I N H I B I T I O N S F E L D E R

Dissertation von

Hermann Walter

Institut für Angew. Mathematik
und Elektronisches Rechenzentrum

Universität des Saarlandes,

1968

Inhaltsverzeichnis

I. Einleitung

Bei der Suche nach der Verbesserung von Apparaturen, die der Zeichenerkennung dienen, haben W. Reichardt und andere neue Bauprinzipien aus Forschungen über die Struktur der Nervennetze der Tiere gewonnen, die zur Verbesserung der Zeichenerkennung verwandt werden können. (|8|,|9|,|10|,|11|,|12|). Insbesondere wurde das System der Sehzellen im Auge untersucht (|1|). Dabei wurde experimentell ein System von Rückkopplungen der Sehzellen untereinander gefunden, das zu einer Kontrastverschärfung führt. Man nennt diese Systeme " Rückwärtsinhibitionssysteme " . Sie arbeiten nach dem Prinzip, daß diejenigen Sehzellen,denen der größte Lichtreiz eingeprägt ist, die in den übrigen Sehzellen ankommenden Lichtreize vermöge der Rückkopplung klein werden lassen. Hierdurch gelingt es dem Auge, die durch die an der Pupille auftretenden Beugungserscheinungen hervorgerufenen Unschärfen teilweise wieder rückgängig zu machen. Diese Art der Verarbeitung der Lichtreize im Auge führt zu der Ausbildung der " Mach'schen Linien " an den Rändern heller oder dunkler Partien einer Verteilung.

Um diese Verarbeitungsmethoden der Nervennetze für technische Realisierungen zugänglich zu machen, ist es erforderlich, ein mathematisches Modell solcher Systeme zu entwickeln und die Eigenschaften dieser Systeme anhand dieses Modells zu untersuchen. W. Reichardt hat in |1| ein solches Modell beschrieben. Dabei sind Eingänge und Ausgänge über ein Gleichungssystem verknüpft. Die besondere Schwierigkeit in der mathematischen Behandlung dieser Systeme liegt nun darin, daß dieses Gleichungssystem nur stückweise linear ist. W. Reichardt und andere haben bei ihren Untersuchungen im allgemeinen die auftretenden Nichtlinearitäten nicht berücksichtigt. Darüberhinaus wurden im allgemeinen kontinuierliche Verteilungen der Sehzellen ,die sich über die ganze Ebene bzw. reelle Zahlengerade erstreckten, diskutiert, um Randeffekte zu vermeiden (|9|,|12|). Die erzielten Resultate treffen daher im wesentlichen nur auf solche Eingänge zu, für die das nichtlineare Gleichungssystem in ein lineares übergeht.

In dieser Arbeit soll nun eine Theorie der nichtlinearen Inhibitionssysteme entwickelt werden.

Es wird angenommen, daß nur endlich viele, diskret verteilte Sehzellen vorhanden sind. Dabei werden folgende Fragestellungen behandelt.

1) <u>Fixpunktprobleme:</u>

   Wann ruft ein Eingang bei der Verarbeitung durch ein Rückwärtsinhibitionssystem nur e i n e n Ausgang hervor.

2) <u>Variationsprobleme:</u>

   Wie ändert sich der Wert der Eingänge und Ausgänge vermöge der Rückkopplungen verknüpfenden Transformation bei Variation der Eingänge und der Parameter des zugehörigen Inhibitionssystems.

3) <u>Probleme der Kontrastverschärfung:</u>

   Wie kann der Effekt der Kontrastverschärfung und das Auftreten der Mach'schen Linien aus dem von W. Reichardt entwickelten Modell nachgewiesen werden.

Es ergeben sich folgende Resultate:

zu 1):

Es werden Bedingungen angegeben, die garantieren, daß jeder Eingang genau einen Ausgang hervorruft. Dabei zeigt sich, daß die - bei gleicher Problemstellung - für den linearen Fall gültigen Sätze sich weitgehend auf den nichtlinearen Fall verallgemeinern lassen. Diese Ergebnisse befinden sich in den Paragraphen II und III .

zu 2):

Rückwärtsinhibitionssysteme sind im Hinblick auf Variationen der Systemparameter stabil. Kleine Variationen der Parameter rufen nur kleine Variationen der Ausgänge bei gleicher Eingabe hervor. Das gleiche gilt für die Variation der Eingänge. Man findet brauchbare Abschätzungen darüber, wie sich zum Beispiel Schwankungen in den Eingängen auf die Ausgänge auswirken. (Paragraph IV)

zu 3):

Es wird ein recht allgemeiner Satz über die Kontrastverschärfung bei " punktförmigen Lichtreizen " hergeleitet. Die Mach'schen Linien werden für treppenförmige Muster bei serieller Anordnung der Sehzellen qualitativ nachgewiesen. Sie treten an den Sprungstellen des Musters und am Rande der Sehzellenreihe auf.
(Paragraph V)

Ferner wird in dieser Arbeit nachgewiesen, daß die auftretende Transformation zwar surjektiv, aber nicht injektiv ist. Es wird ein Bereich angegeben, der maximal ist bezüglich der Eigenschaft, daß die Restriktion der Transformation auf diesen Bereich injektiv ist. (Paragraph IV)

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Privatdozent Dr. G. Hotz für die Anregung zu dieser Arbeit und ständige Unterstützung danken.

II. Das mathematische Modell des Rückwärtsinhibitionssystems

Es wird das von W. Reichardt in |1| beschriebene Modell des Rückwärtsinhibitionssystems angegeben. Jedem Rückwärtsinhibitionssystem kann man eine Abbildung φ des $\mathbb{R}^n$ in die Menge der stetigen, stückweise affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich zuordnen. Dann ergibt sich der Ausgang Z zum Eingang X als Fixpunkt von $\varphi(X)$. Die Abbildung $\varphi(X)$ ist monoton fallend und beschränkt.

Wir beschreiben das Inhibitionssystem nach W. Reichardt (|1|) durch ein nichtlineares Gleichungssystem, das Eingänge und Ausgänge verknüpft.
Dazu betrachte n Sehzellen. Auf die i. Sehzelle treffe ein Reiz x_i $(i=1,\ldots,n)$. Fasse die x_i zu einem Vektor $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(X)_i = x_i$ $(i=1,\ldots,n)$ zusammen. Sei dann z_i das sich in der i. Sehzelle infolge der Wechselwirkung der Sehzellen untereinander einstellende Potential. Fasse die z_i ebenfalls zu einem Vektor $Z \varepsilon\ \mathbb{R}^n$ mit den Komponenten $(Z)_i = z_i$ $(i=1,\ldots,n)$ zusammen.

Betrachte die durch

$$\text{(II.1)} \qquad \mathrm{pos}(x) := x, \text{ falls } x \geqslant 0, \text{ und}$$

$$\text{(II.1a)} \qquad \mathrm{pos}(x) := 0, \text{ falls } x \leqslant 0,$$

definierte Abbildung $\mathrm{pos}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dann erfüllt Z das Gleichungssystem

$$\text{(II.2)} \quad (Z)_i = \mathrm{pos}\Big((X)_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, \mathrm{pos}\big((Z)_j - s_{ij} \big)\Big)$$

$$(i=1,\ldots\ldots,n) \; .$$

Die a_{ij} sind die sogenannten <u>Inhibitionskoeffizienten</u> .
Für diese gilt:

$$\text{(II.2a)} \qquad a_{ij} \geqslant 0 \qquad (i,j=1,\ldots\ldots,n,i\neq j) \; .$$

Das Gleichungssystem (II.2) und (II.2a) bringen zum Ausdruck, daß jede Sehzelle unter einem Reiz Impulse an die übrigen Sehzellen abgibt, die die dort ankommenden Reize zu unterdrücken suchen. Die s_{ij} sind dann Schwellwerte, die von diesen Impulsen überwunden werden müssen, bevor sie wirken können.
Für die s_{ij} gilt:

(II.2b) $\quad s_{ij} \geqslant 0 \quad (i,j=1,\ldots\ldots,n,i \neq j)$.

Das Prinzip, nach dem ein Rückwärtsinhibitionssystem einen Reiz verarbeitet, wird durch die Abbildung II.1 veranschaulicht.

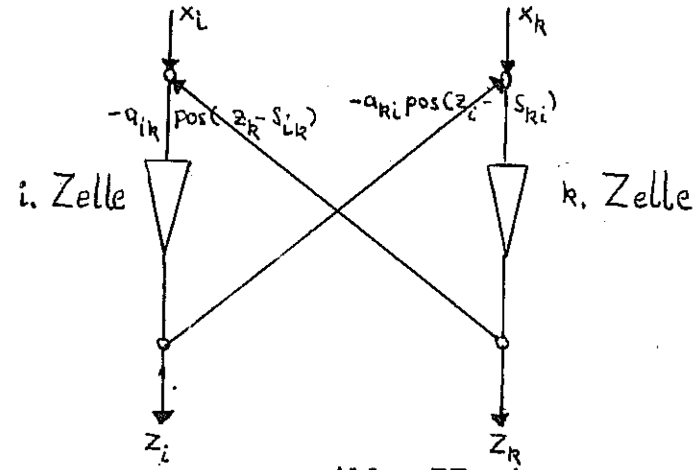


Abb. II. 1

Wir wollen (II.2),(II.2a) und (II.2b) noch in eine andere Form bringen. Fasse die a_{ij} und s_{ij} zu (n,n)- Matrizen A und S zusammen. Dabei setze

$$a_{ii} = s_{ii} = 0 \quad (i=1,\ldots\ldots,n) \ .$$

Seien nun $e_1,\ldots\ldots,e_n$ die n Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$, dann schreiben sich die Formeln (II.2),(II.2a) und (II.2b) in der folgenden Form:

(II.3) $$(Z)_i = \mathrm{pos}\left((X)_i - \left(A \overset{n}{\cdot} \mathrm{pos}(Z - S^{T} e_i) \right)_i \right)$$

$(i=1,\ldots,n)$ und

(II.3a) $A \geq 0,\ S \geq 0,\ \text{Spur } A = \text{Spur } S = 0$.

(Die Abbildung ${}^{n}\text{pos} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist definiert durch $({}^{n}\text{pos}(Y))_i := \text{pos}(\ (Y)_i\ )$ für $Y \in \mathbb{R}^n$ und $i=1,\ldots,n$. Sind keine Verwechslungen möglich, so wird der Index n weggelassen.)

Dem Gleichungssystem (II.3) ordne nun gemäß

$$\text{(II.4)}\quad (\varphi(X)(Y))_i := \text{pos}(\ (X)_i - (\ A\ \text{pos}(\ Y - S^T e_i\ ))_i)$$

$$(X, Y \in \mathbb{R}^n,\ i=1,\ldots,n)$$

eine Abbildung φ des $\mathbb{R}^n$ in die Menge der Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich zu. Dann gilt:

(II.4a) $\varphi(X)(Z) = Z$.

Wir nennen φ ein Inhibitionsfeld mit Inhibitionsmatrix A und Schwellenmatrix S . Hierfür schreiben wir auch kurz : " φ IF(A,S) " .
Wir diskutieren zwei einfache Beispiele.

Beispiel II.1:

Dieses Beispiel soll die Problemstellung 3) aus der Einleitung beleuchten.
Betrachte die Matrix

$$J_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & \mathcal{O} \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathcal{O} & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$(n=1,2,3,\ldots\ldots)$.

Sei dann $A = a\,(J_5 + J_5^T)$ mit $0 < a < \frac{1}{2}$ $(a \in \mathbb{R})$.

Sei φ $\mathbb{F}(A,0)$. An späterer Stelle werden wir zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen folgendes gilt:

(a) $\varphi(X)$ besitzt genau einen Fixpunkt für alle $X \in \mathbb{R}^n$.

(b) Ist $X \geq 0$ und gilt $\varphi(X)(X) > 0$, dann ist auch $Z > 0$, wenn Z der Fixpunkt von $\varphi(X)$ ist.

Wir untersuchen das Verhalten von φ für einen "punktförmigen Lichtreiz ". Sei $0 < \alpha < 1$ eine reelle Zahl.

Ordne α den Vektor $X(\alpha) \varepsilon \mathbb{R}^5$ mit den Komponenten

$$(X(\alpha))_i = \alpha^{|i-3|} \qquad (i=1,2,3,4,5)$$

zu.

<u>1.Fall:</u> $\alpha(1+\alpha^2)^{-1} \leqslant a$.

$Z = \alpha^2(e_1 + e_5) + e_3$ ist der Fixpunkt von $\varphi(X(\alpha))$, also der zu dem Eingang $X(\alpha)$ gehörige Ausgang.

<u>2.Fall:</u> $\alpha(1+\alpha^2)^{-1} > a$.

In diesem Fall erfüllt der Fixpunkt Z von $\varphi(X(\alpha))$ wegen (b) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(Z)_1 = (Z)_5 = \alpha^2 - a\,(Z)_2$$
$$(Z)_2 = (Z)_4 = \alpha - a(\,(Z)_1 + (Z)_3)$$
$$(Z)_3 = 1 - 2a\,(Z)_2 \;.$$

Man rechnet leicht nach:

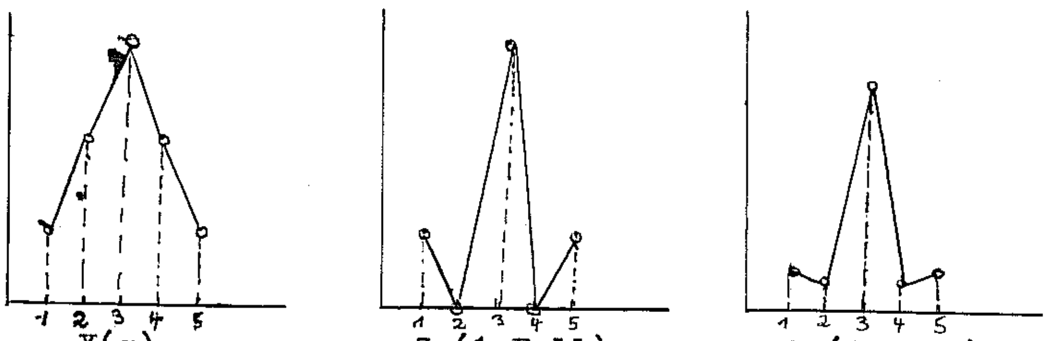
$$(Z)_1 : (Z)_2 = \alpha^{-1}\,(1 + \partial_1) \text{ und } (Z)_2 : (Z)_3 = \alpha^{-1}(1+\partial_2)$$

mit $\partial_1 > 0$ und $\partial_2 < 0$.

Man erkennt:

1) Das Maximum bei $i=3$ wird relativ den direkten Nachbarn größer.
2) Es treten " Nebenmaxima " bei $i = 1$ und $i = 5$ auf, d.h. es bilden sich Mach'sche Linien aus. Diese sind im Fall 1 besonders ausgeprägt.
3) Je größer a ist,desto eher tritt dieser Fall ein, d.h. je größer a ist,desto mehr prägen sich die Mach'schen Linien aus.

Einen Ueberblick über die sich unter $X(\alpha)$ einstellenden Ausgänge gibt die folgende Abbildung II.2



$X(\alpha)$ Z (1.Fall) Z (2.Fall)

Abb. II.2

<u>Beispiel II.2:</u>

Bei diesem Beispiel soll das Fixpunktproblem beleuchtet werden.

Sei $a > 0$ eine reelle Zahl. Betrachte das Inhibitionsfeld φ mit der Inhibitionsmatrix $A = 2a(J_n + (J_n^T)^{n-1})$ und der Schwellenmatrix $S = \frac{1}{2} A$.

Wir untersuchen, wann zu beliebigen $X, Y \varepsilon \mathbb{R}^n$

$$\lim_k (\varphi(X))^k(Y)$$

existiert.

Ist das der Fall, so folgt leicht, daß dieser Limes Fixpunkt von $\varphi(X)$ ist.

Der Spektralradius $r(A)$ von A ist gleich $2a$. Ist dann $a < \frac{1}{2}$, so existiert dieser Limes stets, wie in Paragraph III gezeigt wird. Wir interessieren uns für den Fall $a \geqslant \frac{1}{2}$. Dann gilt stets für $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$

$$(\varphi(ae))^2(Y) = \varphi(ae)(ae) = ae \; .$$

Also existiert der obige Limes mit $X = ae$ für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$.

Betrachte nun $\eta > 0$ (reell) mit $a + (1-2a)\eta > 0$.

Dann gilt:

$$\varphi((a+\eta)e)((a+\eta)e) = (a + (1-2a)\eta)e \quad \text{und}$$

$$(\varphi((a+\eta)e))^2((a+\eta)e) = (a+\eta)e \; .$$

Also existiert der obige Limes mit $X = (a+\eta)e$ nicht für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$.

Wir sehen, daß es in jeder Umgebung des Punktes X= ae unendlich viele Punkte X' gibt, so daß der

$$\lim_{k} (\varphi(X'))^k(Y)$$

nicht für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ existiert, während dies für X selbst der Fall ist.

Es sollen nun einige einfache Eigenschaften von Inhibitionsfeldern hergeleitet werden. Diese dienen insbesondere zur Vorbereitung der Untersuchungen, die im anschließenden Paragraphen über das Fixpunktproblem geführt werden.
Zunächst zeigen wir, daß $\varphi(X)$ eine stetige,stückweise affine Abbildung ist. Dabei ist φ ein Inhibitionsfeld und $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir benötigen dazu einige Vorbereitungen.
Definition: Sei P eine Partition des $\mathbb{R}^n$.
P heißt konvex genau dann, wenn P endlich und jedes $p \varepsilon P$ eine konvexe Menge ist . (|3|)
Bemerkung 1:
Ist P eine konvexe Partition des $\mathbb{R}^n$,die mindestens zwei Blöcke umfaßt, und bezeichnet man für $p \varepsilon P$ mit $\overset{\circ}{p}$ die Menge der relativ inneren Punkte von p, so ist für jedes $p \varepsilon P$ $\overset{\circ}{p}$ Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen.

<u>Beweis:</u> Wir geben eine kurze Beweisskizze. Sei p ein Block der konvexen Partition P des $\mathbb{R}^n$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden

(1) Die Menge der relativ inneren Punkte von p ist gleich der Menge der inneren Punkte von p. Nach dem Trennungssatz für konvexe Mengen (|3|) gibt es dann zu jedem $p' \in P$, $p' \neq p$ eine Hyperebene $h_{p'}$, so daß $\tilde{\mathring{p}} \subseteq H^{(1)}_{p'}$ und $\tilde{\mathring{p}}' \subseteq H^{(2)}_{p'}$ gilt, wenn $H^{(1)}_{p'}$ und $H^{(2)}_{p'}$ die zugehörigen Halbräume von $h_{p'}$ sind. Da P eine Partition des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt nun sofort

$$\tilde{\mathring{p}} = \bigcap_{\substack{p' \in P \\ p' \neq p}} H^{(1)}_{p'} \quad .$$

(2) Die Menge der relativ inneren Punkte von p ist nicht gleich der Menge der inneren Punkte von p. Dann gibt es $1 \leq k \leq n$, so daß sich p in $\mathbb{R}^k$ einbetten läßt und die Menge der relativ inneren Punkte von p gliech der Menge der inneren Punkte (in $\mathbb{R}^k$) von p ist. Man kann die Einbettung so machen, daß die konvexe Partition P im $\mathbb{R}^k$ eine konvexe Partition P' induziert, für die gilt: $p \in P'$. Dann läßt sich aber $\tilde{\mathring{p}}$ nach (1) als Durchschnitt von Halbräumen in $\mathbb{R}^k$ darstellen. Hieraus folgt nun aber sofort, daß sich $\tilde{\mathring{p}}$ auch im $\mathbb{R}^n$ als Durchschnitt von Halbräumen darstellen läßt.

<u>Bemerkung 2:</u> Seien P und Q konvexe Partitionen des $\mathbb{R}^n$, dann ist auch $P \cdot Q = \{ p \sqcap q \mid p \in P, q \in Q, p \sqcap q \neq \emptyset \}$ eine konvexe Partition des $\mathbb{R}^n$.

<u>Definition:</u> Sei $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, f heißt

<u>stückweise affin</u> genau dann, wenn es eine konvexe Partition P des $\mathbb{R}^n$ gibt, so daß zu jedem $p \varepsilon P$ eine affine Abbildung $f_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f/p = f_p/p$ existiert.

<u>Bemerkung 1:</u>
Die Hintereinanderausführung zweier stückweise affiner Abbildungen definiert wieder eine stückweise affine Abbildung.

<u>Beweis:</u> Seien $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^s$ zwei stückweise affine Abbildungen. Seien P bzw. Q die zugehörigen konvexen Partitionen. Betrachte dann

$$R := \left\{ f^{-1}(f(p) \sqcap q) \mid p \varepsilon P, q \varepsilon Q \text{ und } f(p) \sqcap q \neq \emptyset \right\} .$$

Da Bild und Urbild konvexer Mengen unter affinen Abbildungen wieder konvex sind und da der Durchschnitt konvexer Mengen wieder eine konvexe Menge ist, ist R konvexe Partition.
Die zugehörigen affinen Abbildungen bestimmen sich dann durch :

$$(g \circ f)_{f^{-1}(f(p) \sqcap q)} = g_q \circ f_p \quad .$$

<u>Bemerkung 2:</u> Seien $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zwei stückweise affine Abbildungen, dann sind auch $f+g, -f, cf (c \varepsilon \mathbb{R})$ stückweise affine Abbildungen.
<u>Bemerkung 3:</u> Seien $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^t$ stückweise affine Abbildungen.

se affine Abbildungen, dann ist auch

$(f \times g): \mathbb{R}^{n+s} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+t}$ eine stückweise affine Abbildung.

Bemerkung 4:

Bild und Urbild von einer Vereinigung endlich vieler konvexer Mengen sind unter stückweise affinen Abbildungen wieder Vereinigung von endlich vielen konvexen Mengen.

Bemerkung 5:

Jede affine Abbildung ist eine stetige, stückweise affine Abbildung.

Wir geben zwei Beispiele für stückweise affine Abbildungen an .

Beispiel II.3:

Die Abbildungen ${}^{n}\mathrm{pos}$ sind stetige, stückweise affine Abbildungen für $n=1,2,3,\ldots$.

Betrachtet man die folgende Aequivalenzrelation auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$(Y \wedge Y') :\Leftrightarrow ((Y)_i \leq 0 \Leftrightarrow (Y')_i \leq 0 \quad (1 \leq i \leq n))$$

$(Y, Y' \varepsilon \mathbb{R}^n)$,

so sind die Blöcke der durch diese Aequivalenzrelation induzierten Partition des $\mathbb{R}^n$ konvexe Mengen.

Sei $[\, Y \,]$ die Aequivalenzklasse von Y unter " $\wedge$ " .

Sei dann $Y' \varepsilon [\, Y \,]$. Dann gilt:

$$^{n}\mathrm{pos}\,(Y') = P(Y)\cdot Y' ,$$

wobei $P(Y)$ eine (n,n)-Matrix mit

$(P(Y))_{i,k} = 0$,falls $i \neq k$ oder $(Y)_i \leq 0$ ist, und
$(P(Y))_{i,i} = 1$,falls $(Y)_i > 0$ ist.

$P(Y)$ ist also ein Projektor.

<u>Beispiel II.4:</u>

Der <u>Betrag</u> $|Y|$ eines Vektors $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$(|Y|)_i := |(Y)_i| \quad (i=1,\ldots,n)$$

ist eine stetige,stückweise affine Abbildung.
Man verwendet wieder die Aequivalenzrelation "Λ" .
An die Stelle des Projektors $P(Y)$ tritt hier
eine Spiegelung.

Wir stellen einige Rechenregeln für die Abbildung
pos und den Betrag zusammen.
Seien $Y,Y' \varepsilon \mathbb{R}^n, c \varepsilon \mathbb{R}, A$ (n,n)-Matrix .
Dann gilt:

(II.5) $\mathrm{pos}(Y) - \mathrm{pos}(-Y) = Y$

(II.5a) $\mathrm{pos}(\mathrm{pos}(Y)) = \mathrm{pos}(Y)$

(II.5b) $0 \leq \mathrm{pos}(Y) \leq |Y|$

(II.5c) $\mathrm{pos}(Y) = 0 \Longleftrightarrow Y \leqslant 0$

(II.5d) $A \geqslant 0$: $\mathrm{pos}(AY) \leqslant A\ \mathrm{pos}(Y)$

(II.5e) $\mathrm{pos}(\ cY\ ) = |c|\ \mathrm{pos}(\ \mathrm{sgn}(c)\ Y\ )$

(II.5f) $Y \leqslant Y' \Longrightarrow \mathrm{pos}(Y) \leqslant \mathrm{pos}(Y')$

(II.5g) $0 \leqslant Y \Longrightarrow \mathrm{pos}(Y) = Y$

(II.5h) $|\ |Y|\ | = |\ Y\ |$

(II.5i) $|\ Y\ | = |\ -Y\ |$

(II.5j) $|\ cY\ | = |c|\ |\ Y\ |$

(II.5k) $|\ Y+Y'| \leqslant |\ Y\ | + |\ Y'\ |$

(II.5l) $0 \leqslant |\ Y\ |$

(II.5m) $|\ Y\ | = 0 \Longleftrightarrow Y = 0$

(II.5n) $0 \leqslant Y \Longrightarrow |\ Y\ | = Y$

(II.5o) $|\ AY\ | \leqslant |A| \cdot |Y|$

Wichtiger und weniger trivial sind die beiden folgenden Relationen.

Lemma II. 1: Seien $Y, Y' \in \mathbb{R}^n$.

(1) Ist $Y' \geqslant 0$, so gilt: $\mathrm{pos}(\ Y - Y'\ ) = \mathrm{pos}(\mathrm{pos}(Y) - Y')$

(2) Es gilt: $|\ \mathrm{pos}(Y) - \mathrm{pos}(Y')\ | \leqslant |\ Y - Y'\ |$

Beweis:

zu (1): Ist $(Y)_i \leqslant 0$, so ist auch $(Y)_i - (Y')_i \leqslant 0$.
Hieraus folgt sofort die Behauptung.

zu (2): Es sind vier Fälle zu unterscheiden.

1.Fall: $(Y)_i, (Y')_i \geqslant 0$. Dann gilt:

$(|\ \mathrm{pos}(Y) - \mathrm{pos}(Y')\ |)_i = |(\mathrm{pos}(Y))_i - (\mathrm{pos}(Y'))_i|$

$= |\ (Y)_i - (Y')_i| = (|\ Y - Y'\ |)_i$.

<u>2.Fall:</u> $(Y)_i \geqslant 0$, $(Y')_i < 0$. Dann gilt:

$(|\operatorname{pos}(Y) - \operatorname{pos}(Y')|)_i = (|\operatorname{pos}(Y)|)_i =$

$(\operatorname{pos}(Y))_i = (Y)_i \leqslant (Y)_i - (Y')_i =$

$= |(Y)_i - (Y')_i| = (|Y - Y'|)_i$.

<u>3.Fall:</u> $(Y)_i < 0$, $(Y')_i \geqslant 0$. Dann gilt:

$(|\operatorname{pos}(Y) - \operatorname{pos}(Y')|)_i = (|-\operatorname{pos}(Y')|)_i$

$= (|\operatorname{pos}(Y')|)_i = (\operatorname{pos}(Y'))_i = (Y')_i$

$\leqslant (Y')_i - (Y)_i = |(Y')_i - (Y)_i|$

$= (|Y' - Y|)_i = (|Y - Y'|)_i$.

<u>4.Fall:</u> $(Y)_i, (Y')_i < 0$. Dann gilt:

$(|\operatorname{pos}(Y) - \operatorname{pos}(Y')|)_i = 0 \leqslant (|Y - Y'|)_i$.

Damit ist alles bewiesen.

Nun können wir den angekündigten Satz leicht beweisen.

<u>Satz II.1:</u>

Sei φ IF(A,S).Dann gelten folgende Aussagen.

1) Für jedes $X \in \mathbb{R}^n$ ist $\varphi(X)$ eine stetige,stückweise affine Abbildung.

2) Es gibt Abbildungen

$\pi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und

$\mu : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow A_{n,n} := \{ A \mid A \text{ (n,n)-Matrix} \}$,

so daß folgendes gilt:

a) $X, Y \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant \pi(X,Y),\ 0 \leqslant \mu(X,Y) \leqslant A$

b) $X, Y \in \mathbb{R}^n : \varphi(X)(Y) = \pi(X,Y) - \mu(X,Y) \cdot Y$.

<u>Beweis:</u>

(1): Sei φ IF(A,S) und seien $X,Y \varepsilon \mathbb{R}^n$. Man verifiziert sofort:

$$(\ast)\quad \varphi(X)(Y) = {}^{n}\mathrm{pos}\left(X - \begin{bmatrix} e_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & e_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{bmatrix} {}^{n^2}\mathrm{pos}\left(\begin{bmatrix} E_n \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} Y - S^T \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \right)\right)$$

($E_n \ \varepsilon\ \Lambda_{n,n}$ die Einheitsmatrix)

Aus der Bemerkung 1 zur Definition stückweise affiner Abbildungen ergibt sich sofort die Behauptung.

(2): Beachtet man, daß für Projektoren $P \varepsilon \Lambda_{n,n}$ stets gilt $PA, AP \leqslant A$, so folgt aus $(\ast)$ die Behauptung .

<u>Beispiel II.5:</u>

Wir illustrieren den Beweis dieses Satzes.

Seien $A,S \varepsilon\ \Lambda_{2,2}$ mit $0 \leqslant A,S$ und Spur A = Spur S = 0.

Sei φ IF(A,S).

Betrachte Vektor $X \geqslant 0$ mit $(X)_i > (S)_{ji}$ $(i \neq j, i,j=1,2)$.

Wir nehmen an $0 < (A)_{12}, (A)_{21} \leqslant 1$.

Die Blöcke der zu $\varphi(X)$ gehörigen konvexen Partition entnehme man der folgenden Abbildung II.3 .

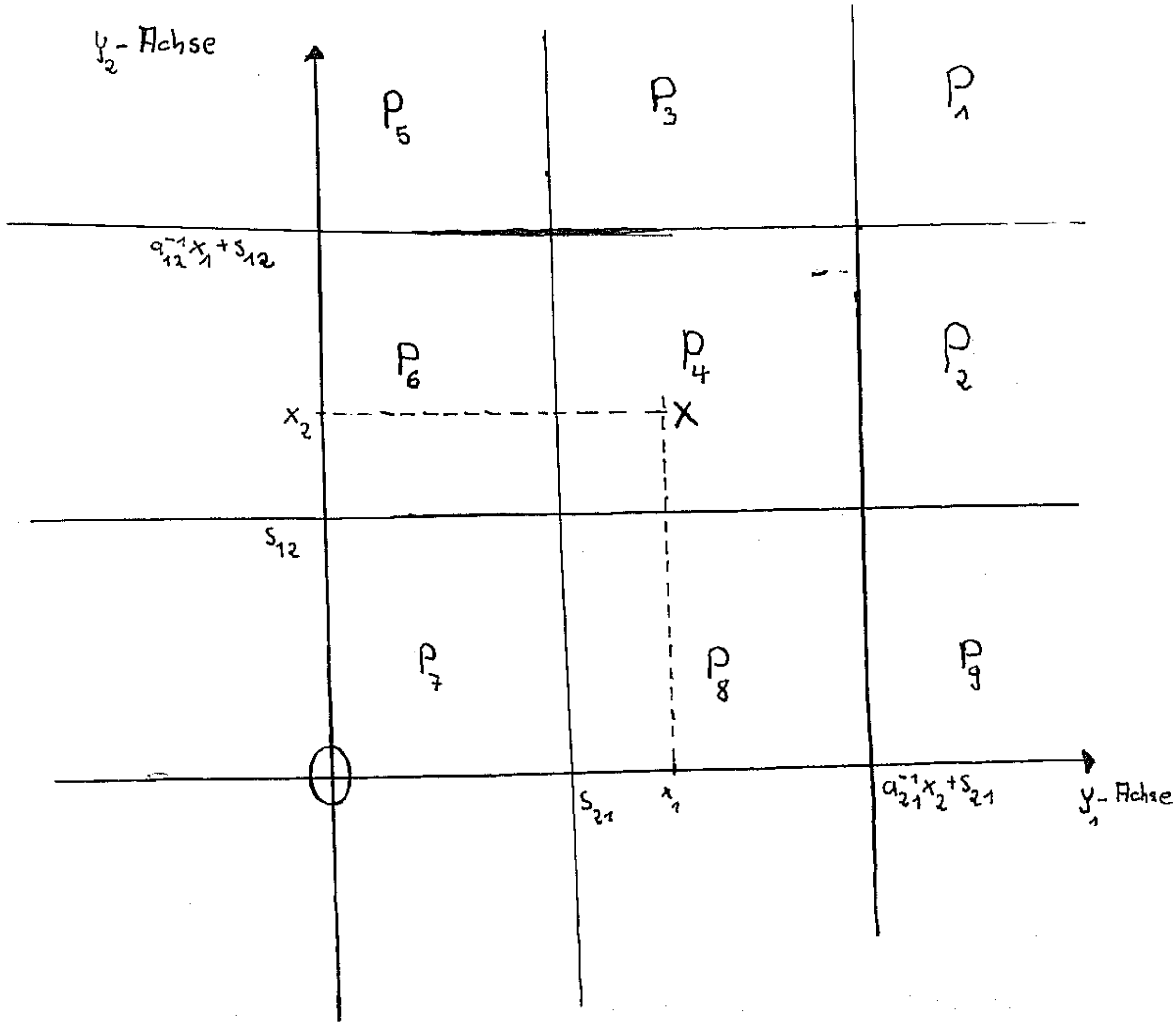


Abb. II.3

Die zugehörigen affinen Abbildungen entnehme man der folgenden Tabelle.

Y aus	$(\varphi(X)(Y))_1$	$(\varphi(X)(Y))_2$
P_1	0	0
P_2	$x_1 - a_{12}y_2+a_{12}s_{12}$	0
P_3	0	$x_2-a_{21}y_1+a_{21}s_{21}$
P_4	$x_1-a_{12}y_2+a_{12}s_{12}$	$x_2-a_{21}y_1+a_{21}s_{21}$

Y aus	$(\varphi(X)(Y))_1$	$(\varphi(X)(Y))_2$
P_5	0	x_2
P_6	$x_1-a_{12}y_2+a_{12}s_{12}$	x_2
P_7	x_1	x_2
P_8	x_1	$x_2-a_{21}y_1+a_{21}s_{21}$
P_9	x_1	0

($x_i = (X)_i$, $y_i = (Y)_i$, $a_{ij} = (A)_{ij}$, $s_{ij} = (S)_{ij}$ $(i,j=1,2)$)
Wir leiten weitere Eigenschaften von Inhibitionsfeldern her. Insbesondere wollen wir, daß die Konvergenz einer Iterationsfolge mit $\varphi(X)$ bei beliebigem Startvektor Y im wesentlichen auf die Konvergenz der Iterationsfolge mit Startvektor $\text{pos}(X)$ zurückgeführt werden kann.

Lemma II.2: Sei φ IF(A,S), dann gilt für alle $X \in \mathbb{R}^n$

(1) $0 \leq \varphi(X)(Y) \leq \text{pos}(X)$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$ und

(2) Aus $Y \leq Y'$ folgt $\varphi(X)(Y) \geq \varphi(X)(Y')$ $(Y, Y' \in \mathbb{R}^n)$.

Beweis:

(1) folgt unmittelbar aus der Definition von φ .

(2): Sei $Y \leq Y'$. Es folgt

$$Y - S^T e_i \leq Y' - S^T e_i \quad (i=1,\ldots,n)$$

Dann gilt aber auch

$$\text{pos}\,(Y - S^T e_i) \leq \text{pos}(Y' - S^T e_i) \ (i=1,\ldots,n)$$

Da nun $A \geqslant 0$ ist, folgt

$$(X)_i - (A\ \mathrm{pos}(Y-S^T e_i))_i \not\geqslant (X)_i - (A\ \mathrm{pos}(Y'-S^T e_i))_i$$

$(i=1,\ldots,n)$.

Und hieraus ergibt sich

$$\mathrm{pos}((X)_i - (A\ \mathrm{pos}(Y-S^T e_i))_i \gg \mathrm{pos}((X)_i-(A\ \mathrm{pos}(Y'-S^T e_i))_i)$$

$(i=1,\ldots,n)$.

Das aber war zu zeigen.

Wir ziehen hieraus einige Folgerungen.

<u>Lemma II.3:</u> Sei φ IF(A,S),dann gilt für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$

(1) $0 \leqslant (\varphi(X))^r(Y) \leqslant \mathrm{pos}(X)$ für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ und $r=1,2,\ldots$

und

(2) $(\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s+2}(Y) \leqslant (\varphi(X))^{2s}(\mathrm{pos}(X))$

für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ und $s=0,1,2,\ldots\ldots$.

<u>Beweis:</u>

(1) ist nach Lemma II.2 (1) trivial.

(2): Nach Lemma II.2 (1) gilt:

(*) $0 \leqslant \varphi(X)(Y) \leqslant \mathrm{pos}(X)$ für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$.

Wir wenden nun $\varphi(X)$ auf (*) an und gewinnen mit Lemma II.2 (2)

$$(**)\quad 0 \leqslant \varphi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^2(Y) \leqslant \mathrm{pos}(X)$$

für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$.
Auf (**)wende nun $(\varphi(X))^{2s}$ mit $s \geqslant 0$ an.Nach Lemma II.2 (2) folgt aber, daß $(\varphi(X))^{2s}$ für $s \geqslant 0$ eine monoton wachsende Abbildung ist. Dann ergibt sich aber sofort die Behauptung.

<u>Lemma II.4:</u> Sei φ IF(A,S),dann gilt für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$

(1) $(\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s+3}(\mathrm{pos}(X))$

(2) $(\varphi(X))^{2s+2}(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s}(\mathrm{pos}(X))$

(3) $(\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s}(\mathrm{pos}(X))$

für alle s=0,1,2,...... .

<u>Beweis:</u>

Nach Lemma II.2 (1) gilt:

$$0 \leqslant \varphi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqslant \mathrm{pos}(X) .$$

Dann folgt

$$0 \leqslant \varphi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^2(\mathrm{pos}(X)) \leqslant \mathrm{pos}(X) .$$

Hieraus folgt:

$$0 \leqslant \varphi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^2(\mathrm{pos}(X))$$
$$0 \leqslant \varphi(X)(\mathrm{pos}(X)) \leqslant (\varphi(X))^3(\mathrm{pos}(X))$$
$$0 \leqslant (\varphi(X))^2(\mathrm{pos}(X)) \leqslant \mathrm{pos}(X) .$$

Anwendung von $(\varphi(X))^{2s}$ mit $s \geqslant 0$ auf diese drei Ungleichungen liefert wie bei Lemma II.3 die Behauptung.

Lemma II.4 liefert nun folgendes Ergebnis.

<u>Satz II.2:</u>
Sei φ IF(A,S), dann existieren für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ die Limites

$$\lim_s (\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) := U(X)$$

und

$$\lim_s (\varphi(X))^{2s} (\mathrm{pos}(X)) := O(X) \quad .$$

Darüberhinaus gilt für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$

(1) $0 \leqslant U(X) \leqslant O(X) \leqslant \mathrm{pos}(X)$

(2) $\varphi(X)(U(X)) = O(X), \ \varphi(X)(O(X)) = U(X)$.

<u>Beweis:</u>
Die Existenz der Limites ist eine unmittelbare Folge von Lemma II.4 . Die Ungleichung (1) ergibt sich aus Lemma II.4 (3) nach Grenzübergang.
Wir zeigen (2):

Dabei beachten wir, daß $\varphi(X)$ stetig ist.

Dann gilt der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
O(X) &= \lim_{s}(\varphi(X))^{2s+2}(\mathrm{pos}(X)) \\
&= \lim_{s}(\varphi(X)((\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)))) \\
&= \varphi(X)(\ \lim_{s}\ (\varphi(X))^{2s+1}(\mathrm{pos}(X)) \\
&= \varphi(X)(U(X))\ .
\end{aligned}
$$

Es ist klar, daß dann auch die andere Gleichung gilt.

III. Die innere Stabilität von Inhibitionsfeldern

Ist φ IF(A,S), so wird φ stabil in $X\varepsilon\mathrm{IR}^n$ genannt, falls jede Iterationsfolge von $\varphi(X)$ konvergiert. Gilt dann $r(A) < 1$, so ist φ in jedem $X\varepsilon\mathrm{IR}^n$ stabil. Ist umgekehrt φ in jedem $X\varepsilon\mathrm{IR}^n$ stabil, so ist $r(A) \leqslant 1$. Die erste der beiden Aussagen läßt sich mit geeigneten Modifikationen auf stetige, stückweise affine Abbildungen verallgemeinern.

Wir beschäftigen uns mit der Frage, wann es bei gegebenem $X\varepsilon\mathrm{IR}^n$ nur eine Lösung $Z\varepsilon\mathrm{IR}^n$ der Gleichung

$$\varphi(X)(Z) = Z \quad (\varphi \ \mathrm{IF}(A,S))$$

gibt. Dieses Problem ist physikalisch nur interessant, wenn die innere Stabilität des Inhibitionssystems im Hinblick auf Variation von Z gefordert wird.
Das bedeutet folgendes: Ein Inhibitionssystem ist, stabil, wenn sich das System bei jeder Auslenkung von Z wieder auf Z einstellt (bei festgehaltenem X). Das läßt sich mathematisch durch die Bedingung, daß jede Iterationsfolge von $\varphi(X)$ gegen Z konvergiert, erreichen. Wir fordern also:

$$\lim_k (\varphi(X))^k(Y) = Z \text{ für alle } Y \varepsilon \mathbb{R}^n .$$

Man kann nun zeigen, daß aus der Tatsache, daß jede Iterationsfolge von $\varphi(X)$ konvergiert, bereits folgt, daß jede Iterationsfolge von $\varphi(X)$ gegen Z konvergiert. Wir können also den Begriff der " Stabilität " eines Inhibitionsfeldes φ folgendermaßen definieren.

<u>Definition:</u> Sei φ IF(A,S) .

φ ist dann und nur dann <u>in $X\varepsilon\mathbb{R}^n$ stabil</u>, wenn der

$$\lim_k (\varphi(X))^k(Y)$$

für alle $Y\varepsilon\mathbb{R}^n$ existiert.

Ist φ in jedem $X\varepsilon\mathbb{R}^n$ stabil, so heißt φ <u>stabil(schlechthin)</u>.

Unser Wunsch ist es nun, Stabilitätskriterien für Inhibitionsfelder zu finden. Um Ideen zu fixieren, betrachten wir zunächst " lineare " Inhibitionsfelder. Ein solches " lineares " Inhibitionsfeld ist eine Abbildung φ des $\mathbb{R}^n$ in die Menge der affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich, zu der es eine Matrix $A\varepsilon\ \Lambda_{n,n}$ und einen

Vektor $B \varepsilon \mathrm{IR}^n$ gibt, so daß für alle $X, Y \varepsilon \mathrm{IR}^n$ gilt:

$$\text{(III.1)} \quad \varphi(X)(Y) = X + B - A\,Y \quad .$$

Dabei ist A nichtnegativ, Spur A = 0 und $B \succcurlyeq 0$.

Wir vergessen also die Funktion pos .
Mithilfe matrizentheoretischer Sätze (vgl. |4| und |5|) folgt leicht, daß ein lineares Inhibitionsfeld genau dann stabil ist, wenn der Spektralradius der zu φ gehörigen Inhibitionsmatrix A kleiner als 1 ist.
Wir wollen einen analogen Satz für "nichtlineare" Inhibitionsfelder beweisen.Hierzu benötigen wir zwei vorbereitende Sätze

<u>Satz III.1:</u>

Sei φ IF(A,S) und sei $X \varepsilon \mathrm{IR}^n$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(1) φ ist in X stabil

(2) $O(X) = U(X)$. (vgl. Satz II.2)

<u>Beweis:</u>

Daß aus (1) (2) folgt, ist trivial. Wir zeigen, daß aus (2) auch (1) folgt. Dazu betrachten wir die Menge

$N(X) := \{Y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(X)(pos(X)) \leq Y \leq pos(X)\}$.

Nun gilt nach Lemma II.2 (2) (für s=0) :

$Y \in \mathbb{R}^n$: $\varphi(X)(pos(X)) \leq (\varphi(X))^2(Y) \leq pos(X)$.

Also:

(III.2) $(\varphi(X))^2(\mathbb{R}^n) \subseteq N(X)$.

Sei nun $Y \in N(X)$. Dann gilt per definitionem

$\varphi(X)(pos(X)) \leq Y \leq pos(X)$.

Wir wenden $\varphi(X)$ auf diese Ungleichung an und erhalten unter Beachtung der Monotonieeigenschaften von $\varphi(X)$

$\varphi(X)(pos(X)) \leq \varphi(X)(Y) \leq (\varphi(X))^2(pos(X)) \leq pos(X)$

(nach Lemma II.1(2) und Lemma II.2(1)).

Also:

(III.2a) $\varphi(X)(N(X)) \subseteq N(X)$.

Betrachte nun zu $Y \in \mathbb{R}^n$ die Folge

$$((\varphi(X))^k(Y) \mid k=0,1,2,\ldots.) .$$

Nach (III.2) und (III.2a) können wir uns im Hinblick auf die Konvergenz dieser Folge auf solche $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ beschränken, die aus $N(X)$ sind. Für diese gilt aber nach Definition von $N(X)$ und (III.2a)

(III.2b) $\varphi(X)(pos(X)) \leqslant Y \leqslant pos(X)$ und

(III.2c) $\varphi(X)(pos(X)) \leqslant \varphi(X)(Y) \leqslant pos(X)$.

Wir wenden auf (III.2b) und (III.2c) $(\varphi(X))^{2s}$ mit $s \geqslant 0$ und erhalten :

(III.2d) $$(\varphi(X))^{2s+1}(pos(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s+2}(Y) \leqslant (\varphi(X))^{2s}(pos(X))$$

und

(III.2e) $$(\varphi(X))^{2s+1}(pos(X)) \leqslant (\varphi(X))^{2s+1}(Y) \leqslant (\varphi(X))^{2s}(pos(X)) .$$

($Y \varepsilon N(X)$, $s= 0,1,2,\ldots\ldots$) .

Da nun gilt: $O(X) = U(X)$, folgt,daβ zu jedem $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$ die Limites

$$\lim_s (\varphi(X))^{2s}(Y) \text{ und } \lim_s (\varphi(X))^{2s+1}(Y)$$

existieren und gleich sind. Hieraus ergibt sich aber, daß auch der Limes

$$\lim_{k} (\varphi(X))^k(Y)$$

für alle $Y \in \mathbb{R}^n$ existiert. Das aber war zu zeigen.

Wir haben mitbewiesen

Korollar zu Satz III.1:

Sei φ ein in $X \in \mathbb{R}^n$ stabiles Inhibitionsfeld, dann gelten folgende Aussagen:

(1) $\lim_{k} (\varphi(X))^k(Y) = O(X) = U(X)$ für alle $Y \in \mathbb{R}^n$

und

(2) Aus $\varphi(X)(Z) = Z$ folgt $Z = O(X) = U(X)$.

Diese Folgerung läßt sich noch in einer anderen Weise interpretieren. Sei

$$\text{(III.3)} \quad \omega(\varphi) := \left\{ X \in \mathbb{R}^n \mid O(X) = U(X) \right\}$$

$(\varphi \; IF(A,S))$.

Dann besagt die obige Folgerung: Durch die Festsetzung

$$\text{(III.3a)}\quad I_\varphi(X) := \lim_k (\varphi(X))^k(Y) \quad (X,Y \in \mathbb{R}^n)$$

wird eine Abbildung

$$I_\varphi : \omega(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definiert.

Diese Abbildung ist die beim Sehvorgang interessierende Transformation. $\omega(\varphi)$ nennen wir den <u>Stabilitätsbereich</u> von φ. $\omega(\varphi)$ ist nicht leer, denn es gilt:

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid (X)_i \leq (S)_{ji} \text{ für } 1 \leq i,j \leq n, i \neq j\} \subseteq \omega(\varphi)$$

und

$$\{X \in \mathbb{R}^n \mid X = c\, e_i \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ und } 1 \leq i \leq n\} \subseteq \omega(\varphi) \quad .$$

$\omega(\varphi)$ hat ferner die Eigenschaft, daß mit X auch alle X' mit $pos(X') = pos(X)$ aus $\omega(\varphi)$ sind.

Eine Diskussion der Eigenschaften von I_φ bringen wir in den anschließenden Paragraphen.

Um die angekündigten Stabilitätssätze beweisen zu können, benötigen wir noch eine Abschätzung.

<u>Satz III.2:</u> Sei φ IF(A,S). Dann gilt für alle $X, Y, Y' \varepsilon \mathrm{IR}^n$

$$\text{(III.4)} \quad | \varphi(X)(Y) - \varphi(X)(Y') | \leqslant A \, | Y - Y' |$$

<u>Beweis:</u>

Es gilt der Reihe nach

$$(| \varphi(X)(Y) - \varphi(X)(Y') |)_i$$

$$= | \ \mathrm{pos}((X)_i - (A \ \mathrm{pos}(Y - \overset{T}{S}e_i))_i) - \mathrm{pos}((X)_i - (A \ \mathrm{pos}(Y' - \overset{T}{S}e_i))_i \, |$$

$$\leqslant (| A (\ \mathrm{pos}(Y - \overset{T}{S}e_i) - \mathrm{pos}(Y' - \overset{T}{S}e_i)) |)_i$$

(Lemma II.1(2))

$$\leqslant (A \, | \ \mathrm{pos}(Y - \overset{T}{S}e_i) - \mathrm{pos} (Y' - \overset{T}{S}e_i) \, |)_i$$

(II. 5 o)

$$\leqslant (A \, | Y - Y' |)_i \qquad \text{(Lemma II. 1(2))}$$

(i=1,.....,n). Das aber war zu zeigen.

Nun können wir den ersten Teil unseres Kriteriums zeigen

<u>Satz III. 3:</u>

Gilt für φ IF(A,S), daß $r(A) < 1$ ist, so ist φ stabil .

<u>Beweis:</u>

Sei $X \varepsilon \mathrm{IR}^n$. Betrachte $O(X) - U(X)$. Dann gilt nach obigem Satz III.2 unter Verwendung des Satzes II.2

$$0 \leqslant | \, O(X) - U(X) \, | = | \, \varphi(X)(U(X)) - \varphi(X)(O(X)) \, |$$
$$\leqslant A \, | \, U(X) - O(X) \, | = A \, |O(X) - U(X)| \, .$$

Durch Wiederholung dieses Schlusses folgt wegen $A \geqslant 0$

$$0 \leqslant O(X) - U(X) \leqslant A^k \, (\, O(X) - U(X) \,) \quad (k=0,1,2,\ldots\ldots)$$

Da $r(A) < 1$ ist, gilt:

$$\lim_k \; A^k = 0 \qquad (\text{vgl. } |4| \text{ und } |5| \,) \, .$$

Hieraus folgt aber

$$O(X) = U(X) \, .$$

Nach Satz III.1 ist dann aber φ in X stabil. Da X beliebig war,folgt die Behauptung.

Der Satz III.2 gestattet es, eine Abschätzung über das Konvergenzverhalten von Iterationsfolgen von $\varphi(X)$ (bei gegebenem φ IF(A,S) und $X \varepsilon \mathbb{R}^n$) herzuleiten. Es gilt nämlich für $k \geqslant 1$ nach Satz III.2

$$\text{(III.5)} \quad | \; I_\varphi(X) - (\varphi(X))^k(Y) \; | = | \; \varphi(X)(I_\varphi(X)) - (\varphi(X))^k(Y) \; |$$

$$\leqslant A \; | \; I_\varphi(X) - (\varphi(X))^{k-1}(Y) \; |$$

$(k=1,2,\ldots., \; Y \varepsilon \mathbb{R}^n)$.

Durch Induktion über k gewinnt man aus (III.5)

$$\text{(III.5a)} \quad | \; I_\varphi(X) - (\varphi(X))^k(Y) \; | \leqslant A^k \; | I_\varphi(X) - Y \; |$$

$(k=0,1,2,\ldots..,Y \varepsilon \mathbb{R}^n)$.

Beachtet man nun noch, daß $0 \leqslant I_\varphi(X) \leqslant \mathrm{pos}(X) \leqslant |X|$ gilt, so folgt aus (III.5a) die Abschätzung

$$\text{(III.5b)} \quad | \; I_\varphi(X) - (\varphi(X))^k(Y) \; | \leqslant A^k \; (\; |X| + |Y| \;)$$

$(X,Y \varepsilon \mathbb{R}^n, \; k=0,1,2,\ldots.. \;)$.

Wir wollen die " Umkehrung " des Satzes III.3 beweisen.

Satz III.4:

Ist φ stabiles IF(A,S), so ist $r(A) \leq 1$.

Beweis:

Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen : $r(A) > 1$. Nach den Sätzen von Perron und Frobenius für nicht-negative Matrizen (vgl. |4| und |5|) ist r(A) Eigenwert von A, zu dem ein Eigenvektor F mit $F \geq 0$ und $F \neq 0$ gehört. Man kann nun - etwa durch Multiplikation mit natürlichen Zahlen - erreichen, daß für F folgendes gilt:

(III.6) $(F)_i > 0 \Longleftrightarrow (F)_i > (S)_{ij} \quad (j=1,\ldots,n)$

(III.6a) Sei $\mu := \{ j \mid 1 \leq j \leq n \text{ und } (F)_j > 0 \}$, so sei

$$(1-r(A))\,(F)_i + \sum_{j\varepsilon\mu} (A)_{ij}(S)_{ij} < 0 \text{ für } i\varepsilon\mu .$$

(Beachte: $1-r(A) < 0$) .

Nun gilt aber

$$(\mathrm{pos}(\,F - S^T e_i\,)\,)_j = \begin{cases} (F)_j \;, \text{ falls } j \notin \mu \\ \\ (F)_j - (S)_{ij}, \text{ falls } j \varepsilon \mu \end{cases}$$

$(i,j=1,\ldots,n, i \neq j)$.

Dann folgt aber

$$(\varphi(F)(F))_i = \mathrm{pos}(\ (F)_i - \ (A\ \mathrm{pos}\ (F - S^T e_i\ )\ )_i\ )$$

$$= \begin{cases} 0\ , \text{ falls } i \notin \mu \\ \mathrm{pos}\ (\ (1-r(A))(F)_i + \sum_{j\varepsilon\mu} (A)_{ij}(S)_{ij}\ ), \text{falls } i\varepsilon\mu \end{cases}$$

$$= 0$$

$(i=1,....,n)$.

Also: $\varphi(F)(F) = 0$ und $\varphi(F)(0) = F$.

Da $F \neq 0$ ist, folgt,daß φ in F nicht stabil ist. Das aber ist ein Widerspruch.

Die Sätze III.3 und III.4 überführen das Problem, Stabilitätskriterien zu finden, in das Problem, Kriterien dafür zu finden, wann der Spektralradius einer nichtnegativen Matrix A mit Spur A = 0 kleiner als 1 ist.
Ueber das letztere Problem existiert aber eine große Anzahl von Sätzen (vgl. |4|,|5|,|6|) .
Als Beispiel soll hier zunächst folgende in |6| angegebene Abschätzung über den Spektralradius einer nicht-

negativen Matrix zitiert werden. Es gilt nämlich für eine nichtnegative (n,n)-Matrix A, daß für jedes $X > 0$, $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$\text{(III.7)} \quad \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Min}} \left((A\,X)_i \, (X)_i^{-1} \right) \leq r(A) \leq \underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}} \left((A\,X)_i \, (X)_i^{-1} \right)$$

folgt.

(Diese Abschätzung ist in dem Sinne optimal, daß man durch geeignete Wahl von X dem Spektralradius von beiden Seiten der Abschätzung (III.7) beliebig nahe kommen kann.)

Mit (III.7) erhalten wir aus den Sätzen III.3 und III.4 folgendes Kriterium.

<u>Kriterium I</u>: Sei φ IF(A,S) .

(1) Existiert $X > 0, X \varepsilon \mathbb{R}^n$ mit $\underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Max}} \left((A\,X)_i \, (X)_i^{-1} \right) < 1$,

so ist φ stabil .

(2) Existiert $X > 0, X \varepsilon \mathbb{R}^n$ mit $\underset{1 \leq i \leq n}{\mathrm{Min}} \left((A\,X)_i \, (X)_i^{-1} \right) > 1$,

so ist φ nicht stabil .

Durch Spezialisierung von X mit $X = e = \sum_{i=1}^{n} e_i$ folgt:

<u>Kriterium II :</u> Sei φ IF(A,S).

(1) Ist $\underset{1\leq i\leq n}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \right) < 1$, so ist φ stabil .

(2) Ist $\underset{1\leq i\leq n}{\mathrm{Min}} \left(\sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \right) > 1$, so ist φ nicht stabil.

Durch weitere Spezialisierungen erhält man aus Kriterium I eine große Schar von Stabilitätskriterien. Wir diskutieren einen speziellen Typ von Matrizen, der im Hinblick auf Anwendungen bei Inhibitionssystemen wichtig ist.

Sei also φ IF(A,S). A habe die folgende Struktur.

Es existieren Zahlen a_i $(1 \leq i \leq r)$ und Relationen $\nu_i \subseteq \{j \mid 1 \leq j \leq n\} \times \{j \mid 1 \leq j \leq n\}$, so daß gilt:

(III.8) $a_1 > \ldots\ldots > a_r > 0$

(III.8a) ν_i symmetrisch und schleifenfrei $(1 \leq i \leq r)$

(III.8b) $\nu_i \cap \nu_j = \emptyset$ für $i \neq j$ $(1 \leq i,j \leq r)$

(III.8c) $\nu(i,j) := \{ (j,k) \mid (j,k) \in \nu_i \} \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i \leq r$ und $1 \leq j \leq n$

(III.8d) $(A)_{ik} = 0$, falls $(i,k) \notin \bigcup_{j=1}^{r} \nu_j$. $(1 \leq i,k \leq n)$

(III.8e) $(A)_{ik} = a_j$, falls $(i,k) \in \nu_j$ $(1 \leq i,k \leq n)$.

Anschaulich bedeutet das folgendes:
Es gibt verschiedene Grade i von Kopplungen der Sehzellen untereinander. Mit welchen Sehzellen eine Zelle j im Grade i gekoppelt ist, beschreibt die Menge $\nu(i,j)$. Gleichgradige Kopplungen haben den gleichen Inhibitionskoeffizienten a_i ((III.8),(III.8d,e)) . Zwei Zellen sind nicht in verschiedenen Graden miteinander verbunden ((III.8a,b)). Mehrfachkopplungen in den gleichen Kopplungsgraden treten also nicht zwischen zwei Zellen auf.
Eine Zelle ist nicht mit sich selbst gekoppelt ((III.8a)).
Jede Sehzelle ist mit mindestens einer anderen Zelle über Rückkopplung in jedem Grade i verbunden (III.8c) .
Bei technischen Realisierungen von Inhibitionssystemen wird man in der Regel normierte Bauteile verwenden.
Das hat zur Folge, daß technische Inhibitionssysteme in der Regel gerade den Forderungen (III.8) und (III.8 a - e) genügen werden . Es wird sogar im allgemeinen so sein, daß die zu den Relationen ν_i gehörigen Graphen regulär sind. Wir nennen daher ein Inhibitionsfeld φ vom <u>T - Typ</u> , wenn die Inhibitionsmatrix von φ den Forderungen (III.8) und (III.8 a - e) genügt.
Wir wollen Inhibitionsfelder vom T-Typ im Hinblick auf ihre Stabilität vergleichen. Dazu führen wir folgende Hilfsgröße ein.

Sei also φ IF(A,S) vom T-Typ. Seien ν_i und a_i die zu A gemäß (III.8) und (III.8 a – e) gehörigen Größen. Setze

$$\text{(III.9)} \quad \zeta(\varphi) := ((\nu_1, a_1), \ldots\ldots, (\nu_r, a_r)) \; .$$

Dann gilt folgendes Kriterium für Inhibitionsfelder vom T-Typ .

<u>Kriterium III:</u>

Sei φ IF(A,S) vom T-Typ, sei ferner

$$\zeta(\varphi) = ((\nu_1, a_1), \ldots\ldots, (\nu_r, a_r)) \; .$$

Dann gelten folgende Aussagen

(1) $\quad r(A) \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i \, u(\nu_i) \qquad \left(\bar{u}(\nu_i) := \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\nu(i,j)| \quad (i=1,\ldots,r) \right)$

(2) Sind alle ν_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ regulär, so gilt ?

$$r(A) = \sum_{i=1}^{r} a_i \, u(\nu_i)$$

(3) $\quad \sum_{i=1}^{r} a_i \, u(\nu_i) < 1 \Longrightarrow \varphi$ stabil .

Beweis:

(1): Es gilt

$$(\text{III.10}) \quad \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k \varepsilon \nu(i,j)} 1 \leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i \, u(\nu_i)$$

für $j=1,\ldots,n$.

Dann gilt der Reihe nach (nach Kriterium II)

$$r(A) \leqslant \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{k=1}^{n} (A)_{ij} = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\mathrm{Max}} \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{k \varepsilon \nu(i,j)} 1$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i \, u(\nu_i)$$

(2): In (III.10) steht das Gleichheitszeichen, falls alle ν_i regulär sind. Dann folgt aber sofort die Behauptung (vgl. Beweis von Kriterium I)

(3): folgt nun direkt aus (1) .

Zwischen Inhibitionsfeldern vom T-Typ kann man nun folgende Ordnungsrelation einführen.

Sei φ IF(A,S) und φ' IF(A',S'). φ und φ' seien vom T-Typ.
Seien ferner

$$\zeta(\varphi) = ((\nu_1,a_1),\ldots\ldots,(\nu_r,a_r)) \text{ und}$$

$$\zeta(\varphi') = ((\mu_1,b_1),\ldots\ldots,(\mu_s,b_s)) \;,$$

dann schreiben wir

$$\text{(III.11)} \quad \varphi \prec \varphi' \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ll} (1)\ r \leqslant s & \\ (2)\ \nu_i \subseteq \mu_i & (1 \leqslant i \leqslant r) \\ (3)\ a_i \leqslant b_i & (1 \leqslant i \leqslant r) \end{array} \right)$$

Wir vergleichen Inhibitionsfelder vom T-Typ also im Hinblick auf die "Koppelweite " (1), auf die "Dichte" der Kopplungen (2) und im Hinblick auf die "Stärke" der Kopplungen (3) .

Nach |5| gilt nun für nichtnegative Matrizen , die in der Relation $0 \leqslant A \leqslant A'$ stehen : $r(A) \leqslant r(A')$.

Also folgt: Seien φ und φ' vom T-Typ

$$\varphi \prec \varphi' \Longrightarrow r(A) \leqslant r(A'),$$

wenn A und A' die zugehörigen Inhibitionsmatrizen sind.
Diese Aussage führt zu einem interessanten Ergebnis, wenn man Inhibitionsfelder mit Schwellenmatrix 0 betrachtet.
Für diese gilt nämlich der folgende Satz.

<u>Satz III.5:</u> Sei φ IF(A,0).
φ ist dann und nur dann stabil,wenn $r(A) < 1$ ist.

<u>Beweis:</u> (indirekt)

Wir haben zu zeigen, daß aus "φ stabil" folgt, daß $r(A) \neq 1$ ist (vgl. Satz III.3 und Satz III.4).

Wir nehmen also im Gegensatz zur Behauptung an, daß φ stabil und $r(A) = 1$ ist.

Nach den Sätzen von Perron und Frobenius (vgl |4| und |5|) ist nun $r(A)$ Eigenwert von A, zu dem ein Eigenvektor F mit $F \geqslant 0$ gehört. Nun gilt einerseits

$$\varphi(F)(F) = \mathrm{pos}(F - A\ \mathrm{pos}(F)) = \mathrm{pos}((E-A)F) = \mathrm{pos}(0) = 0$$

und andrerseits

$$\varphi(F)(0) = F \quad .$$

Hieraus folgt $- F \neq 0 -$, daß φ in F nicht stabil ist.

Das aber ist ein Widerspruch.

Aus diesem Satz erhalten wir nun die für Inhibitionsfelder vom T-Typ wichtige Folgerung.

<u>Korollar zu Satz III.5:</u> Seien φ IF(A,0) und φ' IF(A',0) Inhibitionsfelder vom T-Typ. Stehen dann φ und φ' in der Relation $\varphi \prec \varphi'$, so folgt aus der Stabilität von φ' die von φ .

Beweis:

Aus $\varphi < \varphi'$ folgt $r(A) \leq r(A')$. Aus der Stabilität von φ' folgt $r(A') < 1$ (Satz III.5) . Zusammen ergibt sich: $r(A) < 1$. Nach Satz III.3 folgt dann, daß φ stabil ist.

Bemerkung 1:

Dieses Korollar garantiert, daß weder das Ausfallen von Kopplungen noch die Verkleinerung der Inhibitionskoeffizienten an der Stabilität etwas ändert. Ferner erkennt man, daß jedes "Teilinhibitionsfeld " eines stabilen Inhibitionsfeldes vom T-Typ wieder stabil ist. Vergrößerung von Inhibitionskoeffizienten kann allerdings Instabilitäten nach sich ziehen. Es hat sich nun aber experimentell gezeigt, daß es günstig im Hinblick auf die Kontrastverschärfung ist, wenn der Spektralradius der Inhibitionsmatrix möglichst groß ist. Im Hinblick auf Schwankungen in den Inhibitionskoeffizienten müssen also Einrichtungen geschaffen werden, die eine Vergrößerunng der Inhibitionskoeffizienten dann unmöglich machen, wenn der Spektralradius der Inhibitionsmatrix nahe bei 1 liegt.

Der Satz III.5 hat noch weitere interessante Konsequenzen.

Bemerkung 2: Betrachte ein Inhibitionsfeld φ und den Stabilitätsbereich $\omega(\varphi)$. Ist dann der Spektralradius

der Inhibitionsmatrix kleiner als 1, so ist $\omega(\varphi) = \mathbb{R}^n$. Wünscht man nun, Inhibitionsfelder zu verwenden, für die die obige Aussage nicht zutrifft, so muß man folgendes Problem lösen. Es darf nicht sein, daß kleine Schwankungen in einer Eingangsgröße $X\varepsilon\omega(\varphi)$ zu Instabilitäten führt. Man wird also fordern, daß $\omega(\varphi)$ offen ist, wenn φ brauchbar sein soll. Das Problem liegt nun darin, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $\omega(\varphi)$ offen ist. Betrachten wir nun speziell Inhibitionsfelder mit Schwellenmatrix 0 , also φ IF(A,0) . Im Beweis von Satz III.5 hatten wir gezeigt, daß für einen zu r(A) gehörigen Eigenvektor F mit $F \geqslant 0$ gilt:
φ ist in F nicht stabil, falls r(A) = 1 ist. Man erkennt nun ohne Schwierigkeit mit dem gleichen Schluß, daß diese Aussage auch richtig bleibt, wenn $r(A) \geqslant 1$ ist. Nun gibt es aber in der Umgebung von 0 unendlich viele solcher F . Man erhält also die Aussage:
In jeder Umgebung von 0 gibt es ein F, so daß φ in F nicht stabil ist.
Es ist klar,daß φ in 0 stabil ist. Dann haben wir aber bewiesen, daß $\omega(\varphi)$ nicht offen ist, falls $r(A) \geqslant 1$.
Zusammen mit der obigen Bemerkung ergibt sich dann folgende Aussage: Sei φ IF(A,0)
$\omega(\varphi)$ ist dann und nur dann offen, wenn φ stabil ist.

<u>Bemerkung 3:</u> Die einfachste Operation zwischen Inhibitionsfeldern ist das "Nebeneinanderstellen ", d.h. die direkte Summe. Wir definieren: Sei φ IF(A,0) und φ' IF(A',0). Dann ist $\varphi \oplus \varphi'$ IF$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix}, 0 \right)$.

Nun gilt $r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \right) = \operatorname{Max} \left\{ r(A), r(A') \right\}$. Damit garantiert uns Satz III.5, daß mit φ und φ' auch $\varphi \oplus \varphi'$ stabil ist.

Wir diskutieren einen weiteren Typ von Inhibitionsfeldern. Sei φ IF(A,S) . Wir nehmen an, daß die Sehzellen seriell angeordnet und nur Nachbarn gekoppelt seien. Dann hat A die Form

$$\text{(III.12)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & & & & \\ a_1 & 0 & b_2 & & & \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-2} & 0 & b_{n-1} \\ & & & 0 & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

mit reellen nichtnegativen Zahlen a_i und b_i $(i=1,\ldots,n-1)$

(A ist also eine <u>Jacobische Matrix</u> (|7|))

Dann gilt für r(A) nach |7| folgende Abschätzung

$$\text{(III.12a)} \quad 2 \operatorname*{Min}_{|i-j|=1} (A)_{ij} \cos \frac{\pi}{n+1} \leqslant r(A) \leqslant 2 \operatorname*{Max}_{|i-j|=1} (A)_{ij} \cos \frac{\pi}{n+1}$$

Damit gewinnen wir das folgende Kriterium

<u>Kriterium IV :</u> Sei φ IF(A,S). Für die Matrix A gelte

$$(A)_{ij} = 0 \text{ für } | i-j | \geq 2 .$$

Dann gelten folgende beiden Aussagen

(1) Ist $2 \cdot \underset{|i-j|=1}{\mathrm{Max}} (A)_{ij} \cos \frac{\pi}{n+1} < 1$, so ist φ stabil.

(2) Ist $2 \cdot \underset{|i-j|=1}{\mathrm{Min}} (A)_{ij} \cos \frac{\pi}{n+1} > 1$, so ist φ nicht stabil.

Zum Abschluß dieses Paragraphens wollen wir den Satz III.3 auf stetige, stückweise affine Abbildungen verallgemeinern. Sei f: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, stückweise affine Abbildung. Wir interessieren uns für zu f gehörige maximale konvexe Partitionen. Sei P eine derartige Partition. Dann gilt:

(III.13) $\quad \overset{o}{p} = \widetilde{\overset{o}{p}}$ für alle $p \varepsilon$ P

und

(III.13a) Seien $p_1, \ldots, p_r \in P$ $(r \geqslant 2)$ paarweise verschieden und so beschaffen, daß man eine affine Abbildung $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g/p_i = f/p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ wählen kann, so ist $\bigsqcup\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} p_i$ nicht konvex.

Man überlegt sich leicht, daß die Forderungen (III.13) und (III.13a) auch hinreichend für die Maximalität von P sind. Es gibt aber im Allgemeinen mehrere solche maximale Partitionen. Wegen (III.13) ist aber die zu $p \in P$ gehörige affine Abbildung f_p durch die Forderung $f_p/p = f/p$ eindeutig bestimmt.

Setze

(III.13b) $$\gamma(P,f) := \{ g \mid g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ affin, es existiert } p \in P \text{ mit } g/p = f/p \}$$

Sei nun Q eine weitere maximale, zu f gehörige, konvexe Partition. Dann überzeugt man sich, daß gilt:

(III.13c) $| P | = | Q |$ $\quad$ ($| P |$ die Mächtigkeit von P)

und

(III.13d) $\gamma(P,f) = \gamma(Q,f)$.

Wir wollen nun f eine Matrix A(f) zuordnen, die die Rolle von A in Satz III.3 übernimmt. Dazu definieren wir folgende Verknüpfung zwischen Matrizen A und B $\varepsilon\ A_{n,n}$

(III.13e) $$A \odot B := \left(\mathrm{Max}\left\{(A)_{i,k},(B)_{i,k}\right\}\right)_{i,k=1}^{n} \quad .$$

Diese Verknüpfung ist assoziativ,kommutativ und absorbierend. Dann können wir für $A_1 \odot \ldots\ldots\ldots \odot A_r$ $(A_i \varepsilon A_{n,n})$ $(1 \leq i \leq r)$ auch schreiben $\bigodot_{i=1}^{r} A_i$.

Sei P maximale,konvexe,zu f gehörige Partition, seien ferner f_p mit $p \varepsilon P$ die zu f gehörigen affinen Abbildungen. Dann ist f_p bei Auszeichnung der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$ eindeutig be~~s~~timmt durch ein Paar $(F_p,A_p)\ \varepsilon\ \mathbb{R}^n \times A_{n,n}$. ($A_p$ ist die zu f_p gehörige Matrix,F_p die zu f_p gehörige Inhomogenität (bei Auszeichnung der kanonischen Basis im $\mathbb{R}^n$)). Setze nun

(III.13f) $$A(f) := \bigodot_{p \varepsilon P} |A_p| \quad .$$

Betrachte $g \varepsilon\ \gamma(P,f)$. Dann ist g bestimmt durch $(F_g,A_g)\varepsilon$ $\mathbb{R}^n \times A_{n,n}$.

Wegen des Absorptionsgesetzes gilt dann

$$\text{(III. 13g)} \quad A(f) = \bigodot_{g \varepsilon \gamma(P,f)} | A_g | \ .$$

Damit ist bewiesen, daβ A(f) unabhängig von der Auswahl von der maximalen, konvexen, zu f gehörigen Partition ist. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

<u>Satz III.6 :</u>

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige, stückweise affine Abbildung. Ist dann $r(A(f)) < 1$, so konvergiert jede Iterationsfolge von f gegen einen Fixpunkt von f. Darüberhinaus ist der Fixpunkt von f eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u>

Wir wollen den Banach'schen Fixpunktssatz anwenden.

(1) Wir schätzen $| f(Y) - f(Y') |$ $(Y,Y' \varepsilon \mathbb{R}^n)$ ab. Dazu betrachte die Verbindungsstrecke von Y nach Y' $\overline{Y\,Y'}$.

Dann gibt es

$$p_o, \ldots\ldots, p_N$$

mit $p_i \varepsilon P$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$, so daß folgendes gilt:

Es gibt Punkte $Y_o, Y_1, \ldots\ldots, Y_N, Y_{N+1}$ ε $\overline{YY'}$ mit

$$Y_o = Y \varepsilon p_o \text{ , } Y_{N+1} = Y' \varepsilon p_N \text{ und}$$

$$Y_i \varepsilon \bar{p}_i \sqcap \bar{p}_{i-1} \quad (1 \leqslant i \leqslant N-1) \text{ .}$$

(Wegen der Konvexität der p_i gilt nämlich $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ $(0 \leqslant i,j \leqslant N)$)

Nun gibt es aber reelle Zahlen

$$0 = t_o < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = 1$$

mit

$$Y_i = Y + t_i(Y' - Y) \quad (0 \leqslant i \leqslant N+1) \text{ .}$$

Ferner: Y_i ε Rand $p_i \sqcap$ Rand p_{i-1} $(i=1,\ldots.,N)$.

Aus der Stetigkeit von f, folgt dann

$$f_{p_i}(Y)_i = f_{p_{i-1}}(Y_i) \quad (i=1,\ldots.,N)$$

(Beachte die Stetigkeit affiner Abbildungen)

Dann gilt aber der Reihe nach

$$| f(Y) - f(Y') | = \left| \sum_{i=0}^{N} f(Y_i) - f(Y_{i+1}) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} | f(Y_i) - f(Y_{i+1}) |$$

$$= \sum_{i=0}^{N} | f_{p_i}(Y_i) - f_{p_i}(Y_{i+1}) |$$

$$= \sum_{i=0}^{N} | F_{p_i} + A_{p_i} Y_i - F_{p_i} - A_{p_i} Y_{i+1} |$$

$$= \sum_{i=0}^{N} | A_{p_i}(Y_i - Y_{i+1}) |$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} |A_{p_i}| |Y_i - Y_{i+1}|$$

$$\leqslant |A(f)| \sum_{i=0}^{N} | Y_i - Y_{i+1} |$$

$$= A(f)\sum_{i=0}^{N} | t_i - t_{i+1} | \; | Y_o - Y_N |$$

$$= \sum_{i=0}^{N} (t_{i+1} - t_i) \; A(f) \; | Y_o - Y_N |$$

$$= A(f) \; | Y - Y' | \; .$$

(2) Da $r(A(f)) < 1$, kann man $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auch noch

$$r(A(f) + \varepsilon H) < 1 \text{ ist mit } (H)_{ij} = 1 \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n) \; .$$

Da $A(f)$ nichtnegativ ist, ist $A' = A(f) + \varepsilon H$ irreduzibel. Dann gibt es nach |5| eine Matrixnorm $|| \quad ||^{(m)}_{A'}$ und eine monotone ,zu $|| \quad ||^{(m)}_{A'}$ konsistente Vektornorm $|| \quad ||_{A'}$ mit $|| A' ||^{(m)}_{A'} = r(A')$.

Darüberhinaus liefert die durch $|| \quad ||_{A'}$ induzierte Metrik die gleiche Topologie wie die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$. Daher ist der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik, die durch $|| \quad ||_{A'}$ induziert wird, ein Banachraum.

Mithilfe von (1) und der Monotonie von $\| \quad \|_{A'}$ weisen wir nun leicht die Kontraktionsbedingung nach:

$$\begin{aligned}
\| f(Y) - f(Y') \|_{A'} &= \| \, |f(Y) - f(Y')| \, \|_{A'} \\
&\leqslant \| A(f) \, |Y - Y'| \, \|_{A'} \\
&\leqslant \| A' \, |Y - Y'| \, \|_{A'} \\
&\leqslant \| A' \|^{(m)}_{A'} \, \| \, |Y-Y'| \, \|_{A'} \\
&= r(A') \, \| Y - Y' \|_{A'}
\end{aligned}$$

Da nun $r(A') < 1$ ist, ist die Kontraktionsbedingung erfüllt.

Dann liefert der Banach'sche Fixpunktsatz die Behauptung.

IV. Die äußere Stabilität von Inhibitionsfeldern

Die zu φ IF(A,S) gehörige Transformation I_φ ist eine stetige, stückweise affine Abbildung. $I_\varphi / \mathbb{R}^{n^+}$ ist nicht injektiv, jedoch gilt $I_\varphi(\mathbb{R}^{n^+}) = \mathbb{R}^{n^+}$. Im Hinblick auf die auftretenden Parameter A und S ist φ stabil, falls $r(A) < 1$ ist, d.h. kleine Variationen von A und S führen bei festem $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ nur zu kleinen Schwankungen von $I_\varphi(X)$.

Sei φ IF(A,S). Im Paragraphen III hatten wir φ eine Transformation I_φ: $\omega(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zugeordnet ((III.3)). Diese Transformation ist die beim Sehvorgang interessierende Transformation. In diesem Paragraphen sollen nun einfache Eigenschaften von I_φ diskutiert werden. Aus der Definition von I_φ liest man sofort folgende trivialen Eigenschaften ab.

(IV.1) Sei $C>0, C\varepsilon\mathbb{R}$, dann gilt: $I_\varphi(Ce_i) = Ce_i \quad (1 \leq i \leq n)$

(IV.1a) $X\varepsilon\ \omega(\varphi)$: $\quad I_\varphi(X) = I_\varphi(\mathrm{pos}(X))$

(IV.1b) $X\varepsilon\ \omega(\varphi)$: $I_\varphi(X) = 0 \iff X \leq 0$.

(IV.1c) $X\varepsilon\omega(\varphi)$: $0 \leqslant I_\varphi(X) \leqslant pos(X)$

Als nächstes untersuchen wir die Frage nach der Injektivität und Surjektivität von I_φ eingeschränkt auf $\mathbb{R}^{n^+}$.
Dabei nehmen wir von jetzt ab an, daß $r(A) < 1$ ist.

Betrachte folgende Abbildung $\varphi' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{f \mid f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n\}$ definiert durch

(IV.2) $(\varphi'(X)(Y))_i = (X)_i - (A\ pos(Y-S^Te_i))_i$

$(X, Y\varepsilon\mathbb{R}^n,\ i=1,\ldots,n)$.

Man zeigt leicht – wie für φ – , daß für alle $X\varepsilon\mathbb{R}^n$
$\varphi'(X)$ eine stetige, stückweise affine Abbildung ist.
? Dann gilt aber auch für alle $X\varepsilon\ \mathbb{R}^n$ $A(\varphi'(X)) \leqslant A$, also
$r(A(\varphi(X))) \leqslant r(A) < 1$. Dann folgt aber nach Satz III.6:

Durch die Festsetzung

(IV.2a) $\varphi'(X)(I'_\varphi(X)) = I'_\varphi(X)$ $(X\varepsilon\mathbb{R}^n)$

wird eine Abbildung $I'_\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt.

Betrachte nun ferner die durch

(IV.2b) $(I''_\varphi(Y))_i = (Y)_i + (A\ pos(Y-S^T e_i))_i$

$(Y \varepsilon IR^n,\ i=1,\dots,n)$

definierte Abbildung $I''_\varphi : IR^n \longrightarrow IR^n$.

Sei $Y \varepsilon IR^n$. Dann gilt:

$\varphi'(I''_\varphi(Y))(Y) = Y$, also: $I'_\varphi\ (I''_\varphi(Y)) = Y\ (Y \varepsilon IR^n)$.

Andrerseits:

$I''_\varphi(I'_\varphi\ (X)) = X\ (X \varepsilon IR^n)$.

Hieraus folgt:

(IV.2c) $I''_\varphi = (I'_\varphi\ )^{-1}$.

Es gelten nun folgende Aussagen

<u>Satz IV.1</u>: Sei φ IF(A,S) und $r(A) < 1$. Dann gilt:

(1) $X \varepsilon IR^n$: $I_\varphi(X) = pos(I'_\varphi\ (X))$

(2) $I_\varphi(IR^{n^+}) = IR^{n^+}$

(3) I_φ / IR^{n^+} ist dann und nur dann injektiv, wenn $A = 0$ ist.

Beweis:

(1) Sei $X \varepsilon \mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\operatorname{pos}(I'_\varphi(X))_i = \operatorname{pos}((X)_i - (A \operatorname{pos}(I'_\varphi (X) - S^T e_i))_i)$$

$$= \operatorname{pos}((X)_i - (A \operatorname{pos}(\operatorname{pos}(I'_\varphi (X)) - S^T e_i))_i)$$

(n. Lemma II.1)

$(i=1,\ldots,n)$.

Also folgt:

$$I_\varphi(X) = \operatorname{pos}(I'_\varphi (X)) \ .$$

(2) Sei $Y \varepsilon \mathbb{R}^{n^+}$, dann gibt es, da I'_φ bijektiv ist, ein $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ mit $I'_\varphi(X) = Y$.

Nach (1) folgt nun aber: $\operatorname{pos}(I'_\varphi (X)) = I_\varphi(X) = Y$.

Ferner gilt: $I_\varphi(X) = I_\varphi(\operatorname{pos}(X))$. $\operatorname{pos}(X)$ ist aber aus $\mathbb{R}^{n^+}$, also folgt (2) .

(3) Ist $A = 0$, so gilt: $I_\varphi(X) = \operatorname{pos}(X)$. Daraus folgt aber, daß $I_\varphi / \mathbb{R}^{n^+}$ injektiv ist. Wir zeigen die Umkehrung.

Dazu nehmen wir an, daß $I_\varphi / \mathbb{R}^{n^+}$ injektiv ist, aber

$A \neq 0$ ist. Dann gibt es i und j mit $(A)_{ij} > 0$.

Betrachte nun eine reelle Zahl $c > 0$ mit $c - (S)_{ij} > 0$

für alle $i,j=1,\dots,n$. Betrachte ferner ce_j.

Dann gilt:

$$(I'_\varphi)^{-1}(ce_j) = ce_j + \sum_{\substack{i \neq j \\ i=1}}^{n} (A)_{ij}\,(c - (S)_{ij})\,e_i \neq ce_j \; .$$

Dann folgt aber

$$I_\varphi(I'^{-1}_\varphi(ce_j)) = \operatorname{pos}\,(I'_\varphi(I'^{-1}_\varphi(ce_j)) = ce_j \; .$$

Andrerseits: $I_\varphi(ce_j) = ce_j$. Das ergibt aber einen

Widerspruch.

Wir versuchen also nun, einen Bereich, der möglichst groß ist, anzugeben, auf dem I_φ injektiv ist.

<u>Satz IV.2:</u> Sei φ IF(A,S) und sei $r(A) < 1$.

(1) Setzt man $in(\varphi) := \{ X \varepsilon \mathbb{R}^{n^+} \mid I'_\varphi(X) \geq 0 \}$, so

ist $I_\varphi / in(\varphi)$ injektiv.

(2) Zu jedem $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ existiert ein $X' \varepsilon\ in(\varphi)$ mit

$I_\varphi(X) = I_\varphi(X')$.

Beweis:

(1) Auf $in(\varphi)$ gilt: $I_\varphi / in(\varphi) = I'_\varphi / in(\varphi)$. Daraus folgt sofort die Behauptung.

(2) Setze $Y = I_\varphi(X)$ und $X' = {I'_\varphi}^{-1}(Y)$. Dann gilt:

$I'_\varphi(X') = Y \geqslant 0$, also: $X' \varepsilon\ in(\varphi)$.

Ferner: $I_\varphi(X') = I'_\varphi(X') = Y = I_\varphi(X)$.

Bemerkung:
Sei φ IF(A,S) und $\mathfrak{r}(A) < 1$, dann ist $in(\varphi)$ Vereinigung von endlich vielen konvexen Menge. Ist insbesondere $S = 0$, so ist $in(\varphi) = \{X \mid (E+A)^{-1}X \geqslant 0\}$.

I'_φ hat eine spezielle Monotonieeigenschaft.

Da ${I'_\varphi}^{-1}$ eine monoton wachsende Abbildung ist, gilt

Lemma IV.1: Sei φ IF(A,S):

$$I'_\varphi(X) \leq I'_\varphi(X') \Rightarrow X \leq X' .$$

Wir wollen nun nachweisen, daß I_φ eine stückweise affine Abbildung ist.

Satz IV.3: Sei φ IF(A,S) und $r(A) < 1$. Dann ist I_φ eine stückweise affine Abbildung.

Beeeis: Wir zeigen, daß I'_φ eine stückweise affine Abbildung ist, dann folgt die Behauptung nach Satz IV.1 .

(1) Definiere auf dem $\mathbb{R}^n$ folgende Aequivalenzrelation.

$$X, X' \in \mathbb{R}^n: X \wedge X' \underset{df}{\Longleftrightarrow} ((I'_\varphi(X))_j \leq (S)_{ij} \Longleftrightarrow (I'_\varphi(X'))_j \leq (S)_{ij})$$

(2) Wir zeigen:

$$X \wedge X', 0 \leq p \leq 1 \Rightarrow pX + (1-p)X' \wedge X .$$

Beweis: Setze $Y = p\, I'_\varphi(X) + (1-p) I'_\varphi(X')$.

Dann verifiziert man sofort:

$$(Y)_j \leq (S)_{ij} \Longleftrightarrow (I'_\varphi(X))_j \leq (S)_{ij} .$$

Nun gilt aber:

$$\varphi'(pX + (1-p)X')(Y)_i = p(X)_i + (1-p)(X')_i -$$

$$(A(\ pos(\ p\ I'_\varphi(X) + (1-p)I'_\varphi(X') - S^T e_i))_i$$

$$= p((X)_i - (A\ (pos(\ I'_\varphi(X) - S^T e_i))_i)$$

$$+(1-p)\ ((X)_i - (A(pos(I'_\varphi(X') - S^T e_i)))_i)$$

(nach der obigen Bemerkung)

$$= p\ I'_\varphi(X) + (1-p)\ I'_\varphi(X') = Y\ .$$

Also folgt:

$$I'_\varphi(pX + (1-p)X') = p\ I'_\varphi + (1-p)\ I'_\varphi(X')$$

Das aber war zu zeigen.

(3) Sei $X \varepsilon \mathbb{R}^n$. Definiere Matrizen $P_i(X)$ $(i=1,\dots,n)$

durch $(P_i)_{ij} = 0$, falls $i \neq j$.

$(P_i)_{jj} = 1$, falls $(I'_\varphi(X))_j > (S)_{ij}$

$(P_i)_{jj} = 0$, falls $(I'_\varphi(X))_j \leq (S)_{ij}$

mit $P_i := P_i(X)$.

Stehen X und X' in der Relation $X \wedge X'$, so gilt:

$P_i(X) = P_i(X')$ für $i=1,\ldots,n$.

Dann gilt für $X \varepsilon \mathbb{R}^n$:

$$(I'_\varphi\ (X))_i + (AP_i I'_\varphi(X))_i = (X)_i + ((AP_i S^T) e_i)_i \ .$$

$(i=1,\ldots,n)$

Hieraus folgt aber:

$$I'_\varphi\ (X) + A(X)\ I'_\varphi(X) = X + F(X)\ ,$$

wobei gilt:

$$X \wedge X' \Rightarrow A(X) = A(X'),\ F(X) = F(X')$$

und

$$0 \leq A(X) \leq A\ .$$

Aus der letzteren Beziehung folgt aber: $r(A(X)) < 1$.

Dann folgt aber

$$I'_\varphi(X) = (E + A(X))^{-1}(X + F(X)) \quad .$$

Nun folgt aber aus (1) und (2),daß I'_{φ} stückweise affine Abbildung ist. Das aber war zu zeigen.

Bevor wir uns den angekündigten Variationsproblemen zuwenden, wollen wir noch einige Bemerkungen über Inhibitionsfelder mit Schwellenmatrix 0 machen.

Ist φ IF(A,0), so schreiben wir auch kurz:" φIF(A)".

Wir führen zwei Operationen zwischen Inhibitionsfeldern mit Schwellenmatrix 0 ein.

Seien φ IF(A) und φ'IF(A'). Dann ist

(IV.3) $\varphi + \varphi'$ IF(A+A') .

Man erkennt sofort, daß aus der Stabilität von $\varphi+\varphi'$ die Stabilität von φ und φ' folgt.

Sei φ IF(A) und $c \geqslant 0$, $c \varepsilon \mathbb{R}$. Dann ist

(IV.3a) ($c\varphi$) IF(cA) .

Ist $c > 1$, so folgt aus der Stabilität von $c\varphi$ die von φ, ist $c \leqslant 1$, so folgt aus der Stabilität von φ die von $c\varphi$.

Es gilt nun folgender Hilfssatz.

<u>Lemma IV.2:</u>

(1) Seien φ IF(A) und φ' IF(A') stabil, dann gilt:

$$I_{\varphi \oplus \varphi'}(X) = \begin{bmatrix} I_\varphi(X_1) \\ I_{\varphi'}(X_2) \end{bmatrix} \text{, wenn } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \text{ ist.}$$

(2) Sei φ stabiles IF(A) und $c \geqslant 0$ reelle Zahl, dann gilt:

$$I_\varphi(cX) = c\, I_\varphi(X) \qquad (X \varepsilon \mathbb{R}^n)$$

(3) Seien φ IF(A) und φ' IF(A'), sei ferner $\varphi+\varphi'$ stabil, dann gilt für $X \varepsilon\ \mathbb{R}^n$:

$$I_{\varphi+\varphi'}(X) = \mathrm{pos}((A\mathrm{pos} + I_{\varphi'}^{\prime\,-1})^{-1}(X)) .$$

(Beachte: $(A\ \mathrm{pos})(Y) = A \cdot \mathrm{pos}(Y)$ für $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$)

<u>Beweis:</u>

(1) ist trivial

(2) $c\, I'_\varphi(X)_i = c(X)_i - (A\ c\ \mathrm{pos}(I'_\varphi(X)))_i =$

$$= (cX)_i - (A\ \mathrm{pos}(cI'_\varphi(X)))_i \quad (i=1,\dots,n).$$

Also folgt: $I'_\varphi\,(cX) = c\ I'_\varphi\,(X)$.

Hieraus folgt aber sofort die Behauptung für I_φ .

(3)

Es gilt der Reihe nach

$$I'_{\varphi+\varphi'}(X) = X - (A+A')\ \mathrm{pos}(I'_{\varphi+\varphi'}(X))$$

$$= X - A\ \mathrm{pos}(I'_{\varphi+\varphi'}(X)) - A'\ \mathrm{pos}(I'_{\varphi+\varphi'}(X)) .$$

Dann folgt:

$$I'_{\varphi'}\,(X - A\ \mathrm{pos}(I'_{\varphi+\varphi'}(X))) = I'_{\varphi+\varphi'}(X) .$$

Dann ergibt sich aber:

$$(A\mathrm{pos} + I'^{\,-1}_{\varphi'}) \circ (I'_{\varphi+\varphi'}(X)) = X .$$

Hieraus aber folgt:

$$I'_{\varphi+\varphi'}(X) = (A \text{ pos} + I'^{-1}_{\varphi'})^{-1}(X) .$$

Dann ergibt sich aber die Behauptung.

Wir kommen nunmehr zu den angekündigten Variationsproblemen bei Inhibitionsfeldern.
Alle unsere Variationssätze werden sich aus folgender fundamentaler Abschätzung ergeben.

<u>Satz IV.4:</u> Sei φ IF(A,S) und φ_1 IF(A_1,S_1). Dann gilt

für alle $X,X_1,Y,Y_1 \varepsilon \mathbb{R}^n$ die Abschätzung:

$$\text{(IV.4)} \quad | \varphi(X)(Y) - \varphi_1(X_1)(Y_1) | \leq$$

$$|X-X_1|+|A-A_1|(|Y|+Se)+|A_1||Y-Y_1|+|A_1||S^T-S_1^T| \; e .$$

<u>Beweis:</u> Für alle i=1,...,n gilt der Reihe nach

$$|\varphi(X)(Y) - \varphi_1(X_1)(Y_1)| \underset{i}{=} | \text{pos}(\varphi'(X)(Y)) - \text{pos}(\varphi_1'(X_1)(Y_1))|_i$$

$\leqslant |\ \varphi'(X)(Y) - \varphi_1'(X_1)(Y_1)\ |_i$
(Lemma II.1)
$\leqslant |X-X_1|_i + |\ A\ \mathrm{pos}(Y - S^T e_i) - A_1\ \mathrm{pos}(Y_1 - S_1^T\ e_i)\ |_i$
(II.5k)
$\leqslant |X-X_1|_i + (|A-A_1||\ \mathrm{pos}(Y- S^T e_i)\ |\ )_i + (|A_1||\mathrm{pos}(Y-S^T)e_i)-$
(II.5,k,o) $\mathrm{pos}(Y_1- S_1^T e_i)\ |)_i$
$\leqslant |X-X_1|_i + (|A-A_1|(|Y|+S^T e_i))_i + (|A_1||\ Y- S^T e_i- Y_1- S_1^T\ e_i|)_i$
(II.5 b,k)(Lemma II.1)
$\leqslant |X-X_1|_i + (|A-A_1|(|Y|+S^T e))_i + |A_1||Y\Delta\ Y_1|_i + (|A_1||S^T-S_1^T\ |e)_i$
(II.5k)

Damit ist alles bewiesen.

Wir wollen nun zuerst die Variation bezüglich der Eingangsgröße X untersuchen. Es gilt

<u>Satz IV.5</u>:

Sei φ IF(A,S),esgelte $r(A) < 1$. Dann gilt folgende Aussage. Für alle $X, X' \varepsilon \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(IV.5)\quad ||\ I_\varphi(X) - I_\varphi(X')\ ||_e \leqslant ||\ (E-A)^{-1}||_e \cdot ||\ X-X'\ ||_e\ .$$

Insbesondere folgt, daß I_φ eine stetige Abbildung ist.

<u>Beweis:</u>

Nach Satz IV.4 gilt für $X, X_1 \varepsilon \mathbb{R}^n$

$$| I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1) | = | \varphi(X)(I_\varphi(X)) - \varphi(X_1)(I_\varphi(X_1)) |$$

$$\leqslant |X-X_1| + |A| \cdot | I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1) |.$$

Hieraus folgt aber

$$(E-A) \; | I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1) | \leqslant |X-X_1| .$$

Da nun $r(A) < 1$ ist, gilt: $(E-A)^{-1} \geqslant 0$.
Also folgt:

$$| I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1) | \leqslant (E-A)^{-1} \; |X-X_1| .$$

Dann folgt aber

$$|| I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1) ||_e = || \, |I_\varphi(X_1) - I_\varphi(X)| \, ||_e$$

$$\leqslant || (E-A)^{-1} |X-X_1| \, ||_e \leqslant || (E-A)^{-1} ||_e \cdot || \, |X-X_1| \, ||_e$$

$$= || (E-A)^{-1} ||_e \cdot || X-X_1 ||_e .$$

<u>Satz IV.6:</u> Sei φ $IF(A,S)$ und φ_1 $IF(A_1,S)$, seien $r(A)$ und $r(A_1) < 1$.

Dann gilt für alle $X \varepsilon IR^n$

$$(IV.6) \quad \| I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) \|_e$$

$$\leqslant \mathrm{Min}(\|(E-A)^{-1}\|_e, \| (E-A_1)^{-1} \|_e) \cdot$$

$$\cdot \| \; |X| + S^Te \; \|_e \; \| A - A_1 \|_e$$

<u>Beweis:</u>

Nach Satz IV.4 gilt für $X \varepsilon IR^n$

$$| I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) | \leqslant |A-A_1|(|I_\varphi(X)| + S^Te) + A_1|I_\varphi(X) - I_\varphi(X_1)|$$

Hieraus folgt aber

$$(E-A_1) \; | I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) | \leqslant | A-A_1 | (|X| + S^Te).$$

Da nun $r(A_1) < 1$ ist, folgt

$$|I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X)| \leqslant (E-A_1)^{-1} |A-A_1| (|X| + S^Te)$$

Nun ergibt sich die Behauptung wie im Beweis von Satz IV.5, wenn man beachtet, daß man die Rolle von A und A_1 vertauschen kann.

Satz IV.7: Sei φ IF(A,S) und φ_1 IF(A,S_1), sei r(A)< 1.

Dann gilt für $X \varepsilon \mathbb{R}^n$

$$(IV.7) \quad \| I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) \|_e \leq \| (E-A)^{-1} \|_e \cdot \| A \|_e \cdot \| S^T - S_1^T \|_e \cdot n^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

Nach Satz IV.4 gilt:

$$| I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) | \leq A | I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) | + |A| \; |S^T - S_1^T| \; e ,$$

also

$$(E-A)^{-1} | I_\varphi(X) - I_{\varphi_1}(X) | \leq A \; |S^T - S_1^T| \; e .$$

Hieraus ergibt sich aber mit der bekannten Schlußweise wie bei den beiden vorhergehenden Sätzen die Behauptung.

Wir ziehen ein Resümee dieser drei Variationssätze.

Ist φ IF(A,S) und $r(A) < 1$, dann ist I_φ stetig im Hinblick auf Variation der Eingangsgrößen, der Inhibitionsmatrix und der Schwellenmatrix. I_φ ist gleichmäßig stetig im Hinblick auf Variation der Eingangsgrößen und der Schwellenmatrix, nicht aber im Hinblick auf Variation der Inhibitionsmatrix.

Zum Abschluß dieses Paragraphens wollen wir noch ein Lemma herleiten, dessen Tragweite erst im anschließenden Paragraphen gewürdigt werden kann.
Sei φ stabiles IF(A,S), betrachte dann die Folge

$$X,\ I_\varphi(X),\ I_\varphi^2(X),\ I_\varphi^3(X)\ ,\ \ldots\ldots .$$

Man hat nun experiementell festgestellt, daß mehrmaliges Anwenden eines Inhibitionsfeldes die Kontrastverschärfung verbessert. Wie gut man durch Iteration von I_φ maximal verbessern kann, wird durch

$$\lim_k\ I_\varphi^k\ (X)$$

festgelegt, sofern der Limes existiert.
Wir behaupten nun gerade

<u>Lemma IV.3:</u> Sei φ stabiles IF(A,S), dann gilt für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$:

Es existiert

$$\lim_k I_\varphi^k (X) \quad .$$

<u>Beweis:</u>

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $X \geqslant 0$ ist. Dann gilt:

$$0 \leqslant I_\varphi(X) \leqslant X \ .$$

Durch Induktion über k sieht man dann sofort,daß gilt:

$$0 \leqslant I_\varphi^k (X) \leqslant I_\varphi^{k-1}(X) \qquad (k=1,2,3,\dots\ )$$

Also ist die Folge $(I_\varphi^k (X))_{k=0,1,2,..}$ monoton fallend

und nach unten beschränkt. Dann folgt sofort die Behauptung.

V. Kontrastverschärfung bei Inhibitionsfeldern mit Nachbarkopplungen

Bei Inhibitionsfeldern mit Nachbarkopplungen wird das Auftreten von Mach'schen Linien bei serieller Anordnung der Sehzellen für treppenförmige Eingangsverteilungen nachgewiesen. Die Mach'schen Linien bilden sich hierbei an den Sprungstellen und den Rändern der Sehzellenreihe aus.
Im Falle der ebenen Verteilung der Sehzellen wird ein Kontrastverschärfungssatz für " punktförmige " Eingangsverteilungen bewiesen . Hierbei wird die erste Mach'sche Linie nachgewiesen.

In diesem Paragraphen wollen wir die kontrastverschärfende Wirkung von Inhibitionsfeldern nachweisen. Wir beschränken uns dabei auf Inhibitionsfelder mit Nachbarkopplungen, wie sie im Paragraphen III definiert wurden.

Im ersten Teil dieses Paragraphens werden wir annehmen, daß die Sehzellen seriell angeordnet sind, im zweiten Teil wird die ebene Anordnung der Sehzellen untersucht. Generell arbeiten wir ohne Schwellen.

Wir betrachten also zunächst Inhibitionsfelder φ von dem Typ φ $\mathrm{IF}(a(J_n + J_n^T))$ mit $a > 0$, $a \varepsilon \mathbb{R}$.

Ferner nehmen wir an, daß φ stets stabil ist.

Es sollen nun die Antworten eines zu einem derartigen Inhibitionsfeld gehörigen Inhibitionssystems auf treppenförmige Eingangsverteilungen $X \varepsilon \mathbb{R}^n$ untersicht werden. (vgl. Abb. V.1)

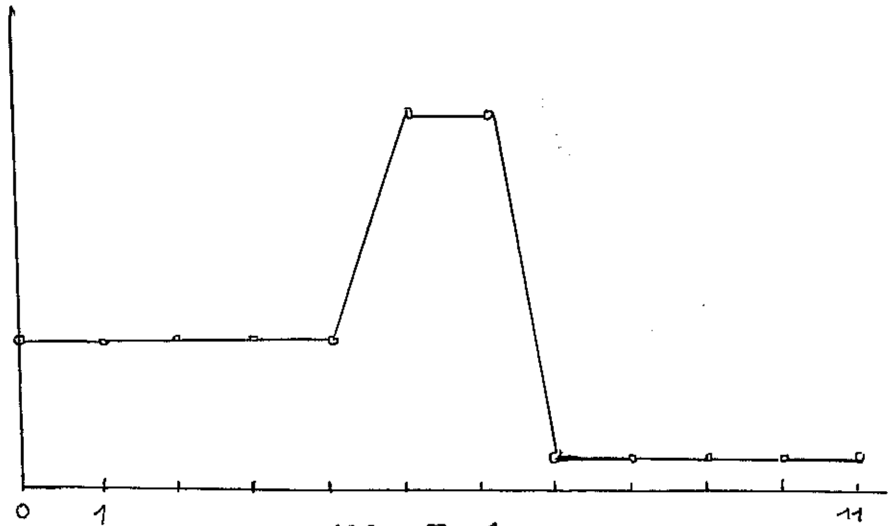


Abb. V. 1

Es ist zweckmäßig,gleich einen allgemeineren Verteilungstyp zu betrachten. Dieser soll wie die in Abb. V.2 aufgetragene Verteilung beschaffen sein.

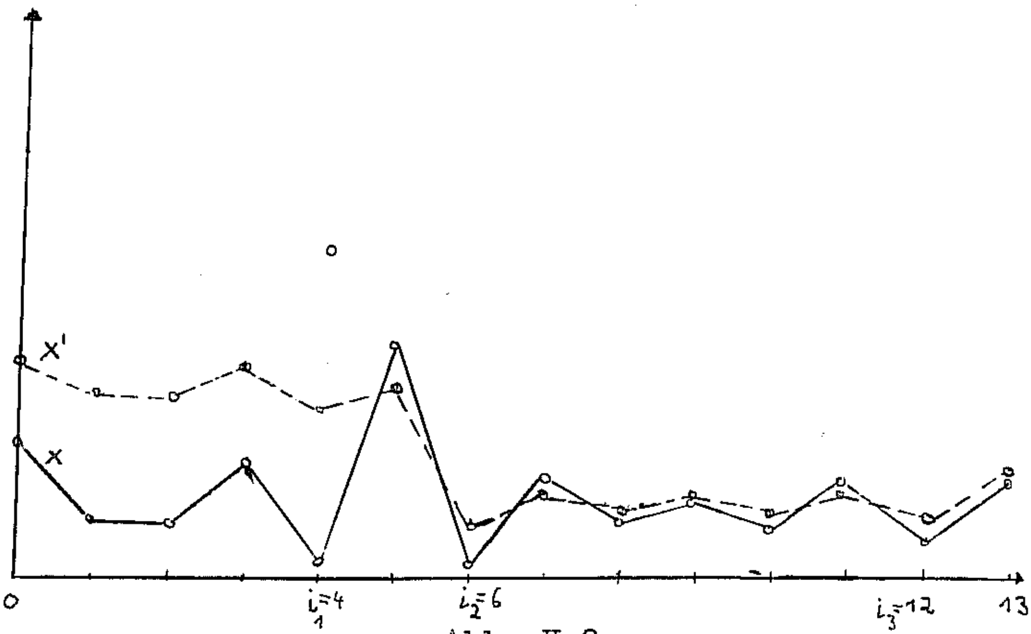


Abb. V.2

Um eine möglichst knappe und suggestive Terminologie bei der Formulierung der zu beweisenden Sätze benutzen zu können, sollen einige Begriffe und Bezeichnungen eingeführt werden.

Seien s und t natürliche Zahlen mit

$$1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n .$$

Dann ist

$$(V.1) \qquad [s,t] := \{1 \leqslant i \leqslant n \mid s \leqslant i \leqslant t\}$$

der <u>Abschnitt</u> zwischen s und t.

Ist s=t, so identifizieren wir $[s,s] = s$.

Betrachte nun $X \varepsilon \mathbb{R}^n$. Wir sagen:

Zwei Abschnitte $[s,t]$ und $[s_1,t_1]$ stehen in der Relation

$$(V.1a) \quad [s,t] \; k(X) \; [s_1,t_1]$$

dann und nur dann, wenn für alle $i \in [s,t]$ und $k \in [s_1,t_1]$ gilt

$$(V.1b) \quad (X)_i \leqslant (X)_k \, .$$

Wir definieren nun

<u>Definition:</u> Sei $X \in \mathbb{R}^n$.

Der Abschnitt $[s,t]$ hat die Eigenschaft $(A_+(X))$, wenn für alle $i=2,4,6,\ldots$ mit $t-i \geqslant s+i$

$$(V.2) \quad s+i-1 \; k(X) \; [s+i,t-i], \quad t-i+1 \; k(X) \; [s+i,t-i]$$

und für alle $i=1,3,5,\ldots$ mit $t-i \geqslant s+i$

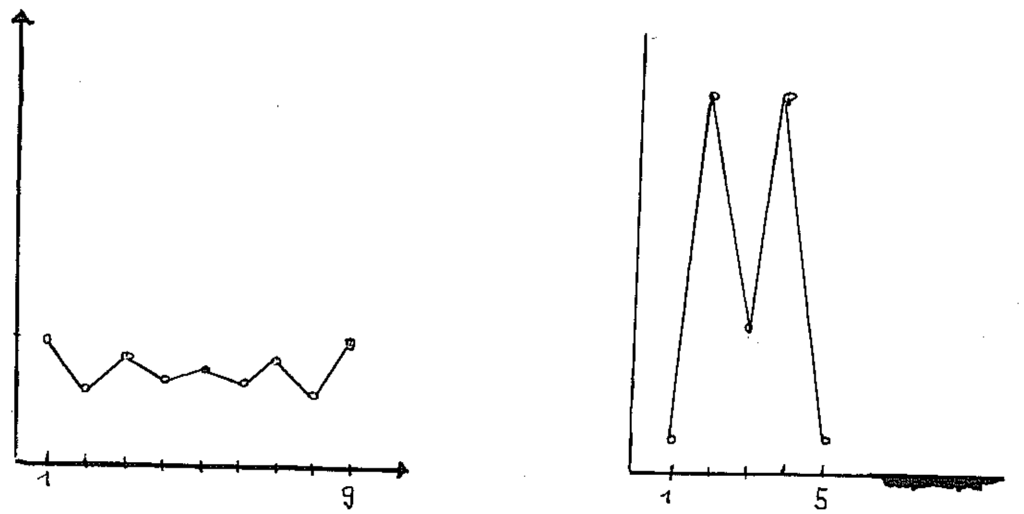
$$(V.2a) \quad [s+i,\, t-i] \; k(X) \; s+i-1, \quad [s+i,t-i] \; k(X) \; t-i+1$$

gilt.

Der Abschnitt $[s,t]$ hat die Eigenschaft $(A_-(X))$, wenn $[s+1,t-1]$ die Eigenschaft $(A_+(X))$ hat und wenn gilt:

(V.2b) $t \; k(X) \; [s+1, t-1]$, $s \; k(X) \; [s+1, t-1]$.

(vgl. Abb. V.3)



$(A_+(X)))$ $(A_-(X))$

Abb. V. 3

Sei nun $[s,t]$ ein Abschnitt mit $(A_+(X))$ und $(A_+(X'))$ für $X, X' \varepsilon \mathbb{R}^n$. Wir sagen:

X ist bezüglich $[s,t]$ <u>profilierter</u> als X' (in Zeichen: $X \, p[s,t] \, X'$), wenn gilt:

(V.3) $x_{s+i-1} - x_k \geqslant x'_{s+i-1} - x'_k$ für alle $k \varepsilon [s+i, t-i]$ und $i = 1,3,5, \ldots.$ mit $t-i \geqslant s+i$

und

(V.3a) $x_k - x_{s+i-1} \geqslant x'_k - x'_{s+i-1}$ für alle $k\varepsilon [s+i, t-i]$

und $i=2,4,6,\ldots$ mit $t-i \geqslant s+i$

und

(V.3b) $x_{t-i+1} - x_k \geqslant x'_{t-i+1} - x'_k$ für alle $k\varepsilon [s+i, t-i]$
und $i=1,3,5,\ldots$ mit $t-i \geqslant s+i$

und

(V.3b) $x_k - x_{t-i+1} \geqslant x'_k - x'_{t-i+1}$ für alle $k\varepsilon | s+i, t-i |$
und $i=2,4,6,\ldots$ mit $t-i \geqslant s+i$.

(Hierbei ist $x_i = (X)_i$ und $x'_i = (X')_i$ $(i=1,\ldots,n)$)

<u>Definition:</u> Seien $1 \leqslant i_1 < \ldots\ldots < i_r \leqslant n$ $(r > 0)$ natürliche Zahlen, dann sagen wir
$X\varepsilon \mathbb{R}^n$ hat die Eigenschaft $(A(i_1,\ldots\ldots,i_r))$, wenn folgendes gilt:

(V.4) $[1, i_1-1], [i_r+1, n]$,
haben $(A_+(X))$,

(V.4a) $[i_j, i_{j+1}]$ haben $(A_-(X))$ für $j=1,\ldots,r-1$

und

(V.4b) i_1 $k(X)$ $[1, i_1-1]$, $i_r k(X)$ $[i_r+1, n]$.

(vgl. hierzu Abb. V. 2)

<u>Definition:</u> Seien $X, X' \in \mathbb{R}^n$, X und X' haben $(A(i_1, \ldots, i_r))$.

Wir sagen: X ist <u>profilierter</u> als X', wenn gilt:

(V.5) $X \; p \; [\, 1,\; i_1-1 \,] \; X'$

$X \; p \; [\, i_r+1,\; n \,] \; X'$ und

$X \; p \; [\, i_j+1, i_{j+1}-1 \,] \; X'$ für $j=1,\ldots,r-1$

und

(V.5a) $x_{i_j-1} - x_{i_j} \geqslant x'_{i_j-1} - x'_{i_j}$ und

$x_{i_j+1} - x_{i_j} \geqslant x'_{i_j+1} - x'_{i_j}$

für $j=1,\ldots,r$.

(Hierbei ist wieder $(X)_i = x_i$ und $(X')_i = x'_i$ für $i=1,\ldots,n$))
(Vergleiche hierzu Abb. V.2: X ist profilierter als X') .

Grob gesprochen bedeutet " X ist profilierter als X' ", daß die Höhenunterschiede zwischen " Bergen " und " Tälern " bei X größer sind als bei X' .

Es gilt nun der folgende Hilfssatz.

<u>Lemma V.1:</u> Sei φ stabiles IF($a(J_n + J_n^T)$), ferner seien $1 \leqslant s \leqslant t \leqslant n$ natürliche Zahlen, dann gilt für alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$, die der Eigenschaft
(1) $t \neq n, s \neq 1 \Rightarrow [\, s-1, t+1 \,]$ hat $(A_-(X))$ und $(A_-(Y))$ oder

(2) $(t,s) = (n,1)$: $[s,t]$ hat $(A_+(X))$ und $(A_+(Y))$ genügen ,

(a) $[s,t]$ hat $(A_+(\varphi'(X)(Y)))$

(b) $\varphi'(X)(Y)$ ist bezgl. $[s,t]$ profilierter als X .

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung für den Fall (V.3), für die anderen Fälle ist ein völlig analoger Beweis wie für den Fall (V.3) zu führen.

Sei also $i=1,3,\ldots$ mit $s+i \leqslant t-i$ und $k \varepsilon [s+i, t-i]$.

(1) $i=1$:

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\varphi'(X)(Y)_s - \varphi'(X)(Y)_k = (X)_s - (X)_k &- a\,\mathrm{pos}((Y)_{s-1}) - \\ &a\,\mathrm{pos}((Y)_{s+1}) + a\,\mathrm{pos}((Y)_{k-1}) \\ &+ a\,\mathrm{pos}((Y)_{k+1})\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt nun

$(Y)_{k-1} \geqslant (Y)_{s+1}$ und $(Y)_{k+1} \geqslant (Y)_{s-1}$.

Hieraus folgt aber

$\mathrm{pos}(Y)_{k-1} \geqslant \mathrm{pos}((Y)_{s+1})$ und $\mathrm{pos}((Y)_{k+1}) \geqslant \mathrm{pos}((Y)_{s-1})$

Dann ergibt sich aber

$$(\varphi'(X)(Y))_s - (\varphi'(X)(Y))_k \geqslant (X)_s - (X)_k \ .$$

(2) $i > 1$:

Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\varphi'(X)(Y))_{s+i-1} - (\varphi'(X)(Y))_k = (X)_{s+i-1} - (X)_k \\ - a\ \mathrm{pos}((Y)_{s+i}) - \\ a\ \mathrm{pos}((Y)_{s+i-2}) + \\ a\ \mathrm{pos}((Y)_{k+1}) + \\ a\ \mathrm{pos}((Y)_{k-1})\end{aligned}$$

Da i ungerade ist, folgt aber nach Voraussetzung $(Y)_{s+i} \leqslant (Y)_{k-1}$ und $(Y)_{s+i-2} \leqslant (Y)_{k+1}$.

Wie unter (1) ergibt sich dann

$$(\varphi'(X)(Y))_{s+i-1} - (\varphi'(X)(Y))_k \geqslant (X)_{s+i-1} - (X)_k \ .$$

Wegen der Voraussetzung über X, folgt dann direkt die Behauptung für den Fall (V.3) . Die übrigen Fälle lassen sich, wie schon oben gesagt, völlig analog diskutieren.

Wir ziehen eine Folgerung aus Lemma V.2.

Folgerung: Sei φ stabiles $\mathbb{IF}(a(J_n+J_n^T))$, sei ferner $1 \leq i \leq n$ eine natürliche Zahl mit $i \neq 2, n-1$, dann gilt für alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$, die der folgenden Eigenschaft genügen:

$[i-2, i+2]$ hat $(A_-(X))$ und $(A_-(Y))$,

(a) $[i-1, i+1]$ hat $(A_+(\varphi'(X)(Y)))$

(b) $\varphi'(X)(Y)$ ist bezüglich $[i-1, i+1]$ profilierter als X .

Beweis: Setze in Lemma V.2 $s=i-1$ und $t=i+1$.

Bemerkung: Ein entsprechender Satz gilt auch für die Fälle $i=2$ und $i=n-1$ mit gewissen Modifizierungen in den Voraussetzungen.

Nun läßt sich unser angestrebter Kontrastverschärfungssatz leicht beweisen.

Satz V.1: Sei φ $\mathbb{IF}(a(J_n + J_n^T))$ stabil $(a>0, a\in\mathbb{R})$.

Für alle $X\in\mathbb{R}^n$, die die Eigenschaft $(A(i_1,\dots,i_r))$ haben, gilt:

(1) $I'_\varphi(X)$ hat $(A(i_1,\ldots,i_r))$

(2) $I'_\varphi(X)$ ist profilierter als X .

<u>Beweis:</u>

Aus Lemma V.1, der Folgerung und der Bemerkung zu Lemma V.1 folgt für alle $Y \varepsilon \mathbb{R}^n$, die $(A(i_1,\ldots,i_r))$ haben,

(1) $\varphi'(X)(Y)$ hat $(A(i_1,\ldots,i_r))$ und

(2) $\varphi'(X)(Y)$ ist profilierter als X .

Durch Induktion über k folgt dann für alle $k=1,2,\ldots$

(1) $\varphi'(X)^k(X)$ hat $(A(i_1,\ldots,i_r))$ und

(2) $\varphi'(X)^k(X)$ ist profilierter als X .

Dann ergibt sich die Behauptung durch Grenzübergang.

Wir wenden diesen Satz auf treppenförmige Eingangsverteilungen an und definieren dazu.

<u>Definition:</u> Seien $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ $(r > 0)$ natürliche Zahlen.

$X \varepsilon \mathbb{R}^n$ hat die Eigenschaft $(T(i_1,\ldots,i_r))$, wenn X $(A(i_1,\ldots,i_r))$ hat und wenn es reelle Zahlen $c_o,\ldots,c_r$ mit

$$(V.6) \qquad \begin{array}{ll} (X)_k = c_o & \text{für } 1 \leq k \leq i_1 \\ (X)_k = c_j & \text{für } i_j < k \leq i_{j+1} \quad (j=1,\ldots,r-1) \\ (X)_k = c_r & \text{für } i_r < k \leq n \end{array}$$

gibt.

Dann erhalten wir folgendes Corollar aus Satz V.1

<u>Corollar:</u> Sei φ stabiles $\mathbb{F}(a(J_n+J_n^T))$, dann gilt für alle $X \varepsilon \mathbb{R}^n$, die $(T(i_1,\ldots,i_r))$ haben:

(1) $I'_\varphi(X)$ hat$(A(i_1,\ldots,i_r))$ und

(2) $I'_\varphi(X)$ ist profilierter als X.

In Abbildung V.4 ist das Resultat dieses Satzes noch einmal dargestellt worden.

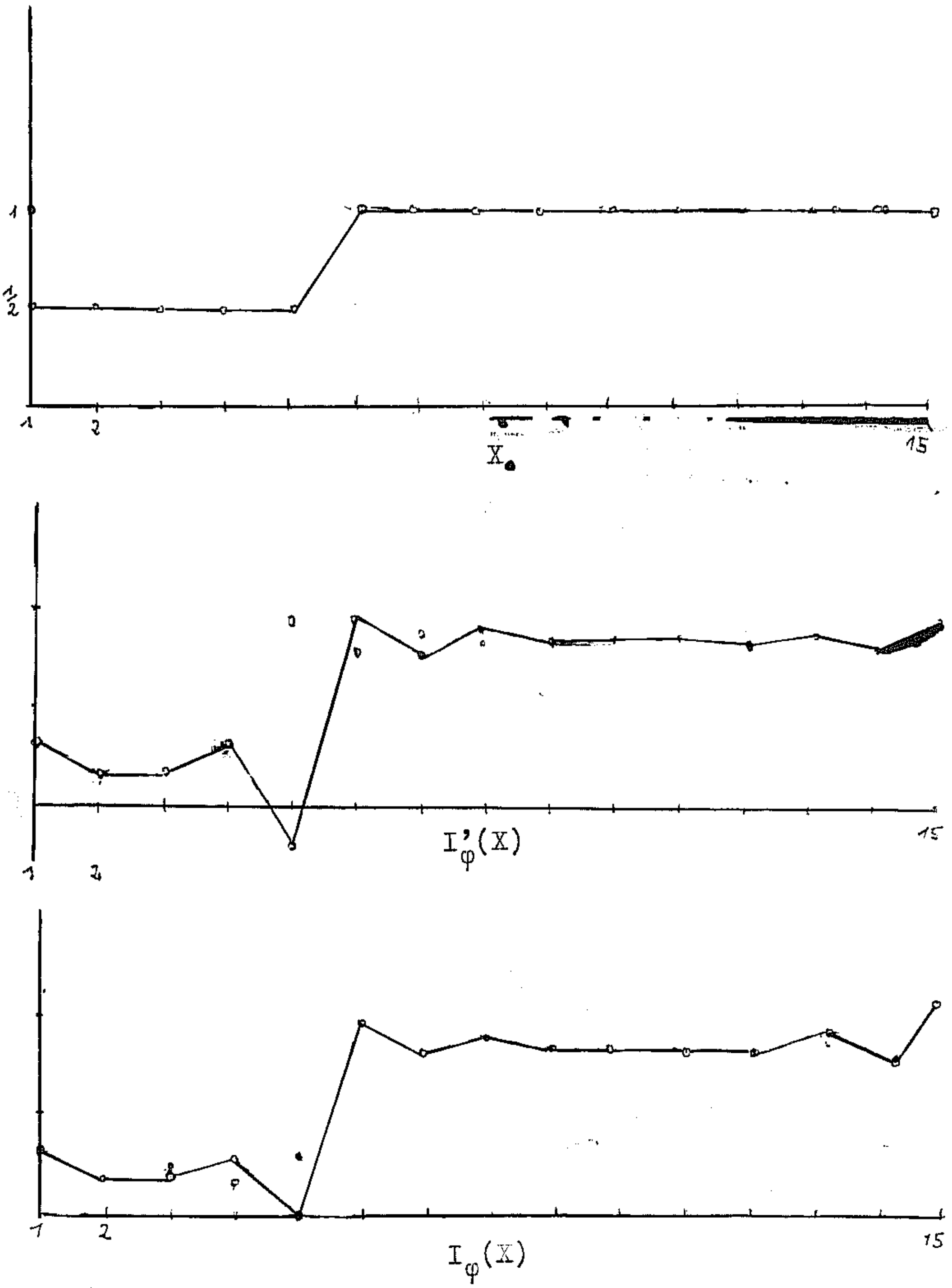


Abb.V.4

Wir interpretieren dieses Ergebnis, wie folgt.
An den Sprungstellen und an den Rändern der Sehzellenreihe treten Mach'sche Linien auf. Beginnt man eine

neue Iteration mit $I'_{\varphi}(X)$, so werden die Mach'schen Linien verstärkt. Dadurch werden die Konturen (an den Sprungstellen) schärfer herausgearbeitet, wobei man allerdings in Kauf nehmen muß, daß im Inneren der Treppenstufen die Homogenität der Verteilung zerstört wird.

Wir kommen zum zweiten der angekündigten Kontrastverschärfungssätze. Betrachte ein Inhibitionsfeld mit Nachbarkopplungen. Dann ist φ vom T-Typ. Es existiert also eine Relation $\nu \subseteq \{i \mid 1 \leq i \leq n\} \times \{i \mid 1 \leq i \leq n\}$ und eine reelle Zahl $a > 0$ mit

$$(A)_{ij} = \begin{cases} a, \text{ falls } (i,j) \varepsilon \nu \\ 0, \text{ sonst} \end{cases} \qquad (1 \leq i,j \leq n, \ \varphi \ \mathrm{IF}(A) \ )$$

Wir beachten ferner, daß ν symmetrisch und schleifenfrei ist. Darüberhinaus gilt:

$$\nu(i) := \{ j \mid (i,j) \ \varepsilon \ \nu \} \neq \emptyset \ .$$

Wir wollen nun den folgenden Satz beweisen.

<u>Satz V.2:</u>

Vor. (1) φ ist Inhibitionsfeld mit Nachbarkopplungen, ν sei die zugehörige Relation und $a > 0$ die zugehörige reelle Zahl.

(2) φ sei stabil

(3) Sei $X \varepsilon \ \mathrm{IR}^n$, und es gelte für ein i

$$(X)_i \geq \sum_{k\varepsilon\nu(i)} (X)_k \quad .$$

Beh. (1) $(I_\varphi(X))_i \geq \sum_{k\varepsilon\nu(i)} (I_\varphi(X))_k$

(2) Ist $k\varepsilon\nu(i)$, dann gilt entweder

$$(I_\varphi(X))_k = 0$$

oder

$$(I_\varphi(X))_i - (I_\varphi(X))_k \geq (X)_i - (X)_k \; .$$

<u>Beweis</u>:

Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

(a) Betrachte $\varphi'(X)$ und $Y\varepsilon\mathbb{R}^n$ mit

$$\text{pos}(\,(Y)_i) \geq \sum_{k\varepsilon\nu(i)} \text{pos}((Y)_k) \quad .$$

Dann gilt:

$$\text{pos}((\varphi'(X)(Y))_i) \;=\; \text{pos}\;((X)_i - a \sum_{k\varepsilon\nu(i)} \text{pos}(Y)_k\;)$$

und

$$pos(\varphi'(X)(Y))_k \leqslant pos((X)_k - a\ pos((Y)_i)) \qquad (k\varepsilon\nu(i))\ .$$

Hieraus folgt aber:

$$pos((\varphi'(X)(Y))_i) - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((\varphi'(X)(Y))_k) \geqslant$$

$$pos((X)_i - a\sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)) - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((X)_k - a\ pos((Y)_i))$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $(X)_i \leqslant a\sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)$.

Dann gilt aber:

$$(X)_k \leqslant (X)_i \leqslant a\sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k) \leqslant a\ pos((Y)_i)\ .$$

Also:

$$pos((X)_i - a\sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)) - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((X)_k - a\ pos((Y)_i)) = 0\ .$$

Das bedeutet aber

$$pos((\varphi'(X)(Y))_i) \geqslant \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((\varphi'(X)(Y))_k)\ .$$

2.Fall: $(X)_i > a \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)$.

$$(X)_k \leqslant \ a \ pos((Y)_i) \text{ für alle } k\varepsilon\nu(i)$$

Dann gilt:

$$pos((\varphi'(X)(Y))_i) - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((\varphi'(X)(Y))_k) \quad (X)_i - a \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)$$

$$\geqslant 0 .$$

3. Fall: $(X)_i > a \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)$. Es existiert k mit

$$(x)_k > \ a \ pos((Y)_i) \ .$$

Dann gilt:

$$\sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((X)_k - a \ pos((Y)_i)) \leqslant \sum_{k\varepsilon\nu(i)} (X)_k - a \ pos((Y)_i).$$

Hieraus folgt aber

$$pos(\varphi'(X)(Y)_i) - \sum_{k\varepsilon \ \nu(i)} pos(\ (\varphi'(X)(Y))_k) \geqslant$$

$$(X)_i - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} (X)_k + a(\ pos((Y)_i) - \sum_{k\varepsilon\nu(i)} pos((Y)_k)) \geqslant 0.$$

Also folgt stets

$$\mathrm{pos}(\ (\varphi'(X)(Y))_i) \geq \sum_{k\varepsilon\nu(i)} \mathrm{pos}\ (\ (\varphi'(X)(Y))_k\ )\ .$$

Ferner gilt:

$$(\varphi'(X)(Y))_i - (\varphi'(X)(Y))_k \geq (X)_i - (X)_k + a\ \mathrm{pos}((Y)_i) - a\sum_{k\varepsilon\nu(i)} \mathrm{pos}((Y)_k)$$

$$\geq (X)_i - (X)_k \qquad (k\varepsilon\nu(i))\ .$$

(b) Aus Teil (a) folgt aber nun direkt

$$(*)\ \mathrm{pos}((I'_\varphi\ (X))_i) \geq \sum_{k\varepsilon\nu(i)} \mathrm{pos}((I'_\varphi\ (X))_k) \quad \text{und}$$

$$(**)\ (I'_\varphi\ (X))_i - (\ I'_\varphi\ (X))_k \geq (X)_i - (X)_k \qquad (k\varepsilon\ \nu(i))$$

Aus (*) folgt nun wegen der Relation $(I_\varphi(X))_j = \mathrm{pos}((I'_\varphi\ (X))_j)$

für $j=1,\ldots,n$ der erste Teil der Behauptung.

Nun gilt:

$$(\varphi'(X)(X))_i = (X)_i - a \sum_{k \varepsilon \nu(i)} (X)_k \geqslant 0,$$ da aus der

Stabilität von φ folgt: $a < 1$.

Also gilt:

$$(I'_\varphi(X))_i \geqslant 0 \ .$$

Hieraus folgt:

$$(I'_\varphi(X))_i = (I_\varphi(X))_i \ .$$

Dann folgt aus (~~xx~~)

$$(I_\varphi(X))_i - (I'_\varphi\ (X))_k \geqslant (X)_i - (X)_k \qquad (k\varepsilon\ \nu(i)) \ .$$

Ist nun $(I_\varphi(X))_k = 0$ für $k\varepsilon\nu(i)$, so ist $(I'_\varphi\ (X))_k \leqslant 0$.

Ist $(I_\varphi(X))_k > 0$, so ist auch $(I'_\varphi(X))_k > 0$ für $k\varepsilon\nu(i)$.

Im letzteren Fall gilt aber: $(I_\varphi(X))_k = (I'_\varphi(X))_k$.

Hieraus folgt aber der zweite Teil der Behauptung.

Ist also ein Punkt hell gegenüber seien Nachbarn , so wird der Kontrast zwischen dem Punkt und seinen Nachbarn verstärkt.

Man beachte, daß auch dieser Kontrastverschärfungssatz die gleiche Struktur im Hinblick auf mehrfache Anwendung des Inhibitionssystems wie der Satz V.1 besitzt, d.h. mehrfache Anwendung des Inhibitionssystems auf eine Verteilung führt auch in der Ebene zu einer immer stärker werdenden Herausarbeitung der Kontraste.

VI. Die wichtigsten Bezeichnungen

Der $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der n-tupel $X = (x_1, \ldots, x_n)$, wobei die $x_i = (X)_i$ (i. Komponente des Vektors X) für $1 \leq i \leq n$ reelle Zahlen sind.

X ist größer oder gleich Y (in Zeichen: $X \geq Y$), wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gilt: $(X)_i \geq (Y)_i$. Entsprechend benutzen wir $X \leq Y$. $\mathbb{R}^{n+}$ ist die Menge der Vektoren X mit $X \geq 0$.

Die wichtigsten Funktionen sind ,wie folgt, definiert

$(|X|)_i = |(X)_i|$ $(1 \leq i \leq n)$ Betrag von X,

$$\| X \|_e = \left(\sum_{i=1}^{n} (X)_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$ euklidische Norm von X,

$(\mathrm{pos}(X))_i = 0$, falls $(X)_i \leq 0$, und $= (X)_i$,falls $(X)_i \geq 0$.
$(i=1,\ldots,n)$.

Spezielle Vektoren sind die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ und ihre Summe $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$.

Reelle Matrizen A sind rechteckige Schemata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{ik} = (A)_{ik}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m)$.

Wir schreiben $A \leq B$ für Matrizen, wenn $(A)_{ij} \leq (B)_{ij}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ gilt.

Die wichtigsten Funktionen bei Matrizen sind folgendermaßen definiert.

$(A^T)_{ik} = (A)_{ki}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m)$ (<u>transponierte Matrix</u>),

$\mathrm{Spur}\ A = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$ (<u>Spur</u> von A),

$(|A|)_{ik} = |(A)_{ik}|$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m)$ (<u>Betrag von A</u>) ,

$||A||_e = \Big(\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} (A)_{ik}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$ (<u>euklidische Matrixnorm</u>) ,

A^{-1} ist die <u>Inverse</u> von A (sofern sie existiert),

$r(A)$ ist der Betrag des betragsgrößten <u>Eigenwertes</u> von A (<u>Spektralradius</u>) .

Spezielle Matrizen sind die <u>Einheitsmatrizen</u> E_n mit n Zeilen und n Spalten .

Die Matrix J_n ist definiert durch

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathcal{O} & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} .$$

Inhibitionsfelder werden mit $\varphi,\varphi',\varphi_1,\ldots.$, Inhibitionsmatrizen mit $A,A',A_1,B,\ldots\ldots$, Schwellenmatrizen mit S,S', $S_1,\ldots\ldots$,Eingänge mit X,X',X_1, ...,Ausgänge mit Z,Z',Z_1, $I_\varphi(X)$,...,Vektoren mit $Y,Y',Y_1,\ldots.$ bezeichnet.

Eine konvexe Menge M ist eine Menge, die mit $X,Y\varepsilon\mathbb{R}^n$ auch alle Punkte der Form $X+ t(Y-X)$ $(0 \leq t \leq 1)$ enthält. Ist M eine konvexe Menge, so wird mit $\mathring{M}$ die Menge der inneren Punkte, mit $\tilde{\mathring{M}}$ die Menge der realtiv inneren Punkte, mit Rand M die Menge der Randpunkte, mit $\bar{M}$ die Menge der Berührungspunkte von M bezeichnet.

Eine Partition des $\mathbb{R}^n$ ist eine Familie von paarweise disjunkten,nichtleeren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die den $\mathbb{R}^n$ überdecken.

Die Einschränkung einer Abbildung auf eine Menge wird mit f/N bezeichnet.

VII. Literaturverzeichnis

|1| W.Reichardt, " Ueber das optische Auflösungsvermögen der Facettenaugen von Limulus ", Kybernetik Bd. I, Heft 2,57-69,1961

|2| E.Mach , "Ueber die Wirkung der räumlichen Verteilung des Lichtreizes auf die Netzhaut ", I. S.-B. math. - naturwiss. Kl., Wien , 52, 303, 1865

|3| H.J.Ollmert, "Lineares Optimieren ", Teil I der Ausarbeitung der gleichnamigen Vorlesung von H.Söhngen (SS 1963), 1964

|4| F.R. Gantmacher, "Matrizenrechnung II " VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften,Berlin,1959

|5| W.Householder, "The Theory of Matrices in Numerical Analysis", Blaisdell Publishing Company,New York,1964

|6| R,S, Varga , " Matrix Iterative Analysis ", Prentice Hall Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1962

|7| F.R. Gantmacher u. M.G. Krein, " Oszillationsmatrizen,Osziallationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme", Akademieverlag, Berlin, 1960