

**Über die relativistische Struktur
logischer Zeit
in verteilten Systemen**

Friedemann Mattern

A05/91

Oktober 1991

Über die relativistische Struktur logischer Zeit in verteilten Systemen

Friedemann Mattern

FB Informatik, Universität des Saarlandes, D 6600 Saarbrücken

1 Zeit

*Was also ist die Zeit?
Wenn niemand mich danach fragt,
weiß ich's,
will ich's aber einem Fragenden erklären,
weiß ich's nicht.*

Augustinus, Bekenntnisse

Zeit ist ein flüchtiges Phänomen, sie vergeht lautlos und unaufhaltsam.¹ Dennoch spielt Zeit eine wichtige Rolle im täglichen Leben – so ist “Zeit” auch das am häufigsten verwendete Substantiv der deutschen Sprache [15]. Wie sehr die Zeit unser Handeln und Denken prägt, indem sie fast alle Lebensbereiche erfaßt, wird schon an einer willkürlichen Auswahl von “Zeitbegriffen” aus einem Wörterbuch deutlich, die in dieser Aneinanderreihung fast etwas skuril wirkt: *Zeitalter, Zeitarbeit, Zeitbombe, Zeitdruck, Zeitfrage, Zeitgeber, Zeitgeist, Zeitgenosse, Zeitgeschmack, Zeitkarte, Zeitlauf, Zeilupe, Zeitnehmer, Zeitnot, Zeitpolitik, Zeitpunkt, Zeitraffer, Zeitraum, Zeitschloß, Zeitwende, Zeitwert, Zeitzeichen*. Tritt das bestimmende Element “Zeit” als Suffix auf, dann läßt sich eine nicht minder skurile Wortliste angeben: *Atomzeit, Endzeit, Freizeit, Friedenszeit, Frühzeit, Gleitzeit, Gründerzeit, Halbwertszeit, Jahreszeit, Lebenszeit, Neuzeit, Ortszeit, Raumzeit, Spätzeit, Steinzeit, Tageszeit, Teilzeit, Uhrzeit, Vorwarnzeit, Zwischenzeit*. Auch Redewendungen und Metaphern zeugen vom facettenreichen Erscheinungsbild der Zeit, so kann man Zeit nicht nur sparen, verlieren, absitzen, verbrauchen oder verschwenden, sondern auch heraus schlagen, schinden, rauben, vertreiben und sogar totschiagen! Schließlich kann Zeit schön, gut, knapp, närrisch oder nachtschlafend sein.

Längst schon hat man sich auf eine gemeinsame, vom zu ungenau gewordenen Verlauf der Gestirne unabhängige, “Weltzeit” geeinigt – der zeitkompakte Globus ist nicht nur für weltweit operierende Börsenmakler eine Realität geworden: Vielfältige globale Steuerungsmechanismen beruhen auf der Existenz einer gemeinsamen Zeit, “materialisiert” und implementiert in Form von genau synchronisierten und oft kunstvoll konstruierten Uhren.

Was aber wäre, wenn es keine gemeinsame Zeitbasis gäbe? Wenn sich diese als bloße Fiktion herausstellen sollte? Oder wenn sie zwar theoretisch existiert, praktisch jedoch nicht erfahrbar wäre? Könnte man in einer solchen Welt überhaupt noch konsistente Aussagen über den globalen Zustand erhalten? Diese Fragestellungen sind nicht aus der Luft gegriffen, sie haben in mindestens zweierlei Hinsicht einen realen Hintergrund: Zum einen relativiert die moderne Physik den Begriff der Gleichzeitigkeit, Zeit ist also eigentlich kein absolutes und überall gleich verfügbares “Ding”, zum zweiten spiegelt die Abwesenheit einer gemeinsamen Zeitbasis die Situation in verteilten Systemen wider, bei denen autonome Prozesse ausschließlich über Nachrichten mit nicht vernachlässigbaren (und oft

¹ *Time goes, you say? Ah no! Alas, time stays, we go.* (Austin Dobson, *The Paradox of Time.*)

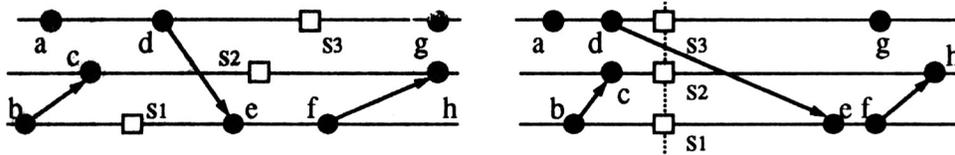


Abbildung 1: Zwei äquivalente Zeitdiagramme.

nicht genau bekannten) Übertragungszeiten miteinander kommunizieren. Ausreichend genau synchronisierte Uhren stehen in solchen Systemen oft nicht zur Verfügung, in jedem Fall ist aber aus theoretischer Sicht die Fragestellung interessant, welche den globalen Zustand betreffenden Probleme unter diesen Bedingungen noch gelöst werden können: Wie führt man etwa eine korrekte Volkszählung ohne Uhr, Kalender und Stichdatum durch?

Das Phänomen Zeit wurde von Philosophen, Physikern, Logikern, Psychologen, Biologen und anderen Wissenschaftlern zu ergründen versucht.² Obwohl Zeitphänomene auch in der Informatik eine wichtige Rolle spielen – die dort konstruierten und analysierten Systeme laufen in der Zeit ab, Berechnungen sind Zustandsfolgen über einer globalen Zeit und Algorithmen sollten stets so wenig Zeit wie möglich verbrauchen – war die Frage nach dem Wesen der Zeit für diese Disziplin nie von Bedeutung. Um diesem Defizit ein wenig abzuhelpfen, soll in diesem Beitrag das Konzept der Zeit, welches verteilten Systemen zugrundeliegt, untersucht werden. Dabei wird sich herausstellen, daß in solchen Systemen Zeit einen der bekannten Minkowski'schen Raumzeit vergleichbaren Charakter hat. Die Darstellung dieser "relativistischen Struktur" der Zeit ist unser Hauptthema.

2 Verteilte Berechnungen und Zeitdiagramme

Diese Art der Veranschaulichung des Zeitablaufs durch ein zeichnerisches Bild im Raum kann sehr nützlich sein; für sie war jedoch die Erfindung der Relativitätstheorie nicht einmal notwendig, denn das hat jeder graphische Eisenbahnfahrplan schon ebenso gemacht.

Hans Reichenbach, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre

Ein *verteilt*es System besteht aus mehreren sequentiellen Prozessen, die ausschließlich über *Nachrichten* miteinander kommunizieren. Die Nachrichtenübertragungszeit kann dabei i.a. nicht vernachlässigt werden, sie soll hier als unbestimmt (jedoch endlich) angenommen werden. Von einem einheitlichen Zeitbegriff wird zunächst abstrahiert – zumindest in dem Sinne, daß die verschiedenen Prozesse eine gemeinsame Zeit, etwa durch Zugriff auf eine globale Uhr, nicht erfahren können. Unter diesen Voraussetzungen hat *a priori* kein Prozeß eine konsistente Sicht des globalen Zustandes. Diese für verteilte Systeme charakteristische Eigenschaft verleiht solchen Systemen gegenüber klassischen zentralistischen Systemen eine neue Qualität mit vielen interessanten und nicht einfach zu lösenden Problemen [18].

Das Verhalten jedes Prozesses im System wird durch einen Algorithmus bestimmt, der die Folge lokaler Aktionen sowie die Reaktion des Prozesses auf eintreffende Nachrichten festlegt. Die mittels Nachrichtenaustausch koordinierte gleichzeitige Ausführung der lokalen Algorithmen wird als *verteilte Berechnung* bezeichnet. Formal kann das Stattfinden von Aktionen zu atomaren *Ereignissen* abstrahiert werden; man unterscheidet dabei

²Der am interdisziplinären oder eher "multikulturellen" Charakter dieser Untersuchungen interessierte Leser sei z.B. auf die Tagungsbände der "International Society for the Study of Time" verwiesen [11], deren erste Konferenz 1969 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach stattfand.

zwischen *Sendeereignissen*, *Empfangsereignissen* und *internen Ereignissen*. Eine solchermaßen auf das von außen beobachtbare Verhalten reduzierte verteilte Berechnung läßt sich an einem *Zeitdiagramm* veranschaulichen (vgl. Abb. 1), bei dem die Ereignisse eines Prozesses in der Reihenfolge ihres Auftretens auf einer Prozeßachse angeordnet werden und man sich vorstellt, daß eine (fiktive) globale Zeit von links nach rechts fließt.³ Nachrichten werden als von links nach rechts laufende Pfeile dargestellt; Aktionen, bzw. die durch sie induzierten Ereignisse, werden aufgrund ihrer Atomarität durch Punkte (oder kleine Quadrate) symbolisiert.

In Zeitdiagrammen wird der Ablauf einer verteilten Berechnung in einer Weise repräsentiert, wie sie ein idealer externer Beobachter sehen würde, der über jedes Stattfinden eines Ereignisses sofort informiert wird. Offenbar ist es für den Verlauf der Berechnung jedoch unerheblich, zu welchem exakten globalen Zeitpunkt ein Ereignis stattfindet, vorausgesetzt, die lokale Reihenfolge der Ereignisse wird nicht verändert und Nachrichtepfeile verlaufen immer von links nach rechts. Daher stellt ein Zeitdiagramm stets eine ganze Klasse in einem später zu präzisierenden Sinne äquivalenter Abläufe dar. In dieser Hinsicht ist das linke Zeitdiagramm aus Abb. 1 äquivalent zum rechten Zeitdiagramm. Salopp ausgedrückt konnte das linke Diagramm durch Stauchen und Dehnen der lokalen Prozeßachsen in das rechte Diagramm überführt werden, wobei hier allerdings die Ereignisse s_1, s_2, s_3 senkrecht übereinander angeordnet wurden und durch eine vertikale Linie verbunden wurden. Derartige “Schnittlinien” werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen.

Zur präzisen Formulierung der Begriffe treffen wir einige Definitionen, wobei wir zunächst von einem gegebenen Zeitdiagramm und der dadurch repräsentierten verteilten Berechnung mit einer Menge E von Ereignissen, die bei den Prozessen P_1, \dots, P_n stattfinden, ausgehen.

Definition 2.1 (Globale Ereignisordnung ' \prec ').

Es bezeichne ' \prec ' die kleinste transitive Relation auf der Ereignismenge E , so daß für $e, e' \in E$ die Beziehung $e \prec e'$ gilt, wenn

- (1) *e und e' im gleichen Prozeß stattfinden und e der unmittelbare Vorgänger von e' ist oder*
- (2) *e' durch den Empfang einer Nachricht ausgelöst wird, die von Ereignis e ausgesendet wurde (d.h. e' das zum Sendereignis e gehörige Empfangsereignis ist).*

Die reflexive Hülle von \prec wird mit \preceq bezeichnet. Da in Zeitdiagrammen Nachrichten voraussetzungsgemäß nur von links nach rechts laufen, enthält die ' \prec '-Relation keine Zyklen. Bei ihr handelt es sich um die von Lamport [16] definierte “happens before”-Relation; $e \prec e'$ bedeutet, daß e vor e' stattfindet. Hierbei ist “vor” sowohl räumlich zu interpretieren (e liegt links von e') als auch zeitlich im Sinne der (fiktiven) Globalzeit. Man beachte, daß die Umkehrung dieses Sachverhalts nicht gilt, d.h. es ist nicht in jedem Fall $e \prec e'$, wenn in einem Zeitdiagramm e links von e' liegt (vgl. dazu beispielsweise die Ereignisse a

³“*It is true that there are certain implicit dangers in using such graphical representations, because in every geometrical diagram time appears to be misleadingly spatialized. On the other hand, such diagrams, provided we do not forget their symbolic nature, have a definite advantage...*” (Aus Milič Čapek’s philosophischer Kritik am Minkowski’schen Raumzeit-Konzept [25] und dessen vereinfachten Modellvorstellungen – wie später gezeigt wird, sind unsere Zeitdiagramme den bei der Darstellung des Minkowski’schen Raumzeit-Konzepts verwendeten Diagrammen in der Tat sehr ähnlich.)

und c in Abbildung 1).⁴ Offenbar dient die Halbordnung ' \prec ' zur Abstraktion von der genauen zeitlichen Lage der Ereignisse, die beiden Diagramme aus Abb. 1 beschreiben somit die gleiche Halbordnung. Die ' \prec '-Relation kann als (potentielle) *Kausalität* interpretiert werden und läßt sich an Zeitdiagrammen einfach als von links nach rechts laufende Pfade veranschaulichen; wir halten dies in einem Theorem fest:

Theorem 2.2 (Kausalkette).

In einem Zeitdiagramm gilt für zwei Ereignisse e, e' die Relation $e \prec e'$ genau dann, wenn es (unter Einbeziehung der von links nach rechts laufenden Prozeßachsen) einen Pfad von e nach e' gibt.

Die Korrektheit der Aussage ist insbesondere dann evident, wenn $e \prec e'$ als "e kann e' beeinflussen" interpretiert wird. Formal läßt sich das Theorem durch Induktion über die Pfadlänge unter Ausnutzung der Transitivität der ' \prec '-Relation beweisen. In Abb. 1 ist beispielsweise $b \prec c$ (b ist ein direkter Vorgänger von c) und $a \prec h$ (Pfad von a über d, e, f zu h). Ein Pfad im Zeitdiagramm ist also nichts anderes als eine graphische Veranschaulichung einer (potentiellen) *Kausalkette*.

Für spätere Überlegungen ist die symmetrische Relation "kausal unabhängig" von Interesse. Wir treffen dazu folgende Definition:

Definition 2.3 (' \parallel '-Relation).

Für zwei Ereignisse $e, e' \in E$ gilt $e \parallel e'$ genau dann, wenn $\neg(e \prec e') \wedge \neg(e' \prec e)$.

Offensichtlich gilt somit für je zwei Ereignisse e, e' entweder $e \prec e'$ oder $e' \prec e$ oder $e \parallel e'$. Bisher sind wir von einer gegebenen verteilten Berechnung ausgegangen, haben den Begriff der verteilten Berechnung selbst jedoch nur informell eingeführt. Die formale Definition soll nun konform zum bisher Gesagten nachgeholt werden.

Definition 2.4 (Verteilte Berechnung).

Eine (n -fach) verteilte Berechnung über einer Ereignismenge E ist ein n -Tupel (E_1, \dots, E_n) mit einer Menge $\Gamma \subseteq E \times E$ von korrespondierenden Sende- und Empfangsereignissen, wobei jedes $E_i \subseteq E$ vermöge einer Relation \prec_i linear geordnet ist und folgende drei Bedingungen erfüllt sein müssen:

1. Die Ereignismengen E_1, \dots, E_n sind paarweise disjunkt.
2. Γ ist links- und rechtseindeutig.
3. Die kleinste transitive Relation \prec , die die zwei Axiome

$$A1. a \prec_i b \Rightarrow a \prec b$$

$$A2. (a, b) \in \Gamma \Rightarrow a \prec b$$

erfüllt, ist eine (irreflexive) Halbordnung.

Offenbar stellen die E_i die lokalen Berechnungen der Prozesse dar, Γ die Nachrichten, und ' \prec ' ist die weiter oben bereits eingeführte "happens before"-Relation, welche die Kausalität vermittelt. Bedingung 3 der Definition besagt, daß diese Relation zyklensfrei sein muß – eine intuitiv einleuchtende Forderung. Die Zyklensfreiheit garantiert, daß sich zu jeder verteilten Berechnung ein Zeitdiagramm angeben läßt, bei dem die Nachrichtenpfeile stets von links nach rechts laufen. Ordnet man die Ereignisse auf den Prozeßachsen entsprechend der ' \prec_i '-Relation von links nach rechts an, so ergibt sich damit bei einer ebenfalls von links nach rechts laufenden globalen Zeit⁵ die beruhigende Erkenntnis, daß die Zukunft die Vergangenheit nicht beeinflussen kann.

⁴ *Denn nicht alles, was aufeinander folgt, folgt auseinander.* (Ferdinand Seibt in "Die Zeit als Kategorie der Geschichte und als Kondition des historischen Sinns" [21].)

⁵ *"Everybody knows that time flows from left to right unless you are left-handed"* (Anonymer Graffito, der auf dem elektronischen "Bulletin Board" des internationalen Usenet-Netzes zu lesen war.)

3 Schnitte und Verbände

*... ist das ganze Dasein
ein ewiges Trennen und Verbinden.*

J.W. Goethe, Maximen und Reflexionen

Unser Anliegen ist die Definition eines adäquaten Zeitbegriffs für verteilte Systeme. Zwar haben wir vorausgesetzt, daß eine gemeinsame globale Zeit innerhalb eines verteilten Systems nicht erfahrbar ist, doch dürfen wir als Ausgangspunkt unserer Überlegungen Zeitdiagramme mit ihren fiktiven und dennoch suggestiven globalen Zeitachsen⁶ betrachten.

In einem derartigen Diagramm sollten sich globale Zeitpunkte als senkrechte Linien darstellen, die alle Prozeßachsen “zur gleichen Zeit” schneiden. Da es zu einer verteilten Berechnung kein kanonisches Zeitdiagramm gibt, scheint dieser Ansatz zunächst problematisch zu sein. Nun lassen sich jedoch alle zueinander äquivalenten Zeitdiagramme (d.h. alle Zeitdiagramme, die die gleiche Berechnung repräsentieren), durch Stauchen und Dehnen der lokalen Prozeßachsen ineinander überführen. Diese “Gummiband-Äquivalenztransformationen” sind damit genau diejenigen Transformationen auf Zeitdiagrammen, die die Kausalstruktur invariant lassen. Fixiert man daher eine (dehnbare) senkrechte Schnittlinie an den Prozeßachsen, indem man dort “Scharniere” in Form von Schnittereignissen s_1, \dots, s_n anbringt (vgl. Abb. 1), so wird durch die Gummibandtransformation die senkrechte Schnittlinie in eine schiefe oder gar zickzackförmige Linie transformiert. Unabhängig von ihrer Verformung teilt die Schnittlinie die Menge der Ereignisse jedoch in die gleichen zwei disjunkte Mengen, die “Vergangenheit” (die Ereignisse links der Schnittlinie) und die “Zukunft” (die restlichen Ereignisse). Damit qualifizieren sich Schnittlinien von Zeitdiagrammen als “Ersatz” für globale Zeitpunkte. Dieser Sachverhalt motiviert die Definition eines *Schnittes* einer verteilten Berechnung über einer Ereignismenge E als eine nach unten abgeschlossene Teilmenge von E :

Definition 3.1 (Lokale Ereignisordnung ' \prec_l ').

Die lokale Ereignisordnung ' \prec_l ' ist definiert durch: $e \prec_l e'$ genau dann, wenn $e \prec e'$ und wenn e und e' Ereignisse des gleichen Prozesses sind.

Definition 3.2 (Schnitt).

Eine endliche Teilmenge $S \subseteq E$ heißt Schnitt von E , falls $(e \in S \wedge e' \prec_l e) \Rightarrow e' \in S$.

Man beachte, daß eine Schnittlinie lediglich ein geometrisches Gebilde ist, das ein Zeitdiagramm durchtrennt, während ein Schnitt formal eine Menge von Ereignissen ist. Jeder Schnittlinie ist allerdings durch die Menge der “linken” Ereignisse ein Schnitt assoziiert, und oft ist es bequem, sich unter einem Schnitt anschaulich eine damit assoziierte Schnittlinie in einem Zeitdiagramm vorzustellen. Von besonderer Bedeutung ist eine spezielle Klasse von Schnitten:

Definition 3.3 (Konsistenter Schnitt).

Eine endliche Teilmenge $S \subseteq E$ heißt konsistenter Schnitt von E , falls $(e \in S \wedge e' \prec e) \Rightarrow e' \in S$.

Wie man leicht sieht, ist wegen $\prec_l \subseteq \prec$ jeder konsistente Schnitt ein Schnitt entsprechend Definition 3.2. Schnitte, die keine konsistenten Schnitte sind, heißen *inkonsistent*.

⁶ “Eine geometrische Gerade ist ein sehr schlechtes Bild für die Zeit, auch wenn sie sich als Zeitachse bei der graphischen Darstellung größerer Verkaufszahlen und abnehmender Profite bewährt hat.” (J.T. Fraser in [10].)

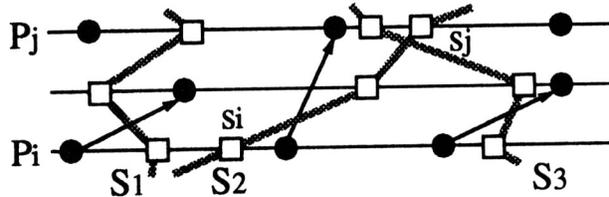


Abbildung 2: Konsistente und inkonsistente Schnitte.

Abbildung 2 zeigt Schnittlinien zu konsistenten (S_1, S_3) und zu inkonsistenten (S_2) Schnitten. Da für konsistente Schnitte mit einem Empfangsereignis definitionsgemäß auch das zugehörige Sendeereignis zum Schnitt gehört, läßt sich eine inkonsistente Schnittlinie daran erkennen, daß eine Nachricht “aus der Zukunft” existiert, also eine Nachricht, deren Sendeereignis rechts der Schnittlinie liegt, obwohl sich das zugehörige Empfangsereignis links davon befindet. Solche Nachrichten, die die Schnittlinie “in falscher Richtung” überqueren, bewirken, daß mindestens zwei Schnittereignisse s_i, s_j kausal abhängig voneinander sind – offenbar existiert eine Kausalkette vom Schnittereignis s_i des Sendeprozesses P_i zum Schnittereignis s_j des Empfangsprozesses P_j (vgl. Abb. 2). Für konsistente Schnitte ist dies nicht der Fall, hier sind alle Schnittereignisse paarweise kausal unabhängig voneinander.

Intuitiv sollte in verteilten Systemen die Rolle von Zeitpunkten einer globalen Zeit von senkrechten Schnittlinien übernommen werden – daher sind Schnitte zu solchen Schnittlinien, die sich “geradebiegen” lassen, besonders interessant. Das folgende Theorem macht hierzu eine Aussage:

Theorem 3.4 (Gummiband-Konsistenzkriterium).

Eine Schnittlinie eines Zeitdiagramms repräsentiert genau dann einen konsistenten Schnitt, wenn sie sich mit der Gummibandtransformation in eine senkrechte Schnittlinie transformieren läßt.

Die nachfolgend skizzierte Überlegung zeigt, wie sich für das Theorem ein Beweis nach dem Do-it-yourself-Prinzip – im wörtlichen Sinne – “basteln” läßt: Ein gegebenes Zeitdiagramm mit einer konsistenten Schnittlinie schneide man entlang dieser Linie in zwei Hälften. Die rechte Hälfte schiebe man dann soweit nach rechts, bis sich die beiden Hälften nicht mehr überlappen und durch einen (senkrechten) Spalt getrennt sind. Durchtrennte Nachrichtenpfeile müssen wieder verbunden werden, sie verlaufen weiterhin von links nach rechts, da lediglich die Empfangsereignisse weiter in die Zukunft gerückt wurden. Die Schnittlinie läßt sich nun senkrecht in den Spalt zwischen den beiden Hälften legen. Umgekehrt ist es einleuchtend, daß eine für die Inkonsistenz des Schnittes verantwortliche Nachricht “aus der Zukunft” nicht in einem Zeitdiagramm mit senkrechter Schnittlinie dargestellt werden kann.

Konsistente Schnitte lassen sich als Mengen bereits geschehener Ereignisse auffassen – mit dieser temporalen Charakterisierung nähern wir uns wieder unserem Ziel der Definition eines Zeitbegriffs für verteilte Systeme. Da sich rechts einer Schnittlinie bei dieser Interpretation typischerweise mehrere Ereignisse befinden, die bei einem gegebenen Schnitt (d.h. in einem momentanen globalen Zustand) als “nächste” ausgeführt werden können, ist der jeweils “nächste Schnitt” i.a. nicht eindeutig bestimmt. Es läßt sich aber auf der Menge aller Schnitte eine *partielle* Ordnung “später” definieren, wobei anschaulich ein Schnitt S_2 *später* als ein Schnitt S_1 ist, wenn die Schnittlinie von S_2 rechts von derjenigen zu S_1 liegt (vgl. Abb. 2).

Definition 3.5 (Späterer Schnitt).

Ein Schnitt S_2 heißt später als ein Schnitt S_1 , wenn $S_1 \subseteq S_2$.

Durch die mengentheoretische Festlegung von Schnitten nach Definition 3.2 ergibt sich folgendes:

Theorem 3.6 (Schnittverband).

Die Menge der Schnitte eines Zeitdiagramms bildet bezüglich "später" einen Verband.

Beweis. Folgt unmittelbar aus der Definition eines Verbandes als halbgeordnete Menge, bei der für je zwei Elemente eine größte untere Schranke \inf und eine kleinste obere Schranke \sup existiert. Offenbar gilt bezüglich "später" für je zwei Schnitte S_1, S_2 : $\inf = S_1 \cap S_2$ und $\sup = S_1 \cup S_2$, wobei \inf und \sup bezüglich \prec_l nach unten abgeschlossen sind. \square

Auch die konsistenten Schnitte, die für die Festlegung eines logischen Zeitbegriffs alleine von Interesse sind, bilden einen Verband:

Theorem 3.7 (Unterverband konsistenter Schnitte).

Die Menge der konsistenten Schnitte ist ein Unterverband des Verbandes aller Schnitte.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die konsistenten Schnitte unter \cup und \cap abgeschlossen sind.

- (1) Seien S_1, S_2 zwei konsistente Schnitte. Es seien ferner $x \in S_1 \cap S_2$ und $y \prec x$. Dann ist $y \in S_1$, da S_1 konsistent ist, und $y \in S_2$, da S_2 konsistent ist. Daher ist $y \in S_1 \cap S_2$, d.h. $S_1 \cap S_2$ ist konsistent.
- (2) Sei $x \in S_1 \cup S_2$ und $y \prec x$. Man betrachtet zwei Fälle:
 - (a) $x \in S_1$. Dann ist $y \in S_1$, weil S_1 konsistent ist.
 - (b) $x \in S_2$. Dann ist $y \in S_2$, weil S_2 konsistent ist.

Also ist $y \in S_1 \cup S_2$, d.h. $S_1 \cup S_2$ ist konsistent. \square

Die Verbandstruktur konsistenter Schnitte garantiert, daß es für je zwei konsistente Schnitte S_1 und S_2 stets sowohl einen konsistenten Schnitt gibt, der später als beide ist, als auch einen konsistenten Schnitt, der früher als beide ist. Dies läßt sich auf eine beliebige endliche Menge konsistenter Schnitte erweitern: $\sup(S_1, \dots, S_k) = S_1 \cup \dots \cup S_k$ ist später als S_1, \dots, S_k ; entsprechendes gilt für \inf . Interpretiert man Schnitte als Zeit"punkte" in einem verteilten System, so heißt dies, daß eine Menge solcher Zeitpunkt stets eine gemeinsame ferne Zukunft und eine gemeinsame ferne Vergangenheit haben. Dies ist gewissermaßen ein Ersatz für den Verlust der Linearität, den die Zeit in den folgenden Abschnitten erleiden wird.

4 Logische Zeit

Ein jegliches hat seine Zeit.

Prediger Salomo 3,1

Unser Ziel besteht darin, für verteilte Systeme einen Zeitbegriff zu definieren, der einerseits innerhalb eines solchen Systems realisierbar ist (insbesondere also nicht auf globalen Uhren beruht), andererseits aber gewisse nützliche Eigenschaften aufweist, so daß auch die Bezeichnung "Zeit" gerechtfertigt ist. Sinnvoll wäre es beispielsweise, wenn der Zeitbegriff

es gestatten würde, Ereignissen Zeitpunkte zuzuordnen und es damit ermöglichen würde, die potentielle Kausalität zwischen Ereignissen in dem Sinne zu bestimmen oder auszuschließen, daß ein “späteres” Ereignis ein “früheres” garantiert nicht beeinflussen kann. Ferner wäre es wünschenswert, daß, wenn auf allen Prozessen (im Sinne des Zeitbegriffs) “gleichzeitig” ein Schnappschuß des lokalen Zustandes gezogen wird, der dadurch gegebene globale Zustand in einer Weise konsistent ist, als wären alle lokalen Schnappschüsse zum gleichen Realzeitpunkt getätigt worden. Tatsächlich wird sich zeigen, daß der im nachfolgenden Abschnitt entwickelte vektorielle Zeitbegriff diesen Forderungen genügt.

Die Tatsache, daß sich in unserer “realen verteilten Welt” ein System von autonomen Realzeituhren konstruieren läßt, welche (ausreichende Synchronität vorausgesetzt) einen Zeitbegriff implementieren, der diese Eigenschaften ebenfalls aufweist und die Kausalbeziehung zwischen räumlich entfernten Ereignissen respektiert, ist – so betrachtet – das eigentlich Erstaunliche; Lamport bezeichnet dies sogar als ein “Mysterium des Universums” [16]. Faßt man *Realzeit* als eine Menge von Zeitpunkten auf, so scheint sie sich in ihrer formalen Struktur als eine irreflexive lineare Ordnung darzustellen, welche nach oben und unten unbeschränkt ist und wo die Zeitpunkte dicht liegen (vgl. dazu z.B. [24]). Typische Modelle hierfür sind die rationalen oder die reellen Zahlen.

Etwas anders stellt sich dies für die *logische Zeit* eines verteilten Systems dar. Bei einer verteilten Berechnung, wie wir sie in abstrakter Form definiert haben, geschieht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen nichts. Daher braucht in einem solchen Modell das Verstreichen von Zeit nur an das Stattfinden von Ereignissen gekoppelt zu werden. Dies ist eine in der Informatik durchaus übliche Modellvorstellung, so wird beispielsweise bei der ereignisgesteuerten Simulationsmethode das Fortschalten der Simulationsuhr durch die jeweilige Eintrittszeit des nächsten auszuführenden Ereignisses bestimmt. Da Zeit in diesem Fall nur als Folge stattgefundenener Ereignisse wahrgenommen wird, ist logische Zeit nicht dicht, sondern *diskret*. Beschränkt man sich auf endliche verteilte Berechnungen, so darf Zeit auch *beschränkt* sein. Es wird sich im folgenden sogar herausstellen, daß auf ein weiteres Axiom verzichtet werden muß, möchte man einen adäquaten Zeitbegriff definieren, welcher die Kausalstruktur einer verteilten Berechnung widerspiegelt. Tatsächlich ist unser im folgenden entwickelte Zeitbegriff *nicht-linear* und Zeit in ihrer formalen Struktur somit nur eine *partielle* Ordnung.

Die Festlegung eines Zeitbegriffs für verteilte Systeme bedeutet, daß jedem Ereignis “der” Zeitpunkt zugeordnet werden muß, zu dem es stattfand. Aus dem Vergleich der Zeitpunkte sollten sich dann Rückschlüsse über die Beziehung der Ereignisse untereinander ergeben. Formal ist damit eine Abbildung $C : E \rightarrow T$ gesucht, die jedem Ereignis $e \in E$ einen *Zeitstempel* $C(e)$ aus einer geeigneten Menge T zuordnet. T sollte zumindest die Formulierung der Begriffe “früher” oder “später” erlauben, so daß wir bei T von einer Halbordnung $(T, <)$ ausgehen. Die Abbildung C läßt sich formal als *logische Uhr* auffassen. Eine sinnvolle Anforderung an C ist die sogenannte *Uhrenbedingung*

$$\forall e, e' \in E : e \prec e' \implies C(e) < C(e').$$

Sie besagt, daß ein Ereignis e einen kleineren Zeitstempel als ein Ereignis e' haben soll, wenn e das Ereignis e' kausal beeinflussen kann.

Lamport gab 1978 in seinem oft zitierten Artikel “Time, Clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System” [16] ein Verfahren an, das auf den natürlichen Zahlen als Zeitbereich T beruht, und bei dem die virtuelle Uhr C durch ein System von Zählern (je einer für jeden Prozeß) und ein einfaches Nachrichtenprotokoll implementiert wird. Allerdings fehlt diesem Konzept eine an sich wünschenswerte Eigenschaft: Bei der Abbildung der Ereignisse in die linear geordneten natürlichen Zahlen geht Struktur verloren; Ereig-

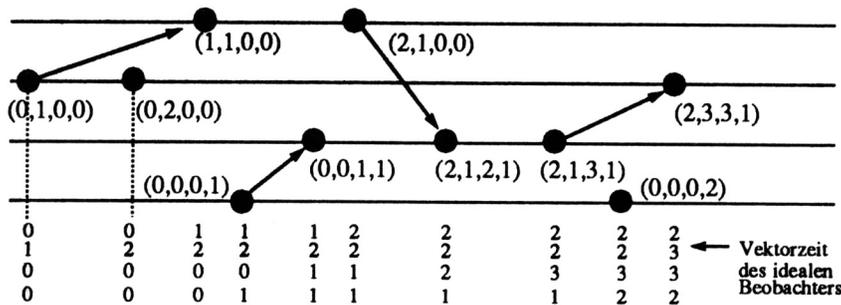


Abbildung 3: Fortpflanzung des Zeitwissens.

nisse, die unabhängig voneinander sind, bekommen Zeitstempel zugeordnet, als ob sie in einer bestimmten Reihenfolge stattfinden würden. Insbesondere läßt sich durch bloßes Überprüfen der Zeitstempel nicht nachweisen, daß ein Ereignis ein anderes Ereignis *nicht* kausal beeinflussen kann. Zu diesem Zweck sollte die Zeitstruktur T die Ereignisstruktur E *isomorph* repräsentieren, so daß die Implikation in der Uhrenbedingung in beide Richtungen gültig ist. Dies leistet die im nächsten Abschnitt beschriebene “Vektorzeit”.

5 Vektorzeit

Andere Zeiten, andere Sitten.

Spruchwort

Zur Motivation der im folgenden betrachteten Vektorzeit geht man zunächst davon aus, daß jeder Prozeß P_i eine einfache, durch einen Zähler realisierte, logische Uhr besitzt, die bei jedem seiner Ereignisse um 1 erhöht wird. Ein idealisierter externer Beobachter, der unmittelbaren Zugriff auf alle lokalen Uhren hat, wüßte dann zu jedem Augenblick die jeweiligen lokalen Zeiten. Eine geeignete Datenstruktur zur Speicherung dieses globalen Zeitwissens stellt ein Vektor dar, welcher für jeden Prozeß eine Komponente besitzt. Das Beispiel aus Abb. 3 illustriert die Idee.

Das unmittelbare Zeitwissen des idealisierten Beobachters läßt sich innerhalb des Systems aufgrund der Nachrichtenverzögerung nicht realisieren. Unser Ziel besteht nun darin, ein Schema zu konstruieren, das jedem Prozeß eine *optimale Approximation* dieser idealen globalen Zeit ermöglicht, indem ein Prozeß zum frühest möglichen Zeitpunkt, allerdings ohne zusätzlichen Nachrichtenaufwand, über alle bereits geschehenen Ereignisse informiert wird. Zu diesem Zweck wird jeder Prozeß P_i mit einer Uhr C_i ausgestattet, die einen *Vektor* der Länge n aufnehmen kann, wobei n die Gesamtzahl der Prozesse bezeichnet. Eine Uhr C_i ist mit dem Nullvektor initialisiert; sie “tickt” jedesmal unmittelbar bevor auf Prozeß P_i ein Ereignis ausgeführt wird, indem der Wert der eigenen Komponente inkrementiert wird:

$$C_i[i] := C_i[i] + 1.$$

Jede Nachricht enthält einen vektoriellen Zeitstempel t , wobei t der Zeitvektor der lokalen Uhr des Senders beim Absenden der Nachricht ist. Indem ein Prozeß mit einer Nachricht einen Zeitstempel t zugeschickt bekommt, erfährt er etwas über die Approximation der globalen Zeit anderer Prozesse. Der Empfänger kombiniert sein eigenes Zeitwissen C_i mit der Approximation t , die er zusammen mit der Nachricht erhält, mittels

$$C_i := \sup(C_i, t),$$

wobei \sup für das komponentenweise Maximum steht. Der gesuchte Zeitstempel $C(e)$ eines Ereignisses e von Prozeß P_i ist der Wert der Uhr C_i bei Ausführung von e (bei Empfängerereignissen nach der Aktualisierung durch den Nachrichten-Zeitstempel). Abbildung 3 illustriert die Fortpflanzung des Zeitwissens und die Aktualisierung der Vektoruhren an einem Beispiel.

Offensichtlich werden die Ereignisse eines Prozesses P_i durch die i -te Komponente der Uhr C_i durchnummeriert, d.h. vor einem Ereignis e geschahen bereits $|C(e)[i]| - 1$ andere Ereignisse auf dem gleichen Prozeß. Tatsächlich enthält der vektorielle Zeitstempel $C(e)$ eines Ereignisses e in kompakter Form sogar das gesamte Wissen darüber, von welchen anderen Ereignissen das Ereignis e kausal abhängig ist. So bedeutet beispielsweise $C(e)[k] = j$, daß Ereignis e vom ersten, zweiten, ..., j -ten Ereignis des Prozesses P_k abhängig ist, jedoch von keinem späteren Ereignis des Prozesses P_k . Alternativ zu der oben getroffenen operationalen Festlegung der Vektorzeit $C(e)$ eines Ereignisses e läßt diese sich daher wie folgt definieren:

Definition 5.1 (Vektorzeit eines Ereignisses).

Der vektorielle Zeitstempel $C(e)$ eines Ereignisses e ist derjenige Vektor aus \mathbb{N}^n , für dessen i -te Komponente $C(e)[i]$ gilt:

$$C(e)[i] = |\{e' \mid e' \text{ ist ein Ereignis von Prozeß } P_i \wedge e' \preceq e\}|.$$

Man macht sich leicht klar, daß diese Festlegung durch die oben genannten Regeln realisiert wird.

6 Die Struktur der Vektorzeit

*Und überall hingen, lagen und standen Uhren.
Da gab es auch Weltzeituhren in Kugelform,
welche die Zeit für jeden Punkt der Erde anzeigten...
"Vielleicht", meinte Momo,
"braucht man dazu eben so eine Uhr."
Meister Hora schüttelte lächelnd den Kopf.
"Die Uhr allein würde niemand nützen.
Man muß sie auch lesen können."*

Michael Ende, Momo

Um verschiedene Zeitvektoren miteinander vergleichen zu können, treffen wir zunächst folgende Definition:

Definition 6.1 (Zeitvektorordnung).

Für zwei Zeitvektoren u, v ist

$$u \leq v \Leftrightarrow \forall i : u[i] \leq v[i],$$

$$u < v \Leftrightarrow u \leq v \wedge u \neq v,$$

$$u \parallel v \Leftrightarrow \neg(u < v) \wedge \neg(v < u).$$

Man beachte, daß ' \leq ' und ' $<$ ' partielle Ordnungen sind. Die symmetrische und reflexive ' \parallel '-Relation kann als eine Verallgemeinerung der Gleichzeitigkeit der Realzeit aufgefaßt werden.⁷ Während allerdings der Begriff der Gegenwart in der Realzeit auf einen quasi

⁷Bereits 1928 formulierte dies der Philosoph Hans Reichenbach so: "Zwei gleichzeitige Ereignisse sind derart gelegen, daß weder von einem zum andern noch umgekehrt eine Wirkungskette zu eilen vermag. Die Ereignisse, die jetzt, in diesem Augenblick, in einem fernen Lande stattfinden, können von mir nicht mehr beeinflußt werden, auch nicht durch Telegramme; und umgekehrt können sie auf das, was gegenwärtig hier geschieht, keinen Einfluß mehr haben. Gleichzeitigkeit heißt Ausgeschaltetheit des Wirkungszusammenhangs." [20]

existenzlosen Schnittpunkt zwischen Vergangenheit und Zukunft reduziert wird,⁸ kann die durch '||' induzierte "Gleichzeitigkeit" bei der Vektorzeit einen größeren Umfang annehmen – wobei jedoch zu beachten ist, daß die '||'-Relation nicht transitiv ist!

Durch Definition 5.1 bzw. durch das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verfahren wird einem Ereignis ein Zeitvektor zugeordnet. In natürlicher Weise kann jedoch auch einem Schnitt S ein Zeitvektor $\tau(S)$ zugeordnet werden, indem als Wert für die i -te Komponente von $\tau(S)$ die Anzahl der Ereignisse von S auf Prozeß P_i festgelegt wird:

Definition 6.2 (Zeitvektor eines Schnittes).

Sei S ein Schnitt. Der durch

$$\tau(S)[i] = |\{e \in S \mid e \text{ ist ein Ereignis von Prozeß } P_i\}|$$

definierte Vektor τ heißt Zeitvektor des Schnittes S .

Aus Definition 6.2 und Definition 3.5 ergibt sich unmittelbar:

Korollar 6.3 (Späterer Zeitvektor eines Schnittes).

S_1 ist später als S_2 genau dann, wenn $\tau(S_2) \leq \tau(S_1)$.

Indem Schnitten Zeitvektoren zugeordnet werden, überträgt sich die Verbandsstruktur der Schnitte bzw. der konsistenten Schnitte auf die entsprechenden Mengen von Zeitvektoren. Es gilt daher:

Theorem 6.4 (Zeitverband).

Die Zeitvektoren der Schnitte bilden bezüglich der Halbordnung ' \leq ' einen Verband, die Zeitvektoren der konsistenten Schnitte einen Unterverband.

Beweis. Zu je zwei Zeitvektoren $\tau(S_1), \tau(S_2)$ existieren Infimum $\tau(S_1 \cap S_2)$ und Supremum $\tau(S_1 \cup S_2)$. \square

Da Zeitvektoren als Elemente aus \mathbb{N}^n eine operationale Struktur darstellen, ist hier die Interpretation des Verbandes als algebraische Struktur mit den beiden Verknüpfungen *inf* und *sup* interessant. Es seien $\inf(x, y) = u$ mit $u[i] = \min(x[i], y[i])$ und $\sup(x, y) = v$ mit $v[i] = \max(x[i], y[i])$, d.h. *inf* und *sup* sind als die komponentenweise Minimum- bzw. Maximumoperation definiert. Man zeigt leicht einerseits den Zusammenhang zur ordnungstheoretischen Interpretation vermöge $x \leq y \Leftrightarrow x = \inf(x, y)$ und andererseits die nach der algebraischen Interpretation geforderten Eigenschaften Kommutativität und Assoziativität für beide Operationen sowie die Absorptionsgesetze $\sup(x, \inf(x, y)) = x$ und $\inf(x, \sup(x, y)) = x$.

Die Zeitvektorverbände sind somit ein besonders hübsches Beispiel für die duale Auffassung von Verbänden als Vermittler zwischen ordnungstheoretischer und algebraischer Struktur: Um Aussagen über frühere oder spätere Zeitpunkte in Form von Schnittmengen zu bekommen, bedient man sich der algebraischen Struktur, mit der es sich einfacher und effizienter rechnen läßt.

Zeitvektoren lassen sich als Koordinatenpunkte in einem n -dimensionalen Gitter darstellen, welches gleichzeitig die Verbandsstruktur illustriert. Betrachtet man nur die zu konsistenten Schnitten gehörenden Vektoren – nur solche können, wie in Theorem 6.6 und 6.7 gezeigt wird, überhaupt als Zeitstempel von Ereignissen und Nachrichten auftreten – so ergeben sich insbesondere für $n = 3$ interessante und ästhetisch reizvolle geometrische Gebilde, da solche Verbandsgitter von den Seiten her "ausgefranst" sind. Abbildung 4 zeigt

⁸ "Denn wäre da eine Ausdehnung, müßte sie wiederum in Vergangenheit und Zukunft geteilt werden. Für die Gegenwart aber bliebe kein Raum." (Augustinus, Bekenntnisse)

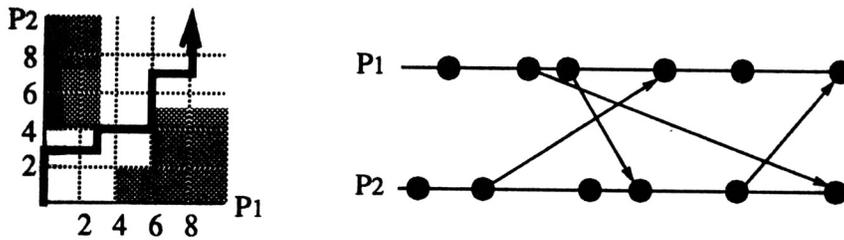


Abbildung 4: Verbandsgitter und zugehöriges Zeitdiagramm.

ein Beispiel für $n = 2$. In einem solchen Verbandsgitter bestimmt jeder vom Nullvektor wegführende Pfad, der sich in dem schlauchförmigen Gebilde in Richtung der “Raumdiagonalen” bewegt, eine Folge von Ereignissen, die eine Linearisierung der ‘ \prec ’-Kausalbeziehung darstellt. Ein solcher Pfad läßt sich daher als eine *konsistente Beobachtung* der verteilten Berechnung auffassen. Im allgemeinen existieren mehrere verschiedene konsistente Beobachtungen einer verteilten Berechnung; da nach einem bekannten mathematischen Theorem jedoch der Schnitt aller Linearisierungen einer Halbordnung die Halbordnung selbst ergibt, ist das, was allen Beobachtungen gemein ist, gerade die zugrundeliegende Kausalstruktur. Die ausgefranste Gestalt der Verbandsgitter hat ihre Ursache darin, daß sich die Zeit nicht immer frei in alle Richtungen ausbreiten kann, einige Dimensionen können vorübergehend gesperrt sein, da vor der Wahrnehmung eines Empfangsereignisses das zugehörige Sendeereignis wahrgenommen werden muß.

Durch Definition 5.1 wurden Ereignissen Zeitvektoren zugeordnet, während durch Definition 6.2 Schnitten Zeitvektoren zugeordnet wurden. Der Zusammenhang zwischen Zeitvektoren von Ereignissen und Schnitten ergibt sich daraus, daß die “kausale Vergangenheit” eines Ereignisses, d.h. die Menge all derjenigen Ereignisse, die ein Ereignis kausal beeinflussen können, einen konsistenten Schnitt bilden:

Definition 6.5 (Kausale Vergangenheit $\downarrow e$).

Die kausale Vergangenheit $\downarrow e$ eines Ereignisses e ist definiert als $\downarrow e = \{e' \mid e' \preceq e\}$.

Theorem 6.6 ($\downarrow e$ ist konsistent).

Für jedes Ereignis $e \in E$ ist $\downarrow e$ ein konsistenter Schnitt von E .

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen 3.3 und 6.5 sowie aus der Transitivität von ‘ \preceq ’. Nun wird auch klar, daß der Zeitstempel eines Ereignisses nichts anderes ist als der Zeitvektor seiner kausalen Vergangenheit:

Theorem 6.7 (Zeit ist kausale Vergangenheit).

$$C(e) = \tau(\downarrow e).$$

Beweis. $\tau(\downarrow e)[i] \stackrel{def}{=} |\{e' \in \downarrow e \mid e' \text{ ist ein Ereignis von Prozeß } P_i\}| = |\{e' \preceq e \mid e' \text{ ist ein Ereignis von Prozeß } P_i\}| \stackrel{def}{=} C(e)[i]. \square$

Über den Zeitvektor wird vermöge Theorem 6.7 ein Ereignis mit seiner kausalen Vergangenheit “identifiziert”. So gesehen stellt sich die zunächst etwas geheimnisvolle Vektorzeit als etwas relativ natürliches heraus: Das “Jetzt” ist eindeutig durch die Menge der in diesem Augenblick vergangenen Ereignisse bestimmt; Zeit *ist* die Menge der vergangenen Ereignisse! Die Zeitvektoren ermöglichen lediglich eine kompakte Repräsentation und eine

algebraische Fassung – und damit rechnerisch einfache Handhabung – von Mengenoperationen auf den kausalen Vergangenheiten der Ereignisse, die den eigentlichen Zeitbegriff definieren.

Für den Beweis des nachfolgenden zentralen Theorems 6.9 benötigen wir noch ein Ergebnis, das konsistente Schnitte bezüglich der kausalen Vergangenheit als abgeschlossen charakterisiert:

Lemma 6.8 *Sei S ein konsistenter Schnitt. Dann gilt $e \in S \iff \downarrow e \subseteq S$.*

Beweis.

- (1) “ \Rightarrow ”: Aus $e \in S$ folgt wegen der Konsistenzeigenschaft von S mit $x \preceq e$ auch $x \in S$ für beliebige x . Insbesondere gilt daher $x \in \downarrow e \Rightarrow x \preceq e \Rightarrow x \in S$, also $\downarrow e \subseteq S$.
 (2) “ \Leftarrow ”: Aus $\downarrow e \subseteq S$ folgt $x \in \downarrow e \Rightarrow x \in S$. Wegen $e \in \downarrow e$ ist daher $e \in S$. \square

Wir können nun zeigen, daß sich mit Vektoruhren eine verschärfte Form der Uhrenbedingung realisieren läßt; genauer besagt das folgende Theorem, daß die Kausalstruktur durch die Vektorzeit isomorph repräsentiert wird:

Theorem 6.9 (Isomorphie von Kausal- und Zeitstruktur).

$$\forall e, e' \in E : e \prec e' \iff C(e) < C(e').$$

Beweis. $e \preceq e' \stackrel{6.5}{\iff} e \in \downarrow e' \stackrel{6.6, 6.8}{\iff} \downarrow e \subseteq \downarrow e' \stackrel{3.5, 6.3}{\iff} \tau(\downarrow e) \leq \tau(\downarrow e') \stackrel{6.7}{\iff} C(e) \leq C(e')$.
 Da jedem Ereignis eindeutig ein Zeitstempel zugeordnet ist und verschiedene Ereignisse verschiedene Zeitstempel haben, folgt die Behauptung. \square

Theorem 6.9 läßt sich an Zeitdiagrammen anschaulich interpretieren: Ein Ereignis e' hat einen größeren Zeitstempel als ein Ereignis e genau dann, wenn eine Kausalkette in Form eines Pfades von e nach e' existiert. Offensichtlich kann entlang eines solchen Pfades der Wert von Vektorkomponenten höchstens größer werden. Hat umgekehrt ein Ereignis e' einen größeren Zeitstempel als ein anderes Ereignis e , dann muß es einen Pfad von e nach e' geben, entlang welchem das “Zeitwissen” bezüglich $C(e)$ propagiert wurde. Aus Theorem 6.9 ergibt sich unmittelbar eine Möglichkeit, Ereignisse anhand ihres Zeitstempels auf kausale Unabhängigkeit zu überprüfen:

Korollar 6.10 $\forall e, e' \in E : e \parallel e' \iff C(e) \parallel C(e')$.

Etwas salopp ausgedrückt besagt das Korollar, daß es genau die “gleichzeitigen” Ereignisse sind, die sich gegenseitig nicht beeinflussen können.

7 Minkowski’s relativistische Raumzeit

*Von Stund an
sollen Raum für sich
und Zeit für sich
völlig zu Schatten herabsinken
und nur noch eine Art Union der beiden
soll Selbständigkeit bewahren.*

Hermann Minkowski, Raum und Zeit

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß eine prinzipielle Analogie zwischen dem Minkowski’schen Raumzeit-Modell und unseren Zeitdiagrammen bzw. den durch die Kausalbeziehung halbgeordneten Ereignisstrukturen existiert. Sie ergibt sich aus dem relativistischen Effekt, der immer dann auftritt, wenn die Laufzeiten von Signalen nicht vernachlässigbar

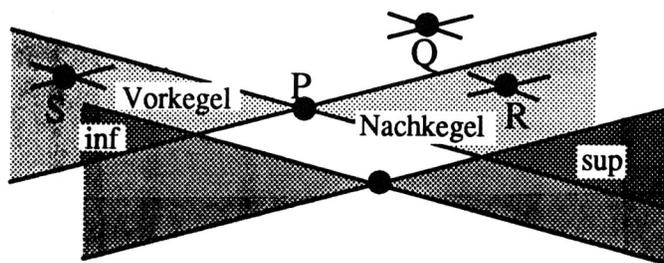


Abbildung 5: Lichtkegel in Minkowski's Raumzeit.

sind.⁹ Aufgrund der Begrenzung durch die Lichtgeschwindigkeit¹⁰ stellt sich die Realzeit – analog zu unserer Vektorzeit – bei genauer Betrachtung nicht mehr als lineare Ordnung, sondern nur noch als eine *Halbordnung* dar. Dies läßt sich als *Relativierung der Gleichzeitigkeit* auffassen; es ist eine Konsequenz, die sich bereits aus den Grundannahmen der Relativitätstheorie ergibt. In seinen “Bemerkungen über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie” formuliert dies Kurt Gödel so: “Die Behauptung, die Ereignisse *A* und *B* hätten gleichzeitig stattgefunden (und für eine große Gruppe von Ereignispaaren auch die Behauptung, *A* habe vor *B* stattgefunden), verliert ihren objektiven¹¹ Sinn insofern, als ein anderer Beobachter mit dem gleichen Anspruch auf Richtigkeit behaupten kann, *A* und *B* hätten nicht gleichzeitig stattgefunden (oder *B* habe vor *A* stattgefunden)” [12]. Selbst Max Born gibt allerdings zu, daß sich diese Relativität der Gleichzeitigkeit schwer erfassen läßt: “Daß dasselbe, was das Ich als zugleich empfindet, ein anderer als nacheinander bezeichnen soll, das läßt sich in der Tat durch das Zeiterlebnis nicht begreifen”[3].

Das geeignete Modell zur Darstellung der relativistischen Realität ist Minkowski's Raumzeit-Modell, bei dem ein $n - 1$ -dimensionaler Raum mit der eindimensionalen Zeit zu einem n -dimensionalen Bild der Welt verknüpft wird. Aufgrund der begrenzten Signallaufzeiten kann in diesem Modell ein bei einem bestimmten Raumzeitpunkt stattfindendes Ereignis nur dann ein anderes Ereignis beeinflussen, wenn es in dessen *Lichtkegel* liegt. Auf dem Kegelmantel liegen die Ereignisse (bzw. Raumzeitpunkte), die “gerade noch” beeinflusst werden können; der Öffnungswinkel des Kegels ist durch die Grenzgeschwindigkeit der Signalausbreitung bestimmt.

Abbildung 5 veranschaulicht diese Situation für $n = 2$. Ereignisse *P* und *Q* sind kausal unabhängig voneinander, während *S* Ereignis *P* beeinflussen kann (da es in dessen *Vorgekel* liegt) und *P* Ereignis *R* beeinflussen kann (*R* liegt im *Nachkegel* von *P*). Bezüglich der Kausalbeziehung gilt die Transitivität (wenn *X* im Nachkegel von *Y* liegt und *Y* im Nachkegel von *Z*, dann liegt auch *X* im Nachkegel von *Z*); man sieht jedoch, daß bezüglich der Unabhängigkeit die Transitivität nicht gilt: Offensichtlich sind sowohl *P* und *Q* als auch *Q* und *R* paarweise unabhängig, nicht jedoch *P* und *R*.

Analog zu den Schnitten unserer Zeitdiagramme bilden für $n = 2$ die Lichtkegel bezüglich der Inklusion sogar einen *Verband*. Abbildung 5 veranschaulicht die Konstruktion. Der Nachkegel des Supremums wird durch den Schnitt der beiden Nachkegel bestimmt, der Schnitt der beiden Vorgekel liefert den Vorgekel des Infimums. Durch die

⁹Im Rahmen der Petrinetz-Theorie wurde diese Analogie von Budde in [4, 5] diskutiert.

¹⁰Der französische Physiker Paul Langevin bezeichnet in einer englischen Übersetzung seiner Werke die Lichtgeschwindigkeit daher konsequenterweise als “speed limit of causality”.

¹¹Für einige Ereignispaare ist allerdings die zeitliche Reihenfolge objektiv (d.h. für alle möglichen Beobachter gleich), nämlich für diejenigen Ereignispaare, die kausal voneinander abhängig sind. Ursache und Wirkung finden niemals gleichzeitig oder gar in umgekehrter Reihenfolge statt!

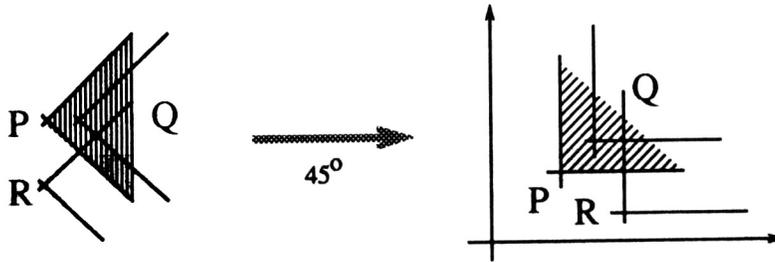


Abbildung 6: Isomorphie der Vektorzeit- und Lichtkegelordnung.

Identifikation der Kegel mit ihrer Spitze überträgt sich so die Verbandsstruktur auf die Raumzeitpunkte. Eine analoge Identifikation haben wir bezüglich der Zeitdiagramme bei den Schnitten und den zugehörigen Schnittlinien vorgenommen.

Unsere Gummibandtransformationen aus Abschnitt 3, die die metrische, nicht jedoch die topologische Struktur verändern und damit die ' \prec '-Relation invariant lassen, finden ihre Entsprechung bei der Minkowski'schen Raumzeit in den bekannten *Lorentz-Transformationen*. Diese stellen als orthogonale Drehungen des n -dimensionalen Raumes kausalerhaltende Koordinatentransformationen dar, die den Lichtkegel invariant lassen.

Bei der Vektorzeit erlaubt es die verschärfte Form der Uhrenbedingung (vgl. Theorem 6.9 und Korollar 6.10) zu überprüfen, ob zwei Ereignisse mit gegebenen Zeitstempeln in kausaler Beziehung zueinander stehen oder nicht. Ein rechnerisch ähnlich einfaches Kausalitätskriterium liefert die Kegelstruktur der Raumzeit: Bezeichnet c die Grenzgeschwindigkeit, also den Tangens des halben Öffnungswinkels des Kegels, dann sind zwei Ereignisse e_1 und e_2 mit den Koordinaten (x_1, t_1) bzw. (x_2, t_2) voneinander abhängig, wenn eines im Lichtkegel des anderen liegt, wenn also $c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \geq 0$ gilt. Die Kegel-Inklusionsordnung läßt sich auf n -dimensionale reelle Räume ($n \geq 2$) verallgemeinern, indem für zwei beliebige Raumzeitpunkte $U = (u_1, \dots, u_n)$ und $V = (v_1, \dots, v_n)$ die Relation

$$U \leq V \iff \sum_{i=1}^{n-1} (u_i - v_i)^2 \leq c^2(u_n - v_n)^2 \wedge u_n \leq v_n$$

definiert wird. Üblicherweise wird der Parameter c dabei zu 1 normiert; die n -te Koordinate übernimmt die Rolle einer gerichteten Zeit. (Die Normierung von c bedeutet lediglich eine bequeme Festlegung der Maßeinheiten – ist c die Lichtgeschwindigkeit, dann würde man die n -te Dimension beispielsweise in Jahren, die $n - 1$ ersten räumlichen Dimensionen in "Lichtjahren" messen). Man kann zeigen, daß die so definierte "Minkowski'sche Kausalordnung" eine Halbordnung ist und daß zu je zwei Punkten ein gemeinsamer größerer existiert.

Für $n = 2$ läßt sich aus der Minkowski'schen Kausalordnung sogar leicht unsere Zeitvektorordnung gewinnen: Betrachtet man die mit $c = 1$ normierten Nachkegel und dreht das Koordinatensystem um 45° nach links (vgl. Abb. 6), dann erkennt man, daß nun die "Zukunft" eines Punktes P aus denjenigen Punkten besteht, die rechts und oberhalb von P liegen. Für zwei Punkte $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ gilt also $P \leq Q$ genau dann, wenn $p_1 \leq q_1$ und $p_2 \leq q_2$. Dies läßt sich entsprechend Definition 6.1 in vektorieller Form als $(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2)$ schreiben. Salopp formuliert unterscheidet sich für $n=2$ die Minkowski'sche Raumzeit von der Vektorzeit nur durch eine 45° -Drehung des Raumes – die beiden Strukturen sind also praktisch identisch!

Das Minkowski'sche Konzept des Lichtkegels eines Ereignisses läßt sich prinzipiell auf unsere Zeitdiagramme übertragen: Der Vorkegel \hat{P} eines Raumzeitpunktes P enthält

alle Punkte Q , die P beeinflussen können, d.h. $\hat{P} = \{Q \mid Q \leq P\}$, wobei ' \leq ' die oben definierte Minkowski'sche Kausalordnung ist. Dies entspricht formal unserer Definition $\downarrow e = \{e' \mid e' \preceq e\}$ der kausalen Vergangenheit eines Ereignisses (vgl. Definition 6.5). Entsprechend ließe sich auch eine "kausale Zukunft" $\uparrow e = \{e' \mid e \preceq e'\}$ definieren, die dem Nachkegel entspricht. Da bei einem Zeitdiagramm kein Ereignis aus $\downarrow e$ rechts von e liegen kann, befindet sich der "Vorkegel" $\downarrow e$ eines Ereignisses e tatsächlich auch links des Ereignisses – allerdings hat ein solcher abstrakter Kegel i.a. keine geometrisch perfekte Kegelform, sondern "krumme" Begrenzungslinien. Da die abstrakten Kegel $\downarrow e$ und $\uparrow e$ jedoch konsistente Schnitte darstellen (vgl. Theorem 6.6), läßt sich in der gleichen konstruktiven Weise wie im skizzierten Beweis zum Gummibandkriterium (Theorem 3.4) der Kegelmantel "geradebiegen".

Für unsere reale Welt liefert die relativistische Raumzeit ein exakteres Bild der Wirklichkeit als die gemeinhin als linear angesehene "Standardzeit". Die Analogie zur geometrisch etwas anders gearteten Vektorzeit (halbgeordnete Mengen mit Verbandsstruktur, kausalerhaltende Transformationen, Ähnlichkeit der Zeitdiagramme) ist kein Zufall, sie beruht auf der beiden Modellen gleichermaßen zugrundeliegenden Voraussetzung, daß Ursache und Wirkung zeitlich getrennt sind und damit in der durch sie begrenzten "Zwischenzeit" kausal unabhängige Ereignisse stattfinden können. Die Analogie ist ein starkes Indiz dafür, daß Vektorzeit ein "richtiges" Zeitmodell für verteilte Systeme darstellt – daß die Vektorzeit zudem auch nützlich ist, wird im nächsten Abschnitt kurz skizziert.

8 Anwendungen

Kommt Zeit, kommt Rat.

Sprichwort

Da mit Zeitvektoren die Kausalstruktur verteilter Berechnungen – und damit die potentielle Abhängigkeit jedes Ereignisses von jedem anderen – einfach festgestellt werden kann, ergeben sich einige interessante Anwendungen dieses Konzeptes. Nachteilig für die praktische Verwendbarkeit ist lediglich der durch die Länge der Vektoren verursachte Aufwand. Wie Charron-Bost in [7] zeigt, existiert i.a. jedoch leider keine kompaktere Repräsentation der Kausalstruktur. Es helfen lediglich Optimierungstechniken, die im Einzelfall allerdings den Speicher- bzw. Kommunikationsaufwand deutlich reduzieren können: In [22] geben Singhal und Kshemkalyani ein effizientes Verfahren an, bei dem nur diejenigen Komponenten eines Vektors versendet werden, die sich seit der letzten Nachricht an den selben Empfänger geändert haben. Meldal et al. beschreiben in [19], wie auf das Speichern einiger Vektorkomponenten verzichtet werden kann, wenn die Verbindungstopologie der Prozesse bestimmte Eigenschaften aufweist.

Eine direkte Anwendung findet das Konzept der vektoriellen Zeit beim Testen verteilter Systeme. Wird jedes Ereignis mit einem vektoriellen Zeitstempel versehen, so ist es beispielsweise möglich, potentielle Race-Bedingungen – hervorgerufen durch zeitlich in inkorrekt Reihenfolge stattfindende Ereignisse, die (fälschlicherweise) in keiner kausalen Beziehung zueinander stehen – festzustellen. Vermöge Theorem 6.9 ist es gegebenenfalls auch möglich auszuschließen, daß ein Ereignis e die Ursache für ein fehlerhaftes Ereignis e' sein kann (nämlich dann, wenn $\neg(e \prec e')$ gilt). Die Verwendung von Vektoruhren für das Testen verteilter Systeme wird von Haban und Weigel [13] sowie von Fidge [8] beschrieben.

Zum Zweck der Leistungsanalyse verteilter Systeme ist es wichtig zu wissen, welche Ereignisse potentiell gleichzeitig ausgeführt werden können. Offenbar ist dies zumindest dann möglich, wenn die Ereignisse kausal unabhängig voneinander sind, wenn ihre Zeitstempel

also in der '|'-Relation zueinander stehen. Eine Analyse der vektoriellen Zeitstempel von Ereignissen kann daher helfen, den Grad der Parallelität zu bestimmen [6].

Das Nachhalten von kausalen Abhängigkeiten zwischen Ereignissen spielt bei verteilten Datenbanken eine große Rolle, hier müssen z.B. die lokalen Sicherungskopien zueinander konsistent sein. Wird eine Teildatenbank (etwa nach einem Fehler) auf einen früheren Zustand zurückgesetzt, so hat dies evtl. Einfluß auf den Zustand anderer Teildatenbanken. Strom und Yemini [23], Johnson und Zwaenepoel [14] sowie Venkatesh et al. [26] zeigen, wie im Rahmen dieses Problembereichs Zeitvektoren verwendet werden können. Ebenfalls aus dem Bereich verteilter Datenbanken stammt das "distributed dictionary"-Problem: Die Sicht jedes beteiligten Prozesses auf die verteilte Datenbank soll konsistent in dem Sinne sein, daß der Prozeß die Einfüge- und Löschooperationen in einer Reihenfolge wahrnimmt, die mit der Kausalordnung verträglich ist. Die Verwendung von Zeitvektoren zur Lösung dieses Problems wird von Fischer und Michael [9]¹² sowie Liskov und Ladin [17] diskutiert.

Weitere interessante Anwendungen des Zeitvektorkonzeptes stellen Algorithmen zur Berechnung konsistenter globaler Zustände [18], zur Realisierung von "causal memory" als eine schwach-synchrone Variante globalen Speichers [1] sowie zur Implementierung kausal geordneter Broadcasts [2] dar. Da an dieser Stelle auf diese Aspekte nicht weiter eingegangen werden kann, sei statt dessen auf die zitierte Literatur verwiesen.

9 Epilog

Oh! Mit der Zeit wären wir fertig.

Schiller, Kabale und Liebe

Zeit hat viele Facetten – in diesem Beitrag haben wir uns notgedrungen auf einen einzigen Aspekt, die formale Struktur logischer Zeit in verteilten Systemen, beschränkt. So interessant solche Untersuchungen auch sein mögen – wir abstrahieren dabei doch von fast allem, was Zeit für uns bedeutet: für gute und schlechte Zeiten, glückliche und weniger glückliche Ereignisse ist kein Platz in dieser Theorie. Was bleibt, ist die Sehnsucht nach erfüllter Zeit – *echte Zeit* muß man leben!

Literatur

- [1] M. AHAMAD, P. HUTTO, R. JOHN. Implementing and Programming Causal Distributed Shared Memory. Technical Report GIT-CC-90-49, College of Computing, Georgia Institute of Technology, 1990.
- [2] K. BIRMAN, A. SCHIPER, P. STEPHENSON. Lightweight Causal and Atomic Group Multicast. Technical Report TR 91-1192, Computer Science Department, Cornell University, 1991.
- [3] M. BORN. Die Relativitätstheorie Einsteins. *Springer-Verlag*, 1964.
- [4] R. BUDDE. Einige Bemerkungen zum Verständnis nebenläufiger Prozesse und Systeme. In: *W. Brauer (Hg.): 11. GI-Jahrestagung, Springer-Verlag, Informatik-Fachberichte 50, pp. 448-459*, 1981.
- [5] R. BUDDE, H. NIETERS. Einführung in die Netztheorie. *Regelungstechnik 32, pp. 76-80*, 1984.

¹²Dieser Konferenzbeitrag von Michael Fischer und Alan Michael stellt nach Kenntnis des Autors die früheste Veröffentlichung dar, bei der Zeitvektoren zum Nachhalten der kausalen Abhängigkeiten zwischen Ereignissen verwendet werden. Später wurde das Zeitvektorkonzept ("kausal unabhängig" von dieser Veröffentlichung) mehrfach wiederentdeckt.

- [6] B. CHARRON-BOST. Combinatorics and Geometry of Consistent Cuts: Application to Concurrency Theory. In: *J-C Bermond, M. Raynal (eds) Proc. of the 3rd International Workshop on Distributed Algorithms, Springer-Verlag LNCS 392, pp. 45-56, 1989.*
- [7] B. CHARRON-BOST. Concerning the Size of Logical Clocks in Distributed Systems. *Information Processing Letters*, 39:11–16, 1991.
- [8] J. FIDGE. *Dynamic Analysis of Event Orderings in Message-Passing Systems*. PhD thesis, Department of Computer Science, The Australian National University, 1989.
- [9] M. FISCHER, A. MICHAEL. Sacrificing Serializability to Attain High Availability of Data in an Unreliable Network. In *ACM SIGACT-SIGOPS Symp. on Principles of Database Systems*, pages 70–75, 1982.
- [10] J. T. FRASER. *Die Zeit – vertraut und fremd*. Birkhäuser Verlag, 1988.
- [11] J.T FRASER, F.C. HABER, G.H. MÜLLER. *The Study of Time*. Springer-Verlag, 1972.
- [12] K. GÖDEL. Einige Bemerkungen über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie. In: *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher (Hg.: P.A. Schlipp), Vieweg (Original: "A Remark," In: A. Einstein, Philosopher-Scientist, ed. by P.A. Schlipp, 1949), 1979.*
- [13] D. HABAN, W. WEIGEL. Global Events and Global Breakpoints in Distributed Systems. *Proc. 21st Hawaii International Conference on System Sciences, Vol. II, pp. 166-175, 1988.*
- [14] D.B. JOHNSON, W. ZWAENEPOEL. Recovery in Distributed Systems Using Optimistic Message Logging and Checkpointing. Technical Report TR88-68, Department of Computer Science, Rice University, 1988.
- [15] W. KÖNIG. DTV-Atlas zur Deutschen Sprache. *Deutscher Taschenbuch Verlag*, 1978.
- [16] L. LAMPORT. Time, Clocks, and the Ordering of Events in a Distributed System. *Comm. of the ACM* 21:7, pp. 558-565, 1978.
- [17] B. LISKOV, R. LADIN. Highly-Available Distributed Services and Fault-Tolerant Distributed Garbage Collection. *Proc. of the 5th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, pages 29–39, 1986.
- [18] F. MATTERN. Verteilte Basisalgorithmen. *Springer-Verlag, Informatik-Fachberichte Bd. 226*, 1989.
- [19] S. MELDAL, S. SANKAR, J. VERA. Exploting Locality in Maintaining Potential Causality. Technical Report CSL-TR-91-466, Computer Systems Laboratory, Stanford University, 1991.
- [20] H. REICHENBACH. Philosophie der Raum-Zeit-Lehre. *Walter de Gruyter*, 1928.
- [21] F. SEIBT. *Die Zeit als Kategorie der Geschichte und als Kondition des historischen Sinns, In: Die Zeit – Dauer und Augenblick.* (Hg.: A. Peisl, A. Mohler), Oldenbourg Verlag (Schriften der Carl Friedrich von Siemens Stiftung), 1983.
- [22] M. SINGHAL, A. KSHEMKALYANI. An Efficient Implementation of Vector Clocks. Technical report, Dept. of Computer and Information Science, The Ohio State University, 1991.
- [23] R. STROM, S. YEMINI. Optimistic Recovery in Distributed Systems. *ACM Transactions on Computer Systems*, 3(3):204–226, 1985.
- [24] J.F.A.K. VAN BENTHEM. The Logic of Time. *D. Reidel Publishing Company*, 1983.
- [25] M. ČAPEK. Time–Space Rather than Space–Time. *Diogenes*, (123):30–49, 1983.
- [26] K. VENKATESH, T. RADHAKRISHNAN, H.F. LI. Optimal Checkpointing and Local Recording for Domino-Free Rollback Recovery. *Information Processing Letters* 25, pp. 295-303, 1987.

Der Autor dankt Bernadette Charron-Bost für die anregenden Diskussionen über das Konzept der Vektorzeit sowie Reinhard Schwarz für seine Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge zum vorliegenden Beitrag.