (Hayes, 1996; Oppenheim und Schaffer, 2009). Für eine hinreichend feine Quantisierung, also eine hinreichend große Wortbreite des Ganzzahldatentyps, können die Quantisierungsfehler  $\tilde{d}_{l,i}$  der Polynomkoeffizienten in Analogie zu Beispiel 9 als Werte unkorrelierter, auf  $[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}]$  gleichverteilter Zufallsvariablen modelliert werden und sind daher mittelwertfrei,  $\mu_{\tilde{d}_{l,i}} = 0$ . Auch die Längen  $L_l$  der Approximationsintervalle sind quantisiert und werden daher wegen  $\sum_{l=0}^{q-1} L_l = n_k - q + 1$  als Werte unkorrelierter, auf  $[\frac{n_k+1}{q} - \frac{3}{2}, \frac{n_k+1}{q} - \frac{1}{2}]$  gleichverteilter Zufallsvariablen angenommen. Außerdem wird angenommen, dass  $\chi_k$ ,  $\tilde{d}_{l,i}$  und  $L_l$  statistisch unabhängig sind.

Nach (A.39) folgt aus der Mittelwertfreiheit von  $\tilde{d}_{l,i}$  die Mittelwertfreiheit von  $\tilde{y}$ :

$$\mu_{\tilde{y}} = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \mathcal{E} \left\{ \sum_{k=0}^{L_l} k^i \right\} \mu_{\tilde{d}_{l,i}} \mu_x = 0. \quad (\text{B.80})$$

Daher stimmt die Varianz von  $\tilde{y}$  mit dessen zweitem Moment überein,

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \sum_{k=0}^{L_l} \tilde{d}_{l,i} k^i x_{j-k_l-k} \right)^2 \right\} = \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \sum_{k=0}^{L_l} \tilde{d}_{l,i} k^i \right)^2 \right\} \sigma_x^2. \quad (\text{B.81})$$

Beim Übergang zur rechten Seite von (B.81) wurden wiederum die schwache Stationarität von  $x$  und dessen statistische Unabhängigkeit vom Quantisierungsfehler der Filterkoeffizienten ausgenutzt. Mit

$$\left( \sum_i f(i) \right)^2 = \sum_i \sum_j f(i) f(j) = \sum_i (f(i))^2 + \sum_{i \neq j} f(i) f(j) \quad (\text{B.82})$$

(Graham et al., 1994) kann (B.81) zu

$$\frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} = \sum_{l=0}^{q-1} \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{i=0}^r \sum_{k=0}^{L_l} \tilde{d}_{l,i} k^i \right)^2 \right\} + \sum_{\substack{l_1, l_2=0 \\ l_1 \neq l_2}}^{q-1} \mathcal{E} \left\{ \prod_{l \in \{l_1, l_2\}} \left( \sum_{i=0}^r \sum_{k=0}^{L_l} \tilde{d}_{l,i} k^i \right) \right\} \quad (\text{B.83})$$

umgeformt werden. Die rechte Summe in (B.83) besteht aus Summanden der Form  $k_1^{i_1} k_2^{i_2} \mathcal{E} \left\{ \tilde{d}_{l_1, i_1} \tilde{d}_{l_2, i_2} \right\}$ , die für  $l_1 \neq l_2$  wegen der Unkorreliertheit von  $\tilde{d}_{l,i}$  verschwinden. Die erneute Anwendung von (B.82) auf den verbleibenden linken Summanden auf der rechten Seite von (B.83) liefert

$$\frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \mathcal{E} \left\{ \left( \tilde{d}_{l,i} \sum_{k=0}^{L_l} k^i \right)^2 \right\} + \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{\substack{i_1, i_2=0 \\ i_1 \neq i_2}}^r \mathcal{E} \left\{ \prod_{i \in \{i_1, i_2\}} \left( \sum_{k=0}^{L_l} \tilde{d}_{l,i} k^i \right) \right\}, \quad (\text{B.84})$$

wovon wiederum der rechte Summand auf der rechten Seite verschwindet. Mit

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{B_{m+1}(n) - b_{m+1}}{m+1}$$

(Graham et al., 1994) mit den Bernoulli-Polynomen  $B_n(x) := \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} b_i x^{n-i}$  und den Bernoulli-Zahlen  $b_i = B_i(0)$ , die der Rekursion

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} b_i = \begin{cases} 1, & n=0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

genügen, folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} &= \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \mathcal{E} \left\{ \left( \frac{B_{i+1}(L_l+1) - b_{i+1}}{i+1} \tilde{d}_{l,i} \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=0}^r \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{j=0}^i \binom{i+1}{j} \frac{b_j (L_l+1)^{i+1-j}}{i+1} \tilde{d}_{l,i} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

Mit (B.82) kann (B.85) weiter zu

$$\frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{u=0}^{i-1} \sum_{v=0}^{i-1} \binom{i}{u} \binom{i}{v} \frac{b_u b_v}{i^2} \mathcal{E} \left\{ \tilde{d}_{l,i-1}^2 (L_l + 1)^{2i-u-v} \right\} \quad (\text{B.86})$$

umgeschrieben werden. Infolge der Annahme statistischer Unabhängigkeit von  $\tilde{d}_{l,i}$  und  $L_l$  können die zusammengesetzten Erwartungswerte in (B.86) als Produkt von Momenten von  $\tilde{d}_{l,i}$  und  $L_l + 1$  dargestellt werden,

$$\mathcal{E} \left\{ \tilde{d}_{l,i-1}^2 (L_l + 1)^{2i-p-q} \right\} = \mathcal{E} \left\{ \tilde{d}_{l,i-1}^2 \right\} \mathcal{E} \left\{ (L_l + 1)^{2i-p-q} \right\}.$$

Eine auf  $[a, b]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $X$  besitzt die Dichtefunktion  $f_X = \frac{1}{b-a} (H_a - H_b)$  und somit die Momente

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ X^k \} &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \tau^k d\tau = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(b-a)(k+1)} \\ &= \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} (\tau + a)^k d\tau = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{a^{k-i} (b-a)^i}{i+1}. \end{aligned}$$

Aus der Gleichverteilung von  $\tilde{d}_{l,i}$  auf  $[-\frac{1}{2\lambda}, \frac{1}{2\lambda}]$  sowie derjenigen von  $L_l + 1$  auf  $[\frac{n_k+1}{q} - \frac{1}{2}, \frac{n_k+1}{q} + \frac{1}{2}]$  folgt daher

$$\mathcal{E} \left\{ \tilde{d}_{l,i-1}^2 \right\} = \frac{1}{12\lambda^2}, \quad \mathcal{E} \left\{ (L_l + 1)^s \right\} = \sum_{j=0}^s \binom{s+1}{j} \frac{(2n_k - q + 2)^j}{(s+1)(2q)^j}.$$

Hiermit kann (B.86) als

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\tilde{y}}^2}{\sigma_x^2} &= \frac{q}{12\lambda^2} \sum_{i=1}^{r+1} \sum_{u=0}^{i-1} \sum_{v=0}^{i-1} \sum_{j=0}^{2i-u-v} \binom{i}{u} \binom{i}{v} \binom{2i-u-v+1}{j} \frac{b_u b_v (2n_k - q + 2)^j}{i^2 (2i-u-v+1) (2q)^j} \\ &= \frac{q}{12\lambda^2} \left( \frac{1}{(r+1)^2} \left( \frac{n_k}{q} \right)^{2(r+1)} + \mathcal{O}(n_k^{2r+1}) \right) \quad \text{für } n_k \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

angeschrieben werden.

# Literaturverzeichnis

- M. Abramowitz und I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover, New York, 1965.
- J.-P. Barbot, M. Fliess und T. Floquet. An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. In *Proc. 46th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 384–389, New Orleans, 2007.
- W. R. Bennett. Spectra of quantized signals. *Bell Syst Tech J*, 27:446–472, 1948.
- L. Biagiotti und C. Melchiorri. FIR filters for online trajectory planning with time- and frequency-domain specifications. *Control Eng Pract*, 20:1385–1399, 2012.
- R. B. Blackman. *Linear data-smoothing and prediction in theory and practice*. Addison-Wesley, Reading, 1965.
- M. Blum. Fixed memory least squares filters using recursion methods. *IRE Trans Inf Theory*, 3:178–182, 1957.
- M. U. A. Bromba. Symmetrische Digitalfilter in der physikalischen Messtechnik. Diplomarbeit, Gesamthochschule Paderborn, Paderborn, 1978.
- M. U. A. Bromba. *Entwurf digitaler Filter für spektrometrische Anwendungen*. Doktorarbeit, Universität-Gesamthochschule Paderborn, Paderborn, 1981.
- M. U. A. Bromba und H. Ziegler. Efficient computation of polynomial smoothing digital filters. *Anal Chem*, 51:1760–1762, 1979.
- M. U. A. Bromba und H. Ziegler. On Hilbert space design of least-weighted-squares digital filters. *Int J Circuit Theory Appl*, 11:7–32, 1983.
- S. Butterworth. On the theory of filter amplifiers. *Experimental Wireless and the Wireless Engineer*, 7:536–541, 1930.
- S. Chesne. Indirect boundary force measurements in beam-like structures using a derivative estimator. *J Sound Vib*, 333:6438–6452, 2014.
- R. Courant und D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*, Vol. 1. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1966.
- P. J. Davis und P. Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Academic Press, San Diego, 2. Auflage, 1984.

- C. E. de Brito Novaes und P. S. Pereira da Silva. On non-asymptotic state observers and their implementation in discrete time. In *Proc. 8th Brazilian Conf. on Dynamics, Control and their Applications*, Bauru, 2009.
- J. R. Dormand und P. J. Prince. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *J Comput Appl Math*, 6:19–26, 1980.
- H. W. Engl, M. Hanke und A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- A. Erdélyi, editor. *Higher transcendental functions*, Vol. 1. McGraw-Hill, New York, 1953a.
- A. Erdélyi, editor. *Higher transcendental functions*, Vol. 2. McGraw-Hill, New York, 1953b.
- J. Fan und I. Gijbels. *Local polynomial modelling and its applications*. Chapman & Hall, London, 1996.
- M. Fliess und H. J. Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Contr Op Ca Va*, 9:151–168, 2003a.
- M. Fliess und H. J. Sira-Ramírez. State reconstructors: A possible alternative to asymptotic observers and Kalman filters. In *Proc. CESA 2003*, Lille, 2003b.
- M. Fliess und H. J. Sira-Ramírez. Control via state estimations of some nonlinear systems. In *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS 2004)*, Stuttgart, 2004.
- M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier und H. J. Sira-Ramírez. Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples. In H. J. Sira-Ramírez und G. S. Navarro, editors, *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*. Innovación Edit. Lagares de México, 2003.
- O. Forster. *Analysis*, Vol. 1. Vieweg, Wiesbaden, 9. Auflage, 2008.
- R. W. Freund und H. W. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer, Berlin, 10. Auflage, 2007.
- J. Fröhlich. Parameter derivatives of the Jacobi polynomials and the Gaussian hypergeometric function. *Integr Transf Spec F*, 2:253–266, 1994.
- C. García-Rodríguez, J. A. Cortés-Romero und H. J. Sira-Ramírez. Algebraic identification and discontinuous control for trajectory tracking in a perturbed 1-dof suspension system. *IEEE T Ind Electron*, 56:3665–3674, 2009.
- A. Gensior. *Beiträge zur flachheitsbasierten Regelung leistungselektronischer Systeme*. Doktorarbeit, Technische Universität Dresden, Dresden, 2008.

- A. Gensior, J. Weber, J. Rudolph und H. Güldner. An algebraic parameter identification algorithm and asymptotic observers for estimation of the load of a boost converter. In *Proc. IEEE ISIE*, pages 7–11, Vigo, 2007.
- A. Gensior, J. Weber, J. Rudolph und H. Güldner. Algebraic parameter identification and asymptotic estimation of the load of a boost converter. *IEEE T Ind Electron*, 55:3352–3360, 2008.
- A. Gil, J. Segura und N. M. Temme. *Numerical methods for special functions*. SIAM, Philadelphia, 2007.
- R. L. Graham, D. E. Knuth und O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley, Reading, 2. Auflage, 1994.
- R. W. Hamming. *Numerical methods for scientists and engineers*. Dover, New York, 2. Auflage, 1986.
- R. W. Hamming. *Digital filters*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 3. Auflage, 1989.
- M. Hanke und O. Scherzer. Inverse problem light: Numerical differentiation. *Am Math Mon*, 108:512–521, 2001.
- M. M. Hayes. *Statistical digital signal processing and modeling*. Wiley, New York, 1996.
- H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*, Vol. 1. Teubner, Stuttgart, 14. Auflage, 2001.
- W. Hu und J. Mao. Improved algebraic method for linear continuous-time model identification. *Journal of control and decision*, 1:180–189, 2014.
- V. Judalet, S. Glaser, C. Boussard und S. Mammam. Implementation of first order algebraic estimators for numerical filtering and derivation applications. In *Proc. 19th IFAC World Congress*, pages 9152–9158, Kapstadt, 2014.
- J. F. Kaiser. Digital filters. In F. F. Kuo und J. F. Kaiser, editors, *System analysis by digital computer*, pages 218–285. Wiley, New York, 1966.
- S. M. Kay. *Modern spectral estimation: Theory and application*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.
- A. Y. Khinchin. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Mathematische Annalen*, 109:604–615, 1934.
- A. Y. Khinchin. *Continued fractions*. The University of Chicago Press, Chicago, 3. Auflage, 1964.
- L. Kiltz und J. Rudolph. Parametrization of algebraic numerical differentiators to achieve desired filter characteristics. In *Proc. 52nd IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 7010–7015, Florenz, 2013.

- L. Kiltz, M. Mboup und J. Rudolph. Fault diagnosis on a magnetically supported plate. In *Proc. 1st Int. Conf. on Systems and Computer Science*, Villeneuve d'Ascq, 2012.
- L. Kiltz, M. Janocha und J. Rudolph. Algebraic estimation of impact times: juggling a ball with a magnetically levitated plate. In *Proc. 2nd Int. Conf. on Systems and Computer Science*, pages 145–149, Villeneuve d'Ascq, 2013.
- L. Kiltz, C. Join, M. Mboup und J. Rudolph. Fault-tolerant control based on algebraic derivative estimation applied on a magnetically supported plate. *Control Eng Pract*, 26:107–115, 2014.
- V. A. Kotelnikov. On the transmission capacity of 'ether' and of cables in electrical communication. In *Proc. 1st All-Union Conf. on the technological reconstruction of the communications sector and the development of low-current engineering*, Moskau, 1933.
- A. R. Krommer und C. W. Ueberhuber. *Computational integration*. SIAM, Philadelphia, 1998.
- V. I. Krylov. *Approximate calculation of integrals*. Dover, Mineola, 1962.
- C. Lanczos. *Applied analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1956.
- S.-O. Lindert und J. Rudolph. Ein Verfahren zur Identifikation harmonischer Störungen. In *Workshop des GMA-Fachausschusses 1.40 „Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“*. 2003.
- K. D. Listmann und Z. Zhao. A comparison of methods for higher-order numerical differentiation. In *Proc. 2013 European Control Conf.*, pages 3676–3681, Zürich, 2013.
- D.-Y. Liu. *Analyse d'erreurs d'estimateurs des dérivées de signaux bruités et applications*. Thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille - Lille 1, Lille, 2011.
- D.-Y. Liu und T.-M. Laleg-Kirati. Robust fractional order differentiators using generalized modulating functions method. *Signal Process*, 107:395–406, 2015.
- D.-Y. Liu, O. Gibaru und W. Perruquetti. Differentiation by integration with Jacobi polynomials. *J Comput Appl Math*, 235:3015–3032, 2011a.
- D.-Y. Liu, O. Gibaru und W. Perruquetti. Error analysis of Jacobi derivative estimators for noisy signals. *Numer Algor*, 58:53–83, 2011b.
- D.-Y. Liu, O. Gibaru, W. Perruquetti und T.-M. Laleg-Kirati. Fractional order differentiation by integration with Jacobi polynomials. In *Proc. 51st IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 624–629, Maui, 2012.

- D.-Y. Liu, O. Gíbaru und W. Perruquetti. Synthesis on a class of algebraic differentiators and application to nonlinear observation. In *Proc. 33rd Chinese Control Conf. (CCC)*, pages 2592–2599, Nanjing, 2014a.
- D.-Y. Liu, T.-M. Laleg-Kirati, W. Perruquetti und O. Gíbaru. Non-asymptotic state estimation for a class of linear time-varying systems with unknown inputs. In *Proc. 19th IFAC World Congress*, pages 3732–3738, Kapstadt, 2014b.
- Z. V. Lopez Murgueytio, P. S. Pereira da Silva und C. E. de Brito Novaes. Closed-loop performance analysis of algebraic estimators. *J Control Autom Electr Syst*, 24:725–740, 2013.
- D. G. Luenberger. *Optimization by vector space methods*. Wiley, New York, 1969.
- H. D. Lüke. The origins of the sampling theorem. *IEEE Commun Mag*, 37:106–108, 1999.
- J. Luo, K. Ying und J. Bai. Savitzky-Golay smoothing and differentiation filter for even number of data. *Signal Process*, 85:1429–1434, 2005.
- W. Magnus, F. Oberhettinger und R. P. Soni. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Springer, Berlin, 3. Auflage, 1966.
- P. Mai und C. Hillermeier. Least-squares-basierte Ableitungsschätzer: Theorie und Einstellregeln für den praktischen Einsatz. *at - Automatisierungstechnik*, 56: 530–538, 2008.
- M. Mboup. Parameter estimation for signals described by differential equations. *Appl Anal*, 88:29–52, 2009.
- M. Mboup und S. Riachy. A frequency domain interpretation of the algebraic differentiators. In *Proc. 19th IFAC World Congress*, pages 9147–9151, Kapstadt, 2014.
- M. Mboup, C. Join und M. Fliess. A revised look at numerical differentiation with an application to nonlinear feedback control. In *Proc. 15th Mediterranean Conf. on Control and Automation*, Athen, 2007.
- M. Mboup, C. Join und M. Fliess. Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numer Algor*, 50:439–467, 2009.
- G. Meinardus. *Approximation of functions: Theory and numerical methods*. Springer, Berlin, 1967.
- J. Mikusiński. *Operational calculus*, Vol. 1. Pergamon Press, Oxford, 2. Auflage, 1983.

- R. Morales, J. A. Somolinos und H. J. Sira-Ramírez. Control of a DC motor using algebraic derivative estimation with real time experiments. *Measurement*, 47: 401–417, 2014.
- K. E. Muller. Computing the confluent hypergeometric function,  $m(a,b,x)$ . *Numer Math*, 90:179–196, 2001.
- M. Nardin, W. F. Perger und A. Bhalla. Numerical evaluation of the confluent hypergeometric function for complex arguments of large magnitudes. *J Comput Appl Math*, 39:193–200, 1992.
- A. F. Nikiforov und V. B. Uvarov. *Special functions of mathematical physics: a unified introduction with applications*. Birkhäuser, Basel, 1988.
- C. Nöthen. Beiträge zur Rekonstruktion nicht direkt gemessener Größen bei der Silizium-Einkristallzüchtung nach dem Czochralski-Verfahren. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, Dresden, 2007.
- H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Trans. AIEE*, 47: 617–644, 1928.
- J.-R. Ohm und H. D. Lüke. *Signalübertragung*. Springer, Heidelberg, 11. Auflage, 2010.
- F. W. J. Olver. Uniform, exponentially improved, asymptotic expansions for the confluent hypergeometric function and other integral transforms. *SIAM J Math Anal*, 22:1475–1489, 1991.
- A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer. *Discrete-time signal processing*. Pearson, Upper Saddle River, 3. Auflage, 2009.
- A. V. Oppenheim und A. S. Willsky. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 2. Auflage, 1997.
- A. Papoulis. *The Fourier integral and its application*. McGraw-Hill, New York, 1962.
- A. Papoulis und S. U. Pillay. *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, Boston, 4. Auflage, 2002.
- E. Parzen. *Stochastic processes*. Dover, New York, 2015.
- J. Pearson. Computation of hypergeometric functions. Master's thesis, University of Oxford, Oxford, 2009.
- P.-O. Persson und G. Strang. Smoothing by Savitzky-Golay and Legendre filters. In J. Rosenthal und D. S. Gilliam, editors, *Mathematical Systems Theory in Biology, Communications, Computation, and Finance*, pages 301–316. Springer, New York, 2003.

- C. M. Rader und B. Gold. Digital filter design techniques in the frequency domain. *P IEEE*, 55:149–171, 1967.
- J. Reger und J. Jouffroy. Algebraische Ableitungsschätzung im Kontext der Rekonstruierbarkeit. *at - Automatisierungstechnik*, 56:324–331, 2008.
- J. Reger und J. Jouffroy. On algebraic time-derivative estimation and deadbeat state reconstruction. In *Proc. 48th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 1740–1745, Shanghai, 2009.
- J. Reger, H. J. Sira-Ramírez und M. Fliess. On non-asymptotic observation of nonlinear systems. In *Proc. 44th IEEE Conf. on Decision and Control and 2005 European Control Conf.*, pages 4219–4224, Sevilla, 2005.
- J. Reger, P. Mai und H. J. Sira-Ramírez. Robust algebraic state estimation of chaotic systems. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*, pages 326–331, München, 2006.
- J. Riordon, E. Zubritsky und A. Newman. Top 10 articles. *Anal Chem*, 72:324A–329A, 2000.
- J. Rudolph und L. Kiltz. Algebraische Ableitungsschätzung und Bestimmung von Unstetigkeiten in verrauschten Messsignalen, 2013. URL <http://www.uni-saarland.de?id=algest>. Abgerufen am 11. Juni 2017.
- A. Savitzky und M. J. E. Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Anal Chem*, 36:1627–1639, 1964.
- R. W. Schafer. What is a Savitzky-Golay filter? *IEEE Signal Proc Mag*, 28:111–117, 2011.
- R. Scheithauer. *Signale und Systeme*. Teubner, Stuttgart, 1998.
- M. Schwalb Moraes und P. S. Pereira da Silva. Algebraic derivative estimation and applications in adaptive control of magnetic levitation systems. In *Proc. 23rd ABCM Int. Congress of Mechanical Engineering*, Rio de Janeiro, 2015a.
- M. Schwalb Moraes und P. S. Pereira da Silva. Model-free control of magnetic levitation systems through algebraic derivative estimation. In *Proc. 23rd ABCM Int. Congress of Mechanical Engineering*, Rio de Janeiro, 2015b.
- L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1950.
- H. R. Schwarz und N. Köckler. *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 8. Auflage, 2011.
- C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Syst Tech J*, 27:379–423, 623–656, 1948.

- C. E. Shannon. Communication in the presence of noise. *P IRE*, 37:10–21, 1949.
- L. Sidhom. *Sur les différentiateurs en temps réel. Algorithmes es applications*. Thèse, Institut national des sciences appliquées (INSA) des Lyon, Lyon, 2011.
- W. Singhose. Command shaping for flexible systems: A review of the first 50 years. *Int J Precis Eng Man*, 10:153–168, 2009.
- S. W. Smith. *The scientist and engineer's guide to digital signal processing*. California Technical Publishing, San Diego, 2. Auflage, 1999.
- P. Stoica und R. Moses. *Spectral analysis of signals*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005.
- A. H. Stroud. *Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations*. Springer, New York, 1974.
- A. H. Stroud und D. Secrest. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- G. Szegő. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, New York, überarbeitete Auflage, 1959.
- W. E. Thomson. Delay networks having maximally flat frequency characteristics. *Proc. IEEE - Part III: Radio and Communication Engineering*, 96:487–490, 1949.
- E. Tisserand, J. Lezama, P. Schweitzer und Y. Berviller. Series arcing detection by algebraic derivative of the current. *Electr Pow Syst Res*, 119:91–99, 2015.
- F. G. Tricomi. *Vorlesungen über Orthogonalreihen*. Springer, Berlin, 1955.
- S. V. Vaseghi. *Advanced digital signal processing and noise reduction*. Wiley, Chichester, 4. Auflage, 2008.
- C. P. A. Vasseur, C. V. Rajagopalan, M. Couvreur, J.-M. Toulotte und O. Dubois. A microprocessor oriented segmentation technique: An efficient tool for electrophysiological signal analysis. *IEEE T Instrum Meas*, 28:259–262, 1979.
- M. P. Wand und M. C. Jones. *Kernel smoothing*. Chapman & Hall, London, 1995.
- K. T. W. Weierstraß. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen. In *Sitzungsberichte d. Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Vol. 2, pages 633–639, 789–805, 1885.
- E. T. Whittaker und G. N. Watson. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 4. Auflage, 1927.

N. Wiener. Generalized harmonic analysis. *Acta Mathematica*, 55:117–258, 1930.

J. Zehetner, J. Reger und M. Horn. A derivative estimation toolbox based on algebraic methods - theory and practice. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Control Applications*, pages 331–336, Singapur, 2007.