Monotonie und Galerkin Verfahren bei gewöhnlichen nichtlinearen periodischen Systemen insbesondere unstetige und mehrwertige

Klaus Taubert

A 79/25

Monotonie und Galerkin Verfahren bei gewöhnlichen nichtlinearen periodischen Systemen insbesondere unstetige und mehrwertige

von

Klaus Taubert

Zusammenfassung. Mehrwertige und periodische Systeme der Form $\dot{y} \in F(t,y)$, $y(t)=y(t+\Omega)$ werden mit Hilfe von Galerkin Verfahren untersucht. Es wird lediglich die Monotonie eines der gesamten Aufgabe zugeordneten Operators auf geeignete Teilmengen von Ω-periodischen Funktionen benötigt. Bei den endlich dimensionalen Aufgaben gelingt es trotz Mehrwertigkeit von F, daß die zugeordneten Operatoren "weitgehend" einwertig und hemistetig sind. Beispiele, auch numerischer Art, erläutern die Tragweite der angegebenen Sätze.

Einleitung

Für das n-dimensionale, mehrwertige und bezüglich t periodische System

$$\dot{y} \in F(t,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega)$$

sollen Existenz- und Eindeutigkeitssätze für periodische Lösungen und deren Approximation angegeben werden.
Für das n-dimensionale, einwertige und bezüglich t periodische System

$$\dot{y}=f(t,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega),$$

mit differenzierbarem f, wurden ähnliche Fragen bereits von M. Urabe [9] untersucht.
In der Praxis treten dagegen häufig nichtdifferenzierbare Aufgaben auf, wie z.B. die eine Schwingung mit trockener und zäher Reibung beschreibende Differentialungleichung [8]

$$\ddot{x}+2D\dot{x}+\mu \operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2 x = \alpha\cos(t) \qquad \dot{x}\neq 0$$
$$-|\mu|+\alpha\cos(t) \leq \omega^2 x \leq |\mu|+\alpha\cos(t) \qquad \dot{x}=0.$$

Probleme diesen Typs können in mehrwertige Differentialgleichungen umgeschrieben werden und ergeben nach Einführung eines geeigneten funktionalanalytischen Rahmens monotone Aufgaben.
Auch differenzierbare Probleme, wie z.B. die Gleichung vom Duffing'schen Typ [6]

$$\ddot{x}-x^3+\sigma^2 x = \alpha\cos(t)$$

oder

$$\ddot{x}+1.5^2 x-(x-\sin(t))^3=2\sin(t)$$

führen auf monotone Operatoren und können mit ähnlichen Methoden auf einfache Weise behandelt werden.
Auch die Einbeziehung von in y unstetigen Systemen

$$\dot{y}=f(t,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega)$$

ist möglich durch einen von A. F. Filippov [5] eingeführten Lösungsbegriff, bei dem die Aufgaben zunächst in mehrwertige Differentialgleichungen überführt werden.
Zu beachten ist, daß bei Umschreibung obiger Aufgaben in mehrwertige Systeme erster Ordnung die entstehenden Funktionen F i.a. nicht monoton bezüglich eines inneren Produktes im $\mathbb{R}^n$ zu sein brauchen; jedoch können den Aufgaben monotone Operatoren T

$$Tx.= \{A(\dot{x}-z) \mid z \text{ meßbar } z(t)\varepsilon F(t,x(t)) \text{ f.ü.}\} \quad ,$$

auf geeigneten Teilmengen der Ω-periodischen Funktionen zugewiesen werden. Dabei ist A eine nichtsinguläre, aber nicht notwendig positiv definite nxn Matrix.
Die Existenz von Lösungen der Operatorgleichungen $\Theta\varepsilon Tx$, und damit der entsprechenden Differentialgleichungen, soll mit Hilfe eines Galerkin Verfahrens nachgewiesen werden.
Dazu wird im §2 ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen der auf (endlich dimensionale) Hilberträume D_j restringierten Aufgaben

$$\dot{y}\varepsilon P_j F(.,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega),$$

oder den entsprechenden Operatorgleichungen $\Theta\varepsilon T_j x$, oder den Galerkin Näherungen angegeben.

Für die Anwendung dieses Satzes ist wichtig, daß der dieser Aufgabe zugeordnete Operator

$$T_j x. = \{ A(\dot{x}-P_j z) \mid z \text{ meßbar } z(t)\varepsilon F(t,x(t)) \text{ f.ü. } x\varepsilon C_j \subset D_j\}$$

in den "meisten" Punkten seines Definitionsbereiches einwertig und (hemi) stetig ist.
Letzteres kann trotz Mehrwertigkeit von F in praktischen Fällen durch geeignete Wahl der endlich dimensionalen Approximationsräume erreicht werden. Siehe hierzu auch die Bemerkungen und Beispiele.
In den Beispielen werden entsprechend der Arbeit [9] die Räume D_j durch endliche Abschnitte von Fourierreihen

$$\sum_{\mu\varepsilon N} a_\mu \cos(\mu(2\pi/\Omega)t)+b_\mu \sin(\mu(2\pi/\Omega)t)$$

aufgebaut.
Im §3 werden dann ein Eindeutigkeitssatz und mit Hilfe der Galerkin Näherungen ein Existenzsatz für die ursprüngliche Aufgabe erbracht. Sowohl im §2 als auch im §3 muß an F bezüglich y eine Wachstumsbedingung gestellt werden. Für den besonderen Fall einer Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$y^{(m)} \varepsilon f(t,y,y^{(1)},y^{(2)}, \dots ,y^{(m-1)})$$

braucht eine solche nur bezüglich der höchsten vorkommenden Ableitung gefordert werden.
Die numerische Ermittlung der Galerkin Näherungen unter Differenzierbarkeitsbedingungen wird in [9] durch den Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen oder durch das Newton Verfahren erbracht. Hier könnte formal ein Verfahren von R.E. Bruck [2] für monotone Operatoren benutzt werden. Im Beispiel 3.3 erwies es sich jedoch als zweckmäßiger, einfach das Verfahren der sukzessiven Approximationen zu benutzen.

§1. Allgemeine Voraussetzungen. Hilfssätze.

Zu $u,v\varepsilon\mathbb{R}^m$ sei (u,v) das gewöhnliche Skalarprodukt im $\mathbb{R}^m$ und $|u|$ der Betrag von u. $\mathrm{Kon}\mathfrak{P}(\mathbb{R}^m)$ sei die Menge der nichtleeren, konvexen und abgeschlossenen Teilmengen aus $\mathbb{R}^m$.
Zu $\varepsilon>0$, $A\subset\mathbb{R}^m$ und $A\neq\emptyset$ bezeichne

$$[A]_\varepsilon := \{ u \mid u\varepsilon\mathbb{R}^m \quad |a-u|<\varepsilon \quad a\varepsilon A \}.$$

<u>Def.1.1:</u>
Eine mengenwertige Abbildung

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Kon}\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$$

heißt halbstetig nach oben, wenn für alle $s\varepsilon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon>0$ ein $\delta(\varepsilon,s)>0$ existiert mit

$$F(s')\subset[F(s)]_\varepsilon \quad \text{für alle} \quad s'\varepsilon[s]_\delta.$$

Für mengenwertige und nach oben halbstetige Abbildungen ist der folgende Selektionssatz richtig (siehe hierzu z.B. [7]).

<u>Hilfssatz 1.1:</u>
Sei F eine nach oben halbstetige Abbildung. Dann existiert zu einer vorgegebenen stetigen Funktion $y:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine meßbare Funktion $z:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$z(t)\varepsilon F(t,y(t)) \quad \text{f.ü.}.$$

Die zu behandelnden mehrwertigen Differentialgleichungen sollen mit Monotoniemethoden untersucht werden.

Es sei H der Raum der quadratisch integrierbaren und Ω-periodischen Funktionen mit dem inneren Produkt

$$[x,y] := \left(\int_0^\Omega (x(s),y(s))ds\right)^{1/2},$$

D ein abgeschlossener Teilraum von H und P ein Projektionsoperator von H auf D.

Es sei T ein Operator von $(D,[.,.])$ in die Menge $\mathcal{P}(D)$ der Teilmengen von D.

Def.1.2:
Der Operator T heißt α-monoton, wenn für alle $x,y\varepsilon D$, $Tx,Ty\neq\emptyset$ und alle $\xi\varepsilon Tx$ und alle $\eta\varepsilon Ty$ gilt

$$[\xi-\eta,x-y]\geq\alpha[x-y,x-y] \qquad \alpha>0.$$

Gilt die Ungleichung mit $\alpha=0$, dann heißt der Operator monoton.

Für monotone Operatoren kann der folgende Existenzsatz bewiesen werden (siehe hierzu [1] S.23):

Hilfssatz 1.2:
Es sei $T:D\longrightarrow\mathcal{P}(D)$ ein monotoner Operator und C eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge aus H. Dann existiert ein $y\varepsilon C$ mit

$$[\xi+y,x-y]\geq 0$$

für alle $x\varepsilon C$, $Tx\neq\emptyset$ und alle $\xi\varepsilon Tx$.

Def.1.3:
Eine Funktion $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Aufgabe

$$\dot{y}\varepsilon PF(.,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega),$$

wenn:
1. y absolut stetig und aus D ist,
2. y Ω-periodisch ist und
3. eine meßbare Funktion $z:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $z(t)\varepsilon F(t,y(t))$ f.ü., existiert, mit
$$y(t)=(Pz)(t) \text{ f.ü..}$$

Bemerkung 1.1:
Für D=H und P=I fällt dieser Lösungsbegriff, abgesehen von der Periodizität, mit den üblichen für mengenwertige Differentialgleichungen zusammen.

§2. Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Galerkin Näherungen

Es sei F eine mengenwertige Abbildung

$$F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Kon}\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n).$$

Es seien $(C_j)_{j\varepsilon N}$ und $(D_j)_{j\varepsilon N}$ Folgen endlich dimensionaler Teilräume aus H mit $C_j\neq\emptyset$ und $C_j\subset D_j$. Die Elemente aus C_j seien absolut stetige Funktionen.
$(P_j)_{j\varepsilon N}$ sei eine Folge von Projektionsoperatoren mit $P_jH=D_j$ und $(T_j)_{j\varepsilon N}$ mengenwertige Operatoren

$$T_j:D_j \longrightarrow \mathfrak{P}(D_j)$$

mit

$$T_jx.=\begin{cases} \emptyset & \text{für } x\varepsilon D_j-C_j \\ \{A(\dot{x}-P_jF(.,x)\} & \text{für } x\varepsilon C_j \end{cases}.$$

Dabei sei $P_jF(.,x).=\{z'\mid z'=P_jz,\ z\varepsilon H,\ z(t)\varepsilon F(t,x(t))\ \text{f.ü.}\}$ und A eine nxn Matrix mit $\det(A)\neq 0$.

Es soll jetzt eine Aussage zur Lösbarkeit der endlich dimensionalen Aufgaben

$$\begin{aligned}&\dot{y}\varepsilon P_jF(.,y)\\&y(t)=y(t+\Omega)\end{aligned} \qquad 2.1$$

gemacht werden.

An F und den induzierten Operatoren T_j werden dafür die folgenden Voraussetzungen (V) gestellt:

(V1) F ist halbstetig nach oben,

(V2) $(v,v)\leq\phi(t)+\psi(t)(u,u)$ für alle $u\varepsilon\mathbb{R}^n$ und $v\varepsilon F(t,u)$ mit in $[0,\Omega]$ integrierbaren Funktionen ϕ und ψ,

(V3) T_j ist α-monoton auf D_j,

(V4) aus $[\xi,x]=0$ für alle $x\varepsilon C_j$ und $\xi\varepsilon Ty$, $y\varepsilon C_j$ soll $\xi=0$ folgen.

Satz 2.1:

Für die Aufgabe 2.1 seien die Voraussetzungen V1-V4 erfüllt. Zusätzlich gelte für jedes $x \varepsilon C_j$ mindestens eine der folgenden Bedingungen:

a. x ist Lösung der Aufgabe,

b. zu x gibt es mindestens ein $w \varepsilon C_j$ und ein $\xi \varepsilon T_j w$ mit

$$[\xi, w-x] < \alpha [w-x, w-x],$$

c. T_j ist in x hemistetig, d.h.
für alle $w \varepsilon C_j$, alle $0 \leq \tau < \tau_w$ und für fast alle $t \varepsilon [0, \Omega]$ ist
$T_j((1-\tau)x+\tau w)(t)$ einwertig und es gilt
$T_j((1-\tau)x+\tau w)) \xrightarrow[\tau \to 0]{} T_j x$ in der H-Norm,

dann besitzt die Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis:(*)

Wegen der α-Monotonie von T ist

$$[\xi-\eta, x-y] \geq \alpha [x-y, x-y] \qquad \alpha > 0$$

für alle $\xi \varepsilon Tx$ und alle $\eta \varepsilon Ty$.

Angenommen x und y wären Lösungen der Aufgabe, dann ergibt die Wahl $\xi=\eta=0$ deren Gleichheit,und die Aufgabe besitzt somit höchstens eine Lösung.

Es sei $Q.=-I+(1/\alpha)T$ (I=Identitätsoperator). Dann ist wegen den Voraussetzungen V1 und V2 und dem Hilfssatz 1.1 $Tx \neq \emptyset$ für alle $x \varepsilon C$ und somit auch $Q(x) \neq \emptyset$.

Aus der α-Monotonie von T folgt die Monotonie von Q auf D.

Mit dem Hilfssatz 1.2 folgt dann die Existenz eines $y \varepsilon C$ mit

$$[\eta+y, x-y] \geq 0$$

für alle $x \varepsilon C$ und alle $\eta \varepsilon Qx$.

Damit erfüllt y die Ungleichung

$$[\xi, x-y] \geq \alpha [x-y, x-y]$$

für alle $x \varepsilon C$ und $\xi \varepsilon Tx$ und die Bedingung a oder c muß für y erfüllt sein.

Angenommen die Bedingung c ist erfüllt.

Wird dann in der Ungleichung $[\eta+y, x-y] \geq 0$ statt x

$$x_\tau = (1-\tau)y + \tau w$$

(*) Der Einfachheit halber wird im Beweis der Index j weggelassen.

eingesetzt, dann ergibt sich die Ungleichung

$$[Qx_\tau+y, w-y] \geq 0 \qquad 0<\tau<\tau_y$$

oder wegen der Bedingung c

$$[Qy+y, w-y] \geq 0.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $w \varepsilon C$. Wegen der Voraussetzung V4 ist y die Lösung der Aufgabe.

Q.E.D.

Wichtig für die Anwendung dieses Satzes ist, daß trotz Mehrwertigkeit von F mit geeigneten endlich dimensionalen Räumen D_j häufig erreicht werden kann, daß die Operatoren T_j bis auf "wenige" Punkte ihrer Definitionsbereiche hemistetig sind. Damit sind die zunächst unübersichtlichen und kuriosen Bedingungen a-c des Satzes i.a. leicht nachprüfbar.

Hierzu noch das folgende Beispiel und die nachstehende verallgemeinernde Betrachtung:

<u>Beispiel 2.1:</u>

Die Aufgabe, eine 2π-periodische Funktion $x \varepsilon H^2$ zu finden mit

$$\begin{array}{ll} \ddot{x}+2D\dot{x}+\mu \operatorname{sgn}(\dot{x})+\omega^2 x = \alpha\cos(t) & \dot{x}\neq 0 \\ -|\mu|+\alpha\cos(t) \leq \omega^2 x \leq |\mu|+\alpha\cos(t) & \dot{x}=0, \end{array}$$

$(D, \mu>0)$, ist äquivalent zur Auffindung einer Lösung im Sinne der Definition 1.3 (mit $P=I$) von

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 \varepsilon g(t,y_1,y_2) .= \begin{cases} -2Dy_2-\mu \operatorname{sgn}(y_2)-\omega^2 y_1+\alpha\cos(t) & y_2\neq 0 \\ \{\xi \mid \xi\varepsilon(1/\omega^2)\{[-\mu,\mu]+\alpha\cos(t)\}\} & y_2=0 . \end{cases}$$

Mit

$$D_{2n} .= \{y=(y_1,y_2) \mid y_i(t)=\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^i \sin(\mu t)+b_\mu^i\cos(\mu t) \quad i=1,2\},$$

$$C_{2n} .= \{y \mid y\varepsilon D_{2n} \quad y=(y_1,\dot{y}_1)\}$$

und

$$A=\begin{bmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist der Satz 2.1 auf die Aufgabe

$$\dot{y} \varepsilon P_{2n} F(.,y)$$
$$y(t)=y(t+2\pi)$$

anwendbar. Außerdem gilt $[T_{2n}x-T_{2n}y,x-y] \geq D[x-y,x-y]$.

Der Operator T_{2n} ist hemistetig für alle $z\varepsilon C_{2n}$, $z\neq 0$. $z=0$ erfüllt entweder die Bedingung a oder b. Die Aufgaben haben also immer eine Lösung. Mit der Wahl $D=0.8$, $\mu=2$, $\omega=8$ und $\alpha=2$ ist $z=0$ eine Lösung der Aufgabe. Mit der Wahl $D=0.1$, $\mu=0.25$, $\omega=1$ und $\alpha=0.5$ gilt für $z=0$ die Bedingung b.

In konkreten Fällen wird F bis auf eine endliche (abzählbare) Menge von Punkten (t_σ,u_σ) oder Hyperebenen $(.,u_\sigma)$, $\sigma=1,2, \ldots ,n$ stetig sein.
Im ersten Fall ist die Bedingung c stets erfüllt, und die übrigen können entfallen.
Im zweiten Fall ist die Bedingung c z.B. für alle $x\varepsilon D_j$ erfüllt, welche die Gleichung $x(t)=u_\sigma$ nur für endlich (abzählbar) viele $t\varepsilon[0,\Omega]$ erfüllen. Wird der Raum D_j so gewählt, daß dies für die "meisten" Punkte aus D_j richtig ist, dann brauchen die Bedingungen a oder b nur für die übrigen "kritischen" Punkte nachgeprüft werden.
Im vorangegangenen Beispiel war dies nur für den kritischen Punkt $z=0$ nötig.

Ist F für alle (t,u) einwertig und stetig, dann sind die Bedingungen V1 und c trivialerweise erfüllt. Auch V2 kann entfallen; sie wurde nur benötigt, um die quadratische Integrierbarkeit von $z(.)\varepsilon F(.,x(.))$ zu gewährleisten. Der Satz 2.1 ist dann ein bekannter Satz für stark monotone und hemistetige Operatoren [1].

Erfüllt F die Bedingung

$$(u_1-v_1,u-v)\geq(\alpha/\Omega)(u-v,u-v) \qquad \alpha>0$$

für alle $u_1\varepsilon F(t,u)$ und $v_1\varepsilon F(t,v)$, dann ist die Voraussetzung V3 mit der Einheitsmatrix erfüllt.

Wie nützlich jedoch die Einführung der Matrix Λ sein kann, zeigen die folgende Beispiele:

Beispiel 2.2:
Gegeben sei das System von Differentialgleichungen

$$\dot{y}_1=f(t,y_2)$$
$$\dot{y}_2=g(t,y_1)$$

(kurz $\dot{y}=F(t,y)$) mit Ω-periodischen, stetigen und reellwertigen f und g auf $\mathbb{R}^2$. f bzw. g sei monoton wachsend in y_2 bzw. y_1.
Dann ist die übliche Monotoniebedingung

$$(F(t,u_1)-F(t,u_2),u_1-u_2)\geq 0$$

i.a. nicht erfüllt. Auch die Wahl eines anderen inneren Produktes im $\mathbb{R}^2$ führt nicht zum Ziel.
Mit der nicht-positiv definiten Matrix $\Lambda=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ und

$$C_{2n+1}:=D_{2n+1}:=\{\, y=(y_1,y_2) \mid y_i=\sum_{\mu=0}^{n} a_\mu^i \sin(\mu(2\pi/\Omega)t)+b_\mu^i\cos(\mu(2\pi/\Omega)t)\}$$

ist aber

$$[T_{2n+1}x-T_{2n+1}y,x-y]\geq 0.$$

Beispiel 2.3:
Bei der Gleichung vom Duffing'schem Typ

$$\ddot{x}-x^3+\sigma^2 x = \alpha\cos(t)$$

führt die Wahl $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ zu

$$[T_{2n}x-t_{2n}y,x-y]\geq \int_0^{2\pi}(\dot{x}_1-\dot{y}_1)^2 ds - \sigma^2\int_0^{2\pi}(x_1-y_1)^2 ds\geq\alpha[x-y,x-y]$$

für alle $\sigma^2\leq(2\pi)^2$ und geeignetes $\alpha(\sigma^2)>0$. Dabei wurden D_{2n} und C_{2n} wie im Beispiel 2.1 gewählt.
Auch bei dem in der Einleitung genannten Beispiel

$$\ddot{x}+1.5^2x-(x-\sin(t))^3=2\sin(t)$$

kann so vorgegangen werden.

Ein wichtiges Beispiel für Aufgaben, die auf nicht hemistetige Operatoren führen können, sind die von A.F. Filippov [5] untersuchten Differentialgleichungen

$$\dot{y}=f(t,y)$$

$f: R \times R^n \longrightarrow R^n$, f meßbar.

Zu $f(t,u)$ sei

$$F(t,u) .= \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\sigma(N)=0} \overline{\mathrm{Konf}(t,U_\delta(u)-N)} .$$

Dabei sei $\sigma(N)$ das Lebesgue-Maß einer Teilmenge N R^n und $U_\delta(u)$ eine δ-Umgebung von u.

Eine absolut stetige Funktion y heißt dann Lösung der Aufgabe $\dot{y}=f(t,y)$, wenn

$$\dot{y}(t) \varepsilon F(t,y(t)) \quad \text{f.ü.}$$

ist.

Wird z.B. noch

$$|f(t,u)-f(t',u)| \leq K|t-t'|$$

verlangt, dann ist F halbstetig nach oben (siehe hierzu z.B. [7]). Womit die hier angegebene Theorie auch auf diesen Typ von Aufgaben angewendet werden kann.

Im Satz 2.1 wirkt die Voraussetzung V2 sehr einschränkend. Diese kann bei der Ω-periodischen Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$x^{(m)} \varepsilon f(t,x,x^{(1)}, \ldots ,x^{(m-1)})$$

oder dem äquivalenten System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{m-1} &\varepsilon f(t,x_1,x_2, \ldots ,x_{m-1}) \end{aligned} \qquad 2.2$$

ersetzt werden durch die Voraussetzung:

(V2a) $(v,v) \leq \phi(t)+\psi(t)(u,u)$ für alle $u \varepsilon R$ und $v \varepsilon f(t, \ldots ,x_{i-1},u,x_{i+1}, \ldots ,x_{m-1})$ mit in $[0,\Omega]$ integrierbaren Funktionen ϕ und ψ.

Satz 2.2:

Es seien die Voraussetzungen und Bedingungen von Satz 2.1 erfüllt mit V2a anstelle von V2.
Dann besitzt die Aufgabe 2.2 eine eindeutige Lösung.

Der Beweis erfolgt analog zum Beweis des Satzes 2.1.

§3. Konvergensatz. Beispiele

Es sei D ein abgeschlossener Teilraum von H und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} D_j = D$. P ein Projektionsoperator von H auf D.
Zusätzlich gelte:

(V5) Es gibt ein $c \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_j \neq \emptyset$ und $\eta_j \in T_j c$ mit $[\eta_j, \eta_j] \leq \overline{M} > 0 \ \forall j$.

Mit der Lösbarkeit der Aufgaben

$$\begin{aligned} &\dot{y} \in P_j F(.,y) \\ &y(t) = y(t+\Omega) \end{aligned} \qquad 2.1$$

ergibt sich (das übliche Ergebnis) auch die Lösbarkeit der Aufgabe

$$\begin{aligned} &\dot{y} \in PF(.,y) \\ &y(t) = y(t+\Omega). \end{aligned} \qquad 3.1$$

<u>Satz 3.1:</u>
Erfüllen F und $(T_j)_{j\in N}$ die Voraussetzungen V1-V5, dann besitzt die Aufgabe 3.1 eine Lösung.

<u>Beweis:</u>
Es seien $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Lösungen von

$$\begin{aligned} &\dot{y} \in P_j F(.,y) \qquad j \in \mathbb{N} \\ &y(t) = y(t+\Omega). \end{aligned}$$

Es sei $c \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_j \neq \emptyset$ und $\eta_j \in T_j c$ mit $[\eta_j, \eta_j] \leq \overline{M}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Aus

$$[\eta_j, \eta_j]^{1/2} [x_j - c, x_j - c]^{1/2} \geq [\Theta - \eta_j, x_j - c] \geq \alpha [x_j - c, x_j - c]$$

folgt dann, daß die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
Es ist $x_j = P_j z^j$ f.ü. mit $z^j(t) \in F(t, x_j(t))$ f.ü. und deshalb auch

$$[\dot{x}_j, \dot{x}_j] \leq [z^j, z^j] \leq M + K[x_j, x_j].$$

Damit ist die Folge $(\dot{x}_j)_{j\in N}$ ebenfalls beschränkt und eine schwach konvergente Teilfolge $(\dot{x}_j)_{j\in N'}$ auswählbar. Die zugehörige Folge $(x_j)_{j\in N'}$ konvergiert dann in der Maximum Norm gegen einen Grenzwert x.
Aus der Folge $(z^j)_{j\in N'}$ läßt sich ebenfalls eine schwach konvergente auswählen. Diese sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Folge selber und deren Grenzwert sei z.

Aus der Konvexität von F, der Halbstetigkeit nach oben von F und $z^j(t)\varepsilon F(t,x_j(t))$ f.ü. folgt

$$z(t)\varepsilon F(t,x(t)) \text{ f.ü.}$$

und wegen der starken Konvergenz $P_j z^j \longrightarrow Pz$ auch

$$\dot{x}\varepsilon PF(.,x)$$
$$x(t)=x(t+\Omega).$$

Q.E.D.

Leicht läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 3.2:
Besitzt die Aufgabe 3.1 nur eine Lösung, dann konvergieren die Lösungen $(x_j)_{j\varepsilon\mathbb{N}}$ der Aufgaben 2.1 gleichmäßig (im Sinne der Maximum Norm) gegen die einzige Lösung von 3.1.

Bewiesen wurde bis jetzt lediglich die Existenz einer Lösung der Aufgabe $\dot{y}\varepsilon PF(.,y)$, $y(t)=y(t+\Omega)$. Das ursprüngliche Ziel ist der Nachweis einer Lösung der Aufgabe $\dot{y}\varepsilon F(t,y)$, $y(t)=y(t+\Omega)$.

Dies kann häufig mit einfachen Zusatzüberlegungen erreicht werden. Hierzu zwei Beispiele:

Beispiel 3.1:
Bei der Aufgabe

$$\ddot{x}-x^3+\sigma^2x=\alpha\cos(t)$$

muß die Lösung eine ungerade Funktion sein. Ausnutzung von Beispiel 2.3 und Satz 3.1 liefert dann eine Lösung dieser Aufgabe.

Beispiel 3.2:
Das Beispiel 2.1 und der Satz 3.1 (n gegen unendlich) liefern eine Lösung der Aufgabe

$$\dot{y}\varepsilon PF(.,y)$$
$$y(t)=y(t+\Omega)$$

im Raum

$$H.= \{ (x,\dot{x}) \mid x \text{ abs. stetig } \; x=\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \sin(\mu t)+b_\mu \cos(\mu t) \}.$$

Es sei $\bar{x}$ diese Lösung. Eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{array}{ll} \ddot{x}+2D\dot{x}+\mu \operatorname{sgn}(\dot{x})+ \omega^2 x = \alpha\cos(t) & \dot{x}\neq 0 \\ -|\mu|+\alpha\cos(t)\leq\omega^2 x\leq|\mu|+\alpha\cos(t) & \dot{x}=0 \end{array}$$

muß die Form $a+\bar{x}$, $\bar{x}\varepsilon H$ und $a\varepsilon\mathbb{R}$ haben.

Die fehlende Konstante ergibt sich aus der Gleichung

$$a =-\left(\frac{\mu}{2\pi\omega^2}\right)\int_0^{2\pi}\xi(s)ds \qquad \xi(\cdot) \text{ meßbar}$$

mit

$$\xi(s).=\begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{x}(s)>0 \\ [-1,+1] & \text{falls } \bar{x}(s)=0 \\ -1 & \text{falls } \bar{x}(s)<0 \end{cases}.$$

Zu bemerken ist noch, daß die Aufgabe im Raum $\{a+x\}_{x\varepsilon H, a\varepsilon\mathbb{R}}$ i.a. keine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

<u>Beispiel 3.3:</u>

Die Aufgabe

$$\begin{array}{ll} \ddot{x}+0.2\dot{x}+0.25\operatorname{sgn}(\dot{x})+x = 0.5\cos(\pi t) & \dot{x}\neq 0 \\ -0.25+0.5\cos(\pi t)\leq x \leq 0.25+0.5\cos(\pi t) & \dot{x}=0 \end{array}$$

wurde auch numerisch behandelt.

Die entsprechende Aufgabe (Beispiel 2.1)

$$\begin{array}{l} \dot{y}\varepsilon P_{2n}F(.,y) \\ y(t)=y(t+\Omega) \end{array}$$

ist äquivalent zur Auffindung einer Lösung von

$$x+0.2x+x\varepsilon \; -\{\bar{P}_{2n}\operatorname{sgn}(x(.))\}+0.5\cos(\pi t).$$

Dabei ist $\bar{P}_{2n}\xi$ die Projektion von ξ auf $\bar{H}_{2n}$

$$\bar{H}_{2n}.=\{ x \mid x=\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu\cos(\mu\pi t)+b_\mu\sin(\mu\pi t) \quad x \text{ abs. ste. } \}.$$

Es zeigt sich (Multiplikation der Gleichung mit $\dot{x}$), daß das Verfahren der sukzessiven Approximationen

$$\ddot{x}_{j+1}+0.2\dot{x}_{j+1}+x_{j+1} \; \varepsilon 0.5\cos(\pi t)-\{\bar{P}_{2n}\operatorname{sgn}(x_j(.))\} \qquad j\varepsilon N$$

gegen die Lösung der Aufgabe konvergiert.

Für die einfachen Fälle n=1,3 wurde dies durchgeführt. Nach nur fünf Schritten blieben die zu ermittelden Koeffizienten a_μ^n, b_μ^n $\mu=1, \dots, n$ stets fest (Start a=b=0, sgn(0)=0).
Es ergab sich

n=1	$a_1=-0.029464$	n=3	$a_1=-0.028366$
	$b_1= 0.027903$		$b_1= 0.026941$
			$a_2\sim 1.6\ 10^{-13}$
			$b_2\sim -5.6\ 10^{-13}$
			$a_3= 0.000789$
			$b_3=-0.000911$

Ein Vergleich mit [8] zeigt, daß die Differenz der Ergebnisse in der Größenordnung von 10^{-3} liegt. Dies bedeutet, daß das Verfahren praktikabel ist und das die ersten Fourierkoeffizienten in der Aufgabe bestimmend sind.

Bemerkung 3.1:
Ist ein Konvergenzsatz für Aufgaben der Form

$$y^{(m)} \varepsilon f(t,y,y^{(1)}, \dots ,y^{(m-1)})$$

erwünscht, dann müssen die Bedingungen von Satz 3.1 an das entsprechende System erster Ordnung gestellt werden. Außerdem muß die Wachstumsbedingung V2a aus §2 bezüglich der höchsten vorkommenden Ableitung auf der rechten Seite gefordert werden.

Literatur

[1] Brezis,H.: Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contrations dans les Espaces de Hilbert. Mathematics Studies 5. North-Holland, Publishing Company-Amsterdam. (1973).

[2] Bruck, R.E. Jr.: The Iterative Solution of the Equation $y \in x+Tx$ for a Monotone Operator in Hilbert Space. Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 79. No. 6. S. 1258-1261(1973).

[3] Bruck, R.E. Jr.: A Strongly Convergent Iterative Solution of $0 \in U(x)$ for a Maximal Monotone Operator U in Hilbert Space. Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol. 48, No. 1, S. 114-126(1974).

[4] Ciarlet, P.G., Schultz, M.H. and Varga, R.S.: Numerical Methods of Hight-Order Accuracy for nonlinear Boundary Values. V. Monotone Operator Theory. Numerische Mathematik 13, S. 51-77(1969).

[5] Filippov, A.F.: Differential Equations with Discontinous Right-Hand-Side. American Mathematical Society Translations. Vol. 42, S. 199-231(1960).

[6] Hale, J.K.: Oscillations in Nonlinear Systems, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York-Toronto-London(1963).

[7] Lasota,A.,Olech,C.: On the Closedness of the Set of Trajectories of a Control System. Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences math., astr. et phys., Vol. XIV, No. 11, S.615-621(1966).

[8] Taubert, K.: Differenzenverfahren für Schwingungen mit trockener und zäher Reibung und für Regelungssysteme. Numerische Mathematik 26. S. 379-395(1976).

[9] Urabe, M.: Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems. Archive for Rational Mechanics and Analysis 20 (1965) S. 120-152.

[10] Werner, J.: Einige Einschließungssätze bei nichtlinearen Randwertaufgaben und erzwungenen Schwingungen. Dissertation Hamburg (1968).

Dr. Klaus Taubert
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg
Bundesstr. 55
2 Hamburg 13

z.Z SFB 72 Bonn