DARSTELLBARKEIT VON SPRACHEN DURCH FREIE ASSOZIATIVE SYSTEME.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Claus Peter Schnorr

aus

Völklingen

Saarbrücken, 1967

An dieser Stelle möchte ich Herrn Privatdozent Dr. Hotz danken, daß er mich als Doktorand angenommen hat sowie für zahlreiche Hinweise und klärende Gespräche.

Herrn Professor Dörr, an dessen Institut die Arbeit angefertigt wurde, danke ich für das Interesse und die Förderung, die er der Arbeit zuteil werden ließ.

Darstellung von Sprachen durch Freie Assoziative Systeme.

Inhaltsübersicht

Allgemeine Symbole.

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen

f.a.: für alle

$|$: mit folgender Eigenschaft

ex.: $\begin{cases}\text{existiert}\\ \text{existieren}\end{cases}$

$\emptyset$: die leere Menge

Seien X, Y, Z Mengen

$x \in X$: x ist Element von X

$x \notin X$: x ist nicht Element von X

$X \subset Y$: X ist Teilmenge von X.

$\cup$, $\bigcup$: Zeichen für Mengenvereinigung

$\cap$, $\bigcap$: Zeichen für Mengendurchschnitt

$Y - X = \{y \mid y \in Y,\ y \notin X\}$

$f: X \dashrightarrow Y$: f ist Abbildung von X nach Y.

$f: x \mapsto y$: f bildet das Element x auf das Element y ab

Sei $f: X \dashrightarrow Y$ Abb., $Z \subset X$, so ist $f/_Z$ die Einschränkung von f auf Z.

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$

I. Einleitung

Ein Anwendungsgebiet der Mathematik, das sich in jüngster Zeit in stürmischer Entwicklung befindet, ist die mathematische Sprachtheorie. Eines ihrer Ziele ist es, Sprachmodelle zu schaffen, die strukturell so einfach sind, daß sie einer Auswertung durch elektronische Rechner zugänglich sind. Dabei steht als Fernziel die Analyse lebender Sprachen oder auch Programmierungssprachen (z.B. Algol, Fortran u.s.w.) sowie das automatische Übersetzen von Sprachen.

Abstrakt verstehen wir unter einer Sprache oder Satzmenge eine Teilmenge des Freien Monoids F(X). Dabei ist X eine endliche Menge, das Alphabet der Sprache. Eine Sprache kann man z.B. beschreiben, indem man eine Grammatik analog grammatikalischen Regeln angibt, die alle Sätze dieser Sprache erzeugt [6]. Diese Arbeitsweise scheint besonders für die linguistische Anwendung geeignet. Eine andere Möglichkeit, Sprachen zu erzeugen, liefert die Automatentheorie. Ein Automat ist hier grob gesprochen eine endliche Rechenvorschrift, die eindeutig definiert, ob ein

Wort $w \in F(X)$ von dem Automat angenommen wird oder nicht. Statt von Sprachen spricht man hier auch von Ereignissen und sagt, der Automat charakterisiere sie.

Neben den linguistischen Fragestellungen birgt die Theorie auch eine Fülle Grundlagenprobleme der mathematischen Logik. Von dieser Seite untersucht man unter anderem die erzeugende Tragweite einzelner Sprachmodelle, das heißt wie groß die durch ein Modell beschriebene Klasse von Sprachen ist, bzw. welche Modelle in diesem Sinne gleichwertig sind. Hier wurde z.B. gezeigt, daß gewissen Klassen von Grammatiken Klassen von Automaten entsprechen. Die allgemeinste Klasse berechenbarer Sprachen ist die von Semi-Thue-Systemen erzeugte bzw. von Turingmaschinen charakterisierte. Am andern Ende der Theorie stehen die einseitig linearen Sprachen, die von endlichen Automaten angenommen werden. Diese Sprachen, auch reguläre Ereignisse genannt, bilden mit wegen ihrer elementaren, handlichen Eigenschaften die am besten erforschte Klasse. Die regulären Ereignisse bilden eine Boolesche Algebra sowie eine

Ereignisalgebra. Es gibt keine wesentliche Mehrdeutigkeit in einseitig linearen Sprachen und alle elementaren Fragen sind entscheidbar. Sobald man aber die bis jetzt untersuchten Sprachklassen betrachtet, die die regulären Ereignisse echt umfassen, gehen solche Eigenschaften verloren. So bilden die contextfreien Sprachen keine Boolesche Algebra und eine Reihe elementarer Fragen ist breits hier nicht mehr entscheidbar. Zum Begriff der Entscheidbarkeit und Berechenbarkeit siehe [9].

Aus dieser Sicht ist es wünschenswert, möglichst umfassende Klassen berechenbarer Sprachen zu finden, die eine Boolesche Algebra bilden, die bezüglich gewisser Operationen ein endliches Erzeugendensystem besitzen und abgeschlossen sind, und in denen alle grundlegenden Fragen entscheidbar sind. Wir werden im Folgenden eine Methode entwickeln, die eine Fülle solcher Systeme von Sprachen liefert, die sich in ihrem axiomatischen Aufbau eng an die Automatentheorie anlehnt aber auch Verbindungen zu Grammatiken erkennen läßt. Dabei behandeln die Kapitel II- VII die allgemeine

Theorie, während in den Kapiteln VIII-IX Beispiele diskutiert werden. Wegen der Bedeutung der regulären Sprachen und weil Teile der folgenden Theorie unter dem Gesichtspunkt ihrer Verallgemeinerung aufgefaßt werden können, seien hier noch einmal kurz einige Hauptergebnisse über reguläre Ereignisse zitiert.

(1.1) Definition

Sei X eine endliche Menge.

$F(X) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X , n \in N \right\} \cup \left\{ e \right\}$

mit der folgenden Verknüpfung $\cdot$, heiße Freies Monoid über X. $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$

$e \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot e = (x_1, \ldots, x_n)$

Wir schreiben abkürzend $y_1 y_2 \ldots y_n$ für $(y_1, \ldots, y_n)$ und ab für $a \cdot b$.

Ein Element von $F(X)$ werde mit Satz oder Wort bezeichnet. Sei $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in F(X)$ mit $x_i \in X$, so heiße x_1 der erste, x_n der letzte Faktor von x.

(1.2) Definition

Seien $S_1, S_2 \subset F(X)$ Ereignisse über dem Alphabet X, so erklärt man folgende Operationen:

$S_1 \cup S_2 = \{s \mid s \in S_1 \text{ oder } s \in S_2\}$

$S_1 \cdot S_2 = \{s_1 \cdot s_2 \mid s_i \in S_i,\ i=1,2\}$

$S_1{+} = \{s_1 s_2 \ldots s_n \mid s_i \in S_1,\ i=1,\ldots,n \in N\} \cup \{e\}$

Folgende Ereignisse heißen Elementarereignisse:

$\{x\} \mid x \in X, \{e\}, \emptyset$. Dabei sei $\emptyset$ die leere Menge.

Man bezeichnet ein Ereignis $S \in F(X)$ als regulär, wenn man es in endlich vielen Schritten durch Anwendung der Operationen ,$\cup$, $\cdot$, $+$, aus Elementarereignissen aufbauen kann. (Eine eingehendere Beschreibung des allgemeinen Sachverhalts bringt Kapitel VI). D_X sei die Menge der regulären Ereignisse über X.

(1.3) Über reguläre Ereignisse gelten folgende Sätze:

a) $S \in D_X \iff$ S ist in einem endlichen Automaten mit Alphabet X darstellbar. [8]

b) D_X ist eine Ereignisalgebra. (Dies folgt sofort aus der Definition (1.2))

c) $S \in D_X \iff$ ex. ein endliches Monoid M und ein Homo. $\varphi: F(X) \to M$, ferner eine Menge $\overline{M} \subset M$ so, daß $S = \varphi^{-1}(\overline{M})$

d) $S \in D_X \iff$ ex. ein ,standard regular event, B über F(Y) und ein Homo. $\varphi: F(Y) \to F(X)$ so, daß $S = \varphi(B)$.

Zum Begriff standard regular event siehe (6.5).

e) Die regulären Ereignisse bilden eine Boolesche Algebra [8,11]

f) Für zwei reguläre Ereignisse, die man auf verschiedene Weise aus Elementarereignissen aufgebaut hat, ist entscheidbar, ob sie identisch sind.

Zur Frage, ob es umfassendere Sprachklassen mit analogen Eigenschaften gibt, wurden von Amar und Putzolu [1,2] die gleich- und schiefförmig linearen Sprachen behandelt. Für sie wiesen sie Analoga zu a) und b) nach. Ferner zeigten sie die Abgeschlossenheit dieser Sprachklassen gegenüber der Durchschnittsbildung. Wir werden in Kapitel VIII als Beispiele zur Theorie Sprachklassen angeben, die auch die schiefförmig linearen Sprachen enthalten und echt umfassen, für die Analoga zu a) - f) gelten. Im Rahmen dieser Arbeit werden somit einige Hauptsätze über reguläre Ereignisse auf umfassendere Sprachklassen erweitert. Dagegen ist es nicht möglich auf alle Ergebnisse hinzuweisen, die sich mit Hilfe obiger Hauptsätze ohne weiteres von regulären Ereignissen auf diese betrachteten Sprachklassen übertragen lassen.

II. Überlagerung von Automaten

(2.1) Definition

Unter einem initialen endlichen Automaten (ohne Ausgabeband) verstehen wir ein 4-Tupel (A, X, δ, a) mit (1)-(4).

(1) A ist eine endliche Menge, die Zustandsmenge.

(2) X ist eine endliche Menge, das Eingabealphabet.

(3) $a \in A$ ist der Anfangszustand.

(4) δ: $X \times A \dashrightarrow A$ ist eine Abbildung

$$(x, b) \longmapsto x\delta b$$

δ heißt die Überführungs- oder Zustandsfunktion.

Es handelt sich hier um die übliche Definition des Mealy-Automaten. Lediglich die Ausgabefunktion wurde weggelassen, da wir im Folgenden keinen Gebrauch von ihr machen werden.

(2.2) Definition

Wir erweitern δ auf δ: $F(X) \times A \dashrightarrow A$ durch die rekursive Definition:

$$xw\ \delta\ b \underset{def}{=} x\ \delta(w\delta b) \quad \text{f.a. } x \in X,\ w \in F(X)-\{e\},\ \text{f.a. } b \in A$$

und die Festlegung: $e\delta b = b$ f.a. $b \in A$

Man verifiziert sofort, daß gilt:

$$vw\ \delta\ b = v\ \delta(w\delta b) \quad \text{f.a. } v, w \in F(X),\ b \in A$$

(2.3) Darstellung duch Graphen

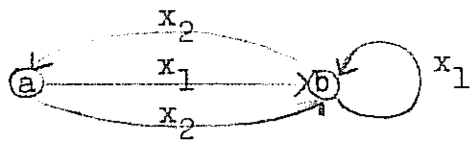
Zur Veranschaulichung des endlichen Automaten ordnen wir ihm einen gerichteten Graphen wie folgt zu. Sei (A, X, δ, a) der Automat. Die Menge der Punkte des Graphen sei $\{b \mid b \in A\}$ und die Menge der Strecken: $\{(a_1, a_2, x) \mid x \delta a_1 = a_2\}$

Dabei habe die Stecke (a_1, a_2, x) a_1 als Anfangspunkt und a_2 als Endpunkt.

Beispiel:

$A = \{a, b\}$, $X = \{x_1, x_2\}$

$x_1 \delta a = b$, $x_2 \delta a = b$, $x_1 \delta b = b$, $x_2 \delta b = a$



Ist ein zugehöriger Graph.

Weitere Erläuterungen über endliche Automaten stehen in [8,11].

Wir wollen nun die Definition des endlichen Automaten erweitern.

(2.4) Definition

Sei Y eine endliche Menge, g: $F(Y) \dashrightarrow F(X)$ Abbildung und (A, X, δ, a) ein endlicher Automat, so wollen wir erklären, was wir unter dem überlagerten Automaten $(A, X, \delta, a, g, Y) = \mathfrak{A}$ verstehen.

Wir definieren: $\delta_g : F(Y) \times A \dashrightarrow A$ durch
$$(w,b) \dashrightarrow w\delta_g b$$

$$w\delta_g b =_{def} g(w)\ \delta\ b$$

δ_g heiße die Überführungsfunktion, Y das Eingabealphabet, A die Zustandsmenge, a das Anfangssymbol, (A,X,δ,a) der unterliegende Automat und g die Karte von $\mathfrak{A}$.

(2.5) Erläuterung

Den überlagerten Automaten kann man sich vorstellen als Hintereinanderschaltung zweier Automaten, von denen der erste die Abbildung g bewirkt, die der Karte des überlagerten Automaten entspricht, während der zweite gerade der unterliegende Automat ist. Ist die Karte des überlagerten Automaten die Identität, so wirkt er wie ein gewöhnlicher endlicher Automat. In diesem Fall identifizieren wir ihn mit dem unterliegenden Automaten. Die folgende Definition des Homomorphismus bei überlagerten Automaten enthält im Spezialfall die übliche Definition des Homomorphismus für endliche Automaten.

(2.6) Definition

Seien $\mathfrak{A}_1 = (A_1, X_1, \delta_1, a_1, g_1, Y_1)$, $\mathfrak{A}_2 = (A_2, X_2, \delta_2, a_2, g_2, Y_2)$ überlagerte Automaten. Ein Tripel (h_1, h_2, h_3) von Abbildungen $h_1 : Y_1 \dashrightarrow Y_2$, $h_2 : X_1 \dashrightarrow X_2$, $h_3 : A_1 \dashrightarrow A_2$ heißt ein

Homomorphismus (h_1,h_2,h_3): $\mathfrak{A}_1 \dashrightarrow \mathfrak{A}_2$, wenn (1), (2) erfüllt ist.

(1) $h_3(a_1) = a_2$

(2) $g_2h_1(w)\ \delta_2\ h_3(b) = h_2g_1(w)\ \delta_2\ h_3(b) =$

$h_3(\ g_1(w)\delta_1 b\ )$ f.a. $w \in F(Y_1)$, $b \in A_1$

Dabei bezeichnen wir hier wie im Folgenden, wenn keine Verwechslung möglich ist, mit h_1, h_2 auch die eindeutigen Fortsetzungen als Homomorphismen von h_1, h_2 auf die freien Monoide: h_1: $F(Y_1) \dashrightarrow F(Y_2)$ h_2: $F(X_1) \dashrightarrow F(X_2)$.

$\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ heißen isomorph, wenn h_1, h_2, h_3 bijektiv sind. Dann ist $(h_1^{-1},h_2^{-1},h_3^{-1})$: $\mathfrak{A}_2 \dashrightarrow \mathfrak{A}_1$ ebenfalls ein Homomorphismus.

(2.7) Bemerkung

Aus der Struktur eines überlagerten Automaten folgt nun, daß man wesentlich zwischen zwei Arten von Isomorphien unterscheiden kann. Die eine entspricht wie die Isomorphie bei endlichen Automaten einer Umbenennung der Symbole.

Es gilt:

1) $h_3(a_1) = a_2$

2) $g_2h_1 = h_2g_1$

3) $h_3(w\delta_1 b) = h_2(w)\ \delta_2\ h_3(b)$ f.a. $w \in F(X_1)$, $b \in A_1$

Es ist sinnvoll, diese Isomorphien triviale Isomorphien zu nennen. Diese lassen sich analog zu den Isomorphien bei endlichen Autonaten bestimmen. Daneben gibt es aber wie das folgende Beispiel zeigt, auch nicht triviale Isomorphien.

(2.8) Beispiel

Sei $\mathfrak{A}_1 = (A, X, \delta_1, a, g, Y)$ ein überlagerter Automat und es gelte: $g(F(Y)) = \{e\}$. Sei $\mathfrak{A}_2 = (A, X, \delta_2, a, g, Y)$ ein zweiter überlagerter Automat mit beliebigem δ_2, so gilt:

$(id_Y, id_X, id_A) : \mathfrak{A}_1 \dashrightarrow \mathfrak{A}_2$ ist ein Isomorphismus.

wegen $h_3(a_1) = a_1$ ist (2.6) (1) jeweils erfüllt, und wegen $h_1 g(w) = g h_1(w) = e$ f.a. $w \in F(Y)$ ist (2.6) (2) jeweils erfüllt. Dagegen gilt im allgemeinen (2.7) (3) nicht, denn das würde bedeuten: $w\delta_1 b = w\delta_2 b$ f.a. $w \in F(X)$, $b \in A$

δ_2 war aber beliebig wählbar.

Es sei angemerkt, daß sich die Begriffe der Äquivalenz, des Zusammenhangs und der Reduziertheit von endlichen Automaten ohne weiteres auf überlagerte Automaten übertragen
[illegible]? lassen, während die üblichen Sätze hier nicht mehr ganz so einfach sind. Wir interessierem uns hier aber im wesentlichen nur für die Darstellung von Sprachen.

(2.9) Definition

Sei $\mathfrak{A} = (A, X, \delta, a, g, Y)$ ein überlagerter Automat. Ein Ereignis $S \subset F(Y)$ heißt in $\mathfrak{A}$ durch $\bar{A} \subset A$ dargestellt $\Longleftrightarrow$

$$S = \{ w \mid w \in F(Y),\ g(w)\delta a \in \bar{A} \}$$

Sei g eine Karte.

$$B_g = \{ S \mid S \text{ wird in einem Automaten mit der Karte } g \text{ dargestellt.} \}$$

Die Struktur der Sprachklassen B_g werden wir im Folgenden allgemein untersuchen. Dazu zunächst folgender

(2.10) Satz

Sei $(id_Y, h_2, h_3) : \mathfrak{A}_1 \longrightarrow \mathfrak{A}_2$ Homomorphismus und h_3 sei injektiv, so werden in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ die gleichen Ereignisse dargestellt.

Beweis: S werde in $\mathfrak{A}_1$ durch $\bar{A}_1$ dargestellt. Es gilt:

$$\begin{aligned} S &= \{ w \mid g_1(w)\ \delta_1\ a_1 \in \bar{A}_1 \} \\ &= \{ w \mid h_3(\ g_1(w)\delta_1 a_1\ ) \in h_3(\bar{A}_1) \} && \text{weil } h_3 \text{ injektiv ist} \\ &= \{ w \mid h_2 g_1(w)\ \delta_2\ h_3(a_1) \in h_3(\bar{A}_1) \} && \text{weil } (id_Y, h_2, h_3) \text{ Homo.} \\ &= \{ w \mid g_2(w)\ \delta_2\ a_2 \in h_3(\bar{A}_1) \} && \text{weil } (id_Y, h_2, h_3) \text{ Homo.} \end{aligned}$$

Es folgt: S wird in $\mathfrak{A}_2$ durch $h_3(\bar{A}_1)$ dargestellt. Umgekehrt ist sofort ersichtlich, daß wenn S in $\mathfrak{A}_2$ durch $\bar{A}_2 \subset A_2$ dargestellt wird, S in $\mathfrak{A}_1$ durch $h_3^{-1}(\bar{A}_2)$ dargestellt wird.

falls $\bar{A}_2$ nicht Bild eines A_1 ist, dann ist A_2 nicht erreichbar [illegible] zugehörige Sprache [illegible] $\emptyset$.

(2.11) Definition

Sei M_Y die Menge der überlagerten Automaten mit Eingabealphabet Y, h: F(Z) --> F(Y) Abbildung. Definiere:

$$T_h : M_Y \dashrightarrow M_Z \quad \text{durch}$$

$$T_h : (A,X,\delta,a,g,Y) \longmapsto (A,X,\delta,a,gh,Z)$$

T_h heiße eine Transformation.

(2.12) Satz

Sei C_1 die Kategorie mit den endlich erzeugten Freien Monoiden als Objekte und den Abbildungen als Morphismen.

C_2 sei die Kategorie mit $\{M_Y \mid Y \text{ endliche Menge}\}$ als Objektmenge und den Transformationen als Morphismen, so ist $T : C_1 \dashrightarrow C_2$ mit $T(Y) = M_Y$ und $T(h) = T_h$ ein kontravarianter Funktor.

III. Darstellbarkeit von Sprachen und Zerlegungen in überlagerten Automaten.

(3.1) Definition

Sei A eine Menge. $Z = \{ A_i \mid A_i \subset A,\ i \in J \}$ heißt eine Zerlegung von A, wenn (1)-(3) gilt.

(1) $\bigcup_{i \in J} A_i = A$

(2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $i \neq j$

(3) $A_i \neq \emptyset$ für $i \in J$

Z_A sei die Menge der Zerlegungen von A.

(3.2) Definition

In Z_A definieren wir eine teilweise Ordnung.

$Z_1 \leq Z_2 \iff$ zu $C \in Z_1$ ex. $D \in Z_2 \mid C \subset D$.

Bez.: Z_1 ist feiner als Z_2.

(3.3) Definition

Seien $Z_1,\ Z_2 \in Z_A$

$x,\ y \in A$ heißen verbindbar (bzgl. Z_1, Z_2) $\iff$ ex. Folge $x = x_1, x_2, \ldots, x_n = y$ so, daß zu i mit $1 < i \leq n$ ein $A_i \in Z_1 \cup Z_2$ ex. mit $x_{i-1}, x_i \in A_i$

$\inf(Z_1, Z_2) =_{\text{def}} \{ A_1 \cap A_2 \mid A_1 \cap A_2 \neq \emptyset,\ A_i \in Z_i\ i=1,2 \}$

$\sup(Z_1, Z_2) =_{\text{def}} \{ Y \subset A \mid$ f.a. $y \in Y$ gilt: $x \in Y \iff x, y$ sind verbindbar. Ferner: $Y \neq \emptyset \}$

Man verifiziert sofort folgenden

(3.4) Hilfssatz

$\inf(Z_1,Z_2)$ ist die größte untere Schranke von Z_1,Z_2 bzgl. $\leq$.

$\sup(Z_1,Z_2)$ ist die kleinste obere Schranke von Z_1,Z_2 bzgl. $\leq$.

Damit bildet Z_A einen Verband. [4]

(3.5) Definition

Sei $f: B \dashrightarrow A$ Abbildung. Definiere $f^+: Z_A \dashrightarrow Z_B$ wie folgt: $f^+(Z) = \{ f^{-1}(A_i) \mid A_i \in Z \,,\; f^{-1}(A_i) \neq \emptyset \}$

(3.6) Hilfssatz

Sei $Z \subset Z_A$ ein Unterverband, Z_1, $Z_2 \in Z$, so gilt:

$\inf(f^+(Z_1),f^+(Z_2)) = f^+(\inf(Z_1,Z_2))$

Beweis: $C \in f^+(\inf(Z_1,Z_2)) \quad \Leftrightarrow$

$$C = f^{-1}(C_1 \cap C_2) \quad \mid C_i \in Z_i \quad i=1,2$$

$$\Leftrightarrow \quad C = f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) \quad \mid C_i \in Z_i \quad i=1,2$$

$$\Leftrightarrow \quad C \in \inf(f^+(Z_1),f^+(Z_2))$$

(3.7) Definition

Sei $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a,g,Y)$ ein überlagerter Automat.

$\tau_{\mathfrak{A}} : F(Y) \dashrightarrow A$ sei definiert durch: $\tau_{\mathfrak{A}}(w) = g(w)\delta a$

$Z_{\mathfrak{A}} = \{\tau^{-1}(b) \mid b \in A,\ \ \tau^{-1}(b) \neq \emptyset\}$ heiße die von $\mathfrak{A}$ erzeugte Zerlegung.

Sei g: F(Y) --> F(X) eine Karte, so definieren wir:

$Z_g = \{ Z_{\mathfrak{A}} \mid \mathfrak{A}$ ist überlagerter Automat mit der Karte $g \}$

(3.8) Satz

1) Aus $\mathfrak{A}_1 = T_h(\mathfrak{A}_2) \Rightarrow Z_{\mathfrak{A}_1} = h^+(Z_{\mathfrak{A}_2})$

2) $Z_{gh} = h^+(Z_g)$

Beweis: 1) gilt wegen: $\tau_{\mathfrak{A}_2} = \tau_{\mathfrak{A}_1} h,\ \tau^+_{\mathfrak{A}_2} = (\tau_{\mathfrak{A}_1} h)^+ = h^+ \tau^+_{\mathfrak{A}_1}$

2) folgt sofort aus 1).

Aus der Theorie der endlichen Automaten greifen wir nun folgenden Satz vor, den wir allgemeiner unter (5.4,5)beweisen werden.

(3.9) Satz

$Z_{F(X)} \ni \overline{Z}$ wird von einem endlichen Automaten erzeugt.

<=> 1) $\overline{Z}$ ist endlich

2) zu $Z_i \in \overline{Z},\ x \in X$ ex. $Z_j \in \overline{Z} \mid x \cdot Z_i \subset Z_j$

Solche Zerlegungen nennt man Automatenzerlegungen. Ferner gilt: Die Automatenzerlegungen von F(X) bilden einen Verband.

(3.10) Satz

Sei g eine Karte, so gilt: Z_g ist bezüglich der Operation inf abgeschlossen und B_g bildet eine Boolesche Algebra.

Beweis: 1) folgt sofort aus Hilfssatz (3.6) und (3.8), (3.9). Zu 2): Seien S_1, $S_2 \in B_g$, so ex. Z_1, $Z_2 \in Z_g \mid S_i$ ist als Vereinigung von Mengen in Z_i darstellbar $i=1,2$. Ferner ex. ein überlagerter Automat $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a,g,Y)$, der $\inf(Z_1,Z_2)$ erzeugt. Man verifiziert sofort, daß $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $F(Y) - S_i$ $i=1,2$ in $\mathfrak{A}$ dargestellt werden.

Es ist natürlich, daß wir uns besonders für Sprachklassen interessieren, die möglichst umfangreich sind und die wenigstens die elementaren Sprachen z.B. die endlichen enthalten. Ein Kriterium liefert folgender

(3.11) Satz

B_g enthält die endlichen Sprachen $\Leftrightarrow$ g ist injektiv.

Beweis: „=>" Sei $g(w_1) = g(w_2)$ $\Rightarrow$ w_1 und w_2 sind immer im gleichen Element einer Zerlegung, die von einem überlagerten Automaten mit der Karte g erzeugt wird. Wegen $\{w_i\} \in B_g$ $i=1,2$ folgt $w_1 = w_2$, also g injektiv.
„<=" Sei $g(w) = v$. $\{v\}$ wird in einem endl. Aut. $\mathfrak{A}$ dargst. Es folgt $\{w\}$ wird in $T_g(\mathfrak{A})$ dargestellt.

Es erhebt sich nun die Frage, ob es zu zwei Karten g_1, g_2

mit gleichem Definitionsbereich eine Karte g_3 gibt, so daß $B_{g_1}, B_{g_2} \subset B_{g_3}$. Hierzu definieren wir eine binäre Operation auf der Menge der Karten mit Definitionsbereich $F(Y)$.

(3.12) Definition

Seien $g_1: F(Y) \dashrightarrow F(X_1)$, $g_2: F(Y) \dashrightarrow F(X_2)$ Abbildungen. $\bar{e}$ sei ein Element, das in keiner der Mengen X_i $i=1,2$ enthalten ist. $\bar{X}_i \underset{\text{def}}{=} X_i \cup \{\bar{e}\}$. $p_i: F(\bar{X}_1 x \bar{X}_2) \dashrightarrow F(\bar{X}_i)$ $i=1,2$ seien die Homomorphismen, die durch $p_i(x_1,x_2) = x_i$ f.a. $(x_1,x_2) \in \bar{X}_1 x \bar{X}_2$ eindeutig bestimmt sind. Um $g_1 \times g_2 : F(Y) \dashrightarrow F(\bar{X}_1 x \bar{X}_2)$ zu definieren, genügt es $p_i(g_1 \times g_2)(w)$ f.a. $w \in F(Y)$, $i=1,2$ zu erklären. Sei $q_i = L(g_i(w))$ $q = \max\limits_{i=1,2} q_i$, so definiere man:

nein! $F(\bar{X}_1 x \bar{X}_2) \neq F(\bar{X}_1) x F(\bar{X}_2)$

$p_i(g_1 \times g_2)(w) = \bar{e}^{\,q-q_i} g_i(w)$. Dabei sei $\bar{e}^{\,k} = \underset{1,}{\bar{e}}.\underset{2,}{\bar{e}}.\ldots..\underset{,k}{\bar{e}}$ und $L(v)$ die Länge eines Wortes v.

(3.13) Folgerung

Sei $\bar{e} \notin X_i$ $i=1,2,3$ und $g_i: F(Y) \dashrightarrow F(X_i)$ $i=1,2,3$ Abb. so gilt: $(g_1 \times g_2) \times g_3 = g_1 \times (g_2 \times g_3)$

Beweis: Es gilt nämlich: $p_i(g_1 \times (g_2 \times g_3))(w) = \bar{e}^{\,q-q_i} \cdot g_i(w) = p_i((g_1 \times g_2) \times g_3)(w)$ $i=1,2,3$. Dabei sei $q_i = L(g_i(w))$ $q = \max\limits_{i=1,2,3} q_i$.

(3.14) Definition

Seien $\mathfrak{A}_i = (A_i, X_i, \delta_i, a_i, g_i, Y)$ i=1,2 überlagerte Automaten, so definieren wir $\mathfrak{A}_1 x \mathfrak{A}_2 = (A_1 x A_2, \overline{X}_1 x \overline{X}_2, \overline{\delta}_1 x \overline{\delta}_2, (a_1, a_2), g_1 x g_2, Y)$ wie folgt: $\overline{\delta}_i : \overline{X}_i x A_i \dashrightarrow A_i$ durch $x_i \overline{\delta}_i b_i = \begin{cases} b_i & \text{für } x_i = \overline{e} \\ x_i \delta_i b_i & \text{für } x_i \neq \overline{e} \end{cases}$

und $\overline{\delta}_1 x \overline{\delta}_2 : (\overline{X}_1 x \overline{X}_2) x (A_1 x A_2) \dashrightarrow A_1 x A_2$ durch:

$(x_1, x_2)\ \overline{\delta}_1 x \overline{\delta}_2\ (b_1, b_2) = (x_1 \overline{\delta}_1 b_1, x_2 \overline{\delta}_2 b_2)$

(3.15) Satz

$B_{\mathfrak{A}}$ sei die Menge der in $\mathfrak{A}$ dargestellten Ereignisse, $P(F(Y))$ die Potenzmenge von Y, so gilt:

1) $B_{\mathfrak{A}_1 x \mathfrak{A}_2}$ ist die kleinste Boolesche Algebra in $P(F(Y))$, die $B_{\mathfrak{A}_1}$, $B_{\mathfrak{A}_2}$ umfaßt.

2) $B_{g_1 x g_2}$ umfaßt B_{g_1} und B_{g_2}.

Beweis: Man beachtet, daß die erweiterte Überführungsfunktion des Automaten $\mathfrak{A}_1 x \mathfrak{A}_2$ nach Definition der Gleichung:

$g_1 x g_2(w)\ \overline{\delta}_1 x \overline{\delta}_2\ (b_1, b_2) = (g(w)\delta_1 b_1, g(w)\delta_2 b_2)$ f.a. $w \in F(Y)$

genügt.

a) $B_{\mathfrak{A}_1}, B_{\mathfrak{A}_2} \subset B_{\mathfrak{A}_1 x \mathfrak{A}_2}$: Wenn $S_i \in B_{\mathfrak{A}_i}$ durch $\overline{A}_i \subset A_i$ dargestellt werden, so werden S_i in $B_{\mathfrak{A}_1 x \mathfrak{A}_2}$ durch $p_i^{-1}(\overline{A}_i)$ dargestellt. Dabei sei $p_i : A_1 x A_2 \dashrightarrow A_i$ die i-te Projektion.

b) Sei B eine Boolesche Algebra in $P(F(Y))$, die $B_{\mathfrak{A}_1}$, $B_{\mathfrak{A}_2}$

umfaßt. Es folgt: $\tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}(b \times A_2),\ \tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}(A_1 \times c) \in B$

f.a. $b \in A_1, c \in A_2$

Es folgt: $\tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}(b \times A_2) \cap \tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}(A_1 \times c) =$

$\tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}(b \times A_2 \cap A_1 \times c) = \tau^{-1}_{\alpha_1 \times \alpha_2}((b,c)) \in B$

f.a. $b \in A_1, c \in A_2$

Da B bezüglich der Mengenvereinigung abgeschlossen ist, folgt:

$B_{\alpha_1 \times \alpha_2} \subset B$.

c) $B_{g_1}, B_{g_2} \subset B_{g_1 x g_2}$ folgt sofort aus a).

<u>(3.16) Satz</u>

Sei g: F(Y) --> F(X) Karte, D_Y nach (1.2), so sind folgende Aussagen äquivalent.

1) $D_Y \subset B_g$

2) Für jede Karte h: F(Z) --> F(Y) gilt: $B_h \subset B_{gh}$

<u>Beweis:</u> 1) => 2) $D_Y = B_{id_{F(Y)}}$ nach (1.3a). Aus $B_{id_{F(Y)}} \subset B_g$ folgt sofort: $B_h \subset B_{gh}$ f.a. h | h: F(Z) --> F(Y) Karte.

2) => 1) Setze $h = id_{F(Y)}$.

Insbesondere erscheinen nun solche Karten interessant mit:

$D_Y \subsetneqq B_g$, weil dann zumindest für gewisse Karten h: F(Z) --> F(Y) B_{gh} eine Sprachklasse bildet, die B_g <u>echt</u> umfaßt. Solche Karten werden wir z.B. in Kapitel VIII angeben.

IV. Entscheidbarkeitsfragen

Bei Aussagen über Sprachen $S \in B_g$ setzen wir hier immer eine gegebene Darstellung von S in einem Automaten (A,X,δ,a,g,Y) voraus.

(4.1) Satz

Sei $g: F(Y) \dashrightarrow F(X)$ eine Karte, so gilt: Jede Sprache $S \in B_g$ ist entscheidbar $\Leftrightarrow$ g ist turingberechenbar.

Beweis: „=>" Zu $v \in F(X)$ ist ein endlicher Automat konstruierbar, so daß $\{v\}$ in (A,X,δ,a) durch $b \in A$ dargestellt wird. Sei $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a,g,Y)$, so folgt: $g^{-1}(v) = \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) \in B_g$

Da $g^{-1}(v)$ entscheidbar ist, gibt es zu jedem $w \in F(Y)$ und jedem $v \in F(X)$ einen Algorithmus, der entscheidet, ob $g(w)=v$. Damit ist g turingberechenbar.

„<=" Sei S in $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a,g,Y)$ durch $\bar{A}$ dargestellt, so ist

$$\tau_{\mathfrak{A}} : \begin{array}{l} F(Y) \dashrightarrow A \\ w \dashrightarrow g(w)\delta a \end{array}$$

turingberechenbar, und damit ist entscheidbar, ob $w \in S$.

(4.2) Satz

Sei $g: F(Y) \dashrightarrow F(X)$ eine Karte, so gilt:

Zu je zwei Sprachen $S_1, S_2 \in B_g$ ist entscheidbar, ob $S_1 = S_2$

$\Leftrightarrow$ Zu jeder regulären Menge $S \subset F(X)$ ist entscheidbar, ob $S \cap g(F(Y)) = \emptyset$.

Beweis: „=>" S sei reguläre Menge, die in $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a)$

durch $A_1 \subset A$ dargestellt wird, $S = \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1)$. Sei $\mathfrak{A}_1 = T_g(\mathfrak{A})$.

Nach Voraussetzung ist entscheidbar, ob $\tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_1) = \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(\emptyset)$

Damit ist entscheidbar, ob $g^{-1}\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1) = \emptyset$, und damit ob

$g(F(Y)) \cap S = \emptyset$.

„<=" Seien $S_1, S_2 \in B_g$, so kann man einen überlagerten Automaten $\mathfrak{A}_1 = (A, X, \delta, a, g, Y)$ konstruieren, so daß S_1, S_2 in $\mathfrak{A}_1$ durch $A_1, A_2 \subset A$ dargestellt werden. $\mathfrak{A} \underset{\text{def}}{=} (A, X, \delta, a)$.

Es gilt also: $S_i = \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_i)$.

Man verifiziert nun: $S_1 = S_2 \iff \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_1) = \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}A_2)$

$\iff \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_1) = \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_1 \cap A_2) = \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_2)$

$\iff \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_1 - (A_1 \cap A_2)) = \emptyset,\ \tau_{\mathfrak{A}_1}^{-1}(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = \emptyset$

$\iff g^{-1}\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1 - (A_1 \cap A_2)) = \emptyset,\ g^{-1}\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_2 - (A_1 \cap A_2)) = \emptyset$

$S_i = \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_i - (A_1 \cap A_2))$ $i=1,2$ sind reguläre Mengen, die in dem endlichen Automaten $\mathfrak{A}$ dargestellt sind. Da nach Voraussetzung entscheidbar ist, ob $g(F(Y)) \cap S_i = \emptyset$ $i=1,2$, folgt dann aus obiger Betrachtung, daß die Aussage $S_1 = S_2$ entscheidbar ist.

(4.3) Satz

Sei $g: F(Y) \longrightarrow F(X)$ eine Karte, so gilt:

Zu jeder regulären Menge $S \subset F(X)$ ist entscheidbar, ob $S \cap g(F(Y)) = \emptyset \iff$ Zu je zwei Mengen $S_1, S_2 \in B_g$ ist entscheidbar, ob $S_1 \subset S_2$.

Beweis: „=>" Seien S_1, S_2 in $\mathfrak{A} = (A, X, \delta, g, Y)$ durch A_1, A_2 dargestellt: $S_i = \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_i)$. Es gilt: $S_1 \subset S_2 \iff \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1) \subset \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_2) \iff \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1) = \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(A_1 \cap A_2)$

Letztere Aussage ist aber nach (4.2) entscheidbar.

„<=" Zu $S_1, S_2 \subset B_g$ ist entscheidber, ob $S_1 \subset S_2$, $S_2 \subset S_1$. Somit ist entscheidbar, ob $S_1 = S_2$. Hiermit folgt aus (4.2) die Behauptung.

(4.4) Folgerung

Sei g: $F(Y) \dashrightarrow F(X)$ eine Karte und kann man eine contextfreie Grammatik G angeben, so daß für die von ihr erzeugte Sprache $L(G)$ gilt: $L(G) = g(F(Y))$, so ist für je zwei Sprachen S_1, $S_2 \in B_g$ entscheidbar, ob $S_1 \subset S_2$.

Beweis: der Beweis folgt unmittelbar aus folgenden Sätzen:
Zu einem regulären Ereignis S und einer contextfreien Grammatik G kann man eine contextfreie Grammatik G_1 konstruieren, so daß $L(G_1) = L(G) \cap S$. [5]
Zu jeder contextfreien Grammatik G ist entscheidbar, ob $L(G) = \emptyset$. [3]

V. Freie Assoziative Systeme.

Wir werden im Folgenden die Operationen der Ereignisalgebra der regulären Mengen auf die Sprachklassen B_g übertragen. Dazu bedarf es jedoch einschränkender Voraussetzungen. Es ist folgende Definition zweckmäßig.

(5.1) Definition

Sei ,o, eine binäre Operation: $o: F(Y) \times F(Y) \supset M \dashrightarrow F(Y)$.

$(F(Y),o)$ heiße ein Freies Assoziatives System genau dann, wenn (a) - (c) gilt.

(a) Es existiert ein Element $e_o \in F(Y) \mid$

$e_o \circ w = w = w \circ e_o$ f.a. $w \in F(Y)$

(b) $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$ f.a. $u,v,w \in F(Y)$

d.h. beide Seiten sind stets beide definiert bzw. nicht definiert und gleich , wenn sie definiert sind.

(c) Es ex. eine endliche Menge $E \subset F(Y)$, so daß es zu jedem $w \in F(Y) - \{e_o\}$ eine eindeutige Darstellung

$w = w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n \mid w_i \in E$ gibt.

Dabei sei $w_1 \circ \ldots \circ w_n$ rekursiv wie folgt definiert:

$w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n = (w_1 \circ \ldots \circ w_{n-1}) \circ w_n$

Bez.: E heiße das freie Erzeugendensystem.

(5.2) Folgerung

Sei $(F(Y),o)$ Freies Assoziatives System , so ist E eindeutig.

Beweis: Ann.: E_1 und E_2 erfüllen (5.1)(a)-(b). Zu zeigen ist: $E_1 \subset E_2$. Sei $w \in E_1$, $w = w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n \mid w_i \in E_2$ und $w_i = v_1^i \circ v_2^i \circ \ldots \circ v_{n_i}^i \mid v_k^i \in E_1$. Weil o assoziativ und somit ein Produkt von der Klammerung unabhängig ist, folgt:

$w = v_1^1 \circ v_2^1 \circ \ldots \circ v_{n_1}^1 \circ v_1^2 \ldots \ldots \circ v_1^n \circ \ldots \circ v_{n_n}^n \mid v_i^k \in E_1$.

$w = w$ ist aber die eindeutige Darstellung nach (5.1)(c) bezüglich E_1. Es folgt: $n = 1$, $n_i = 1$ $i=1,\ldots,n$ und somit $w \in E_2$.

Bei gegebenem Fr. As. Sy. sei E' im Folgenden eine zu E gleichmächtige Menge, γ: $E \dashrightarrow E'$ sei bijektiv.
$w \mapsto w'$

(5.3) Satz

(1) Sei $(F(Y),o)$ ein Freies Assoziatives System, so kann ihm in natürlicher Weise eine Karte $g: F(Y) \dashrightarrow F(E')$ zugeordnet werden, so daß g die Eigenschaften (a),(b) hat.

(2) Ist $g: F(Y) \dashrightarrow F(E')$ eine Karte mit den Eigenschaften (a),(b), so entspricht ihr in natürlicher Weise ein Freies Assozatives System.

(a) g ist injektiv.

(b) Ist $w \in g(F(Y))$ und v ein Teilwort von w, so ist auch $v \in g(F(Y))$. Insbesondere ist $e \in g(F(Y))$ und $E' \subset g(F(Y))$.

Beweis: (1) Definiere $g: F(Y) \dashrightarrow F(E')$ wie folgt: $g(e_o) = e$.

Dabei sei e das neutrale Element von $F(E')$, und:

$g(w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n) = w_1' \cdot w_2' \cdot \ldots \ldots \cdot w_n' \mid w_i \in E$. da E' frei Erz.

a) g ist Abbildung, weil E frei (Erz.) ist und inj. nach Definition.

b) folgt aus der Assoziativität von ,o, wie folgt:

wenn $w_1 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_n$ definiert ist, so auch

$w_i \circ w_{i+1} \circ \ldots \circ w_j \mid i \leq j$. Damit ist mit $w_1 w_2 \cdot \ldots \cdot w_n$ auch

$w_i w_{i+1} \cdot \ldots \cdot w_j \in g(F(Y)) \mid i \leq j$. $e \in g(F(Y))$, $E' \subset g(F(Y))$ nach Def.

(2) Definiere ,o, durch:

$$w \circ v = \begin{cases} g^{-1}\big(g(w) \cdot g(v)\big) & \text{falls } g(w) \cdot g(v) \in g(F(Y)) \\ \text{andernfalls sei } w \circ v \text{ nicht definiert.} \end{cases}$$

(a) $g^{-1}(e)$ ist neutrales Element bezüglich ,o,

(b) $$(u \circ v) \circ w = g^{-1}\Big[g\Big(g^{-1}\big(g(u) \cdot g(v)\big)\Big) \cdot g(w)\Big] =$$
$$g^{-1}\big(g(u) \cdot g(v) \cdot g(w)\big) = u \circ (v \circ w)$$

Die beiden Ausdrücke $(u \circ v) \circ w$ und $u \circ (v \circ w)$ sind wegen der Eigenschaft (5.3)(b) immer gemeinsam definiert bzw. nicht definiert und sie sind gleich, wenn sie definiert sind.

(c) Die Eigenschaft (5.1)(c) gilt, weil g Abbildung ist.

Man verifiziert sofort, daß die Zuordnungen in dem Sinne natürlich sind, daß sie sich gegenseitig invertieren.

Was ist endl. Erz. System?

(5.4) Satz

Sei $g: F(Y) \dashrightarrow F(X)$ eine Karte mit den Eigenschaften (5.3)(a),(b) und $(F(Y),o)$ das zugehörige Freie Assoziative System, so gilt:

Eine Zerlegung $\overline{Z}$ von $F(Y)$ ist genau dann in Z_g <=>

1) $\overline{Z}$ ist endlich

2) zu $Z_i \in \overline{Z}$, $w \in E$ ex. $Z_j \in \overline{Z} \mid w \circ Z_i \subset Z_j$

Dabei sei $w \circ Z_i = \{w \circ u \mid u \in Z_i$, und $w \circ u$ ist definiert$\}$

Beweis: „=>" 1) Sei $\overline{Z} \in Z_g$. $\overline{Z}$ werde durch $\mathfrak{A} = (A,X,\delta,a,g,Y)$ erzeugt. $\overline{Z} = \{\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) \mid b \in A, \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) \neq \emptyset\}$

$\overline{Z}$ ist endlich, weil A endlich ist.

Behauptung: Zu $w \in E$, $\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b)$ ex. $c \in A \mid w \circ \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) \subset \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(c)$

Falls $w \circ \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) = \emptyset$, ist diese Aussage trivial.

Sei nun $v \in w \circ \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b)$, so folgt: ex. $u \in \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b)$ mit $g(v) = g(w) \cdot g(u)$. Nach Definition von $\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b)$ gilt $g(u)\delta a = b$.

Es folgt: $g(v)\ \delta\ a = g(w)\ \delta\ (g(u)\delta a) = g(w)\ \delta\ b$. Dies gilt für alle $v \in w \circ \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b)$. Somit gilt: $w \circ \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(b) \subset \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(g(w)\delta b)$

„<=" Sei $\overline{Z} = \{Z_i \mid i \in J\}$. Definiere (A,X,δ,a,g,Y) wie folgt: $A = J$, $a = i \mid e_o \in Z_i$. Für $x \in X$, $j \in J$ definieren wir:

$$x\ \delta\ j = \begin{cases} i & \text{, falls } x \in g(F(Y)) \text{ und } \emptyset \neq g^{-1}(x) \circ Z_j \subset Z_i \\ \text{beliebig,} & \text{falls } x \notin g(F(Y)) \text{ oder } g^{-1}(x) \circ Z_j = \emptyset \end{cases}$$

Behauptung: $\tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(i) = Z_i$ f.a. $i \in J$

Es genügt zu zeigen: $\tau_{\mathfrak{A}}(w) = i \Rightarrow w \in Z_i$ f.a. $w \in F(Y)$

Für $w = e_o$ ist die Behauptung richtig, da nach Definition $\tau_{\mathfrak{A}}(e_o) = a$ und $e_o \in Z_a$. Sei nun $w = w_n \circ w_{n-1} \cdots \circ w_1$ mit $w_i \in E$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n.

Verankerung: n=1 $\tau_{\mathfrak{A}}(w_1) = i \Rightarrow g(w_1)\delta a = i$. Wegen $e_o \in Z_a$ gilt $w_1 \circ Z_a \neq \emptyset$. Damit gilt aber nach Definition von δ: $w_1 \circ Z_a \subset Z_i$ und damit $w_1 \in Z_i$.

Induktionsschluß auf n

Sei $w_n \circ \ldots\ldots \circ w_1 \in \tau_{\mathfrak{A}}^{-1}(i)$. Es folgt: $(g(w_n) \cdot \ldots \cdot g(w_1))\delta a = i$

Sei $g(w_{n-1}) \cdot \ldots \cdot g(w_1)\delta a = j$, so folgt nach Induktionsvoraussetzung: $w_{n-1} \circ \ldots \circ w_1 \in Z_j$. Ferner gilt dann $g(w_n)\delta j = i$

Da $w_n \circ Z_j \neq \emptyset$, folgt nach Definition von δ: $w_n \circ Z_j \subset Z_i$ und somit: $w_n \circ w_{n-1} \cdot \ldots \circ w_1 \in Z_i$

(5.5) Satz

Sei $(F(Y), \circ)$ ein Freies Assoziatives System und g die zugehörige Karte, so gilt:

1) Z_g ist bezüglich der Operation inf abgeschlossen

2) Ist ferner $w \circ v$ f.a. $w, v \in F(Y)$ definiert, so ist Z_g auch bezüglich der Operation sup abgeschlossen.

Beweis: 1) Ann.: $Z_1, Z_2 \in Z_g$

Beh.: Für $\inf(Z_1, Z_2)$ gelten die Aussagen (5.4)(1),(2).

$\inf(Z_1,Z_2)$ ist endlich (trivial).

Zu (2): Seien $Z_i^1 \in Z_i$ $i=1,2$, $w \in F(Y)$, so ex. $Z_i^2 \in Z_i$ $i=1,2$ so daß $w \circ Z_i^1 \subset Z_i^2$ $i=1,2$. Daraus folgt: $w \circ (Z_1^1 \cap Z_2^1) \subset Z_1^2 \cap Z_2^2$

Damit ist (5.4)(2) für $\inf(Z_1,Z_2)$ nachgewiesen.

2) Beh.: Für $\sup(Z_1,Z_2)$ gelten die Aussagen (5.4)(1),(2).

(1) ist trivial. Zu (2): Sei $w \in F(Y)$. Wir zeigen:

Sind $x,y \in F(Y)$ verbindbar bezüglich Z_1,Z_2, so auch $w \circ x$, $w \circ y$.

Sei $x = x_1,x_2,\ldots,x_n = y$ eine Folge, so daß zu jedem i $1<i\leq n$ ein $\overline{Z}_i \in Z_1 \cup Z_2$ ex., so daß $x_{i-1},x_i \in \overline{Z}_i$.

Es folgt: $w \circ x_{i-1}$, $w \circ x_i \in w \circ \overline{Z}_i$. Zu w, $\overline{Z}_i$ ex. $\overline{Z}_j \in Z_1 \cup Z_2$ mit $w \circ \overline{Z}_i \subset \overline{Z}_j$. Also gilt: $w \circ x_{i-1}$, $w \circ x_i \in \overline{Z}_j$.

Hiermit folgt, daß $w \circ x$, $w \circ y$ verbindbar sind.

VI. o-reguläre Ausdrücke und o-reguläre Ereignisse

In diesem Kapitel wollen wir die Operationen der Ereignisalgebra der regulären Ereignisse auf die Sprachklassen B_g übertragen.

(6.1) Definition

Sei $(F(Y),o)$ ein Freies Assoziatives System, $S_1, S_2 \subset F(Y)$.

$S_1 \text{ o } S_2 = \{ s_1 \text{ o } s_2 \in F(Y) \mid s_i \in S_i \quad i=1,2 \}$

$S_1+ = \{ s_1 \text{ o } s_2 \ldots\ldots \text{o } s_n \in F(Y) \mid n \in N, \; s_i \in S_1 \} \cup \{e_o\}$

(6.2) Definition

Wir wollen nun erklären , was wir unter einem o-regulären Ausdruck n-ten Grades A^n und dem durch ihn dargestellten o-regulären Ereignis $S(A^n)$ verstehen. $(F(Y),o)$ vorgegeben. o-reguläre Ausdrücke sind spezielle Wörter über dem Alphabet: $\{ w \mid w \in E \} \cup \{ (,),o,\cup,+,\emptyset,e_o \}$

n=1: $A^1 \in E$ oder $A^1 = \emptyset$ oder $A^1 = e_o$

$S(A^1) = \{A^1\} \subset F(Y)$. Dabei ist $\emptyset$ die leere Menge.

n>1: Sei A^n o-regulärer Ausdruck n-ten Grades, so sei (A^n+) o-regulärer Ausdruck n+1-ten Grades.

Seien A_1, A_2 o-reguläre Ausdrücke mit Grad $\leq$ n, so daß wenigstens einer von ihnen den Grad n hat, so sind $(A_1 \cup A_2)$, $(A_1 \circ A_2)$ o-reguläre Ausdrücke n+1-ten Grades.

$S(A^n+) \underset{def}{=} S(A^n)+$, $S(A_1 \cup A_2) \underset{def}{=} S(A_1) \cup S(A_2)$

$S(A_1 \circ A_2) \underset{def}{=} S(A_1) \circ S(A_2)$

(6.3) Definition

$C_o = \{ S(A) \mid A \text{ ist o-regulärer Ausdruck} \}$ sei die Klasse der o-regulären Ereignisse bei festem $(F(Y), o)$.

(6.4) Satz

Sei $(F(Y), o)$ ein Freies Assoziatives System und g die zugehörige Karte, so gilt: $B_g \subset C_o$

Beweis: Zu $w \in F(Y)$ definieren wir

$$T(w) = \left\{ v \;\middle|\; \begin{array}{c} v \in F(Y) \text{ und ex. } u \neq e_o, w \text{ mit} \\ w = u \circ v \end{array} \right\}$$

T(w) ist die Menge der nicht trivialen rechtsseitigen Teiler von w bzgl.,o,

Sei nun $\mathfrak{A} = (A, X, \delta, a, g, Y)$ ein überlagerter Automat.

o.w.E.: $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ $a = 1$. Sei $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq k \leq n$:

$$S^k_{i,j} \underset{def}{=} \{ w \mid g(w)\delta j = i \text{ und f.a. } q \in T(w) \text{ gilt: } g(q)\delta j \leq k \}$$

$S^k_{i,j}$ besteht aus allen Wörtern von F(Y), die den Zustand j in den Zustand i überführen und deren nicht triviale Rechtsteiler i in Zustände $\leq$ k überführen.

Wir beweisen nun folgende Rekursionsformel:

$S^{k+1}_{i,j} = S^k_{i,j} \cup S^k_{i,k+1} \circ (S^k_{k+1,k+1}+) \circ S^k_{k+1}$ für $0 \leq k \leq n-1$

„$\supset$": $S^k_{i,j} \subset S^{k+1}_{i,j}$ ist trivial

Sei $w \in S^k_{i,k+1} \circ (S^k_{k+1,k+1}+) \circ S^k_{k+1,j}$

Es folgt: $w = v \circ w_1 \circ w_2 \ldots\circ w_n \circ u$ mit (a)-(c)

(a) $g(u)\delta j = k+1$ und f.a. $q \in T(u)$ ist $g(q)\delta j \leq k$

(b) $g(w_i)\delta(k+1) = k+1$ und f.a. $q \in T(w_i)$ ist $g(q)\delta(k+1) \leq k$

(c) $g(v)\delta(k+1) = i$ und f.a. $q \in T(v)$ ist $g(q)\delta(k+1) \leq k$

Wegen $g(v_1 \circ v_2) = g(v_1)\cdot g(v_2)$ f.a. $v_i \in F(Y)$ und weil die Darstellung $w = v_1 \circ v_2 \ldots \circ v_n \mid v_i \in E$ eindeutig ist, folgt aus (a)-(c): $w\delta j = i$, $q\delta j \leq k+1$ f.a. $q \in T(w)$

„$\subset$": Sei $w \in S^{k+1}_{i,j}$, so ist entweder $w \in S^k_{i,j}$ oder es ex. eine Darstellung:

$w = v \circ w_n \circ w_{n-1} \circ \ldots \circ w_1 \circ u$ mit

$v \in S^k_{i,k+1}$, $w_i \in S^k_{k+1,k+1}$, $u \in S^k_{k+1,j}$

Wieder benutzen wir dabei, daß $g(w_1 \circ w_2) = g(w_1)\cdot g(w_2)$ und daß die Darstellung $w = v_1 \circ v_2 \ldots \circ v_n \mid v_i \in E$ eindeutig ist.

$S^0_{i,j}$ ist eine Teilmenge von $E \cup \{e_0\}$ und somit o-regulär

Durch Induktion über k folgt mit Hilfe der Rekursionsformel $S^k_{i,j}$ ist o-regulär. Somit sind alle in $\mathfrak{A}$ darstellbaren Ereignisse o-regulär. Beim Beweis wurde hier eine Methode benutzt, die für endliche Automaten von Gluschkow angegeben wurde.

Um die Umkehrung von Satz (6.4) nämlich $C_o \subset B_g$ zu zeigen, leiten wir zunächst Darstellungen von o-regulären Ereignissen mit ,standard regular events, her.

(6.5) Definition

Eine Sprache $B \subset F(Z)$ | Z endlich heißt ,standard regular event, über Z, wenn es zwei Mengen $M_1, M_2 \subset Z \times Z$ gibt, mit:

$$B = \left\{ w \;\middle|\; \begin{array}{ll} 1)\ w \in t \cdot F(Z) \cap F(Z) \cdot \bar{t} & \mid\ (t,\bar{t}) \in M_1 \\ 2)\ \text{aus } w \in F(Z) \cdot t \cdot \bar{t} \cdot F(Z) & \mid\ (t,\bar{t}) \in Z \times Z \\ \qquad\qquad \text{folgt: } (t,\bar{t}) \in M_2 & \end{array} \right.$$

$$[B] = \left\{ z_1 z_2 \cdot \ldots \ldots \cdot z_n \;\middle|\; (z_i, z_{i+1}) \in M_2 \quad i=1,\ldots,n-1 \right\}$$

(6.6) Definition

Sei $(F(Y), o)$ ein Freies Assoziatives System, $B \subset F(Z)$ ein ,standart regular event, und $f: Z \dashrightarrow E$ Abbildung.

$$f(B) \underset{def}{=} \left\{ f(z_1) \circ f(z_2) \circ \ldots \circ f(z_n) \in F(Y) \;\middle|\; z_1 \ldots z_n \in B \right\}$$

(6.7) Satz

Sei $(F(Y), o)$ ein Freies Assoziatives System, R ein o-reguläres Ereignis, so ex. eine Darstellung $R = f(B) \left(\cup \{e_o\} \right)$ mit (1), (2).

(1) B ist ,st. reg. ev., über Z, dargestellt durch M_2,

$M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1)$. Dabei seien $p_i: Z \times Z \dashrightarrow Z \quad i=1,2$

die beiden Projektionen.

(2) f ist eine Abbildung $f: Z \dashrightarrow E$.

Bem.: $R = f(B) \ (\cup \{e_o\})$ soll heißen:

$$R = \begin{cases} f(B) \cup \{e_o\} & \text{falls } e_o \in R \\ f(B) & \text{falls } e_o \notin R \end{cases}$$

Zunächst beweisen wir folgenden Hilfssatz:

(6.8) Hilfssatz

Sei $(F(Y),o)$ ein Fr. As. Sy. , B_i ,st. reg. ev., über Z_i $i=1,2$ mit $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$, dargestellt durch M_1^i, M_2^i mit $M_1^i = p_1^i(M_1^i) \times p_2^i(M_1^i)$ $i=1,2$. Seien Ferner $f_i: Z_i \dashrightarrow E$ Abb. und $f: Z_1 \cup Z_2 \dashrightarrow E$ sei definiert durch $f_{/Z_i} = f_i$ $i=1,2$.

1) es gilt: $B = B_1 \cup B_2$ ist ,st. reg. ev., über $Z_1 \cup Z_2$ und

wird dargestellt durch:

$M_1 = (\ p_1^1(M_1^1) \cup p_1^2(M_1^2)\ ) \times (\ p_2^1(M_1^1) \cup p_2^2(M_1^2)\ )$

$M_2 = M_2^1 \cup M_2^2$

Ferner: $f_1(B_1) \cup f_2(B_2) = f(B)$

2) es gilt: $B = B_1 \cdot B_2$ ist ,st. reg. ev., über $Z_1 \cup Z_2$ und

wird dargestellt durch:

$M_1 = p_1^1(M_1^1) \times p_2^2(M_1^2)$

$M_2 = M_2^1 \cup M_2^2 \cup p_2^1(M_1^1) \times p_1^2(M_1^2)$

Ferner: $f_1(B_1) \ o \ f_2(B_2) = f(B)$

3) es gilt: $B = (B_1+) - \{e_o\}$ ist ,st. reg. ev., über Z_1

(+ bzgl. $\cdot$) und wird dargestellt durch:

$M_1 = M_1^1$
$M_2 = M_2^1 \cup p_2^1(M_1^1) \times p_1^1(M_1^1)$
Ferner: $f_1(B) \cup \{e_o\} = f_1(B_1)+$

Bem.: p_i^k: $Z_k \times Z_k \dashrightarrow Z_k$ $k=1,2$ $i=1,2$ seien die Projektionen.

Der Beweis folgt jeweils sofort aus der Definition des „st. reg. ev.„ (6.5) und der Definition (6.6).

Beweis von (6.7)

Sei $R = S(A^n)$ und A^n o-regulärer Ausdruck vom Grade n.
Beweis durch Induktion über n.

n = 1: a) $R = \{x\}$ $| x \in E$. Setze: $Z = \{z_1\}$,
$M_1 = \{(z_1,z_1)\}$ $M_2 = \emptyset$, $f(z_1) = x$
b) $R = \{e_o\}$, oder $R = \emptyset$. Setze: $Z = \{z_1\}$ $M_1, M_2 = \emptyset$ und $f(z_1) \in E$ beliebig.

Induktionsschluß von n auf n+1

Es sind drei Fälle zu unterscheiden. A_i seien im Folgenden o-reguläre Ausdrücke vom Grad $\leq n$, $S(A_i) = f_i(B_i) \left(\cup \{e_o\}\right)$ seien Darstellungen nach (6.7).

(1) $A^{n+1} \equiv (A_1 \cup A_2)$. Damit ex. eine Darstellung
$R = f_1(B_1) \cup f_2(B_2) \left(\cup \{e_o\}\right)$
(2) $A^{n+1} = (A_1 \circ A_2)$. Damit ex. eine Darstellung
$R = f_1(B_1) \circ f_2(B_2) \left(\cup f_1(B_1)\right) \left(\cup f_2(B_2)\right) \left(\cup \{e_o\}\right)$

(3) $A^{n+1} = (A_1+)$. Damit ex. eine Darstellung

$R = f_1(B_1)+$

Um zu der in (6.7) angegebenen Darstellung zu gelangen, wendet man im Fall (1) (6.8)(1) an, im Fall(2) (6.8)(2) und dann gegebenenfalls wieder (6.8)(1), im Fall (3) wendet man (6.8)(3) an.

(6.9) Satz

Sei $(F(Y),o)$ ein Fr. As. Sy., g die zugehörige Karte, R ein o-reguläres Ereignis, so ex. ein überlagerter Automat (A,E',δ,a,g,Y) in dem R dargestellt wird. Also gilt: $B_o \subset B_g$

Beweis: Sei $R = f(B) \left(\cup \{e_o\} \right)$ eine Darstellung von R nach (6.7) mit B ,st. reg. ev., über Z, dargestellt durch M_1, M_2, so daß $M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1)$, $f : Z \dashrightarrow E \subset F(Y)$ Abb. Wir geben den Automaten (A,E',δ,a,g,Y) an. Es sei daran erinnert, daß $g: F(Y) \dashrightarrow F(E')$ definiert ist durch:

$g(w_1 \circ w_2 \circ \ldots\ldots \circ w_n) = w_1' w_2' \ldots . w_n' \mid w_i \in E, \quad g(e_o) = e$

A definieren wir rekursiv zusammen mit δ: $E' \times A \dashrightarrow A$.

Dabei sei A enthalten in $P(Z) \cup \{a\}$. $P(Z)$ sei die Potenzmenge von Z, a der Anfangszustand und es gelte $a \notin P(Z)$.

Sei $v' \in E'$: $v'\delta a \underset{def}{=} \{ z \in Z \mid f(z) = v \text{ und } z \in p_2(M_1) \}$

Sei nun $C \in P(Z)$ als Zustand bereits definiert, $v' \in E'$.

$v'\delta C \underset{def}{=} \{ z \in Z \mid f(z) = v \text{ und ex. } y \in C \text{ mit } (z,y) \in M_2 \}$

A sei die Menge aller Zustände, die man auf diese Weise rekursiv erhält. Die leere Menge ist insofern Endzustand, als kein Eingabesymbol aus ihr herausführt. Es gilt $e\delta a=a$ und auf keine andere Weise kann der Anfangszustand von einem anderen Zustand aus erreicht werden.

$T(R) \underset{def}{=} \{ C \in A \mid \text{ex. } z \in C \text{ und } z \in p_1(M_1) \}$

Wir behaupten, daß $q \in f(B) \iff g(q)\delta a \in T(R)$

Beweis: „=>" Sei $q \in f(B)$. q hat eine eindeutige Darstellung $q = v_s \circ v_{s-1} \circ \dots \circ v_1 \mid v_i \in E$. Wegen $q \in f(B)$ ex. $z_s z_{s-1} \dots z_1 \in B \mid f(z_i) = v_i \quad i=1,\dots s$. Es gilt: $z_1 \in p_2(M_1)$ nach Definition des ,st. reg. ev., und daraus folgt: $z_1 \in v_1' \delta a$ nach Definition von $v_1' \delta a$.

Durch Induktion über k verifiziert man, daß für $k=1,..,s$

$z_k \in g(v_k \circ \dots \circ v_1)\, \delta\, a = (v_k' v_{k-1}' \dots v_1')\delta a$

Denn sei $z_{k-1} \in (v_{k-1}' \dots v_1')\delta a = C$, so folgt aus der Definition von $v_k'\delta C$: $z_k \in v_k'\delta C$ q.e.d.

Also gilt: $z_s \in g(q)\delta a$, und weil $z_s \in p_1(M_1)$ folgt: $g(q)\delta a \in T(R)$.

„<=" Sei $g(q)\ \delta a \in T(R)$. q hat eine eindeutige Darstellung $q = v_1 \circ v_2 \circ \dots \circ v_s \mid v_i \in E$.

Für $k=1,..,s$ weist man durch Induktion über k nach:

ex. $z_1 z_2 \dots z_k \in F(Z) \mid z_1 \in p_1(M_1), \quad f(z_i) = v_i \quad i=1,..,k$

$(z_i, z_{i+1}) \in M_2 \quad i=1,\dots,k-1$ und $z_k \in (v_k' v_{k-1}' \dots v_s')\delta a$

$k = 1$: Sei $(v_2'v_3'\ldots v_s')\delta a = C$, so gilt: $v_1'\delta C \in T(R)$

Die Behauptung folgt nun sofort aus der Definition von $v_1'\delta C$ und der Definition von $T(R)$.

<u>Schluß von k auf k+1:</u>

Sei $(v_k'v_{k+1}'\ldots v_s')\delta a = C$, $(v_{k+1}'\ldots v_s')\delta a = D$

Es gilt: $v_k'\delta D = C$. Nach Induktionsvoraussetzung ex. $z_1 z_2 \ldots z_k \in F(Z) \mid z_k \in C$, so daß alle obigen Forderungen erfüllt sind. Nach Definition von $v_k'\delta D$ ex. ein $z_{k+1} \in D \mid f(z_{k+1}) = v_{k+1}$ und $(z_k, z_{k+1}) \in M_2$. Damit sind aber alle obigen Forderungen an $z_1 z_2 \ldots z_{k+1}$ erfüllt.

Nach Definition von $v_s'\delta a$ folgt: $z_s \in p_2(M_1)$. Damit gilt: $v_1 \circ v_2 \ldots \circ v_s \in f(B)$. $f(B)$ wird also durch $T(R)$ dargestellt, $f(B) \cup \{e_o\}$ wird durch $T(R) \cup \{a\}$ dargestellt, also wird R in (A, E', δ, a, g, Y) dargestellt.

Diesem Beweis liegt eine Idee zugrunde, die für endliche Automaten auf Gluschkow zurückgeht.

Sei num B ein ,st. reg. ev., über Z und $f: Z \rightarrow E \cup \{e_o\}$ eine Abb., so übersieht man leicht, daß $f(B)$ sich darstellen läßt: $f(B) = f_1(B_1) \cup f_2(B_2) \cup \quad \cup f_k(B_k) \cup \{e_o\}$, wobei die Darstellungen $R_i = f_i(B_i)$ die Eigenschaften (6.7) (1),(2) haben. Damit können wir abschließend folgenden Satz formulieren:

(6.10) Satz

Sei (F(Y),o) ein Freies Assoziatives System und g die zughörige Karte, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) R ist in einem überlagerten Automaten mit der Karte g darstellbar.

(2) R ist ein o-reguläres Ereignis

(3) Es ex. eine Darstellung R = f(B) mit B ,standard regular event, über Z und $f: Z \dashrightarrow E \cup \{e_0\}$ Abbildung.

Durch die Konstruktionsverfahren, die zum Beweis der Äquivalenz der drei obigen Darstellungen angegeben wurden, ist ferner sicher gestellt, daß man diese Typen von Darstellungen ineinander überführen kann.

VII. Algebraische Charakterisierung o-regulärer Ereignisse.

(7.1) Definition

Sei $(F(Y),o)$ ein Freies Assoziatives System, W eine Menge mit einer binären Verknüpfung ,τ, die auf einer Teilmenge von $W \times W$ erklärt ist:

$$\tau: W \times W \supset V \longrightarrow W, \quad (w_1, w_2) \longmapsto w_1 \tau w_2$$

Eine Abbildung $\delta: F(Y) \longrightarrow W$ mit (1) heißt ein Homomorphismus $\delta: (F(Y),o) \longrightarrow (W,\tau)$.

(1) $\delta(\, y \;o\; x\,) = \delta(y)\tau\delta(x)$ f.a. $y,x \in W$

d.h. aus $y \;o\; x$ definiert folgt $\delta(y)\tau\delta(x)$ definiert und obige Gleichung.

(7.2) Satz

$S \in C_0 \iff$ ex. $\bar{\delta}$, W, $\overline{W}$ | $\bar{\delta}: (F(Y),o) \longrightarrow (W,\tau)$ ist ein sujektiver Homo., W ist endlich, $\overline{W} \subset W$ und $S = \bar{\delta}^{-1}(\overline{W})$

Beweis: „<=" Sei $g: F(Y) \longrightarrow F(E')$ die zu $(F(Y),o)$ gehörige Karte. Wir konstruieren einen überlagerten Automaten $\mathfrak{A} = (A, E', \delta, a, g, Y)$, indem S dargestellt wird.

Setze $A = W$, $a = \bar{\delta}(e_0)$ und definiere $\delta: E' \times A \longrightarrow A$ wie folgt:

$$x' \,\delta\, b = \begin{cases} \bar{\delta}(x)\tau b & \text{sofern dies definiert ist} \\ c \in W \text{ beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir behaupten zunächst, daß für die erweiterte Überführungsfunktion δ gilt: $g(w)\ \delta\ a = \bar{\delta}(w)$ f.a. $w \in F(Y)$.

Nach Definition von a gilt:

$g(e_o)\delta a = e\delta a = a = \bar{\delta}(e_o)$

Sei nun $w = w_n \circ w_{n-1} \circ \ldots \circ w_1 \mid w_i \in E$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über n.

<u>n = 1:</u> $\quad g(w_1)\delta a = w_1'\delta a = \bar{\delta}(w_1)\tau a = \bar{\delta}\ (w_1)$

Denn $a = \bar{\delta}(e_o)$ ist neutrales Element in W, weil $\bar{\delta}$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

<u>Induktionsschluß auf n:</u>

$g(w)\delta a = (w_n' w_{n-1}' \cdot \ldots \cdot w_1')\delta a = w_n'\delta(\ (w_{n-1}' \cdot \ldots \cdot w_1')\delta a\ )$

$= w_n'\delta(\bar{\delta}(\ w_{n-1} \circ \ldots \circ w_1)\ ) = \bar{\delta}(w_n)\tau\bar{\delta}(w_{n-1} \circ \ldots \circ w_1)$

$= \bar{\delta}(w_n \circ \ldots \circ w_1)$ q.e.d.

Es gilt nun: $\bar{\delta}^{-1}(\bar{W})$ wird durch $\bar{W} \subset A$ dargestellt. Denn es gilt: $w \in \bar{\delta}^{-1}(\bar{W}) \iff \bar{\delta}(w) \in \bar{W} \iff w'\delta a \in \bar{W}$

„=>" Sei $S \in C_o$ und in dem überlagerten Automaten $\mathfrak{A} = (A, X, \delta, a, g, Y)$ durch $\bar{A} \subset A$ dargestellt.

$H =_{def} \{g(w)\delta \mid w \in F(Y)\}$ Dabei sei $g(w)\delta : A \longrightarrow A$ die Abbildung, die durch $g(w)\delta : b \longmapsto g(w)\delta b$ f.a. $b \in A$ definiert wird. In H erklären wir eine assoziative Verknüpfung ‚τ', die der Hintereinanderschaltung von Abbildungen entspricht.

Es gilt dann: $(g(w)\delta)\tau(g(v)\delta)\ (b) = g(w)\delta(\ g(v)\delta b\ )$

$= (\ g(w)\cdot g(v)\ )\delta b = g(w \circ v)\delta b$ f.a. $b \in A$, sofern

nur $w \circ v$ definiert ist.

Folgerung: $\overline{\delta}: \begin{array}{rcl} (F(Y),\circ) & \longrightarrow & (H,\tau) \\ w & \longmapsto & g(w)\delta \end{array}$ ist surjektiver Homo.

$H_S \underset{def}{=} \{ h \in H \mid h(a) \in \overline{A} \}$

Behauptung: $S = \overline{\delta}^{-1}(H_S)$

„$\supset$" $w \in \overline{\delta}^{-1}(H_S) \Rightarrow g(w)\delta \in H_S \Rightarrow g(w)\delta a \in \overline{A} \Rightarrow w \in S$

„$\supset$" $w \in S \Rightarrow g(w)\delta a \in \overline{A} \Rightarrow g(w)\delta \in H_S \Rightarrow w \in \overline{\delta}^{-1}(H_S)$

VIII. Beispiele Freier Assoziativer Systeme.

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in N$ $\qquad m \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i$

$b_1, b_2, \ldots, b_n \in \{-1, 1\}$

und zu $s \mid 0 < s < m$ sei eine Darstellung

(8.1) $\quad s = s_1 + s_2 + \ldots + s_{n+1} \quad \mid s_i \in N \cup \{0\}$ gegeben.

Z sei die Menge dieser Darstellungen.

(8.2) Folgerung

Zu $w \in F(Y)$ ex. eine eindeutige Darstellung

(8.2a) $\quad w = w_1 \, v_1 \, w_2 \, v_2 \cdots w_n \, v_n \, w_{n+1}$

mit $L(v_i) = K \cdot a_i \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad K \in N \cup \{0\}$

und $L(w_1 \, w_2 \cdots w_{n+1}) = L(w_1) + L(w_2) + \ldots + L(w_{n+1})$

ist eine Darstellung nach (8.1)

Beweis: Es ex. eine eindeutige Aufspaltung

(8.2b) $\quad L(w) = K \cdot m + s \quad \mid K, s \in N \cup \{0\}, \; s < m$,

Es folgt: $L(v_i) = K \cdot a_i$, $L(w_1 \, w_2 \cdots w_{n+1}) = s$, $L(w_i) = s_i$,

wobei $s = s_1 + s_2 + \ldots + s_{n+1}$ die Darstellung von s nach (8.1) ist. Damit ist die Darstellung (8.2a) aber eindeutig bestimmt.

(9.3) Definition

$P_m(Y) = \{ w \in F(Y) \mid L(w) = 0 \bmod m \}$

(8.4) Definition

Wir definieren nun eine binäre Operation ,o, auf $F(Y)$

$o : P_m(Y) \times F(Y) \dashrightarrow F(Y)$. $o = o(a_1,..,a_n,b_1,..,b_n,Z)$

wird durch $a_1,...,a_n,b_1,..,b_n,Z$ eindeutig bestimmt.

Sei $w \in P_m(Y)$, $q \in F(Y)$, seien $w = w_1\ w_2\ ....w_n$

$q = p_1\ q_1\ p_2\ q_2 ....q_n\ p_{n+1}$ die Darstellungen von w,q

nach (8.2a)

$$w \text{ o } q \underset{\text{def}}{=} p_1\ r_1\ p_2\ .....p_n\ r_n\ p_{n+1} \quad \Big| \quad r_i = \begin{cases} w_i\ q_i & \text{falls } b_i=1 \\ q_i\ w_i & \text{"} \quad b_i=-1 \end{cases}$$

(8.5) Satz

$(F(Y),o)$ nach (8.4) ist ein Freies Assoziatives System.

$E = \{w \mid 0 < L(w) \leq m\}$ ist das freie Erzeugendensystem

von $F(Y)$ bezüglich ,o,.

Beweis: Assoziativität

Seien $w = w_1\ w_2 ....w_n$ $\quad v = v_1\ v_2 ....v_n \quad | \ w,v \in P_m(Y)$

$q = p_1\ q_1\ p_2\ q_2 .....p_n\ q_n\ p_{n+1} \quad | q \in F(Y)$ Zerlegungen von

w,v,q nach (8.2a). Man verifiziert sofort, daß

$$w \text{ o } (v \text{ o } q) = (w \text{ o } v) \text{ o } q = p_1\ r_1\ p_2\ r_2 ....p_n\ r_n\ p_{n+1}$$

$$\Big| \quad r_i = \begin{cases} w_i\ v_i\ q_i & b_i = 1 \\ q_i\ v_i\ w_i & b_i = -1 \end{cases}$$

Behauptung: E ist freies Erzeugendensystem.

Zu zeigen: zu $w \in F(Y) - \{e\}$ ex. eine eindeutige Darstellung: $\quad w = w_1 \text{ o } w_2 \text{ o } ...\text{o } w_s \quad | \ w_i \in E$

Sei $L(w) = K \cdot m + s$ die Aufspaltung nach (8.2b).

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über K.

K = 0: Es gilt: $w \in E$ und $L(w) < m$. Es ist klar, daß die Darstellung $w = w$ die einzig mögliche ist.

Induktionsschluß: $K > 0$

w läßt sich eindeutig aufspalten:

(8.5a) $\quad w = p \circ q \mid p \in E,\ q \in F(Y)$

denn sei $w = w_1\, v_1\, w_2\, v_2 \cdot \ldots \cdot w_n\, v_n\, w_{n+1}$ die Aufspaltung nach (8.2a) und zerlege v_i wie folgt:

$$v_i = \begin{cases} p_i q_i \mid L(p_i) = a_i & \text{falls } b_i = 1 \\ q_i p_i \mid L(p_i) = a_i & \text{falls } b_i = -1 \end{cases} \qquad i=1,.,n$$

Setzt man $p = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, $q = w_1 q_1 w_2 \ldots w_n q_n w_{n+1}$, so ist $w = p \circ q$ die einzig mögliche Darstellung (8.5a).

Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung $w = x_1 \circ x_2 \ldots \circ x_n \mid x_i \in E$ durch Induktion.

(8.6) Satz

Sei $g: F(Y) \dashrightarrow F(E')$ die zu $(F(Y), \circ)$ gehörige Karte und $\overline{E} = \{w \in E \mid L(w) = m\}$, so gilt: $g(F(Y)) = \bigcup\limits_{L(w\ ) < m} F(\overline{E}') \cdot w'$

Beweis: trivial. Damit folgt nach (8.6), (4.4): für zwei o-reguläre Ereignisse A, B ist entscheidbar ob $A \subset B$.

Denn für die reguläre Menge $\bigcup\limits_{L(w\ ) < m} F(\overline{E}') \cdot w'$ kann man eine contextfreie Grammatik angeben, die sie erzeugt.

(8.7) Satz

Sei $(F(Y),o)$ ein Freies Assoziatives System nach (8.4) und S ein o-reguläres Ereignis, so ex. eine Darstellung:

$$S = \bigcup_{L(w)<m} \left(f^W(B^W) \circ w \left(\cup\{w\}\right)\right) \quad \text{mit (1), (2)}$$

(1) B^W ist ‚st. reg. ev.' über T, dargestellt durch $M_1^W = p_1(M_1^W) \times p_2(M_1^W)$, M_2^W

(2) $f^W: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ Homo. mit $f^W(t) \in \overline{E}$ f.a. $t \in T$.

und umgekehrt ist jede so dargestellte Menge ein o-reguläres Ereignis.

Beweis: a) Beh.: zu $S \in C_0$ ex. eine obige Darstellung.

Sei $S = f(B)\left(\cup\{e_0\}\right)$ eine Darstellung nach (6.7). Es gilt: (1)-(3).

(1) B ‚st. reg. ev.' über T, dargest. durch $M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1)$, M_2

(2) $f: T \dashrightarrow E$ Abbildung

(3) $f(B) = \left\{ f(t_1) \circ f(t_2) \circ \ldots \circ f(t_n) \in F(Y) \mid t_1 t_2 \cdot \ldots \cdot t_n \in B \right\}$

Wir definieren:

$$\overline{T} = \left\{ t \in T \mid f(t) \in \overline{E} \right\}$$

und das ‚st. reg. ev.' B^W über $\overline{T}$ durch M_1^W, M_2^W wie folgt:

$$M_2^W = \left\{ (t_1,t_2) \in M_2 \mid t_i \in \overline{T},\ i=1,2 \right\}$$

$$M_1^W = \left(\overline{T} \cap p_1(M_1)\right) \times \left\{ t \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ex. } (t,t_1) \in M_2 \text{ so daß } t \in \overline{T}, \\ t_1 \in p_2(M_1),\ f(t_1) = w \end{array} \right\}$$

Der Homo. $f^W : (F(\overline{T}),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ werde durch

$$t \longmapsto f(t) \quad \text{f.a. } t \in \overline{T} \text{ definiert.}$$

(8.7a) Lemma

$f^W(B^W) \circ w = \{ v \in f(B) \mid v = q \circ w \,,\, q \neq e \}$

„$\subset$" Sei $q \in f^W(B^W)$, $q = f(t_1) \circ \ldots \circ f(t_n)$, $t_1 t_2 \ldots t_n \in B^W$.

Nach Definition von M_1^W ex. $t_{n+1} \in \overline{T} \mid t_1 t_2 \ldots t_{n+1} \in B$,

$f(t_{n+1}) = w$. Es folgt: $q \circ w \in f(B)$.

„$\supset$" Sei $v = f(t_1) \circ \ldots \circ f(t_n) \mid f(t_n) = w$, $t_1 t_2 \ldots t_n \in B$

Es folgt: $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \in \overline{T}$, $t_1 t_2 \ldots t_{n-1} \in B^W$ und damit:

$v \in f^W(B^W) \circ w$.

Somit ist (8.7a) bewiesen und es ex. eine obige Darstellung für S. Die Umkehrung ist trivial, denn es gilt: $f^W(B^W) \in C_o$.

Wir geben noch eine weitere Möglichkeit an, Freie Assoziative Systeme zu konstruieren.

Sei $S \subset F(E')$ eine reguläre Menge, so daß gilt: mit $w \in S$ ist auch jedes Teilwort von w in S, $\{e\}$, $E' \subset S$.

$<_{E'}$, $<_Y$ seien totale Ordnungen auf $F(E')$ bzw. $F(Y)$, so daß die Nachfolgerfunktion jeweils berechenbar ist. $<_S$ sei die Einschränkung von $<_{E'}$ auf S, N_S die zugehörige Nachfolgerfunktion auf S. Die Karte $g: F(Y) \dashrightarrow S \subset F(E')$ definiere man durch: Das kleinste Element von $F(Y)$ werde auf das kleinste Element von S abgebildet und: $g(N_Y(w) = N_S(g(w))$ f.a. $w \in F(Y)$.

Die Karte g erfüllt (5.3)(a),(b) und die Voraussetzungen von (4.4).

IX. Umfang der erzeugten Sprachklassen.

Wir beschäftigen uns hier mit der Frage, wann für zwei Sprachklassen C_{o_1}, C_{o_2} mit o_1, o_2 nach (8.4) gilt: $C_{o_1} = C_{o_2}$ oder $C_{o_1} \subset C_{o_2}$. Zunächst sei noch auf einige Spezialfälle von Freien Assoziativen Systemen nach (8.4) hingewiesen.

(9.1) Spezialfälle

$o(1,1,Z)$ ist die Verknüpfung ,·, des freien Monoids $F(Y)$. Die Angabe von Z ist hier bedeutungslos. C_o ist hier die Klasse der regulären Ereignisse.

Betrachte $o(a_1,a_2,1,-1,Z) \mid Z$ wie folgt: $s = 0 + s + 0$ sei die Darstellung (8.1) f.a. $s \mid L(s) < a_1 + a_2$

C_o ist dann eine Klasse schiefförmig linearer Sprachen. Insbesondere ist für $a_1,a_2 = 1$ C_o die Klasse der gleichförmig linearen Sprachen. Siehe dazu Amar und Putzolu [1,2].

(9.2) Definition

Sei $F(T)$ freies Monoid. Die Abb. $sp: F(T) \dashrightarrow F(T)$ sei wie folgt definiert: $sp(e) = e$, $sp(t_1 \ldots t_n) = t_n \ldots t_1 \mid t_i \in T$

sp heiße die Spiegelung. Man verifiziert folgendes Lemma:

(9.3) Lemma

Sei $f: F(T) \dashrightarrow F(Y)$ Abb., so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) ex. Homo. $\varphi: (F(T),\cdot) \dashrightarrow F(Y),o) \mid f = \varphi$ sp

(2) Es gilt: $f(x\cdot y) = f(y) \circ f(x)$ f.a. $x,y \in F(T)$

(3) $f(e_T) = e_o$, $f(t_1 t_2 \ldots t_n) = f(t_n) \circ \ldots \circ f(t_2) \circ f(t_1)$
$\mid t_i \in T$

(9.4) Definition

Eine Abbildung $f: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ mit (9.3) (1) heiße Antihomomorphismus.

(9.5) Definition

Sei $o(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,Z)$ Verkn. nach (8.4),
$f: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ Homo.
$f_i : F(T) \dashrightarrow F(Y)$ seien die durch (1),(2) eind. best. Abb.

(1) $f(w) = f_1(w)\cdot f_2(w) \ldots\ldots f_n(w)$ f.a. $w \in F(T)$

(2) $L(f_i(w)) = K_w a_i$ $i=1,\ldots,n \mid K_w \in N \cup \{0\}$

(9,6) Satz

Sei $o(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,Z)$ Verkn. nach (8.4), so gilt (a),(b).

(a) Ist $f: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ Homo, so gilt (c).

(b) Seien $f_i: F(T) \dashrightarrow F(Y)$ $i=1,\ldots,n$ Abb., so daß (c) gilt, Daraus folgt $\sum_i L(f_i(w)) = K_w \cdot \underbrace{\sum q_i}_{1} = K_w \cdot s$.

$$\Rightarrow \left(w \in f(F(T)) \Rightarrow f(w) \equiv 0 \, (s) \right)$$

Also nicht zu jeder Abb. f gibt es eine solche Aufspaltung. Da aber f Homomorphismus folgt f für jedes v und w ist $f(v) \circ f(w)$ definiert. d.h. $f(w) \equiv 0 \, (s)$.

dann ex. genau ein Homo. $g: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$

mit $g_i = f_i \quad i=1,..,n$

(c) (1) $L(f_i(t)) = K_t a_i \quad | \ K_t \in N \cup \{0\} \quad$ f.a. $t \in T$

(2) $b_i = 1 \Rightarrow f_i: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),\cdot)$ Homo.

$b_i = -1 \Rightarrow f_i: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),\cdot)$ Antihomo.

<u>Beweis:</u> (a) (1) Aus $f: (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o)$ Homo. folgt nach Definition der f_i: $Lf_i(t) = K_t a_i \quad$ f.a. $t \in T$

(2) $f(x) = f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots . f_n(x)$

$f(y) = f_1(y)\cdot f_2(y)\ldots . f_n(y)$ ist die Aufspaltung nach (8.2a). Es folgt nach Definition von o und der f_i:

$f(x\cdot y) = f(x) \text{ o } f(y) = f_1(x\cdot y)\cdot f_2(x\cdot y)\cdot \ldots \cdot f_n(x\cdot y)$

$$\text{mit } f_i(x\cdot y) = \begin{cases} f_i(x)\cdot f_i(y) & \text{falls } b_i = 1 \\ f_i(y)\cdot f_i(x) & \text{" } \quad b_i = -1 \end{cases}$$

Dies gilt für alle $x,y \in F(T)$, und somit gilt (9.6) (c) (2).

(b) g ist eindeutig wegen: $g(w) = f_1(w)\cdot f_2(w)\cdot \ldots \cdot f_n(w)$ f.a. $w \in F(T)$

Definiere also:

$$g(w) = f_1(w)\cdot f_2(w)\cdot \ldots \cdot f_n(w) \quad \text{f.a. } w \in F(T)$$

Aus (c) (1) folgt: $g(t) = K_t m \quad$ f.a. $t \in T$. Ferner gilt:

$g(xy) = f_1(xy)\cdot f_2(xy)\ldots . f_n(xy)$ (nach Def. der f_i)

$= (f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots . f_n(x)) \text{ o } (f_1(y)\cdots f_n(y))$ (nach (8.4))

$= g(x) \text{ o } g(y)$

Somit ist $g: (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o)$ Homo.

(9.7) Satz

Seien $o_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,Z)$, $o_2(a_1,\dots,a_n,d_1,\dots,d_n,Z)$

ass. Verkn. nach (8.4), $b_i = -d_i$ $i=1,\dots,n$, so gilt: $C_{o_1} = C_{o_2}$.

Beweis: Sei $S \in C_{o_1}$. Es ex. Darstellung nach (8.7) bzgl. o_1:

$$S = \bigcup_{L(v) < m} \left(f^v(B^v) \; o_1 \; v \; (\cup\{v\}) \right) \quad \text{mit}$$

B^v „st. reg. ev.", über T, f^v: $(F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_1)$ Homo.

Definiere den Homo. $\overline{f^v}$: $(F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_2)$ durch:
$\overline{f^v}(t) \longrightarrow f^v(t)$ f.a. $t \in T$

wegen $w \; o_1 \; v = v \; o_2 \; w$ f.a. $v,w \mid L(v), L(w) = 0 \bmod m$ folgt:

$$S = \bigcup_{L(v) < m} \left(\overline{f^v}(sp(B^v)) \; o_2 \; v \; (\cup\{v\}) \right)$$

ist Darstellung nach (8.7) bzgl. o_2, denn $sp(B^v)$ ist wieder ein „st. reg. ev.".

Es gilt also $C_{o_1} \subset C_{o_2}$ und aus Symmetriegründen $C_{o_1} = C_{o_2}$.

(9.8) Satz

Seien $o_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,Z_1)$, $o_2(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,Z_2)$

ass. Verkn. nach (8.4), so gilt: $C_{o_1} = C_{o_2}$.

Beweis:

Wir beschränken uns zunächst auf folgenden Spezialfall:

(9.8a) Lemma

Z_1, Z_2 mögen sich nur für ein festes $s<m$ und zwar wie folgt unterscheiden:

$$s = s_1^1 + s_2^1 + \ldots\ldots\ldots + s_{n+1}^1$$

$$s = s_1^2 + s_2^2 + \ldots\ldots\ldots + s_{n+1}^2$$

seien die Aufspaltungen von s bzgl. o_1 bzw. o_2 nach (8.1).

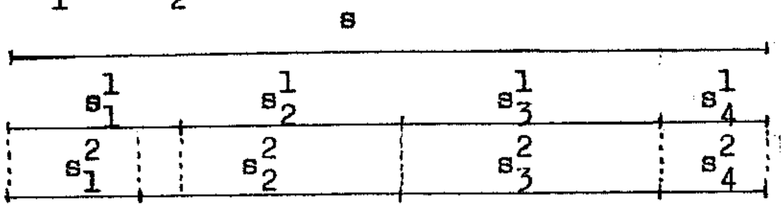
Es gelte: $s_i^1 = s_i^2 \quad i \neq \mu,\mu+1, \quad s_\mu^1 = s_\mu^2 + 1, \quad s_{\mu+1}^2 = s_{\mu+1}^1 + 1$

Ferner: $b_\mu = 1, \ \mu = 1.$

Beh.: $C_{o_1} = C_{o_2}$.

Beweis: (a) $C_{o_1} \subset C_{o_2}$

Skizze (n=3)



Sei $S \in C_{o_1}$. Nach (8.7) ex. eine Darstellung:

$$S = \bigcup_{L(w)<m} \left(f^w(B^w)\ o_1\ w\ \left(\cup\{w\}\right)\right) \qquad \text{mit (1),(2)}$$

(1) B^w ist „st. reg. ev." über T, dargest. durch

$M_1^w = p_1(M_1^w) \times p_2(M_1^w)$, M_2^w.

(2) $f^w: (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_1)$ Homo. $\mid f(t) \in \bar{E}_1$ f.a. $t \in T$.

Es gilt nun trivial:

$f^w: (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_2)$ Homo., und damit:

$f^w(B^w)\ o_1\ w = f^w(B^w)\ o_2\ w \in C_{o_2}$ falls $L(w) \neq s$.

Da C_{o_2} Boolesche Algebra ist und alle endlichen Mengen enthält, können wir nunmehr o.B.d.A. annehmen:

$S = f(B)\ o_1\ w$ mit (1)-(3)

(1) B ist ‚st. reg. ev.' über T, dargestellt durch

$$M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1),\ M_2$$

(2) $f\colon (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_1)$ Homo. $\mid f(t) \in \overline{E}_1 = \overline{E}_2$ f.a. $t \in T$

(3) $L(w) = s$

Man übersieht sofort, daß es eine eindeutige Darstellung gibt:

$$S = \bigcup_{L(v)=s} \left(S_v\ o_2\ v\ (\sim\{v\})\right) \mid S_v \in P_m(Y) - \{e\}$$

Es genügt, für ein festes v zu zeigen: $S_v\,o_2\,v \in C_{o_2}$

Sei $S_v \neq \emptyset$, $a \in S_v\ o_2\ v$. Seien:

(9.8b) $a = w_1^1\ v_1^1\ w_2^1 \ldots\ldots\ldots w_n^1\ v_n^1\ w_{n+1}^1$

$w = w_1^1\ \ w_2^1\ \ldots\ldots\ w_n^1\ \ w_{n+1}^1$

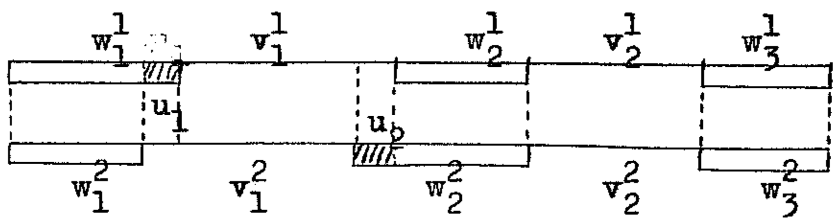
Zerlegungen nach (8.2a) bzgl. Z_1

(9.8c) $a = w_1^2\ v_1^2\ w_2^2\ \ldots\ldots\ w_n^2\ v_n^2\ w_{n+1}^2$

$v = w_1^2\ \ w_2^2\ \ldots\ldots\ w_n^2\ \ w_{n+1}^2$

Zerlegungen nach (8.2a) bzgl. Z_2

(9.8d) Skizze (n=2)



Es folgt:

(9.8e) $w_1^1 = w_1^2\,u_1,\ w_2^2 = u_2\,w_2^1 \mid u_1,u_2 \in Y,\ w_i^1 = w_i^2 \quad i=3,..,n+1$

Wir definieren:

$$X = \{ x \in p_2(M_1) \mid f_1(x) = u_3\, u_2 \;,\; u_3 \in F(Y) \}$$

$$B^x = \{ b\,x \mid b\,x \in B \} \qquad x \in X$$

Zu $x \in X$ konstruieren wir ein „st. reg. ev.“ B_x über $\overline{T}$, einen Homo. $\overline{f} : (F(T),\cdot) \dashrightarrow (F(Y),o_2)$, ferner eine Abb. $\varphi : F(\overline{T}) \longrightarrow F(T)$ so, daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{tikzcd}
B \supset B^x \arrow[r, "f"] & F(Y) \arrow[r, "q\, \mapsto\, q\, o_1\, w"] & F(Y) \arrow[d, equal, "id"] \\
B_x \arrow[u, dashed, "\varphi\ \text{surjektiv}"] \arrow[r, "\overline{f}"] & F(Y) \arrow[r, "q\, \mapsto\, q\, o_2\, v"] & F(Y)
\end{tikzcd}$$

Aus diesen Eigenschaften von $B_x, \overline{f}, \varphi$ folgern wir zunächst:

<u>(9.8f) Lemma</u>

$$\bigcup_{x \in X} \overline{f}(B_x)\ o_2\ v = S_v\ o_2\ v \in C_{o_2}$$

„$\subset$“ Aus der Kommutativität des Diagramms folgt:

$$\overline{f}(B_x)\ o_2\ v = f(B^x)\ o_1\ w \subset S_v\ o_2\ v$$

„$\supset$“ Sei $a \in S_v\ o_2\ v \subset f(B)\ o_1\ w$.

a habe die Zerlegungen (9.8b) bzw. (9.8c) bzgl. Z_1, Z_2.

Es folgt: $v_1^1 = u_3 u_2 \mid u_3 \in F(Y)$

Damit ex. $x \in X \mid v_1^1\, v_2^1 \cdot \ldots \cdot v_n^1 \in f(B^x)$ (wegen $b_1 = 1$)

Es folgt: $a \in f(B^x)\ o_1\ w$ und weil $\varphi(B_x) = B^x$: $a \in \overline{f}(B_x)\ o_2\ v$

Um $S_v\ o_2\ v \in C_{o_2}$ zu zeigen, müssen wir jetzt nur noch $\overline{T}$, B_x, $\overline{f}$, φ mit obigen Eigenschaften konstruieren.

$$\overline{T} = \{(t_1,t_2) \mid t_i \in T,\ (t_1,t_2) \in M_2\} \cup \{(u_1,t_2) \mid t_2 \in p_1(M_1)\}$$

B_x wird durch M_2^x, M_1^x wie folgt definiert:

$$M_1^x = \{((u_1,t_2),(t_3,x)) \mid t_2 \in p_1(M_1),\ (t_3,x) \in M_2\}$$

$$M_2^x = \{((t_1,t_2),(t_3,t_4)) \in \overline{T} \times \overline{T} \mid t_2 = t_3\}$$

Der Homo. $\varphi: (F(\overline{T}),\cdot) \dashrightarrow (F(T),\cdot)$ wird definiert durch:

$$\varphi(t_1,t_2) = t_2$$

<u>(9.8g) Lemma</u>

$\varphi(B_x) = B^x$

„$\subset$" $\varphi \times \varphi\ (M_i^x) \subset M_i \qquad i=1,2$

„$\supset$" Sei $t_1 t_2 \ldots t_n x \in B^x$, so ist nach Konstruktion

$$t = (u_1,t_1)(t_1,t_2)(t_2,t_3)\ldots\ldots(t_{n-1},t_n)(t_n,x) \in B_x$$

und es gilt: $\varphi(t) = t_1 t_2 \ldots t_n x$

Um $\overline{f}: (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_2)$ zu definieren, genügt es

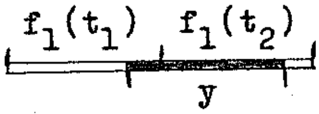
$\overline{f}_i(t)$ f.a. $t \in \overline{T}$ $\quad i=1,\ldots,n$ zu definieren.

$\overline{f}_i(t_1,t_2) \underset{\text{def}}{=} f_i(t_2) \qquad \underline{i > 1}$

$\underline{i = 1}$

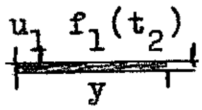
$\underline{t_1 \neq u_1}$. Sei $f_1(t_1)\cdot f_1(t_2) = x\ y\ z \mid L(y) = a_1,\ L(z) = 1$

$\overline{f}_1(t_1,t_2) \underset{\text{def}}{=} y$



$\underline{t_1 = u_1}$ Sei $u_1\cdot f_1(t_2) = y\ z \mid L(y) = a_1,\ L(z) = 1$

$\overline{f}_1(u_1,t_2) \underset{\text{def}}{=} y$



Man verifiziert sofort:

(9.8h) $f_i\varphi = \overline{f}_i \quad i>1, \qquad \overline{f}_1(a)\, u_2 = u_1\, f_1\varphi(a) \qquad$ f.a. $a \in B_x$

<u>(9.8i) Lemma</u>

Obiges Diagramm (S. 58) ist kommutativ.

<u>Beweis:</u> Sei $t \in B_x$, $f\varphi(t)\, o_1\, w$ habe die Darst. (9.8b) bzgl. Z_1, $\overline{f}(t)\, o_2\, v$ die Darstellung (9.8c) bzgl. Z_2.

$$f\,\varphi(t)\, o_1\, w = w_1^1\, v_1^1\, w_2^1 \ldots\ldots\ldots w_n^1\, v_n^1\, w_{n+1}^1$$
$$\overline{f}(t)\, o_2\, v \quad = w_1^2\, v_1^2\, w_2^2 \ldots\ldots\ldots w_n^2\, v_n^2\, w_{n+1}^2$$

nach (9.8e) gilt: $w_1^1 = w_1^2\, u_1$, $w_2^2 = u_2\, w_2^1$, $w_i^1 = w_i^2 \mid i>2$

Aus (9.8h) folgt dann sofort: $f\,\varphi(t)\, o_1\, w = \overline{f}(t)\, o_2\, v$

Betrachte dazu auch die Skizze (9.8d).

Damit ist gezeigt: $C_{o_1} \subset C_{o_2}$.

Analog beweist man: $C_{o_2} \supset C_{o_1}$, also gilt (9.8a).

Zunächst ist die Voraussetzung $b_\mu = 1$ wegen (9.7) unwesentlich. Wählt man ferner μ in (9.8a) ungleich 1, so läßt sich der obige Beweis von $C_{o_1} = C_{o_2}$ sofort übertragen.

Damit gilt Lemma (9.8a) mit μ, b_μ beliebig.

Seien nun Z_1, Z_2 so, daß sie sich nur für ein festes $s<m$ unterscheiden, aber hier ohne Einschränkung. Es gibt dann Zerlegungen $Z^1, Z^2, \ldots, Z^r \mid r < s \cdot n$ und $Z^1 = Z_1$, $Z^r = Z_2$ und Z^i, Z^{i+1} erfüllen die erweiterten Voraussetzungen von Lemma (9.8a). Es folgt: $C_{o_1} = C_{o_2}$ und damit folgt die Behauptung auch im allgemeinen Fall.

(9.9) Satz

Seien $o_1(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,Z_1)$, $o_2(K\cdot a_1,\dots,K\cdot a_n,b_1,\dots,b_n,Z_2)$ mit $K \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$ Verknüpfungen nach (8.4), so gilt:

$C_{o_1} = C_{o_2}$.

Beweis: o.w.E. können wir Z_1, Z_2 wegen (9.8) speziell wählen.

Z_2 wählen wir bei vorgegebenem Z_1 wie folgt:

Sei $t = K_1 \cdot m + s \mid 0 \leq s < m, \quad 0 \leq K_1 < K$.

$s = s_1 + s_2 + \dots + s_{n+1}$ sei die Aufspaltung bzgl. Z_1 (8.1).

Die Zerlegung $t = t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1}$ bzgl. Z_2 (8.1)

definieren wir durch:

$$t_i = s_i + \delta_i \cdot K_1 \cdot a_i + \tau_i \cdot K_1 \cdot a_{i-1} \qquad \text{mit}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & b_i = -1 \\ 0 & b_i = 1 \end{cases} \qquad \tau_i = \begin{cases} 1 & b_{i-1} = 1 \\ 0 & b_{i-1} = -1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 0 \end{matrix}$$

(9.9a) Lemma

(a) Sei $L(w) = 0 \bmod K\cdot m$, $L(v) = 0 \bmod K\cdot m$, so gilt:

$w\ o_2\ v = w\ o_1\ v$

(b) Sei $L(w) = 0 \bmod K\cdot m$, so gilt: $w\ o_2\ v = w\ o_1\ v$

Beweis: (a) trivial

(b) Die Aufspaltungen von w nach (8.2a) bzgl. o_1, o_2 sind identisch: $w = w_1 w_2 \cdot \dots \cdot w_n$. Sei zunächst $L(v) < K\cdot m$,

$v = v_1\ v_2 \cdot \dots \cdot v_{n+1}$ Zerlegung bzgl. (8.2a) o_2

$v = y_1 x_1 y_2 \cdot \dots \cdot y_n x_n y_{n+1}$ Zerlegung bzgl. (8.2a) o_1

Gemäß der Definition von Z_2 gilt nun:

$$v_i = \begin{cases} x_{i-1} y_i\ x_i & b_{i-1} = 1,\quad b_i = -1 \\ y_i x_i & b_{i-1} = -1,\quad b_i = -1 \\ x_{i-1} y_i & b_{i-1} = 1,\quad b_i = 1 \\ y_i & b_{i-1} = -1,\quad b_i = 1 \end{cases}$$

$$i = 1, \ldots, n+1, \qquad x_0,\ x_{n+1} = e.$$

Nach Definition von o_1, o_2 gilt:

$$w\ o_2\ v = v_1\ w_1\ v_2 \cdots\cdots v_n\ w_n\ y_{n+1}$$

$$w\ o_1\ v = y_1\ r_1\ y_2 \cdots\cdots y_n\ r_n\ y_{n+1}$$

$$\left|\ r_i = \begin{cases} w_i\ x_i & b_i = 1 \\ x_i\ w_i & b_i = -1 \end{cases}\right.$$

Mit Hilfe der Formeln für v_i verifiziert man nun:

$$w\ o_2\ v = w\ o_1\ v$$

Sei nun v beliebig: $v = z_1\ o_2\ z_2 \mid L(z_2) < K \cdot m$

Unter Benutzung von (a) folgt:

$$w\ o_2\ v = (w\ o_2\ z_1)\ o_2\ z_2 = (w\ o_1\ z_1)\ o_1\ z_2$$

$$= (w\ o_1 (z_1\ o_1\ z_2)) = w\ o_1\ v$$

<u>(9.9b) Lemma</u> : $C_{o_2} \subset C_{o_1}$

Denn jedem o_2-regulären Ausdruck entspricht wegen (9.9a) ein o_1-regulärer Ausdruck, so daß beide die gleiche Sprache darstellen.

<u>Umkehrung:</u> $C_{o_1} \subset C_{o_2}$

Sei: $w = w_1\ o_1\ w_2\ o_1 \cdot \cdots \cdot o_1\ w_r \quad | \ r = K \cdot s + t$

Setze: $w_1\ o_1 \cdot \cdots \cdot o_1\ w_K = v_1$

$w_{K+1}\ o_1 \cdot \cdots \cdot o_1 w_{2 \cdot K} = v_2$ u.s.w. bis:

$w_{(s-1) \cdot K+1} o_1 \cdots o_1 w_{s \cdot K} = v_s$

$w_{s \cdot K+1} o_1 \cdot \cdots \cdot o_1 w_r = v_{s+1}$

Nach (9.9a) gilt: $w = v_1\ o_2\ v_2\ o_2 \cdot \cdots \cdot o_2\ v_{s+1}$.

Allerdings kann man auf diese Weise nicht ohne weiteres einen o_1-regulären Ausdruck in einen o_2-regulären überführen. Hierzu greifen wir wieder auf Darstellungen mit ,st. reg. ev. zurück.

Sei $S \in C_{o_1}$. Zu zeigen: $S \in C_{o_2}$

o.w.E.: $S = f(B)\ o_1\ w$ mit (1)-(3)

(1) B ,st. reg.ev., über T dargestellt durch:

$M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1),\ M_2$

(2) f: $(F(T), \cdot) \longrightarrow (F(Y), o_1)$ Homo. $|\ f(t) \in \bar{E}_1$ f.a. $t \in T$.

(3) $L(w) < m$.

Man übersieht sofort, daß es eine eindeutige Darstellung gibt:

$$S = \bigcup_{L(v) < K \cdot m} \left(S_v\ o_2\ v\ (\cup \{v\}) \right) \quad | \ S_v \in P_{K \cdot m}(Y) - \{e\}$$

Es ist zu zeigen: $S_v \in C_{o_2}$.

Sei $S_v \neq \emptyset$. Nach (9.9a) gilt: $v = q\ o_1\ w \quad | \ q \in P_{K \cdot m}(Y)$

Wir definieren:

$$X = \left\{ x \in [B] \text{ (siehe (6.5))} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x) = q \text{ und der letzte} \\ \text{Faktor von } x \text{ ist in } p_2(M_1) \end{array} \right\}$$
$q \neq e_o$

$X = \{e_T\}$, $q = e_o$

$$B^x = \{ b\,x \mid b\,x \in B \}$$
$x \in X$

Zu $x \in X$ konstruieren wir nun ein „st. reg. ev." B_x über $\overline{T}$, einen Homo $\overline{f} : (F(\overline{T});\cdot) \dashrightarrow (F(Y), o_2)$, ferner eine Abb. $\varphi_x : F(\overline{T}) \dashrightarrow F(T)$ so, daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

(D)
$$\begin{tikzcd} B \supset B^x \arrow[r, "f"] & F(Y) \arrow[r, "y \,\mapsto\, y\, o_1\, w"] & F(Y) \arrow[d, equal, "id"] \\ B_x \arrow[u, dashed, "\varphi_x"', "\text{surj.}"] \arrow[r, "\overline{f}"] & F(Y) \arrow[r, "y \,\mapsto\, y\, o_2\, v"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Aus diesen Eigenschaften des Diagramms folgern wir zunächst:

<u>(9.9c) Lemma</u>

$$S_v\, o_2\, v = \bigcup_{x \in X} \overline{f}\,(B_x)\, o_2\, v \in C_{o_2}$$

„$\supset$" Aus der Kommutativität des Diagramms folgt:

$$\overline{f}(B_x)\, o_2\, v = f(B^x)\, o_1\, w \subset S_v\, o_2\, v$$

„$\subset$" Sei $p\, o_2\, v \in S_v\, o_2\, v \subset f(B)\, o_1\, w$

Es gilt: $v = q\, o_1\, w$ und damit $p\, o_1\, q \in f(B)$

Sei $p\, o_1\, q = f(z_n \cdot \ldots \cdot z_1) \mid z_n \ldots z_2 z_1 \in B$, $z_i \in T$

Es folgt: ex. $r \mid f(z_r \ldots z_1) = q$ und weiter $x \underset{def}{=} z_r \ldots z_1 \in X$

Damit gilt: $z_n \ldots z_2 z_1 \in B^x$ und wegen der Kommutativität von (D): $p\, o_2\, v \in f(B^x)\, o_1\, w = \overline{f}(B_x)\, o_2\, v$

Wir müssen nun nur noch $\overline{T}$, B_x, $\overline{f}$, φ mit obigen Eigenschaften konstruieren.

$$\overline{T} \underset{def}{=} \{u \in [B] \mid L(u) = K\}$$

B_x werde durch M_1^x, M_2^x wie folgt definiert:

$$M_1^x = \left\{(u,v) \in \overline{T} \times \overline{T} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ex. } (t,\overline{t}) \in M_1 \text{ so daß} \\ uvx \in t \cdot F(T) \cap F(T) \cdot \overline{t}, \text{ ferner } vx \in [B] \end{array}\right\}$$

$$M_2^x = \{(u,v) \in \overline{T} \times \overline{T} \mid u\,v \in [B]\}$$

$\varphi_x : F(\overline{T}) \longrightarrow F(T)$ wird definiert durch :

$$\varphi_x : (u_1^1 \cdot u_1^2 \cdot \ldots \cdot u_1^K)(u_2^1 \cdot \ldots u_2^K) \ldots \ldots (u_s^1 \cdot \ldots u_s^K) \longmapsto$$
$$u_1^1 \cdot u_1^2 \cdot \ldots \cdot u_1^K \cdot u_2^1 \cdot \ldots u_2^K \cdot \ldots \ldots u_s^1 \cdot \ldots u_s^K \cdot x$$

(9.9d) Lemma

$$\varphi_x(B_x) = B^x$$

Beweis: Nach Konstruktion von B_x, φ_x gilt:

$$(u_1^1 \ldots u_1^K) \ldots \ldots (u_s^1 \ldots u_s^K) \in B_x \quad \Longleftrightarrow$$
$$u_1^1 \ldots u_1^K \ldots \ldots u_s^1 \ldots \ldots u_s^K\, x \in B^x$$

$\overline{f}: \quad (F(T), \cdot) \longrightarrow (F(Y), o_2)$ sei definiert durch

$$u \longmapsto f(u) \qquad \text{f.a. } u \in \overline{T}$$

(9.9e) Lemma

(D) ist kommutativ

Beweis: Sei $u = (u_1^1 \ldots u_1^K)(u_2^1 \ldots u_2^K) \ldots \ldots (u_s^1 \ldots u_s^K) \in B_x$

$\overline{f}(u)\; o_2\; v = \overline{f}(u)\; o_2 (q\; o_1\; w) = \overline{f}(u)\; o_1\; q\; o_1\; w \;=$

$= f(u_1^1 \ldots u_1^K\ u_2^1 \ldots u_2^K \ldots u_s^1 \ldots u_s^K)\ o_1\ q\ o_1\ w$

$= f(u_1^1 \ldots u_1^K\ u_2^1 \ldots u_2^K \ldots u_s^1 \ldots u_s^K\ x)\ o_1\ w$

$= f\varphi_x(u)\ o_1\ w$ Damit ist (D) kommutativ und insgesammt (9.9) bewiesen.

(9.10) Satz

Seien $o_1(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,Z_1)$, $o_2(c_1,\ldots,c_p,d_1,\ldots,d_p,Z_2)$ assoziative Verknüpfungen nach (8.4).

$o_3(e_1^1,\ldots,e_1^n,e_2^1,\ldots,e_2^n,\ldots,e_p^1,\ldots,e_p^n,g_1^1,\ldots,g_1^n,g_2^1,\ldots\ldots g_p^n,Z_3)$ genüge folgender Bedingung:

$$e_i^k = \begin{cases} a_k\ c_i & d_i = 1 \\ a_{n-k}\ c_i & d_i = -1 \end{cases}$$

$k=1,\ldots,n \quad i=1,\ldots,p$

$$g_i^k = \begin{cases} 1 & d_i = 1 \quad b_k = 1 \\ 1 & d_i = -1 \quad b_{n-k} = 1 \\ -1 & d_i = 1 \quad b_k = -1 \\ -1 & d_i = -1 \quad b_{n-k} = -1 \end{cases}$$

$k=1,\ldots,n \quad i=1,\ldots,p$

Es gilt dann: $C_{o_2} \subset C_{o_3}$

Beweis: $m_1 \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad m_2 \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{p} c_i$

(9.10a) Lemma

Sei $S = f(B) \in C_{o_2}$ mit (1) - (3), so gilt: $S \in C_{o_3}$

(1) B ist „st. reg. ev.“ über T, dargestellt durch

$M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1)$, M_2

(2) $f\colon (F(T),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_2)$ Homo. $f(t) \in \overline{E}_2$ f.a. $t \in T$

(3) $q \in B \implies L(q) = 0 \mod m_1$

Beweis: Wir konstruieren ein Alphabet $\overline{T}$, ein „st. reg. ev.“ $\overline{B}$ über $\overline{T}$, einen Homo. $\overline{f}\colon (F(\overline{T}),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_3)$ und eine Abbildung $\varphi\colon F(\overline{T}) \longrightarrow F(T)$, so daß folgendes Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccccc}
F(T) & \supset & B & \xrightarrow{f} & F(Y) \\
 & & \varphi \uparrow \text{ surj.} & & \Big\| \text{id} \\
F(\overline{T}) & \supset & \overline{B} & \xrightarrow{\overline{f}} & F(Y)
\end{array}$$

Daraus folgt sofort: $S \in C_{o_3}$.

$\overline{T}$, $\overline{B}$, $\overline{f}$, φ konstruieren wir wie folgt:

$\overline{T} = \left\{ (t_1,\ldots,t_n) \mid t_i \in [B] \text{, } L(t_i) = a_i \quad i=1,\ldots,n \right\}$

Der Homo. $\overline{f}\colon (F(\overline{T}),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_3)$ wird durch die Abb. $f_i^k\colon F(\overline{T}) \longrightarrow F(T)$ definiert, die folgenden Bedingungen genügen:

$$\overline{f}_i^k \text{ ist } \begin{cases} \text{Homo.} & g_i^k = 1 \\ \text{Antihomo.} & g_i^k = -1 \end{cases}$$

$$L(\overline{f}_i^k(t)) = e_i^k \qquad \text{f.a. } t \in \overline{T}$$

$$k=1,\ldots,n \qquad i=1,\ldots,p$$

$$\overline{f}_i^k\left((t_1^1,\dots,t_n^1)(t_1^2,\dots,t_n^2)\dots\dots(t_1^s,\dots,t_n^s)\right)$$

$$\underset{\text{def}}{=}\begin{cases} f_i(t_k^1 t_k^2\dots t_k^s) & d_i = 1 \quad b_k = 1 \\ f_i(t_k^s\dots t_k^2 t_k^1) & d_i = 1 \quad b_k = -1 \\ f_i(t_{n-k}^1 t_{n-k}^2\dots t_{n-k}^s) & d_i = -1 \quad b_{n-k} = 1 \\ f_i(t_{n-k}^s\dots t_{n-k}^2 t_{n-k}^1) & d_i = -1 \quad b_{n-k} = -1 \end{cases}$$

Man verifiziert, daß $\overline{f}_i^k$ obige Bedingungen erfüllt und somit einen Homo. $\overline{f}: (F(\overline{T}),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_3)$ definiert.

φ: $F(\overline{T}) \longrightarrow F(T)$ wird definiert durch:

$$\varphi\left((t_1^1,\dots,t_1^1)(t_1^2,\dots,t_n^2)\dots\dots(t_1^s,\dots,t_n^s)\right)$$

$$\underset{\text{def}}{=} r_1 r_2\dots r_n \quad \Big| \; r_i = \begin{cases} t_i^1 t_i^2\dots t_i^s & b_i = 1 \\ t_i^s\dots t_i^2 t_i^1 & b_i = -1 \end{cases}$$

__(9.10b) Lemma__

Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} F(T) & \xrightarrow{f} & F(Y) \\ \varphi \uparrow & & \| \; id \\ F(\overline{T}) & \xrightarrow{\overline{f}} & F(Y) \end{array}$$

__Beweis:__ Sei $y = (t_1^1,\dots,t_n^1)(t_1^2,\dots,t_n^2)\dots(t_1^s,\dots,t_n^s) \in F(\overline{T})$

$$\varphi(y) = r_1 r_2\dots r_n \quad \Big| \; r_i = \begin{cases} t_i^1 t_i^2\dots t_i^s & b_i = 1 \\ t_i^s\dots t_i^2 t_i^1 & b_i = -1 \end{cases}$$

$$f\varphi(y) = f_1(r_1\dots r_n)\, f_2(r_1\dots r_n)\dots\dots f_p(r_1\dots r_n)$$

$$= q_1^1\dots\dots q_1^n \quad q_2^1\dots\dots q_2^n\dots\dots\dots q_p^1\dots\dots q_p^n$$

dabei kann man für q_i^k nach Definition von f setzen:

$$q_i^k = \begin{cases} f_i(t_k^1 t_k^2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot t_k^s) & d_i = 1 \quad b_k = 1 \\ f_i(t_k^s \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot t_k^2 t_k^1) & d_i = 1 \quad b_k = -1 \\ f_i(t_{n-k}^1 t_{n-k}^2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot t_{n-k}^s) & d_i = -1 \quad b_{n-k} = 1 \\ f_i(t_{n-k}^s \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot t_{n-k}^2 t_{n-k}^1) & d_i = -1 \quad b_{n-k} = -1 \end{cases}$$

$k=1,\ldots,n \quad i=1,\ldots,p$

Daraus folgt sofort: $q_i^k = \overline{f}_i^k\ (y)$ und damit: $\overline{f}(y) = f\varphi(y)$

Das ‚st. reg. ev.' $\overline{B}$ über $\overline{T}$ definieren wir durch $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$

wie folgt:

$$\overline{M}_2 = \left\{ \left((t_1^1,\ldots.t_n^1),(t_1^2,\ldots.,t_n^2)\right) \;\middle|\; \begin{array}{ll} t_i^1\cdot t_i^2 \in [B] & \text{falls } b_i = 1 \\ t_i^2\cdot t_i^1 \in [B] & \text{falls } b_i = -1 \end{array} \right\}$$

$$\overline{M}_1 = \left\{ \left((t_1^1,\ldots.,t_n^1),(t_1^s,\ldots.,t_n^s)\right) \;\middle|\; (1) - (8) \right\}$$

(1) $t_i^s\ t_{i+1}^1 \in [B]$ falls $b_i = 1 \quad b_{i+1} = 1$

(2) $t_i^s\ t_{i+1}^s \in [B]$ " $b_i = 1 \quad b_{i+1} = -1$

(3) $t_i^1\ t_{i+1}^1 \in [B]$ " $b_i = -1 \quad b_{i+1} = 1$

(4) $t_i^1\ t_{i+1}^s \in [B]$ " $b_i = -1 \quad b_{i+1} = -1$

(5) $t_1^1 \in p_1(M_1)\cdot F(T)$ falls $b_1 = 1$

(6) $t_1^s \in p_1(M_1)\cdot F(T)$ " $b_1 = -1$

(7) $t_n^s \in F(T)\cdot p_2(M_1)$ " $b_n = 1$

(8) $t_n^1 \in F(T)\cdot p_2(M_1)$ " $b_n = -1$

<u>(9.10c) Lemma</u> $\varphi(\overline{B}) = B$

„$\subset$" Sei $y = (t_1^1,\ldots,t_n^1)(t_1^2,\ldots.,t_n^2)\ldots\ldots(t_1^s,\ldots.,t_n^s) \in \overline{B}$

$$\varphi(y) = r_1 r_2 \cdot\cdot\cdot\cdot r_n \quad \middle| \quad r_i = \begin{cases} t_i^1 t_i^2 \cdot\cdot\cdot\cdot t_i^s & b_i = 1 \\ t_i^s \cdot\cdot\cdot\cdot t_i^2 t_i^1 & b_i = -1 \end{cases}$$

Aus den Bedingungen zu $\overline{M}_2$ folgt:

$$r_1, r_2, \ldots, r_n \in [B]$$

Aus den Bedingungen (1)-(4) von $\overline{M}_1$ folgt:

$$r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \in [B]$$

Aus den Bedingungen (5)-(8) von $\overline{M}_1$ folgt dann:

$$r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \in B$$

„$\supset$" Sei $u \in B$. Wegen $L(u) = 0 \bmod m_1$ ex. eine Darstellung

$$u = r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \quad \left| \quad \begin{array}{l} r_i = \begin{cases} t_i^1 t_i^2 \cdot \ldots \cdot t_i^s & \text{falls} \quad b_i = 1 \\ t_i^s \cdot \ldots \cdot t_i^2 t_i^1 & \text{"} \quad b_i = -1 \end{cases} \\ t_i^k \in [B], \quad L(t_i^k) = a_i \end{array} \right.$$

Es folgt: $y = (t_1^1, \ldots, t_n^1)(t_1^2, \ldots, t_n^2) \cdot \ldots \cdot (t_1^s, \ldots, t_n^s) \in \overline{B}$

und $\varphi(y) = u$.

Damit ist (9.10c) und somit (9.10a) bewiesen.

Wir beweisen jetzt (9.10).

Sei $o_4 = o_4(m_1 c_1, \ldots, m_1 c_p, d_1, \ldots, d_p, Z_4)$

nach (9.9) gilt: $C_{o_4} = C_{o_2}$. Es genügt also zu zeigen $C_{o_4} \subset C_{o_3}$

o.w.E. können wir Z_3, Z_4 wie folgt wählen:

für $t < m_1 \cdot m_2$ sei $\quad t = t + \underset{1}{0} + \underset{2}{0} + \ldots + \underset{n \cdot p}{0} \quad$ Aufsp. bzgl. Z_3

$\quad t = t + \underset{1}{0} + \underset{2}{0} + \ldots + \underset{p}{0} \quad$ Aufsp. bzgl. Z_4

Sei $S \in C_{o_4}$. Beh.: $S \in C_{o_3}$

o.w.E. $\quad S = f(B)\, o_4\, w \qquad (1) - (3)$

(1) B ist ‚st. reg. ev.‚ über T, dargestellt durch

$M_1 = p_1(M_1) \times p_2(M_1), M_2$

(2) $f: (F(Y), o_4)$ Homo. $| f(t) \in E_4$ f.a. $t \in T$

(3) $L(w) < m_1 \cdot m_2$

Z_3, Z_4 sind so gewählt, daß $f(B)\ o_4\ w = f(B)\ o_3\ w$.

Es genügt also, zu zeigen: $f(B) \in C_{o_3}$.

$f(B)$ ist in C_{o_2}. Sei nun

$$f(B) = \bigcup_{L(v) < m_2} \left(f^v(B^v)\ o_2\ v\ (\cup\{v\}) \right)$$

Darstellung nach (8.7) bzgl. o_2, so gilt $f(B) = f^e(B^e)\ o_2\ e$

wegen: $L(u) = 0 \bmod m_1 \cdot m_2$ f.a. $u \in f(B)$

Ferner gilt dann: $L(u) = 0 \bmod m_1$ f.a. $u \in B^e$.

Damit haben wir den allgemeinen Fall auf die Voraussetzungen von Lemma (9.10a) zurückgeführt.

(9.11) Satz

Sei o assoziative Verknüpfung nach (8.4), so gilt:

C_o enthält alle regulären Ereignisse.

Beweis:

Setze in (9.10) $o_2 = o_2(1,1,Z_2)$. Nach den Formeln für o_3 folgt dann: o_1 und o_3 stimmen bis auf die Zerlegungen Z_1, Z_3 überein. Damit gilt: $C_{o_2} \subset C_{o_3} = C_{o_1}$ $|$ o_1 beliebig.

Anmerkung:

Umgekehrt kann man aus Satz (9.11) den Satz (9.10) folgern.

Seien $(F(Y), o_2)$, $(F(E_2'), o_1)$ ass. Verkn. nach (8.4).

$o_1 = o_1(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, Z_1)$, $o_2(c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_p, Z_2)$

g_2: $F(Y) \dashrightarrow F(E_2')$ g_1: $F(E_2') \dashrightarrow F(E_1')$

seien die zugehörigen Karten.

Die Karte $g_1 g_2$: $F(Y) \dashrightarrow F(E_1')$

erfüllt die Voraussetzumgen von Satz (5.3) und induziert somit ein Assoziatives System. Man verifiziert nun, daß die zu $g_1 g_2$ gehörige ass. Verkn. identisch ist mit o_3 in Satz (9.10), wenn man Z_3 geeignet wählt.

Unter der Voraussetzung, daß B_{g_1} alle regulären Ereignisse enthält, folgt dann nach Satz (3.16)

$$B_{g_2} \subset B_{g_1 g_2} = B_{g_3}$$

und damit folgt die Aussage von Satz (9.10).

Aus den bisher bewiesenen Sätzen folgt nicht, daß die Klassen von Sprachen , die von Assozativen Systemen nach (8.4) erzeugt werden die regulären Ereignisse echt umfassen.

(9.12) Satz

Seien $o_1(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n,Z_1)$, $o_2(c_1,\ldots,c_p,d_1,\ldots,d_p,Z_2)$ ass. Verknüpfungen nach (8.4), Y enthalte mehr als ein Element und es gelte $n \neq p$, so folgt: $C_{o_1} \neq C_{o_2}$

Beweis: o.w.E.: $n > p$.

Wir geben eine Sprache S an mit $S \in C_{o_1}$, $S \notin C_{o_2}$.

Seien $x,y \in Y$, $x \neq y$. Sei $x^{a_i \cdot r} = \underset{1}{x}\,\underset{2}{x}\,\underset{3}{x}\cdots\underset{a_i \cdot r}{x}$

$$S = \left\{ x_1^{a_1 \cdot r} x_2^{a_2 \cdot r} \cdots\cdots x_n^{a_n \cdot r} \;\middle|\; r \in N,\quad x_i = \begin{cases} x & i \text{ gerade} \\ y & i \text{ ungerade} \end{cases} \right\}$$

a) $S \in C_{o_1}$. Setze $B = \{z^k \mid k \in N\}$ mit $z^k = \underset{1}{z}\,\underset{2}{z}\,\underset{3}{z}\cdots\underset{k}{z}$

B ist ,st. reg. ev., über z . Betrachte den Homomorphismus

$$f: (F(\{z\}),\cdot) \longrightarrow (F(Y),o_1) \mid f_i(z) = \begin{cases} x^{a_i} & i \text{ gerade} \\ y^{a_i} & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Man verifiziert: $S = f(B) \in C_{o_1}$

b) $S \notin C_{o_2}$

Ann.: $S = \bigcup\limits_{L(v)<m_2} \left(f^v(B^v)\ o_2\ v\ (\cup\{v\}) \right)$ sei Darstellung nach (8.7) bzgl o_2. Ex. $v \mid f^v(B^v)\ o_2\ v$ unendlich. Demnach ex. $x,y,z \in F(Z) \mid y \neq e$, $x\,y^k z \in B^v$ f.a. $k \in N$. Setze $f(x) = w$, $f(y) = q$, $f(z)\ o_2\ v = u$, so folgt: $w\ o_2\ q^k\ o_2\ u \in S$ f.a. $k \in N$ mit $q^k = \underset{1}{q}\ o_2\ \underset{2}{q}\ o_2 \cdots o_2\ \underset{k}{q}$. Aus $w\ o_2\ q\ o_2\ u$, $w\ o_2\ q\ o_2\ q\ o_2\ u$ $\in S$ schließt man, daß q folgende Form haben muß:

$$q = x_1^{a_1 \cdot r} x_2^{a_2 \cdot r} \cdots\cdots x_n^{a_n \cdot r} \mid x_i = \begin{cases} x & i \text{ gerade} \\ y & i \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann kann für $p < n$ sicher nicht gelten: $w\, o_2\, q^k o_2\, u \in S$ f.a $k \in N$. Somit folgt: $S \subset C_{o_2}$.

(9.13) Satz

Ist o eine ass. Verknüpfung nach (8.4) und enthält Y mehr als ein Element, so ex. eine unendliche Folge $o_1, o_2, \ldots$ mit o_i ass. Verkn. nach (8.4), $o_1 = o$ und: $C_{o_i} \subsetneqq C_{o_{i+1}}$.

Beweis: folgt sofort aus den Sätzen (9.10), (9.12).

Damit haben wir unser Ziel erreicht, nämlich Sprachklassen zu konstruieren, die die regulären Mengen echt umfassen, für die aber alle wesentlichen Sätze über reguläre Mengen weiter gelten.

(9.14) Definition

$$C_{o_n} = C_o \mid o_n = o(\underset{1}{1},\underset{2}{1},\ldots,\underset{n}{1},\underset{1}{1},\underset{2}{1},\ldots,\underset{n}{1},Z)$$

$$C = \left\{ S \mid S \in C_{o_n},\ n \in N \right\}$$

(9.15) Satz

a) C ist Boolesche Algebra.

b) Seien $S_i \in C_{o_{n_i}}$ $i=1,2$ durch eine der Darstellungen nach (6.10) (1),(2),(3), (7.2) bzgl. o_{n_i} gegeben, so ist entscheidbar, ob $S_1 \subset S_2$.

Beweis: a) Setze zunächst: $o_1 = o_{n_1}$, $o_2 = o_{n_2}$, $o_3 = o_{n_1 \cdot n_2}$ und dann: $o_1 = o_{n_2}$, $o_2 = o_{n_1}$, $o_3 = o_{n_1 \cdot n_2}$.
Es sind jeweils die Voraussetzungen von (9.10) erfüllt.
Es folgt: $C_{n_1}, C_{n_2} \subset C_{n_1 \cdot n_2}$. Damit ist C Boolesche Algebra.
b) Mit Hilfe der Konstruktionsverfahren, die in den Beweisen zu (9.10), (7.2), (6.10) angegeben wurden, kann man $o_{n_1 \cdot n_2}$- reguläre Ausdrücke für S_1, S_2 konstruieren.
Die Behauptung folgt damit sofort aus (4.4) und (8.6), wenn man $o = o_{n_1 \cdot n_2}$ setzt.

Literaturhinweise

[1] V. Amar - G. Putzolu — On a family of linear Grammars. Information and Control. Vol. 7 Number 3 Sept. 1964

[2] V. Amar - G Putzolu — Generalisations of regular events. Information and Control. Vol. 9 Number 1 Febr. 1965

[3] Bar-Hillel, Perles and Shamir — On formal properties of simple phrase structure grammars. Zeitschrift für Phonetik Sprachwissenschaft und Kommunikationsforschung. 1961 S. 143 - 172

[4] G. Birkhoff — Lattice Theorie. American Mathematical Society 1948

[5] N. Chomsky — Formal Properties of Grammars. Handbook of Mathematical Psychology. Vol. II spez.: Theorem 32. John Wiley and Sons 1963

[6] N. Chomsky, G.A. Miller — Introduction to the Formal Analysis of Natural Languages. Handbook of Mathematical Psychology. Vol.II 1963

[7] J. Eickel, M. Paul, E.L. Bauer, K. Samelson — A Syntax Controlled Generator of Formal Language Processors. Comm. ACM Vol.6 Number 2 Febr. 1964

[8] W.M. Gluschkow — Theorie der Abstrakten Automaten. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1963

[9] H. Hermes — Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit Berechenbarkeit. Springer 1961

[10] G.Hotz — Eindeutigkeit, Mehrdeutigkeit formaler Sprachen. demnächst in EIK.

[11] S.C. Kleene — Representation of events in nerve nets and finite automata. In C.E. Shannon J. Mc Carthy (Eds Automata Studies Princeton University Press 1956

[12] M.P. Schützenberger, N Chomsky — The algebraic Theorie of context free Languages. Computer programming and formal Systems. Amsterdam: North Holland 1963