Ein Nachtrag zu den Extrapolationsverfahren der numerischen Integration

von

Peter Kandzia

A 72/04

Dezember 1972

Einleitung

Die Anwendung der Extrapolation auf die Integration wurde -- ausgehend vom Romberg-Verfahren -- von 1961 an sehr intensiv untersucht und ist mittlerweile in Lehrbücher der Numerischen Mathematik (etwa [S72],[WS72]) eingegangen. Die Extrapolationsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung eines Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad a,b \in \mathbb{R},\ a,b \text{ endlich}, \quad f \mid \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

basieren auf der Euler-Maclaurin-Summenformel und lassen sich in der Sprechweise älterer Lehrbücher als sukzessive Bildung gewisser Linearkombinationen von Euler-Maclaurin-Summen deuten.

In der folgenden Arbeit wird nach einer kurzen Einführung der Extrapolationsverfahren zunächst herausgearbeitet, worin die Sonderstellung des normalen und des verallgemeinerten Romberg-Verfahrens begründet liegt. Die Arbeit geht dann näher auf den obengenannten Gesichtspunkt der Linearkombination von Euler-Maclaurin-Summen ein und zeigt, wie sich die auf Extrapolation beruhenden Integrationsverfahren in eine größere Klasse von Verfahren einbetten lassen und zwar so, daß Verbindungen etwa zwischen der Hardyschen Integrationsformel und den Extrapolationsverfahren erkennbar werden. Die größere Klasse von Integrationsverfahren läßt sich auch durch Verallgemeinerung der Extrapolation begründen. Der letzte Abschnitt der Arbeit beschäftigt sich mit einer verallgemeinerten Bildung von Linearkombinationen aus Euler-Maclaurin-Summen, die es gestattet, etwa die auf 5 Stützstellen beruhende geschlossene Newton-Cotes-Formel als derartige Linearkombination darzustellen. Mit der bisher üblichen Methode konnte man von den geschlossenen Newton-Cotes-Formeln nur diejenigen mit 2,3,4 bzw. 6 Stützstellen aus Euler-Maclaurin-Summen gewinnen.

Die in der Arbeit neu auftretenden Verfahren sind nicht günstiger als die schon bekannten. Das Ziel der Arbeit besteht

auch nicht darin, derartige Verfahren vorzuschlagen, sondern es werden im wesentlichen Zusammenhänge zwischen den Extrapolationsverfahren und anderen Integrationsmethoden gezeigt und einige offene Fragen beantwortet.

1) Kurze Beschreibung der auf Trapezsummen aufbauenden Extrapolationsverfahren (nach [S72])

Wie in der Einleitung schon gesagt wurde, behandeln wir Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad a,b \in \mathbb{R},\ a,b \text{ endlich},$$

wobei generell die Funktion $f|\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als genügend oft stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Um Schreibarbeit zu sparen, wird der Fall a=0, b=1 betrachtet, der sich sofort auf den Fall allgemeiner endlicher Grenzen a,b erweitern läßt.

Die hier behandelten Extrapolationsverfahren bauen auf Trapezsummen

$$T_n^{(0)} := \frac{1}{n}\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{f(1)}{2}\right)$$

zur Schrittweite $h := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, auf, für die gilt:

Satz 1 (Euler-Maclaurin): Für $f \in C^{2m+2}[0,1]$ besitzt die Trapezsumme $T_n^{(0)}$ die asymptotische Entwicklung

$$(1) \quad T_n^{(0)} = \tau_0 + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \ldots + \tau_m h^{2m} + R^{(2m+2)}(n) h^{2m+2}$$

mit $\tau_0 = \int_0^1 f(x)dx$,

$$\tau_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right), \quad 1 \le k \le m,$$

$$R^{(2m+2)}(n) = -\int_0^1 \tilde{P}_{2m+2}(nx) \cdot f^{(2m+2)}(x)\,dx,$$

$$\tilde{P}_{2m+2}(x) = \frac{1}{(2m+2)!} \cdot \left(B_{2m+2}(x - \text{entier}(x)) - B_{2m+2}\right).$$

Dabei sind die Größen $B_{2m+2}(x)$ und B_{2m+2} Bernoullisches Polynom bzw. Bernoullische Zahl (in der Notation von Nörlund, Differenzenrechnung).

Vernachlässigt man bei der asymptotischen Entwicklung von $T_n^{(0)}$ das Restglied, dann läßt sich $T_n^{(0)}$ als Polynom in h^2 auffassen, das für h=0 den Wert $\tau_0 = \int_0^1 f(x)dx$ liefert. Dies legt zur Bestimmung von τ_0 folgendes Verfahren nahe: Zu einer Reihe von Schrittweiten

$$h_0 = \frac{1}{n_0},\ h_1 = \frac{1}{n_1},\ \ldots,\ h_m = \frac{1}{n_m}\ ,\ n_i \in \mathbb{N},\ n_i \text{ paarweise verschieden,}$$

bestimmt man die Trapezsummen

$$T_{n_i}^{(0)},\ i=0,1,\ldots,m,$$

und danach durch Interpolation dasjenige Polynom

$$\hat{T}^{(2m)}(h) := a_0 + a_1 h^2 + \ldots + a_m h^{2m}$$

in h^2, für das gilt

$$\hat{T}^{(2m)}(h_i) = T_{n_i}^{(0)},\ i=0,\ldots,m.$$

Der "extrapolierte" Wert $T^{(2m)}(0)$ ist in der Regel ein guter Näherungswert für das gesuchte Integral. $\hat{T}^{(2m)}(h)$ ist durch die Stützwerte

$$(h_i,\ T_{n_i}^{(0)}),\ i=0,1,..,,m,$$

eindeutig bestimmt und läßt sich mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel angeben als

$$\hat{T}^{(2m)}(h) = \sum_{i=0}^{m} T_{n_i}^{(0)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} \frac{h^2-h_k^2}{h_i^2-h_k^2}\ .$$

Für $\hat{T}^{(2m)}(0)$ ergibt sich somit

$$(2)\quad \hat{T}^{(2m)}(0) = \sum_{i=0}^{m} T_{n_i}^{(0)} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{m} \frac{h_k^2}{h_k^2-h_i^2} = \sum_{i=0}^{m} T_{n_i}^{(0)} c_i .$$

Das zugehörige Restglied hat die Form

$$(3)\quad \int_0^1 f(x)dx - \hat{T}^{(2m)}(0) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}}\ \tilde{P}_{2m+2}(n_i x)\ f^{(2m+2)}(x)\ dx$$

$$= \int_0^1 s_{2m+2}(x)\ f^{(2m+2)}(x)\ dx\ .$$

Die Integrationsformel $\hat{T}^{(2m)}(0)$ ist also eine Linearkombination von Trapezsummen. Derartige Linearkombinationen werden in 3) allgemein behandelt. Vorher wollen wir kurz auf die Romberg-Verfahren eingehen, die sich bei Extrapolation mit den Schrittweiten

$$h_i = \frac{1}{2^i},\ i=0,1,\ldots,m,$$

bzw. allgemein mit den Schrittweiten

$$h_i = \frac{1}{p^i},\ i=0,1,\ldots,m,\ p\in\mathbb{N},\ p\geq 2,$$

ergeben.

2) Die Sonderstellung der Romberg-Verfahren in der Menge der Extrapolationsverfahren

Die Romberg-Verfahren nehmen unter den Extrapolationsverfahren eine Sonderstellung ein, die hauptsächlich auf den folgenden beiden Eigenschaften und dem besonders bequemen Nachweis der zweiten Eigenschaft beruht.

a) Sei $\hat{T}^{(2m)}(0) = \sum_{j=0}^{p^m} A_j \cdot f(\frac{j}{p^m})$ eine Romberg-Formel, d.h. eine Integrationsformel, die sich durch Extrapolation mit den Schrittweiten $h_i = \frac{1}{p^i}$, $i=0,1,\ldots,m$, ergibt; dann sind alle Koeffizienten A_j, $j=0,1,\ldots,p^m$, positiv.

b) Die Gewichtsfunktion $s_{2m+2}(x)$ im Restglied (3) ist bei einer Romberg-Formel $\hat{T}^{(2m)}(0)$ von einerlei Vorzeichen.

Zu a): Die Eigenschaft a) ist in [S61] und [BRS 63] für $p=2$ angegeben; in [BRS 63] ist sie für das genannte p auch bewiesen. Ein Beweis für allgemeines p sei hier angeführt:

Mit der Eulerschen Partitionsfunktion

$$\phi_m(q,t) = (1-qt)(1-q^2t)\ldots(1-q^mt) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}(q)\cdot t^\mu$$

-- auf ihre Verbindung mit den Romberg-Verfahren hat Rutishauser hingewiesen -- gilt

$$(4) \qquad \hat{T}^{(2m)}(0) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right) \cdot T_{p^{m-\mu}}^{(0)} \Big/ \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right) ,$$

wobei die Beziehungen

$$a_0^{(m)}(q) = 1, \quad a_\mu^{(m)}(q) = \prod_{\nu=1}^{\mu} \frac{q^\nu (1-q^{m+1-\nu})}{1-q^\nu} \cdot (-1)^\nu$$

zu erwähnen ist. Damit sind die Koeffizienten A_0 und A_{p^m} bestimmt durch

$$A_0 = A_{p^m} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right) \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{m-\mu}}{\sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\prod_{\nu=1}^{m}\left(1-\frac{p}{p^{2\nu}}\right)}{2p^m \cdot \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right)} > 0 .$$

Für jeden Koeffizienten A_j mit $j \neq 0, p^m$ gibt es ein k mit $0 \leq k < m$, so daß gilt

$$A_j = \sum_{\mu=0}^{k} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{m-\mu} \Big/ \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Die Summanden $\alpha_\mu := a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{m-\mu}$, $\mu = 0,1,\ldots,k$, haben alternierendes Vorzeichen und nehmen betragsmäßig streng monoton ab. Letzteres ergibt sich aus der Beziehung

$$\frac{\left|a_{\mu+1}^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right| \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{m-\mu-1}}{\left|a_\mu^{(m)}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right| \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{m-\mu}} = \frac{\left(\frac{1}{p^2}\right)^{\mu+1}\left(1-\left(\frac{1}{p^2}\right)^{m-\mu}\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{p^2}\right)^{\mu+1}\right)} \cdot p .$$

Wegen $\alpha_0 > 0$ gilt damit $A_j > 0$.

Daß die Eigenschaft a) bei anderen auf Extrapolation zurückgehenden Integrationsformeln nicht zu gelten braucht, zeigt die für

$$n_0 = 1, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 3$$

entstehende Formel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{120}\left(11f(0)+81f\left(\tfrac{1}{3}\right)-64f\left(\tfrac{1}{2}\right)+81f\left(\tfrac{2}{3}\right)+11f(1)\right) + R^{(6)},$$

die auch in manchen Büchern, welche das Romberg-Verfahren noch nicht erwähnen, zu finden ist (siehe etwa [K55]).

Es sei noch angemerkt, daß die Koeffizienten A_j in der praktischen Rechnung nie auftauchen, da man den Integralwert allein aufgrund der Trapezsummen mit Hilfe eines Neville-Schemas bestimmt.

Die Kenntnis der Eigenschaft a) erlaubt die Anwendung des Satzes von Stekloff, der besagt, daß eine Folge von Integrationsformeln

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(t_k^{(n)}) + R_n,\quad a \leq t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} \leq b, n=1,2,\ldots$$

genau dann konvergiert, wenn die Koeffizienten $A_k^{(n)}$ nicht negativ sind und die Formeln für jedes Polynom P konvergieren.

Die Eigenschaft b) wird für beliebige Extrapolationsverfahren i.allg. an Hand der folgenden Restglied-Darstellung untersucht:

$$(5)\qquad R^{(2m+2)} = (-1)^m f^{(2m+2)}(x) \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos(2k\pi n_i x))}{(2k\pi)^{2m+2}} \Big) dx$$

(siehe [B64]). Bei den Romberg-Formeln ist die Gültigkeit der Eigenschaft b) auf bequemere Art zu beweisen. Man macht dabei von folgendem Satz Gebrauch:

<u>Satz 2:</u> Sei $\tilde{b}_2(x) := -\tilde{P}_2(x)$; $\tilde{b}_{2k}(x)$ sei definiert durch

$$\tilde{b}_{2k}(x) := \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} (\tilde{b}_{2k-2}(p\xi) - \tilde{b}_{2k-2}(\xi)) d\xi\, d\eta,\quad k = 2,3,\ldots$$

Dann besitzen alle Funktionen $b_{2k}(x)$ die folgenden Eigenschaften: α) $\tilde{b}_{2k}(x)$ ist symmetrisch zur Achse $x=1/2$,

β) $\tilde{b}_{2k}(0)=0$,

γ) $\tilde{b}_{2k}(x)$ ist monoton wachsend für $0 \leq x \leq 1/2$.

Der Satz wurde für $p=2$ in [B61] verwendet. Für beliebiges $p \in \mathbb{N}$ wurde er in [K63] und neuerdings in [A72] bewiesen. Es soll nun gezeigt werden, warum dieser Satz für die Romberg-Verfahren relevant ist und warum man ihn für die restlichen Extrapolationsverfahren nicht gebrauchen kann.

Wir gehen davon aus, daß man das Restglied zu $\hat{T}^{(2m)}(0)$, das wir in (3) in der Form

$$\int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}} \tilde{P}_{2m+2}(n_i x)\, f^{(2m+2)}(x)\, dx$$

kennengelernt haben, aufgrund von (1) und (2) auch in der Form

$$(6) \quad \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^2} \tilde{P}_2(n_i x)\, f^{(2)}(x)\, dx$$

angeben kann, die sich durch zweimalige partielle Integration in

$$(7) \quad \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^4} \tilde{P}_4(n_i x)\, f^{(4)}(x)\, dx$$

und schrittweise schließlich in die Form (3) überführen läßt. Die Gewichtsfunktionen in (6) und (7) können nach

$$(8) \quad \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^2} \tilde{P}_2(n_i x) = \sum_{i=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=0}^{i} \frac{c_j}{n_j^2} \Big) \big(\tilde{P}_2(n_i x) - \tilde{P}_2(n_{i+1} x) \big)$$

bzw. nach

$$(9) \quad \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^4} \tilde{P}_4(n_i x) = \sum_{i=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=0}^{i} \frac{c_j}{n_j^2} \Big) \frac{1}{n_i^2} \Big(\tilde{P}_4(n_i x) - \frac{n_i^2}{n_{i+1}^2} \tilde{P}_4(n_{i+1} x) \Big)$$

umgeschrieben werden. Führen wir noch die Bezeichnungen

$$\tilde{K}_2^{(i)}(x) := \tilde{P}_2(n_i x), \quad \tilde{K}_4^{(i)}(x) := \tilde{P}_4(n_i x) - \frac{n_i^2}{n_{i+1}^2} \tilde{P}_4(n_{i+1} x)$$

ein, dann bedeutet der Übergang von (6) nach (7) den Übergang von der Linearkombination

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^2} \tilde{K}_2^{(i)}(x)$$

aus m+1 Funktionen erster Stufe zu der Linearkombination

$$\sum_{i=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=0}^{i} \frac{c_j}{n_j^2} \Big) \frac{1}{n_i^2} \tilde{K}_4^{(i)}(x)$$

aus m Funktionen zweiter Stufe, wobei die Beziehung

$$(10)\qquad \frac{1}{n_i^2}\,\tilde{K}_4^{(i)}(x) = \int_0^x\int_0^\eta (\tilde{K}_2^{(i)}(n_i\xi) - \tilde{K}_2^{(i)}(n_{i+1}\xi))\,d\xi\,d\eta\ ,\ i=0,..,m-1,$$

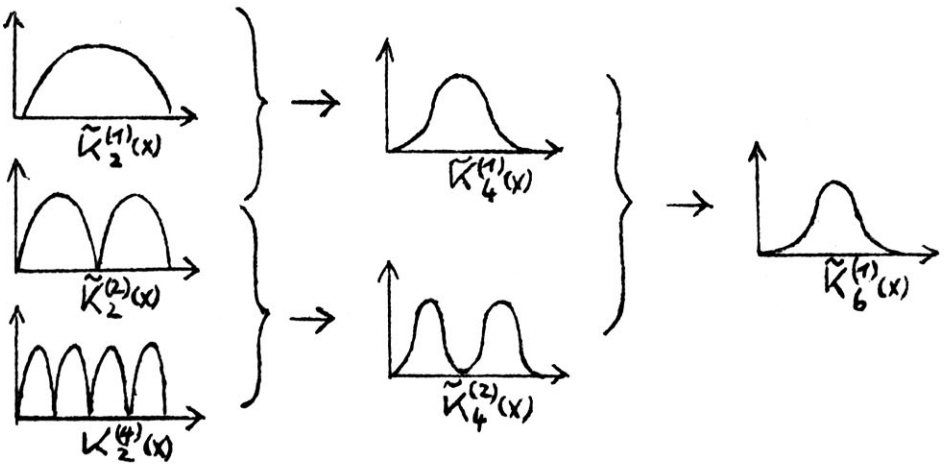
gilt. Iteriert man diesen Vorgang, so erhält man zuletzt für die Gewichtsfunktion $s_{2m+2}(x)$ die Darstellung

$$s_{2m+2}(x) = \text{const}\cdot\tilde{K}_{2m+2}^{(1)}(x)$$

mit einer Funktion m-ter Stufe. Es sei darauf hingewiesen, daß in jedem Schritt das aufgrund der Extrapolation geltende Gleichungssystem

$$(11)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1/n_o^2 & 1/n_1^2 & 1/n_2^2 & \dots & 1/n_m^2 \\ 1/n_o^4 & 1/n_1^4 & 1/n_2^4 & \dots & 1/n_m^4 \\ & \dots & & & \\ 1/n_o^{2m} & 1/n_1^{2m} & 1/n_2^{2m} & \dots & 1/n_m^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_o \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

benutzt wird. Eine Skizze für den Fall $n_o=1$, $n_1=2$, $n_2=4$ mag das Vorgehen verdeutlichen.



Die Gewichte der $K_{2_\mu}^{(i)}(x)$ wurden nicht berücksichtigt.

Bei den Romberg-Formeln gilt nun für alle i

$$n_i = p^i,$$

was für alle in Frage kommenden i zu den Beziehungen

(12) $\tilde{K}_{2\mu}^{(i)}(x) = \tilde{K}_{2\mu}^{(i-1)}(px)$, $\mu=1,2,\ldots,m$,

führt. Dies bewirkt, daß beim Übergang von (8) nach (9) bezüglich (10) der Satz 2 angewandt werden kann und das Analoge für die folgenden Schritte gilt. Damit entsteht eine endgültige Gewichtsfunktion $s_{2m+2}(x)$ mit den in Satz 2 genannten Eigenschaften. Die Beziehung (12) gilt genau für die Fälle mit

$$(\forall i\in\{1,2,\ldots,m\})(n_i=p^{k+i}),\ k\geq 0,$$

d.h. genau für die nur unwesentlich verallgemeinerten Romberg-Formeln.

Die strikte Anwendung von Satz 2 in allen oben betrachteten Schritten ist bei den übrigen Extrapolationsformeln unmöglich, auch dann, wenn die n_i so gesetzmäßig ausgewählt werden wie bei dem von Bulirsch in [B64] angegebenen Verfahren. Es ist gekennzeichnet durch

$$n_0=1,\ n_{2i-1}=2^i,\ n_{2i} = 2^{i-1}3,\ i=1,2,\ldots$$

Anstelle von (12) ergeben sich nur wenig abgeänderte Beziehungen, die aber schon nicht mehr durchweg die Anwendung von Satz 2 gestatten. Hier muß zur Untersuchung der Vorzeichengleichheit von $s_{2m+2}(x)$ auf die Beziehung (5) zurückgegriffen werden.

Die genannte Vorzeichengleichheit ist deswegen von so großem Interesse, weil sie die Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gestattet. Dies ist in der Literatur über die Extrapolationsverfahren nachzulesen.

3) Die Darstellung weiterer Integrationsformeln als Linearkombination von Trapezsummen; Verallgemeinerung der Extrapolation

Wir gehen aus von der Euler-Maclaurinschen Summenformel

$$\int_0^1 f(x)dx = T_{n_i}^{(0)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n_i^{2k}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(0)-f^{(2k-1)}(1)\right) + \frac{1}{n_i^{2m+2}} \int_0^1 \tilde{P}_{2m+2}(n_i x) f^{(2m+2)}(x)dx,$$

die für m+1 paarweise verschiedene $n_i \in \mathbb{N}$, i=0,1,...,m, aufgestellt wird. Jede Linearkombination

$$\sum_{i=0}^{m} c_i T_{n_i}^{(0)} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=0}^{m} c_i = 1$$

kann als Näherungsformel für das Integral $\int_0^1 f(x)dx$, d.h. als Integrationsformel, angesehen werden mit dem Restglied

$$\int_0^1 f(x)dx - \sum_{i=0}^{m} c_i T_{n_i}^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2k}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right) + \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}} \int_0^1 \tilde{P}_{2m+2}(n_i x) f^{(2m+2)}(x)\, dx$$

Verlangt man nun, daß in dem Restglied die Summanden

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2k}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right), \quad k=1,\ldots,m,$$

verschwinden, d.h. verlangt man, daß die Gewichte $c_0,\ldots,c_m$ für die betrachteten n_i das Gleichungssystem (11) erfüllen, dann ergibt sich mit

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} c_i T_{n_i}^{(0)} + \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}} \int_0^1 \tilde{P}_{2m+2}(n_i x)\, f^{(2m+2)}(x)dx$$

$$= T_N^{(2m)} + \int_0^1 \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2m+2}} \tilde{P}_{2m+2}(n_i x)\, f^{(2m+2)}(x)dx,$$

$$N = \mathrm{kgV}(n_i),$$

eine Integrationsformel, die man auch durch Extrapolation erhalten könnte. Allgemein gilt: Genau diejenigen Integrationsformeln

$$\sum_{i=0}^{m} c_i T_{n_i}^{(0)}, \quad n_i \in \mathbb{N} \text{ für } i=0,1,\ldots,m,$$

für die $(c_0,\ldots,c_m)^T$ Lösung des zugehörigen Gleichungssystems (11) ist, lassen sich durch Extrapolation gewinnen.

Offensichtlich wird bei den soeben betrachteten Integrationsformeln eine maximale Anzahl von Summanden

$$(12)\quad \sum_{i=0}^{m} \frac{c_i}{n_i^{2k}} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(1)\right)$$

zum Verschwinden gebracht. Es ergibt sich beim Kombinieren von m+1 Euler-Maclaurin-Summen ein Restglied $R^{(2m+2)} = \int_0^1 s_{2m+2} f^{(2m+2)}(x)\,dx$

Man kann nun bei Vorliegen von m+1 Euler-Maclaurin-Summen mit einem Restglied $R^{(2l+2)}$, $l<m$, zufrieden sein; es werden dann natürlich nicht alle Möglichkeiten, die Stufe des Restgliedes zu erhöhen, ausgenutzt. Ein Beispiel für die so entstehenden Integrationsformeln ist die Hardysche Formel

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{300}\left(14f(0)+81f(\tfrac{1}{6})+110f(\tfrac{1}{2})+81f(\tfrac{5}{6})+14f(1)\right)+R^{(6)},$$

die sich als Linearkombination

$$T_6^{(4)} = -\frac{1}{300}T_1^{(0)} + \frac{29}{150}T_2^{(0)} - \frac{81}{100}T_3^{(0)} + \frac{81}{50}T_6^{(0)}$$

mit dem Restglied

$$R^{(6)} = \int_0^1 \frac{1}{300}\left(-\tilde{P}_6(x) + \frac{29}{32}\tilde{P}_6(2x) - \frac{1}{3}\tilde{P}_6(3x) - \frac{1}{96}\tilde{P}_6(6x)\right)f^{(6)}(x)dx$$

darstellen läßt.

Es ist nun möglich, derartige Formeln in Verallgemeinerung der Extrapolationsmethode durch Auswertung eines gewissen Polynoms $\hat{T}^{(2l)}(h)$ an der Stelle h=0 zu erhalten. Dies sei zunächst am Beispiel der Hardyschen Formel durchdiskutiert. Wir betrachten dazu die Schrittweiten

$$h_0=1,\ h_1=1/2,\ h_2=1/3,\ h_3=1/6$$

und die Interpolationspolynome

$$\hat{T}^{(4)}_{1,2,3}(h) = \left(\tfrac{1}{24}T_1^{(0)} - \tfrac{16}{15}T_2^{(0)} + \tfrac{81}{40}T_3^{(0)}\right) + \left(-\tfrac{13}{24}T_1^{(0)} + \tfrac{32}{3}T_2^{(0)} - \tfrac{81}{8}T_3^{(0)}\right)h^2 + \left(\tfrac{3}{2}T_1^{(0)} - \tfrac{48}{5}T_2^{(0)} + \tfrac{81}{10}T_3^{(0)}\right)h^4,$$

$$\hat{T}^{(4)}_{1,2,6}(h) = \left(\tfrac{1}{105}T_1^{(0)} - \tfrac{1}{6}T_2^{(0)} + \tfrac{81}{70}T_6^{(0)}\right) + \left(-\tfrac{8}{21}T_1^{(0)} + \tfrac{37}{6}T_2^{(0)} - \tfrac{81}{14}T_6^{(0)}\right)h^2 + \left(\tfrac{48}{35}T_1^{(0)} - 6T_2^{(0)} + \tfrac{162}{35}T_6^{(0)}\right)h^4,$$

$$\hat{T}^{(4)}_{1,3,6}(h) = \left(\tfrac{1}{280}\,T^{(0)}_1 - \tfrac{3}{8}T^{(0)}_3 + \tfrac{48}{35}T^{(0)}_6\right) + \left(-\tfrac{9}{56}T^{(0)}_1 + \tfrac{111}{8}T^{(0)}_3 - \tfrac{96}{7}T^{(0)}_6\right) h^2 + \left(\tfrac{81}{70}\,T^{(0)}_1 - \tfrac{27}{2}T^{(0)}_3 + \tfrac{432}{35}T^{(0)}_6\right) h^4,$$

$$\hat{T}^{(4)}_{2,3,6}(h) = \left(\tfrac{1}{10}\,T^{(0)}_2 - \tfrac{3}{5}\,T^{(0)}_3 + \tfrac{3}{2}\,T^{(0)}_6\right) + \left(-\tfrac{9}{2}\,T^{(0)}_2 + 24T^{(0)}_3 - \tfrac{39}{2}T^{(0)}_6\right) h^2 + \left(\tfrac{162}{5}\,T^{(0)}_2 - \tfrac{432}{5}\,T^{(0)}_3 + 54T^{(0)}_6\right) h^4$$

mit der Eigenschaft

$$T^{(4)}_{n_i,n_j,n_k}(h_\mu) = T^{(0)}_{n_\mu} \text{ für } \mu = i,j,k,\ h_\mu = \frac{1}{n_\mu}\ .$$

Für jede Linearkombination

$$\hat{\mathcal{T}}^{(4)}(h) := a\,\hat{T}^{(4)}_{1,2,3}(h) + b\,\hat{T}^{(4)}_{1,2,6}(h) + c\,\hat{T}^{(4)}_{1,3,6}(h) + d\,\hat{T}^{(4)}(h)$$

mit $a=-\frac{2}{5}+\frac{5}{75}c+\frac{8}{27}d$, $b=\frac{7}{5}-\frac{32}{27}c-\frac{35}{27}d$, $c,d\in\mathbb{R}$,

gilt bezüglich der Hardyschen Formel

$$T^{(4)}_6 = \hat{\mathcal{T}}^{(4)}(0)\ ;$$

d.h. die Hardysche Formel läßt sich ansehen als Wert einer Linearkombination von Interpolationspolynomen, der sich an der Stelle h=0 ergibt.

Das Beispiel läßt sich verallgemeinern, was zu folgendem Satz führt:

<u>Satz 3:</u> Seien $h_o=1/n_o$, ... , $h_m=1/n_m$ paarweise verschiedene Schrittweiten und $T^{(o)}_{n_o},\ldots,T^{(o)}_{n_m}$ die zugehörigen Trapezsummen. Sei $l\in\mathbb{N}$ mit $0<l<m$.

$\hat{T}^{(21)}_{n_{i_o},\ldots,n_{i_l}}(h) = {}_o\alpha_{i_o,\ldots,i_l} + {}_1\alpha_{i_o,\ldots,i_l}h^2 + \ldots + {}_l\alpha_{i_o,\ldots,i_l}h^{21}$,

$i_o,\ldots,i_l\in\{0,1,\ldots,m\}$, $i_o<i_1<\ldots<i_l$, sei dasjenige Polynom in h^2, das an den Stellen $h_{i_o},\ldots,h_{i_l}$ jeweils den Wert $T^{(o)}_{n_{i_o}},\ldots,T^{(o)}_{n_{i_l}}$ annimmt. Die Koeffizienten von ${}_o\alpha_{i_o,\ldots,i_l}$, als Linear-

kombinationen der $T^{(0)}_{n_i}$ ausgedrückt, seien bezeichnet in der Form

$$(13)\quad {}_0\alpha_{i_0,\dots i_l} = \sum_{s=i_0,\dots,i_l} c_s^{(i_0\dots i_l)} T^{(0)}_{n_s}.$$

a) Jede Linearkombination

$$(14)\quad \hat{T}^{(21)}(h) := \sum_{\substack{i_0,\dots,i_l \in \{0,1,\dots,m\} \\ i_0<i_1<\dots<i_l}} \varkappa_{i_0,\dots,i_l} \hat{T}^{(21)}_{n_{i_0}\dots n_{i_l}}(h)$$

mit $\sum_{\substack{i_0,\dots,i_l \in \{0,1,\dots,m\} \\ i_0<i_1<\dots<i_l}} \varkappa_{i_0,\dots,i_l} = 1$

führt zu einer Integrationsformel

$$T^{(21)} = \hat{T}^{(21)}(0) = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i T^{(0)}_{n_i}$$

mit

$$(15)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_0^2 & h_1^2 & \dots & h_m^2 \\ \dots & & & \\ h_0^{21} & h_1^{21} & \dots & h_m^{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Zu jeder Integrationsformel $T^{(21)} = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i T^{(0)}_{n_i}$, bei der die γ_i das Gleichungssystem (15) erfüllen, gibt es eine Linearkombination der Form (14) mit $T^{(21)} = \hat{T}^{(21)}(0)$, d.h. $T^{(21)}$ läßt sich als Wert von $\hat{T}^{(21)}(h)$ an der Stelle h=0 gewinnen.

Beweis: Der Teil a) ist trivial.

b) $T^{(21)} = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i T^{(0)}_{n_i}$ sei gegeben, wobei $(\gamma_0,\dots,\gamma_m)^T$ Lösungsvektor von (15) ist.

Die Vektoren

$$k_1 = \begin{pmatrix} c_0^{(0,1,\dots,\ell)} \\ c_1^{(0,1,\dots,\ell)} \\ \vdots \\ c_{\ell-1}^{(0,1,\dots,\ell)} \\ c_\ell^{(0,1,\dots,\ell)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_2 = \begin{pmatrix} c_0^{(0,1,\dots,\ell-1,\ell+1)} \\ c_1^{(0,1,\dots,\ell-1,\ell+1)} \\ \vdots \\ c_{\ell-1}^{(0,1,\dots,\ell-1,\ell+1)} \\ 0 \\ c_{\ell+1}^{(0,1,\dots,\ell-1,\ell+1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, k_{m-\ell+1} = \begin{pmatrix} c_0^{(0,1,\dots,\ell-1,m)} \\ c_1^{(0,1,\dots,\ell-1,m)} \\ \vdots \\ c_{\ell-1}^{(0,1,\dots,\ell-1,m)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_m^{(0,1,\dots,\ell-1,m)} \end{pmatrix}$$

deren Komponenten $\neq 0$ aus (13) stammen, sind $m-l+1$ linear unabhängige Lösungsvektoren von (15). Damit gibt es Größen $\beta_1, \dots, \beta_{m-l+1}$ mit $\sum_{i=1}^{m-\ell+1} \beta_i = 1$, so daß

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m-\ell+1} \beta_i k_i$$

gilt. Dies führt zu der Beziehung

$$\sum_{i=0}^{m} \gamma_i T_{n_i}^{(0)} = \beta_1 \hat{T}^{(21)}_{n_0 n_1 \dots n_\ell}(0) + \beta_2 \hat{T}^{(21)}_{n_0 n_1 \dots n_{\ell-1} n_{\ell+1}}(0) + \dots + \beta_{m-l+1} \hat{T}^{(21)}_{n_0 n_1 \dots n_{\ell-1} n_m}(0)$$

und damit zur Aussage b).

Bemerkung: Durch die Voraussetzung $0 < 1$ in Satz 3 haben wir nur Integrationsformeln berücksichtigt, bei denen mindestens einer der Summanden (12) zum Verschwinden gebracht wird.

Man könnte nun bei vorgegebenen Schrittweiten $h_0, h_1, \dots, h_m$ und gegebenem $1 < m$ daran denken, unter den Polynomen (14) eines auszusuchen, das die gegebenen Stützwerte

$$(h_i, T_{n_i}^{(0)}), \quad i=0,\dots,m,$$

in einem gewissen Sinne approximiert, und den Wert dieses Polynoms an der Stelle h=0 als neue Integrationsformel benutzen. Legen wir diskrete Tschebyscheff-Approximation zugrunde, haben wir die genannten Stützwerte durch ein Polynom

$$\hat{\mathcal{T}}_T^{(21)}(h) = \alpha_0 + \alpha_1 h^2 + \ldots + \alpha_{11} h^{21}$$

so zu approximieren, daß für den Approximationsfehler

$$F_i = \hat{\mathcal{T}}_T^{(21)}(h_i) - T_{n_i}^{(o)} \quad , \; i=0,\ldots,m,$$

in den Stützstellen das Maximum $\max_{i=1,\ldots,m} |F_i|$ möglichst klein wird. Dabei erhält man für die Schrittweiten $h_0=1$, $h_1=1/2$, $h_2=1/3$, $h_3=1/4$, die der Hardy-Formel zugrunde liegen, folgendes Ergebnis:

$$\hat{\mathcal{T}}_T^{(4)}(h) = \tfrac{36}{128}\hat{T}_{1,2,3}^{(4)}(h) + \tfrac{63}{128}\hat{T}_{1,2,6}^{(4)}(h) + \tfrac{28}{128}\hat{T}_{1,3,6}^{(4)}(h) + \tfrac{1}{128}\hat{T}_{2,3,6}^{(4)}(h) \; .$$

Für h=0 führt dies zu

$$T_T^{(4)} = \hat{\mathcal{T}}_T^{(4)}(0) = \tfrac{11}{640}\, T_1^{(o)} - \tfrac{244}{640} T_2^{(o)} + \tfrac{309}{640} T_3^{(o)} + \tfrac{564}{640} T_6^{(o)}$$

und damit zu der Integrationsformel

$$T_T^{(4)} = \tfrac{1}{640}\left(43f(0) + 94f(\tfrac{1}{6}) + 197f(\tfrac{1}{3}) - 28f(\tfrac{1}{2}) + 197f(\tfrac{2}{3}) + 94f(\tfrac{5}{6}) + 43f(1)\right) .$$

Die Koeffizienten der Werte $f(\frac{i}{6})$, i=0,...,6, sind nicht alle positiv, so daß diese Formel nicht zu einer Formelgruppe gehören kann, welche die Anwendung des Stekloffschen Satzes gestattet.

Um nun wie bei den Romberg-Formeln
1.) in den Restgliedern Gewichtsfunktionen von einerlei Vorzeichen zu erhalten und
2.) wenigstens bei günstiger Wahl der Schrittweiten h_i, i=0,...,m, die Anwendung des Stekloffschen Satzes zu ermöglichen,
kann man an "Romberg-ähnliche" Formeln denken, die man für $n \in \mathbb{N}$,

$s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nacheinander durch Operationen

$$T^{(2s+2)}_{p_1 n} = (p_1^{2s+2} T^{(2s)}_{p_1 n} - T^{(2s)}_{n})/(p_1^{2s+2}-1)$$

$$T^{(2s+4)}_{p_2 p_1 n} = (p_2^{2s+4} T^{(2s+2)}_{p_2 p_1 n} - T^{(2s+2)}_{p_1 n})/(p_2^{2s+4}-1)$$

$$\cdots$$

$$T^{(2s+2m)}_{p_m \cdots p_1 n} = (p_m^{2s+2m} T^{(2s+2m-2)}_{p_m \cdots p_1 n} - T^{(2s+2m-2)}_{p_{m-1} \cdots p_1 n})/(p_m^{2s+2m}-1)$$

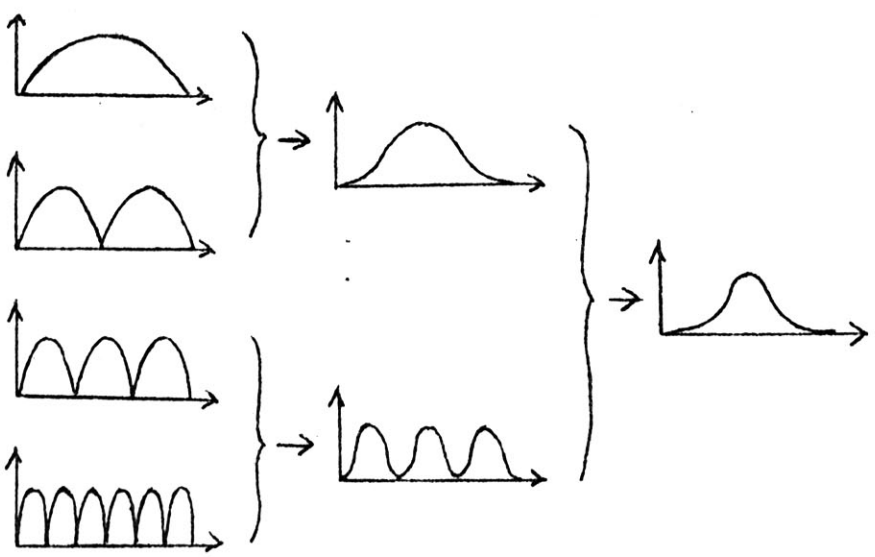
erhält. Dabei sind $p_1, \ldots, p_m$ natürliche Zahlen, die nicht alle gleich sind. Die entstehenden Linearkombinationen lassen sich in ähnlicher Weise wie (4) beschreiben ([K63]), was hier aber nicht ausgeführt werden soll. Die betrachteten Integrationsformeln haben ohnehin den Nachteil, im Vergleich zu den echten Romberg-Formeln eine viel zu große Anzahl von Stützstellen zu benötigen.

Zur Illustration seien ein Beispiel und das dazugehörige Schema zur Bildung von $s_{2(1+m-1)}(x)$ angeführt. Auch in diesem Schema werden Gewichte und Vorzeichen der Funktionen nicht berücksichtigt.

$p_1=2$, $p_2=3$; $s=0$, $n=1$:

$$\left.\begin{aligned} T^{(2)}_2 &= (4T^{(o)}_2 - T^{(o)}_1)/3 \\ T^{(2)}_6 &= (4T^{(o)}_6 - T^{(o)}_3)/3 \end{aligned}\right\} \quad T^{(4)}_6 = (81T^{(2)}_6 - T^{(2)}_2)/80$$

Es ergibt sich $T^{(4)}_6 = \frac{1}{240}(324T^{(o)}_6 - 81T^{(o)}_3 - 4T^{(o)}_2 + T^{(o)}_1)$.



4) Die Aufstellung von Integrationsformeln bei vorgegebener äquidistanter Stützstellenmenge

Im folgenden sei die Menge $\mathcal{Y} := \{0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$, $N \in \mathbb{N}$, der zu verwendenden Stützstellen jeweils vorgegeben. Die Integrationsformel

$$T_N^{(2\varrho_N)} = \sum_{i=0}^{N} A_i f(\tfrac{i}{N}) \ ,$$

welche genau die Stützstellen aus $\mathcal{Y}$ benutzt und welche sich durch Extrapolation aus allen Trapezsummen $T_n^{(0)}$ mit n teilt N ergibt, ist eindeutig bestimmt. ϱ_N, die größte Zahl, für die sich das Restglied in der Form

$$R = \int_0^1 s_{2\varrho_N+2}(x) f^{(2\varrho_N+2)}(x)\,dx$$

darstellen läßt, ergibt sich als

$$\varrho_N = |\{x/\ x \text{ teilt } N\}| - 1 \ ,$$

d.h. $\varrho_N + 1$ ist die Anzahl der Teiler von N, wobei 1 und N als Teiler von N anzusehen sind.

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, welche Newton-Cotes-Formeln man durch Extrapolation aus Trapezsummen $T_n^{(0)}$ gewinnen kann. Die Antwort ergibt sich folgendermaßen: Das Restglied der zu N+1 Stützstellen $x_0, \ldots, x_N$ gehörenden geschlossenen Newton-Cotes-Formel

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i) + R$$

läßt sich bekanntlich für alle k mit $2 \leq k \leq k_{max}(N)$ darstellen in der Form

$$R = \int_0^1 (\frac{x^k}{k!} - \sum_{i=0}^{N} A_i J_k(x, x_i) f^{(k)}(x)\,dx$$

mit $J_k(x, x_i) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_i \\ (x-x_i)^{k-1}/((k-1)!) & \text{für } x \geq x_i \end{cases}$

$k_{max}(N)$ ist bestimmt durch $k_{max}(N) = \begin{cases} N+1 & \text{für ungerades N} \\ N+2 & \text{für gerades N} \end{cases}$,

d.h. $k_{max}(N) = 2\nu_N + 2$ mit $\nu_N = \text{entier}(N/2)$.

Man überlegt sich leicht, daß für gegebenes N die Gleichung

$$\varrho_N = \nu_N$$

gelten muß, falls sich die zugehörige Newton-Cotes-Formel durch Extrapolation der obengenannten Art herleiten läßt. Die einzigen natürlichen Zahlen $N > 1$, bei denen diese Gleichung gilt, sind 2,3,4 und 6, so daß nur für diese Werte N die Newton-Cotes-Formel durch Extrapolation gewonnen werden kann. Bei allen anderen Zahlen $N > 1$ gilt

$$\varrho_N < \nu_N .$$

Beispiele hierfür sind

$$\varrho_5=1, \quad \nu_5=2;$$

$$\varrho_7=1, \quad \nu_7=3;$$

$$\varrho_8=3, \quad \nu_8=4.$$

Das Aufstellen einer Integrationsformel durch Trapezsummenextrapolation bedeutet, wie wir gesehen haben, die Bildung einer gewissen Linearkombination von Trapezsummen $T_{n_i}^{(0)}$. In 3) lernten wir derartige Linearkombinationen allgemein kennen, wobei wir uns wieder ausschließlich auf Trapezsummen $T_{n_i}^{(0)}$ stützten. Es soll nun gezeigt werden, daß man auch Trapezsummen, die sich von den $T_{n_i}^{(0)}$ unterscheiden, verwenden kann und damit eine größere Klasse von Integrationsverfahren gewinnt. Zu dieser Klasse gehört von den Newton-Cotes-Formeln zumindest die zu N=5 gehörende Formel noch hinzu. Das Vorgehen bei derartigen Kombinationen läßt sich folgendermaßen beschreiben:

Man wählt bei vorgegebenem N Mengen

$$\alpha^{(j)} := \{\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{\mu_j}^{(j)}\} \subseteq \{0,1,..,N-1,N\}, \quad j=1,\ldots,s,$$

aus mit den Eigenschaften

$$\alpha_1^{(j)}=0, \quad \alpha_{\mu_j}^{(j)}=N, \quad \alpha_i^{(j)} < \alpha_{i+1}^{(j)} \text{ für alle } i.$$

Mit $h_i^{(j)} := (\alpha_{i+1}^{(j)} - \alpha_i^{(j)})/N$ kann man in Verallgemeinerung von (1) schreiben:

$$(16)\quad \int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{\mu_j-1} h_i^{(j)}\,(f(\alpha_i^{(j)}/N)-f(\alpha_{i+1}^{(j)}/N))/2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \sum_{i=1}^{\mu_j-1} (h_i^{(j)})^{2k}\,(f^{(2k-1)}(\tfrac{\alpha_i^{(j)}}{N})-f^{(2k-1)}(\tfrac{\alpha_{i+1}^{(j)}}{N})) + \sum_{i=1}^{\mu_j-1} \int_{\alpha_i^{(j)}/N}^{\alpha_{i+1}^{(j)}/N} \tilde{P}_{2m+2}(\frac{x-\alpha_i^{(j)}/N}{h_i^{(j)}})\; f^{(2m+2)}(x)\,dx$$

Die Form (1) erhalten wir hieraus genau dann, wenn eine Konstante $k^{(j)}$ vorhanden ist mit

$$\alpha_{i+1}^{(j)} - \alpha_i^{(j)} = k^{(j)} \text{ für alle } i.$$

Wie in 3) kann nun versucht werden, die zu den Mengen $\mathcal{A}^{(j)}$, $j=1,\ldots,s$, gehörenden Formeln (16) so linear zu kombinieren, daß für möglichst viele k -- oder zumindest für mehr Werte von k als bei dem Vorgehen nach 3) -- die Summanden der Form

$$(17)\quad \frac{B_{2k}}{(2k)!} \sum_{j=1}^{s} c_j \sum_{i=1}^{\mu_j-1} (h_i^{(j)})^{2k}\,(f^{(2k-1)}(\tfrac{\alpha_i^{(j)}}{N})-f^{(2k-1)}(\tfrac{\alpha_{i+1}^{(j)}}{N}))$$

verschwinden.

Als Beispiel für diese Art der Linearkombination betrachten wir das Aufstellen der zu N=5 gehörenden Newton-Cotes-Formel:

Es seien $\mathcal{A}^{(1)} := \{0,1,5\}$,
$\mathcal{A}^{(2)} := \{0,1,3,5\}$,
$\mathcal{A}^{(3)} := \{0,1,4,5\}$,
$\mathcal{A}^{(4)} := \{0,4,5\}$,
$\mathcal{A}^{(5)} := \{0,2,4,5\}$,
$\mathcal{A}^{(6)} := \{0,5\}$,
$\mathcal{A}^{(7)} := \{0,1,2,3,4,5\}$.

Koeffizienten c_j, $j=1,\ldots,7$, für die in den Fällen k=1 und k=2 alle Summen (17) verschwinden, sind durch das folgende Gleichungssystem eindeutig bestimmt:

$$(18)\quad \begin{pmatrix} 4^2-1^2 & 2^2-1^2 & 3^2-1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4^4-1^4 & 2^4-1^4 & 3^4-1^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2-3^2 & 1^2-4^2 & 1^2-2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^4-3^4 & 1^4-4^4 & 1^4-2^4 & 0 & 0 \\ 1^2 & 1^2 & 1^2 & 4^2 & 2^2 & 5^2 & 1^2 \\ 1^4 & 1^4 & 1^4 & 4^4 & 2^4 & 5^4 & 1^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung ergibt sich

$$c_1=-50/Q,\ c_2=-350/Q,\ c_3=225/Q,\ c_4=-50/Q,$$
$$c_5=-350/Q,\ c_6=27/Q,\ c_7=1700/Q \text{ mit } Q=1152.$$

Es läßt sich sofort nachprüfen, daß die Summe $\sum_{j=1}^{7} c_j \mathcal{T}_j$ aus den zu den Mengen $\mathfrak{M}^{(j)}$ gehörenden Trapezsummen $\mathcal{T}_j$ "neuer Art" mit der zu N=5 gehörenden Newton-Cotes-Formel

$$\frac{1}{288}\,(19f(0)+75f(\tfrac{1}{5})+50f(\tfrac{2}{5})+50f(\tfrac{3}{5})+75f(\tfrac{4}{5})+19f(1))$$

übereinstimmt. Diese Übereinstimmung folgt natürlich schon aus der Ordnung der Restglieder.

Wie man sich an weiteren Beispielen leicht klarmachen kann, ist das Finden von brauchbaren Gleichungssystemen (18) äußerst mühsam, so daß diese allgemeinere Art, Euler-Maclaurin-Formeln zu kombinieren, von geringem praktischen Interesse ist. Rekursionsformeln, wie man sie von den Extrapolationsformeln her gewohnt ist, sind ohnehin nicht zu erwarten.

Literatur

[K 32] Kowalewski,G.: Interpolation und genäherte Quadratur, Leipzig, Berlin 1932

[K 55] Kopal,Z.: Numerical Analysis, London 1955

[R 55] Romberg,W.: Vereinfachte numerische Integration, Det. Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandlinger 28, Nr.7, Trondheim 1955

[B 61] Bauer,F.L.: La méthode d'intégration numérique de Romberg; extrait du colloque sur l'analyse numérique,CBRM

[S 61] Stiefel,E.: Altes und Neues über numerische Quadratur, ZAMM 41, 408-413, 1961

[BRS 63] Bauer,F.L., Rutishauser,H., Stiefel,E.: New aspects in numerical quadrature, Proc.of Symposia in App Math. 15, 199-218, Amer.Math.Soc.1963

[K 63] Kandzia,P.: Untersuchungen über die Romberg-Integration, Staatsexamensarbeit Univ.Mainz, unveröffentlicht,1963

[R 63] Rutishauser,H.: Ausdehnung des Rombergschen Prinzips, Num.Math. 5, 48-54, 1963

[B 64] Bulirsch,R.: Bemerkungen zur Romberg-Integration, Num. Math. 6, 6-16, 1964

[BS 67] Bulirsch,R.,Stoer,J.: Numerical Quadrature by Extrapolation, Num.Math.9, 271-278, 1967

[S 70] Schönhage,A.: Mehrdimensionale Romberg-Integration, Num. Math. 14, 299-304, 1970

[A 72] Antes,H.: Über die Romberg-Integration in n Dimensionen, Computing 9, 203-209, 1972

[S 72] Stoer,J.: Einführung in die Numerische Mathematik I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

[WS 72] Werner,H., Schaback,R.: Praktische Mathematik II, Springer-Verlag,Berlin, Heidelberg, New York 1972