

Rekonstruktionsverfahren in der 3D-Vektortomographie

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät I
der Universität des Saarlandes

von

David Theis

Saarbrücken
2008

Tag des Kolloquiums:	13. Februar 2009
Dekan:	Univ.-Prof. Dr. J. Weickert
Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr. J. Weickert
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. A.K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. T. Schuster
Akademischer Mitarbeiter:	Dr. A. Lakhali

Abstract

The aim of vector field tomography is the reconstruction and visualization of divergence-free vector fields, for example the velocity fields of moving fluids. As an application the determination of blood flow for tumor detection may be mentioned. For this purpose, for an emitted beam the projection of the vector field along the linear path of the beam is measured. The measurement is done by using ultrasound waves which are sent out along a scanning curve surrounding the object. The mathematical model used is the Doppler transform for which up to now no inversion formula is known.

In the course of this work a method for the complete, approximate computation of divergence-free three-dimensional vector fields from data of the Doppler transform will be derived. To this end we will resort to known results related to the inversion of the scalar three-dimensional cone beam transform. It turns out that the reconstruction kernels for the cone beam transform which have been calculated using the theory of Approximate Inverse can as well be successfully used in vector field tomography.

After an overview of the fundamental properties of the cone beam transform and the evaluation of the respective reconstruction kernels the above mentioned method for the reconstruction of vector fields will be presented. Several numerical experiments show the possibilities of the algorithm.

Kurze Zusammenfassung

Ziel der Vektortomographie ist die Rekonstruktion und Visualisierung divergenzfreier Vektorfelder, beispielsweise von Geschwindigkeitsfeldern sich bewegender Flüssigkeiten. Als medizinische Anwendung kann hier die Bestimmung des Blutflusses zur Tumordetektion genannt werden. Für einen ausgesandten Strahl wird dazu die Projektion des Vektorfeldes längs des als linear angenommenen Strahlenweges gemessen. Die Messung erfolgt mit Hilfe von Ultraschallwellen, die von einer das Objekt umgebenden Abtastkurve ausgestrahlt werden. Das verwendete mathematische Modell ist die Doppler-Transformation, für die zum jetzigen Zeitpunkt keine Inversionsformel bekannt ist.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Verfahren zur vollständigen, näherungsweise Berechnung divergenzfreier, dreidimensionaler Vektorfelder aus Daten der Doppler-Transformation hergeleitet. Dabei wird auf bekannte Ergebnisse im Zusammenhang mit der Inversion der skalaren dreidimensionalen Cone Beam Transformation zurückgegriffen. Es stellt sich heraus, dass die mit Hilfe der Theorie der Approximativen Inversen hergeleiteten Rekonstruktionskerne für die Cone Beam Transformation auch erfolgreich in der Vektortomographie eingesetzt werden können.

Nach einem Überblick über wichtige Eigenschaften der Cone Beam Transformation und die Bestimmung der entsprechenden Rekonstruktionskerne wird die oben genannte Methode zur Berechnung von Vektorfeldern präsentiert. Einige numerische Beispiele zeigen die Möglichkeiten des Algorithmus.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
2	Problemstellung	17
2.1	Das Prinzip der Computertomographie	17
3	Mathematische Grundlagen	25
3.1	Allgemeines	25
3.1.1	Die Delta-Distribution	25
3.1.2	Faltung	30
3.1.3	Fourier-Transformation	31
3.1.4	Helmholtz-Zerlegung	32
3.2	Die Approximative Inverse	33
3.3	Die Radon-Transformation \mathcal{R}	36
3.3.1	Wichtige Eigenschaften	37
3.3.2	Anwendung der Approximativen Inversen auf die Radon-Transformation	41
4	Die Cone Beam Transformation \mathcal{D}	45
4.1	Definitionen und wichtige Eigenschaften	45
4.2	Inversionsformeln	46
4.2.1	Die Inversionsformel von Louis	46
4.2.2	Berechnung des Rekonstruktionskerns von Weber	49
4.2.3	Implementierung des Rekonstruktionskerns	61
4.2.4	Berechnung unter Verwendung von Winkeln	77
5	Die Doppler-Transformation \mathcal{D}	83
5.1	Definitionen und wichtige Eigenschaften	85
5.1.1	Einführung und Definition	85
5.1.2	Eigenschaften	89
5.1.3	Verallgemeinerte Formel von Grangeat	97
5.1.4	Verallgemeinerung der Formel von Hamaker et al.	100
5.1.5	Weitere Beziehungen zwischen Radon- und Doppler-Transformation . .	104
5.2	Verwendung des Mollifiers und des Rekonstruktionskerns der Cone Beam Transformation für die Doppler-Transformation	108
5.3	Numerische Beispiele	118
5.3.1	Vollständige Rekonstruktion eines dreidimensionalen Vektorfeldes . . .	134
6	Zusammenfassung und Ausblick	155

Abbildungsverzeichnis

2.1	Einfachste Messanordnung in der Computertomographie.	18
2.2	Parallele Messgeometrie.	20
2.3	Parametrisierung von \mathcal{P} (links) und \mathcal{R} (rechts) im \mathbb{R}^2	21
2.4	Fächerstrahlgeometrie (fan beam geometry).	22
2.5	Messanordnung in der Cone Beam CT.	23
4.1	Gaußkern für $\mu = 0$ und $\gamma = 1$	50
4.2	Funktionsgraph der Fehlerfunktion erf.	53
4.3	Rekonstruktion eines Aluminiumblocks mit Hilfe der Approximativen Inversen und des Feldkamp-Algorithmus.	60
4.4	Draufsicht auf den möglichen Aufbau zur Messung von \mathcal{D}	65
4.5	3D Darstellung von ψ für $\gamma = 0,0075$ und $\varphi = \rho = 51$	73
4.6	3D Darstellung von ψ für $\gamma = 0,01$ und $\varphi = \rho = 51$	73
4.7	3D Darstellung von ψ für $\gamma = 0,02$ und $\varphi = \rho = 51$	74
4.8	3D Darstellung von ψ für $\gamma = 0,03$ und $\varphi = \rho = 51$	74
4.9	Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene von ψ für $\gamma = 0,0075$ und $\varphi = \rho = 51$	75
4.10	Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene von ψ für $\gamma = 0,01$ und $\varphi = \rho = 51$	75
4.11	Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene von ψ für $\gamma = 0,02$ und $\varphi = \rho = 51$	76
4.12	Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene von ψ für $\gamma = 0,03$ und $\varphi = \rho = 51$	76
4.13	Darstellung der Winkel zur Berechnung von \mathcal{D}	77
4.14	3D Darstellung von ψ für $\gamma = 0,02$ mit Hilfe der Winkel ϑ und ρ	79
4.15	Berechnung des maximalen Wertes für η_3	80
5.1	2D Illustration einer Messung zur Vektortomographie mittels Ultraschall.	84
5.2	Illustration des Messaufbaus für die 3D Doppler-Transformation.	87
5.3	Visualisierung der gemessenen Projektionsdaten für \mathcal{D}	88
5.4	Unterschiedliche Anzahl von Vektoren bei der Darstellung der Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$	120
5.5	Korrektes Feld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ und Rekonstruktion mit exakten, simulierten Daten $\mathcal{D}f$ für $\gamma = 0,007975$	121
5.6	Differenzen der Koordinaten zwischen Original und Rekonstruktion des Feldes $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007975$	122
5.7	Rekonstruktion und Differenzen der Koordinaten von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0085$	123
5.8	Rekonstruktion und Differenzen der Koordinaten von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,32095$	124

5.9	Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,5\}$ für $\gamma = 0,00823$ und in der Ebene $\{x_3 = 0,9\}$ für $\gamma = 0,00855$	124
5.10	Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ für $\gamma = 0,007975$ in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ aus unterschiedlichen Blickwinkeln.	125
5.11	Korrekte Daten und Rekonstruktion des Vektorfeldes $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$	125
5.12	Differenzen der Koordinaten zwischen Original und Rekonstruktion des Feldes $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$	126
5.13	Unterschiedliche Anzahl von Vektoren bei der Darstellung der Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,95$ und Differenzbilder.	127
5.14	Bislang beste Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$ und Kombination für $\gamma = 0,0125$ (Länge) und $\gamma = 0,95$ (Richtung).	128
5.15	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$ aus unterschiedlichen Blickwinkeln.	129
5.16	Original und Rekonstruktion von $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,00915$	129
5.17	Rekonstruktion von $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,95$ und Kombination für $\gamma = 0,00915$ (Länge) und $\gamma = 0,95$ (Richtung).	130
5.18	Korrekte Daten für $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ und Rekonstruktion für $\gamma = 0,0113$	131
5.19	Rekonstruktion der Felder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ aus dem Maple-Blickwinkel $\vartheta = 47^\circ$ und $\varphi = 47^\circ$	132
5.20	Rekonstruktion der Felder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ aus dem Maple-Blickwinkel $\vartheta = 40^\circ$ und $\varphi = 80^\circ$	133
5.21	Rekonstruktion der Felder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,7\}$ für $\gamma = 0,012$	133
5.22	Rekonstruktion der Felder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,9\}$ für $\gamma = 0,01165$	134
5.23	Bislang beste Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und Kombination für $\gamma = 0,0124$ (Länge) und $\gamma = 7$ (Richtung).	134
5.24	Messaufbau für die 3D Doppler-Transformation mit zwei zueinander senkrechten Kreisen.	136
5.25	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ für $\gamma = 0,007$ mit $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ aus verschiedenen Blickrichtungen.	136
5.26	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ für $\gamma = 0,0113$ mit $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ aus verschiedenen Blickrichtungen.	137
5.27	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$	138
5.28	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$	138
5.29	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$	139
5.30	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$	139

5.31	Drehungen für die Rekonstruktion mit drei zueinander orthogonalen Kreisen.	141
5.32	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$	142
5.33	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$	143
5.34	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$	144
5.35	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$	144
5.36	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$	145
5.37	Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$	145
5.38	Originaldaten für $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in den drei Ebenen $\{x_3 = -0,4\}$, $\{x_3 = 0\}$ und $\{x_3 = 0,4\}$	147
5.39	Vollständige Rekonstruktion des Feldes $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = -0,4\}$ mit verschiedenen Abtastkurven.	149
5.40	Vollständige Rekonstruktion des Feldes $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ mit verschiedenen Abtastkurven.	150
5.41	Vollständige Rekonstruktion des Feldes $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,4\}$ mit verschiedenen Abtastkurven.	152

1 Einleitung

Die vektorielle Doppler-Tomographie ist ein bildgebendes Verfahren, welches darauf abzielt, ein Vektorfeld, beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld einer sich bewegenden, inkompressiblen Flüssigkeit mit Hilfe von Ultraschall-Messungen zu rekonstruieren und zu visualisieren.

Die Messungen werden dabei von einer sich auf einer Abtastkurve um das Objekt bewegenden Ultraschallquelle, die gleichzeitig als Detektor dient, vorgenommen. Essentielles Hilfsmittel wird dabei der später näher erläuterte Doppler-Effekt sein. Bei der Abtastkurve handelt es sich im Rahmen dieser Arbeit stets um einen Kreis, der in verschiedenen zueinander senkrechten, den Nullpunkt enthaltenden Ebenen angeordnet wird, um eine vollständige dreidimensionale Rekonstruktion des Vektorfeldes zu ermöglichen.

Das mathematische Modell beinhaltet die Rekonstruktion des Vektorfeldes mit Hilfe von Linienintegralen über Projektionen des Feldes. Dies entspricht einer Inversion der vektoriellen Cone Beam Transformation.

Wie man aus diesen ersten Ausführungen leicht erkennt, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Doppler-Transformation und der weitaus besser bekannten und erforschten skalaren Cone Beam Transformation, mit der sich die unterschiedlichen Gewebeschichten eines mit Röntgenstrahlung aus verschiedenen Richtungen durchleuchteten Objektes rekonstruieren lassen.

Die skalare Cone Beam Transformation, bei der ein kompletter Kegel von Strahlen in Richtung des Objektes ausgesandt wird, kann dabei als konsequente Weiterentwicklung aus dem nach den theoretischen Vorarbeiten des Physikers Allan McLeod Cormack von dem Elektrotechniker Godfrey Hounsfield entwickelten 2D-Röntgen-Computertomographen gesehen werden, für den beide gemeinsam 1979 den Nobelpreis für Medizin erhielten (siehe [50]).

Zum Scannen des Objektes benutzten sie dabei die schon am 8. November 1895 im Physikalischen Institut der Universität Würzburg von Wilhelm Conrad Röntgen (Manuskript „Über eine neue Art von Strahlen“) entdeckten und später nach ihm benannten Röntgenstrahlen (X-Strahlen, x-rays), für die Röntgen 1901 den Nobelpreis für Physik zugesprochen bekam (siehe [49]). Die Rekonstruktion der Bilder aus den gemessenen Daten verlief damals noch recht umständlich, heute bedient man sich der sogenannten Radon-Transformation. Diese wurde, zusammen mit einer Inversionsformel, im Jahre 1917 von dem österreichischen Mathematiker Johann Radon entwickelt (siehe [37]), allerdings zunächst als rein mathematisches Verfahren ohne praktische Anwendung. Cormack und Hounsfield war sie jedoch unbekannt und erst Shepp konnte sie für die Computertomographie wiederentdecken.

Die erste CT-Aufnahme eines Menschen wurde 1971 aufgenommen, der erste kommerziell verfügbare Computertomograph wurde 1972 in den EMI Central Research Labs in Großbritannien entwickelt. Seitdem ist die Computertomographie eines der am weitesten verbreiteten Verfahren zur nichtinvasiven Darstellung des Inneren eines Objektes. Dabei sei auch darauf hingewiesen, dass sich das Anwendungsspektrum der Computertomographie nicht nur auf die medizinische Diagnostik beschränkt, sie findet auch im Bereich des zerstörungsfreien Prüfens weitreichende

Einsatzgebiete. Im Laufe der Zeit haben sich allerdings sowohl die Abtastgeometrien als auch die verwendeten Algorithmen stetig weiterentwickelt. Eine gute Übersicht zu den unterschiedlichen Tomographen und den diesen zugrunde liegenden Abtastgeometrien findet sich beispielsweise im Buch von Natterer [31] oder von Natterer und Wübbeling [32].

Die in [20], [21], [23], [24], [27] und [29] entwickelten und im Laufe der Zeit durch Ausnutzung von Invarianzen und effizienter Programmierung immer weiter verbesserten Algorithmen (vgl. [5] und [30]) dienten als Ausgangspunkt für die Untersuchungen zur Doppler-Transformation. Im Fokus des Interesses stand dabei die Entwicklung eines Programms zur Rekonstruktion von dreidimensionalen Vektorfeldern. Basis für die Entwicklung dieses Programms war die im Rahmen seiner Dissertation [52] von Weber erarbeitete, äußerst effiziente Umsetzung eines Rekonstruktionskerns für die dreidimensionale Cone Beam Transformation, die auch in [28] und [29] vorgestellt wurde.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Grundlagen der Computertomographie im Allgemeinen kurz erarbeitet und dann die Theorie zur Cone Beam Transformation detaillierter dargestellt. Darauf folgt die Herleitung des schon erwähnten, effizienten Rekonstruktionskerns für die dreidimensionale Cone Beam Transformation. Dann wird das eigentliche Thema der Arbeit, die Doppler-Transformation, vorgestellt und einige grundlegende Eigenschaften hergeleitet. Die Anwendung des Rekonstruktionskerns für die Cone Beam Transformation zur Rekonstruktion aus den mit Hilfe der Doppler-Transformation gemessenen Daten bildet den Abschluss dieses Kapitels. Am Ende der Arbeit werden einige aus synthetischen Daten erzeugte Rekonstruktionen präsentiert, welche die mittels dieser Methode erreichten Ergebnisse darstellen sollen. Gleichzeitig soll aber auch auf mögliche Probleme und offene Fragestellungen im Zusammenhang mit der Rekonstruktion von Vektorfeldern eingegangen werden. Ebenso sollen die Erweiterbarkeit des Verfahrens und mögliche Verbesserungen bei der Datengewinnung thematisiert werden.

Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle all denen meinen Dank aussprechen, die mich auf dem Weg bis zur Fertigstellung dieser Arbeit immer unterstützt und an mich geglaubt haben.

Besonderer Dank gebührt dabei Professor Dr. Alfred K. Louis und Professor Dr. Thomas Schuster, die mein Interesse an der Tomographie, insbesondere der Vektortomographie, geweckt haben und mich dann stets fürsorglich in allen Bereichen der Forschung unterstützt und begleitet haben. Ihre hilfreichen Hinweise und die tatkräftige Unterstützung bei jeglichen Schwierigkeiten haben das Gelingen dieser Arbeit überhaupt erst möglich gemacht.

Auch das ausgesprochen gute Arbeitsklima am Lehrstuhl und die vorbehaltlose Hilfsbereitschaft der Kollegen bei jedweder Art von Problemen haben maßgeblichen Anteil an der Entstehung dieser Dissertation. Besonders danken möchte ich in diesem Zusammenhang Thomas Weber, mit dem ich das Zimmer teilen durfte und dessen qualifizierte mathematische und technische Hilfestellungen oft meinen weiteren Weg erleichtert haben. Daneben habe ich auch seinen Rat in allen anderen Bereichen des täglichen Lebens und besonders seinen Humor schätzen gelernt. Für das intensive Korrekturlesen und Verbessern dieser Arbeit bin ich Yvonne Johann zu großem

Dank verpflichtet.

Für die Unterstützung während des Studiums und zahlreiche wertvolle Ratschläge und Tipps bei beruflichen und privaten Fragen und Problemen möchte ich meiner Familie und ganz besonders meinen Eltern danken. Ohne sie wäre diese Doktorarbeit nicht möglich gewesen.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Frau Susanne in besonderem Maße Dank aussprechen, für ihre Geduld, ihr Verständnis, ihre bedingungslose Unterstützung, ihren Rückhalt und vor allem ihre Liebe.

Saarbrücken, im Dezember 2008

David Theis

2 Problemstellung

In diesem Abschnitt werden zunächst die allgemeinen Grundlagen der Computertomographie hergeleitet und gleichzeitig wird ein kurzer historischer Abriss über die Entwicklungen und Neuerungen in diesem noch relativ jungen Gebiet der mathematischen Forschung gegeben. Die Ausführungen folgen meist [31] und [32].

2.1 Das Prinzip der Computertomographie

Wir betrachten zunächst das einfachste Messprinzip der Computertomographie. Eine Röntgenröhre sendet einen einzelnen Röntgenstrahl S der Intensität I_0 durch ein Objekt. Beim Durchgang durch das Objekt wird dieser Röntgenstrahl abgeschwächt und seine verminderte Intensität I_s wird auf der anderen Seite des Objektes von einem Detektor gemessen. Das Objekt liegt dabei im Rekonstruktionsgebiet Ω in der Mitte zwischen Röntgenquelle und Detektor, die sich in einem Abstand s voneinander befinden. Als Rekonstruktionsgebiet Ω wird in den zu dieser Arbeit gehörenden praktischen Anwendungen immer die dreidimensionale Einheitskugel um den Ursprung, also $B_1(0)$, angenommen. Diese einfache Messanordnung ist in Abbildung 2.1 zu sehen. Nehmen wir an, dass sich die Röntgenröhre im Punkt $\alpha \in \mathbb{R}^3$ befindet, und dass $\theta \in S^2$ der von α ausgehende Einheitsvektor in Richtung des Detektors ist. Allgemein wird mit S^{n-1} die n -dimensionale Einheitskugel im \mathbb{R}^n bezeichnet. Der Weg des Strahls S lässt sich unter der weiteren Annahme, dass sich der Röntgenstrahl geradlinig ausbreitet, mittels $S := \alpha + t\theta$, $t \in [0, \infty)$, parametrisieren. An der Röntgenquelle ($t = 0$) berechnet sich die Intensität damit zu $I(\alpha + 0 \cdot \theta) = I_0$ und am Detektor ($t = s$) misst man eine (geringere) Intensität von $I(\alpha + s \cdot \theta) = I_s$. Geht man zudem davon aus, dass die Abnahme der Intensität $\Delta I = I(\alpha + t\theta) - I(\alpha + (t+h)\theta)$ zwischen zwei Punkten t und $t+h$ proportional zur Intensität $I(\alpha + t\theta)$ und zum zurückgelegten Weg $\Delta t = h = (t+h) - t$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta I = f I \Delta t &\Leftrightarrow I(\alpha + t\theta) - I(\alpha + (t+h)\theta) = f(\alpha + t\theta) I(\alpha + t\theta) h \\ &\Leftrightarrow I(\alpha + (t+h)\theta) - I(\alpha + t\theta) = -f(\alpha + t\theta) I(\alpha + t\theta) h, \end{aligned}$$

wobei der Proportionalitätsfaktor f als Röntgenstrahlenabsorptionskoeffizient bezeichnet wird und der Dichte des Objektes entspricht. Der Grenzübergang $\Delta t = h \rightarrow 0$ führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$I'(\alpha + t\theta) = -f(\alpha + t\theta) I(\alpha + t\theta),$$

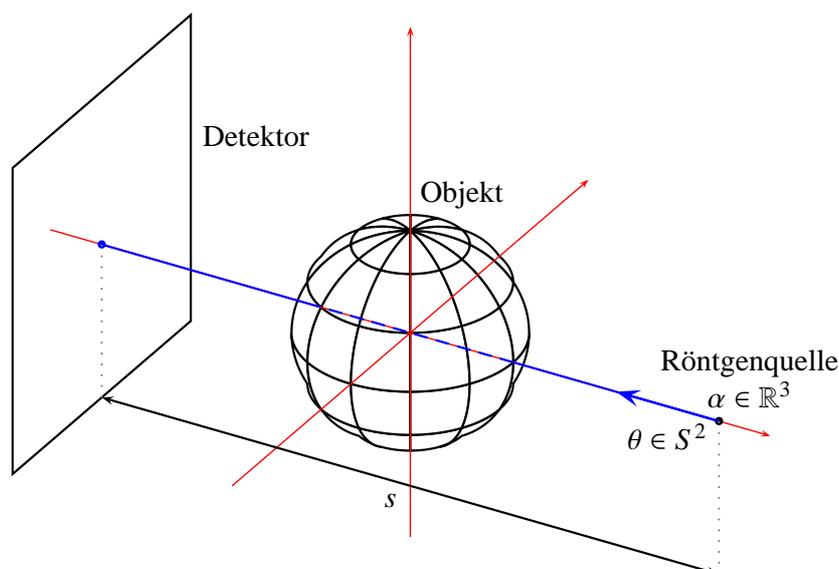


Abbildung 2.1: Einfachste Messanordnung in der Computertomographie.

die durch Integration entlang des Strahls S der Länge s von der Röntgenquelle zum Detektor durch die Gleichung

$$\int_0^s f(\alpha + t\theta) dt = -\ln(I(\alpha + s\theta)) + \ln(I(\alpha + 0 \cdot \theta)) \quad (2.1.1)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^s f(\alpha + t\theta) dt = -\ln\left(\frac{I_S}{I_0}\right)$$

gelöst wird. Da man weiterhin annimmt, dass der Abschwächungskoeffizient f außerhalb des Objektes Null ist, oder anders gesagt, dass nur das gescannte Objekt für die Intensitätsminderung des Röntgenstrahls verantwortlich ist, kann in Formel (2.1.1) das Integral \int_0^s durch das unbestimmte Integral \int_0^∞ ersetzt werden. Die gemessenen Daten $-\ln\left(\frac{I_S}{I_0}\right)$ hängen somit nur von der Quellposition α und dem Richtungsvektor θ ab und man definiert

$$g(\alpha, \theta) := -\ln\left(\frac{I_S}{I_0}\right). \quad (2.1.2)$$

Das Problem der Computertomographie besteht nun darin, aus den für endlich viele Strahlen S_i gemessenen Daten $g_i(\alpha, \theta) := -\ln\left(\frac{I_{S_i}}{I_0}\right)$ den Abschwächungskoeffizienten f , d.h. die Dichte des Objektes, zu rekonstruieren. Dieses einfachste Modell einer computertomographischen Messung bezeichnet man als divergente Röntgentransformation.

Definition 2.1.1. Sei $\theta \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ein Quellpunkt. Die *divergente Röntgentransformation* \mathcal{D} von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dem Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen in \mathbb{R}^n , ist definiert als

$$(\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) = \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt. \quad (2.1.3)$$

Dabei heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ *Schwartz-Funktion* oder *schnell-fallend*, wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, und wenn für alle Multiindizes $\gamma, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ die Funktion $x^\gamma D^\beta f(x)$ auf \mathbb{R}^n beschränkt ist. Weiterhin bezeichnet man den Vektorraum aller Schwartz-Funktionen als *Schwartz-Raum* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt also

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \gamma, \beta \in \mathbb{N}_0^n \exists C \geq 0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\gamma D^\beta \phi(x)| \leq C \right\}.$$

Der Schwartz-Raum ist ein metrischer Raum, welcher durch die Familie von Halbnormen

$$\|f\|_N = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\gamma, \beta < N} |x^\gamma D^\beta f(x)|$$

induziert wird.

Wie man an der obigen Herleitung sieht, ist die verwendete Messgeometrie und damit einhergehend die Parametrisierung des Strahlenweges ein entscheidender Faktor für die resultierende Integraltransformation. Die Verwendung verschiedener Messgeometrien führt auf weitere Integraltransformationen, die in der Computertomographie wichtig sind.

Bei Verwendung der parallelen Geometrie, die in den Scannern der ersten Generation implementiert war, wird ein von einer Röntgenquelle erzeugter Strahl von einem einzelnen Detektorelement auf der gegenüberliegenden Seite des Objektes registriert. Quelle und Detektor wurden anschließend für weitere Messungen parallel zum Objekt verschoben. Dann erfolgte eine Drehung um einen kleinen Winkel um das Objekt, so dass die Messungen aus dieser Richtung von neuem beginnen konnten. Diese Abtastgeometrie ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Das zugrunde liegende mathematische Modell ist die sogenannte Röntgentransformation \mathcal{P} . Sie integriert, genau wie \mathcal{D} , ebenfalls über gerade Linien. Allerdings werden in diesem Fall die Strahlen im \mathbb{R}^n mittels einer Richtung $\theta \in S^{n-1}$ und einem Punkt $x \in \theta^\perp$ durch $\{x + t\theta : t \in \mathbb{R}\}$ parametrisiert. Dabei ist $\theta^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \theta \rangle = 0\}$ der Unterraum senkrecht zu θ .

Definition 2.1.2. Sei $\theta \in S^{n-1}$ und $x \in \theta^\perp$. Die *Röntgentransformation* \mathcal{P} von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ wird definiert als

$$(\mathcal{P}f)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta) dt. \quad (2.1.4)$$

Für festes θ schreibt man die Röntgentransformation, die auf $T^n = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\}$ operiert, oft auch als $\mathcal{P}_\theta f(x) = \mathcal{P}f(\theta, x)$.

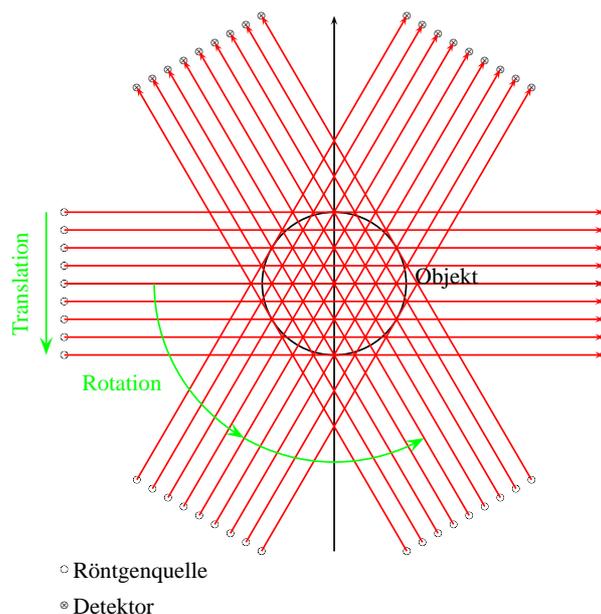


Abbildung 2.2: Parallele Messgeometrie, wie sie in den CT-Scannern der ersten Generation eingesetzt wurde.

Während \mathcal{D} und \mathcal{P} über Linien integrieren, integriert die Radon-Transformation über Hyperebenen im \mathbb{R}^n . Sei $H(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = s\}$ die Hyperebene senkrecht zu $\theta \in S^{n-1}$ mit Abstand $s \in \mathbb{R}$. Jede Hyperebene kann auf diese Art und Weise dargestellt werden und es gilt $H(\theta, s) = H(-\theta, -s)$.

Definition 2.1.3. Man definiert die *Radon-Transformation* \mathcal{R} von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ über die Hyperebene $H(\theta, s)$ als

$$(\mathcal{R}f)(\theta, s) = \int_{H(\theta, s)} f(x) dx. \quad (2.1.5)$$

Auch hier schreibt man für festes θ die Radon-Transformation als $\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}f(\theta, s)$. $\mathcal{R}f$ ist eine gerade Funktion auf dem Einheitszylinder $S^{n-1} \times \mathbb{R} = \{(\theta, s) : \theta \in S^{n-1}, s \in \mathbb{R}\}$ und es gilt $(\mathcal{R}f)(\theta, s) = (\mathcal{R}f)(-\theta, -s)$. Wie man auch leicht erkennen kann, unterscheiden sich die Radon- und die Röntgentransformation im zweidimensionalen Raum nur in der Notation, denn es gilt

$$\mathcal{R}f(\omega, s) = \int_{x \in \theta^\perp, \langle x, \omega \rangle = s} \mathcal{P}f(\theta, x) dx.$$

Die Parametrisierung der Linien und die zugehörige Definition der entsprechenden Integraltransformation ist in Abbildung 2.3 nochmals veranschaulicht. Als Weiterentwicklung der in

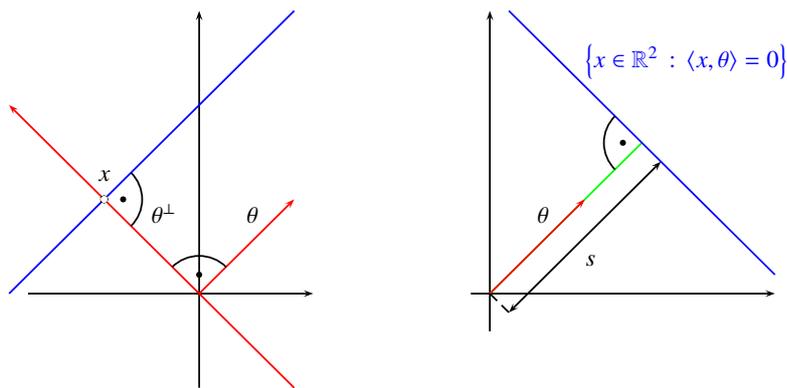


Abbildung 2.3: Parametrisierung der Röntgentransformation \mathcal{P} links und der Radon-Transformation \mathcal{R} rechts im \mathbb{R}^2 . Die blaue Linie entspricht jeweils dem abgetasteten Strahl.

Abbildung 2.2 dargestellten parallelen Geometrie wurde die sogenannte Fächerstrahlgeometrie (engl. fan beam geometry) verwendet. Dabei wird ein zweidimensionaler Fächer von Röntgenstrahlen von einer Röntgenquelle ausgesandt und hinter dem Objekt von einem zeilenförmigen Detektor erfasst.

Die CT-Scanner der zweiten Generation verwendeten dabei noch sehr wenige Detektorelemente, so dass sich ein sehr schmaler Öffnungswinkel des Fächers ergab und eine Verschiebung der Röntgenquelle weiterhin notwendig war. Allerdings waren bei der anschließenden Rotation schon wesentlich größere Winkel möglich, als bei der parallelen Geometrie.

In den Geräten der dritten Generation wurde die Anzahl der Detektorelemente weiter erhöht, so dass der Öffnungswinkel des Strahlenfächers ausreicht, um das gesamte Objekt zu erfassen. Dadurch ist eine Verschiebung der Röntgenquelle nicht mehr notwendig.

CT-Scanner der vierten Generation bestehen aus einem kompletten Detektorring in dessen Innerem die Röntgenquelle rotiert. Da sich der Aufbau für die unterschiedlichen Fächerstrahlgeometrien nicht wesentlich unterscheidet, ist als Beispiel ein Gerät der dritten Generation in Abbildung 2.4 dargestellt. Das zur Fächerstrahlgeometrie gehörende mathematische Modell erhält man durch Verwendung der Dimension $n = 2$ in Definition 2.1.1. Es ist offensichtlich, dass die Abtastung eines Objektes wesentlich schneller durchgeführt werden kann, als mit einem einzelnen ausgesandten Strahl. Dies vermindert natürlich auch die bewegungsbedingten Artefakte und Störungen, die bei einer langwierigen Messung – zumindest im medizinischen Kontext – zwangsläufig auftreten, beispielsweise Bewegungen des Herzens oder des Brustkorbes beim Atmen.

Eine Ausweitung dieser Messgeometrie auf drei Dimensionen unter Verwendung eines Strahlenkegels statt eines Fächers führt auf die Cone Beam Transformation \mathcal{D} . Im Folgenden wird stets davon ausgegangen, dass das zu untersuchende Objekt komplett von dem Strahlenbündel überdeckt wird und dass der Detektor eine ausreichende Größe hat, um alle ausgesandten Strahlen zu erfassen. Für diejenigen Strahlen, die das Objekt nicht treffen, dennoch aber auf dem Detektor

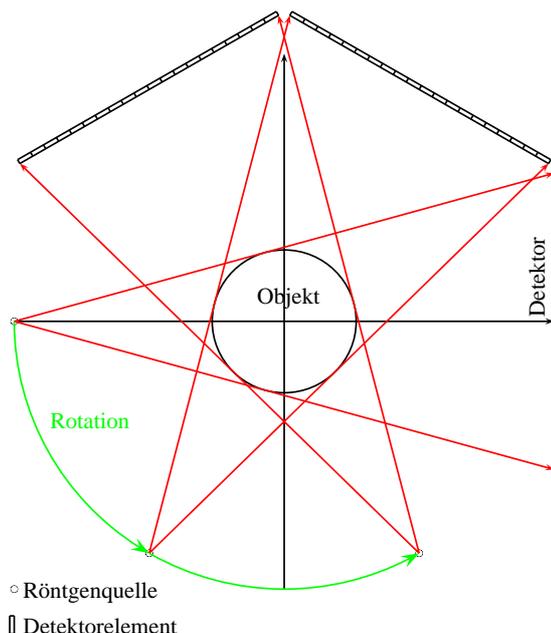


Abbildung 2.4: Fächerstrahlgeometrie, wie sie in den CT-Scannern der dritten Generation eingesetzt wurde.

ankommen, nimmt man an, dass die in Formel (2.1.2) definierten gemessenen Daten $g(\alpha, \theta) = 0$ sind, d.h. dass außerhalb des Objektes keine Abschwächung der Intensität der Strahlen erfolgt. Obgleich die allgemeine Definition 2.1.1 bereits vorgestellt wurde, wird die spezielle Definition der Cone Beam Transformation hier aufgrund ihrer Wichtigkeit im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch einmal angegeben.

Definition 2.1.4. Sei $\theta \in S^2$ ein Einheitsvektor und $\alpha \in \mathbb{R}^3$ ein Quellpunkt. Die *Cone Beam Transformation* \mathcal{D} von $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ist definiert als

$$(\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) = \int_0^{\infty} f(\alpha + t\theta) dt . \quad (2.1.6)$$

Die Messanordnung für die Cone Beam Transformation mit einigen exemplarischen Röntgenstrahlen ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Der dreidimensionale Strahlenkegel ermöglicht dabei die gleichzeitige Erfassung mehrerer Ebenen des zu untersuchenden Objektes. Dadurch wird sowohl die Strahlendosis als auch die Dauer der Messung deutlich verringert. Neben diesen für den Patienten wichtigen Faktoren bestimmen Mess- und Auswertungsdauer natürlich auch den Patientendurchsatz und damit den wirtschaftlichen Nutzen eines CT-Scanners, so dass die Entwicklung effizienter Messgeometrien und Algorithmen sowohl im Interesse der Patienten als auch der Betreiber liegt.

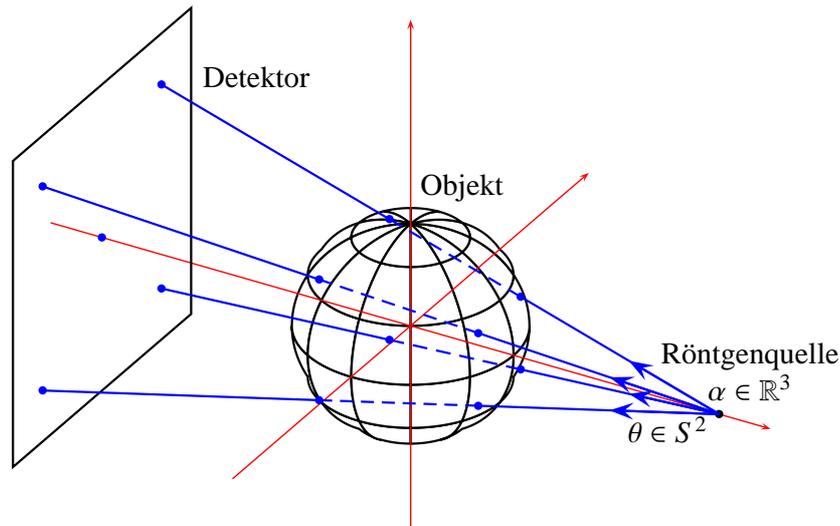


Abbildung 2.5: Messanordnung in der Cone Beam CT.

Zusätzlich zur Art und Weise, auf die die Strahlen ausgesandt und erfasst werden, ist auch die Abtastkurve Γ , d.h. die Bahn auf der die Röntgenquelle um das Objekt rotiert, von Interesse. Allerdings bestehen – neben der technischen Realisierbarkeit – weitere Einschränkungen bei der Wahl der Abtastkurve. Eine Berechnung des Abschwächungskoeffizienten beziehungsweise der Dichte f des Objektes aus den gemessenen Daten $g(\alpha, \theta)$, d.h. eine Inversion der Cone Beam Transformation \mathcal{D} , ist nur für bestimmte Abtastkurven möglich.

Hamaker, Smith, Solmon und Wagner konnten in [12] eine Inversionsformel für die 3D-Tomographie für den Fall angeben, dass die Daten $g(\alpha, \theta)$ für alle Abtastpunkte α auf einer Kugeloberfläche um das Objekt liegen. In diesem Fall spricht man von *vollständigen Daten*. Allerdings ist die Messung dieser immensen Datenmenge sehr aufwendig und keinesfalls effizient realisierbar. Erst Tuy gelang es in [51] zu zeigen, dass eine Inversion schon dann möglich ist, wenn jede Ebene im \mathbb{R}^3 , die das Objekt schneidet, auch die Abtastkurve Γ schneidet. Die genaue Definition dieser *Tuy'schen Bedingung*, die oft wegen der von Kirillov schon 1961 in [16] entwickelten theoretischen Grundlagen auch *Tuy-Kirillov-Bedingung* genannt wird, lautet wie folgt (vgl. [30] und [32]):

Definition 2.1.5. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha = \alpha(\lambda)$, $\lambda \in I$ eine Parametrisierung der Abtastkurve Γ und f eine reellwertige Funktion mit $\text{supp}(f) \subseteq \Omega$, wobei Ω das Rekonstruktionsgebiet ist. Dann muss Γ folgende Bedingungen erfüllen:

- i) Die Kurve Γ liegt außerhalb des Gebiets Ω .
- ii) Die Funktion α ist beschränkt, stetig und fast überall differenzierbar.

iii) Für alle $x \in \text{supp}(f)$ und alle $\theta \in S^2$ existiert ein $\lambda = \lambda(x, \theta) \in I$, so dass

$$\langle \alpha(\lambda(x, \theta)), \theta \rangle = \langle x, \theta \rangle \quad \text{und} \quad \langle \alpha'(\lambda(x, \theta)), \theta \rangle \neq 0 .$$

Im Fall eines dreidimensionalen Objektes ist die Tuy'sche Bedingung für einen Kreis offensichtlich nicht erfüllt. Dennoch benutzt man in vielen praktischen Anwendungen eine kreisförmige Abtastkurve. Dabei rotiert die Röntgenquelle auf einer Kreisbahn um das Objekt, welches nach einer vollständigen Umrundung ein kleines Stück vorgeschoben wird. Dadurch entstehen schichtweise Aufnahmen – eine Ebene im Fall der Fächer-, mehrere Ebenen (Volumen) für die Kegelstrahlgeometrie –, die später zu einer kompletten dreidimensionalen Rekonstruktion zusammengesetzt werden. Schiebt man nun das Objekt beziehungsweise den Patienten schon während der Umrundung durch die Röntgenquelle mit konstanter Geschwindigkeit nach vorne, so entsteht eine spiralförmige Abtastkurve. Diese ist aufgrund der hohen Abtastgeschwindigkeit besonders im klinischen Alltag interessant. Zudem ist für die Spirale die Tuy'sche Bedingung erfüllt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch lediglich die kreisförmige Abtastkurve aufgrund ihrer einfachen Realisierbarkeit und ihrer weiten Verbreitung im zerstörungsfreien Prüfen aber auch in der medizinischen Diagnostik eine Rolle spielen.

Nach dieser kurzen, allgemeinen Einführung in das Gebiet der Tomographie werden im nächsten Kapitel die notwendigen mathematischen Grundlagen für die Herleitung von Inversionsformeln und die Berechnung von Rekonstruktionskernen behandelt.

3 Mathematische Grundlagen

3.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt sollen einige allgemeine mathematische Eigenschaften vorgestellt werden, die für die Herleitung von Inversionsformeln und die Berechnung von Rekonstruktionskernen eine entscheidende Rolle spielen. Die Präsentation der folgenden Kapitel ist dabei meist an die Bücher von Natterer [31] und Natterer und Wübbeling [32] angelehnt. Weitere Literaturhinweise werden an entsprechender Stelle im Text gegeben. Auf die Reproduktion der Beweise wird dabei meistens verzichtet.

3.1.1 Die Delta-Distribution

Die (Dirac'sche) *Delta-Distribution* ist eine Abbildung von einem reellen oder komplexen Funktionenraum \mathcal{F} in die reellen oder komplexen Zahlen \mathbb{R} oder \mathbb{C} :

$$\mathcal{F} \ni f \mapsto \delta(f) = f(0) \in \mathbb{R}.$$

Für die Anwendung der Delta-Distribution hat sich folgende Schreibweise als nützlich erwiesen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-y) dx = f(y).$$

Dabei ist das Integral als Grenzwert zu verstehen, wobei δ durch Translate von glatten Funktionen mit Mittelwert 1 approximiert wird, die in der schwachen Topologie gegen δ konvergieren. Diese Gleichung wird in späteren Berechnungen im Zusammenhang mit der Formel von Grangeat wiederholt verwendet.

Eine wichtige Eigenschaft der Delta-Distribution ist die Homogenität ihrer Ableitungen.

Definition 3.1.1. Eine Funktion heißt *homogen vom Grad n* , wenn für $k > 0$ gilt:

$$f(kx) = k^n f(x). \quad (3.1.1)$$

Für die Delta-Distribution kann man folgenden Satz zeigen (vgl. [41]):

Satz 3.1.2. $\delta^{(k)}$ ist homogen vom Grad $-k - 1$.

Beweis. Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(s) \delta^{(k)}(\lambda s) ds &= \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda^{-1} s) \delta^{(k)}(s) ds \\ &= \lambda^{-1} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial s^k} \left\{ \phi(\lambda^{-1} s) \right\} \Big|_{s=0} \\ &= \lambda^{-k-1} (-1)^k \phi^{(k)}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(s) \lambda^{-k-1} \delta^{(k)}(s) ds . \end{aligned}$$

□

Für ein beliebiges $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann man zudem beweisen, dass

$$\delta'(kx) = \frac{\operatorname{sgn}(k)}{k^2} \delta'(x) \quad (3.1.2)$$

gilt.

Beweis. Mit der Substitution $y = kx$, $dy = |k| dx$ ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(kx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta'(y) \frac{1}{|k|} dy = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{k}\right) \delta'(y) dy \\ &= -\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(f\left(\frac{y}{k}\right) \right) \delta(y) dy = -\frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{\infty} f'\left(\frac{y}{k}\right) \frac{1}{k} \delta(y) dy \\ &= -\frac{1}{|k|k} f'(0) = \frac{1}{|k|k} (-f'(0)) = \frac{1}{|k|k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x) dx . \end{aligned}$$

$\underbrace{\quad}_{= \frac{\operatorname{sgn}(k)}{k^2}}$

□

Für die Herleitung von Inversionsformeln sind folgende Rechenregeln für die erste Ableitung δ' der Delta-Distribution wichtig:

Satz 3.1.3. Seien $a \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{S^2} \psi(\langle a, \omega \rangle) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega = -\langle a, \theta \rangle \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \psi'(\langle a, \omega \rangle) d\omega . \quad (3.1.3)$$

Beweis. Sei U eine unitäre Abbildung mit $U\theta = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\omega = \omega(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta) \cos(\phi) \\ \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$.

Damit ist

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cos(\phi) \\ \cos(\vartheta) \sin(\phi) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = -e_3 .$$

Dann gilt wegen $\langle \theta, \omega \rangle = \theta^\top \omega = \theta^\top U^\top U \omega = (U\theta)^\top U \omega = \langle U\theta, U\omega \rangle$:

$$\int_{S^2} \psi(\langle a, \omega \rangle) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega = \int_{S^2} \psi(\langle a, \omega \rangle) \delta'(\langle U\theta, U\omega \rangle) d\omega .$$

Definiert man $\tilde{\omega} := U\omega$, so folgt $\omega = U^\top U \omega = U^\top \tilde{\omega}$ und damit

$$\int_{S^2} \psi(\langle a, \omega \rangle) \delta'(\langle U\theta, U\omega \rangle) d\omega = \int_{S^2} \psi(a^\top U^\top \tilde{\omega}) \delta'(\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle) d\tilde{\omega} .$$

Mit $\tilde{\omega} = \omega(\vartheta, \phi)$ ist $\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle = \cos(\vartheta)$ und man erhält

$$\int_{S^2} \psi(a^\top U^\top \tilde{\omega}) \delta'(\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle) d\tilde{\omega} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(a^\top U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \delta'(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi .$$

Mit der Koordinatentransformation $t = \cos(\vartheta)$, $dt = -\sin(\vartheta) d\vartheta$ ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(a^\top U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \delta'(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(a^\top U^\top \omega(\arccos t, \phi)) \delta'(t) dt d\phi .$$

Nun verwendet man folgende Eigenschaft der Delta-Distribution, vgl. [54]:

$$\delta'(f) = \int f(s) \delta'(s) ds = -f'(0)$$

Damit kann man das Integral weiter vereinfachen zu

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \psi(a^\top U^\top \omega(\arccos t, \phi)) \delta'(t) dt d\phi = - \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial}{\partial t} [\psi(a^\top U^\top \omega(\arccos t, \phi))] \right|_{t=0} d\phi .$$

Wegen

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t} [\psi(a^\top U^\top \omega(\arccos t, \phi))] \right|_{t=0} \\ &= \left[\psi'(a^\top U^\top \omega(\arccos t, \phi)) \cdot a^\top U^\top \omega'(\arccos t, \phi) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right) \right] \Big|_{t=0} \\ &= -\psi' \left(a^\top U^\top \omega \left(\frac{\pi}{2}, \phi \right) \right) \cdot a^\top U^\top \omega' \left(\frac{\pi}{2}, \phi \right) \\ &= - \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \psi(a^\top U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

ergibt sich folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(a^\top U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \delta'(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \psi(a^\top U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\phi \\ &= -a^\top U^\top e_3 \int_0^{2\pi} \psi' \left(a^\top U^\top \omega \left(\frac{\pi}{2}, \phi \right) \right) d\phi . \end{aligned}$$

Bei dem Faktor vor dem Integral handelt es sich um die innere Ableitung, denn

$$a^\top U^\top \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\omega(\vartheta, \phi)) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = a^\top U^\top (-e_3) = -a^\top U^\top e_3 .$$

Aus $U\theta = e_3$ folgt offensichtlich $U^\top e_3 = \theta$ und wegen $\omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \perp e_3$ ist $U^\top \omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \perp U^\top e_3 = \theta$, woraus die Behauptung durch

$$-a^\top U^\top e_3 \int_0^{2\pi} \psi' \left(a^\top U^\top \omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \right) d\phi = -\langle a, \theta \rangle \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \psi' (\langle a, \omega \rangle) d\omega$$

folgt. □

Satz 3.1.4. Seien $a \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \psi(\omega) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega &= -\theta^\top \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \nabla \psi(\omega) d\omega = - \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \langle \theta, \nabla \psi(\omega) \rangle d\omega \\ &= - \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi(\omega) d\omega , \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

wobei $\frac{\partial}{\partial \theta} = \theta^\top \nabla$ die Richtungsableitung ist.

Beweis. Sei U eine unitäre Abbildung mit den Voraussetzungen wie im Beweis von Satz 3.1.3, also

$$U\theta = e_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = -e_3 .$$

Dann gilt mit der Definition $\tilde{\omega} := U\omega$ und wegen

$$\langle \theta, \omega \rangle = \theta^\top \omega = \theta^\top U^\top U \omega = (U\theta)^\top U \omega = e_3^\top \tilde{\omega} = \langle e_3, \tilde{\omega} \rangle :$$

$$\int_{S^2} \psi(\omega) \delta'(\langle U\theta, U\omega \rangle) d\omega = \int_{S^2} \psi(U^\top \tilde{\omega}) \delta'(\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle) d\tilde{\omega} .$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Beziehung $\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle = e_3^\top \tilde{\omega} = \cos(\vartheta)$ und einer zum Beweis von Satz 3.1.3 analogen Rechnung vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \psi(U^\top \tilde{\omega}) \delta'(\langle e_3, \tilde{\omega} \rangle) d\tilde{\omega} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \delta'(\cos(\vartheta)) \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \psi(U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\phi . \end{aligned}$$

Mit $\left. \frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = -e_3$ berechnet sich die innere Ableitung zu $-(U^\top e_3)^\top$. Man kann zudem $\omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \perp e_3$ und daraus $U^\top \omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) \perp \theta$ folgern. Damit ergibt sich unter Verwendung von $U^\top e_3 = \theta$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial}{\partial \vartheta} \psi(U^\top \omega(\vartheta, \phi)) \right|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} d\phi &= -(U^\top e_3)^\top \int_0^{2\pi} \nabla \psi(U^\top \omega\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right)) d\phi \\ &= -\theta^\top \int_{S^2 \cap \theta^\perp} \nabla \psi(\omega) d\omega, \end{aligned}$$

also die Behauptung. \square

Gelfand und Schilow geben auf Seite 220 ihres Buches [9] über verallgemeinerte Funktionen weitere nützliche Formeln für das Rechnen mit Ableitungen der Delta-Distribution an:

$$\int \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) \varphi(\omega) d\omega = (-1) \int_{\langle \omega, \theta \rangle=0} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\sigma = - \int_{\langle \omega, \theta \rangle=0} \theta^\top \nabla \varphi d\sigma, \quad (3.1.5)$$

$$\int \delta^{(k)}\left(\sum a_i x_i\right) \varphi(x) dx = (-1)^k \int_{\sum a_i x_i=0} \frac{\partial^k \varphi}{\partial u_1^k} d\sigma, \quad (3.1.6)$$

wobei die Differentiation auf der rechten Seite in der zur Hyperebene $\sum a_i x_i = 0$ orthogonalen Richtung (nach der Seite, nach der die Summe $\sum a_i x_i$ wächst) ausgeführt wird und $d\sigma$ das Flächenelement dieser Hyperebene ist. Die Koordinaten $u_1 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, u_2, \dots, u_n werden dabei so eingeführt, dass die Transformationsmatrix orthogonal ist (Drehung der Achsen) und es muss $\sum \alpha_i^2 = 1$ gelten.

Bei der ersten Gleichung vergleiche man den Beweis von Satz 3.1.4. Die zweite Gleichung kann auch für $k = 2$ benutzt werden und liefert die gleichen Ergebnisse, die Denisjuk in [3] hergeleitet hat.

Der Vollständigkeit halber sei hier eine weitere Darstellung der Delta-Distribution angegeben, die häufig in der Literatur zu finden ist:

$$\delta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx. \quad (3.1.7)$$

Auch für diese alternative Definition lässt sich leicht zeigen, dass δ homogen vom Grad -1 ist.

Beweis. Mit Hilfe der Substitution: $y = rx$, $r > 0$, $\frac{dy}{dx} = r$ ergibt sich

$$\delta(rk) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irkx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} \frac{1}{r} dy = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} dy = \frac{1}{r} \delta(k).$$

Damit ist die Behauptung, dass die Delta-Distribution homogen vom Grad -1 ist, gezeigt. \square

3.1.2 Faltung

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ wird die *Faltung* $f * g$ von f mit g als das Integral über das Produkt von f mit einer gespiegelten und verschobenen Version von g definiert:

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau . \quad (3.1.8)$$

Für diskrete Funktionen $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, wie sie häufig in der Bild- oder Signalverarbeitung benutzt werden, definiert man die *diskrete Faltung* als:

$$(f * g)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) g(n - k) . \quad (3.1.9)$$

Im Folgenden sind die wichtigsten Eigenschaften der Faltung, welche bei der Berechnung von Rekonstruktionskernen eine Rolle spielen, aufgelistet:

- Kommutativität:

$$f * g = g * f , \quad (3.1.10)$$

- Assoziativität:

$$f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h , \quad (3.1.11)$$

- Distributivität:

$$f * (g + h) = (f * g) + (f * h) , \quad (3.1.12)$$

- Assoziativität bezüglich der skalaren Multiplikation:

$$a(f * g) = (af) * g = f * (ag) , \quad (3.1.13)$$

wobei a eine beliebige komplexe Zahl ist,

- Ableitungsregel:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg . \quad (3.1.14)$$

Dabei ist Df die Ableitung f' von f beziehungsweise im diskreten Fall die Differenz $Df(n) = f(n + 1) - f(n)$.

- Faltung mit der Delta-Distribution:

$$(f * \delta)(x) = f(x) . \quad (3.1.15)$$

Damit ist $\delta(x)$ das neutrale Element der Faltung.

3.1.3 Fourier-Transformation

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sind die *Fourier-Transformation* $\mathcal{F}\{f\} = \hat{f}$ und die *inverse Fourier-Transformation* $\mathcal{F}^{-1}\{f\} = \tilde{f}$ definiert durch

$$\mathcal{F}\{f\}(\xi) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad (3.1.16)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f\}(\xi) = \tilde{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x) dx. \quad (3.1.17)$$

Es gilt $f = \tilde{\tilde{f}}$ bzw. $f = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\}\}$. In der anschließenden Übersicht sind die wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation aufgeführt.

- Linearitätsregel ($a, b \in \mathbb{R}, f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$):

$$(af + bg)^\wedge = a\hat{f} + b\hat{g}, \quad (3.1.18)$$

- Faltungsregel:

$$(f * g)^\wedge = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (3.1.19)$$

und

$$(fg)^\wedge = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}, \quad (3.1.20)$$

- Ableitungs- und Multiplikationsregel:

Für $k = (k_1, \dots, k_n), k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt

$$(D^k f)^\wedge(\xi) = i^{|k|} \xi^k \hat{f}(\xi) \quad (3.1.21)$$

und

$$(x^k f)^\wedge = i^{|k|} D^k f, \quad (3.1.22)$$

wobei $D^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}$, $x^k = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ und $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

- Fourier-Transformation der δ -Distribution:

$$\hat{\delta} = (2\pi)^{n/2}. \quad (3.1.23)$$

3.1.4 Helmholtz-Zerlegung

In der Theorie der Vektorfelder spielt die *Helmholtz-Zerlegung* (auch *Helmholtz-Hodge-Zerlegung* oder *Helmholtz-Theorem*) eine wichtige Rolle. Danach kann man ein differenzierbares, ausreichend glattes und schnell fallendes Vektorfeld $\vec{f}(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ in einem Gebiet Ω als Summe eines divergenzfreien Feldes $\vec{f}_{\text{so}}(x)$ und eines rotationsfreien Feldes $\vec{f}_{\text{ir}}(x)$ darstellen. Dabei bezeichnet man ein Vektorfeld \vec{f} als *divergenzfrei* (engl. *solenoidal*), wenn dessen Divergenz überall Null ist und als *rotationsfrei* (engl. *irrotational, conservative*), wenn dessen Rotation (engl. *curl*) überall Null ist. Zusammengefasst lässt sich dies wie folgt auf die oben eingeführten Bezeichnungen übertragen:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{\text{so}} \text{ ist divergenzfrei} &\Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{f}_{\text{so}} \equiv 0 \\ \vec{f}_{\text{ir}} \text{ ist rotationsfrei} &\Leftrightarrow \nabla \times \vec{f}_{\text{ir}} \equiv 0.\end{aligned}$$

Dabei steht \times für das Kreuz- oder Vektorprodukt, welches für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Da die Divergenz der Rotation eines jeden Vektorfeldes überall gleich Null ist, d.h. da $\forall \vec{f} \in \mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) \equiv 0$$

gilt, kann man jedes divergenzfreie Vektorfeld \vec{f} als Rotation eines anderen Vektorfeldes \vec{g} schreiben. Für \vec{f}_{so} bedeutet dies:

$$\vec{f}_{\text{so}}(x) = \nabla \times \vec{g}(x).$$

Gleichermaßen gilt, dass die Rotation des Gradienten jedes beliebigen skalaren Feldes überall gleich Null ist, d.h. aufgrund der Eigenschaft, dass $\forall \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla \times (\nabla \Phi) \equiv 0,$$

lässt sich jedes rotationsfreie Feld \vec{f} als Gradient eines skalaren Feldes Φ schreiben. Für \vec{f}_{ir} gilt also:

$$\vec{f}_{\text{ir}}(x) = \nabla \Phi(x).$$

Insgesamt lässt sich die Helmholtz-Zerlegung eines Vektorfeldes \vec{f} damit schreiben als

$$\vec{f}(x) = \vec{f}_{\text{so}}(x) + \vec{f}_{\text{ir}}(x) \quad \text{mit} \quad \vec{f}_{\text{so}}(x) = \nabla \times \vec{g}(x) \quad \text{und} \quad \vec{f}_{\text{ir}}(x) = \nabla \Phi(x). \quad (3.1.24)$$

Die Helmholtz-Zerlegung ist allerdings nicht eindeutig. Dies ist leicht einzusehen, denn sei

$$\vec{f}(x) = \vec{f}_{\text{so}}(x) + \nabla \Phi(x)$$

eine Helmholtz-Zerlegung des Vektorfeldes \vec{f} . Dann ist für eine harmonische Funktion h , d.h. $\Delta h = 0$,

$$\vec{f}(x) = (\vec{f}_{\text{so}}(x) + \nabla h(x)) + \nabla(\Phi - h)(x)$$

eine weitere Helmholtz-Zerlegung in einen divergenz- und einen rotationsfreien Anteil, da

$$\nabla \cdot (\vec{f}_{\text{so}}(x) + \nabla h(x)) = \nabla \cdot \vec{f}_{\text{so}}(x) + \nabla \cdot \nabla h = \Delta h = 0$$

und

$$\nabla \times \nabla(\Phi - h)(x) = 0.$$

Eindeutig wird diese Zerlegung erst, wenn man Randbedingungen fordert, beispielsweise $\Phi = 0$ auf dem Rand des Gebietes Ω . Es wird später gezeigt, dass es genau diese Felder $\nabla\Phi$, $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ sind, die im Nullraum der Doppler-Transformation \mathfrak{D} liegen und dass daher nur der divergenzfreie Anteil eines beliebigen Vektorfeldes berechnet werden kann.

3.2 Die Approximative Inverse

Bei der nichtinvasiven Untersuchung von Patienten mit Hilfe der Computertomographie handelt es sich um ein sogenanntes *inverses Problem*, da man die Dichte im Inneren des Patienten, d.h. die Lage und den Zustand der Organe, nicht direkt messen, sondern nur anhand von indirekten Beobachtungen – eben den computertomographischen Messungen – Rückschlüsse auf diese Größen ziehen kann, vgl. [18]. Ein Problem bei der Lösung von inversen Problemen ist, dass sie im Sinne von Definition 3.2.1 schlecht gestellt sind.

Definition 3.2.1. Sei $A : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit topologischen Räumen X, Y . Das Problem (A, X, Y) heißt *gut gestellt*, wenn

- i) $Af = g$ für jedes $g \in Y$ eine Lösung hat,
- ii) diese Lösung eindeutig ist,
- iii) die Lösung stetig von den Daten abhängt.

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, so nennen wir das Problem *schlecht gestellt*.

Bei den im Rahmen dieser Arbeit interessanten Messungen aus dem Bereich der Computertomographie sind Messfehler, beispielsweise durch Bewegungen des Patienten, unvermeidlich. Zudem handelt es sich bei den behandelten Transformationen um kompakte Operatoren mit unendlichdimensionalem Bildraum, deren Inverse, sofern sie überhaupt existiert, nicht stetig sein kann, vgl. [2]. Zur Lösung von inversen Problemen ist es aus diesem Grund notwendig, sogenannte Regularisierungsverfahren zu verwenden, mit deren Hilfe man eine Approximation an die korrekte Inverse berechnet. Die Approximative Inverse, die von Louis in [20] entwickelt wurde, ist ein solches Verfahren. Sie soll im Folgenden vorgestellt und einige wichtige Eigenschaften hergeleitet und bewiesen werden. Weiterführende Details können auch in [22] und [26]

nachgelesen werden.

Sei $A : X \rightarrow Y$ ein linearer, kompakter Operator zwischen den Hilberträumen X und Y mit zugehöriger Singulärwertzerlegung $\{v_n, u_n; \sigma_n\}$, $n \geq 0$. Dann besitzt A eine Darstellung

$$Af = \sum_n \sigma_n \langle f, v_n \rangle_X u_n, \quad (3.2.1)$$

wobei $(v_n) \subset X$ und $(u_n) \subset Y$ vollständige Orthonormalsysteme für $\ker(A)^\perp$ bzw. $\overline{\text{range}(A)}$ sind und die reellen Zahlen σ_n als *Singulärwerte* bezeichnet werden. Ist A^* der adjungierte Operator von A , so gelten die Beziehungen

$$Av_n = \sigma_n u_n, \quad A^* u_n = \sigma_n v_n \quad \text{und} \quad A^* g = \sum_n \sigma_n \langle g, u_n \rangle_Y v_n.$$

Ziel ist es nun, aus den gemessenen Daten $g \in Y$ dasjenige $f \in X$ zu bestimmen, welches die Gleichung

$$Af = g \quad (3.2.2)$$

erfüllt. Dieses inverse Problem ist schlecht gestellt, wenn $\dim(\text{range}(A)) = \infty$, vgl. [18], was in den Anwendungen der Computertomographie immer als gegeben angenommen werden kann. Die Idee der Approximativen Inversen ist es nun, nicht die gesuchte Funktion f , sondern eine Näherung f_γ an f durch Anwenden eines sogenannten *Mollifiers* e_γ gemäß

$$f_\gamma = \langle f, e_\gamma \rangle_X \quad (3.2.3)$$

zu bestimmen. Die Variable $\gamma > 0$ heißt *Regularisierungsparameter* und ist für den Grad der Glättung der Daten verantwortlich. Je größer γ gewählt wird, umso stärker wird der hochfrequente und damit besonders fehleranfällige Anteil der Daten herausgefiltert. In der Computertomographie steht für den Mollifier e_γ dessen Glättungseigenschaft im Vordergrund. Allerdings kann e_γ auch andere Approximationseigenschaften besitzen, beispielsweise auch die Approximation von Ableitungen von f , wie Louis in [25] für die Radon-Transformation in 2D zeigen konnte.

Offensichtlich ist es mit Formel (3.2.3) nicht möglich, eine Näherung f_γ zu berechnen, ohne die exakte Lösung f zu kennen. Die grundlegende Idee ist es daher, den Mollifier im Bild des adjungierten Operators A^* zu approximieren und das Hilfsproblem

$$A^* \psi_\gamma = e_\gamma \quad (3.2.4)$$

zu lösen. ψ_γ wird dabei als *Rekonstruktionskern* bezeichnet. Nun lässt sich f_γ mittels

$$\begin{aligned} f_\gamma &= \langle f, e_\gamma \rangle_X = \langle f, A^* \psi_\gamma \rangle_X = \langle Af, \psi_\gamma \rangle_Y \\ &= \langle g, \psi_\gamma \rangle_Y =: S_\gamma g \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

leicht berechnen.

Definition 3.2.2. Die Abbildung $S_\gamma : Y \rightarrow X$ mit $S_\gamma g = \langle g, \psi_\gamma \rangle_Y$ heißt *Approximative Inverse* von A .

Der Rekonstruktionskern ψ_γ ist dabei von den gemessenen Daten g unabhängig und kann ohne Kenntnis der aktuellen Messung vorberechnet und abgespeichert werden.

Gilt für den Mollifier $e_\gamma \notin \text{range}(A^*)$, so hat Gleichung (3.2.4) keine Lösung. Für den Fall $e_\gamma \in \text{range}(A^*) \oplus \text{range}(A^*)^\perp = D(A^{*+})$, wobei A^{*+} die Pseudoinverse von A ist, minimiert man den Fehler

$$\|A^* \psi_\gamma - e_\gamma\|_X,$$

indem man die Normalgleichung

$$AA^* \psi_\gamma = Ae_\gamma$$

löst. Der Rekonstruktionskern ist die verallgemeinerte Lösung von $A^* \psi_\gamma = e_\gamma$, d.h. $\psi_\gamma = A^{*+} e_\gamma$, vgl. [5]. Auswertung von A^{*+} unter Verwendung der Singulärwertzerlegung von A^* ergibt für den Rekonstruktionskern ψ_γ folgende Reihendarstellung (vgl. [18]):

$$\psi_\gamma = A^{*+} e_\gamma = \sum_{\sigma>0} \sigma_n^{-1} \langle e_\gamma, v_n \rangle u_n.$$

Die von den gemessenen Daten unabhängige Vorbereitung des Rekonstruktionskerns bedeutet zwar eine immense Beschleunigung der eigentlichen Rekonstruktion, ist aber dennoch sehr rechenzeitintensiv, insbesondere, wenn der Rekonstruktionskern für jeden Punkt des Rekonstruktionsgebietes berechnet werden muss. Um die Abhängigkeit des Rekonstruktionskerns vom Rekonstruktionspunkt x deutlich zu machen, schreiben wir im Folgenden $\psi_\gamma(x, \cdot)$ für die Lösung von $A^* \psi_\gamma(x, \cdot) = e_\gamma(x, \cdot)$. Zusätzlich muss, unabhängig vom Zeitpunkt der Berechnung, eine sehr große Datenmenge abgespeichert werden. Sowohl Zeit- als auch Speicherbedarf lassen sich durch eine wichtige Eigenschaft der Approximativen Inversen deutlich verringern: Eventuelle Invarianzen des Operators A können auf den Rekonstruktionskern übertragen und dadurch effektiv ausgenutzt werden (vgl. [20]).

Lemma 3.2.3. Seien $A : X \rightarrow Y$, $T_1^x : X \rightarrow X$, $T_2^x : Y \rightarrow Y$ und $T_3^x : Y \rightarrow Y$ lineare, stetige Operatoren mit

$$T_1^x A^* = A^* T_2^x, \quad (3.2.6)$$

$$T_3^x A = A T_1^x. \quad (3.2.7)$$

Weiterhin seien $e_\gamma(x, \cdot)$ und $E_\gamma \in D(A^{*+})$ Mollifier mit

$$e_\gamma(x, \cdot) = T_1^x E_\gamma(\cdot) \quad (3.2.8)$$

und ϕ_γ sei die Lösung von

$$AA^* \phi_\gamma = AE_\gamma. \quad (3.2.9)$$

Dann ist die Lösung von

$$AA^*\psi_\gamma(x) = Ae_\gamma(x, \cdot) \quad (3.2.10)$$

gegeben als

$$\psi_\gamma(x) = T_2^x \phi_\gamma. \quad (3.2.11)$$

Sind die Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ und $E_\gamma \in \text{range}(A^*)$, dann gilt für die Lösung von

$$A^*\psi_\gamma(x) = e_\gamma(x, \cdot) \quad (3.2.12)$$

ebenfalls

$$\psi_\gamma(x) = T_2^x \phi_\gamma, \quad (3.2.13)$$

wobei ϕ_γ nun

$$A^*\phi_\gamma = E_\gamma \quad (3.2.14)$$

löst.

Beweis. Für die Lösung von Gleichung (3.2.10) gilt

$$AA^*\psi_\gamma(x) = Ae_\gamma(x, \cdot) \stackrel{(3.2.8)}{=} AT_1^x E_\gamma \stackrel{(3.2.7)}{=} T_3^x A E_\gamma \stackrel{(3.2.9)}{=} T_3^x A A^* \phi_\gamma \stackrel{(3.2.7)}{=} AA^* T_2^x \phi_\gamma.$$

Analog gilt für Formel (3.2.12)

$$A^*\psi_\gamma(x) = e_\gamma(x, \cdot) \stackrel{(3.2.8)}{=} T_1^x E_\gamma \stackrel{(3.2.14)}{=} T_1^x A^* \phi_\gamma \stackrel{(3.2.7)}{=} A^* T_2^x \phi_\gamma,$$

vgl. auch [20]. □

Betrachtet man nun beispielsweise eine Translationsinvarianz, so reicht es aus, den Rekonstruktionskern an der Stelle $x = 0$ zu berechnen und abzuspeichern. Denn wählt man den Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ zur Rekonstruktion an der Stelle x als Translation eines Mollifiers E_γ , so ist auch der Rekonstruktionskern $\phi_\gamma(x, \cdot)$ die Translation eines Rekonstruktionskerns ψ_γ , siehe [2].

3.3 Die Radon-Transformation \mathcal{R}

Wie schon zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, existiert für die Radon-Transformation \mathcal{R} eine Inversionsformel, mit deren Hilfe man aus den gemessenen Daten $g = \mathcal{R}f$ die ursprüngliche Funktion f rekonstruieren kann. Dadurch spielt die Radon-Transformation auch bei der Entwicklung von Inversionsformeln für die Cone Beam Transformation \mathcal{D} eine Rolle, denn durch die sogenannte Formel von Grangeat, die bei der ausführlichen Behandlung der Cone Beam Transformation noch genauer vorgestellt wird, besteht ein Zusammenhang zwischen der dreidimensionalen Radon-Transformation und \mathcal{D} . Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt einige wichtige Eigenschaften von \mathcal{R} vorgestellt.

3.3.1 Wichtige Eigenschaften

Zu der in Definition 2.1.3 angegebenen Formel für $\mathcal{R}f(\theta, s)$ mit $\theta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$, existieren folgende alternative Notationen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}f)(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx \\ &= \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy, \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

wobei δ die in Abschnitt 3.1.1 eingeführte eindimensionale Delta-Distribution bezeichnet und $\theta^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \theta \rangle = 0\}$ der Unterraum senkrecht zu θ ist. Die Darstellung (3.3.1) stellt eine natürliche Fortsetzung von $\mathcal{R}f$ von $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ nach $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ dar, denn für $r > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(r\theta, rs) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(rs - r\langle x, \theta \rangle) dx \\ &= r^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx \\ &= r^{-1} \mathcal{R}f(\theta, s), \end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{R}f$ wird als Funktion, die homogen vom Grad -1 ist, fortgesetzt. Damit ist es möglich, eine Differentiation der Radon-Transformation nach θ durchzuführen, vgl. [31, S.12]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{R}f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_k \delta'(s - \langle x, \theta \rangle) dx \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) x_k \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx = - \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}(x_k f))(\theta, s) \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{R}f(\theta, s) &= - \frac{\partial}{\partial s} (\mathcal{R}(x_k f))(\theta, s). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Für einen Multiindex $k \in \mathbb{N}^n$ mit $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ und $x^k = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}$ gilt:

$$D_\theta^k \mathcal{R}f(\theta, s) = (-1)^{|k|} \frac{\partial^{|k|}}{\partial s^{|k|}} \mathcal{R}(x^k f)(\theta, s), \quad (3.3.3)$$

wobei D_θ die Ableitung bezüglich θ bezeichnet.

Diesen Überlegungen folgend kann man für $f_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$ zeigen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{R}f_k(\theta, s + \langle a, \theta \rangle) &= \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_k(x) \delta(s + \langle a, \theta \rangle - \langle x, \theta \rangle) dx \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_k(x) \delta(s - \langle x - a, \theta \rangle) dx \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} f_k(x) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \delta(s - \langle x - a, \theta \rangle) dx \\
&= - \int_{\mathbb{R}^3} f_k(x) (x - a)_k \delta'(s - \langle x - a, \theta \rangle) dx \\
&= - \frac{\partial}{\partial s} \int_{\mathbb{R}^3} f_k(x) (x - a)_k \delta(s - \langle x - a, \theta \rangle) dx \\
&= - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}(f_k(\cdot) (\cdot - a)_k)(\theta, s + \langle a, \theta \rangle)
\end{aligned}$$

Eine Summation über $k = 1, 2, 3$ liefert für $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \theta_k} \mathcal{R}f_k(\theta, s + \langle a, \theta \rangle) = - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}(\langle \vec{f}(\cdot), \cdot - a \rangle)(\theta, s + \langle a, \theta \rangle). \quad (3.3.4)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft, die sowohl für die Radon- als auch die Röntgentransformation gilt, wird als *Projektionstheorem* (engl. *central slice theorem* oder *Fourier slice theorem*) bezeichnet.

Satz 3.3.1. (*Fourier slice theorem*) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}_\theta f)^\wedge(\sigma) &= (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \\
(\mathcal{P}_\theta f)^\wedge(\eta) &= (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\eta), \quad \eta \in \theta^\perp.
\end{aligned}$$

Beweis. Siehe beispielsweise in [31, S.11]. □

Der adjungierte Operator \mathcal{R}^* der Radon-Transformation, auch *Rückprojektions-Operator* (engl. *backprojection operator*) genannt, ist durch

$$(\mathcal{R}^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta, \quad g \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \quad (3.3.5)$$

gegeben. Mit $g = \mathcal{R}f$ stellt $(\mathcal{R}^*g)(x)$ eine Mittelung über alle Integrale von f über Hyperebenen durch x dar. Der Rückprojektions-Operator \mathcal{R}^* ist auch Namensgeber für den Standardalgorithmus zur Rekonstruktion in 2D, dem sogenannten Algorithmus der gefilterten Rückprojektion.

Ausgangspunkt für diesen Algorithmus ist der folgende Satz, der die in Formel (3.1.8) definierte Faltung verwendet (siehe [32, S.11]):

Satz 3.3.2. *Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathcal{S}((S^{n-1} \times \mathbb{R})^n)$. Dann gilt:*

$$(\mathcal{R}^* g) * f = \mathcal{R}^* (g * \mathcal{R}f) . \quad (3.3.6)$$

Inversionsformeln

Obwohl man bei der Implementierung von Inversionsformeln meist auf Gleichung (3.3.6) zurückgreift, kann leicht eine ganze Familie von exakten Inversionsformeln hergeleitet werden. Dabei benutzt man das sogenannte *Riesz-Potential* I^β . Der lineare Operator I^β ist im \mathbb{R}^n mit Hilfe der Fourier-Transformation definiert als

$$(I^\beta f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\beta} \hat{f}(\xi) , \quad \beta < n . \quad (3.3.7)$$

Mit der analogen Definition des Riesz-Potentials auf $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ als

$$(I^\beta g)^\wedge(\theta, \sigma) = |\sigma|^{-\beta} \hat{g}(\theta, \sigma) , \quad \beta < 1 , \quad (3.3.8)$$

erhält man folgenden Satz (vgl. [32]):

Satz 3.3.3. *Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $g = \mathcal{R}f$. Dann ist für $\beta < n$*

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} I^{-\beta} \mathcal{R}^* I^{\beta-n+1} g . \quad (3.3.9)$$

Durch unterschiedliche Wahl von β erhält man verschiedene Inversionsformeln, wobei im Rahmen dieser Arbeit nur der Fall $\beta = 0$ betrachtet wird, woraus sich

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathcal{R}^* I^{1-n} g \quad (3.3.10)$$

ergibt. Aus Formel (3.3.8) kann man mit $\beta = 1 - n$ zudem

$$\begin{aligned} (I^{1-n} g)^\wedge(\theta, \sigma) &= |\sigma|^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma) = (\text{sgn}(\sigma))^{n-1} \sigma^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma) \\ &= \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) \sigma^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma) & , \quad n \text{ gerade} \\ \sigma^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma) & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

zeigen.

Weiterhin wird die *Hilbert-Transformation* \mathcal{H} verwendet, die in \mathbb{R} durch den Cauchy'schen Hauptwert des Integrals

$$(\mathcal{H}f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy , \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.3.12)$$

definiert ist. Dabei ist $L^2(\mathbb{R})$ der Raum der *quadratintegrierbaren Funktionen* von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , der durch

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^2} = \langle f, f \rangle_{L^2}^{1/2} < \infty \right\}$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$$

definiert ist. Für \mathcal{H} gilt (vgl. [32, S.5])

$$(\mathcal{H}f)^\wedge(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \hat{f}(\xi), \quad (3.3.13)$$

woraus für Funktionen g , die auf $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ operieren, durch $(n-1)$ -fache Anwendung von \mathcal{H} auf die zweite Variable

$$(\mathcal{H}^{n-1}g)^\wedge(\theta, \sigma) = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-1} (\operatorname{sgn}(\sigma))^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma) \quad (3.3.14)$$

folgt. Mit Formel (3.1.21) zeigt man

$$(g^{(n-1)})^\wedge(\theta, \sigma) = i^{n-1} \sigma^{n-1} \hat{g}(\theta, \sigma), \quad (3.3.15)$$

wobei $g^{(n-1)}$ die Ableitung von g bezüglich der zweiten Variablen ist. Aus den Formeln (3.3.10) bis (3.3.15) erhält man nun folgende Inversionsformel für die Radon-Transformation (vgl. [31, S.20] oder [32, S.11]):

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \mathcal{R}^* \mathcal{H}^{n-1} g^{(n-1)}. \quad (3.3.16)$$

Die Vereinfachung

$$\mathcal{H}^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \mathcal{H} & , \quad n \text{ gerade} , \\ (-1)^{(n-1)/2} & , \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

liefert folgenden Satz:

Satz 3.3.4. *Seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $g = \mathcal{R}f$. Dann ist*

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{(n-2)/2} \mathcal{R}^* \mathcal{H} g^{(n-1)} & , \quad n \text{ gerade} , \\ (-1)^{(n-1)/2} \mathcal{R}^* g^{(n-1)} & , \quad n \text{ ungerade} . \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Johann Radon gab schon 1917 die Inversionsformeln

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} \int_{S^1} g'(\theta, \langle x, \theta \rangle + t) d\theta dt \quad (3.3.18)$$

für $n = 2$ und

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} g''(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta \quad (3.3.19)$$

für $n = 3$ an. Aus Gleichung (3.3.17) ergibt sich für $n = 3$ folgende alternative Darstellung:

$$f = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* g'' . \quad (3.3.20)$$

Benutzt man $f = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} f$ und $g = \mathcal{R} f$, $g'' = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R} f$, so sieht man aus Formel (3.3.20) leicht

$$f = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} f = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R} f \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{-1} = -\frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} , \quad (3.3.21)$$

also eine Darstellung für die Inverse der dreidimensionalen Radon-Transformation. Die Inversionsformel kann auch aus

$$f(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R} f(\theta, s) \delta'(s - \langle x, \theta \rangle) ds d\theta \quad (3.3.22)$$

durch eine partielle Integration im inneren Integral hergeleitet werden.

3.3.2 Anwendung der Approximativen Inversen auf die Radon-Transformation

Nun soll die in Abschnitt 3.2 behandelte Methode der Approximativen Inversen benutzt werden, um einen Rekonstruktionskern für die 3D Radon-Transformation herzuleiten. Die Präsentation folgt hierbei [23].

Ausgangspunkt ist ein Mollifier $e_\gamma(x, \cdot)$ für den Rekonstruktionspunkt $x \in \mathbb{R}^3$. Ziel ist es nun, die Gleichung

$$\mathcal{R}^* \psi_\gamma(x, \cdot) = e_\gamma(x, \cdot) \quad (3.3.23)$$

zu lösen. Nach Formel (3.3.10) gilt für $n = 3$ mit $\mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} f = f$:

$$f = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* I^{-2} \mathcal{R} f \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{-1} = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* I^{-2} .$$

Damit lässt sich Gleichung (3.3.23) umformen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^* \psi_\gamma(x, \cdot) &= e_\gamma(x, \cdot) = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} e_\gamma(x, \cdot) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{R}^* I^{-2} \mathcal{R} e_\gamma(x, \cdot) \\ \Rightarrow \quad \psi_\gamma(x; \theta, s) &= \frac{1}{8\pi^2} I^{-2} \mathcal{R} e_\gamma(x; \theta, s) , \end{aligned}$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ und $\theta \in S^2$ ein Einheitsvektor ist. Für festes θ ist die Radon-Transformation translationsinvariant, d.h. mit $\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R} f(\theta, s)$ und den Operatoren $T_1^a f(x) = f(x - a)$ sowie $T_2^t g(s) = g(s - t)$ gilt:

$$\mathcal{R}_\theta T_1^a f = T_2^{(a, \theta)} \mathcal{R}_\theta f .$$

Beweis. Mit den obigen Definitionen von $T_1^a f(x)$ und $T_2^t g(s)$ sowie Gleichung (3.3.1) für die Radon-Transformation gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\theta T_1^a f(s) &= \int_{\mathbb{R}^3} (T_1^a f)(x) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x - a) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta(s - \langle y + a, \theta \rangle) dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta(s - \langle y, \theta \rangle - \langle a, \theta \rangle) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta((s - \langle a, \theta \rangle) - \langle y, \theta \rangle) dy = T_2^{\langle a, \theta \rangle} \mathcal{R}_\theta f(s) . \end{aligned}$$

□

Wählt man nun einen um den Nullpunkt zentrierten Mollifier \bar{e}_γ , der gemäß

$$e_\gamma(x, y) = \frac{1}{8} \bar{e}_\gamma \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

in den Punkt x verschoben ist, dann erfüllt der Rekonstruktionskern die Gleichung

$$\psi_\gamma(x; \theta, s) = \frac{1}{2} \bar{\psi}_\gamma \left(\theta, \frac{s - \langle x, \theta \rangle}{2} \right) .$$

Zusätzlich wird in [24] die Rotationsinvarianz der Radon-Transformation in Betracht gezogen. Mit den Rotationsoperatoren $T_1^U f(x) = f(Ux)$ und $T_2^U g(\theta, s) = g(U\theta, s)$ gilt für eine unitäre Matrix U :

$$\mathcal{R} T_1^U f = T_2^U \mathcal{R} f .$$

Beweis. Mit den angegebenen Definitionen von $T_1^U f(x)$ und $T_2^U g(\theta, s)$ sowie Gleichung (3.3.1) gilt analog zum vorhergehenden Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} T_1^U f(\theta, s) &= \int_{\mathbb{R}^3} (T_1^U f)(x) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(Ux) \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta(s - \langle U^\top y, \theta \rangle) dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta(s - \langle y, U\theta \rangle) dx \\ &= T_2^U \mathcal{R} f(\theta, s) . \end{aligned}$$

□

Ist nun der Mollifier rotationsinvariant, d.h. gilt

$$e_\gamma(x, y) = \bar{e}_\gamma (\|x - y\|) ,$$

so ist der Rekonstruktionskern nur noch eine Funktion der Variablen s , d.h. unabhängig von θ , und der resultierende Algorithmus ist vom Typ der gefilterten Rückprojektion (vgl. [24, Theorem

3.1)). Bezüglich der Wahl des Mollifiers und der Berechnung des entsprechenden Rekonstruktionskerns finden sich in [23] und [24] einige Beispiele.

Nach diesem kurzen Überblick über einige wichtige mathematische Funktionen und der Herleitung einer Inversionsformel für die dreidimensionale Radon-Transformation, sollen die hier gewonnenen Erkenntnisse auf die Rekonstruktion aus Daten der Cone Beam Transformation angewendet werden.

4 Die Cone Beam Transformation \mathcal{D}

In diesem Kapitel soll die dreidimensionale Cone Beam Transformation mit ihren wichtigsten Eigenschaften vorgestellt werden. Dann wird eine auf der Formel von Grangeat, die einen Zusammenhang zwischen \mathcal{D} und der im letzten Kapitel vorgestellten Radon-Transformation \mathcal{R} herstellt, beruhende Inversionsformel hergeleitet. Die Berechnung eines Rekonstruktionskerns, die in der Dissertation von Weber [52] ausführlich behandelt wird, bildet den Abschluss dieses Kapitels. Dieser Kern wird später auch zur Rekonstruktion von Vektorfeldern aus Daten der Doppler-Transformation verwendet.

4.1 Definitionen und wichtige Eigenschaften

Die (skalare) Cone Beam Transformation wurde in Definition 2.1.4 für $\theta \in S^2$, $\alpha \in \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ als

$$(\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) = \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt$$

eingeführt. Wir gehen im Folgenden davon aus, dass sich das Objekt im Inneren einer Kugel mit Radius r um den Nullpunkt befindet, dass also $\Omega = B_r(0)$, wobei in dieser Arbeit meist $r = 1$ gesetzt wird. Die Variable Γ bezeichnet dabei, wie schon in den Kapiteln zuvor, die Abtastkurve, auf der sich die Röntgenröhre um das Objekt bewegt. In den praktischen Beispielen dieser Arbeit wird Γ als Kreis mit Radius $R = 3$ in einer der Koordinatenebenen gewählt und liegt dadurch vollständig außerhalb des Rekonstruktionsgebietes Ω . Damit ist die erste Bedingung von Tuy-Kirillov aus Definition 2.1.5 erfüllt.

Der adjungierte Operator \mathcal{D}^* von \mathcal{D} berechnet sich zu

$$(\mathcal{D}^*g)(x) = \int_{\Gamma} \|x - \alpha\|^{-2} g\left(\alpha, \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) d\alpha, \quad (4.1.1)$$

vergleiche [42]. Wegen

$$\mathcal{D}f(\alpha, \theta) = \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt = \|\theta\|^{-1} \int_0^\infty f\left(\alpha + t \frac{\theta}{\|\theta\|}\right) dt$$

kann $\mathcal{D}f$ auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ausgeweitet werden, ist also homogen vom Grad -1 im zweiten Argument. Die Fourier-Transformation lautet

$$(\mathcal{D}f)^\wedge(\alpha, \eta) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{D}f(\alpha, y) e^{-i\langle y, \eta \rangle} dy. \quad (4.1.2)$$

4.2 Inversionsformeln

Wie schon erwähnt, beruhen die meisten Inversionsformeln für die Cone Beam Transformation auf der Formel von Grangeat, die in [32] auf folgende, von Hamaker et al. in [12] entwickelte, Formel zurückgeführt wird. Für eine Funktion h auf \mathbb{R} , die homogen vom Grad $1 - n$ ist, gilt:

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}f(\alpha, \omega) h(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\theta, s) h(s - \langle \alpha, \theta \rangle) . \quad (4.2.1)$$

Daraus ergibt sich für $n = 3$ und $h = \delta'$ die Formel von Grangeat, die Pierre Grangeat 1987 in seiner Dissertation [10] erstmals veröffentlicht hat.

Satz 4.2.1 (Formel von Grangeat). *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt für einen Einheitsvektor $\omega \in S^2$ und einen Quellpunkt $\alpha \in \Gamma$*

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\omega, s) \right|_{s=\langle \alpha, \omega \rangle} = - \int_{S^2} \mathcal{D}f(\alpha, \theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta . \quad (4.2.2)$$

Beweis. Ein im Vergleich zu [10] vereinfachter Beweis von Grangeat selbst findet sich in [11]. Wesentlich einfacher sind jedoch diejenigen von Louis in [19] oder Dietz in [5]. \square

Weitere Inversionsformeln ergeben sich aus Gleichung (4.2.1) durch eine unterschiedliche Wahl der Funktion h . Die Formeln von Smith [45] und Gelfand und Goncharov [8] werden beispielsweise in [32] daraus entwickelt. Der Vollständigkeit halber sei hier noch die explizite Inversionsformel von Tuy [51]

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} i^{-1} \int_{S^2} (\langle \alpha'(\lambda), \theta \rangle)^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathcal{D}f)^\wedge(\alpha(\lambda), \theta) d\theta, \quad \lambda = \lambda(x, \theta) \quad (4.2.3)$$

erwähnt, die für alle Abtastkurven, die die Tuy'sche Bedingung aus Definition 2.1.5 erfüllen, gilt.

4.2.1 Die Inversionsformel von Louis

Im Folgenden soll nun die von Louis in [24] unter Verwendung der Formel von Grangeat (4.2.2) hergeleitete Inversionsformel für die Cone Beam Transformation vorgestellt werden. Neben den in den Formeln (3.1.2) bis (3.1.4) angegebenen Eigenschaften der Delta-Distribution benötigt man noch folgende Definition:

Definition 4.2.2. Mit dem *Crofton-Symbol* $n(\omega, s)$ bezeichnet man die Anzahl der Schnittpunkte zwischen der Abtastkurve Γ und der Ebene $\langle x, \omega \rangle = s$, d.h. die Anzahl der Quellpunkte $\alpha \in \Gamma$ mit $\langle \alpha, \omega \rangle = \langle x, \omega \rangle$.

Man definiert nun für einen Einheitsvektor $\omega \in S^2$ und einen Quellpunkt $\alpha \in \Gamma$ noch die Operatoren

$$Tg(\omega) := \int_{S^2} g(\theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta \quad (4.2.4)$$

$$\stackrel{(3.1.4)}{=} -\omega^\top \int_{S^2 \cap \omega^\perp} \nabla g(\theta) d\theta = - \int_{S^2 \cap \omega^\perp} \langle \omega, \nabla g(\theta) \rangle d\theta = - \int_{S^2 \cap \omega^\perp} \frac{\partial}{\partial \omega} g(\theta) d\theta, \quad (4.2.5)$$

und

$$M_{\Gamma, \alpha} h(\omega) := |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) h(\omega), \quad (4.2.6)$$

wobei $m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) = \frac{1}{n(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle)}$ das Inverse des Crofton-Symbols und α' die Ableitung der parametrisierten Quellkurve Γ sind. Der Ableitungsoperator T operiert dabei auf der zweiten Variablen gemäß

$$Tg(\alpha, \omega) = T_\alpha g(\omega).$$

Bei $M_{\Gamma, \alpha}$ handelt es sich offensichtlich um einen Multiplikationsoperator, der von der Abtastkurve Γ abhängt. Mit diesen Vorarbeiten erhält man:

Satz 4.2.3 (Inversionsformel von Louis). *Seien die Bedingungen von Tuy-Kirillov aus Definition 2.1.5 für die Abtastkurve Γ erfüllt. Dann lautet die Inversionsformel für die Cone Beam Transformation*

$$f = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{D}^* T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D} f, \quad (4.2.7)$$

wobei die oben angegebenen Definitionen für die Operatoren T und $M_{\Gamma, \alpha}$ sowie den adjungierten Operator \mathcal{D}^* von \mathcal{D} gelten.

Beweis. Ausgangspunkt für den Beweis ist die in Gleichung (3.3.21) angegebene Inversionsformel für die Radon-Transformation im \mathbb{R}^3 beziehungsweise deren Darstellung mit Hilfe der Delta-Distribution aus Formel (3.3.22), die hier aus Gründen der Übersichtlichkeit noch einmal in ausführlicher Schreibweise wiederholt wird:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}f(\omega, \langle x, \omega \rangle) d\omega \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\omega, s) \delta'(s - \langle x, \omega \rangle) ds d\omega. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Unter der Annahme, dass die Bedingungen von Tuy-Kirillov für Γ erfüllt sind, kann man das Integral mit Hilfe der Substitution $s = \langle \alpha, \omega \rangle$ vereinfachen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) \delta'(\langle \alpha - x, \omega \rangle) |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) d\alpha d\omega \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathcal{D}f(\alpha, \theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta \delta'(\langle \alpha - x, \omega \rangle) |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) d\alpha d\omega. \end{aligned}$$

Dabei wurde bei der Umformung in der letzten Zeile die Formel von Grangeat aus Satz 4.2.1 verwendet. Nutzt man nun aus, dass δ' gemäß Satz 3.1.2 homogen vom Grad -2 ist, so gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathcal{D}f(\alpha, \theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta \delta'(\langle a-x, \omega \rangle) |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) d\alpha d\omega \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{S^2} \int_{S^2} \mathcal{D}f(\alpha, \theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta \frac{\delta'(\langle \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}, \omega \rangle)}{\|x-\alpha\|^2} |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) d\omega d\alpha \\
&\stackrel{(4.2.4)}{=} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{S^2} [T\mathcal{D}f](\alpha, \omega) \frac{\delta'(\langle \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}, \omega \rangle)}{\|x-\alpha\|^2} |\langle \alpha', \omega \rangle| m(\omega, \langle \alpha, \omega \rangle) d\omega d\alpha \\
&\stackrel{(4.2.6)}{=} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\|x-\alpha\|^2} \int_{S^2} [M_{\Gamma, \alpha} T\mathcal{D}f](\alpha, \omega) \delta'(\langle \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}, \omega \rangle) d\omega d\alpha \\
&\stackrel{(4.2.4)}{=} \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\|x-\alpha\|^2} [TM_{\Gamma, \alpha} T\mathcal{D}f]\left(\alpha, \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right) d\alpha.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von Formel (4.1.1) für den adjungierten Operator \mathcal{D}^* erhält man schließlich

$$f(x) = \frac{1}{8\pi^2} [\mathcal{D}^* T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D}f](x).$$

□

Man kann daraus für die Inverse \mathcal{D}^{-1} von \mathcal{D} folgern, dass

$$\begin{aligned}
f &= \mathcal{D}^{-1} \mathcal{D}f = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{D}^* T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D}f \\
\Rightarrow \mathcal{D}^{-1} &= \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{D}^* T M_{\Gamma, \alpha} T
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

ist.

Die Anwendung der Approximativen Inversen zur Rekonstruktionskernberechnung

Wie Louis in [24] weiterhin zeigt, ist es mit dieser Inversionsformel möglich, Rekonstruktionskerne ψ_γ für die Cone Beam Transformation zu berechnen. Um die Lösung f von $\mathcal{D}f = g$ der Theorie der Approximativen Inversen folgend in der Form

$$f(x) = \langle g, \psi_\gamma \rangle$$

schreiben zu können, ist es gemäß den Formeln (3.2.4) und (3.2.5) notwendig, die Gleichung

$$\mathcal{D}^* \psi_\gamma = e_\gamma$$

zu lösen, denn

$$f(x) = \langle f, e_\gamma \rangle = \langle f, \mathcal{D}^* \psi_\gamma \rangle = \langle \mathcal{D}f, \psi_\gamma \rangle = \langle g, \psi_\gamma \rangle.$$

Für eine exakte Inversion wird der Mollifier e_γ als Delta-Distribution δ_x gewählt, ansonsten versucht man, eine möglichst gute Approximation an diese zu finden und berechnet eine Näherungslösung. Mit Formel (4.2.9) erhält man

$$\mathcal{D}^* \psi_\gamma = e_\gamma = \mathcal{D}^{-1} \mathcal{D} e_\gamma = \frac{1}{8\pi^2} \mathcal{D}^* T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D} e_\gamma$$

und damit folgende Darstellung für den Rekonstruktionskern ψ_γ :

$$\psi_\gamma = \frac{1}{8\pi^2} T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D} e_\gamma . \quad (4.2.10)$$

4.2.2 Berechnung des Rekonstruktionskerns von Weber

Mit Hilfe dieser Formel konnte Weber in [52] den Rekonstruktionskern für die Cone Beam Transformation bei einer kreisförmigen Abtastkurve analytisch berechnen. Dies stellt einen entscheidenden Fortschritt dar im Vergleich zu den Berechnungen, die Dietz in [5] mit Hilfe eines Rekonstruktionskerns für die dreidimensionale Radon-Transformation durchgeführt hat. Neben einer wesentlich schnelleren Berechnung des Kerns, die auch die von Mohr in [30] an dem Verfahren von Dietz vorgenommenen Verbesserungen übertrifft, steigt auch die Berechnungsgenauigkeit des Kerns deutlich.

Grundlagen

Wie schon erwähnt, geht man von einer kreisförmigen Abtastkurve um das Objekt aus, obgleich für diese die dritte Bedingung von Tuy-Kirillov aus Definition 2.1.5 nicht erfüllt ist. Obwohl die Spiralgeometrie aufgrund ihrer schnelleren Abtastung und der damit geringeren Strahlenbelastung in medizinischen Anwendungen häufig bevorzugt wird, ist die Kreisgeometrie dennoch weiterhin gebräuchlich. Besondere Bedeutung kommt ihr zudem beim zerstörungsfreien Prüfen zu, wie es beispielsweise am Fraunhofer-Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZFP) in Saarbrücken praktiziert wird. Dazu sind wesentlich höhere Auflösungen als im medizinischen Alltag notwendig, was durch eine starre Anordnung von Röntgenquelle und Detektor gewährleistet werden kann. Das Objekt ist dabei auf einem drehbaren Teller fixiert und rotiert in dem von der Röntgenquelle ausgesandten Strahlenkegel. Die Ausrichtung und Kalibrierung des gesamten Messaufbaus wird dadurch deutlich vereinfacht und ermöglicht so die Verwendung großer Detektoren mit mehr als 1024×1024 Detektorelementen.

Im Folgenden soll die von Weber in [52] erarbeitete Berechnung des Rekonstruktionskerns kurz vorgestellt werden, da dieser auch bei der Rekonstruktion von Vektorfeldern Verwendung findet. Allerdings werden nur die wichtigsten Formeln und Definitionen angegeben, auf die Beweise wird bewusst verzichtet. Der interessierte Leser kann die detaillierten Herleitungen und Rechnungen sowie die fehlenden Zwischenschritte anhand der ausführlichen Darstellung in [52] leicht nachvollziehen.

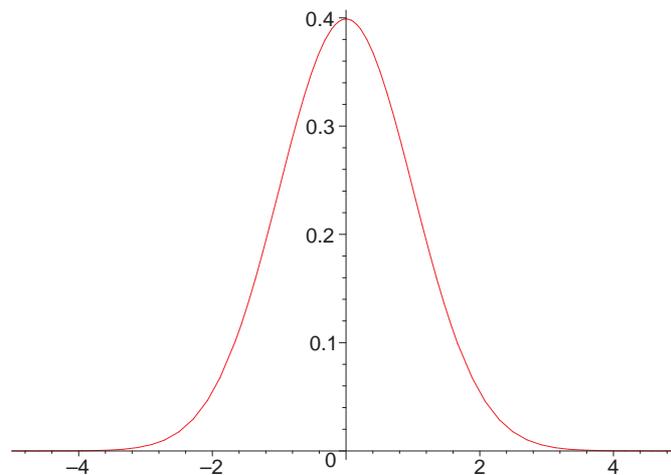
Ausgangspunkt ist die Gleichung (4.2.10).

Als Mollifier e_γ wird der *Gaußkern*, auch als *Gauß'sche Glockenkurve* bezeichnet, gewählt. Der

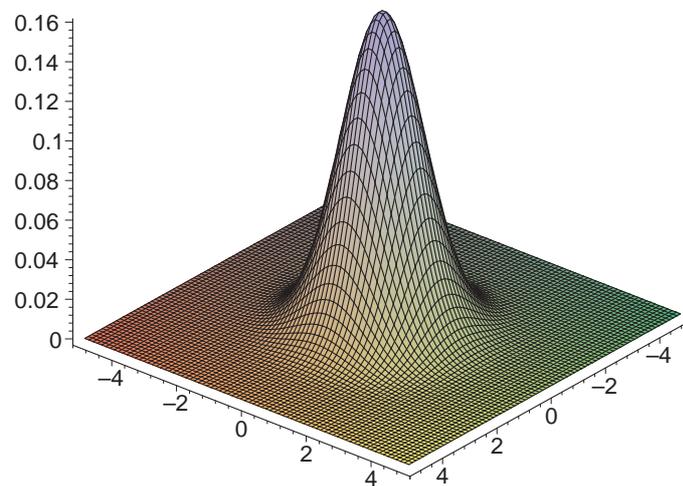
eindimensionale Gaußkern ist definiert als

$$e(\sigma) := \frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma-\mu}{\gamma}\right)^2\right), \quad (4.2.11)$$

wobei μ der *Erwartungswert* und γ die *Standardabweichung* genannt werden. Eine grafische Darstellung des Gaußkerns ist in Abbildung 4.1 zu sehen.



(a) zweidimensionale Darstellung



(b) dreidimensionale Darstellung

Abbildung 4.1: Gaußkern für $\mu = 0$ und $\gamma = 1$.

Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\gamma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma - \mu}{\gamma}\right)^2\right) d\sigma = 1. \quad (4.2.12)$$

Im Fall der Cone Beam Transformation ist es notwendig, wie bei Dietz [5] und Mohr [30], den dreidimensionalen Gaußkern

$$e_\gamma(x, y) := (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\gamma^2}} \quad (4.2.13)$$

zu verwenden, der als $e_x(y)$ geschrieben wird. Dieser ist, wie der eindimensionale Gaußkern, so normiert, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} e_x(y) dy = 1 \quad (4.2.14)$$

gilt.

Beweis. Eine einfache Rechnung unter Verwendung von Formel (4.2.13) zeigt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} e_x(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^3} (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\gamma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}{2\gamma^2}\right) dy_1 dy_2 dy_3 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma \sqrt{2\pi})} \exp\left(-\frac{(x_1 - y_1)^2}{2\gamma^2}\right) dy_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma \sqrt{2\pi})} \exp\left(-\frac{(x_2 - y_2)^2}{2\gamma^2}\right) dy_2 \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\gamma \sqrt{2\pi})} \exp\left(-\frac{(x_3 - y_3)^2}{2\gamma^2}\right) dy_3 \\ &\stackrel{(4.2.12)}{=} 1. \end{aligned}$$

□

Für den ersten Teil der Formel (4.2.10) kann damit folgender Hilfssatz gezeigt werden:

Hilfssatz 4.2.4. *Es sei*

$$e(\sigma) = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} e^{-\frac{\sigma^2}{2\gamma^2}} = C e^{-\frac{\sigma^2}{2\gamma^2}} \quad (4.2.15)$$

der eindimensionalen Gaußkern mit $C := (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3}$. Dann ist

$$e_x(y) = e(\|y - x\|)$$

ein rotationsinvarianter Mollifier mit

$$[T\mathcal{D}e_x](\alpha, \omega) = \frac{1}{\gamma^2} \int_{\omega^\perp + \alpha} e(\|y - x\|) \langle y - x, \omega \rangle dy . \quad (4.2.16)$$

Beweis. Siehe [52]. □

Die weitere Vereinfachung der auftretenden Integrale führt zu:

Lemma 4.2.5. Mit $C = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3}$ gilt:

$$[T\mathcal{D}e_x](\alpha, \omega, x) = 2\pi C e^{-\frac{1}{2\gamma^2} \langle \alpha - x, \omega \rangle^2} \langle \alpha - x, \omega \rangle . \quad (4.2.17)$$

Beweis. Siehe [52]. □

Für die Berechnung von $M_{\Gamma, \alpha}$ muss die Abtastgeometrie in Betracht gezogen werden. Da für eine Kreiskurve die dritte Bedingung von Tuy-Kirillov aus Definition 2.1.5 nicht erfüllt ist, gibt es Ebenen, die zwar das Rekonstruktionsgebiet, nicht aber die Kreiskurve schneiden. Dies sind alle Ebenen parallel zur Kreisebene. Im Allgemeinen gilt jedoch, dass eine Ebene einen Kreis in genau zwei Punkten schneidet, so dass für die weitere Berechnung das Crofton-Symbol für diese Abtastgeometrie als identisch 2 angenommen wird. Damit ergibt sich für $M_{\Gamma, \alpha}$:

$$[M_{\Gamma, \alpha} h](\alpha, \omega) = \frac{1}{2} |\langle \alpha', \omega \rangle| h(\alpha, \omega) . \quad (4.2.18)$$

Der äußere Operator T verlangt deutlich mehr Aufmerksamkeit und die detaillierte Wiedergabe der entsprechenden Formeln und Sätze würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Aus diesem Grund sei hier nur die Grundidee angegeben: Wie man in Formel (4.2.5) sieht, ist der Operator T ein Integrationsoperator über $S^2 \cap \omega^\perp$, also über einen Einheitskreis senkrecht zu einem Einheitsvektor. Um diese Integration nur durch einen einzigen Winkel beschreiben zu können, wird das Koordinatensystem so gedreht, dass diese Integration in der neuen x - y -Ebene stattfindet (vgl. [52]). Eine im Zusammenhang mit der Vereinfachung der auftretenden Integrale notwendige Funktion ist die Fehlerfunktion (vgl. [1, S.297]).

Definition 4.2.6. Die Fehlerfunktion (*error function*) ist definiert als

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt , \quad z \in \mathbb{C} . \quad (4.2.19)$$

Folgende Eigenschaften der Fehlerfunktion, deren Funktionsgraph in Abbildung 4.2 zu finden ist, sind zur Berechnung des Rekonstruktionskerns notwendig.

Satz 4.2.7. Es ist

$$\operatorname{erf}(0) = 0 , \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1 , \quad \operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z) , \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-z^2 t^2} dt . \quad (4.2.20)$$

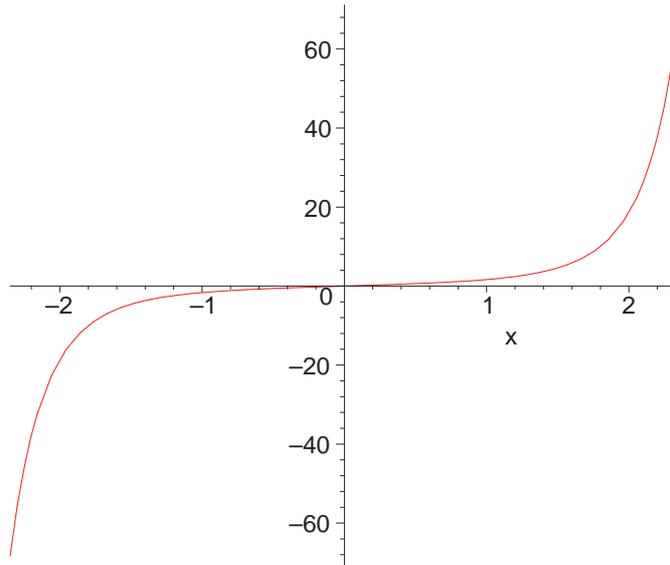


Abbildung 4.2: Funktionsgraph der Fehlerfunktion erf.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ gilt

$$\int_a^b e^{cx^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-c}} (\operatorname{erf}(a\sqrt{-c}) - \operatorname{erf}(b\sqrt{-c})) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-c}} (\operatorname{erf}(b\sqrt{-c}) - \operatorname{erf}(a\sqrt{-c})) , \quad (4.2.21)$$

$$\int_a^b e^{cx^2} x^2 dx = \frac{1}{2c} \left(be^{cb^2} - ae^{ca^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-c}} [\operatorname{erf}(a\sqrt{-c}) - \operatorname{erf}(b\sqrt{-c})] \right) . \quad (4.2.22)$$

Beweis. Einfaches Nachrechnen. □

Der Rekonstruktionskern im gedrehten Koordinatensystem

Nach umfangreicher Auswertung und Vereinfachung der auftretenden Integrale und Terme erhält Weber in dem mit Hilfe einer Drehmatrix U gedrehten Koordinatensystem folgende geschlossene Darstellung des Rekonstruktionskerns:

Satz 4.2.8. *Es sei*

$$e_x(y) := (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\gamma^2}} , \quad \gamma > 0 ,$$

der Mollifier mit $x, y \in \mathbb{R}^3$. Die Abtastkurve Γ sei ein Kreis mit Radius R .

i) Liegen die Vektoren b und y nicht parallel zu e_3 , d.h. $\|\tilde{y}\| \neq 0 \neq \|\tilde{b}\|$, dann gilt für den Rekonstruktionskern ψ :

$$\psi_\gamma(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{4\pi} \left[e^{-\nu\|\tilde{y}\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \operatorname{erf} \left(\frac{i \langle \tilde{b}, \tilde{y} \rangle}{\sqrt{2\gamma} \|\tilde{b}\|} \right) \left\{ 2y_3\nu \langle \tilde{b}, \tilde{y} \rangle - b_3 \right\} + 2 \|\tilde{b}\| y_3 e^{-\frac{\nu(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2}} \right] \quad (4.2.23)$$

für $\alpha \in \Gamma$, $\eta \in S^2$, $x \in \Omega$, wobei

$$\begin{aligned} C &:= (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3}, & \nu &:= \frac{1}{2\gamma^2}, \\ U^\top \eta &= e_3, \quad U \in \text{SO}(3), \\ y &:= U^\top(\alpha - x), & \tilde{y} &:= (y_1, y_2, 0)^\top, & c &:= \nu \|\tilde{y}\|^2, \\ b &:= U^\top \alpha', & \tilde{b} &:= (b_1, b_2, 0)^\top. \end{aligned}$$

Man erhält also

$$U = U(\eta), \quad c = c(\eta, \alpha, x), \quad y = y(\eta, \alpha - x), \quad b = b(\eta, \alpha').$$

ii) Falls $\|\tilde{y}\| = 0$ und/oder $\|\tilde{b}\| = 0$ gilt, folgt

$$\psi_\gamma(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{2\pi} \|\tilde{b}\| y_3. \quad (4.2.24)$$

iii) Im Fall $\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle = 0$ (und $\|\tilde{y}\| \neq 0 \neq \|\tilde{b}\|$) vereinfacht sich der Kern zu

$$\psi_\gamma(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{4\pi} 2 \|\tilde{b}\| y_3 e^{-c} = -\frac{C}{2\pi} \|\tilde{b}\| y_3 e^{-\nu\|\tilde{y}\|^2}. \quad (4.2.25)$$

Beweis. Siehe [52]. □

Elimination der Drehmatrix U

Der nächste Schritt ist nun die Elimination der Rotationsmatrix U , die durch $U^\top \eta = e_3$ definiert ist. Folgende Bemerkung ist leicht aus den in Satz 4.2.8 gemachten Definitionen ableitbar (vgl. [52]):

Bemerkung. Für $\|\tilde{y}\| = 0$ und/oder $\|\tilde{b}\| = 0$ sind y und/oder b parallel zu e_3 . Damit ist

$$\begin{aligned} U^\top \eta = e_3 \parallel y = U^\top(\alpha - x) &\Rightarrow \eta \parallel (\alpha - x), \\ U^\top \eta = e_3 \parallel b = U^\top \alpha' &\Rightarrow \eta \parallel \alpha'. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Richtungsvektor η entweder auf der Geraden vom Kurvenpunkt α zum Rekonstruktionspunkt x oder, da die Abtastkurve Γ ein Kreis ist, senkrecht zu α liegt. Da η die Richtung des Strahls von der Quelle α ausgehend beschreibt, ist der zweite Fall irrelevant, da der Strahl dann durch ein Gebiet verläuft, in dem die zu rekonstruierende Funktion f als identisch Null vorausgesetzt ist.

Dadurch ist es möglich, U aus der Darstellung des Rekonstruktionskerns zu entfernen und die Terme, die von \tilde{y} und \tilde{b} abhängen, so umzuformen, dass stattdessen nur noch $\alpha - x$, α und der Richtungsvektor η des Röntgenstrahls vorkommen. Die entsprechend umgeformten Terme werden in folgendem Lemma zusammengefasst:

Lemma 4.2.9. *Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.2.8 gilt:*

$$\|\tilde{y}\|^2 = \|\alpha - x\|^2 - \langle \alpha - x, \eta \rangle^2 = \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2, \quad (4.2.26a)$$

$$\|\tilde{b}\|^2 = \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', \eta \rangle^2 = \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2, \quad (4.2.26b)$$

$$\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle = \langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha', \eta \rangle = \langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle, \quad (4.2.26c)$$

$$y_3 = \langle \alpha - x, \eta \rangle, \quad b_3 = \langle \alpha', \eta \rangle, \quad (4.2.26d)$$

$$\langle \tilde{e}_b, \tilde{e}_y \rangle = \frac{\langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha', \eta \rangle}{\|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\| \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|}, \quad (4.2.26e)$$

wobei \tilde{e}_b und \tilde{e}_y die Einheitsvektoren in Richtung von \tilde{b} bzw. \tilde{y} bezeichnen.

Beweis. Da der Beweis recht kurz ist und einen schönen Einblick in die vorgenommene Drehung erlaubt, wird er hier gemäß [52] wiederholt.

Es ist $\eta = Ue_3$; man ergänzt η zu einem Koordinatensystem mittels

$$v := Ue_1, \quad w := Ue_2 \Rightarrow \eta \perp v \perp w \perp \eta, \quad \eta, v, w \in S^2.$$

Nun schreibt man die Vektoren in diesem Koordinatensystem:

$$\alpha - x = \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta + \langle \alpha - x, v \rangle v + \langle \alpha - x, w \rangle w,$$

$$\alpha' = \langle \alpha', \eta \rangle \eta + \langle \alpha', v \rangle v + \langle \alpha', w \rangle w,$$

$$y = U^T(\alpha - x) = \langle \alpha - x, \eta \rangle e_3 + \langle \alpha - x, v \rangle e_1 + \langle \alpha - x, w \rangle e_2 = \begin{pmatrix} \langle \alpha - x, v \rangle \\ \langle \alpha - x, w \rangle \\ \langle \alpha - x, \eta \rangle \end{pmatrix},$$

$$b = U^T \alpha' = \begin{pmatrix} \langle \alpha', v \rangle \\ \langle \alpha', w \rangle \\ \langle \alpha', \eta \rangle \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Darstellung von y und b folgt

$$\|\tilde{y}\|^2 = \langle \alpha - x, v \rangle^2 + \langle \alpha - x, w \rangle^2 = \|\alpha - x\|^2 - \langle \alpha - x, \eta \rangle^2,$$

$$\|\tilde{b}\|^2 = \langle \alpha', v \rangle^2 + \langle \alpha', w \rangle^2 = \|\alpha'\|^2 - \langle \alpha', \eta \rangle^2,$$

$$y_3 = \langle \alpha - x, \eta \rangle,$$

$$b_3 = \langle \alpha', \eta \rangle,$$

$$\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle = \langle y, b \rangle - y_3 b_3 = \langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha', \eta \rangle, \quad (y = U^T(\alpha - x), \quad b = U^T \alpha'),$$

$$\tilde{e}_y = \frac{\tilde{y}}{\|\tilde{y}\|}, \quad \tilde{e}_b = \frac{\tilde{b}}{\|\tilde{b}\|}.$$

□

Betrachtet man nun wieder die Darstellung des Rekonstruktionskerns ψ_γ in der unten aus Gründen der Übersichtlichkeit wiederholten Formel (4.2.23) für $\|\tilde{y}\| \neq 0 \neq \|\tilde{b}\|$, d.h.

$$\psi_\gamma(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{4\pi} \left[e^{-\nu\|\tilde{y}\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \operatorname{erf} \left(\frac{i \langle \tilde{b}, \tilde{y} \rangle}{\sqrt{2}\gamma \|\tilde{b}\|} \right) \{2y_3 \nu \langle \tilde{b}, \tilde{y} \rangle - b_3\} + 2 \|\tilde{b}\| y_3 e^{-\frac{\nu(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2}} \right], \quad (4.2.23)$$

so gelingt es mit Lemma 4.2.9 alle Terme \tilde{y} und \tilde{b} bis auf den letzten Exponenten

$$\frac{\nu(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2}$$

zu ersetzen und damit die Rotationsmatrix U zu eliminieren. Mit Hilfe der zusätzlichen Umformungen

$$\frac{\nu(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2} = c \cdot \sin^2 \psi, \quad \cos \psi = \frac{\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle}{\|\tilde{y}\| \|\tilde{b}\|} = \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle, \quad c = \nu \|\tilde{y}\|^2,$$

deren Gültigkeit in [52] in einem Hilfssatz bewiesen wird, und dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi$$

folgt

$$\frac{\nu(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2} = c \cdot \sin^2 \psi = c \left(1 - \left(\frac{\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle}{\|\tilde{y}\| \|\tilde{b}\|} \right)^2 \right) = \nu \|\tilde{y}\|^2 \left(1 - \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 \right). \quad (4.2.27)$$

Der Rekonstruktionskern im ursprünglichen Koordinatensystem

In Verbindung mit den Formeln (4.2.26) aus Lemma 4.2.9 erhält man für $\|\tilde{y}\| \neq 0 \neq \|\tilde{b}\|$ für den Kern im ursprünglichen Koordinatensystem (vgl. [52])

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) = & -\frac{C}{4\pi} \left[e^{-\nu\|\alpha-x-\langle\alpha-x,\eta\rangle\eta\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \operatorname{erf} \left(\frac{i}{\sqrt{2}\gamma} \frac{\langle\alpha-x,\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\rangle}{\|\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\|} \right) \right. \\ & \cdot \{2\nu\langle\alpha-x,\eta\rangle\langle\alpha-x,\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\rangle - \langle\alpha',\eta\rangle\} \\ & \left. + 2\|\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\|\langle\alpha-x,\eta\rangle e^{\nu\left(\frac{\langle\alpha-x,\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\rangle^2}{\|\alpha'-\langle\alpha',\eta\rangle\eta\|^2} - \|\alpha-x-\langle\alpha-x,\eta\rangle\eta\|^2\right)} \right] \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

mit

$$C = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Der vereinfachte Rekonstruktionskern für $\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle = 0$ kann als

$$\psi(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{2\pi} \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\| \langle \alpha - x, \eta \rangle e^{-\nu \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2} \quad (4.2.29)$$

angegeben werden. Seine Berechnung kommt ohne Integration aus und ist dadurch recht einfach zu realisieren. Aus der Bemerkung nach Satz 4.2.8 kann man folgern, dass der vereinfachte Rekonstruktionskern genau dann Verwendung findet, wenn der Röntgenstrahl vom Punkt α in Richtung η den Rekonstruktionspunkt x genau trifft.

Probleme in der praktischen Umsetzung und deren Behebung

Die analytische Herleitung ist damit abgeschlossen, leider ist eine direkte numerische Umsetzung der vorliegenden Formel für den Kern aber nicht effizient. Dies liegt darin begründet, dass das Argument der erf-Funktion rein imaginär ist und wegen $1/\gamma$ für einen kleinen Regularisierungsparameter γ betragsmäßig groß wird. Dies führt zu sehr großen Werten, wie auch aus Abbildung 4.2 ersichtlich wird. Andererseits ist

$$e^{-\nu \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2} \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{1}{2\gamma^2}$$

aus dem gleichen Grund sehr klein. Um dieser Problematik entgegenzuwirken, ist eine intelligente Berechnung gefordert. Man verzichtet daher auf die Verwendung der erf-Funktion, zieht stattdessen die beiden oben angegebenen Terme zusammen und berechnet das Integral mit Hilfe einer Quadraturformel. Mit Hilfe der abkürzenden Schreibweise

$$z := \frac{\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle}{\sqrt{2\gamma} \|\tilde{b}\|} = \frac{\|\tilde{y}\|}{\sqrt{2\gamma}} \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle \in \mathbb{R}, \quad z^2 = \nu \|\tilde{y}\|^2 \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2$$

leitet Weber für den betreffenden ersten Teil aus Formel (4.2.23) folgende Identität her:

$$\begin{aligned} e^{-\nu \|\tilde{y}\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \operatorname{erf}(iz) &= e^{-\nu \|\tilde{y}\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{iz} e^{-s^2} ds = e^{-\nu \|\tilde{y}\|^2} i \sqrt{2\pi\gamma} \frac{2}{\sqrt{\pi}} iz \int_0^1 e^{z^2 t^2} dt \\ &= -2 \|\tilde{y}\|^2 \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle \int_0^1 e^{\nu \|\tilde{y}\|^2 (\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1)} dt. \end{aligned}$$

Der Rekonstruktionskern im gedrehten Koordinatensystem lautet damit

$$\begin{aligned} &\psi(\alpha, \eta, x) \\ &= -\frac{C}{2\pi} \left[\|\tilde{y}\| \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle \int_0^1 e^{\nu \|\tilde{y}\|^2 (\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1)} dt \{b_3 - 2y_3 \nu \langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle\} + \|\tilde{b}\| y_3 e^{-\nu \frac{(y_1 b_2 - y_2 b_1)^2}{\|\tilde{b}\|^2}} \right] \\ &\stackrel{(4.2.27)}{=} -\frac{C}{2\pi} \left[\|\tilde{y}\| \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle \int_0^1 e^{\nu \|\tilde{y}\|^2 (\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1)} dt \{b_3 - 2y_3 \nu \langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle\} + \|\tilde{b}\| y_3 e^{\nu \|\tilde{y}\|^2 (\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

Ersetzt man nun gemäß Lemma 4.2.9 all diejenigen Terme, die \tilde{y} und \tilde{b} enthalten, so kann man daraus den Rekonstruktionskern für das normale Koordinatensystem als

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= \frac{-C}{2\pi} \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|} \int_0^1 \exp \left(v \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle^2}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2} t^2 - \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) dt \right. \\ &\quad \cdot \{ \langle \alpha', \eta \rangle - 2v \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \} \\ &\quad \left. + \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\| \langle \alpha - x, \eta \rangle \exp \left(v \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle^2}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2} - \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

herleiten. Mit Hilfe der Abkürzungen

$$p_1 := v \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2, \quad (4.2.32a)$$

$$p_2 := \frac{\langle \alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle^2}{\|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2 \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2}, \quad (4.2.32b)$$

$$p_3 := \langle \alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \quad (4.2.32c)$$

und

$$p_4 := \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\| \quad (4.2.32d)$$

lässt sich Formel (4.2.31) zu

$$\psi(\alpha, \eta, x) = -\frac{C}{2\pi} \left[\frac{p_3}{p_4} \{ \langle \alpha', \eta \rangle - 2v \langle \alpha - x, \eta \rangle p_3 \} \int_0^1 e^{p_1 [p_2 t^2 - 1]} dt + p_4 \langle \alpha - x, \eta \rangle e^{p_1 [p_2 - 1]} \right] \quad (4.2.33)$$

vereinfachen. Aus dieser verkürzten Schreibweise wird auch deutlich, dass die Auswertung des Integrals $\int_0^1 e^{p_1 [p_2 t^2 - 1]} dt$ das größte Problem bei der Berechnung des Rekonstruktionskerns darstellt.

Beschleunigung der Berechnung durch Einschränkung des Integrationsbereichs

Wie Weber in [52] weiter zeigt, ist es allerdings nicht notwendig, das komplette Integral zu berechnen, man kann den Integrationsbereich einschränken. Mit den Bezeichnungen aus Lemma

4.2.9 sieht man leicht, dass

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \\
&= \langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle - \langle \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \\
&= \langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle - \langle \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \alpha' \rangle + \langle \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta, \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \\
&= \langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha', \eta \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \eta, \alpha' \rangle + \langle \alpha - x, \eta \rangle \underbrace{\langle \eta, \eta \rangle}_{=1} \langle \alpha', \eta \rangle \\
&= \langle \alpha - x, \alpha' \rangle - \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha', \eta \rangle \\
&= \langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \\
&= \langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle
\end{aligned}$$

gilt. Damit kann man die eingeführten Abkürzungen p_1 und p_2 auch als

$$\begin{aligned}
p_1 &= v \|\tilde{y}\|^2, \\
p_2 &= \frac{\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle^2}{\|\tilde{y}\|^2 \|\tilde{b}\|^2} = \langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2
\end{aligned}$$

schreiben. Für das zu betrachtende Integral gilt dann im Fall $\|\tilde{y}\| \neq 0 \neq \|\tilde{b}\|$ und $\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle \neq 0$

$$\int_0^1 e^{p_1 [p_2 t^2 - 1]} dt = \int_0^1 e^{v \|\tilde{y}\|^2 [\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1]} dt. \quad (4.2.34)$$

Für den vereinfachten Rekonstruktionskern aus Gleichung (4.2.29), d.h. für $\langle \tilde{y}, \tilde{b} \rangle = 0$, entfällt die Berechnung, da das Integral in diesem Fall nicht auftritt. In [52] wird die Berechnung des Rekonstruktionskerns nun dadurch beschleunigt, dass eine Grenze von $e^{-100} \approx 10^{-44}$ festgelegt und das Integral in Gleichung (4.2.34) nur dann ausgewertet wird, wenn der Integrand größer als dieser Wert ist. Obgleich diese Grenze willkürlich gewählt wird, zeigen numerische Berechnungen mit kleineren Werten keine Unterschiede in der Genauigkeit. Für den Exponenten ergibt sich damit folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& v \|\tilde{y}\|^2 \left[\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1 \right] \geq -100 \\
\Leftrightarrow t & \geq \frac{1}{|\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle|} \sqrt{1 - \frac{100}{v \|\tilde{y}\|^2}} =: t_l, \quad t_l \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Da der Integrand im Intervall $[0, 1]$ monoton steigend ist, kann das Integral durch

$$\int_0^{t_l} e^{v \|\tilde{y}\|^2 [\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t^2 - 1]} dt \leq e^{v \|\tilde{y}\|^2 [\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t_l^2 - 1]} \cdot t_l \leq e^{v \|\tilde{y}\|^2 [\langle \tilde{e}_y, \tilde{e}_b \rangle^2 t_l^2 - 1]} \leq e^{-100}$$

abgeschätzt werden. Der Integrationsbereich wird also von $[0, 1]$ auf $[t_l, 1]$ eingeschränkt, die restlichen Werte werden auf Null gesetzt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll mit Hilfe einer Rekonstruktion aus realen Daten die hervorragende Funktionsweise dieses neuartigen Verfahrens verdeutlicht werden. Dazu wurde vom Fraunhofer-Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren (IZFP) in Saarbrücken ein Aluminiumblock, auf den mehrere Schichten Alufolie geklebt wurden, gemessen. Dieses Testobjekt wird verwendet, um die Auflösung verschiedener Algorithmen in vertikaler Richtung zu untersuchen. Ziel ist es dabei, die Schichten aus Klebstoff und Alufolie möglichst eindeutig zu trennen. Abbildung 4.3 zeigt die Rekonstruktion dieses Aluminiumblocks unter Verwendung des hier vorgestellten Verfahrens der Approximativen Inversen im Vergleich zum sehr bekannten Feldkamp-Algorithmus, der häufig als das Standard-Verfahren in der 3D-Tomographie angesehen wird. Für den mit der Approximativen Inversen berechneten Rekonstruktionskern wurde

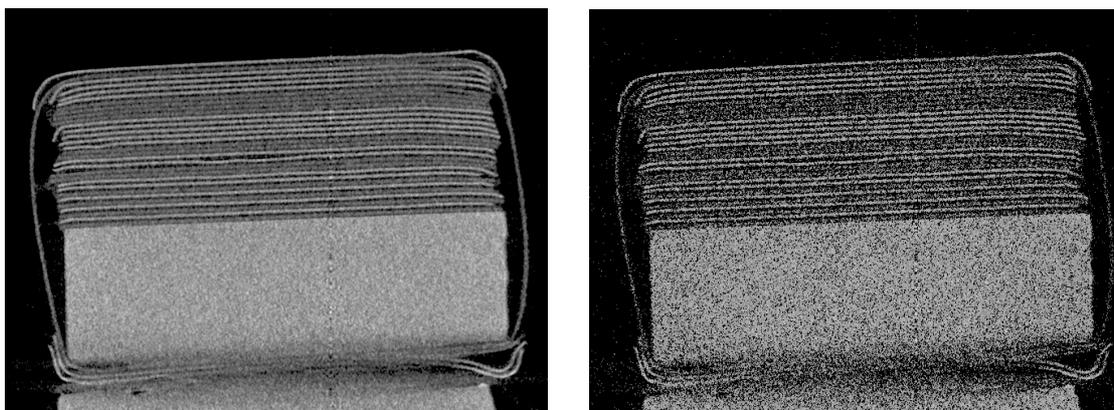


Abbildung 4.3: LINKS: Rekonstruktion des Aluminiumblocks mit Hilfe der Approximativen Inversen unter Verwendung von $\gamma = 0,00062$.
RECHTS: Rekonstruktion mit dem Feldkamp-Algorithmus und Nyquist-Bandbreite (siehe jeweils Kapitel 3 in [52]).

als Regularisierungsparameter $\gamma = 0,00062$ gewählt, für den Feldkamp-Algorithmus wurde die Nyquist-Bandbreite verwendet. Man erkennt deutlich, dass das Ergebnis der Approximativen Inversen eine Trennung der einzelnen Schichten wesentlich besser ermöglicht. Das Resultat des Feldkamp-Ansatzes ist „inakzeptabel schlecht“ (vgl. [52]), die Grafik ist sichtbar körniger und die einzelnen Schichten von Folie und Klebstoff erscheinen durch die fehlerhaften Pixel teilweise unterbrochen und unzusammenhängend. Besonders auffällig ist dies für die fast vertikale Folienschicht am rechten Rand des jeweiligen Bildes. Das Beispiel zeigt also eindrucksvoll die Vorteile der Approximativen Inversen gegenüber den bestehenden Verfahren.

4.2.3 Implementierung des Rekonstruktionskerns

Um die Formel für den Rekonstruktionskern ψ im normalen Koordinatensystem (4.2.31), d.h.

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= \frac{-C}{2\pi} \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|} \int_0^1 \exp \left(\nu \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle^2}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2} t^2 - \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) dt \right. \\ &\quad \cdot \{ \langle \alpha', \eta \rangle - 2\nu \langle \alpha - x, \eta \rangle \langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle \} \\ &\quad \left. + \|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\| \langle \alpha - x, \eta \rangle \exp \left(\nu \left[\frac{\langle \alpha - x, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle^2}{\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\|^2} - \|\alpha - x - \langle \alpha - x, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

mit $C = (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3}$ und $\nu = \frac{1}{2\gamma^2}$ zu implementieren, führen wir noch die beiden Abkürzungen

$$d := \alpha - x \quad \text{und} \quad s := \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta$$

ein. Damit ergibt sich folgender Term:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= -\frac{\|s\| \langle d, \eta \rangle}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \left[-\left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{\langle d, s \rangle^2}{\|s\|^2} - \frac{\langle d, s \rangle}{\|s\|^2 \langle d, \eta \rangle} \langle \alpha', \eta \rangle \right\} \int_0^1 \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{\langle d, s \rangle^2}{\|s\|^2} t^2 - \|d - \langle d, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{\langle d, s \rangle^2}{\|s\|^2} - \|d - \langle d, \eta \rangle \eta\|^2 \right] \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.35)$$

Anpassung an eine kreisförmige Abtastkurve

Bei der praktischen Umsetzung wird ψ aus Formel (4.2.31) oder (4.2.35) nur einmalig für den Quellpunkt $\alpha = (R, 0, 0)^\top \in \Gamma$ und den Rekonstruktionspunkt $x = (0, 0, 0)^\top$ berechnet und dann, unabhängig von der Quelle α , für die Rekonstruktion in jedem beliebigen Punkt x verwendet. Die Variable Γ bezeichnet dabei auch weiterhin eine kreisförmige Abtastkurve in der x_1 - x_2 -Ebene mit Radius R .

Verwendet man nun folgende Werte

$$\alpha := \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha' := \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so vereinfachen sich die Terme

$$d = \alpha - x = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha ,$$

$$s = \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} + R\eta_2 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\eta_1\eta_2 \\ -R + R\eta_2^2 \\ R\eta_3\eta_2 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \eta_1\eta_2 \\ \eta_2^2 - 1 \\ \eta_2\eta_3 \end{pmatrix} ,$$

sowie

$$\begin{aligned} \langle d, s \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} \eta_1\eta_2 \\ \eta_2^2 - 1 \\ \eta_2\eta_3 \end{pmatrix} \right\rangle = R^2\eta_1\eta_2 , \\ \|s\| &= R \sqrt{\eta_1^2\eta_2^2 + (\eta_2^2 - 1)^2 + \eta_2^2\eta_3^2} = R \sqrt{\eta_1^2\eta_2^2 + (\eta_2^4 - 2\eta_2^2 + 1) + \eta_2^2\eta_3^2} \\ &= R \sqrt{\underbrace{\eta_2^2(\eta_1^2 + \eta_3^2 + \eta_2^2 - 2)}_{=1} + 1} = R \sqrt{1 - \eta_2^2} , \\ \|d - \langle d, \eta \rangle \eta\| &= \left\| \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - R\eta_1 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} R(1 - \eta_1^2) \\ -R\eta_1\eta_2 \\ -R\eta_1\eta_3 \end{pmatrix} \right\| = R \left\| \begin{pmatrix} 1 - \eta_1^2 \\ -\eta_1\eta_2 \\ -\eta_1\eta_3 \end{pmatrix} \right\| \\ &= R \sqrt{(1 - \eta_1^2)^2 + \eta_2^2\eta_1^2 + \eta_3^2\eta_1^2} = R \sqrt{1 - 2\eta_1^2 + \eta_1^4 + \eta_1^2\eta_2^2 + \eta_1^2\eta_3^2} \\ &= R \sqrt{1 + \eta_1^2(-2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)} = R \sqrt{1 - \eta_1^2} , \\ \langle d, \eta \rangle &= R\eta_1 , \\ \langle \alpha', \eta \rangle &= -R\eta_2 , \end{aligned}$$

erheblich. Die hier vorgestellten Berechnungen sind so auch in der eigentlichen Implementierung des Rekonstruktionskerns von Weber [52] realisiert. Für den Rekonstruktionskern in Formel (4.2.35) ergibt sich damit durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= -\frac{R \sqrt{1 - \eta_2^2} R \eta_1}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \left[-\left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{(R^2 \eta_1 \eta_2)^2}{(R \sqrt{1 - \eta_2^2})^2} - \frac{R^2 \eta_1 \eta_2}{(R \sqrt{1 - \eta_2^2})^2} (-R \eta_2) \right\} \right. \\ &\quad \cdot \int_0^1 \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(R^2 \eta_1 \eta_2)^2}{(R \sqrt{1 - \eta_2^2})^2} t^2 - (R \sqrt{1 - \eta_1^2})^2 \right] \right) dt \\ &\quad \left. + \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{(R^2 \eta_1 \eta_2)^2}{(R \sqrt{1 - \eta_2^2})^2} - (R \sqrt{1 - \eta_1^2})^2 \right] \right) \right] \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= -\frac{R^2 \sqrt{1 - \eta_2^2} \eta_1}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \left[-\left\{ \frac{1}{\gamma^2} \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} + \frac{\eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} \right\} \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} t^2 - R^2 (1 - \eta_1^2) \right] \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left[\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} - R^2 (1 - \eta_1^2) \right] \right) \right]. \end{aligned}$$

Wie man hier sieht, kann der Rekonstruktionskern unabhängig von η_3 bestimmt werden, beziehungsweise fließt die dritte Komponente des Richtungsvektors in dieser Darstellung nur implizit über seine Eigenschaft als Einheitsvektor $\|\eta\| = 1$ in die Berechnungen ein.

Einige Terme lassen sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma^2} \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} + \frac{\eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} &= \frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2}, \\ \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} t^2 - R^2 (1 - \eta_1^2) &= \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2 (t^2 - 1) + R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}, \\ \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{(1 - \eta_2^2)} - R^2 (1 - \eta_1^2) &\stackrel{t^2=1}{=} \frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}. \end{aligned}$$

Dadurch kann man ψ in der Form

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= -\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \left[-\frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \cdot \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2 (t^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) dt + \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) \left. \right] \\ &= -\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2} \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2 (t^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) dt \right] \end{aligned}$$

und schließlich als

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) = & -\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}\right)\right) \\ & \cdot \left[1 - \frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1\right)}{1 - \eta_2^2} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{\eta_2^2 - 1}\right)\right) \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2 t^2}{1 - \eta_2^2}\right)\right) dt \right] \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

schreiben.

Die letzte Umformung ist nicht zwingend notwendig und dient nur dazu, das Integral möglichst kurz, d.h. auf den Term mit der Integrationsvariable t reduziert, anzugeben. Verwendet man die Identität $\|\eta\| = 1$, so kann man $\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1 = -\eta_3^2$ setzen, und die Darstellung des Kerns verkürzt sich nochmals zu

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= \frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{-\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{R\eta_3}{\gamma}\right)^2}{2(1 - \eta_2^2)}\right) \left[1 - \frac{\left(\frac{R\eta_1\eta_2}{\gamma}\right)^2 + \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} \exp\left(\frac{\left(\frac{R\eta_1\eta_2}{\gamma}\right)^2}{2(\eta_2^2 - 1)}\right) \int_0^1 \exp\left(\frac{\left(\frac{R\eta_1\eta_2 t}{\gamma}\right)^2}{2(1 - \eta_2^2)}\right) dt \right] \\ &= -\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{R\eta_3}{\gamma}\right)^2}{2(1 - \eta_2^2)}\right) \left[1 - \frac{\left(\frac{R\eta_1\eta_2}{\gamma}\right)^2 + \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} \int_0^1 \exp\left(\frac{\left(\frac{R\eta_1\eta_2}{\gamma}\right)^2 (t^2 - 1)}{2(1 - \eta_2^2)}\right) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

Dies ist die kompakteste Form des Kerns und die erste Berechnungsvorschrift, in der η_3 explizit verwendet wird.

Horizontale Diskretisierung in der Abtastebene

Legt man nun den in Abbildung 4.4 gezeigten Messaufbau zugrunde, so ergeben sich daraus folgende Berechnungen für die verschiedenen Variablen. Bezeichne r den Radius des Rekonstruktionsgebietes Ω , in dem sich das Objekt befindet und welches durch den kleineren, inneren Kreis dargestellt wird. Der Radius der Abtastkurve, die durch den großen, äußeren Kreis gekennzeichnet wird, sei R . In den praktischen Berechnungen wird $r = 1$ und $R = 3$ gewählt. Die Detektorbreite wird mit b bezeichnet und es gelte $d = \frac{b}{2}$. Der halbe maximale Öffnungswinkel in horizontaler Richtung ist durch δ gekennzeichnet. Unter Verwendung der Gleichung

$$\tan(\arcsin(\mu)) = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \quad (4.2.38)$$

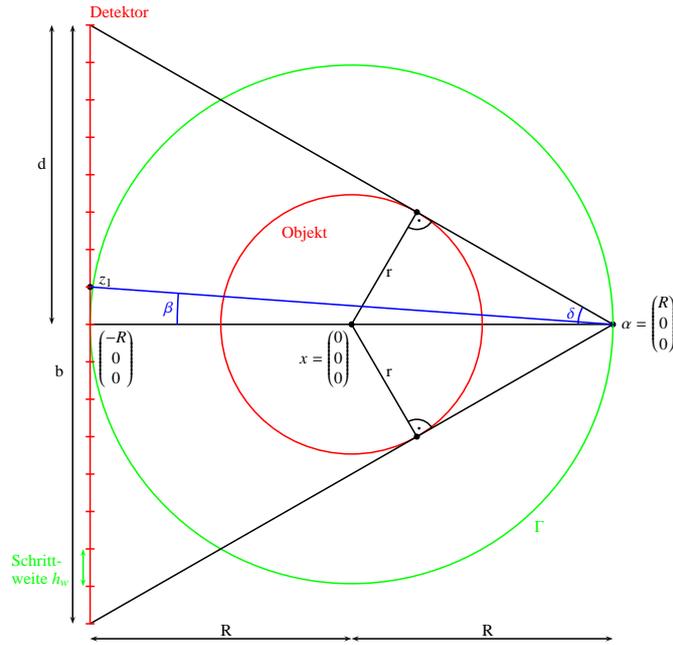


Abbildung 4.4: Draufsicht auf den möglichen Aufbau zur Messung der Cone Beam Transformation \mathcal{D} .

erhält man

$$\sin \delta = \frac{r}{R} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \arcsin\left(\frac{r}{R}\right) \approx 0,3398 \approx 19,471^\circ, \quad (4.2.39)$$

$$\tan \delta = \frac{d}{2R} \quad \Leftrightarrow \quad d = 2R \tan\left(\arcsin\left(\frac{r}{R}\right)\right) = 2R \frac{r/R}{\sqrt{1 - (r/R)^2}} = \frac{2rR}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,121, \quad (4.2.40)$$

$$b = 2d = \frac{4rR}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \approx 4,242. \quad (4.2.41)$$

Sei φ die Anzahl der waagerechten Pixel des Detektors (φ ungerade). Die horizontale Schrittweite h_w auf dem Detektor sowie der Winkel β lassen sich dann berechnen als

$$h_w = \frac{b}{\varphi - 1} = \frac{4rR}{(\varphi - 1) \sqrt{R^2 - r^2}} \quad (4.2.42)$$

und

$$\tan \beta = \frac{h_w}{2R} = \frac{2r}{(\varphi - 1) \sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (4.2.43)$$

Bezeichne z_1 den ersten Pixel horizontal neben dem Mittelpunkt des Detektors und p_1 einen beliebigen Detektorpunkt auf der x -Achse des Detektors. Dann gilt für die Richtungsvektoren

$z_1 - \alpha$ bzw. $p_1 - \alpha$ vom Quellpunkt $\alpha \in \Gamma$ zu den Detektorpunkten z_1 bzw. p_1

$$z_1 - \alpha = -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h_w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ h_w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$p_1 - \alpha = -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ kh_w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ kh_w \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = -\frac{\varphi-1}{2}, \dots, \frac{\varphi-1}{2}.$$

Der Richtungsvektor η und seine Komponenten η_1 , η_2 und η_3 berechnen sich dann zu

$$\eta = \frac{1}{\|p_1 - \alpha\|} (p_1 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2}} (p_1 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2}} \begin{pmatrix} -2R \\ kh_w \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_1^2 = \frac{4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2},$$

$$\eta_2^2 = \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2},$$

$$\sqrt{1 - \eta_2^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{kh_w}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2}} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4R^2 + (kh_w)^2 - (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2}} = \sqrt{\frac{4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2}} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2}},$$

$$\eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2} = \frac{-4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2} = \eta_2^2 - 1,$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1 \quad \stackrel{\eta_3=0}{\Leftrightarrow} \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \eta_1^2 = 1 - \eta_2^2,$$

$$\eta_1^2 \cdot \eta_2^2 = \frac{4R^2 (kh_w)^2}{(4R^2 + (kh_w)^2)^2}.$$

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich für die in Formel (4.2.36) auftretenden Terme des Rekonstruktionskerns

$$-\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} = \frac{(-R^2) \frac{(-4R^2)}{4R^2 + (kh_w)^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} = \frac{4R^4}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2)},$$

$$\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} = 0, \quad \text{da} \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2} = \frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{\eta_1^2} = \eta_2^2 \frac{R^2}{\gamma^2} + \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} = \frac{R^2 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2},$$

sowie

$$\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{\eta_2^2 - 1} = \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{-\eta_1^2} = -R^2 \eta_2^2 = \frac{-R^2 (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2} \Rightarrow \frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{1 - \eta_2^2} = \frac{R^2 (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2}.$$

Wie man leicht sieht, kann man den Exponentialterm vor der Klammer in Formel (4.2.36) vernachlässigen, da das Argument der Exponentialfunktion wie oben gesehen zu Null ausgewertet wird:

$$\exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}\right)\right) = 1.$$

Damit ergibt sich für den Rekonstruktionskern aus Gleichung (4.2.36) eine vereinfachte Darstellung der Form

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= \frac{4R^4}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2)} \left[1 - \left(\frac{R^2 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2} \right) \right. \\ &\quad \cdot \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{-R^2 (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2}\right)\right) \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2} t^2\right)\right) dt \left. \right] \\ &= \frac{4R^4}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2)} \\ &\quad \cdot \left[1 - \left(\frac{R^2 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2} \right) \int_0^1 \exp\left(\frac{R^2 (kh_w)^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2)} (t^2 - 1)\right) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Vertikale Diskretisierung durch den Mittelpunkt des Detektors

Eine analoge Herleitung lässt sich auch für die Höhe des Detektors durchführen. Dazu stellt man sich den in Abbildung 4.4 gezeigten Aufbau in vertikaler Richtung vor. Sei ρ die Anzahl der Pixel des Detektors in vertikaler Richtung (ρ ungerade), v die Detektorhöhe, $w = \frac{v}{2}$ und h_s die Schrittweite in senkrechter Richtung auf dem Detektor. Da es sich bei dem Rekonstruktionsgebiet Ω um eine Kugel handelt, gilt für den maximalen, vertikalen Öffnungswinkel ϵ die gleiche Berechnung wie für sein horizontales Pendant δ , also $\epsilon = \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$. Dementsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \tan(\epsilon) = \frac{w}{2R} \quad \Rightarrow \quad w = d = \frac{2rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \\ v = 2w = b = \frac{4rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \\ h_s = \frac{v}{\rho - 1} = \frac{4rR}{(\rho - 1) \sqrt{R^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Sei τ derjenige Winkel in der Vertikalen, der β in der Horizontalen entspricht. Dann gilt

$$\tan \tau = \frac{h_s}{2R} = \frac{2r}{(\rho - 1) \sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Bezeichne z_2 den ersten Pixel über dem Mittelpunkt des Detektors und p_2 einen beliebigen Detektorpunkt auf der y -Achse des Detektors. Dann gilt für die Richtungsvektoren vom Quellpunkt α auf diese beiden Punkte

$$z_2 - \alpha = -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ h_s \end{pmatrix},$$

$$p_2 - \alpha = -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ jh_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ jh_s \end{pmatrix}, \quad j = -\frac{\rho - 1}{2}, \dots, \frac{\rho - 1}{2}.$$

Damit kann man die entsprechenden Terme des Richtungsvektors η wie folgt vereinfachen:

$$\eta = \frac{1}{\|p_2 - \alpha\|} (p_2 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}} (p_2 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}} \begin{pmatrix} -2R \\ 0 \\ jh_s \end{pmatrix},$$

$$\eta_1^2 = \frac{4R^2}{4R^2 + (jh_s)^2},$$

$$\eta_2^2 = 0,$$

$$\sqrt{1 - \eta_2^2} = 1,$$

$$\eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2} = \eta_1 = \frac{-2R}{\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}},$$

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 = \eta_1^2,$$

$$\eta_1^2 \cdot \eta_2^2 = 0.$$

Für die einzelnen Terme des Rekonstruktionskerns aus Formel (4.2.36) bedeutet das:

$$-\frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} = -\frac{R^2 \eta_1}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} = \frac{(-R^2) \frac{(-2R)}{\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} = \frac{2R^3}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} \sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}},$$

$$\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} = \frac{R^2 (\eta_1^2 - 1)}{1} = R^2 \left(\frac{4R^2}{4R^2 + (jh_s)^2} - 1 \right) = \frac{(-R^2) (jh_s)^2}{4R^2 + (jh_s)^2},$$

$$\frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2} = 0,$$

$$\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{\eta_2^2 - 1} = 0.$$

Die Auswertung des Exponentialterms vor der Klammer ist in diesem Fall leider nicht so einfach wie für die horizontale Diskretisierung. Man erhält:

$$\exp\left(\frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{R^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{(-R^2)(jh_s)^2}{2\gamma^2(4R^2 + (jh_s)^2)}\right).$$

Allerdings sieht man an der nachfolgenden Rechnung, dass sich auch in diesem Fall der Rekonstruktionskern erheblich vereinfacht. Eine Auswertung der eckigen Klammer aus Formel (4.2.36) zeigt, dass diese identisch 1 ist, wodurch die beiden Exponentialterme in der Klammer verschwinden. Damit kann der Rekonstruktionskern ψ geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) &= -\frac{R^2\eta_1\sqrt{1-\eta_2^2}}{\gamma^3(2\pi)^{5/2}} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{R^2(\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{\eta_2^2\left(\frac{R^2}{\gamma^2}\eta_1^2 + 1\right)}{1 - \eta_2^2} \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{R^2\eta_1^2\eta_2^2}{\eta_2^2 - 1}\right)\right) \int_0^1 \exp\left(\frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{R^2\eta_1^2\eta_2^2 t^2}{1 - \eta_2^2}\right)\right) dt\right] \\ &= \frac{2R^3}{\gamma^3(2\pi)^{5/2}\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}} \exp\left(\frac{(-R^2)(jh_s)^2}{2\gamma^2(4R^2 + (jh_s)^2)}\right) [1 - 0] \\ &= \frac{2R^3}{\gamma^3(2\pi)^{5/2}\sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}} \exp\left(\frac{(-R^2)(jh_s)^2}{2\gamma^2(4R^2 + (jh_s)^2)}\right). \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

Komplette horizontale und vertikale Diskretisierung des Detektors

Im letzten Schritt sollen nun beide Richtungen gleichzeitig berücksichtigt werden. Die Berechnungen ergeben sich größtenteils aus den beiden bereits vorgestellten Teilen. Sei z der Detektorpunkt, der jeweils ein Pixel nach rechts und nach oben von der Mitte entfernt liegt. Weiterhin sei p ein beliebiger Detektorpunkt. Mit den Formeln (4.2.42) und (4.2.45) für die Schrittweiten h_w und h_s in horizontaler beziehungsweise vertikaler Richtung gilt für $j = -\frac{\rho-1}{2}, \dots, \frac{\rho-1}{2}$ und $k = -\frac{\varphi-1}{2}, \dots, \frac{\varphi-1}{2}$:

$$\begin{aligned} z - \alpha &= -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h_w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ h_w \\ h_s \end{pmatrix}, \\ p - \alpha &= -\alpha + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ kh_w \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ jh_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2R \\ kh_w \\ jh_s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Richtungsvektor η und seine einzelnen Komponenten können wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{1}{\|p - \alpha\|} (p - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} (p - \alpha) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} \begin{pmatrix} -2R \\ kh_w \\ jh_s \end{pmatrix}, \\
 \eta_1^2 &= \frac{4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}, \\
 \eta_2^2 &= \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}, \\
 \sqrt{1 - \eta_2^2} &= \sqrt{1 - \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} = \sqrt{\frac{4R^2 + (jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}}, \\
 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2} &= \frac{(-2R) \sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}, \\
 \eta_1^2 + \eta_2^2 &= \frac{4R^2 + (kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}, \\
 \eta_1^2 \cdot \eta_2^2 &= \frac{4R^2 (kh_w)^2}{(4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Die in Formel (4.2.36) auftretenden Terme können dann umgeformt werden zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{R^2 \eta_1 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} &= \frac{(-R^2) \frac{(-2R)}{\sqrt{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} \sqrt{\frac{4R^2 + (jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} \\
 &= \frac{2R^3 \sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)}, \\
 \frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} &= \frac{R^2 (-\eta_2^2)}{1 - \eta_2^2} = \frac{R^2 \left(\frac{-(jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2} \right)}{\frac{4R^2 + (jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} = \frac{-R^2 (jh_s)^2}{4R^2 + (jh_s)^2}.
 \end{aligned}$$

Der erste Exponentialterm aus Formel (4.2.36) kann damit zu

$$\exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} \left(\frac{R^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2 - 1)}{1 - \eta_2^2} \right) \right) = \exp \left(\frac{-R^2 (jh_s)^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2)} \right)$$

umgeschrieben werden. Folgende Berechnungen führen zu weiteren Erleichterungen bei der

Implementierung des Kerns:

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_2^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \eta_1^2 + 1 \right)}{1 - \eta_2^2} &= \frac{\frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2} \left(\frac{R^2}{\gamma^2} \frac{4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2} + 1 \right)}{\frac{4R^2 + (jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} \\
&= \frac{4R^4 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (jh_s)^2}, \\
\frac{R^2 \eta_1^2 \eta_2^2}{\eta_2^2 - 1} &= \frac{R^2 \frac{4R^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2} \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}}{\frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2} - 1} = \frac{\frac{4R^4}{(4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)^2}}{\frac{-4R^2 - (jh_s)^2}{4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2}} \\
&= \frac{4R^4 (kh_w)^2}{(4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2) (-4R^2 - (jh_s)^2)} \\
&= \frac{-4R^4 (kh_w)^2}{(4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (jh_s)^2)}.
\end{aligned}$$

Der Rekonstruktionskern lässt sich damit schreiben als:

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha, \eta, x) &= \frac{2R^3 \sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)} \exp\left(\frac{-R^2 (jh_s)^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2)}\right) \\
&\cdot \left[1 - \left(\frac{4R^4 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (jh_s)^2} \right) \right. \\
&\cdot \exp\left(\frac{-4R^4 (kh_w)^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (jh_s)^2)}\right) \\
&\cdot \left. \int_0^1 \exp\left(\frac{4R^4 (kh_w)^2 t^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (jh_s)^2)}\right) dt \right] \\
&= \frac{2R^3 \sqrt{4R^2 + (jh_s)^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)} \exp\left(\frac{-R^2 (jh_s)^2}{2\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2)}\right) \\
&\cdot \left[1 - \left(\frac{4R^4 (kh_w)^2}{\gamma^2 (4R^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2)} + \frac{(kh_w)^2}{4R^2 + (jh_s)^2} \right) \right. \quad (4.2.47) \\
&\cdot \left. \int_0^1 \exp\left(\frac{2R^4 (kh_w)^2 (t^2 - 1)}{\gamma^2 (4R^2 + (kh_w)^2 + (jh_s)^2) (4R^2 + (jh_s)^2)}\right) dt \right].
\end{aligned}$$

Formel (4.2.47) ist die allgemeine Darstellung des Rekonstruktionskerns für den Quellpunkt $\alpha = (R, 0, 0)^\top = (3, 0, 0)^\top$ und den Rekonstruktionspunkt $x = (0, 0, 0)^\top$.

Die beiden in den Abschnitten zuvor hergeleiteten Kerne sind Spezialfälle für $k = 0$ (horizontale Diskretisierung) und für $j = 0$ (vertikale Diskretisierung). Um die Abhängigkeit des Kerns von den verschiedenen Parametern noch deutlicher zu machen, kann man zusätzlich die Schrittweiten h_w und h_s durch die in den Gleichungen (4.2.42) und (4.2.45) angegebenen Formeln ersetzen. Ohne detaillierte Angabe der Berechnungen ergibt sich mit $\tilde{R} := R^2 - r^2$, $\tilde{\varphi} := \varphi - 1$ und $\tilde{\rho} := \rho - 1$

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) = & \frac{R^2 \sqrt{\tilde{\rho}^2 \tilde{R} + j^2 4r^2 \tilde{\varphi}^2 \tilde{\rho}} \sqrt{\tilde{R}}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} [\tilde{R} \tilde{\varphi}^2 \tilde{\rho}^2 + k^2 4r^2 \tilde{\rho}^2 + j^2 4r^2 \tilde{\varphi}^2]} \exp\left(-\frac{2r^2 R^2 j^2}{\gamma^2 (\tilde{\rho}^2 \tilde{R} + j^2 4r^2)}\right) \\ & \times \left[1 - \left(\frac{4R^2 r^2 k^2 \tilde{\rho}^4 \tilde{R}}{\gamma^2 (\tilde{\rho}^2 \tilde{R} + j^2 4r^2) (\tilde{\varphi}^2 \tilde{\rho}^2 \tilde{R} + k^2 4r^2 \tilde{\rho}^2 + j^2 4r^2 \tilde{\varphi}^2)} + \frac{k^2 4r^2 \tilde{\rho}^2}{\tilde{\varphi}^2 (\tilde{\rho}^2 \tilde{R} + j^2 4r^2)} \right) \right] \\ & \times \int_0^1 \exp\left(\frac{2R^2 r^2 k^2 \tilde{\rho}^4 \tilde{R} (t^2 - 1)}{\gamma^2 (\tilde{\varphi}^2 \tilde{\rho}^2 \tilde{R} + k^2 4r^2 \tilde{\rho}^2 + j^2 4r^2 \tilde{\varphi}^2) (\tilde{\rho}^2 \tilde{R} + j^2 4r^2)}\right) dt \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

In den Abbildungen 4.5 bis 4.8 werden dreidimensionale Plots des Kerns für verschiedene Regularisierungsparameter γ und eine Unterteilung des Detektors in $\varphi = 51$ horizontale und $\rho = 51$ vertikale Pixel gezeigt. Dabei wurden für die Grafiken allerdings lediglich fünf Pixel in jede Richtung dargestellt, d.h. der entscheidende Bereich des Rekonstruktionskerns ψ ist in der Mitte konzentriert. Ein Vergleich zwischen den Bildern 4.5 und 4.8 zeigt deutlich, dass ein großer Wert von γ einen wesentlich breiteren, dafür aber nicht so hohen Kern erzeugt. Dies bedeutet, dass die Glättungseigenschaften des Kerns durch die Wahl eines größeren Wertes für γ verstärkt werden.

Die Abbildungen 4.9 bis 4.12 illustrieren den senkrechten Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene des entsprechenden dreidimensionalen Kerns aus den Abbildungen 4.5 bis 4.8. In den zweidimensionalen Darstellungen wird der unterschiedliche Maximalwert, den ψ im mittleren Pixel erreicht, und die mit wachsendem γ ansteigende Breite des Kerns deutlicher, als in den dreidimensionalen Plots. Es sei an dieser Stelle noch angemerkt, dass es mit Hilfe von Formel (4.2.47) einfach ist, den maximalen Wert des Rekonstruktionskerns zu berechnen. Dazu setzt man einfach $j = k = 0$ und erhält

$$\psi(\alpha, \eta, x) = \frac{2R^3 \sqrt{4R^2}}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2} 4R^2} [1 - 0] = \frac{R^2}{\gamma^3 (2\pi)^{5/2}} . \quad (4.2.49)$$

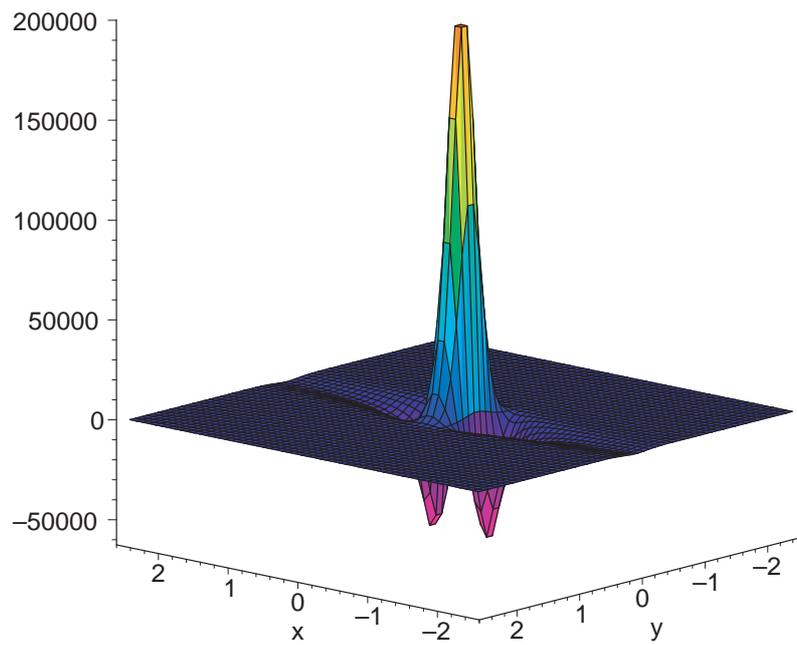


Abbildung 4.5: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,0075$ und $\varphi = \rho = 51$.

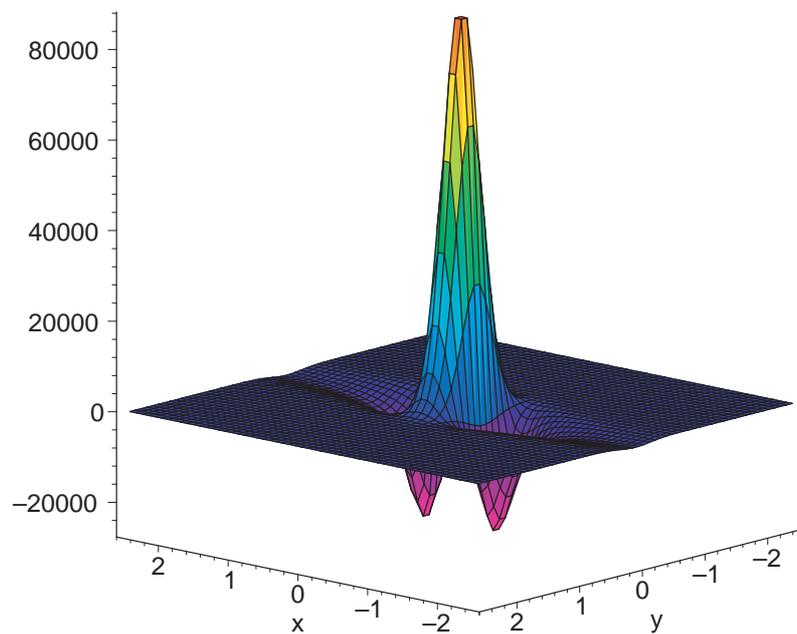


Abbildung 4.6: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,01$ und $\varphi = \rho = 51$.

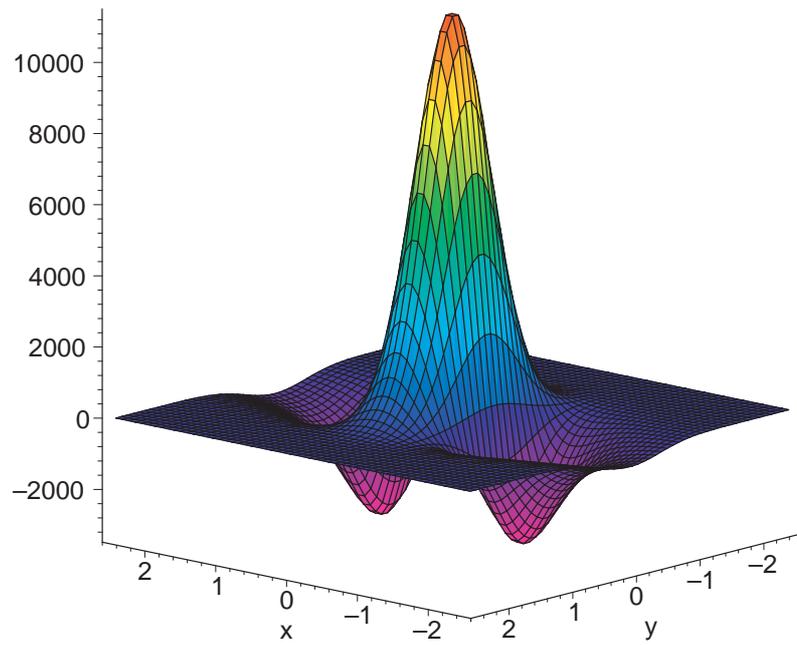


Abbildung 4.7: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,02$ und $\varphi = \rho = 51$.

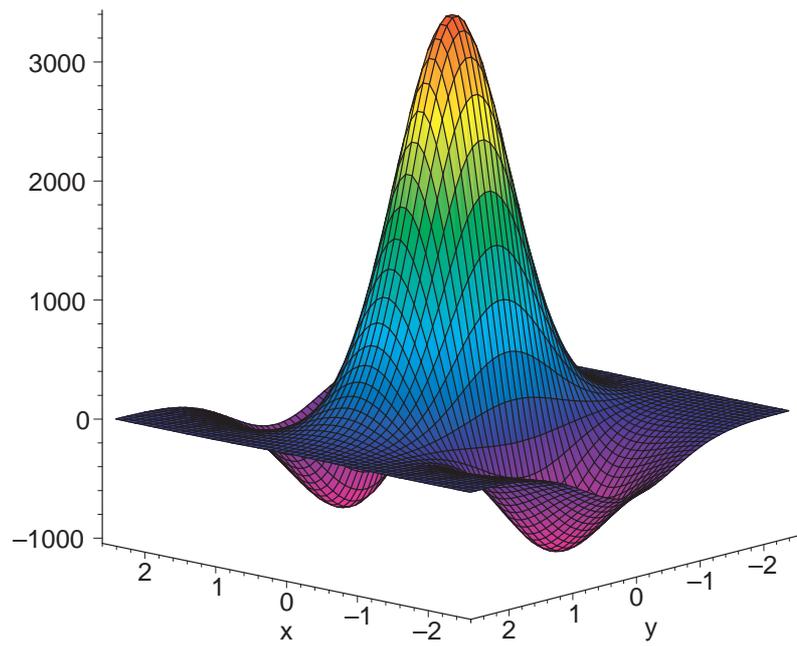


Abbildung 4.8: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,03$ und $\varphi = \rho = 51$.

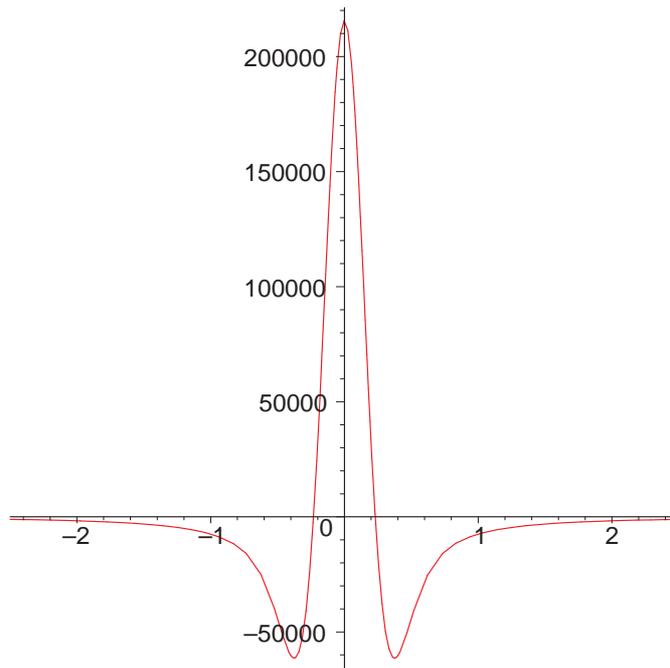


Abbildung 4.9: Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,0075$ und $\varphi = \rho = 51$.

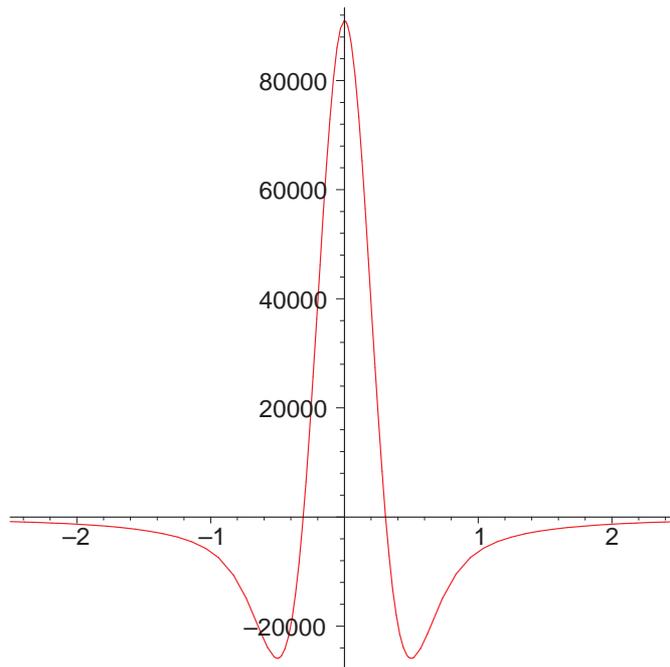


Abbildung 4.10: Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,01$ und $\varphi = \rho = 51$.

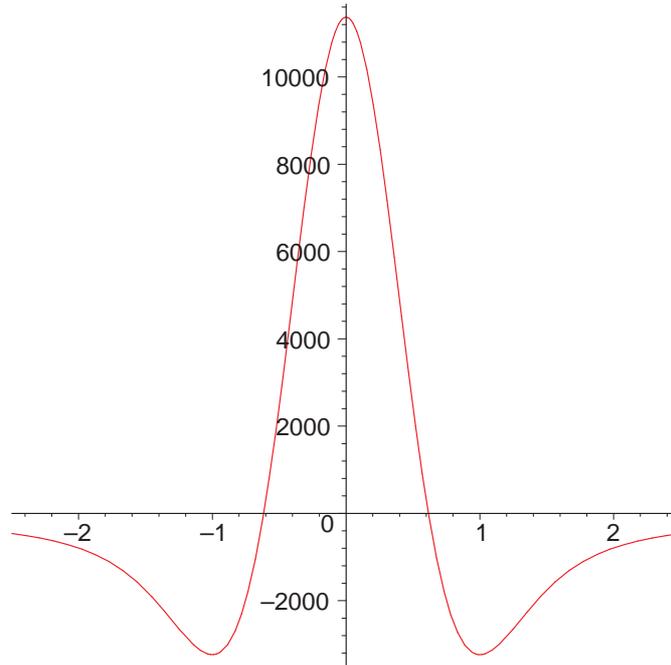


Abbildung 4.11: Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,02$ und $\varphi = \rho = 51$.

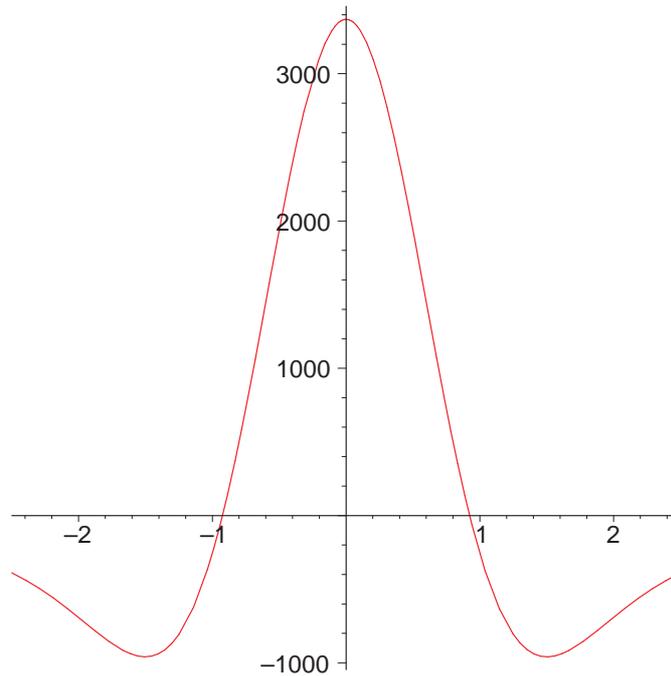


Abbildung 4.12: Schnitt durch die x_1 - x_3 -Ebene des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,03$ und $\varphi = \rho = 51$.

4.2.4 Berechnung unter Verwendung von Winkeln

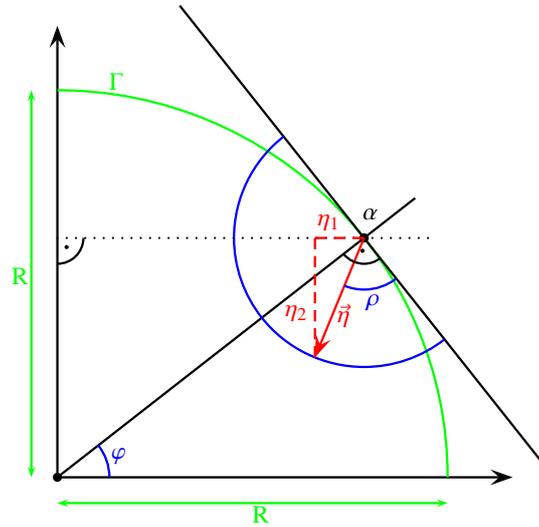


Abbildung 4.13: Darstellung der Winkel zur Berechnung der Cone Beam Transformation \mathcal{D} .

Betrachtet man sich das in Abbildung 4.13 gezeigte Modell für die Messung der Cone Beam Transformation \mathcal{D} mit einer kreisförmigen Abtastkurve Γ mit Radius R , so sieht man, dass der Einheitsvektor η in Richtung des Röntgenstrahls mit Hilfe der Winkel φ und ρ sowie einem in Abbildung 4.13 nicht dargestellten Winkel ϑ in x_3 -Richtung geschrieben werden kann. Demnach sind φ und ρ also für die Richtung in der x_1 - x_2 -Ebene verantwortlich, wobei ρ auf das Intervall $[0, \pi]$ eingeschränkt werden kann, da das Objekt nach Voraussetzung im Inneren der Abtastkurve liegt und die Funktion außerhalb als identisch Null definiert ist. Für $\vartheta = 0$ soll der Richtungsvektor η in der x_1 - x_2 -Ebene liegen, für $\vartheta < 0$ zeigt er nach unten, für $\vartheta > 0$ nach oben. Auch hier kann ϑ mit der gleichen Begründung wie für ρ auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkt werden. Der Quellpunkt α und seine Ableitung α' können nur durch φ dargestellt werden, da sich Γ in der x_1 - x_2 -Ebene befindet und damit die dritte Komponente Null ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha &= R \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^\top, & \alpha' &= R(\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)^\top & \|\alpha\| &= \|\alpha'\| = R, \\ \eta &= (\cos \vartheta \sin(\varphi - \rho), \cos \vartheta(-\cos(\varphi - \rho)), \sin \vartheta)^\top. \end{aligned} \quad (4.2.50)$$

Ziel ist es nun abermals, Formel (4.2.31) für den Rekonstruktionskern ψ im normalen Koordinatensystem mit Hilfe des obigen Modells für die Messgeometrie zu vereinfachen. Die dazu notwendigen Vorarbeiten sind in folgendem Hilfssatz zusammengefasst.

Hilfssatz 4.2.10. Mit den Bezeichnungen aus den Gleichungen (4.2.31) und (4.2.50) gilt:

$$\langle \alpha, \eta \rangle = R \cos \vartheta \sin \rho, \quad (4.2.51a)$$

$$\langle \alpha', \eta \rangle = R \cos \vartheta \cos \rho, \quad (4.2.51b)$$

$$\alpha - \langle \alpha, \eta \rangle \eta = R \begin{pmatrix} \cos \varphi + \cos^2 \vartheta \sin \rho \sin(\varphi - \rho) \\ \sin \varphi - \cos^2 \vartheta \sin \rho \cos(\varphi - \rho) \\ \cos \vartheta \sin \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (4.2.51c)$$

$$\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta = R \begin{pmatrix} \sin \varphi - \cos^2 \vartheta \cos \rho \sin(\varphi - \rho) \\ -\cos \varphi + \cos^2 \vartheta \cos \rho \cos(\varphi - \rho) \\ -\cos \vartheta \cos \rho \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (4.2.51d)$$

$$\|\alpha - \langle \alpha, \eta \rangle \eta\| = |R| \left(1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi\right)^{1/2}, \quad (4.2.51e)$$

$$\|\alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta\| = |R| \left(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \rho\right)^{1/2}, \quad (4.2.51f)$$

$$\langle \alpha - \langle \alpha, \eta \rangle \eta, \alpha' - \langle \alpha', \eta \rangle \eta \rangle = R^2 \cos^2 \vartheta \sin \rho \cos \rho. \quad (4.2.51g)$$

Beweis. Die Gleichungen können leicht mit Hilfe trigonometrischer Formeln nachgerechnet werden. \square

Ein Vergleich mit den von Weber eingeführten Abkürzungen p_i , $i = 1, \dots, 4$, aus den Gleichungen (4.2.32) zeigt, dass in Hilfssatz 4.2.10 die Terme für p_1 , p_3 und p_4 berechnet wurden. Lediglich p_2 bedarf einer weiteren Betrachtung. Mit einfachen trigonometrischen Umformungen zeigt man

$$p_2 = \frac{p_3^2}{p_4^2 v} = 1 - \cos^2 \vartheta \left(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \rho \sin^2 \rho\right).$$

Damit kann aus der verkürzten Darstellung des Rekonstruktionskerns in Gleichung (4.2.33) folgende Formel hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \psi(\alpha, \eta, x) = & -\frac{R^2}{(2\pi)^{3/2} \gamma^3} \frac{\cos \vartheta \sin \rho}{(1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \rho)^{1/2}} \left[\cos^2 \vartheta \cos^2 \rho \left\{ 1 + \frac{1}{\gamma^2} R^2 \sin^2 \rho \cos^2 \vartheta \right\} \right. \\ & \cdot \int_0^1 \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} R^2 (1 - \cos^2 \vartheta \sin^2 \rho) \left[\frac{\cos^4 \vartheta \sin^2 \rho \cos^2 \rho (t^2 - 1) - \sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta \sin^2 \rho \cos^2 \rho} \right] \right) dt \\ & \left. - (1 - \cos^2 \vartheta \cos^2 \rho) \exp \left(\frac{1}{2\gamma^2} R^2 \frac{\sin^2 \vartheta (\cos^2 \vartheta \sin^2 \rho - 1)}{\sin^2 \vartheta + \cos^4 \vartheta \sin^2 \rho \cos^2 \rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Auch hier wird auf das einfache, aber umfangreiche Nachrechnen der Umformungen und Vereinfachungen bewusst verzichtet. Wie man leicht sieht, wird der Winkel φ in Gleichung (4.2.52)

nicht mehr verwendet. Demnach ist eine Berechnung des Kerns unabhängig von der Kenntnis von φ und damit von der Position der Röntgenquelle auf dem Abtastkreis Γ . Lediglich die für die Bestimmung der Richtung des Röntgenstrahls notwendigen Winkel ρ und ϑ müssen zur Auswertung des Rekonstruktionskerns bekannt sein. Ein mit Maple erzeugtes, dreidimensionales Bild des Rekonstruktionskerns findet sich in Abbildung 4.14.

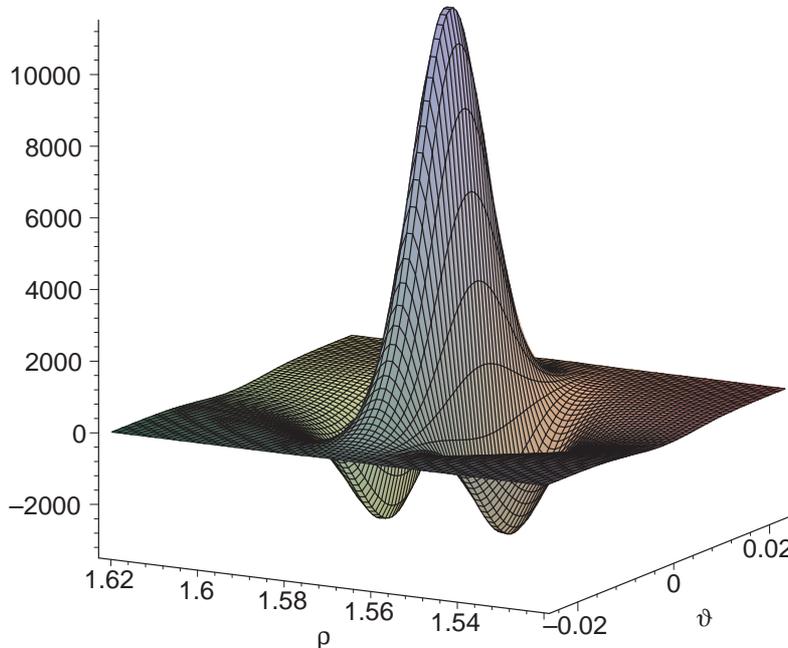


Abbildung 4.14: Dreidimensionale Darstellung des Rekonstruktionskerns für $\gamma = 0,02$, $\vartheta \in [-0,025, 0,025]$ und $\rho \in [\pi/2 - 0,05, \pi/2 + 0,05]$.

Abschätzung des Wertes für η_3

Im Zusammenhang mit Rekonstruktionen aus Daten der Doppler-Transformation spielt die Größe der dritten Komponente des Richtungsvektors η eine entscheidende Rolle bei der Interpretation der Ergebnisse. Aus diesem Grund soll hier die Frage geklärt werden, wie groß die einzelnen Komponenten von $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^\top$ für eine kreisförmige Abtastkurve Γ werden können. Das Objekt sei wieder in der dreidimensionalen Einheitskugel enthalten, d.h. für das Rekonstruktionsgebiet gilt $\Omega = B_1(0)$. Wie bisher sei Γ ein Kreis in der x_1 - x_2 -Ebene mit Radius $R = 3$.

Für η_1 und η_2 ist die oben gestellte Frage leicht zu beantworten. Dadurch, dass der Quellpunkt α den kompletten Kreis durchläuft, nehmen beide alle möglichen Werte im Intervall $[-1, 1]$ an. Für η_3 ist die Antwort etwas schwieriger. Betrachtet man sich noch einmal Abbildung 4.4 und interpretiert das Bild als Seitenansicht des Versuchsaufbaus, so ist der größte Wert von η_3

gerade für den abgebildeten, maximalen Winkel δ erreicht, nämlich für die Tangente von α an das Rekonstruktionsgebiet Ω mit $\eta_2 = 0$. Diese Situation und das zu betrachtende Dreieck ist in Abbildung 4.15 noch einmal detailliert dargestellt, wobei die Bezeichnungen an die bisher verwendete Notation angepasst wurden. Daraus sieht man leicht, dass

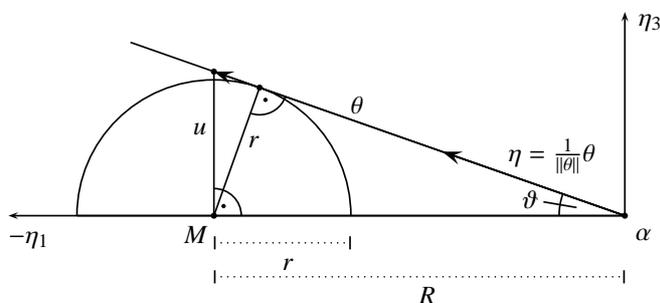


Abbildung 4.15: Berechnung des maximalen Wertes für η_3 .

$$\sin \vartheta = r/R$$

und

$$\tan \vartheta = u/R \quad \Leftrightarrow \quad u = R \tan \vartheta = R \tan(\arcsin(r/R)) .$$

Unter Verwendung der Äquivalenz

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \quad (4.2.53)$$

die in leicht abgewandelter Form in Gleichung (4.2.38) schon für die Berechnung des maximalen Öffnungswinkels δ benutzt wurde, erhält man

$$u = R \tan\left(\arctan\left(\frac{r/R}{\sqrt{1-(r/R)^2}}\right)\right) = \frac{r}{\sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2}}} = \frac{rR}{\sqrt{R^2-r^2}} .$$

Für den Richtungsvektor η gilt:

$$\eta = \frac{1}{\|\theta\|} \theta \quad \text{mit} \quad \theta = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ u \end{pmatrix} .$$

Damit lassen sich folgende Berechnungen durchführen:

$$\begin{aligned} \|\theta\| &= \sqrt{R^2 + u^2} = \sqrt{R^2 + \frac{(rR)^2}{R^2 - r^2}} = R \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}} = R \sqrt{\frac{R^2 - r^2 + r^2}{R^2 - r^2}} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \\ \eta_1 &= \frac{-R}{\|\theta\|} = \frac{-R}{\sqrt{R^2 + u^2}} = \frac{-R}{\left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)} = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}, \\ \eta_3 &= \frac{u}{\|\theta\|} = \frac{u}{\sqrt{R^2 + u^2}} = \frac{\left(\frac{rR}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)}{\left(\frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)} = \frac{r}{R}, \end{aligned}$$

so dass man η letztendlich als

$$\eta = \begin{pmatrix} -(\sqrt{R^2 - r^2})/R \\ 0 \\ r/R \end{pmatrix}$$

schreiben kann.

Diese einfache geometrische Kalkulation zeigt, dass der von der Ebene $\{x_3 = 0\}$ und der Tangente eingeschlossene Winkel ϑ einen Wert von $\vartheta \approx 19,47^\circ$ für die vorausgesetzte Messgeometrie ($r = 1$, $R = 3$) nicht überschreitet. Man kann daraus schließen, dass

$$-\frac{r}{R} \leq \eta_3 \leq \frac{r}{R} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq \eta_3 \leq \frac{1}{3}. \quad (4.2.54)$$

Für jeden Quellpunkt α bewegt sich η_3 also nur im Bereich $[-r/R, r/R]$, was für die vorgestellte Geometrie einem Intervall von $[-1/3, 1/3]$ entspricht. Da die Größe des Objektes und damit der Radius r des Rekonstruktionsgebietes nicht zu beeinflussen ist, hängt der maximale Wert des Öffnungswinkels ϑ entscheidend von der Wahl des Radius R des Abtastkreises ab. Diese Größenbeschränkung für η_3 wird im Rahmen der Rekonstruktion aus Daten der Doppler-Transformation von Interesse sein.

5 Die Doppler-Transformation \mathfrak{D}

In diesem Kapitel wird nun die Doppler-Transformation \mathfrak{D} eingeführt, die prinzipiell nichts anderes ist als eine vektorwertige Variante der Cone Beam Transformation. Dabei wird zur Abtastung und Untersuchung des Objektes ebenfalls die in Kapitel 2 beschriebene Kegelstrahlgeometrie verwendet. Die Ausführungen werden sich, bis auf wenige Ausnahmen, auf den dreidimensionalen Fall beschränken. Im Gegensatz zur skalaren Cone Beam Transformation geht es nicht um die Rekonstruktion einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die der Dichte des Objektes entspricht, sondern um die Bestimmung und Visualisierung eines Vektorfeldes $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aus Integralen über dessen Projektionen entlang des Strahlenweges. Bei den im Rahmen der Vektortomographie zu rekonstruierenden Feldern handelt es sich meist um Geschwindigkeitsfelder einer inkompressiblen, sich bewegenden Flüssigkeit.

Die Vektortomographie besitzt eine Vielzahl von Anwendungen, beispielsweise in der Photoelastizität, der Ozeanographie, dem zerstörungsfreien Prüfen und natürlich in der medizinischen Bildverarbeitung, wo sie beispielsweise zur Tumor(früh-)erkennung eingesetzt werden kann. Dies ist möglich, da der Blutfluss in der Nähe eines Tumors deutlich stärker, intensiver und wesentlich ungleichmäßiger ist als in gesundem Gewebe, so dass die Rekonstruktion und Visualisierung des Geschwindigkeitsfeldes Hinweise auf das Vorhandensein einer möglicherweise bösartigen Veränderung geben kann (siehe [48]).

Zudem können die Daten mit Hilfe von Ultraschall durch Ausnutzung des nach seinem Entdecker benannten *Doppler-Effekts* gemessen werden. Hierbei handelt es sich um eine bei Wellen jeglicher Art auftretende Frequenzverschiebung, die der österreichische Mathematiker Christian Doppler 1842 in [6] theoretisch herleiten konnte. Ein bekanntes Beispiel für den akustischen Doppler-Effekt ist die von einem Beobachter wahrgenommene Tonhöhenveränderung des Martinshorns eines fahrenden Krankenwagens. Nähern sich Beobachter und Martinshorn einander, so erhöht sich die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz, der Ton ist höher als im Fall eines stehenden Fahrzeugs. Entfernen sie sich wieder voneinander, verringert sich die Frequenz, der Ton wird tiefer. Dieses Prinzip wird heute bei einer Vielzahl von Messverfahren benutzt, sehr intensiv beispielsweise in der Astronomie, wo der optische Doppler-Effekt zur Geschwindigkeitsbestimmung von Sternen und Quasaren genutzt wird.

Gleiches gilt auch für Ultraschallwellen. Trifft in einer sich bewegenden Flüssigkeit eine kontinuierliche Ultraschallwelle der Frequenz ω_0 und der Schallgeschwindigkeit c im Inneren der Flüssigkeit auf einen Partikel, der sich mit der Geschwindigkeit v auf die Schallquelle zubewegt, so wird der Schall reflektiert und erfährt eine Frequenzverschiebung, den sogenannten *Doppler-Shift* d , mit

$$d = \frac{2\omega_0 v}{c + v} .$$

Das Vorzeichen kehrt sich um, wenn sich die Schallwelle und der Partikel in die gleiche Richtung bewegen. Unter in der Medizin realistischen Bedingungen kann man davon ausgehen, dass die

Geschwindigkeit des Teilchens v wesentlich geringer ist als die Schallgeschwindigkeit c , also $v \ll c$ (siehe [13]). Damit kann man $c + v \approx c$ abschätzen und erhält

$$d \approx \frac{2\omega_0 v}{c} \approx kv \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\omega_0}{c}.$$

Der Doppler-Shift, der von jedem Partikel im Weg des Strahls verursacht wird, ist also proportional zur Geschwindigkeitskomponente des Teilchens im Inneren der Flüssigkeit. Eine Illustration dieses Messvorgangs ist in Abbildung 5.1 zu finden. Wie man anhand dieser Grafik sehen kann, werden die bisherigen Annahmen über die zugrunde liegende Messgeometrie aus den vorangegangenen Abschnitten übernommen. Die Abtastkurve wird also eine Kreisbahn mit Radius $R = 3$ in der x_1 - x_2 -Ebene sein und das Rekonstruktionsgebiet Ω , in dem sich das Objekt, in diesem Fall also die Flüssigkeit, befindet, die dreidimensionale Einheitskugel $B_1(0)$.

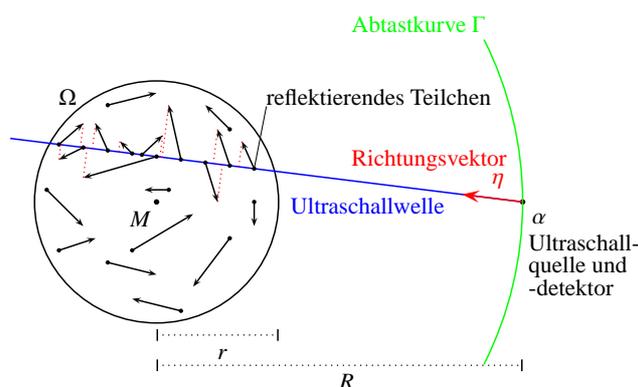


Abbildung 5.1: Zweidimensionale Illustration einer Messung zur Vektortomographie mittels Ultraschall.

Voraussetzung bleibt natürlich stets, dass in der zu untersuchenden Flüssigkeit auch den Schall reflektierende Partikel vorhanden sind. Für das menschliche Blut ist das aufgrund der darin enthaltenen roten Blutkörperchen sicher der Fall. Damit können Ultraschallgeräte zur Rekonstruktion und Visualisierung des Blutflusses eingesetzt werden. Da der Blutfluss um einen Tumor stärker ist als in normalem Gewebe, kann diese zusätzliche Information bei Vorsorgeuntersuchungen zur Krebsfrüherkennung äußerst hilfreich sein, wie schon 1977 von Wells in [53] vorgeschlagen wurde.

Da Ultraschall zudem keine bekannten schädlichen Eigenschaften hat, besitzt die Doppler-Tomographie einen weiteren entscheidenden Vorteil gegenüber der heute im klinischen Alltag verwendeten Tomographie, bei der Röntgenstrahlung eingesetzt wird. Von dieser ist bekannt, dass sie – häufig eingesetzt zur Krebserkennung – selbst Krebs auslösen kann. Dies ist abhängig von der Strahlendosis, der ein Patient über einen gewissen Zeitraum ausgesetzt ist, auch über mehrere Untersuchungen und mehrere Jahre hinweg. Demnach können präventive Untersuchungen mit Ultraschall die Strahlenbelastung eines Patienten deutlich verringern. Bei der als

Sonographie bezeichneten Untersuchung werden Ultraschallgeräte bei der Brustkrebsvorsorge bereits eingesetzt, allerdings nicht zur Rekonstruktion des Blutflusses, sondern, ähnlich wie bei der Röntgentomographie, zur Darstellung unterschiedlicher Gewebedichten. Die Unschädlichkeit der Strahlen ermöglicht auch den Einsatz im Rahmen fetaler Untersuchungen während der Schwangerschaft, wo mittlerweile sogar dreidimensionale Bilder des ungeborenen Kindes möglich sind.

Die für die Brustkrebsvor- und -nachsorge ebenso häufig verwendete Mammographie, bei der ebenfalls Röntgenstrahlung verwendet wird, birgt einen weiteren Nachteil. Sie steht im Verdacht, dass durch den Druck, der während einer Mammographie auf die Brust ausgeübt wird, kleine Tumore zerstört und so die Ausbreitung der Krankheit beschleunigt werden könnte. Mit entsprechenden Ultraschallgeräten könnte diese Gefahr vermieden oder zumindest verringert werden.

Die weite Verbreitung von Ultraschallgeräten, der derzeitige technische Entwicklungsstand und die Vorteile gegenüber Röntgenstrahlen lassen darauf schließen, dass sich diagnostisch verlässliche und effektive Algorithmen zur Rekonstruktion des Blutflusses mittels Ultraschall in der medizinischen Praxis schnell und erfolgreich durchsetzen könnten. Es sei an dieser Stelle aber nochmals erwähnt, dass für die hier gemachten Überlegungen und Ausführungen vorausgesetzt wird, dass die auf Ultraschall basierenden Algorithmen und die dazugehörige medizinische Ausrüstung genauso verlässlich und schnell arbeiten, wie heutige Röntgentechniken.

In den folgenden Abschnitten soll die Doppler-Transformation näher vorgestellt und wichtige Eigenschaften hergeleitet werden. Dabei werden auch immer wieder Parallelen zur Cone Beam Transformation aufgezeigt. Ziel ist es, einen auf der Theorie der Approximativen Inversen und dem Kern ψ der Cone Beam Transformation beruhenden Rekonstruktionsalgorithmus zu entwickeln. Aus diesem Grund war es notwendig, die im Zusammenhang mit der skalaren 3D Tomographie erarbeiteten Resultate so detailliert in den vorangegangenen Kapiteln, speziell Kapitel 4, vorzustellen.

5.1 Definitionen und wichtige Eigenschaften

Im Unterschied zu den vorausgehenden Abschnitten dieser Arbeit wird nun f eine Funktion von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezeichnen und nicht wie bisher von $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Wo es notwendig ist, wird, um Unklarheiten auszuschließen, die vektorwertige Funktion mit einem Pfeil gekennzeichnet, d.h. man schreibt \vec{f} statt f . Die Komponenten von \vec{f} sind wiederum Funktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, so dass \vec{f} in der Form $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ dargestellt werden kann.

5.1.1 Einführung und Definition

Die Definition der *Doppler-Transformation* \mathfrak{D} ist der der Cone Beam Transformation aus Definition 2.1.4 sehr ähnlich. Beide lassen sich auf eine gemeinsame, allgemeinere Definition für Tensorfelder vom Rang m , die von Schuster in [41] eingeführt wurde, zurückführen.

Definition 5.1.1. Sei $\alpha \in \Gamma$ ein Quellpunkt auf einer Abtastkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, die das Rekonstruktionsgebiet Ω , in dem sich das Objekt befindet, umgibt. Weiter seien $\theta \in S^{n-1}$ der Richtungsvek-

tor des Strahls und \mathbf{f} ein symmetrisches, kovariantes Tensorfeld vom Rang m mit kompaktem Träger im offenen Gebiet Ω . Dann ist die *allgemeine Cone Beam Transformation* definiert als

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m \mathbf{f}(\alpha, \theta) &= \int_0^\infty \langle \mathbf{f}(\alpha + t\theta), \theta^m \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \mathbf{f}_{i_1 \dots i_m}(\alpha + t\theta) \theta^{i_1} \dots \theta^{i_m} dt, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

wobei $\theta^m = \theta \otimes \dots \otimes \theta$ das m -fache Tensorprodukt von θ bezeichnet. Abkürzend schreibt man auch

$$\mathbf{D}_{m,\alpha} \mathbf{f}(\theta) := \mathbf{D}_m \mathbf{f}(\alpha, \theta). \quad (5.1.2)$$

In Gleichung (5.1.1) wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, d.h. man summiert über gleiche Indizes i_j mit $1 \leq i_j \leq n$. Weiterhin nimmt man an, dass $\mathbf{f} = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, d.h. die Funktion ist Null außerhalb des Rekonstruktionsgebietes. Schuster weist in [41] zusätzlich darauf hin, dass der Operator \mathfrak{D} mit der „longitudinal ray transform“, die Sharafutdinov in [44] einführt, übereinstimmt. Tensorfelder vom Rang $m = 0$ sind skalare Funktionen $f(x)$, so dass sich aus Definition 5.1.1 für $m = 0$ und $n = 3$ die bereits vorgestellte Theorie zur skalaren dreidimensionalen Cone Beam Transformation ergibt, d.h. es gilt $\mathbf{D}_0 = \mathfrak{D}$. Tensorfelder vom Rang $m = 1$ sind Vektorfelder $\vec{f}(x)$ im \mathbb{R}^n , die in Definition 5.1.1 eingeführte Integraltransformation bezeichnet man dann auch allgemein als Cone Beam Transformation für Vektorfelder der Dimension n oder vektorielle Cone Beam Transformation. Die folgenden Betrachtungen werden sich hauptsächlich auf den Fall $m = 1$ und $n = 3$ beschränken.

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ zunächst eine beliebige Abtastkurve, wobei meistens der Fall einer kreisförmigen Abtastkurve in der x_1 - x_2 -Ebene betrachtet werden wird. Der Rekonstruktionsbereich, in dem sich das Objekt befindet, werde wie bisher mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet. In den am Ende der Arbeit vorgestellten praktischen Anwendungen wird dies die dreidimensionale Einheitskugel um die Null sein, d.h. $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < 1\}$.

Definition 5.1.2. Die aus Formel (5.1.1) abgeleitete Gleichung für $f : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathfrak{D}f(\alpha, \theta) := \mathbf{D}_1 \mathbf{f}(\alpha, \theta) = \int_0^\infty \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt = \left\langle \underbrace{\int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt}_{\in \mathbb{R}^3}, \theta \right\rangle \in \mathbb{R}, \quad (5.1.3)$$

wobei $\alpha \in \Gamma$ ein Quellpunkt auf der Abtastkurve Γ , Ω das Rekonstruktionsgebiet und $\theta \in S^2$ ein Einheitsvektor sind, wird als *Doppler-Transformation* bezeichnet.

Eine Illustration dieser beschriebenen Messanordnung mit Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ als Abtastkurve findet sich in Abbildung 5.2.

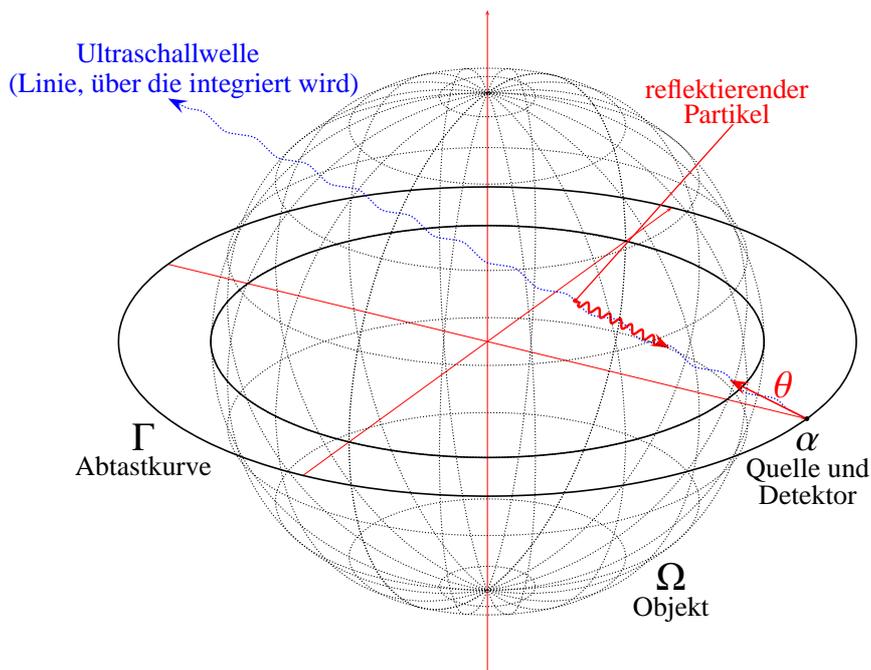


Abbildung 5.2: Illustration des Messaufbaus für die 3D Doppler-Transformation mit einem Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ als Abtastkurve Γ .

Die anschließende einfache Rechnung zeigt noch einmal den engen Zusammenhang zwischen Doppler- und Cone Beam Transformation:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) &= \int_0^\infty \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt = \int_0^\infty \theta_1 f_1(\alpha + t\theta) + \theta_2 f_2(\alpha + t\theta) + \theta_3 f_3(\alpha + t\theta) dt \\ &= \theta_1 \mathcal{D}f_1(\alpha, \theta) + \theta_2 \mathcal{D}f_2(\alpha, \theta) + \theta_3 \mathcal{D}f_3(\alpha, \theta). \end{aligned}$$

Das mathematische Problem der dreidimensionalen Vektor- oder Doppler-Tomographie besteht nun ähnlich wie bei der skalaren Cone Beam Transformation \mathcal{D} darin, die Gleichung $\mathfrak{D}f = g$ für gegebene Messungen $g \in \mathbb{R}$ zu invertieren, d.h. ein dreidimensionales Vektorfeld f aus bekannten, eindimensionalen, also skalaren, Daten g zu rekonstruieren. Im Gegensatz zu $\mathbf{D}_0 = \mathcal{D}$ ist für $\mathbf{D}_1 = \mathfrak{D}$ weder eine Inversionsformel noch ein approximatives Inversionsschema für die Kegelstrahlgeometrie bekannt.

Allerdings konnten, obwohl die Vektortomographie noch ein relativ neues Forschungsgebiet ist, für andere Geometrien bereits zahlreiche wichtige theoretische und numerische Resultate hergeleitet werden, speziell für die parallele Geometrie. So hat beispielsweise Juhlin in [13] einen Messaufbau vorgeschlagen, mit dem es möglich ist, den divergenzfreien Anteil eines zweidimensionalen Vektorfeldes vollständig zu rekonstruieren. Mathematische Eigenschaften dieses Modells finden sich bei Sparr et al. in [46]. Desbat und Wernsdörfer entwickelten in [4] eine

iterative Methode.

Für die dreidimensionale Doppler-Tomographie mit paralleler Geometrie konnte Schuster in [39] und [40] eine Rekonstruktionsmethode vom Typ der gefilterten Rückprojektion angeben, die auf der Approximativen Inversen beruht. Zusammen mit Rieder gelang es ihm in [38] die Konvergenz mit expliziter Angabe der Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität dieser Methode für verrauschte Daten zu zeigen.

In Anbetracht des engen Zusammenhangs zwischen Radon- und Cone Beam Transformation, der beispielsweise in der Formel von Grangeat (4.2.2) in Satz 4.2.1 zum Ausdruck kommt und sich teilweise auf die Doppler-Transformation verallgemeinern lässt, ist es auch von Interesse, dass die Singulärwertzerlegung der zweidimensionalen Radon-Transformation für Tensorfelder bei Fächerstrahlgeometrie in einem Artikel von Kazantsev und Bukgheim [15] hergeleitet werden konnte.

Bevor weitere Eigenschaften behandelt werden, soll gleich zu Beginn die Frage beantwortet werden, was in der Theorie aus den Daten der Doppler-Transformation überhaupt rekonstruiert werden kann. Aus Gleichung (5.1.3) sieht man leicht, dass man aus den Messungen lediglich das Integral über die Projektionen des Vektorfeldes auf den Integrationsstrahl, d.h. die Projektionen des Vektorfeldes in Richtung θ , erhält. Dies wird in Abbildung 5.3 noch einmal verdeutlicht.

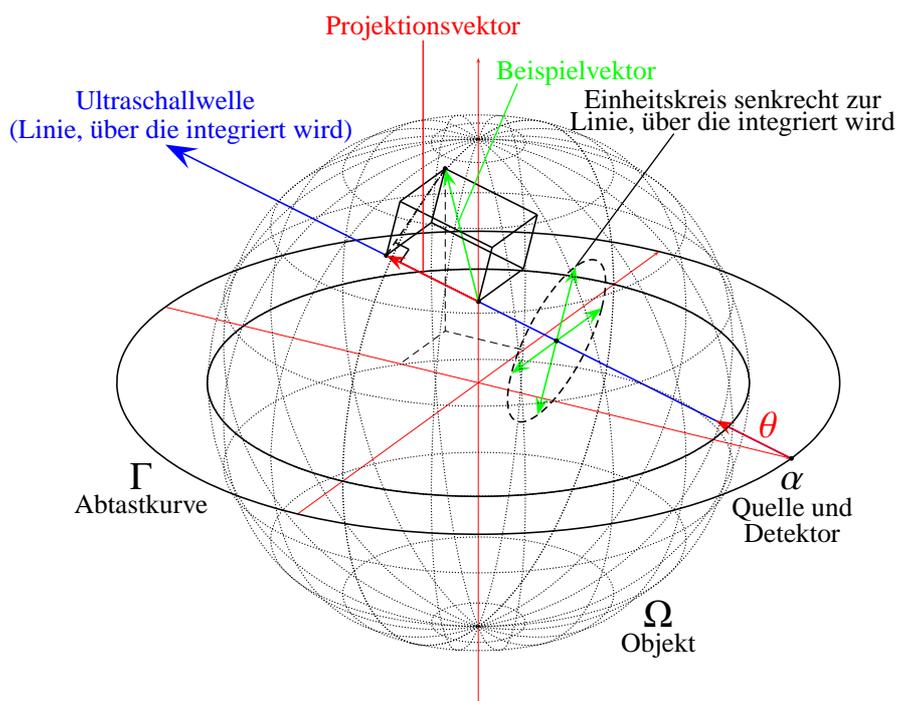


Abbildung 5.3: Visualisierung der gemessenen Projektionsdaten für die 3D Doppler-Transformation.

Betrachtet man eine Ultraschallwelle, die von einem Quellpunkt α auf der Abtastkurve Γ ausgeht, so kann lediglich die Projektion des grün gezeichneten Beispielvektors in Richtung der Schallwelle gemessen werden. Diese Projektion ist als roter Pfeil dargestellt. Im Umkehrschluss bedeutet dies auch, dass jeder Vektor, der senkrecht zur Richtung der Welle steht, nichts zum Integral beiträgt. Diese Tatsache wird in Abbildung 5.3 mit Hilfe des Einheitskreises und der entsprechenden grünen Beispielvektoren senkrecht zu θ illustriert. Als Konsequenz ist eine vollständige Rekonstruktion eines beliebigen Vektorfeldes mit der zugrunde liegenden Messgeometrie nicht möglich. Unter Zuhilfenahme der Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1.4 ist es höchstens möglich, den divergenzfreen Anteil eines beliebigen Vektorfeldes zu bestimmen, da die vektorielle Cone Beam Transformation eines beliebigen Gradientenfeldes mit kompaktem Träger identisch Null ist. Dies kann auch leicht anhand der folgenden kurzen Rechnung für ein Gradientenfeld $f(x) = \nabla\phi(x) = (\partial_{x_1}\phi(x), \dots, \partial_{x_n}\phi(x))^\top$, $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger anschaulich gemacht werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 f(\alpha, \theta) &= \mathbf{D}_1 (\nabla\phi)(\alpha, \theta) = \int_0^\infty \langle \nabla\phi(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt \\ &= [\phi(\alpha + t\theta)]_0^\infty = 0. \end{aligned}$$

5.1.2 Eigenschaften

Nach dieser ausführlicheren Einleitung in das Themengebiet der Vektortomographie wird sich die Arbeit nun den Eigenschaften der vektoriellen Cone Beam beziehungsweise der Doppler-Transformation zuwenden. Dazu sind noch einige Bezeichnungen notwendig. Sei

$$L^2(X, \mathbb{R}^n) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \|f\|_{L^2} = \langle f, f \rangle_{L^2}^{1/2} < \infty \right\} \quad (5.1.4)$$

der Raum der *quadratintegrierbaren Funktionen* von $X \subset \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R}^n , wobei das innere Produkt zweier Funktionen in L^2 definiert ist durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_X \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} dx. \quad (5.1.5)$$

Für die Operatoren \mathbf{D}_0 und \mathbf{D}_1 und damit auch deren dreidimensionale Spezialfälle \mathcal{D} beziehungsweise \mathfrak{D} kann folgender Satz gezeigt werden:

Satz 5.1.3. *Sei $\Omega^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ mit $\partial\Omega^n = S^{n-1}$ das Rekonstruktionsgebiet, in dem das Objekt enthalten ist. Die Abbildungen*

$$\mathbf{D}_0 : L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2(\Gamma \times S^{n-1})$$

und

$$\mathbf{D}_1 : L^2(\Omega^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\Gamma \times S^{n-1})$$

sind linear und beschränkt, wenn

$$\int_\Gamma (|\alpha| - 1)^{1-n} d\alpha < \infty.$$

Dieser Satz wird von Schuster in [41] für die allgemeine Cone Beam Transformation für Tensorfelder aus Formel (5.1.1) hergeleitet und mittels folgender einfacher Rechnung bewiesen:

Beweis. Für $f \in L^2(\Omega^n, \mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \Gamma$ und $m \in \{0, 1\}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} |\mathbf{D}_\alpha f(\theta)|^2 d\theta &= \int_{S^{n-1}} \left| \int_0^\infty \langle f(\alpha + t\theta), \theta^m \rangle dt \right|^2 d\theta \\ &\leq 2 \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \|f(\alpha + t\theta)\|^2 dt d\theta \\ &= 2 \int_{\Omega^n} \|f(x)\|^2 |x - \alpha|^{1-n} dx \\ &\leq 2(|\alpha| - 1)^{1-n} \|f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

wobei hier die Substitution $x = \alpha + t\theta$ und die Tatsache, dass $f(x) = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ benutzt wurden. Damit ist die Stetigkeit von \mathbf{D}_α gezeigt und die Stetigkeit von \mathbf{D} folgt dann mittels $\mathbf{D}f(\alpha, \theta) = \mathbf{D}_\alpha$ und

$$\int_{\Gamma} \int_{S^{n-1}} |\mathbf{D}f(\alpha, \theta)|^2 d\theta d\alpha \leq 2 \|f\|_{L^2}^2 \int_{\Gamma} (|\alpha| - 1)^{1-n} d\alpha.$$

□

Aus Satz 5.1.3 folgt, dass die adjungierten Operatoren von \mathbf{D}_0 und \mathbf{D}_1 beschränkt sind. Für den Fall $n = 3$ wurde der adjungierte Operator \mathcal{D}^* der dreidimensionalen Cone Beam Transformation als Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Gamma \times S^2)$ bereits in Formel (4.1.1) angegeben und wird hier für spätere Vergleiche wiederholt:

$$(\mathcal{D}^*g)(x) = \int_{\Gamma} \|x - \alpha\|^{-2} g\left(\alpha, \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) d\alpha. \quad (4.1.1)$$

Der adjungierte Operator

Im Folgenden soll nun der adjungierte Operator \mathfrak{D}^* der Doppler-Transformation angegeben werden. Dafür betrachten wir die ausführliche Herleitung des adjungierten Operators \mathbf{D}_1^* der vektoriellen Cone Beam Transformation für beliebige Dimension n und setzen dann $n = 3$. Zunächst muss allgemein die Gleichung

$$\langle g(\alpha, \theta), \mathbf{D}_1 f(\alpha, \theta) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^{n-1})} \stackrel{!}{=} \langle \mathbf{D}_1^* g(x), f(x) \rangle_{L^2(\Omega^n)} = \int_{\Omega^n} \mathbf{D}_1^* g(x) f(x) dx$$

für $f \in L^2(\Omega^n, \mathbb{R}^n)$ und $g \in L^2(\Gamma \times S^{n-1})$ erfüllt sein. Einsetzen der Definitionen und Umformen ergibt

$$\begin{aligned} \langle g(\alpha, \theta), \mathbf{D}_1 f(\alpha, \theta) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^{n-1})} &= \int_{\Gamma} \int_{S^{n-1}} g(\alpha, \theta) \int_{\mathbb{R}^+} \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt d\theta d\alpha \\ &= \int_{\Gamma} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^+} g(\alpha, \theta) \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt d\theta d\alpha . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Kugelkoordinaten für θ und mit Hilfe der Substitution

$$y = \alpha + t\theta, \quad t = \|y - \alpha\|, \quad \theta = \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}, \quad dy = t^{n-1} dt d\theta$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) \left\langle \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|^n}, f(y) \right\rangle dy d\alpha &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) \left\langle \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|^n}, f(y) \right\rangle d\alpha dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \int_{\Gamma} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|^n} d\alpha, f(y) \right\rangle dy . \end{aligned}$$

Der adjungierte Operator der vektoriellen Cone Beam Transformation lautet also

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1^* g(y) &= \int_{\Gamma} \underbrace{g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|^n}}_{\in \mathbb{R}^n} d\alpha \in \mathbb{R}^n \\ &= \int_{\Gamma} \|y - \alpha\|^{1-n} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|} d\alpha . \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Analog kann man den adjungierten Operator der n -dimensionalen skalaren Cone Beam Transformation \mathbf{D}_0 als

$$\mathbf{D}_0^* g(y) = \int_{\Gamma} \|y - \alpha\|^{1-n} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) d\alpha$$

bestimmen. Wie schon für den Fall der Definitionen von \mathbf{D}_0 und \mathbf{D}_1 lassen sich beide Formeln auch aus einer von Schuster in [41] angegebenen allgemeinen Darstellung des adjungierten Operators

$$\mathbf{D}_{m,\alpha}^* g(y) = \int_{\Gamma} \|y - \alpha\|^{1-n-m} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) (y - \alpha)^m d\alpha \tag{5.1.7}$$

oder in der abkürzenden Schreibweise

$$\mathbf{D}_{m,\alpha}^* g(y) = \|y - \alpha\|^{1-n-m} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) (y - \alpha)^m \tag{5.1.8}$$

für die allgemeine Cone Beam Transformation für symmetrische, kovariante Tensorfelder der Stufe m aus Definition 5.1.1 gewinnen.

Für $n = 3$ ergibt sich aus Formel (5.1.6) für den adjungierten Operator \mathfrak{D}^* der Doppler-Transformation \mathfrak{D} :

$$\mathfrak{D}^* g(y) = \int_{\Gamma} g\left(\alpha, \frac{y-\alpha}{\|y-\alpha\|}\right) \frac{y-\alpha}{\|y-\alpha\|^3} d\alpha. \quad (5.1.9)$$

Wie man durch einen Vergleich der Formeln (4.1.1) und (5.1.9) leicht sieht, unterscheiden sich die adjungierten Operatoren der Cone Beam Transformation \mathcal{D}^* und der Doppler-Transformation \mathfrak{D}^* im Fall $n = 3$ formal nur dadurch, dass bei \mathfrak{D}^* eine Multiplikation mit einem Vektor $\frac{y-\alpha}{\|y-\alpha\|}$ hinzukommt, die dafür sorgt, dass $\mathfrak{D}^* g(y) \in \mathbb{R}^3$ während $\mathcal{D}^* g(y) \in \mathbb{R}$ gilt.

In einigen Fällen wird später auf die folgenden abkürzenden Schreibweisen für die n -dimensionale Radon- und Doppler-Transformation sowie deren adjungierte Operatoren zurückgegriffen:

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}f(\theta, s), \quad \mathcal{R}_\theta : L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2([-1, 1]) \quad (5.1.10a)$$

$$\mathcal{R}_\theta^* g(x) = g(\langle x, \theta \rangle), \quad \mathcal{R}_\theta^* : L^2([-1, 1]) \rightarrow L^2(\Omega^n) \quad (5.1.10b)$$

$$\mathfrak{D}_\alpha f(\theta) = \mathfrak{D}f(\alpha, \theta), \quad \mathfrak{D}_\alpha : L^2(\Omega^3, \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(S^2) \quad (5.1.10c)$$

$$\mathfrak{D}_\alpha^* g(x) = |x-a|^{-3} g\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right)(x-a), \quad \mathfrak{D}_\alpha^* : L^2(S^2) \rightarrow L^2(\Omega^3, \mathbb{R}^3) \quad (5.1.10d)$$

Dabei ist $\Omega^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ mit $\partial\Omega^n = S^{n-1}$ wie in Satz 5.1.3 das Rekonstruktionsgebiet.

Einfache Eigenschaften

Die einfachste Eigenschaft, die sich für die Doppler-Transformation herleiten lässt, ist die Linearität. Für $f, g : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(f+g)(\alpha, \theta) &= \int_0^\infty \langle (f+g)(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt = \int_0^\infty \langle f(\alpha+t\theta) + g(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \langle f(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt + \int_0^\infty \langle g(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt = \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) + \mathfrak{D}g(\alpha, \theta). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Die Linearität kann analog für die Cone Beam Transformation \mathcal{D} gezeigt werden. Wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \langle f(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt &= \underbrace{\int_0^\infty \langle f(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt}_{=\mathfrak{D}f(\alpha, \theta)} + \int_{-\infty}^0 \langle f(\alpha+t\theta), \theta \rangle dt \\ &= \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) - \int_{-\infty}^0 \langle f(\alpha+t\theta), -\theta \rangle dt \end{aligned}$$

lässt sich mit Hilfe der Substitution $t = -s$, $ds = -dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt = \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) - \mathfrak{D}f(\alpha, -\theta) \quad (5.1.12)$$

herleiten. Zusätzlich weiß man durch die Art der Messung, dass das Objekt – wenn überhaupt – nur in einer der beiden Richtungen θ oder $-\theta$ von einer Ultraschallwelle getroffen werden kann, d.h. einer der beiden Summanden auf der rechten Seite ist für festes α Null.

Im Vergleich dazu gilt mit der gleichen Substitution wie oben für die Cone Beam Transformation

$$\mathcal{D}f(\alpha, -\theta) = \int_0^{\infty} f(\alpha + t(-\theta)) dt = \int_0^{-\infty} f(\alpha + s\theta) (-ds) = \int_{-\infty}^0 f(\alpha + t\theta) dt$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha + t\theta) dt = \mathcal{D}f(\alpha, \theta) + \mathcal{D}f(\alpha, -\theta) .$$

Auch hier ist aufgrund der Messgeometrie bekannt, dass einer der beiden Summanden auf der rechten Seite Null sein muss. Trotzdem wird schon durch einen Vergleich mit Gleichung (5.1.12) klar, dass sich Aussagen für die Cone Beam Transformation nicht in jedem Fall auf die Doppler-Transformation übertragen lassen.

Für die Doppler-Transformation ist zudem entscheidend, von welchem der beiden Schnittpunkte einer Linie mit der Abtastkurve die Messung beginnt. Um dies zu verdeutlichen, seien α und β die Schnittpunkte zwischen einer Linie von α in Richtung θ und der Abtastkurve Γ , d.h.

$$\beta = \alpha + \eta\theta, \quad \eta \geq 0 .$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) &= \int_0^{\infty} \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt = \int_0^{\eta} \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt = - \int_0^{\eta} \langle f(\alpha - t(-\theta)), -\theta \rangle dt \\ &= - \int_0^{\eta} \langle f(\beta - \eta\theta - t(-\theta)), -\theta \rangle dt = - \int_0^{\eta} \langle f(\beta + (\eta - t)(-\theta)), -\theta \rangle dt \\ &\stackrel{s=\eta-t}{=} - \int_0^{\eta} \langle f(\beta + s(-\theta)), -\theta \rangle ds = -\mathfrak{D}f(\beta, -\theta) , \end{aligned}$$

d.h. $\mathfrak{D}f(\alpha, \theta) = -\mathfrak{D}f(\beta, -\theta)$.

Wie man an dieser kurzen Rechnung sieht, unterscheiden sich die Messungen von $\mathfrak{D}f(\alpha, \theta)$ und $\mathfrak{D}f(\beta, -\theta)$ gerade durch das Vorzeichen, d.h. $\mathfrak{D}f(\alpha, \theta) = -\mathfrak{D}f(\beta, -\theta)$. Die Werte von f an einem beliebigen Punkt x auf der Linie sind selbstverständlich für beide Messungen gleich, die

Richtung, in die der Vektor projiziert wird, ist aber genau entgegengesetzt, unterscheidet sich also durch ein Minus.

Für die Cone Beam Transformation spielt die Richtung des Strahls keine Rolle, da mit der gleichen Substitution wie oben

$$\begin{aligned}\mathcal{D}f(\alpha, \theta) &= \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt = \int_0^\eta f(\alpha + t\theta) dt \\ &= \int_0^\eta f(\alpha - t(-\theta)) dt = \int_0^\eta f(\beta - \eta\theta - t(-\theta)) dt \\ &= \int_0^\eta f(\beta + s(-\theta)) ds = \mathcal{D}f(\beta, -\theta),\end{aligned}$$

also $\mathcal{D}f(\alpha, \theta) = \mathcal{D}f(\beta, -\theta)$ gilt.

Bemerkung. Die oben angestellte Überlegung führt dazu, dass das Integral über die komplette dreidimensionale Einheitssphäre der Doppler-Transformation gerade Null ergibt, also keine Rekonstruktion ermöglicht. In diesem Fall muss man die Messungen auf die halbe Einheitssphäre beschränken. Gleiches gilt auch für Abtastkurven, die in einer Ebene liegen und für die man lediglich die Messungen über die in der Abtastebene liegenden Richtungen betrachtet.

Im Fall der Cone Beam Transformation spielt die Richtung keine Rolle, so dass das Ergebnis der Integration über einen beliebigen Strahl nicht davon abhängt, in welchem der beiden Schnittpunkte man die Messung beginnt. Durch eine Integration über die komplette dreidimensionale Einheitssphäre oder eine ebene Abtastkurve erhält man also alle Daten doppelt, was für eine Rekonstruktion natürlich von Vorteil ist.

Homogenität und Fortsetzung auf \mathbb{R}^3

Es ist leicht ersichtlich, dass $\mathfrak{D}f$ auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ausgeweitet werden kann. Unter Verwendung der Substitution $s = \|y\| \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{\|y\|}$ mit $\frac{ds}{dt} = \|y\| \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\|y\|} ds$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}f(\alpha, y) &= \int_0^\infty \langle f(\alpha + ty), y \rangle dt = \int_0^\infty \left\langle f\left(\alpha + \frac{s}{\|y\|}y\right), y \right\rangle \frac{1}{\|y\|} ds \\ &= \int_0^\infty \left\langle f\left(\alpha + \frac{s}{\|y\|}y\right), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle ds = \mathfrak{D}f\left(\alpha, \frac{y}{\|y\|}\right),\end{aligned}$$

d.h.

$$\mathfrak{D}f(\alpha, y) = \mathfrak{D}f\left(\alpha, \frac{y}{\|y\|}\right). \quad (5.1.13)$$

Dies bedeutet gemäß Definition 3.1.1, dass die Doppler-Transformation *homogen vom Grad 0* in der zweiten Variablen ist.

Im Gegensatz dazu lässt sich unter Verwendung der gleichen Substitution leicht zeigen, dass die Cone Beam Transformation *homogen vom Grad -1* in der zweiten Variablen ist, denn

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f(\alpha, y) &= \int_0^\infty f(\alpha + ty) dt = \int_0^\infty f\left(\alpha + \frac{s}{\|y\|}y\right) \frac{1}{\|y\|} ds \\ &= \frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty f\left(\alpha + \frac{s}{\|y\|}y\right) ds = \frac{1}{\|y\|} \mathcal{D}f\left(\alpha, \frac{y}{\|y\|}\right), \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{D}f\left(\alpha, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{\|y\|} \mathcal{D}f(\alpha, y). \quad (5.1.14)$$

Fourier-Transformation

Die in Abschnitt 3.1.3 eingeführte Fourier-Transformation ist oft ein nützliches Hilfsmittel bei der Herleitung von Inversionsformeln, beispielsweise für die Röntgen- und Radon-Transformation mit Hilfe des Fourier slice theorem 3.3.1 oder für die Cone Beam Transformation in der Inversionsformel von Tuy (4.2.3). Für letztere zeigen Natterer und Wübbeling in [32, Abschnitt 5.5.2, S.129ff] einer Idee in [55] folgend, dass die Methode von Grangeat, bei der die Radon'sche Inversionsformel (3.3.19) für \mathcal{R} mit der Formel von Grangeat (4.2.2) kombiniert wird, auch aus der Inversionsformel von Tuy hergeleitet werden kann.

Dazu wird auch die Fourier-Transformation von \mathcal{D} berechnet, wobei in der mit (\dagger) gekennzeichneten Gleichung ausgenutzt wird, dass \mathcal{D} gemäß Formel (5.1.14) homogen vom Grad -1 in der zweiten Variablen ist.

$$(\mathcal{D}f)^\wedge(\alpha, \xi) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{D}f)(\alpha, y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} dy$$

$$\text{Substitution: } y = r\theta, \int_{\mathbb{R}^3} dy = \int_{S^2} \int_0^\infty r^2 dr d\theta$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty (\mathcal{D}f)(\alpha, r\theta) e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} r^2 dr d\theta$$

$$\stackrel{(\dagger)}{=} (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty (\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} r dr d\theta$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} (\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) \int_{-\infty}^\infty \frac{r + |r|}{2} e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} dr d\theta, \quad \text{da} \quad \int_0^\infty r dr = \int_{-\infty}^\infty \frac{r + |r|}{2} dr$$

$$= i\pi (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} (\mathcal{D}f)(\alpha, \theta) \delta'(\langle \xi, \theta \rangle) d\theta + \dots,$$

wobei die Punkte laut [32] für eine gerade Funktion von ξ stehen. Auf die weiteren Umformungen, die schließlich zur Methode von Grangeat führen, soll hier verzichtet werden. Nachfolgend wird nun die die Fourier-Transformation für die Doppler-Transformation berechnet, um die Möglichkeit einer darauf beruhenden Inversionsformel für \mathfrak{D} zu prüfen. Die ersten Schritte verlaufen dabei vollkommen analog, erst in der mit (\dagger) gekennzeichneten Umformung wird stattdessen verwendet, dass \mathfrak{D} homogen vom Grad 0 in der zweiten Variablen ist.

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, \xi) &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathfrak{D}f(\alpha, y) e^{-i\langle \xi, y \rangle} dy \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty \mathfrak{D}f(\alpha, r\theta) e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} r^2 dr d\theta \\
&\stackrel{(\dagger)}{=} (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \int_0^\infty \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} r^2 dr d\theta \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} dr d\theta. \tag{5.1.15}
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$(\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, -\xi) = (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 e^{ir\langle \xi, \theta \rangle} dr d\theta. \tag{5.1.16}$$

Eine Addition dieser beiden Gleichungen liefert:

$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, \xi) + (\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, -\xi) \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle} dr d\theta + (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 e^{ir\langle \xi, \theta \rangle} dr d\theta \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 (e^{ir\langle \xi, \theta \rangle} + e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle}) dr d\theta.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der *Formel von Euler*

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi, \quad \sin \phi = \frac{1}{2i} (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \quad \text{und} \quad \cos \phi = \frac{1}{2} (e^{i\phi} + e^{-i\phi})$$

ergibt sich wegen

$$\int_0^\infty r^2 (e^{ir\langle \xi, \theta \rangle} + e^{-ir\langle \xi, \theta \rangle}) dr = 2 \int_0^\infty r^2 \cos(r\langle \xi, \theta \rangle) dr$$

die Gleichung

$$(\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, \xi) + (\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, -\xi) = 2(2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 \cos(r \langle \xi, \theta \rangle) dr d\theta .$$

Analog gilt

$$(\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, \xi) - (\mathfrak{D}f)^\wedge(\alpha, -\xi) = (-2i)(2\pi)^{-3/2} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \theta) \int_0^\infty r^2 \sin(r \langle \xi, \theta \rangle) dr d\theta .$$

Die auftretenden Integrale sind dabei im Sinne von Distributionen zu verstehen, was aber für die Richtigkeit der entsprechenden Umformungen nicht relevant ist. Leider konnten zum jetzigen Zeitpunkt keine weiteren Vereinfachungen der auftretenden Integrale oder zusätzliche Formeln gefunden werden, die eine Inversion der Doppler-Transformation \mathfrak{D} mit Hilfe der Fourier-Transformation ermöglicht hätten. Auch ein Fourier slice theorem ist weder für die dreidimensionale Cone Beam noch für die Doppler-Transformation bekannt, so dass Fouriertechniken oder -methoden, wie beispielsweise bei der Radon- oder Röntgentransformation, keine Alternative darstellen.

5.1.3 Verallgemeinerte Formel von Grangeat

In Satz 4.2.1 wurde die für die Inversion der Cone Beam Transformation äußerst wichtige Formel von Grangeat angegeben, die für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, einen Einheitsvektor $\omega \in S^2$ und einen Quellpunkt $\alpha \in \Gamma$

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\omega, s) \right|_{s=\langle \alpha, \omega \rangle} = - \int_{S^2} \mathcal{D}f(\alpha, \theta) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta \quad (4.2.2)$$

lautet. Sie stellt einen relativ einfachen Zusammenhang zwischen Radon-Transformation \mathcal{R} , für die Inversionsformeln bekannt sind, und Cone Beam Transformation \mathcal{D} her, durch den die Herleitung einer Inversionsformel für \mathcal{D} ermöglicht wird. In diesem Abschnitt wird es nun das Ziel sein, die Formel von Grangeat auf Vektorfelder zu übertragen und zu evaluieren, ob sich damit eine Inversionsformel für die Doppler-Transformation analog zum Vorgehen in Abschnitt 4.2.1 für \mathcal{D} herleiten lässt. Abstrakter formuliert wäre dazu nicht unbedingt ein Zusammenhang zwischen \mathcal{R} und \mathfrak{D} notwendig, sondern zwischen einer beliebigen Integraltransformation mit bekannter Inversionsformel und \mathfrak{D} .

Schuster gelang es in [41] die Formel von Grangeat auf Tensorfelder zu erweitern. Die dazu notwendigen Definitionen für die allgemeine Cone Beam Transformation \mathbf{D}_m und den zugehörigen adjungierten Operator \mathbf{D}_m^* sind in Definition 5.1.1 beziehungsweise den Formeln (5.1.1) und (5.1.7) gegeben. In diesem Fall wird mit \mathcal{R} die n -dimensionale Radon-Transformation bezeichnet.

Satz 5.1.4 (Formel von Grangeat für Tensorfelder). Sei $n \geq 2$ und $\mathbf{f} \in C_0^{(n-2)}(\Omega^n, \mathcal{S}^m)$, wobei \mathcal{S}^m die Menge aller symmetrischen Tensoren der Stufe m ist. Dann gilt:

$$\frac{\partial^{(n-2)}}{\partial s^{(n-2)}} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s = \langle \alpha, \theta \rangle) = (-1)^{n-2} \int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_m \mathbf{f}(\alpha, \omega) \delta^{(n-2)}(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega \quad (5.1.17)$$

mit $\alpha \in \Gamma$, $\theta \in S^{n-1}$ und

$$f_\alpha(x) = \langle \mathbf{f}(x), \|x - \alpha\|^{-m} (x - \alpha)^m \rangle = f_{i_1 \dots i_m} \|x - \alpha\|^{-m} (x - \alpha)^{i_1} \dots (x - \alpha)^{i_m}. \quad (5.1.18)$$

Beweis. Der hier angegebene Beweis aus [41] folgt der Beweisskizze der klassischen Formel von Grangeat aus [32, Abschnitt 2.3, S.23]. Für $\psi \in L^2([-1, +1])$ erhält man mit Formel (5.1.10b)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) \psi(s) ds &= \int_{\Omega^n} f_\alpha(x) \psi(\langle x, \theta \rangle) dx \\ &= \int_{\Omega^n} \langle \mathbf{f}(x), \|x - \alpha\|^{-m} (x - \alpha)^m \rangle \psi(\langle x, \theta \rangle) dx. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Definition 5.1.1 von $\mathbf{D}_{m,\alpha}^*$ und $h \in L^2(S^{n-1})$ ergibt sich

$$\int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_{m,\alpha} \mathbf{f}(\omega) h(\omega) d\omega = \int_{\Omega^n} \langle \mathbf{f}(x), \|x - \alpha\|^{-m} (x - \alpha)^m \rangle h\left(\frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) dx.$$

Mit $h(\omega) = \delta^{(n-2)}(\langle \omega, \theta \rangle)$, $\psi(s) = \delta^{(n-2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle)$ und der Tatsache, dass $\delta^{(n-2)}$ homogen vom Grad $1 - n$ ist (vgl. Satz 3.1.2), ist Formel (5.1.17) bewiesen. \square

Für $m = 0$ ist dies die klassische Formel von Grangeat (4.2.2), allerdings für die n -dimensionale Cone Beam Transformation. Für $m = 1$ ergibt sich die Formel von Grangeat für n -dimensionale Vektorfelder $f \in C_0^{(n-2)}(\Omega^n, \mathbb{R}^n)$

$$\frac{\partial^{(n-2)}}{\partial s^{(n-2)}} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s = \langle \alpha, \theta \rangle) = (-1)^{n-2} \int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_1 f(\alpha, \omega) \delta^{(n-2)}(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega \quad (5.1.19)$$

mit

$$f_\alpha(x) = \left\langle f(x), \|x - \alpha\|^{-1} (x - \alpha) \right\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Für den Fall $n = 3$ erhält man schließlich den gewünschten Zusammenhang zwischen Radon- und Doppler-Transformation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s = \langle \alpha, \theta \rangle) &= (-1) \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega \\ &= \int_{S^2 \cap \{\langle \omega, \theta \rangle = 0\}} \langle \nabla_y \mathfrak{D}f(\alpha, y = \omega), \theta \rangle d\omega, \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

wobei die zweite Gleichung aus Eigenschaft (3.1.4) der Delta-Distribution folgt. Die Funktion $f_\alpha(x)$ ist die Projektion von f auf den Einheitsvektor $\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}$ vom Quellpunkt α in Richtung des Rekonstruktionspunktes x .

Prinzipiell könnte man jetzt für die Herleitung einer Inversionsformel analog vorgehen, wie beispielsweise in der Dissertation von Dietz [5] oder im Artikel von Louis [24, S.11], wobei nachfolgend die Doppler- statt der Cone Beam Transformation verwendet wird. Ausgangspunkt ist wieder die Inversionsformel der 3D-Radon-Transformation

$$f_\alpha(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, \langle x, \theta \rangle) d\theta$$

$$\stackrel{[24]}{\sim} f_\alpha(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s)}_{(*)} \delta'(s - \langle x, \theta \rangle) ds d\omega.$$

Um die Formel von Grangeat für die Doppler-Transformation (5.1.20)

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s = \langle \alpha, \theta \rangle) = (-1) \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega$$

anwenden zu können, hätte man an der mit (*) markierten Stelle gerne $\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, \langle \alpha, \omega \rangle)$ stehen. Für den skalaren Fall lässt sich das durch Variablentransformation $s = \langle \alpha, \theta \rangle$ mit erfüllter Tuy-Kirillov-Bedingung aus Definition 2.1.5 und dem Crofton-Symbol aus Definition 4.2.2 realisieren. Die Substitution $s = \langle \alpha, \theta \rangle$ führt dabei zu $\frac{ds}{d\alpha} = |\langle \alpha', \theta \rangle|$, wie es in Abschnitt 4.2.1 vorgeführt wurde.

Dieses Vorgehen schlägt aber für die Doppler-Transformation leider fehl, da die Projektion $f_\alpha(x) = \left\langle f(x), \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|} \right\rangle_{\mathbb{R}^3}$, d.h. die Objektfunktion von \mathcal{R} , ebenfalls vom Quellpunkt α abhängt und sich mit diesem verändert. Betrachtet man sich die Aussagen von Satz 5.1.4 genauer, so ist klar, dass diese Abhängigkeit der Projektion von α für alle $m > 0$ gilt und die Herleitung einer Inversionsformel mit Hilfe der Formel von Grangeat nur im Fall $m = 0$ auf die vorgestellte Art und Weise möglich ist. Daraus lässt sich auch folgern, dass die Tuy-Kirillov-Bedingung für $m > 0$ nicht ausreicht, um eine Inversion zu garantieren (vgl. [41]). Denisjuk präsentiert in [3] eine Verallgemeinerung der Tuy-Kirillov-Bedingung für Tensorfelder einer beliebigen Stufe m und leitet daraus Gleichungen her, die zur verallgemeinerten Formel von Grangeat (5.1.17) sehr ähnlich sind. Für $n = 3$ muss nach Angaben von Denisjuk eine Ebene, die das Rekonstruktionsgebiet schneidet, mindestens $m + 1$ Schnittpunkte mit der Abtastkurve haben, was für den skalaren Fall $m = 0$ der normalen Tuy-Kirillov-Bedingung entspricht, für die Doppler-Transformation mit $m = 1$ aber zu mindestens zwei Schnittpunkten führt.

Bemerkung. Selbst wenn es möglich wäre, $f_\alpha(x)$ mit Hilfe von Formel (5.1.20) zu berechnen, so muss aus dem Skalarprodukt $\left\langle f(x), \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|} \right\rangle$ immer noch der Vektor $f(x)$ eindeutig bestimmt werden. Dazu muss es für einen festen Rekonstruktionspunkt x mindestens drei Quellpunkte α_i geben, so dass die normierten Vektoren $\frac{x-\alpha_i}{\|x-\alpha_i\|}$ linear unabhängig sind. Dies kann als zusätzliche Bedingung an die Abtastkurve Γ angesehen werden. Eine analoge Überlegung gilt natürlich auch für Tensoren beliebiger Stufe und in höherer Dimension (vgl. [41]).

Es sollte hier nicht unerwähnt bleiben, dass für einen einzelnen Kreis als Abtastkurve Γ für alle Rekonstruktionspunkte y in der Kreisebene keine drei solcher linear unabhängigen Vektoren gefunden werden können. Eine Rekonstruktion aus Daten, die von Quellpunkten auf einer Kreiskurve gemessen wurden, wie sie für die Cone Beam Transformation trotz nicht erfüllter Tuy-Kirillov-Bedingung gelingt, ist für die Doppler-Transformation also ausgeschlossen.

Nachdem nun auch dieser Weg über eine Erweiterung der Formel von Grangeat nicht zu einer Inversionsformel geführt hat, muss nach weiteren Möglichkeiten gesucht werden. Eine vielversprechende Alternative besteht in der Formel von Hamaker et al., auf die sich auch die Formel von Grangeat zurückführen lässt.

5.1.4 Verallgemeinerung der Formel von Hamaker et al.

Die Formel von Hamaker et al. aus [12] wird im Buch von Natterer und Wübbeling [32, Abschnitt 2.3, S.23] zur Herleitung der Formel von Grangeat benutzt und auch in dieser Arbeit wurde sie, ohne explizit benannt zu werden, im Beweis von Satz 5.1.4 verwendet.

Für die Cone Beam Transformation kann sie wie folgt angegeben werden. Sei h eine Funktion in \mathbb{R} , die homogen vom Grad $1 - n$ ist. Dann gilt:

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}f(\alpha, \omega) h(\langle \theta, \omega \rangle) d\theta = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(\theta, s) h(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds. \quad (5.1.21)$$

Eine Generalisierung von (5.1.21) auf die Doppler-Transformation ist ebenfalls möglich. Für die Herleitung werden folgende bekannte Schreibweisen verwendet

$$\mathbf{D}_{m,\alpha} \mathbf{f}(\theta) = \mathbf{D}_m \mathbf{f}(\alpha, \theta), \quad \mathbf{D}_{m,\alpha} : L^2(\Omega^n, \mathcal{S}^m) \rightarrow L^2(S^{n-1}), \quad (5.1.2)$$

$$\mathbf{D}_{m,\alpha}^* g(y) = \|y - \alpha\|^{1-n-m} g\left(\alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) (y - \alpha)^m, \quad \mathbf{D}_{m,\alpha}^* : L^2(S^{n-1}) \rightarrow L^2(\Omega^n, \mathcal{S}^m), \quad (5.1.8)$$

$$\mathcal{R}_\theta f(s) = \mathcal{R}f(\theta, s), \quad \mathcal{R}_\theta : L^2(\Omega^n) \rightarrow L^2([-1, 1]), \quad (5.1.10a)$$

$$\mathcal{R}_\theta^* g(x) = g(\langle x, \theta \rangle), \quad \mathcal{R}_\theta^* : L^2([-1, 1]) \rightarrow L^2(\Omega^n), \quad (5.1.10b)$$

die der Übersichtlichkeit halber oben noch einmal zusammengefasst wurden. Als Grundlage ist zudem die Herleitung für den adjungierten Operator \mathfrak{D}^* der Doppler-Transformation in Formel (5.1.6) interessant.

Mit der Definition von f_α in (5.1.18) und unter Verwendung der Gleichungen

$$\langle \mathcal{R}_\theta f_\alpha, \psi \rangle_{L^2([-1, 1])} = \langle f_\alpha, \mathcal{R}_\theta^* \psi \rangle_{L^2(\Omega^n)} \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{D}_\alpha \mathbf{f}, h \rangle_{L^2(S^{n-1})} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{D}_\alpha^* h \rangle_{L^2(\Omega^n, \mathcal{S}^m)}$$

für Radon- und allgemeine Cone Beam Transformation sowie ihre adjungierten Operatoren berechnet man

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) \psi(s) ds = \int_{\Omega^n} f_\alpha(x) \psi(\langle x, \theta \rangle) dx = \int_{\Omega^n} \left\langle \mathbf{f}(x), \frac{(x - \alpha)^m}{\|x - \alpha\|^m} \right\rangle \psi(\langle x, \theta \rangle) dx$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{f}(\omega) h(\omega) d\omega &= \int_{\Omega^n} \left\langle \mathbf{f}(x), \frac{(x-\alpha)^m}{\|x-\alpha\|^{-(1-n-m)}} \right\rangle h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right) dx \\ &= \int_{\Omega^n} \left\langle \mathbf{f}(x), \frac{(x-\alpha)^m}{\|x-\alpha\|^m} \right\rangle \frac{1}{\|x-\alpha\|^{n-1}} h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right) dx . \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind offensichtlich gleich, wenn

$$\psi(\langle x, \theta \rangle) = \frac{1}{\|x-\alpha\|^{n-1}} h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right)$$

gilt. Seien nun $\psi(s) = g(s - \langle \alpha, \theta \rangle)$ und $h(\omega) = g(\langle \theta, \omega \rangle)$, wobei g homogen vom Grad $1-n$ sei. Dann ist

$$\psi(\langle x, \theta \rangle) = g(\langle x, \theta \rangle - \langle \alpha, \theta \rangle) = g(\langle x - \alpha, \theta \rangle)$$

und

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right) &= g\left(\left\langle \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}, \theta \right\rangle\right) = g\left(\frac{1}{\|x-\alpha\|} \langle x-\alpha, \theta \rangle\right) \\ &= \|x-\alpha\|^{n-1} g(\langle x-\alpha, \theta \rangle) = \|x-\alpha\|^{n-1} \psi(\langle x, \theta \rangle) . \end{aligned}$$

Damit kann Formel (5.1.21) verallgemeinert werden zu

$$\int_{S^{n-1}} \mathbf{D}_\alpha \mathbf{f}(\omega) g(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega = \int_{-1}^{+1} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) g(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds , \quad (5.1.22)$$

wobei g homogen vom Grad $1-n$ sein muss. Die Darstellung dieser Gleichung für die Doppler-Transformation mit $m=1$ und $n=3$ ändert sich nicht wesentlich

$$\int_{S^2} \mathfrak{D}_\alpha f(\omega) g(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega = \int_{-1}^{+1} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) g(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds , \quad (5.1.23)$$

allerdings gilt $f_\alpha(x) = \left\langle f(x), \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|} \right\rangle$ und die Funktion g muss homogen vom Grad -2 sein.

Anhand folgender Umformung lässt sich das Integral für die Radon-Transformation \mathcal{R} für eine Funktion $g(x) = g(-x)$ auch als Faltung schreiben:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) g(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta f_\alpha(s) g(\langle \alpha, \theta \rangle - s) ds \\ &= (\mathcal{R} f_\alpha(\theta, \cdot) *_s g(\cdot))(\langle \alpha, \theta \rangle) = (\mathcal{R}_\theta f_\alpha *_s g)(\langle \alpha, \theta \rangle) . \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

Für $g(x) = -g(-x)$ ändert sich lediglich das Vorzeichen. Da das Interesse dieser Arbeit hauptsächlich in der Inversion der Doppler-Transformation oder zumindest der Herleitung einer Rekonstruktionsmethode besteht, beschränkt sich das weitere Vorgehen auf den Fall $m = 1$ und $n = 3$.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Funktion, die homogen vom Grad -2 ist, zu finden, so dass man aus Formel (5.1.23) eine einfache Beziehung zwischen $\mathfrak{D}f$ und $\mathcal{R}f_\alpha$ herleiten kann.

Bei der Suche nach entsprechenden Funktionen denkt man schnell an die folgenden:

- δ' ,
- $h(s) = \frac{1}{s^2}$,
- $h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\sigma} |\sigma| d\sigma \Leftrightarrow h(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\sigma} |\sigma| d\sigma$.

Wie man im Beweis von Satz 5.1.4 erkennen kann, führt δ' auf die Formel von Grangeat für die Doppler-Transformation \mathfrak{D} (5.1.20):

$$\begin{aligned} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta'(\langle \theta, \omega \rangle) d\omega &= \int_{-1}^1 \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \delta'(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \delta(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds \\ &= - \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s = \langle \alpha, \theta \rangle) . \end{aligned}$$

Die Umformungen erhält man aus den Eigenschaften der Delta-Distribution δ und ihrer Ableitung δ' .

Für $h(s) = \frac{1}{s^2}$ ergibt sich wegen $h(s) = h(-s)$ unter Zuhilfenahme der Umformung (5.1.24) und partieller Integration für die rechte Seite von (5.1.23):

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\theta f_\alpha *_s h)(\langle \alpha, \theta \rangle) &= \left(\mathcal{R}f_\alpha(\theta, \cdot) *_s \frac{1}{\cdot^2} \right)(\langle \alpha, \theta \rangle) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \frac{1}{(\langle \alpha, \theta \rangle - s)^2} ds \\ &= \underbrace{\left[\mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \frac{1}{\langle \alpha, \theta \rangle - s} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0, \text{ kompakter Träger}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \frac{1}{\langle \alpha, \theta \rangle - s} ds \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, s) \frac{1}{\langle \alpha, \theta \rangle - s} ds \\ &= -\pi \mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, \cdot) \right)(\langle \alpha, \theta \rangle) . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet \mathcal{H} die in Gleichung (3.3.12) eingeführte Hilbert-Transformation. Auf der linken Seite der Formel (5.1.23) bietet sich keine Möglichkeit einer Vereinfachung, so dass man lediglich

$$\int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{\langle\langle \theta, \omega \rangle\rangle^2} d\omega = \int_{S^2} \frac{\mathfrak{D}f(\alpha, \omega)}{\langle\langle \theta, \omega \rangle\rangle^2} d\omega$$

schreiben kann. Insgesamt führt also die Verwendung von $h(s) = \frac{1}{s^2}$ in der Formel von Hamaker et al. für die Doppler-Transformation auf

$$\mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f_\alpha(\theta, \cdot) \right) (\langle\langle \alpha, \theta \rangle\rangle) = -\frac{1}{\pi} \int_{S^2} \frac{\mathfrak{D}f(\alpha, \omega)}{\langle\langle \theta, \omega \rangle\rangle^2} d\omega \quad (5.1.25)$$

Weiterhin kann man die Äquivalenz der beiden von δ' verschiedenen Darstellungen für $h(s)$ zeigen. Man sucht eine Darstellung von $h(s)$, so dass

$$\mathcal{R}f(\theta, s) *_s h(s) = \mathcal{H} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\theta, s) \quad (5.1.26)$$

gilt. Mit der Fourier-Transformation der Hilbert-Transformation aus Formel (3.3.13) und der Ableitungsregel (3.1.21) für die Fourier-Transformation gilt:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\theta, s) \right\} (\xi) = i\xi \mathcal{F} \{ \mathcal{R}f(\theta, s) \} (\xi) . \quad (5.1.27)$$

Damit erhält man durch Anwendung der Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Gleichung (5.1.26):

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \{ \mathcal{R}f(\theta, s) *_s h(s) \} (\xi) &= \mathcal{F} \left\{ \mathcal{H} \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\theta, s) \right\} (\xi) \\ \Leftrightarrow \mathcal{F} \{ \mathcal{R}f(\theta, s) \} (\xi) \cdot \mathcal{F} \{ h(s) \} (\xi) &\stackrel{(3.3.13)}{=} -i \operatorname{sgn}(\xi) \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}f(\theta, s) \right\} (\xi) \\ &\stackrel{(5.1.27)}{=} \xi \operatorname{sgn}(\xi) \mathcal{F} \{ \mathcal{R}f(\theta, s) \} (\xi) , \end{aligned}$$

so dass

$$\mathcal{F} \{ h(s) \} (\xi) = \xi \operatorname{sgn}(\xi) = |\xi|$$

gelten muss. Anwendung der inversen Fouriertransformation liefert

$$h(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\xi} |\xi| d\xi . \quad (5.1.28)$$

Andererseits folgt aus den Eigenschaften der Faltung sowie aus Formel (3.3.13) für die Hilbert-Transformation:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f\right)(\theta, \langle\alpha, \theta\rangle) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\theta, s)}{\langle\alpha, \theta\rangle - s} ds = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle\alpha, \theta\rangle - s} \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\theta, s) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f(\theta, s) *_s \frac{1}{s}\right)(\langle\alpha, \theta\rangle) \stackrel{(3.1.14)}{=} \frac{1}{\pi} \left(\mathcal{R}f(\theta, s) *_s \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s}\right)\right)(\langle\alpha, \theta\rangle) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\mathcal{R}f(\theta, s) *_s \frac{-1}{s^2}\right)(\langle\alpha, \theta\rangle) = \left(\mathcal{R}f(\theta, s) *_s \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\pi s}\right)\right)(\langle\alpha, \theta\rangle). \end{aligned}$$

Daraus wird ersichtlich, dass für $h(s)$ gilt:

$$h(s) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\pi s}\right) = -\frac{1}{\pi s^2}. \quad (5.1.29)$$

Damit weiß man, dass $h(s)$ eine der beiden in den Formeln (5.1.28) und (5.1.29) genannten Darstellungen besitzen muss, um Gleichung (5.1.26) zu erfüllen.

Aus Gründen der Vollständigkeit sei auch in diesem Fall die Formel von Hamaker et al. für die Doppler-Transformation (5.1.23) bei Wahl von $h(s)$ wie in Gleichung (5.1.29) angegeben:

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{R}f_{\alpha}(\theta, \cdot)\right)(\langle\alpha, \theta\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\langle\theta, \omega\rangle r} |r| dr d\omega. \quad (5.1.30)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung erinnert stark an die bei der Herleitung der Fourier-Transformationen von \mathcal{D} und \mathfrak{D} ab Seite 95 entwickelten Formeln, stimmt aber nicht mit ihnen überein und ermöglicht auch keine weiteren Vereinfachungen.

Leider hat auch dieser Weg nicht zur erhofften Inversionsformel für die Doppler-Transformation geführt, allerdings lassen sich aus der Formel von Hamaker et al. (5.1.23) weitere Beziehungen zwischen Radon- und Doppler-Transformation herleiten.

5.1.5 Weitere Beziehungen zwischen Radon- und Doppler-Transformation

Aus der Herleitung zur verallgemeinerten Formel von Hamaker et al. (5.1.22) weiß man, dass für den Fall $n = 3$ und $m = 1$

$$\int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) h(\omega) d\omega = \int_{\Omega^3} \left\langle f(x), \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|^3} \right\rangle h\left(\frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) dx$$

gilt. Man definiert nun $g_\alpha^k(x) := \left\langle f(x), \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|^k} \right\rangle$ und folgt dem gleichen Schema wie bei der oben genannten Herleitung. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta g_\alpha^k(s) \psi(s) ds &= \langle \mathcal{R}_\theta g_\alpha^k, \psi \rangle_{L^2([-1,1])} = \langle g_\alpha^k, \mathcal{R}_\theta^* \psi \rangle_{L^2(\Omega^3)} \\ &= \int_{\Omega^3} g_\alpha^k(x) \psi(\langle x, \theta \rangle) dx = \int_{\Omega^3} \left\langle f(x), \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|^k} \right\rangle \psi(\langle x, \theta \rangle) dx. \end{aligned}$$

Damit sind die rechten Seiten gleich, wenn

$$h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right) = \frac{1}{\|x-\alpha\|^{k-3}} \psi(\langle x, \theta \rangle)$$

erfüllt ist. Wählt man $\psi(s) = \phi(s - \langle \alpha, \theta \rangle)$ und $h(\omega) = \phi(\langle \omega, \theta \rangle)$, wobei ϕ homogen vom Grad $-(3-k) = k-3$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \psi(\langle x, \theta \rangle) &= \phi(\langle x, \theta \rangle - \langle \alpha, \theta \rangle) = \phi(\langle x - \alpha, \theta \rangle) = \frac{1}{\|x-\alpha\|^{3-k}} \|x-\alpha\|^{3-k} \phi(\langle x - \alpha, \theta \rangle) \\ &= \frac{1}{\|x-\alpha\|^{3-k}} \phi\left(\left\langle \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}, \theta \right\rangle\right) = \frac{1}{\|x-\alpha\|^{3-k}} h\left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}\right). \end{aligned}$$

Für ϕ homogen vom Grad $k-3$ folgt daraus:

$$\int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta g_\alpha^k(s) \phi(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \phi(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega. \quad (5.1.31)$$

Die p -te Ableitung der Dirac'schen Deltafunktion $\delta^{(p)}$ ist nach Satz 3.1.2 homogen vom Grad $-p-1$, $p \geq 0$. Demnach ist wegen

$$-p-1 = k-3 \quad \Leftrightarrow \quad p = -k+2, \quad k \leq 2$$

$\delta^{(-k+2)}$ homogen vom Grad $k-3$. Damit kann man in Gleichung (5.1.31) $\phi = \delta^{(-k+2)}$ setzen und erhält für $k \leq 2$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta g_\alpha^k(s) \delta^{(-k+2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds &= \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta^{(-k+2)}(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \\ \Leftrightarrow \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \delta^{(-k+2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds &= \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta^{(-k+2)}(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega. \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

Diese Gleichung kann auch direkt gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta g_\alpha^k(s) \delta^{(-k+2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds \\
&= \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \delta^{(-k+2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds \\
&= \int_{-1}^1 \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle f(x), \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|^k} \right\rangle \delta(s - \langle x, \theta \rangle) dx \delta^{(-k+2)}(s - \langle \alpha, \theta \rangle) ds \\
&= \int_{\Omega^3} \left\langle f(x), \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|^k} \right\rangle \delta^{(-k+2)}(\langle x - \alpha, \theta \rangle) dx \\
&= \int_{\Omega^3} \langle f(x), x - \alpha \rangle \|x - \alpha\|^{-k} \delta^{(-k+2)}(\langle x - \alpha, \theta \rangle) dx
\end{aligned}$$

Erweitert man nun mit $\|x - \alpha\|^3$ und nutzt aus, dass $\delta^{(-k+2)}$ homogen vom Grad $k - 3$ ist, so erhält man

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^3} \langle f(x), x - \alpha \rangle \|x - \alpha\|^{-k} \delta^{(-k+2)}(\langle x - \alpha, \theta \rangle) dx \\
&= \int_{\Omega^3} \langle f(x), x - \alpha \rangle \frac{\|x - \alpha\|^{3-k}}{\|x - \alpha\|^3} \delta^{(-k+2)}(\langle x - \alpha, \theta \rangle) dx \\
&= \int_{\Omega^3} \langle f(x), x - \alpha \rangle \frac{1}{\|x - \alpha\|^3} \delta^{(-k+2)} \left(\left\langle \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}, \theta \right\rangle \right) dx \\
&= \int_{\Omega^3} \left\langle f(x), \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|^3} \right\rangle \delta^{(-k+2)} \left(\left\langle \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}, \theta \right\rangle \right) dx \\
&\stackrel{(\dagger)}{=} \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta^{(-k+2)}(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega,
\end{aligned}$$

wobei (\dagger) wegen der Substitution $x = a + t\omega$ gilt. Nutzt man nun in Gleichung (5.1.32) die Eigenschaften der Delta-Distribution im Eindimensionalen aus, so kann sie weiter umgeformt

werden:

$$\begin{aligned}
& (-1)^{-k+2} \frac{\partial^{-k+2}}{\partial s^{-k+2}} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta^{(-k+2)}(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \\
\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} & (-1)^k \frac{\partial^{-k+2}}{\partial s^{-k+2}} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = (-1)^{-k+2} \int_{\langle \omega, \theta \rangle=0} \frac{\partial^{-k+2}}{\partial \omega^{-k+2}} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) d\sigma \\
\Leftrightarrow & (-1)^k \frac{\partial^{-k+2}}{\partial s^{-k+2}} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = (-1)^k \int_{\langle \omega, \theta \rangle=0} (\omega^\top \nabla)^{-k+2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) d\omega \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial^{-k+2}}{\partial s^{-k+2}} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{\langle \omega, \theta \rangle=0} \left(\sum_{i=1}^3 \theta_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} \right)^{-k+2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) d\omega,
\end{aligned}$$

wobei (*) wegen Formel (3.1.6) gilt (vgl. auch [9, S.220, Formel (8)]). In dieser Form wird diese Gleichung auch bei Denisjuk in [3] verwendet. Durch Einsetzen von Werten $k \leq 2$ erhält man beispielsweise folgende Formeln, die den in [3] hergeleiteten zum Teil sehr ähneln:

$$\begin{aligned}
k = 2 : & \quad \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^2} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \\
k = 1 : & \quad -\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|} \right\rangle \right) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta'(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \quad (\text{vgl. (5.1.20)}) \\
k = 0 : & \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} \mathcal{R}_\theta (\langle f(\cdot), \cdot - \alpha \rangle) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta''(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \\
k = -1 : & \quad -\frac{\partial^3}{\partial s^3} \mathcal{R}_\theta (\langle f(\cdot), \cdot - \alpha \rangle \|\cdot - \alpha\|) (s) \Big|_{s=\langle \alpha, \theta \rangle} = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \delta'''(\langle \omega, \theta \rangle) d\omega \\
& \text{usw.}
\end{aligned}$$

Statt δ können natürlich auch andere Funktionen gewählt werden, die homogen vom Grad $k-3$ sind, z.B. $\eta(s) = \frac{1}{s^{3-k}}$. Damit erhält man durch Einsetzen der Definition von g_α^k :

$$\int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^k} \right\rangle \right) (s) \frac{1}{(s - \langle \alpha, \theta \rangle)^{3-k}} ds = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{(\langle \omega, \theta \rangle)^{3-k}} d\omega.$$

Setzt man wieder verschiedene Werte für k ein, so ergibt sich unter Verwendung der Hilbert-

Transformation \mathcal{H} :

$$\begin{aligned}
k = 3 : \quad & \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^3} \right\rangle \right) (s) ds = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) d\omega \\
& \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle f(x), \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|^3} \right\rangle dx = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) d\omega \\
k = 2 : \quad & \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^2} \right\rangle \right) (s) \frac{1}{s - \langle \alpha, \theta \rangle} ds = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{\langle \omega, \theta \rangle} d\omega \\
& \Leftrightarrow -\pi \mathcal{H} \left(\mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|^2} \right\rangle \right) (s) \right) (\langle \alpha, \theta \rangle) = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{\langle \omega, \theta \rangle} d\omega \\
k = 1 : \quad & \int_{-1}^1 \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|} \right\rangle \right) (s) \frac{1}{(s - \langle \alpha, \theta \rangle)^2} ds = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{(\langle \omega, \theta \rangle)^2} d\omega \\
& \Leftrightarrow -\pi \mathcal{H} \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}_\theta \left(\left\langle f(\cdot), \frac{\cdot - \alpha}{\|\cdot - \alpha\|} \right\rangle \right) (s) \right) (\langle \alpha, \theta \rangle) = \int_{S^2} \mathfrak{D}f(\alpha, \omega) \frac{1}{(\langle \omega, \theta \rangle)^2} d\omega, \\
& \text{usw.}
\end{aligned}$$

wobei eine Analogie zur Formel von Gelfand und Goncharov in [32, S.25] zu erkennen ist.

Zwar führen auch diese Ansätze auf Zusammenhänge zwischen Radon- und Doppler-Transformation, leider kann aber keine dieser Gleichungen zur Inversion von \mathfrak{D} verwendet werden. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt versucht, den engen Zusammenhang zwischen Cone Beam und Doppler-Transformation auszunutzen und die schon bestehenden, schnellen Algorithmen zur Rekonstruktionskernberechnung für den skalaren Fall, die in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 vorgestellt wurden, zu benutzen, um ein Vektorfeld aus den mit Hilfe der Doppler-Transformation gemessenen Daten zu rekonstruieren.

5.2 Verwendung des Mollifiers und des Rekonstruktionskerns der Cone Beam Transformation für die Doppler-Transformation

Wie bereits erwähnt, ist eine Inversionsformel für die Doppler-Transformation zum jetzigen Zeitpunkt nicht bekannt, und wie aus den vorangegangenen Abschnitten aus Kapitel 5 klar wird, scheitern viele Versuche, eine solche analog zu einem bekannten Muster oder einer existierenden Formel herzuleiten. So führen weder Verallgemeinerungen der Formel von Grangeat (5.1.20) oder der Formel von Hamaker (5.1.23) noch Fouriertechniken (5.1.15) zum gewünschten Erfolg. Auch ein nicht-exaktes, aber funktionierendes Rekonstruktionsverfahren konnte bis dato nicht entwickelt werden und die aus der Tomographie bekannten Verfahren, die sich von

der in Abschnitt 4.2 vorgestellten Methode mit Hilfe der Approximativen Inversen unterscheiden, lassen sich ebensowenig auf die Doppler-Transformation anwenden. So wird beispielsweise aus der Beschreibung des bekannten FDK-Algorithmus (Feldkamp, Davis, Kress, siehe [7]) in [32, S.128] schnell klar, dass der Algorithmus nicht für die vektorielle Cone Beam Transformation \mathbf{D}_1 und damit auch nicht für deren Spezialfall für $n = 3$, die Doppler-Transformation \mathfrak{D} , funktionieren kann. Der Integrand von \mathbf{D}_1 beziehungsweise \mathfrak{D} hängt stark vom Richtungsvektor θ der Ultraschallwelle ab, eine Tatsache, die im FDK-Algorithmus explizit missachtet wird. Auch die Verfahren von Norton in [33] und [34] und Prince in [35] und [36] sind nur für zwei- beziehungsweise dreidimensionale Vektorfelder in der parallelen Geometrie geeignet. Die dort verwendeten Integraltransformationen entsprechen leider nicht \mathbf{D}_1 oder \mathfrak{D} . Lade et al. verallgemeinern in [17] den Ansatz von Norton auf dreidimensionale Vektorfelder, wobei sie den Ausdruck „Doppler-Transformation“ für Messungen der Projektionen des Vektorfeldes in oder senkrecht zur Richtung des Strahls in der parallelen Geometrie benutzen. Bedauerlicherweise kann keiner der oben genannten Ansätze so modifiziert werden, dass er auf die Vektortomographie unter Benutzung der Kegelstrahlgeometrie, also für die vektorielle Cone Beam Transformation, angewendet werden kann.

Aus diesem Grund soll im Folgenden ein neues Verfahren zur Rekonstruktion von Vektorfeldern aus Daten der Doppler-Transformation vorgestellt werden. Eine erste Idee zu diesem Verfahren wurde in [41] veröffentlicht, eine detailliertere Beschreibung findet sich in [43]. Man bedient sich dabei der Methode der Approximativen Inversen aus Abschnitt 3.2, leitet eine Approximation der Doppler-Transformation her und macht sich schließlich den für die Cone Beam Transformation \mathcal{D} berechneten Kern für die Rekonstruktion aus Daten für \mathfrak{D} zu Nutzen. Das Vorgehen ähnelt in großen Teilen dem in den Abschnitten 4.2.1 und 4.2.2 im Zusammenhang mit \mathcal{D} beschriebenen, das hier noch einmal kurz wiederholt wird.

Ziel ist es, die skalare Funktion $f \in L^2(\Omega)$ als Lösung von $\mathcal{D}f = g$ bzw. eine Approximation f_γ an diese Lösung in der Form

$$f_\gamma(x) \approx f(x) = \langle g, \psi_\gamma(x) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2)}$$

zu schreiben, wobei ψ_γ der Rekonstruktionskern ist. Dazu reicht es aus, die Gleichung

$$\mathcal{D}^* \psi_\gamma = e_\gamma$$

für einen Mollifier $e_\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ zu lösen, denn dann ist

$$f_\gamma(x) = \langle f, e_\gamma \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \mathcal{D}^* \psi_\gamma(x) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathcal{D}f, \psi_\gamma(x) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2)} = \langle g, \psi_\gamma(x) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2)}. \quad (5.2.1)$$

Der Mollifier e_γ ist dabei eine glatte Funktion, für die die Eigenschaft

$$f_\gamma(x) := (f * e_\gamma)(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } \gamma \rightarrow 0 \quad (5.2.2)$$

gilt. Dabei bezeichnet $*$ die Faltung aus Definition 3.1.8. Als Mollifier für \mathcal{D} wird der dreidimensionale Gaußkern

$$e_\gamma(x, y) := (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{\gamma^3} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2\gamma^2}} \quad (4.2.13)$$

verwendet, wobei x den festen Rekonstruktionspunkt und y die Variable kennzeichnen. Man schreibt $e_\gamma(x, y)$ häufig auch in der Form $e_{\gamma, x}(y)$ oder $e_x(y)$, um die Abhängigkeiten deutlicher zum Ausdruck zu bringen. Der Rekonstruktionskern $\psi_\gamma(x) = \psi_\gamma(\alpha, \omega, x) \in L^2(\Gamma \times S^2)$ für einen Quellpunkt α auf der Abtastkurve Γ und einen Einheitsvektor $\omega \in S^2$ lässt sich für x im Rekonstruktionsgebiet Ω mittels

$$\psi_\gamma = \frac{1}{8\pi^2} T M_{\Gamma, \alpha} T \mathcal{D} e_\gamma \quad (4.2.10)$$

berechnen.

Um nun dieses Vorgehen auf die Doppler-Transformation \mathfrak{D} zu übertragen, ist es notwendig, statt eines einzelnen Mollifiers e_γ Mollifierfelder $\mathbf{E}_\gamma^j \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ durch

$$\mathbf{E}_\gamma^j(x, y) := e_\gamma(x, y) \cdot e_j, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (5.2.3)$$

zu definieren. Dabei sind $e_1 = (1, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0)^\top$ und $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ die kanonischen Einheitsvektoren des \mathbb{R}^3 . Analog zu Formel (5.2.2) lässt sich für eine vektorwertige Funktion $\vec{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und \mathbf{E}_γ^j die Gleichung

$$(\vec{f}_\gamma)_j(x) := (\vec{f} * \mathbf{E}_\gamma^j)(x) \rightarrow \vec{f}_j(x) \quad \text{für } \gamma \rightarrow 0 \quad (5.2.4)$$

herleiten. Denn für $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^\top$ mit $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, ist

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}, \mathbf{E}_\gamma^j(x, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} &= \int_{\Omega} \langle \vec{f}(y), \mathbf{E}_\gamma^j(x, y) \rangle_{\mathbb{R}^3} dy \\ &= \int_{\Omega} \langle \vec{f}(y), e_\gamma(x, y) \cdot e_j \rangle_{\mathbb{R}^3} dy \\ &= \int_{\Omega} e_\gamma(x, y) \langle \vec{f}(y), e_j \rangle_{\mathbb{R}^3} dy \\ &= \int_{\Omega} e_\gamma(x, y) f_j(y) dy \\ &= \langle f_j, e_\gamma(x, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} \stackrel{(5.2.1)}{=} f_{j, \gamma}(x). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Leider sind zum jetzigen Zeitpunkt keine exakten Rekonstruktionskerne $\Psi_\gamma^j(x) = \Psi_\gamma^j(\alpha, \omega, x)$, d.h. Lösungen der Gleichung

$$\mathfrak{D}^*(\Psi_\gamma^j(x))(y) = \mathbf{E}_\gamma^j(x, y)$$

für die Doppler-Transformation \mathfrak{D} bekannt. Allerdings ermöglicht die Struktur der Mollifierfelder \mathbf{E}_γ^j die Berechnung von Rekonstruktionskernen für die Transformation

$$\mathfrak{B} \vec{f}(\alpha, \theta) := \int_0^\infty \vec{f}(\alpha + t\theta) dt \quad (5.2.6)$$

mit Hilfe von Rekonstruktionskernen für \mathcal{D} .

Satz 5.2.1 (vgl. [43]). Sei ψ_γ der zum Mollifier e_γ gehörende Rekonstruktionskern der Cone Beam Transformation \mathcal{D} , so dass die Gleichung

$$\mathcal{D}^*(\psi_\gamma(x))(y) = e_\gamma(x, y)$$

gilt. Definiert man

$$\Psi_\gamma^j(\alpha, \omega, x) := \psi_\gamma(\alpha, \omega, x) e_j \in L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3), \quad (5.2.7)$$

so erhält man

$$\mathfrak{B}^*(\Psi_\gamma^j(x))(y) = \mathbf{E}_\gamma^j(x, y). \quad (5.2.8)$$

Die Funktion Ψ_γ^j ist also der zum Mollifierfeld \mathbf{E}_γ^j gehörende Rekonstruktionskern der Integraltransformation \mathfrak{B} . Der entsprechende adjungierte Operator \mathfrak{B}^* ist für $\vec{g} \in L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\mathfrak{B}^*\vec{g}(x) := \int_{\Gamma} \|x - \alpha\|^{-2} \vec{g}\left(\alpha, \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) d\alpha. \quad (5.2.9)$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Substitution $x = \alpha + t\omega$ lässt sich der adjungierte Operator \mathfrak{B}^* wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}\vec{f}, \vec{g} \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3)} &= \int_{\Gamma} \int_{S^2} \int_0^\infty \langle \vec{f}(\alpha + t\omega), \vec{g}(\alpha, \omega) \rangle dt d\omega d\alpha \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle \vec{f}(x), \vec{g}\left(\alpha, \frac{x - \alpha}{\|x - \alpha\|}\right) \right\rangle \|x - \alpha\|^{-2} dx d\alpha \\ &= \langle \vec{f}, \mathfrak{B}^*\vec{g} \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Eine weitere kurze Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^*[\Psi_\gamma^j(x)](y) &= \int_{\Gamma} \|y - \alpha\|^{-2} \Psi_\gamma^j\left(x; \alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) d\alpha \\ &= \int_{\Gamma} \|y - \alpha\|^{-2} \psi_\gamma\left(x; \alpha, \frac{y - \alpha}{\|y - \alpha\|}\right) d\alpha \cdot e_j \\ &= \mathcal{D}^*[\psi_\gamma(x)](y) \cdot e_j = e_\gamma(x, y) \cdot e_j = \mathbf{E}_\gamma^j(x, y). \end{aligned}$$

□

Man kann sich die Transformation \mathfrak{B} auch als komponentenweise Anwendung der skalaren Cone Beam Transformation \mathcal{D} auf die vektorwertige Funktion $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$ klarmachen:

$$\mathfrak{B}\vec{f}(\alpha, \theta) := \int_0^\infty \vec{f}(\alpha + t\theta) dt = \int_0^\infty \begin{pmatrix} f_1(\alpha + t\theta) \\ f_2(\alpha + t\theta) \\ f_3(\alpha + t\theta) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int_0^\infty f_1(\alpha + t\theta) dt \\ \int_0^\infty f_2(\alpha + t\theta) dt \\ \int_0^\infty f_3(\alpha + t\theta) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}f_1(\alpha, \theta) \\ \mathcal{D}f_2(\alpha, \theta) \\ \mathcal{D}f_3(\alpha, \theta) \end{pmatrix}.$$

Die Herleitung des adjungierten Operators kann dann in der Form

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{P}\vec{f}, \vec{g} \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3)} &= \int_{\Gamma} \int_{S^2} \langle \mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta), \vec{g}(\alpha, \theta) \rangle_{\mathbb{R}^3} d\theta d\alpha = \int_{\Gamma} \int_{S^2} \left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{D}f_1(\alpha, \theta) \\ \mathcal{D}f_2(\alpha, \theta) \\ \mathcal{D}f_3(\alpha, \theta) \end{pmatrix}, \vec{g}(\alpha, \theta) \right\rangle_{\mathbb{R}^3} d\theta d\alpha \\
&= \int_{\Gamma} \int_{S^2} \sum_{i=1}^3 \mathfrak{D}f_i(\alpha, \theta) g_i(\alpha, \theta) d\theta d\alpha = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathfrak{D}f_i(\alpha, \theta) g_i(\alpha, \theta) d\theta d\alpha \\
&= \sum_{i=1}^3 \langle \mathcal{D}f_i, g_i \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2)} = \sum_{i=1}^3 \langle f_i, \mathcal{D}^* g_i \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathcal{D}^* g_1 \\ \mathcal{D}^* g_2 \\ \mathcal{D}^* g_3 \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \vec{f}, \mathfrak{P}^* \vec{g} \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Damit entspricht der adjungierte Operator \mathfrak{P}^* von \mathfrak{P} einer komponentenweisen Anwendung des adjungierten Operators \mathcal{D}^* der Cone Beam Transformation \mathcal{D} auf eine vektorwertige Funktion $\vec{g} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Dies wird auch dadurch deutlich, dass sich die Darstellungen in Gleichung (5.2.9) für \mathfrak{P}^* und Gleichung (4.1.1) für \mathcal{D}^* nur durch den Wertebereich der Funktion g unterscheiden. Auf diese Weise erklärt sich auch der Zusammenhang zwischen den Rekonstruktionskernen Ψ_{γ}^j und ψ_{γ} sowie den Mollifiern \mathbf{E}_{γ}^j und e_{γ} .

Mit den Formeln (5.2.7) und (5.2.8) und wegen

$$\langle \mathfrak{P}\vec{f}, \Psi_{\gamma}^j(x) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3)} = \langle \vec{f}, \mathfrak{P}^* \Psi_{\gamma}^j(x) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} = \langle \vec{f}, \mathbf{E}_{\gamma}^j(x) \rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} \stackrel{(5.2.5)}{=} f_{j,\gamma}(x)$$

ist eine separate Rekonstruktion der drei Komponenten $f_i(x)$, $i \in \{1, 2, 3\}$ von \vec{f} aus den Daten $\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta)$ unter Verwendung des Rekonstruktionskerns $\psi_{\gamma}(\alpha, \theta, x)$ und des Mollifiers $e_{\gamma}(x, y)$ der Cone Beam Transformation möglich. Leider stehen aber diese Messdaten für die Rekonstruktion aus $\mathfrak{D}\vec{f}$ nicht zur Verfügung und können auch nicht aus diesen berechnet werden.

Allerdings besteht die Möglichkeit einer Approximation. Wie man aus

$$\langle \mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta), \theta \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left\langle \int_0^{\infty} \vec{f}(\alpha + t\theta) dt, \theta \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \int_0^{\infty} \langle \vec{f}(\alpha + t\theta), \theta \rangle_{\mathbb{R}^3} dt = \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta)$$

leicht sieht, gilt

$$\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) = \langle \mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta), \theta \rangle_{\mathbb{R}^3}. \quad (5.2.10)$$

Da $\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^3$ erhält man

$$\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta) = \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta + \lambda_1(\alpha, \theta_1^{\perp}) \cdot \theta_1^{\perp} + \lambda_2(\alpha, \theta_2^{\perp}) \cdot \theta_2^{\perp}, \quad (5.2.11)$$

wobei $\{\theta, \theta_1^{\perp}, \theta_2^{\perp}\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 mit entsprechenden Koeffizienten $\lambda_1(\alpha, \theta_1^{\perp})$ und $\lambda_2(\alpha, \theta_2^{\perp})$ bilden. Man kann $\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta)$ also durch

$$\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta) \approx \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta \quad (5.2.12)$$

approximieren, indem man die Anteile senkrecht zum Richtungsvektor θ vernachlässigt. Dieses Vorgehen entspricht der Berechnung der Pseudoinversen (Moore-Penrose-Inversen). Eine Abbildung

$$P_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, \theta \rangle_{\mathbb{R}^3} = x^\top \theta$$

kann in Matrixschreibweise dargestellt werden als

$$P_\theta(x) = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}.$$

Da P_θ aufgrund der Linearität des Skalarproduktes im \mathbb{R}^3 linear ist, kann die Pseudoinverse A^+ zu A berechnet werden als $A^+ = A^*(AA^*)^{-1}$, wobei der adjungierte Operator A^* dem transponierten A^\top entspricht, da die Einträge von A reellwertig sind. Man berechnet leicht

$$\begin{aligned} A^+ &= A^*(AA^*)^{-1} = A^\top (AA^\top)^{-1} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A^+ &= \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Pseudoinverse A^+ ist wegen

$$AA^+ = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix} \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = 1$$

die Rechtsinverse von A . Die Eigenschaften, die für eine Pseudoinverse gelten müssen, lassen sich ebenfalls leicht nachprüfen:

$$\begin{aligned} AA^+ &= 1 = (AA^+)^\top, \\ A^+A &= \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & \theta_3^2 \end{pmatrix} = (A^+A)^\top, \\ AA^+A &= \underbrace{(AA^+)}_{=1} A = 1 \cdot A = A, \\ A^+AA^+ &= (A^+A)A^+ = \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1^2 & \theta_1\theta_2 & \theta_1\theta_3 \\ \theta_1\theta_2 & \theta_2^2 & \theta_2\theta_3 \\ \theta_1\theta_3 & \theta_2\theta_3 & \theta_3^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\theta\|^4} \begin{pmatrix} \theta_1 \|\theta\|^2 \\ \theta_2 \|\theta\|^2 \\ \theta_3 \|\theta\|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\theta\|^2} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = A^+. \end{aligned}$$

Die pseudoinverse Abbildung P_θ^+ zu P_θ lautet damit $P_\theta^+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\|\theta\|^2} \cdot \theta$. Bei gegebenem Skalarprodukt $\langle x, \theta \rangle$, also der Projektion von x in Richtung θ , ist die durch $\langle x, \theta \rangle \theta$ gegebene Gerade die beste Approximation an den Vektor x , da für die zu θ senkrechten Richtungen keine Informationen zur Verfügung stehen.

Mit diesen Definitionen gilt

$$\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) = \langle \mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta), \theta \rangle_{\mathbb{R}^3} = P_\theta(\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta))$$

und

$$\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta) = \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta = P_\theta^+(\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta)) .$$

Für gegebenes Skalarprodukt $\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) = \langle \mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta), \theta \rangle_{\mathbb{R}^3}$ ist demnach $\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta$ die bestmögliche Approximation an $\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta)$. Dies wiederum kann mit den unter Verwendung der Methode der Approximativen Inversen für die Cone Beam Transformation entwickelten Rekonstruktionskernen berechnet werden. Es soll an dieser Stelle abermals der mit dieser Approximation einhergehende beträchtliche Verlust an Information erwähnt werden, der sich am besten in der hier wiederholten Formel (5.2.11)

$$\mathfrak{P}\vec{f}(\alpha, \theta) = \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta + \underbrace{\lambda_1(\alpha, \theta_1^\perp) \cdot \theta_1^\perp + \lambda_2(\alpha, \theta_2^\perp) \cdot \theta_2^\perp}_{(*)}$$

verdeutlichen lässt. Die durch (*) gekennzeichneten Teile der Gleichung können durch die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Messungen nicht erfasst werden.

Das hier vorgeschlagene Vorgehen resultiert in folgendem Algorithmus.

Algorithmus (für die Doppler-Transformation)

Gegeben : Gemessene Daten $\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta)$ für $\alpha \in \Gamma$ und $\theta \in S^2$

Berechne : Für $j \in \{1, 2, 3\}$:

- $\vec{g}(\alpha, \theta) = \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta$
- $(\vec{f}_\gamma)_j(x) = \langle \vec{g}, \Psi_\gamma^j(x) \rangle_{L^2(\Gamma \times S^2, \mathbb{R}^3)}$

$$= \int_{\Gamma} \int_{S^2} \langle \vec{g}(\alpha, \theta), \Psi_\gamma^j(\alpha, \theta, x) \rangle_{\mathbb{R}^3} d\theta d\alpha$$

$$= \int_{\Gamma} \int_{S^2} \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \theta_j \psi_\gamma(\alpha, \theta, x) d\theta d\alpha$$

Ausgabe : Approximation \vec{f}_γ an \vec{f}

Es ist wichtig hier darauf hinzuweisen, dass das mathematische Modell nicht verändert wurde. Die für die skalare Cone Beam Transformation

$$\mathcal{D}f(\alpha, \theta) = \int_0^\infty f(\alpha + t\theta) dt$$

hergeleiteten Ergebnisse wurden auf ihr dreidimensionales Äquivalent

$$\mathfrak{F}\vec{f}(\alpha, \theta) = \int_0^{\infty} \vec{f}(\alpha + t\theta) dt$$

transferiert, welches wegen

$$\mathfrak{F}\vec{f}(\alpha, \theta) \approx \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta) \cdot \theta$$

eine gute Approximation an $\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \theta)$ ist.

Ein weiterer Ansatz

Bevor erste Ergebnisse, die sich aus der Anwendung des Algorithmus auf Seite 114 auf Daten der Doppler-Transformation ergeben, vorgestellt werden, soll hier kurz eine weitere Formel hergeleitet werden, die einen möglichen Schritt in Richtung einer Inversionsformel für die Doppler-Transformation \mathfrak{D} darstellen könnte. Sie wurde von Thomas Schuster auf der ICIAM 2007 (6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics) in Zürich präsentiert.

Satz 5.2.2. *Sei*

$$\varepsilon\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, y) := \int_0^{\infty} \left\langle \vec{f}\left(\alpha + t\frac{y}{\|y\|}\right), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle dt$$

die homogene Erweiterung der Doppler-Transformation auf \mathbb{R}^3 , die schon in Formel (5.1.13) gezeigt wurde. Sei weiterhin

$$R : L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Gamma \times S^2)$$

die Einschränkung von \mathbb{R}^3 auf S^2 . Definiert man für $g \in L^2(\Gamma \times S^2)$

$$\nabla_{\omega}g(\alpha, \omega) := (R\nabla_y\varepsilon)g(\alpha, \omega),$$

so erhält man für $\alpha \in \Gamma$ und $\omega \in S^2$

$$\nabla_{\omega}\mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \omega) + \mathfrak{D}\vec{f}(\alpha, \omega) \cdot \omega = \int_0^{\infty} t \cdot E_{\omega^{\perp}}\nabla\vec{f}(\alpha + t\omega)^{\top}\omega dt + \mathfrak{F}\vec{f}(\alpha, \omega), \quad (5.2.13)$$

wobei

$$E_{\theta^{\perp}}(a) := a - \langle a, \theta \rangle \theta$$

die orthogonale Projektion von $a \in \mathbb{R}^3$ in die Ebene $\theta^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, \theta \rangle = 0\}$ senkrecht zu θ ist.

Beweis. Der Beweis ist recht ausführlich gehalten, aber nicht sehr schwer nachvollziehbar.

$$\begin{aligned}\nabla_{\omega} \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) &= (R \nabla_y \varepsilon) \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega), \\ \nabla_y \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) &= \nabla_y \left(\int_0^{\infty} \left\langle \vec{f} \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right), \frac{y}{\|y\|} \right\rangle dt \right) = \nabla_y \left(\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \frac{y_i}{\|y\|} dt \right) \\ &= \nabla_y \left(\frac{1}{\|y\|} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right).\end{aligned}$$

Damit gilt für $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}\left(\nabla_y \left(\frac{1}{\|y\|} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) \right)_j &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\|y\|} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\|y\|} \right) \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt + \frac{1}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right).\end{aligned}$$

Nun werden die Ableitungen einzeln berechnet:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\|y\|} \right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{1/2}} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{-3/2} 2y_j = \frac{-y_j}{\|y\|^3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial y_j} \left(f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \right) y_i + f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} (y_i) \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial y_j} \left(f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \right) y_i + f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \delta_{ij} \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \right) y_i dt + \int_0^{\infty} f_j \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) dt.\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \right) = \frac{t}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\|y\|} \right) \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt + \frac{1}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) \\
&= \frac{-y_j}{\|y\|^3} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt + \frac{1}{\|y\|} \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \left(f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \right) y_i dt + \int_0^\infty f_j \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) dt \right) \\
&= \frac{-y_j}{\|y\|^2} \underbrace{\int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) \frac{y_i}{\|y\|} dt}_{=\varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, y)} + \frac{1}{\|y\|} \underbrace{\int_0^\infty f_j \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) dt}_{=(\mathfrak{P} \vec{f}(\alpha, \frac{y}{\|y\|}))_j} \\
&+ \frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 \left[\frac{t}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right] y_i dt .
\end{aligned}$$

Das letzte Integral kann weiter vereinfacht werden. Dazu wird die Jacobi-Matrix

$$J\vec{f}(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und } \vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

benötigt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \left[\frac{t}{\|y\|} \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \sum_{k=1}^3 y_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right] y_i \\
&= \frac{t}{\|y\|} \sum_{i=1}^3 y_i \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \sum_{i=1}^3 y_i \sum_{k=1}^3 y_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_i(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \\
&= \frac{t}{\|y\|} \left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top y \right)_j - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \left(y^\top \left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right) y \right) \\
&= \frac{t}{\|y\|} \left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top y \right)_j - \frac{t y_j}{\|y\|^3} \left(\left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top y \right)^\top y \right) \\
&= t \left[\left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right)_j - \left(\left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right) \frac{y_j}{\|y\|} \right] \\
&= t \left(E_{\left(\frac{y}{\|y\|} \right)^\perp} \left(\left(J\vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right) \right)_j .
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned} (\nabla_y \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega))_j &= \left(\nabla_y \left(\frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) \right)_j = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty \sum_{i=1}^3 f_i \left(\alpha + t \frac{y}{\|y\|} \right) y_i dt \right) \\ &= \frac{-y_j}{\|y\|^2} \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, y) + \frac{1}{\|y\|} \left(\mathfrak{F} \vec{f} \left(\alpha, \frac{y}{\|y\|} \right) \right)_j + \frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty t \left(E_{\left(\frac{y}{\|y\|} \right)^\perp} \left(\left(J \vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right) \right)_j dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \nabla_y \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) &= -\frac{1}{\|y\|} \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, y) \frac{y}{\|y\|} + \frac{1}{\|y\|} \mathfrak{F} \vec{f} \left(\alpha, \frac{y}{\|y\|} \right) + \frac{1}{\|y\|} \int_0^\infty t E_{\left(\frac{y}{\|y\|} \right)^\perp} \left(\left(J \vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t \frac{y}{\|y\|}} \right)^\top \frac{y}{\|y\|} \right) dt. \end{aligned}$$

Mit der Einschränkung $R : L^2(\Gamma \times \mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\Gamma \times S^2)$ auf S^2 , $\omega = \frac{y}{\|y\|} \in S^2$, der Definition von ∇_ω sowie der abkürzenden Schreibweise $\nabla \vec{f}(\alpha + t\omega) = J \vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t\omega}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} R \nabla_y \varepsilon \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) &= -\mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) \omega + \mathfrak{F} \vec{f}(\alpha, \omega) + \int_0^\infty t E_{\omega^\perp} \left(\left(J \vec{f}(x) \Big|_{x=\alpha+t\omega} \right)^\top \omega \right) dt \\ &= -\mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) \omega + \mathfrak{F} \vec{f}(\alpha, \omega) + \int_0^\infty t E_{\omega^\perp} \left(\left(\nabla \vec{f}(\alpha + t\omega) \right)^\top \omega \right) dt \\ \Leftrightarrow \nabla_\omega \mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) &= -\mathfrak{D} \vec{f}(\alpha, \omega) \omega + \mathfrak{F} \vec{f}(\alpha, \omega) + \int_0^\infty t E_{\omega^\perp} \left(\left(\nabla \vec{f}(\alpha + t\omega) \right)^\top \omega \right) dt, \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Es ist Gegenstand aktueller Forschung, die Verwendbarkeit von Formel (5.2.13) für eine Inversion der Doppler-Transformation \mathfrak{D} zu überprüfen. Vielleicht führt die Implementierung einer aus ihr abgeleiteten Formel zu ähnlich guten Rekonstruktionen wie diejenigen, die man unter Zuhilfenahme des Algorithmus auf Seite 114 erhält. Diese sollen im weiteren Verlauf der Arbeit präsentiert und erläutert werden.

5.3 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt sollen nun Rekonstruktionen für verschiedene Vektorfelder präsentiert werden. Dabei wird der auf Seite 114 vorgestellte Algorithmus auf exakte, synthetische Daten angewendet. Die vorgestellten Vektorfelder sind divergenzfrei, da, wie schon in Abschnitt 5.1.1

erwähnt, nur ein divergenzfreies Vektorfeld, beziehungsweise der divergenzfreie Anteil eines beliebigen Vektorfeldes, aus den Daten der Doppler-Transformation \mathfrak{D} rekonstruiert werden kann.

Die verwendete Messgeometrie ist in Abbildung 5.2 gezeigt. Bei der Abtastkurve handelt es sich um einen Kreis mit Radius $R = 3$ in der x_1 - x_2 -Ebene. Es wird zusätzlich angenommen, dass die Vektorfelder in der dreidimensionalen Einheitskugel definiert sind, d.h. dass $\Omega = B_1(0)$ gilt. Als Mollifier wird der Gaußkern aus Gleichung (4.2.13) verwendet. Der Rekonstruktionskern wurde gemäß Formel (4.2.33) berechnet. Aufgrund der großen Ähnlichkeiten zwischen Cone Beam und Doppler-Transformation war es möglich, die entsprechenden Teile des von Weber im Rahmen der Dissertation [52] erstellten Programms auf die Rekonstruktion von Vektorfeldern zu übertragen.

Zum Rekonstruktionskern sei hier noch angemerkt, dass dieser als Tiefpassfilter interpretiert werden kann. Der Regularisierungsparameter γ bestimmt dabei die Breite des Filters und entspricht damit der Abschneidefrequenz. Große Werte für γ resultieren dann in einer starken Glättung des rekonstruierten Vektorfeldes. Leider ist es weder möglich das optimale γ noch ein Intervall, in dem dieses enthalten ist, anzugeben, da γ sowohl von der Stärke des Rauschens in den gemessenen Daten als auch von der exakten Lösung \vec{f} selbst abhängt. Trotzdem hat sich in den durchgeführten Experimenten ein Wert von $\gamma \approx 0,007$ immer als guter Startpunkt für ein brauchbares Ergebnis erwiesen.

Die Rekonstruktionen der verschiedenen Vektorfelder werden auf einem $n \times m$ -Gitter durchgeführt, wobei für die im Rahmen dieser Arbeit gezeigten Grafiken zumeist ein 50×50 -Gitter verwendet wurde. Insgesamt wurden also 2500 Vektoren berechnet. Für die Auswertung des Rekonstruktionskerns wurde gemäß Formel (4.2.47) $\varphi = \rho = 155$ gewählt. Dies bedeutet, dass für den Detektor eine Auflösung von 155×155 Punkten angenommen wird. Die grafische Darstellung der Felder erfolgt mit Hilfe des Computeralgebrasystems Maple in Version 9.5. Da es sich allerdings als sehr rechen- und zeitaufwändig herausgestellt hat, alle Vektoren zu zeichnen, und da ein entsprechender Plot sehr unübersichtlich ist, wurde in den vorliegenden Grafiken lediglich jeder vierte Vektor gezeichnet. Dies hat nur geringe Auswirkungen auf die subjektive Beurteilung der Qualität, wie man durch Vergleich in Abbildung 5.4 leicht sehen kann. Zudem wird schon in diesen Bildern deutlich, dass die größten Fehler am Rand des Rekonstruktionsgebietes auftreten. Um die Qualität der Vektorfelder objektiv beurteilen zu können, wurde für die mit unterschiedlichen Werten von γ erstellten Rekonstruktionen jeweils der Längen- und der Winkelfehler verglichen. Für den Längenfehler L wird dabei in jedem Punkt des Rekonstruktionsgitters der Betrag der Differenz zwischen der Norm des korrekten Vektors $\vec{f}(x_{ij})$ und des rekonstruierten Vektors $\vec{f}(x_{ij})$ im jeweiligen Gitterpunkt x_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, aufsummiert und dann durch die Gittergröße $n \cdot m$ dividiert:

$$L := \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \left\| \vec{f}(x_{ij}) \right\| - \left\| \vec{f}(x_{ij}) \right\| \right|.$$

Für den Winkelfehler W berechnet man in jedem Punkt x_{ij} für den Winkel ϵ zwischen dem

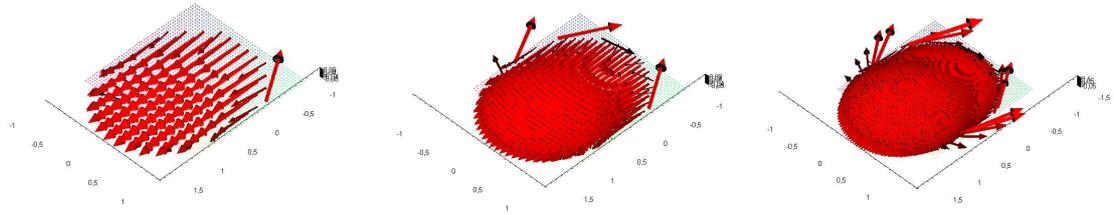


Abbildung 5.4: LINKS: Jeder vierte Vektor des Vektorfeldes $f(x) = (1, 0, 0)^T$ bei der Rekonstruktion mit $\gamma = 0,01105$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$.
MITTE: Jeder zweite Vektor.
RECHTS: Jeder Vektor.

korrekten und dem rekonstruierten Vektor

$$\cos \epsilon_{ij} = \frac{\langle \vec{f}(x_{ij}), \vec{\tilde{f}}(x_{ij}) \rangle}{\|\vec{f}(x_{ij})\| \cdot \|\vec{\tilde{f}}(x_{ij})\|}$$

$$\Rightarrow W := \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (1 - \cos \epsilon_{ij}) .$$

Damit können die errechneten Vektorfelder auch objektiv mit dem Original verglichen werden. Gleichzeitig vermag man auf diese Weise γ so zu bestimmen, dass die Fehler L und W möglichst klein werden. Leider unterscheiden sich die besten Regularisierungsparameter für L und W , so dass die kleinste Summe aus beiden Fehlern als Kriterium dient.

Im Folgenden sei $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ein Vektor im \mathbb{R}^3 und $f = (f_1, f_2, f_3)^T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezeichne das zu rekonstruierende Vektorfeld.

Das Vektorfeld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$

Die ersten Tests wurden an dem Vektorfeld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ durchgeführt. Offensichtlich ist f wegen

$$\operatorname{div}(f(x)) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_3}0 = 0$$

divergenzfrei und kann damit aus den Daten der Doppler-Transformation \mathfrak{D} vollständig rekonstruiert werden. Ein Vergleich zwischen korrekten Daten und Rekonstruktion mit dem besten Regularisierungsparameter γ für dieses kreisförmige Vektorfeld in der Abtastebene, d.h. der Ebene $\{x_3 = 0\}$, ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Die einzelnen Fehler für diese Rekonstruktion betragen

$$L = 0,00755 , \quad W = 0,000021 , \quad L + W = 0,007571 .$$

Um den Unterschied zwischen Original und Rekonstruktion besser erkennbar zu machen, ist die Differenz $x_{i,\text{korrekt}} - x_{i,\text{rekonstruiert}}$, $i = 1, 2, 3$, für jede Koordinate in Grafik 5.6 visualisiert. Auch

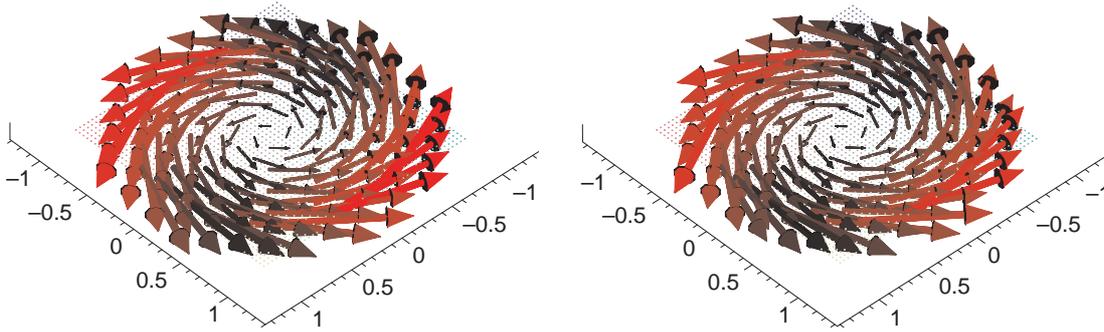


Abbildung 5.5: LINKS: Korrektes Feld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$.
 RECHTS: Rekonstruktion mit Hilfe des beschriebenen Algorithmus für $\gamma = 0,007975$
 unter Verwendung exakter, simulierter Daten $\mathfrak{D}f$.

hier wird ersichtlich, dass die Fehler zum Rand des Rekonstruktionsgebietes hin größer werden, wohingegen in der Mitte nur minimale Differenzen auftreten. Gleichzeitig fällt die gleichmäßige, stufenförmige Struktur des Fehlers für die x_1 - und x_2 -Koordinate ins Auge, die zwischen den beiden Koordinaten allerdings um 90° gedreht ist. Die Differenz der x_3 -Komponente ist hingegen ohne erkennbares Muster, allerdings auch sehr klein, wie man an der Skala ablesen kann. Sie entspricht dem durch den Algorithmus bedingten Rauschen.

Um auch einen Vergleich zu schlechteren Ergebnissen zu geben, sind in Abbildung 5.7 die Rekonstruktion für $\gamma = 0,0085$ und die dazugehörigen Differenzbilder abgedruckt. Man sieht deutlich, dass schon eine kleine Veränderung des Wertes γ relativ starke Auswirkungen auf die Qualität der Resultate haben kann. Vor allem die Länge der Vektoren, und durch die Art der Darstellung damit einhergehend deren Stärke, ist größer geworden, was man auch am zugrunde liegenden Gitter, auf dem die Vektoren gezeichnet werden, erkennt. Des Weiteren wird die symmetrische Struktur des Fehlers in x_1 - und x_2 -Koordinate durch die größere Differenz klarer hervorgehoben. Man erhält für diese Rekonstruktion

$$L = 0,20857, \quad W = 0,000028, \quad L + W = 0,208593.$$

Diese Werte bestätigen den visuellen Eindruck, dass vor allem der Fehler in der Länge der Vektoren auffallend größer geworden ist, die Richtungen der Vektoren aber weiterhin sehr gut berechnet werden.

Eine starke Erhöhung des Regularisierungsparameters auf $\gamma = 0,32095$ verringert zwar im Vergleich zu $\gamma = 0,0085$ sowohl den Fehler in den Richtungen als auch in der Länge der Vektoren, erreicht aber dennoch nicht die Qualität von $\gamma = 0,007975$. Die entsprechenden Grafiken finden sich in Abbildung 5.8, die Fehler berechnen sich zu

$$L = 0,12855, \quad W = 0,0000043, \quad L + W = 0,12856.$$

Statt der Ebene $\{x_3 = 0\}$ kann mit dem Algorithmus selbstverständlich jede beliebige Ebene innerhalb des Rekonstruktionsbereichs Ω bestimmt werden. Exemplarisch sind dazu die Ebenen

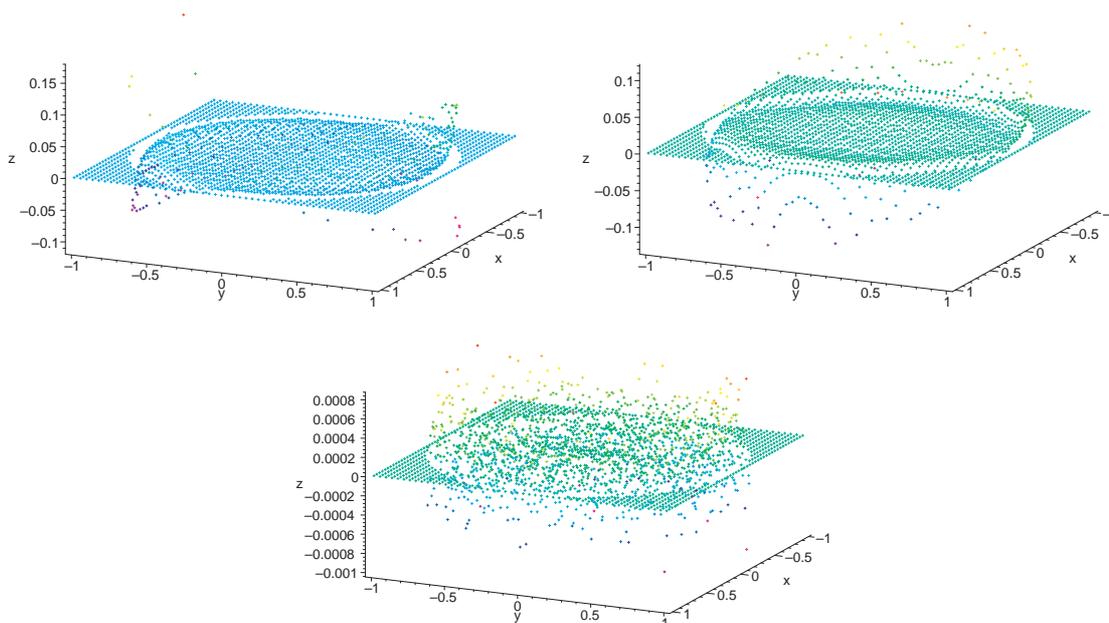


Abbildung 5.6: OBEN LINKS: Differenz der x_1 -Koordinate zwischen Original und Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007975$.
 OBEN RECHTS: Differenz der x_2 -Koordinate.
 UNTEN: Differenz der x_3 -Koordinate.

$\{x_3 = 0,5\}$ und $\{x_3 = 0,9\}$ in Abbildung 5.9 dargestellt. Für die Ebene $\{x_3 = 0,5\}$ wurde dabei der beste Regularisierungsparameter als $\gamma = 0,00823$ bestimmt, während für die Rekonstruktion der höhergelegenen Ebene $\gamma = 0,00855$ gewählt wurde. Daraus wird auch ersichtlich, dass sich der Regularisierungsparameter mit der zu rekonstruierenden Ebene ändert. In den Experimenten mit $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ hat sich gezeigt, dass dieser nach oben hin ansteigt. Leider konnte dieses Verhalten für andere Vektorfelder nicht verifiziert werden. Da eine exakte, rechnerische Bestimmung des optimalen Regularisierungsparameters ohnehin nicht möglich ist, bleibt nur die unbefriedigende Erkenntnis, dass auch bei bekanntem γ für eine Ebene, der beste Parameter für alle weiteren Ebenen neu bestimmt werden muss. Es kann lediglich festgehalten werden, dass sich die Größenordnung für das optimale γ nicht wesentlich ändert.

Aus den gemessenen Daten können nicht nur die horizontalen Ebenen der Form $\{x_3 = k\}$ für $-1 \leq k \leq 1$ berechnet werden, auch eine Rekonstruktion in der Senkrechten, d.h. für die Ebenen $\{x_1 = k\}$, $-1 \leq k \leq 1$, ist möglich. Die grafische Repräsentation ist jedoch etwas schwieriger, wie man anhand der Beispiele in Abbildung 5.10 sieht. Dort wird eine Berechnung der Ebene $\{x_1 = 0\}$ für $\gamma = 0,007975$ aus zwei unterschiedlichen Blickwinkeln gezeigt, wobei sich die Angaben zu $[\vartheta, \varphi]$ auf die in Maple einstellbare Orientierung des Plots beziehen.

An diesem einfachen Beispiel des kreisförmigen Vektorfeldes $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ ist es möglich, einen guten Überblick über die Funktionen und Möglichkeiten der verschiedenen Programme zu geben. Auch die Auswirkungen, die die Wahl des Regularisierungsparameters γ auf die Qualität der Rekonstruktionen hat, sollten an diesem Beispiel klar werden. Zudem kann man

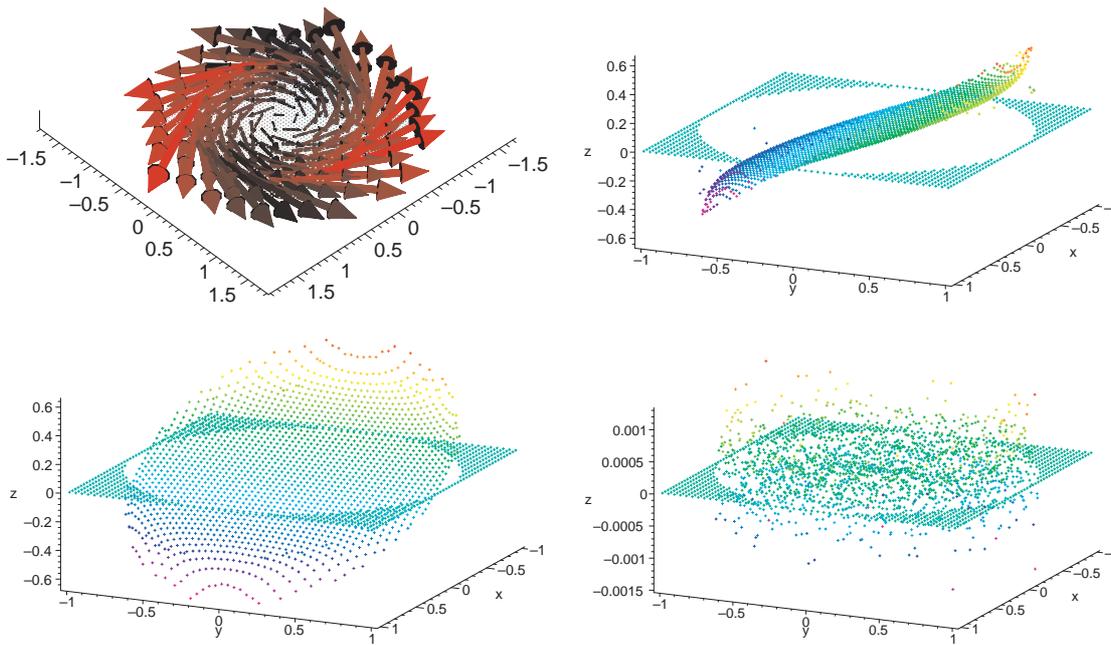


Abbildung 5.7: OBEN LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0085$.
 OBEN RECHTS: Differenz der x_1 -Koordinate.
 UNTEN LINKS: Differenz der x_2 -Koordinate.
 UNTEN RECHTS: Differenz der x_3 -Koordinate.

anhand der für $\gamma = 0,007975$ erzeugten Bilder im Vergleich zum Original in Abbildung 5.5 gut erkennen, dass mit Hilfe des auf Seite 114 vorgeschlagenen Algorithmus sehr gute Ergebnisse erzielt werden können. Es ist im Rahmen dieser Arbeit natürlich nicht möglich, alle getesteten Vektorfelder in obigem Umfang vorzustellen. Aus diesem Grund wird sich die Präsentation im Folgenden auf die wichtigsten Erkenntnisse aus den jeweiligen Testläufen des Algorithmus beschränken.

Das Vektorfeld $f(x) = (1, 0, 0)^T$

Als nächstes soll das sehr einfache divergenzfreie Vektorfeld $f(x) = (1, 0, 0)^T$ behandelt werden. Trotz der Einfachheit erlaubt dieses Feld weitere Einblicke in mögliche Probleme und Beschränkungen des Verfahrens. Wie man am Vergleich zwischen korrekten Daten und bestmöglicher Rekonstruktion für $\gamma = 0,01105$ in Abbildung 5.11 sieht, treten die Fehler vor allem am Rand des Rekonstruktionsgebietes Ω auf. Die Vektoren sind zum Rand hin zu klein und krümmen sich – anstelle des zu erwartenden geraden Verlaufs – für negatives x_2 in Richtung des Inneren des Rekonstruktionsgebietes und für positives x_2 nach außen. Außerdem zeigt ein weiterer Vektor in die entgegengesetzte Richtung. Hier muss allerdings beachtet werden, dass in Abbildung 5.11 nur jeder vierte Vektor gezeichnet wurde. Die gleiche Rekonstruktion wurde für eine größere Anzahl von Vektoren schon in Abbildung 5.4 gezeigt. Dort sieht man, dass es sich letztendlich

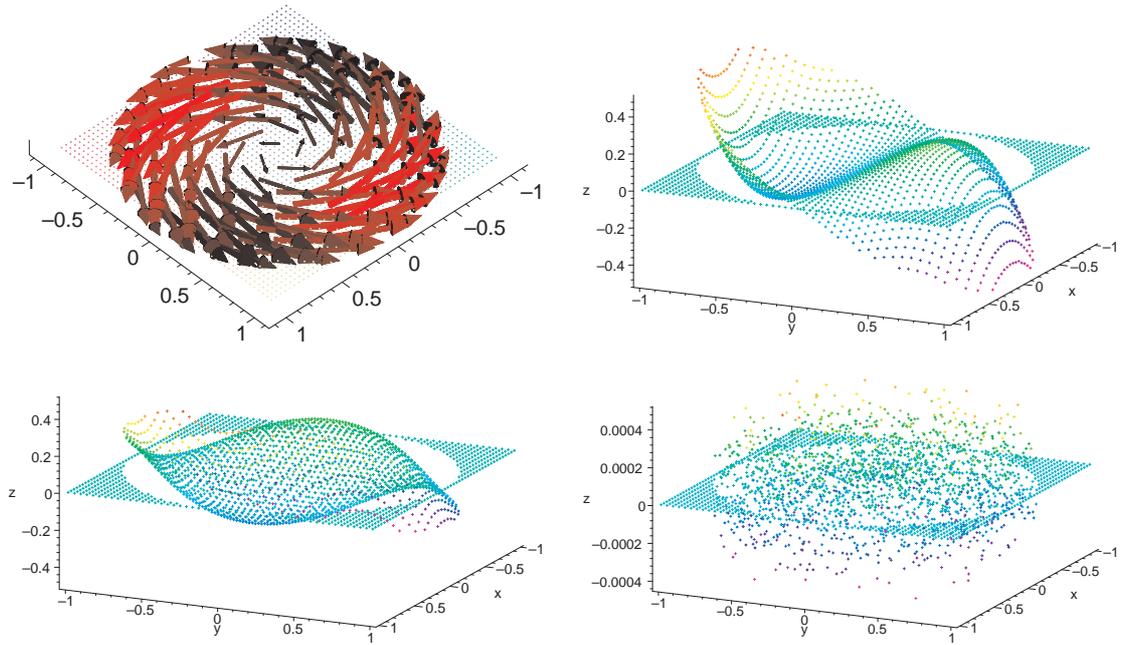


Abbildung 5.8: OBEN LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,32095$.

OBEN RECHTS: Differenz der x_1 -Koordinate.

UNTEN LINKS: Differenz der x_2 -Koordinate.

UNTEN RECHTS: Differenz der x_3 -Koordinate.

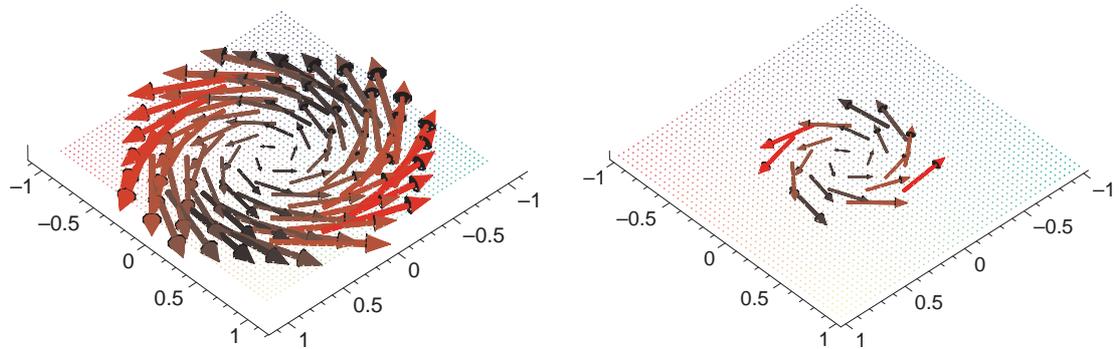


Abbildung 5.9: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ für $\gamma = 0,00823$ in der Ebene $\{x_3 = 0,5\}$.

RECHTS: Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ für $\gamma = 0,00855$ in der Ebene $\{x_3 = 0,9\}$.

um mehrere Vektoren handelt, die in die falsche Richtung zeigen, dass diese aber alle am Rand des Gebietes liegen. Die Rekonstruktion dieses Vektorfeldes ist subjektiv weitaus schlechter als

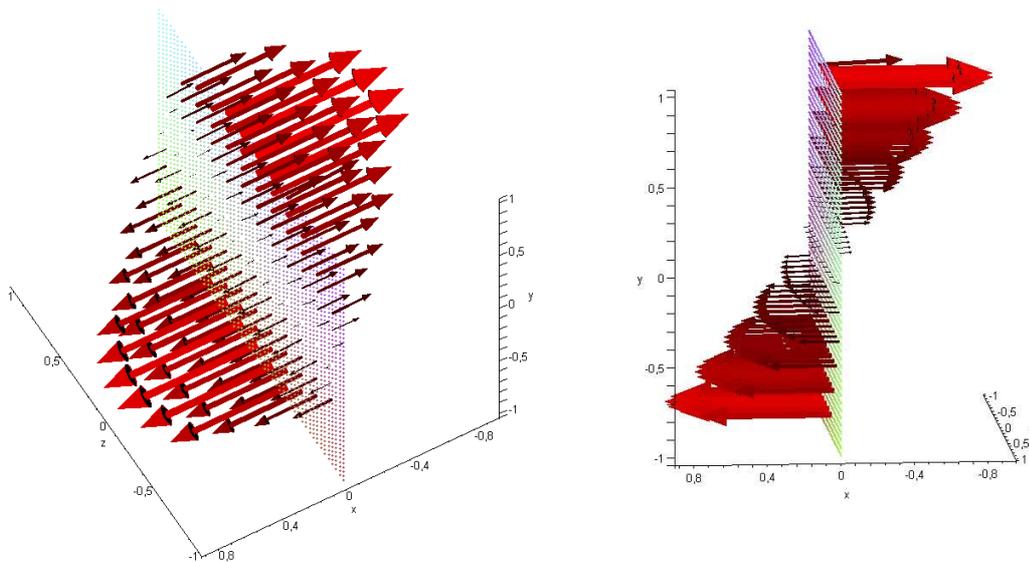


Abbildung 5.10: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ für $\gamma = 0,007975$ in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 120^\circ, \varphi = 145^\circ]$.
 RECHTS: Rekonstruktion aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 85^\circ, \varphi = 80^\circ]$.

diejenige des kreisförmigen Feldes aus dem vorangegangenen Abschnitt. Die Fehler L und W berechnen sich zu

$$L = 0,14086, \quad W = 0,02191, \quad L + W = 0,16276.$$

Die Differenzbilder für diese Rekonstruktion sind in Abbildung 5.12 zu sehen. Sie bestäti-

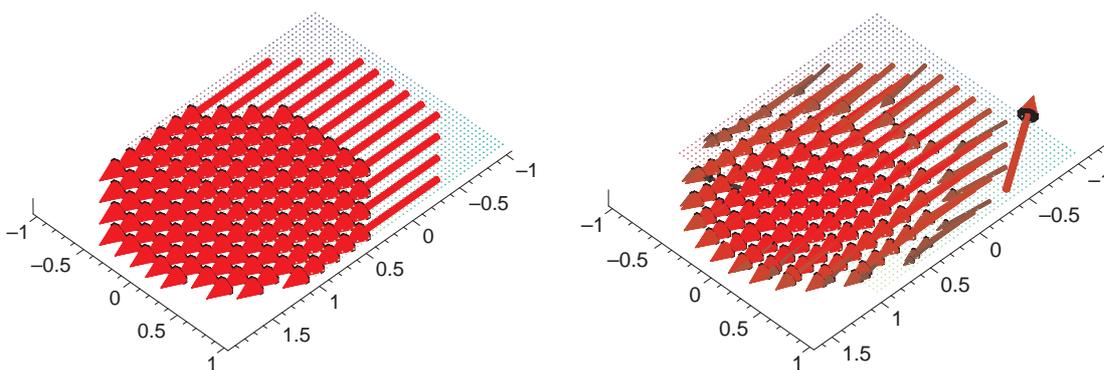


Abbildung 5.11: LINKS: Korrekte Daten des Vektorfeldes $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$.
 RECHTS: Rekonstruktion mit Hilfe des beschriebenen Algorithmus für $\gamma = 0,01105$.

gen noch einmal, dass die größten Probleme des verwendeten Algorithmus am Rand auftreten. Auch in diesem Fall sieht die Differenz in x_1 - und x_2 -Koordinate sehr gleichmäßig aus, wobei der Hauptteil des Fehlers sicherlich in der x_1 -Koordinate zu finden ist. Vergrößert man nun γ

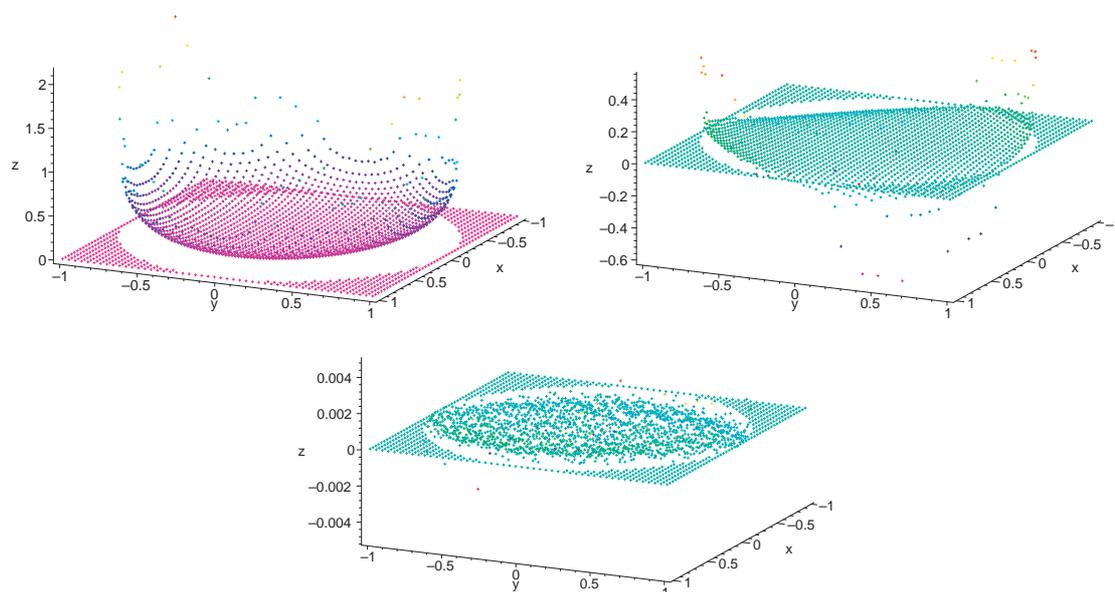


Abbildung 5.12: OBEN LINKS: Differenz der x_1 -Koordinate zwischen Original und Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$.
 OBEN RECHTS: Differenz der x_2 -Koordinate.
 UNTEN: Differenz der x_3 -Koordinate.

auf 0,95, so werden die Richtungen der Vektoren wesentlich besser berechnet, im Gegenzug schrumpft leider deren Länge. Dieser zunächst subjektive Eindruck spiegelt sich auch in den Werten

$$L = 0,5082, \quad W = 0,00224, \quad L + W = 0,5105$$

wider. Der Winkelfehler W beträgt nur noch 10% des ursprünglichen Wertes, während der Längenfehler L auf das 3,6-fache anwächst. Da L dominiert, steigt auch der Gesamtfehler auf mehr als das dreifache. Um einen Vergleich zu den Rekonstruktionen für $\gamma = 0,01105$ zu ermöglichen und eventuelle Probleme am Rand explizit kenntlich machen zu können, sind in Abbildung 5.13 neben den Differenzbildern jeder Koordinate auch die Rekonstruktionen für jeden vierten, jeden zweiten und jeden Vektor zu sehen.

Eine Idee, die sich durch die unterschiedliche Betonung der Qualität von Länge und Richtung der Vektoren bei verschiedenen Werten von γ ergeben hat, ist es, die jeweils besten Rekonstruktionen für diese beiden Aspekte zu kombinieren. Sei x_l das beste Ergebnis im Hinblick auf die Länge der Vektoren und x_r das beste für die Richtung für einen Punkt des Rekonstruktionsgitters.

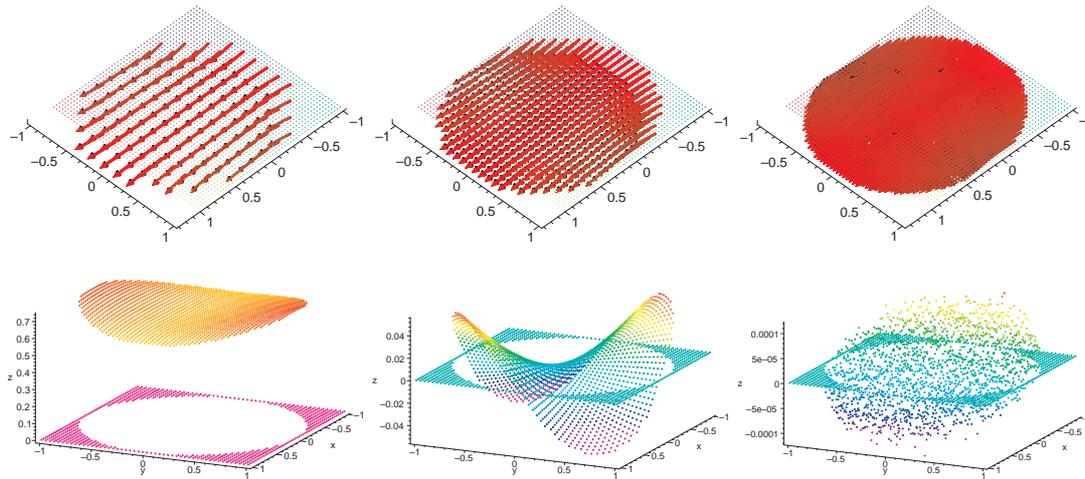


Abbildung 5.13: OBEN LINKS: Jeder vierte Vektor der Rekonstruktion des Vektorfeldes $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,95$.
 OBEN MITTE: Jeder zweite Vektor.
 OBEN RECHTS: Jeder Vektor.
 UNTEN LINKS: Differenz der x_1 -Koordinate.
 UNTEN MITTE: Differenz der x_2 -Koordinate.
 UNTEN RECHTS: Differenz der x_3 -Koordinate.

Man berechnet dann für das kombinierte Resultat x_c in jedem Punkt:

$$x_c = \frac{\|x_l\|}{\|x_r\|} \cdot x_r .$$

Das Ergebnis für $\gamma = 0,95$ für die Richtung und – aufgrund des noch etwas besseren Wertes für $L - \gamma = 0,0125$ für die Länge der Vektoren wird in Abbildung 5.14 im Vergleich zur bislang besten Rekonstruktion für $\gamma = 0,01105$ gezeigt. Man berechnet

$$L = 0,1398 , \quad W = 0,00224 , \quad L + W = 0,142$$

und verbessert damit sowohl die objektive als auch die subjektive Qualität des Ergebnisses. Leider ist diese Methode in der Praxis kaum anwendbar. Zunächst benötigt man zwei Rekonstruktionen und damit auch das Doppelte an Zeit, was für medizinische Anwendungen und entsprechende Ausmaße des Rekonstruktionsgebietes ein nicht zu vernachlässigender Nachteil dieser Idee ist. Zusätzlich muss für das zu rekonstruierende Vektorfeld bekannt sein, welcher Wert von γ welchen Aspekt besonders betont beziehungsweise in welcher Größenordnung γ für die Richtung und die Länge der Vektoren liegen muss. Da schon die Berechnung eines einzelnen guten Wertes von γ nicht möglich ist, stellt auch dies ein schwer zu lösendes Problem dar. Allerdings hat man am Beispiel des kreisförmigen Vektorfeldes $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ auch gesehen, dass man mit einer einzigen Wahl von γ durchaus in der Lage ist, sehr gute Rekonstruktionen zu erzeugen. Eine Kombination zweier berechneter Vektorfelder könnte für dieses Beispiel demnach zu schlechteren Resultaten führen.

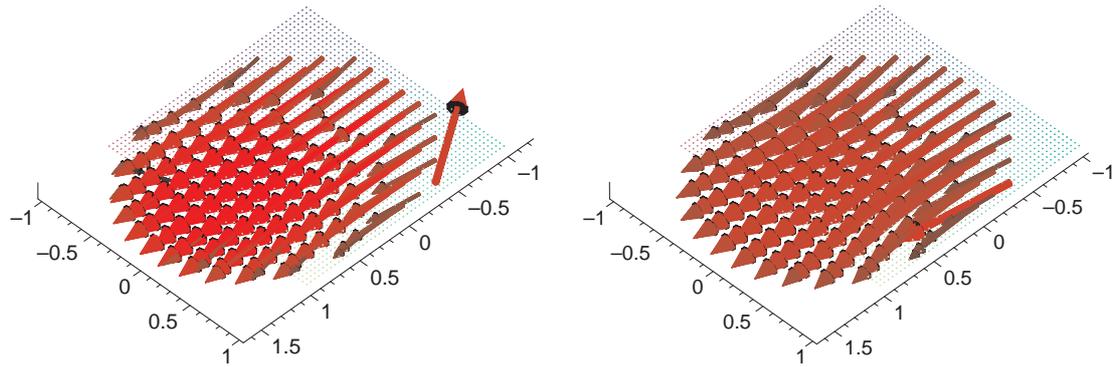


Abbildung 5.14: LINKS: Bislang beste Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$.
 RECHTS: Kombination der Rekonstruktionen für $\gamma = 0,0125$ (Länge) und $\gamma = 0,95$ (Richtung).

Auf die Grafiken hinsichtlich der verschiedenen Ebenen wird für $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ bewusst verzichtet, dennoch sollen die aus diesen Experimenten gewonnenen Erkenntnisse kurz präsentiert werden. Während für das kreisförmige Vektorfeld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^\top$ der beste Wert von γ mit wachsendem Abstand von der Ebene $\{x_3 = 0\}$ ebenfalls angestiegen ist, gilt dies für das Feld $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ nicht. Für die getesteten Ebenen von $\{x_3 = 0\}$ bis $\{x_3 = 0,9\}$ mit Schrittweite 0,1 steigt γ bis zur Ebene $\{x_3 = 0,5\}$ auf einen maximalen Wert von $\gamma = 0,01205$ an, fällt dann aber bis zum Rand des Rekonstruktionsgebietes Ω kontinuierlich bis auf $\gamma = 0,01165$ ab. Das gleiche Verhalten zeigt sich für diejenigen Werte von γ , die den Winkelfehler W in jeder Ebene minimieren. Im Gegensatz dazu fallen die besten Werte von γ im Hinblick auf den Längenfehler L mit wachsendem Abstand zur Abtastebene. Zusätzlich kann man feststellen, dass die Rekonstruktionen der höheren Ebenen besser sind, was sich sowohl in den Werten von L als auch von W ausdrückt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts ist in Abbildung 5.15 die Rekonstruktion der senkrechten Ebene $\{x_1 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$ für zwei unterschiedliche Blickwinkel zu sehen. Die Rekonstruktion der senkrechten Ebene zeigt, dass die Vektoren am Rand der mittleren Ebenen, d.h. für kleines $|x_3|$, zu klein und gedreht sind. Dies wurde schon bei der Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = 0\}$ deutlich. Man sieht zudem, dass dieser Fehler für die höheren Ebenen nicht mehr so signifikant ist. Stattdessen werden alle Vektoren dieser Ebenen etwas zu kurz gezeichnet, was auch damit zusammenhängt, dass $\gamma = 0,01105$ für diese Ebenen nicht das optimale Ergebnis liefert, wie aus den vorangehenden Ausführungen ersichtlich wird.

Das Vektorfeld $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^\top$

Mit Hilfe eines $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ sehr ähnlichen Vektorfeldes ist es möglich, den für den medizinischen Aspekt dieser Arbeit sehr interessanten Blutfluss zu modellieren, der in der englischsprachigen Fachliteratur als *laminar flow* bezeichnet wird. Es handelt sich dabei um einen parabelförmigen Fluss, der in der Mitte des Gefäßes – beispielsweise einer Ader – sehr stark und zu den Rändern hin abnehmend ist. Es gibt keine Verwirbelungen in seitlicher Richtung

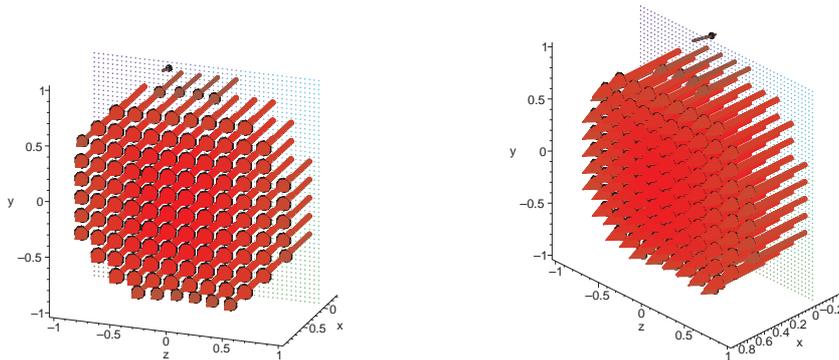


Abbildung 5.15: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ für $\gamma = 0,01105$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 20^\circ, \varphi = 70^\circ]$.
RECHTS: Rekonstruktion aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 45^\circ, \varphi = 60^\circ]$.

oder nach oben, so dass aus diesem Grund die x_2 - sowie die x_3 -Komponente Null gesetzt werden. Als Vergleich könnte man einen Zuckerhut in Betracht ziehen, der in der Mitte der Ader zentriert ist. Das so beschriebene Vektorfeld kann durch $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^T$ berechnet werden und ist offensichtlich divergenzfrei. Abbildung 5.16 zeigt die originalen Daten des Feldes sowie eine Rekonstruktion mit Regularisierungsparameter $\gamma = 0,00915$ jeweils in der zentralen Ebene $\{x_3 = 0\}$. Der Blickwinkel in Maple wurde für die folgenden Grafiken als $\vartheta = \varphi = 45^\circ$ gewählt. Wie klar erkennbar ist, werden die Richtungen der Vektoren besonders am Rand nicht

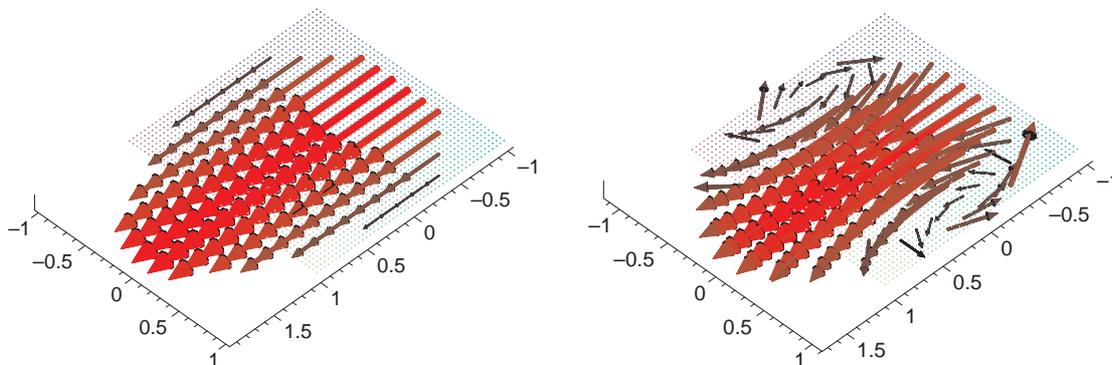


Abbildung 5.16: LINKS: Originaler Daten für das den Blutfluss in einer Ader modellierende Vektorfeld $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$.
RECHTS: Rekonstruktion für $\gamma = 0,00915$ mit Abtastkreis ebenfalls in der Ebene $\{x_3 = 0\}$.

korrekt rekonstruiert, ganz außen verlaufen die Pfeile sogar eindeutig entgegengesetzt zum Original. Auch in der Mitte ist eine Drehung nach außen, d.h. eine konkave Wölbung, sichtbar. Im

Gegensatz dazu stimmen die Längen der Vektoren von Original und Rekonstruktion fast überein. Die unterschiedliche Stärke des Flusses in den verschiedenen Bereichen und die Abnahme zum Rand hin werden korrekt wiedergegeben. Allerdings kann die Qualität der Rekonstruktion insgesamt nicht als befriedigend bezeichnet werden, besonders mit Blick auf mögliche medizinische Anwendungen. Eine Vergrößerung von γ führt zwar auf eine Verbesserung der Richtungsdarstellung, damit geht allerdings auch eine Verschlechterung der Länge einher. Dies wird durch die Berechnung mit $\gamma = 0,95$ im linken Teil von Abbildung 5.17 demonstriert. Durch Kombination zweier Werte für γ ist es aber dennoch möglich, ein zufriedenstellendes Resultat zu erhalten, wie im rechten Teil von Bild 5.17 für $\gamma = 0,00915$ und $\gamma = 0,95$ gezeigt wird. Am Rand ist

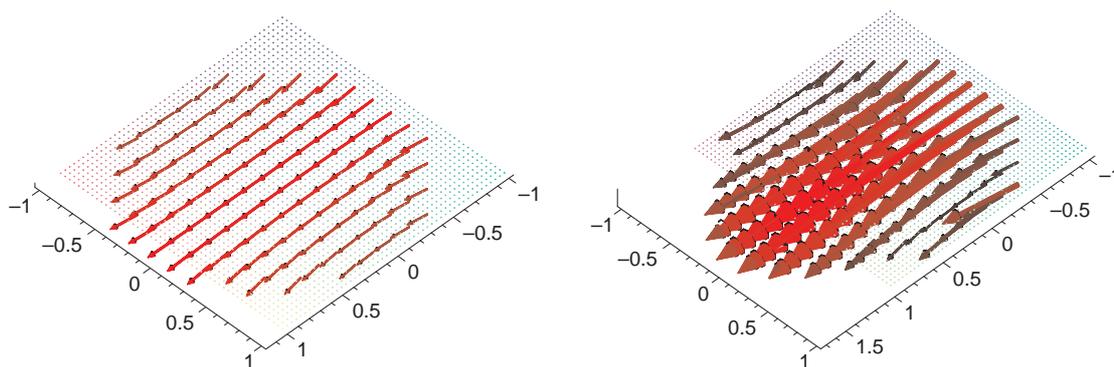


Abbildung 5.17: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1 - y^2 - z^2, 0, 0)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,95$.
RECHTS: Kombination der Rekonstruktionen für $\gamma = 0,00915$ (Länge) und $\gamma = 0,95$ (Richtung).

zwar weiterhin ein zu großer Vektor erkennbar und auch eine leichte konkave Krümmung des Feldes bleibt bestehen, dies stört jedoch weit weniger als die fehlerhaften Vektoren am Rand für $\gamma = 0,00915$ oder die viel zu kleinen Vektoren für $\gamma = 0,95$. Auch die Fehlerberechnung bestätigt, dass die Qualität der Rekonstruktion durch die Kombination beider Werte für γ eindeutig gesteigert werden kann:

$$\begin{array}{lll} \gamma = 0,00915 : & L = 0,09404 , & W = 0,17366 , & L + W = 0,2677 , \\ \gamma = 0,95 & : & L = 0,41477 , & W = 0,00264 , & L + W = 0,4174 , \\ \text{Kombination :} & L = 0,09404 , & W = 0,00264 , & L + W = 0,0967 . \end{array}$$

Die Vektorfelder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$

Im Folgenden soll nun das Vektorfeld $f(x) = (1, 1, 1)^T$ betrachtet werden. Auch dieses ist offensichtlich divergenzfrei und kann damit vollständig rekonstruiert werden. Sicherlich ist es dem Leser, ähnlich wie bei $f(x) = (1, 0, 0)^T$, ohne Schwierigkeiten möglich, sich dieses Feld vorzustellen und sich dadurch eine eigene Meinung zur Qualität der Berechnungen zu bilden, ohne

sich auf die Bilder der Originaldaten verlassen zu müssen. Ein Vergleich von korrektem Feld und der besten Rekonstruktion in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ ist in Abbildung 5.18 zu sehen. Es bleibt hier noch anzumerken, dass der für dieses Feld als optimal bestimmte Regularisierungsparameter sehr nah an dem für $f(x) = (1, 0, 0)^\top$ ermittelten von $\gamma = 0,01105$ liegt, was vermutlich auf die Ähnlichkeit der beiden Felder zurückzuführen ist. Wie Grafik 5.18 zeigt,

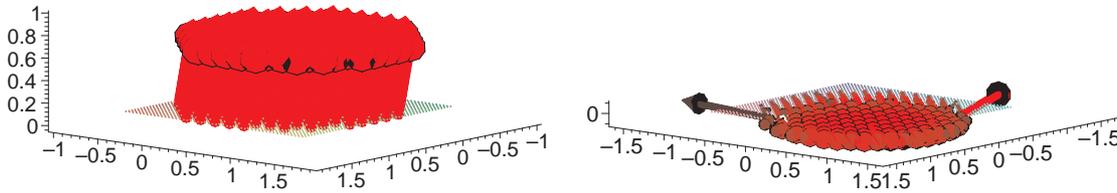


Abbildung 5.18: LINKS: Korrektes Vektorfeld $f(x) = (1, 1, 1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 40^\circ, \varphi = 80^\circ]$.
RECHTS: Rekonstruktion für $\gamma = 0,0113$ aus identischem Blickwinkel.

verlaufen die Vektoren ausschließlich in der Ebene, die x_3 -Komponente ist Null und konnte damit offensichtlich nicht korrekt rekonstruiert werden. Bei den vorangegangenen Vektorfeldern konnte dieses Problem nicht auftreten, da es sich dabei stets um divergenzfreie, ebene Felder handelt, die senkrecht zu $(0, 0, 1)^\top$ sind. Speziell bei der Rekonstruktion von Vektorfeldern in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ muss man sich also mit einem weiteren schwierigen Problem beschäftigen. Betrachtet man einen Richtungsvektor $\tilde{\theta}$ in dieser Ebene genauer, so wird klar, dass dessen dritte Komponente immer Null sein muss, d.h. für $\tilde{\theta} \in \{x_3 = 0\}$ gilt offensichtlich $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, 0)^\top$. Mit Hilfe der Definition 5.1.2 der Doppler-Transformation \mathfrak{D}

$$\mathfrak{D}f(\alpha, \theta) = \int_0^\infty \langle f(\alpha + t\theta), \theta \rangle dt$$

kann man nun leicht die Projektion eines beliebigen Vektorfeldes $f(x)$ auf einen solchen Richtungsvektor berechnen und sieht, dass $f_3(x)$ in diesem speziellen Fall nicht rekonstruiert werden kann, denn:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}f(\alpha, \tilde{\theta}) &= \int_0^\infty \langle f(\alpha + t\tilde{\theta}), \tilde{\theta} \rangle dt = \int_0^\infty \left\langle \begin{pmatrix} f_1(\alpha + t\tilde{\theta}) \\ f_2(\alpha + t\tilde{\theta}) \\ f_3(\alpha + t\tilde{\theta}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_1 \\ \tilde{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^\infty f_1(\alpha + t\tilde{\theta}) \cdot \tilde{\theta}_1 + f_2(\alpha + t\tilde{\theta}) \cdot \tilde{\theta}_2 dt. \end{aligned}$$

Aber auch für diejenigen Ebenen $\{x_3 = k\}$, $-1 \leq k \leq 1$ mit $k \neq 0$, ist die Rekonstruktion von $f_3(x)$ außergewöhnlich schwierig.

Schon im Zusammenhang mit der Cone Beam Transformation wurde auf Seite 79 der Wert für die dritte Komponente θ_3 eines Richtungsvektors $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^\top$ bei einer kreisförmigen

Abtastkurve mit Radius R abgeschätzt. Ist r der Radius des Objektes, so gilt:

$$-\frac{r}{R} \leq \theta_3 \leq \frac{r}{R}.$$

Die für die numerischen Berechnungen verwendeten Werte von $R = 3$ und $r = 1$ führen zu

$$-\frac{1}{3} \leq \theta_3 \leq \frac{1}{3}.$$

Damit übersteigt der Winkel ϑ zwischen der Tangente an den Rand des Rekonstruktionsgebietes Ω und der Kreisebene einen Wert von $\vartheta \approx 19,47^\circ$ nicht, vergleiche dazu auch Abbildung 4.15. Während θ_1 und θ_2 alle Werte in $[-1, 1]$ annehmen, ist θ_3 auf $[-1/3, 1/3]$ beschränkt, wobei das Maximum in jedem Abtastpunkt nur für den zentralen Bereich des Strahlenkegels angenommen wird und alle weiteren Werte deutlich kleiner sind. Dieses Problem wird – bei gleichbleibendem Rekonstruktionsgebiet Ω – noch gravierender, je größer R gewählt wird, d.h. je weiter die Röntgenquelle vom Objekt entfernt ist. Diese Beschränkung der dritten Komponente des Richtungsvektors könnte auch dafür verantwortlich sein, dass sich die Rekonstruktionen der verschiedenen Ebenen in Bezug auf die Intensität der Vektoren und die Richtungsfehler am Rand unterscheiden, und dass für jede Ebene ein anderer optimaler Regularisierungsparameter gewählt werden muss.

Dies zeigt, dass man, zumindest für die Ebene $\{x_3 = 0\}$, keinen Unterschied in den Rekonstruktionen für die x_3 -Koordinate der Felder $f(x) = (1, 1, f_3(x))^T$ erwarten kann, diese sollte immer zu Null ausgewertet werden. Anhand der obigen Rechnung für $\mathfrak{D}f(\alpha, \tilde{\theta})$ dürften sich theoretisch auch die anderen beiden Koordinaten, die jeweils als Eins berechnet werden müssten, nicht unterscheiden. Da aber der Rekonstruktionskern ψ auch Ebenen über und unter der zu rekonstruierenden in die Berechnungen miteinbezieht, kommt es zu kleineren Differenzen in den entsprechenden Resultaten, da für diese Ebenen $x_3 \neq 0$ gilt. Dies verdeutlicht Abbildung 5.19 durch einen direkten Vergleich der Vektorfelder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$. Man

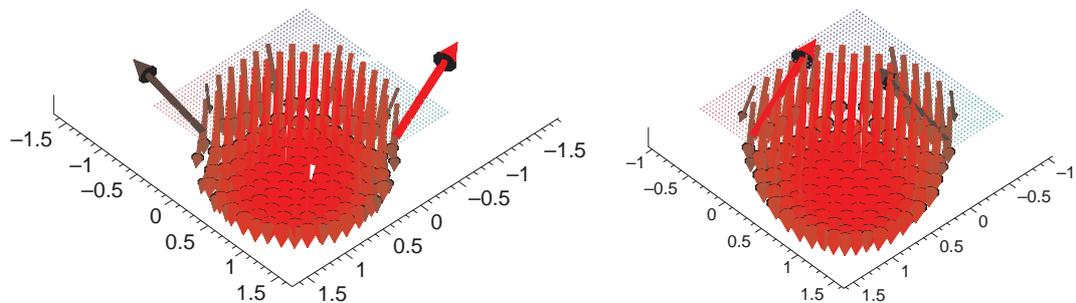


Abbildung 5.19: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 47^\circ, \varphi = 47^\circ]$.
RECHTS: Analog für $f(x) = (1, 1, -1)^T$.

stellt fest, dass die Vektoren für $f(x) = (1, 1, 1)^T$ an den beiden Rändern des Rekonstruktionsgebietes eine konkave Form beschreiben, während für $f(x) = (1, 1, -1)^T$ eine konvexe Krümmung

entsteht. Auch an den beiden sichtbaren fehlerhaften Vektoren kann man diese Unterschiede in der Richtung verifizieren. Der Längen- und Winkelfehler ist identisch:

$$L = 0,4373, \quad W = 0,155, \quad L + W = 0,5927.$$

Der Wechsel der Perspektive in Abbildung 5.20 zeigt nochmals klarer, dass es sich um absolut ebene Vektorfelder handelt, welche mit Hilfe des Algorithmus berechnet werden. Für die weiter

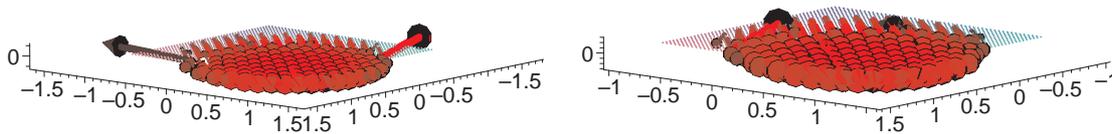


Abbildung 5.20: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 40^\circ, \varphi = 80^\circ]$.
RECHTS: Analog für $f(x) = (1, 1, -1)^T$.

von der Abtastebene $\{x_3 = 0\}$ entfernt liegenden Ebenen kann nur ein minimaler Anteil der x_3 -Komponente des jeweiligen Feldes aus den Daten berechnet werden.

Die Abbildungen 5.21 sowie 5.22 zeigen eine Gegenüberstellung der entsprechenden Rekonstruktionen der Vektorfelder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in den Ebenen $\{x_3 = 0,7\}$ für $\gamma = 0,012$ beziehungsweise $\{x_3 = 0,9\}$ für $\gamma = 0,01165$. Die unzureichende Bestimmung der x_3 -Komponente wird durch die leicht nach oben beziehungsweise nach unten zeigenden Vektoren, die entsprechende Skala sowie die das Rekonstruktionsgebiet kennzeichnenden Punkte, die für $f(x) = (1, 1, -1)^T$ oberhalb der Vektoren zu sehen sind, verdeutlicht. Wie es dennoch möglich ist, eine vollständige Rekonstruktion eines beliebigen, divergenzfreien, dreidimensionalen Vektorfeldes zu berechnen, soll in Abschnitt 5.3.1 geklärt werden.

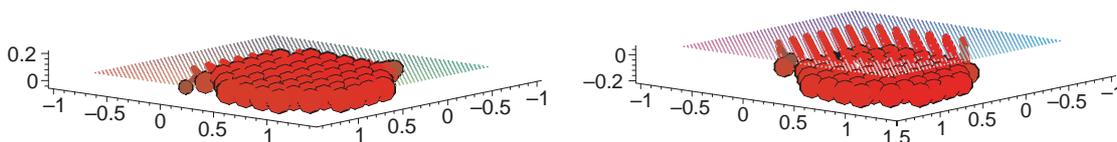


Abbildung 5.21: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,7\}$ für $\gamma = 0,012$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 40^\circ, \varphi = 80^\circ]$.
RECHTS: Analog für $f(x) = (1, 1, -1)^T$.

Zur Vervollständigung der Behandlung des Vektorfeldes $f(x) = (1, 1, 1)^T$ sei an dieser Stelle noch erwähnt, dass sich für sehr kleine und sehr große Werte von γ ($\gamma \approx 0,005$ beziehungsweise $\gamma \approx 7$) die Richtungen der Vektoren am Rand von Ω erheblich besser rekonstruieren lassen, dass sich aber gleichzeitig die Länge der Vektoren in diesen Fällen verschlechtert. Wie schon

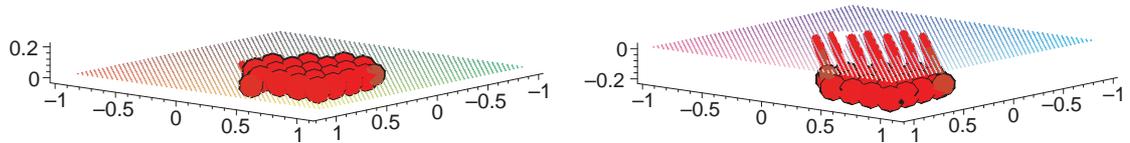


Abbildung 5.22: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0,9\}$ für $\gamma = 0,01165$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 40^\circ, \varphi = 80^\circ]$.
RECHTS: Analog für $f(x) = (1, 1, -1)^T$.

für das Feld $f(x) = (1, 0, 0)^T$ ist es auch hier möglich, das Ergebnis durch Kombination zweier Berechnungen für unterschiedliche γ zu verbessern. Dazu wurde hier $\gamma = 0,0124$ für die Länge und $\gamma = 7$ für die Richtung der Vektoren gewählt. Wie man in Abbildung 5.23 sieht, ist die dadurch erreichte Aufwertung des Ergebnisses jedoch nicht gravierend. Einzig die in die falsche Richtung zeigenden Vektoren am Rand haben sich umgekehrt, sind aber dennoch viel zu groß, so dass sie auch in diesem Fall als störend empfunden werden. Auch die Berechnung der Fehler

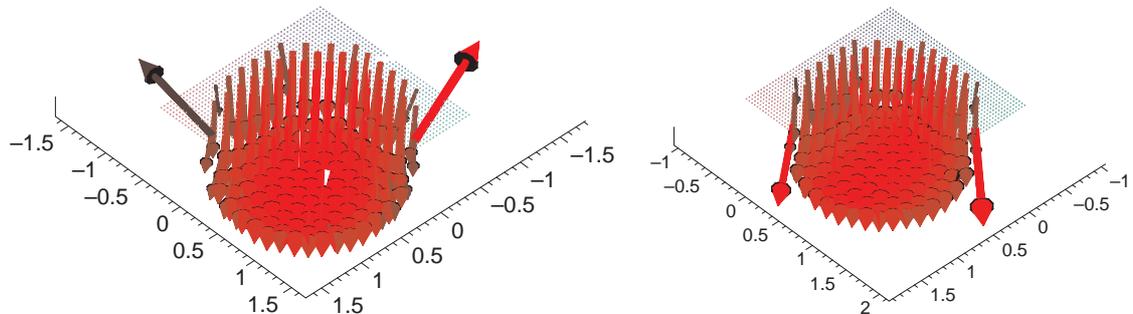


Abbildung 5.23: LINKS: Bislang beste Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 47^\circ, \varphi = 47^\circ]$.
RECHTS: Kombination der Rekonstruktionen für $\gamma = 0,0124$ (Länge) und $\gamma = 7$ (Richtung) aus identischem Blickwinkel.

L und W bestätigt das geringe Ausmaß der Verbesserungen:

$$L = 0,4365, \quad W = 0,1244, \quad L + W = 0,5609.$$

Gerade für dieses Vektorfeld hat es sich als besonders schwierig herausgestellt, eine geeignete Wahl von γ für eine gute Rekonstruktion der Länge der Vektoren zu finden, ohne dass die fehlerhaften Vektoren am Rand zu stark dominieren.

5.3.1 Vollständige Rekonstruktion eines dreidimensionalen Vektorfeldes

Im vorangegangenen Abschnitt wurde anhand der beiden Vektorfelder $f(x) = (1, 1, 1)^T$ und $f(x) = (1, 1, -1)^T$ gezeigt, dass eine Rekonstruktion der x_3 -Komponente mit der vorgestellten

Messgeometrie nicht möglich ist. In der bisherigen Abtastebene $\{x_3 = 0\}$ wird durch das Skalarprodukt zwischen Vektorfeld $f(x)$ und in dieser Ebene liegendem Richtungsvektor θ die dritte Komponente des Vektorfeldes $f_3(x)$ bei den Messungen ignoriert, da $\theta_3 = 0$ gilt. Für die darüber- oder darunterliegenden Ebenen $\{x_3 = k\}$, $-1 \leq k \leq 1$, $k \neq 0$, sind die Werte für θ_3 so klein, dass auch in diesem Fall $f_3(x)$ nicht korrekt berechnet werden kann.

Demgegenüber zeigen die bis hierhin vorgestellten Ergebnisse jedoch, dass es möglich ist, die ersten beiden Komponenten eines beliebigen divergenzfreien Vektorfeldes $f(x)$ in jeder horizontalen und vertikalen Ebene des Rekonstruktionsgebietes Ω zufriedenstellend zu berechnen.

Nimmt man nun zu der bisherigen kreisförmigen Abtastkurve einen zweiten, dazu senkrechten Kreis mit gleichem Radius in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ hinzu, so ermöglicht dieser die Rekonstruktion von $f_2(x)$ und $f_3(x)$ durch die Verwendung des auf Seite 114 beschriebenen, üblichen Algorithmus. Analog zu den vorhergehenden Betrachtungen kann damit die x_1 -Komponente $f_1(x)$ nicht berechnet werden, da sie auf dieser zusätzlichen Abtastkurve senkrecht steht. Es sollte an dieser Stelle auch erwähnt werden, dass, im Gegensatz zu einem einzelnen Kreis, eine aus zwei orthogonalen Kreisen bestehende Abtastkurve die Bedingungen von Tuy-Kirillov erfüllen. Lade und Paganin schlagen ein ähnliches Vorgehen mittels zweier „perpendicular tilt series“ für ihre longitudinalen und transversalen Messungen bei paralleler Geometrie in [17] vor. Die hier erarbeitete modifizierte Abtastgeometrie mit zwei senkrechten Kreisen ist in Abbildung 5.24 zu sehen. Der zusätzliche Kreis in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ ist dabei grün gekennzeichnet. Weiterhin ist lediglich zu beachten, dass für die vollständige dreidimensionale Berechnung einer Ebene $\{x_3 = k\}$, $-1 \leq k \leq 1$, neben der bisherigen Rekonstruktion eine weitere für den neuen Abtastkreis durchgeführt werden muss. Mit Blick auf die praktische Umsetzung entspricht diese dann nicht einer horizontalen Rekonstruktion wie bisher, sondern einer vertikalen, wie sie beispielsweise für das kreisförmige Vektorfeld $f(x) = (-x_2, x_1, 0)^T$ in Abbildung 5.10 oder für $f(x) = (1, 0, 0)^T$ in Abbildung 5.15 vorgestellt wurde. In einem letzten Schritt ist es nun notwendig, die Resultate für die beiden unterschiedlichen Abtastkreise zu kombinieren. Die Komponenten f_1 und f_2 des Vektorfeldes $f(x)$ erhält man durch den bekannten Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$, f_2 und f_3 mit Hilfe des neuen Kreises in $\{x_1 = 0\}$. Zum Abschluss muss das arithmetische Mittel für die f_2 -Komponente gebildet werden, da diese in beiden Fällen rekonstruiert wird. Die Berechnungen können simultan durchgeführt werden, so dass kaum zusätzliche Zeit, sondern nur mehr Rechenleistung erforderlich ist. Auch im Hinblick auf die Messungen sollte es möglich sein, diese zeitgleich für die beiden Kreise zu realisieren, wobei darauf geachtet werden muss, dass sich durch Streuphänomene und ähnliches keine vermeidbaren Messfehler einschleichen.

Eine Rekonstruktion des Vektorfeldes $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ unter ausschließlicher Verwendung des Abtastkreises in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ ist für $\gamma = 0,007$ aus unterschiedlichen Blickrichtungen in Abbildung 5.25 zu sehen. Auch hier spielt natürlich die Wahl des Regularisierungsparameters γ eine entscheidende Rolle für die Güte der Ergebnisse, wie man an den besseren Resultaten für $\gamma = 0,0113$ in Abbildung 5.26 sieht. Dieser Wert von γ wurde gewählt, da damit für einen Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ die bislang beste Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Abtastebene berechnet wurde. Die Grafiken bestätigen noch einmal, dass es auch für einen Abtastkreis in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ nicht möglich ist, alle drei Komponenten eines Vektorfeldes ordnungsgemäß zu berechnen. Wie schon erwähnt steht in diesem Fall die x_1 -Komponente senkrecht auf der Abtastkurve und kann dadurch bei der Messung der Doppler-Transformation \mathfrak{D} nicht erfasst werden.

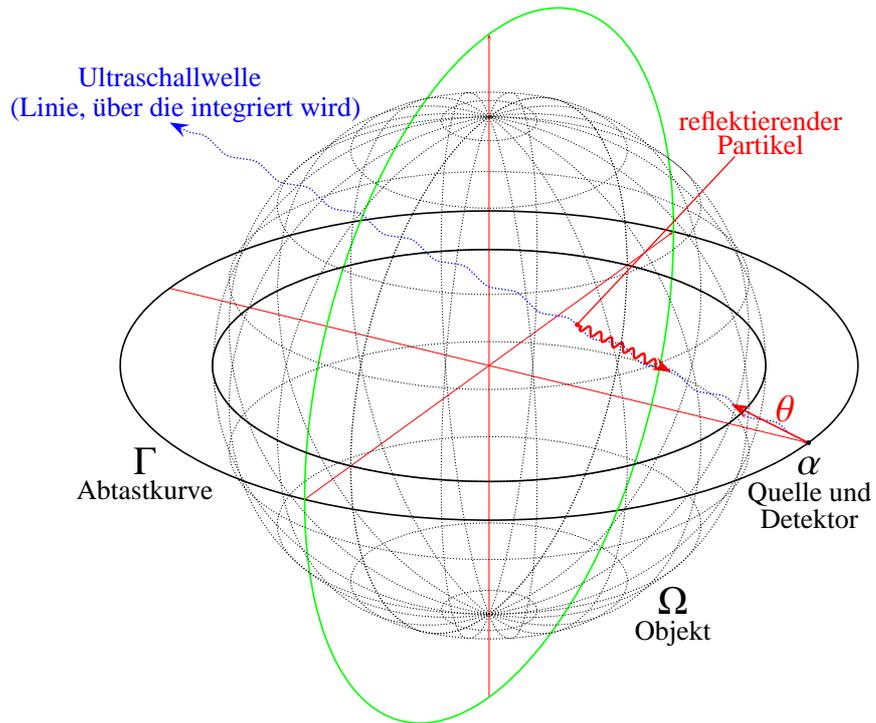


Abbildung 5.24: Illustration des Messaufbaus für die 3D Doppler-Transformation mit zwei zueinander senkrechten Kreisen in den Ebenen $\{x_3 = 0\}$ und $\{x_1 = 0\}$ als Abtastkurve Γ .

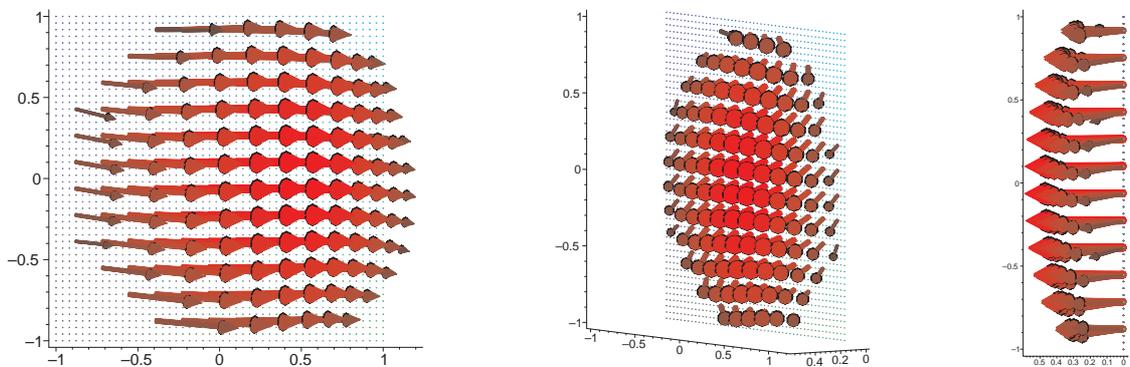


Abbildung 5.25: LINKS: Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = 0\}$ von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ für $\gamma = 0,007$ mit $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 0^\circ, \varphi = 90^\circ]$.
 MITTE: Analog für $[\vartheta = 55^\circ, \varphi = 85^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 90^\circ]$.

Für den Regularisierungsparameter $\gamma = 0,007$ zeigt Abbildung 5.25, dass die Vektoren ins-

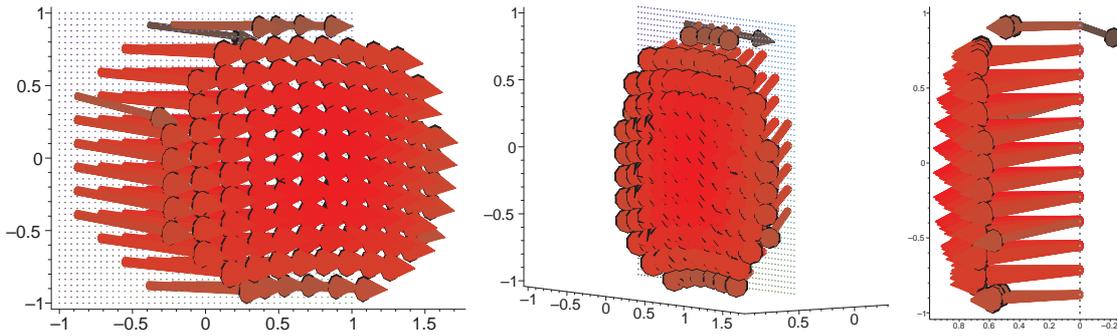


Abbildung 5.26: LINKS: Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = 0\}$ von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ für $\gamma = 0,0113$ mit $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 0^\circ, \varphi = 90^\circ]$.
 MITTE: Analog für $[\vartheta = 55^\circ, \varphi = 85^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 90^\circ]$.

gesamt viel zu kurz sind. Die Pfeile am Rand sind im Vergleich zu den restlichen ebenfalls wesentlich kleiner und zeigen zudem eine leicht fehlerhafte Rekonstruktion der Richtung. Die sich durch die unterschiedliche Länge ergebende Wölbung ist für $\gamma = 0,0113$ in Abbildung 5.26 nicht mehr so stark ausgeprägt. Zwar bestehen weiterhin Probleme am Rand hinsichtlich Länge und Richtung, der überwiegende Teil des Feldes ist aber gut berechnet worden. Die meisten Vektoren erreichen auch die zu erwartende Länge, allerdings treten einige störende Pfeile in die falsche Richtung auf, die den ansonsten guten Gesamteindruck etwas trüben.

Verwendet man nun die beiden zueinander orthogonalen Kreise gleichzeitig, so ist es nach den Vorbemerkungen möglich, ein beliebiges, divergenzfreies Vektorfeld komplett zu berechnen. Das Ergebnis ist für $f(x) = (1, 1, 1)^T$ für einen Regularisierungsparameter $\gamma = 0,007$ in Abbildung 5.27 und für $\gamma = 0,0113$ in Abbildung 5.28 zu sehen. Leider ist es durch die eingeschränkten Visualisierungsmöglichkeiten notwendig, verschiedene Blickwinkel zu präsentieren, um alle Aspekte des Feldes korrekt wiedergeben zu können. Betrachtet man wiederum die in den Rekonstruktionen für $\gamma = 0,007$ und $\gamma = 0,0113$ auftretenden Fehler, so ergeben sich auch für die Kombination der beiden Abtastkurven die gleichen Probleme. Der Regularisierungsparameter $\gamma = 0,007$ führt zu wesentlich größeren Fehlern am Rand der Rekonstruktion, wie man am Vergleich der jeweils linken Bilder erkennen kann. Die Vektoren zeigen dieselbe konkave Form, die schon vorher für $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\}$ beobachtet werden konnte. Dies ist für $\gamma = 0,0113$ merklich verbessert, allerdings treten in diesem Fall wieder störende Vektoren in die falsche Richtung auf. Auch die Länge der Pfeile ist für das größere der beiden γ augenscheinlich besser berechnet worden. Dadurch wird auch die starke Wölbung in der rechten Grafik für $\gamma = 0,007$ ausgeglichen. Es sollte an dieser Stelle allerdings nicht unerwähnt bleiben, dass für beide Abtastkreise der gleiche Wert für γ gewählt wurde, d.h. speziell für den Kreis in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ ist dieser nicht optimal. Die Fehler berechnen sich für die entsprechenden Rekonstruktionen zu:

$$\begin{aligned} \gamma = 0,007 & : L = 0,6627, \quad W = 0,008386, \quad L + W = 0,67105, \\ \gamma = 0,0113 & : L = 0,2122, \quad W = 0,014945, \quad L + W = 0,22719 \end{aligned}$$

und bestätigen damit die oben beschriebenen subjektiven Beobachtungen.

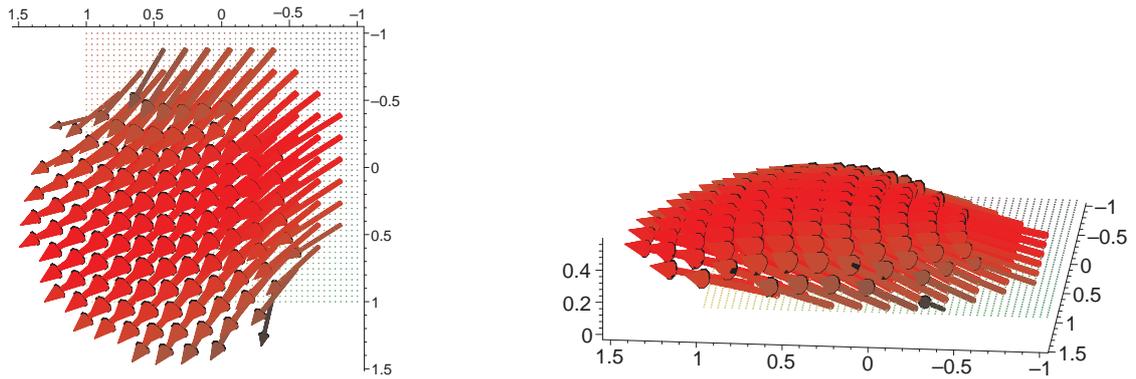


Abbildung 5.27: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

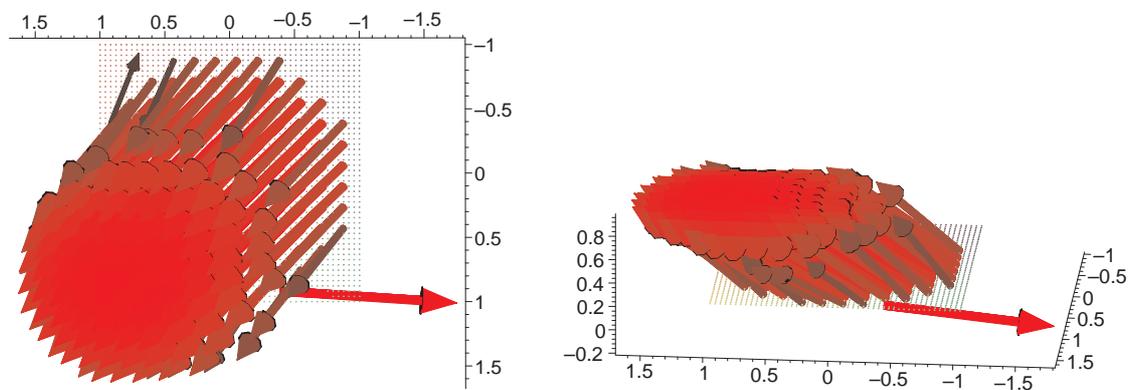


Abbildung 5.28: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes sollen noch die entsprechenden Rekonstruktionen des Vektorfeldes $f(x) = (1, 1, -1)^T$ präsentiert werden, um dem Leser sowohl einen direkten Vergleich mit $f(x) = (1, 1, 1)^T$ zu erlauben als auch den Beweis anzutreten, dass die x_3 -Richtung korrekt berechnet wird. Auf die Bilder der nur auf einem Abtastkreis in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ beruhenden Rekonstruktionen wird zur Verkürzung der Präsentation verzichtet. Abbildung 5.29 zeigt eine Rekonstruktion des Vektorfeldes $f(x) = (1, 1, -1)^T$ für $\gamma = 0,007$ mit der Abtastkurve $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$, während für die Erstellung von Abbildung 5.30 $\gamma = 0,0113$ verwendet wurde. Leider ist in den jeweils linken Bildern nur schlecht zu erkennen, dass sich das Rekonstruktionsgitter oberhalb der Vektoren befindet und die Pfeile nach unten zeigen. Dennoch

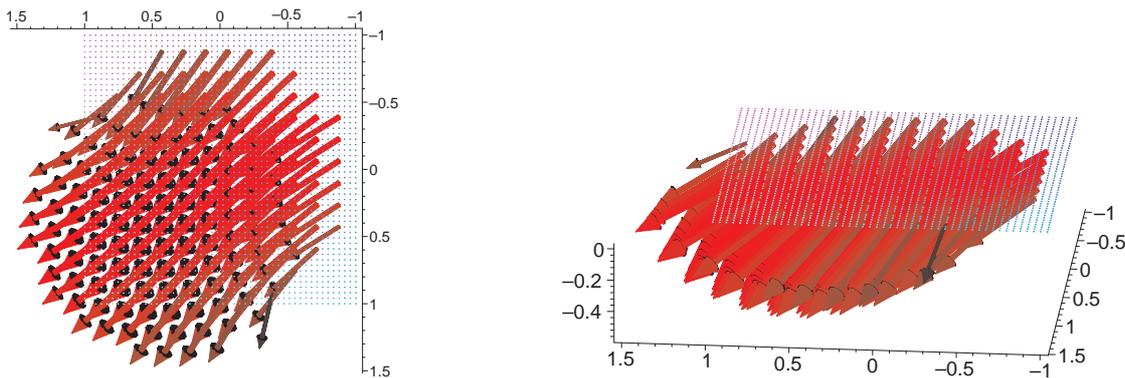


Abbildung 5.29: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

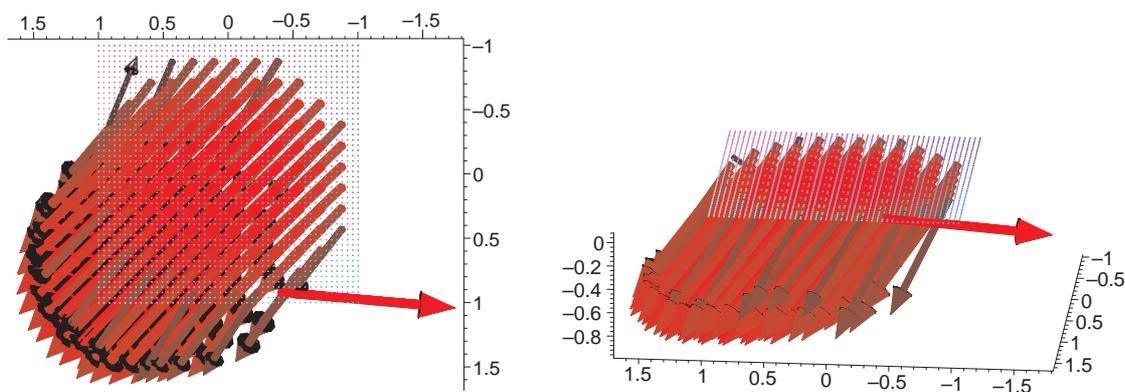


Abbildung 5.30: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, -1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_1 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

ist diese Ansicht notwendig, um die korrekte Darstellung in x_1 - und x_2 -Richtung zu dokumentieren. Die jeweils rechten Grafiken zeigen klar, dass die Vektoren in die negative x_3 -Richtung zeigen. Vergleicht man nun diese mit den entsprechenden Abbildungen 5.27 und 5.28 für das Vektorfeld $f(x) = (1, 1, 1)^T$, so stellt man fest, dass erwartungsgemäß die gleichen Probleme auftreten und die x_3 -Richtung der Vektoren der einzige feststellbare Unterschied ist. Die zu kurzen Vektoren und die sich daraus ergebende starke Wölbung sowie das konkave Verhalten am Rand sind für $\gamma = 0,007$ ebenso auffällig, wie die wenigen in die falsche Richtung zeigenden Vektoren für $\gamma = 0,0113$. Diese Beobachtungen lassen sich auch durch die Berechnung von

Längen- und Winkelfehler für die beiden Regularisierungsparameter verifizieren:

$$\begin{aligned} \gamma = 0,007 & : L = 0,6622, \quad W = 0,008268, \quad L + W = 0,67047, \\ \gamma = 0,0113 & : L = 0,2081, \quad W = 0,014120, \quad L + W = 0,22225. \end{aligned}$$

Während für $\gamma = 0,007$ die Richtungen deutlich besser wiederhergestellt werden, besitzt bei der Länge der Vektoren und auch beim Gesamtfehler $\gamma = 0,0113$ einen klaren Vorteil. Insgesamt lässt sich also festhalten, dass für sich gleichende Vektorfelder bei identischem γ eine ähnliche Qualität der Rekonstruktionen zu erwarten ist, oder anders ausgedrückt, dass bei der Behandlung vergleichbarer Vektorfelder der Wert von γ nicht sehr stark variiert werden muss. Dies wird rückblickend auch am bereits vorgestellten Beispiel $f(x) = (1, 0, 0)^T$ ersichtlich, welches einige Gemeinsamkeiten mit den zuletzt behandelten Feldern aufweist. Die beste Rekonstruktion in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ mit Hilfe von $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\}$ wurde dabei für $\gamma = 0,01105$ erzielt, was sehr nahe bei dem für $f(x) = (1, 1, \pm 1)^T$ ermittelten Wert von $\gamma = 0,0113$ liegt.

Weitere Alternativen bei der Wahl der Abtastkurve

Wie man im vorangegangenen Abschnitt gesehen hat, ist es mit dem hier vorgestellten Verfahren möglich, ein dreidimensionales Vektorfeld vollständig zu rekonstruieren. Bei genauerer Betrachtung stellt man allerdings fest, dass die Wahl des zweiten orthogonalen Abtastkreises in der Ebene $\{x_1 = 0\}$ recht willkürlich ist. Es bedarf lediglich einer Möglichkeit, die x_3 -Komponente eines Vektorfeldes zu rekonstruieren, da dies von einer kreisförmigen Abtastkurve in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ nicht geleistet werden kann. Ein Kreis in der Ebene $\{x_2 = 0\}$ mit gleichem Radius R erfüllt diese Forderungen an eine zusätzliche Abtastkurve ebenfalls, mit der Einschränkung, dass eine Berechnung der x_2 -Komponente in diesem Fall nicht möglich ist. Da die x_1 -Koordinate mit Hilfe beider Abtastkreise berechnet werden kann, ist hier eine Mittelung über die beiden Ergebnisse notwendig. Selbstverständlich kann man auch auf den Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ komplett verzichten und stattdessen die beiden anderen Alternativen für eine vollständige Rekonstruktion eines dreidimensionalen Vektorfeldes kombinieren. Verwendet man stattdessen alle drei zueinander orthogonalen Abtastkreise, so wird dadurch jede Komponente des Vektorfeldes doppelt berechnet. Die Ermittlung dieser redundanten Informationen kostet zwar mehr Zeit als eigentlich notwendig, bietet aber die Möglichkeit, Fehler bei der Wahl der verschiedenen Regularisierungsparameter auszugleichen. Die drei möglichen, zueinander jeweils orthogonalen Abtastkreise sind in Abbildung 5.31 zu sehen, wobei der in diesem Abschnitt neu eingeführte Kreis in der Ebene $\{x_2 = 0\}$ in hellblau gezeichnet wurde.

Im Folgenden bezeichnen $\Gamma_1 = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\}$, $\Gamma_2 = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\}$ und $\Gamma_3 = 3S^2 \cap \{x_2 = 0\}$ die in der Reihenfolge ihres Auftretens in dieser Arbeit durchnummerierten kreisförmigen Abtastkurven. In einem Quellpunkt jedes dieser Kreise ist in der Illustration 5.31 zusätzlich ein Koordinatensystem eingezeichnet, dessen Achsen aus Gründen der Übersichtlichkeit und besseren Verständlichkeit mit x, y, z statt x_1, x_2 und x_3 bezeichnet wurde. Diese Koordinatensysteme sollen den Umstand verdeutlichen, dass die von einer der beiden Abtastkurven Γ_2 und Γ_3 gemessenen Daten als die eines gedrehten Vektorfeldes für den ursprünglichen Algorithmus, d.h. unter Verwendung von Γ_1 , interpretiert werden können. Ziel ist dabei die Rekonstruktion der dunkelblauen Ebene $\{x_3 = 0\}$.

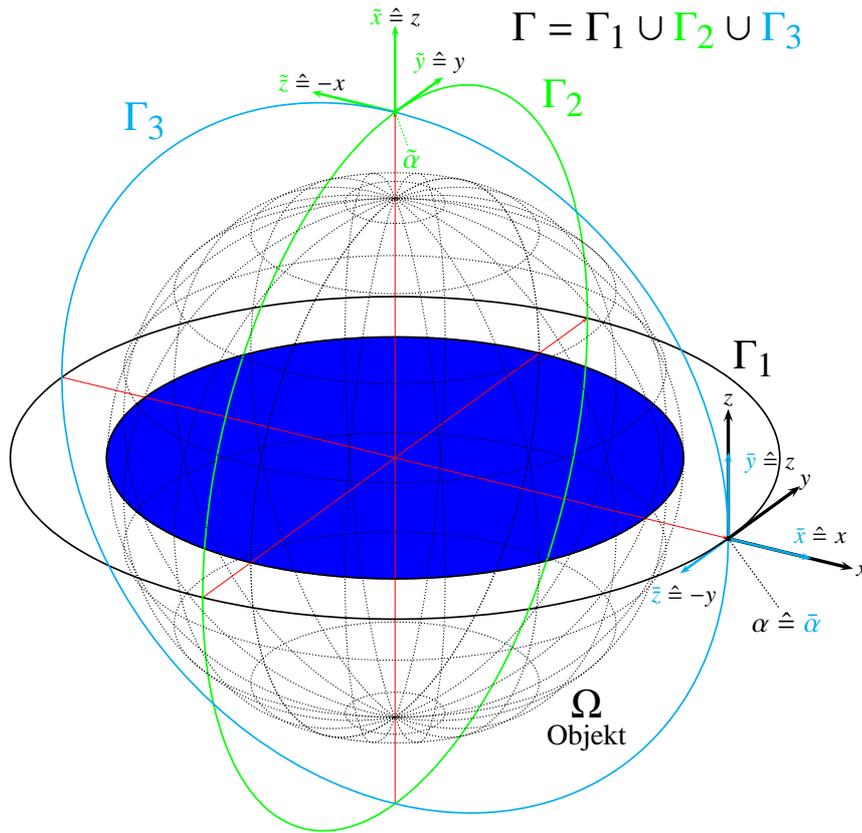


Abbildung 5.31: Rekonstruktion der blau hervorgehobenen Ebene mit dem beschriebenen Algorithmus ausgehend von unterschiedlichen Abtastkreisen.

Die in schwarz dargestellte Kurve Γ_1 war Ausgangspunkt für die ersten Rekonstruktionen und Grundlage für die Programmierung des Algorithmus. Dies hat sich durch die Verwendung dieser Messgeometrie für die Cone Beam Transformation \mathfrak{D} in der Arbeit von Weber [52] und die Übertragung der entsprechenden Ergebnisse auf die Doppler-Transformation \mathfrak{D} ergeben.

Dreht man nun Γ_1 in mathematisch negativer Richtung um 90° um die y -Achse, so erhält man den grün dargestellten Kreis Γ_2 , der in der Ebene $\{x = 0\}$ liegt. Der zu Γ_1 gehörende Quellpunkt α wird dabei auf $\tilde{\alpha}$ gedreht. Man verwendet nun das bestehende Programm zur Rekonstruktion der zu Γ_2 senkrecht stehenden, blauen Ebene in $\{\tilde{x} = 0\}$. Dabei werden die gemessenen Daten als Drehung des ursprünglichen Vektorfeldes mit Koordinatentransformation $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})^\top \mapsto (z, y, -x)^\top$ interpretiert. Die Drehmatrix kann als

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

angegeben werden. Dies wird durch die entsprechenden Koordinatensysteme repräsentiert, wo-

bei eine Gleichung der Form $\tilde{x} \hat{=} z$ bedeutet, dass die neue x -Koordinate \tilde{x} für den grünen Abtastkreis Γ_2 der z -Koordinate des üblichen, schwarzen Abtastkreises Γ_1 entspricht.

Durch eine Rotation von Γ_1 um 90° in mathematisch positiver Richtung um die x -Achse erhält man Γ_3 mit Abtastebene $\{y = 0\}$. Der ursprüngliche Quellpunkt α ist mit dem neuen Quellpunkt $\bar{\alpha}$ identisch. Die Koordinatentransformation lautet in diesem Fall $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})^\top \mapsto (x, z, -y)^\top$, die Drehmatrix

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für Γ_3 muss die zur Abtastkurve senkrechte, blaue Ebene in $\{\bar{y} = 0\}$ rekonstruiert werden.

Ein Vorteil dieser speziellen Wahl der Abtastkurven ist es also, dass der ursprüngliche Algorithmus und dessen Implementation auch für die zusätzlichen Berechnungen weiterhin benutzt werden können. Die Ergebnisse der verschiedenen Kombinationen von Γ_i , $i = 1, 2, 3$, sollen im Folgenden weiterhin an dem einfachen Beispiel $f(x) = (1, 1, 1)^\top$ präsentiert werden. Auf die Darstellung von $f(x) = (1, 1, -1)^\top$ wird verzichtet, da sich außer der x_3 -Richtung der Vektoren keine wesentlichen Änderungen ergeben und damit auch keine neuen Erkenntnisse aus den Tests hergeleitet werden können.

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$

Nachdem die Kombination $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ bereits behandelt wurde, soll nun auf $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$ eingegangen werden. Die Regularisierungsparameter $\gamma = 0,007$ und $\gamma = 0,0113$ werden weiterhin beibehalten, entsprechende Rekonstruktionen in der Ebene $\{x_3 = 0\}$, für die auch alle zukünftigen Berechnungen durchgeführt werden, sind in Abbildung 5.32 beziehungsweise 5.33 zu sehen. Im Vergleich zu den Rekonstruktionen unter Verwendung von $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ist für

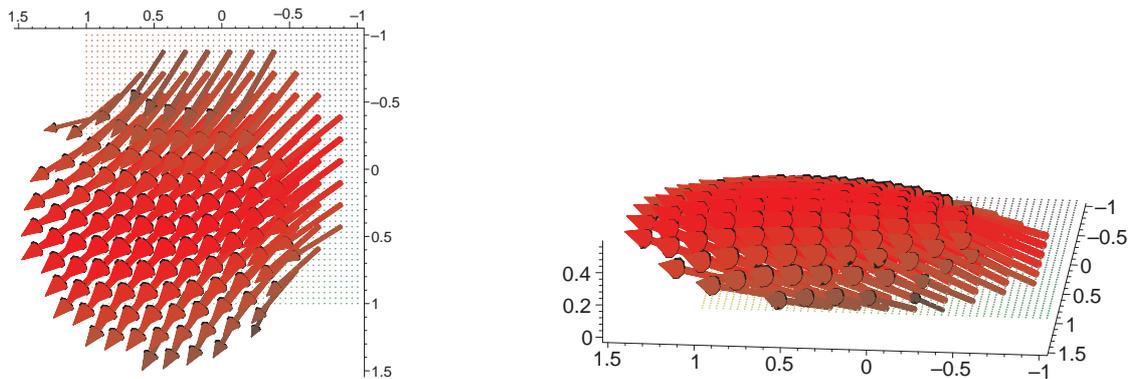


Abbildung 5.32: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.

RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

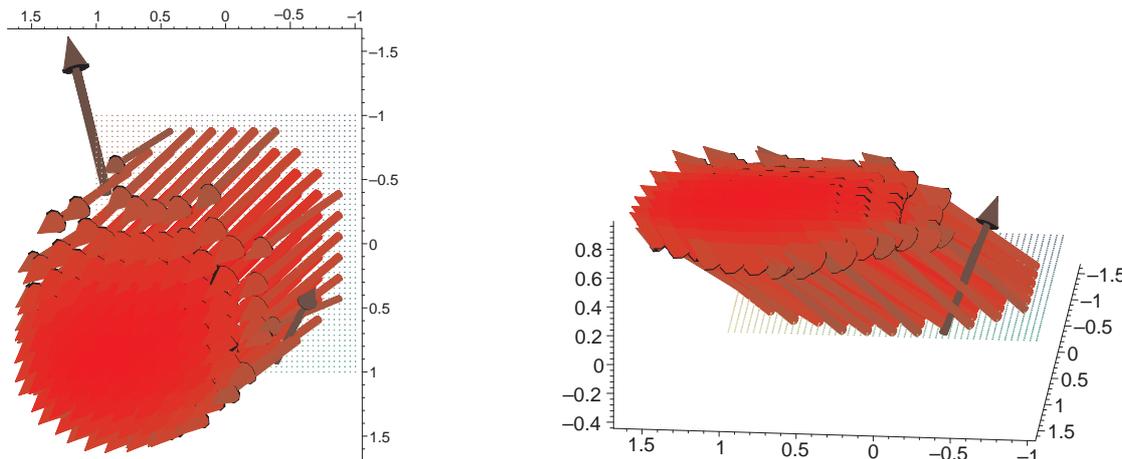


Abbildung 5.33: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

$\gamma = 0,007$ kein signifikanter Unterschied erkennbar. Vor allem im Hinblick auf die Richtung der Vektoren hinterlässt das berechnete Vektorfeld einen guten Eindruck, auch wenn weiterhin die konkave Biegung am Rand und die durch die zu kurzen Vektoren bedingte Wölbung zu sehen sind. Für $\gamma = 0,0113$ wird hingegen die Länge der Vektoren besser berechnet, allerdings zeigen einige – auch längere – Pfeile in die falsche Richtung, so dass das ansonsten recht gute Gesamtbild gestört wird. Diese subjektive Interpretation kann auch durch die Fehlerberechnung bestätigt werden, die insbesondere für die Richtung bei $\gamma = 0,007$ und die Länge bei $\gamma = 0,0113$ gute Werte liefert:

$$\begin{aligned} \gamma = 0,007 & : L = 0,6623, \quad W = 0,008131, \quad L + W = 0,67045, \\ \gamma = 0,0113 & : L = 0,2080, \quad W = 0,014604, \quad L + W = 0,22261. \end{aligned}$$

Es sei hier zudem vorweggenommen, dass dies das beste erreichte Ergebnis für $\gamma = 0,007$ darstellt, wobei sich der bereits vorgestellte Versuch für $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ als nur minimal schlechter herausgestellt hat.

$\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

Lässt man nun die kreisförmige Abtastkurve in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ außen vor und verwendet nur die beiden anderen, so kann die x_3 -Komponente doppelt, die beiden anderen Komponenten jeweils nur einmal berechnet werden. Die Abbildungen 5.34 und 5.35 zeigen die Resultate. Die Ergebnisse für den kleineren Wert des Regularisierungsparameters sind schlechter als die vorangegangenen was vor allem an den Richtungen am Rand zu sehen ist. Die Vektoren fächern im vorderen Bereich stärker auf und biegen sich zusätzlich weiter nach außen. Für $\gamma = 0,0113$ hat sich die Berechnung der Richtung dagegen merklich präzisiert und auch die Länge der Vektoren,

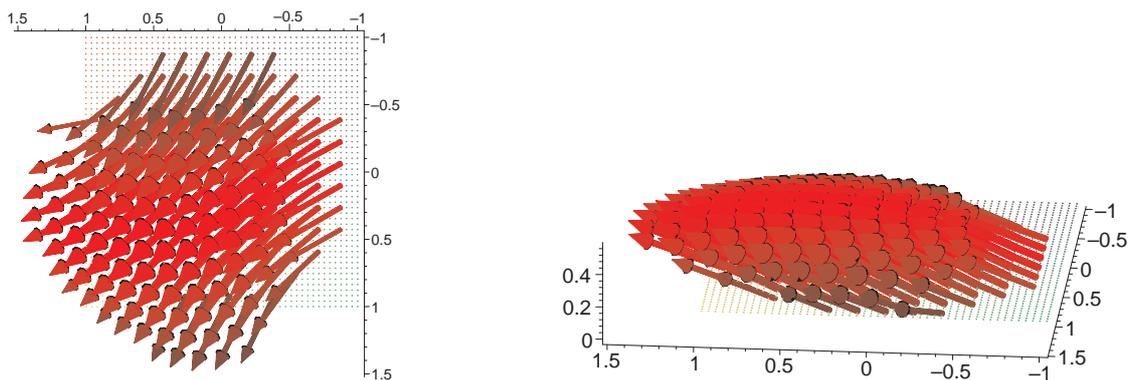


Abbildung 5.34: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

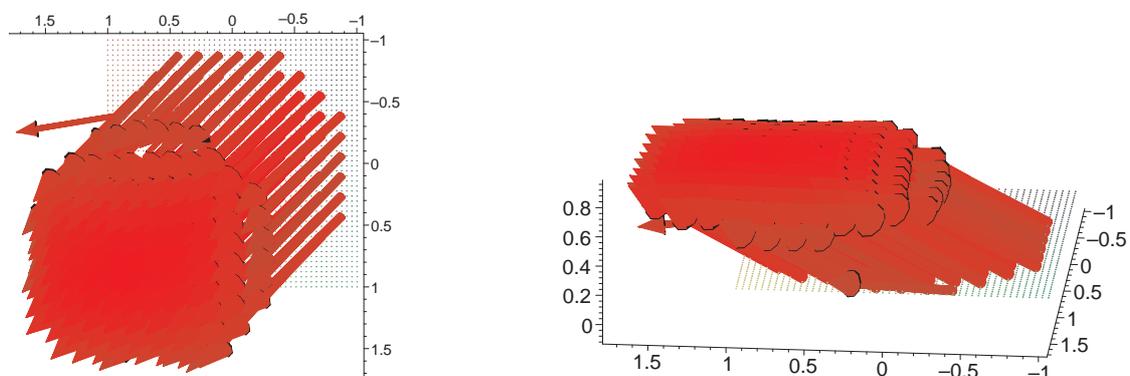


Abbildung 5.35: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

die sich letztendlich auch in der Farbgebung der Pfeile widerspiegelt, erscheint homogener als in den vorangegangenen Versuchen. Lediglich am Rand ist ein relativ kleiner Vektor sichtbar, der nicht in die korrekte Richtung zeigt. Dieser wird allerdings als wesentlich weniger störend empfunden als in den Beispielen zuvor. Die Auswertung der Fehler

$$\begin{aligned} \gamma = 0,007 & : L = 0,6908, \quad W = 0,009723, \quad L + W = 0,70049, \\ \gamma = 0,0113 & : L = 0,1665, \quad W = 0,002235, \quad L + W = 0,16875, \end{aligned}$$

zeigt, dass man für diese Abtastkurve das bestmögliche Ergebnis für $\gamma = 0,0113$ erhält.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

Auch die Verwendung aller drei möglichen Kreise, d.h. wenn $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ gewählt wird, kann dieses Resultat nicht weiter aufwerten. Die entsprechenden Visualisierungen der Vektorfelder sind in Abbildung 5.36 und 5.37 zu sehen. Die Rekonstruktion für $\gamma = 0,007$ ist etwas

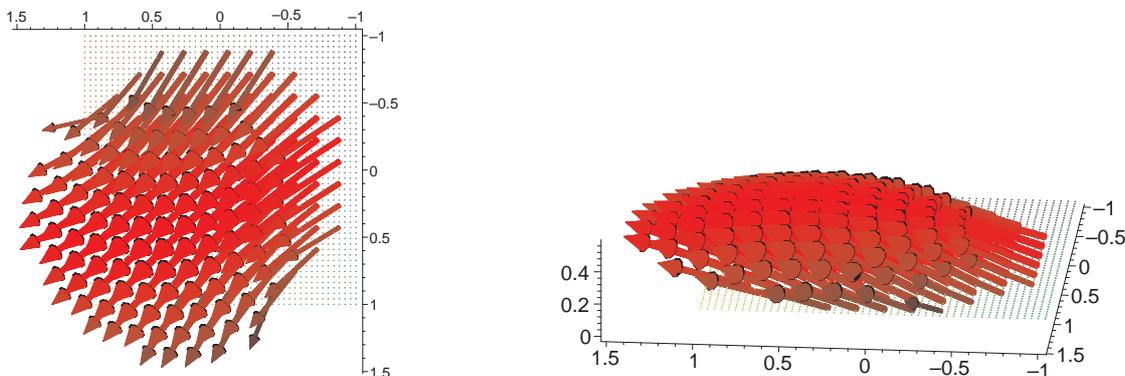


Abbildung 5.36: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,007$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

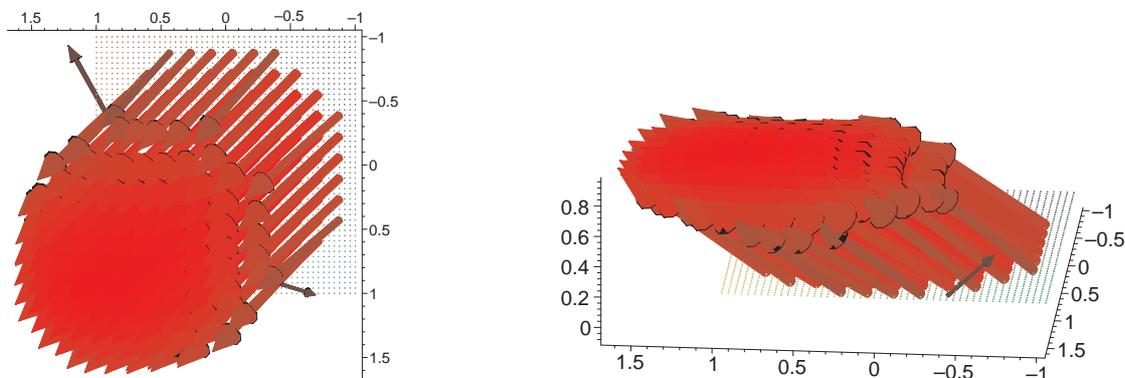


Abbildung 5.37: LINKS: Rekonstruktion von $f(x) = (1, 1, 1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ für $\gamma = 0,0113$ und $\Gamma = 3S^2 \cap \{x_1 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} \cap \{x_3 = 0\}$ aus dem Maple-Blickwinkel $[\vartheta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ]$.
 RECHTS: Analog für $[\vartheta = 95^\circ, \varphi = 70^\circ]$.

genauer als bei gleichzeitiger Benutzung von Γ_2 und Γ_3 , die in Abbildung 5.34 vorgestellt wurde,

erreicht aber nicht ganz die Qualität der beiden anderen möglichen Kombinationen. Man erkennt weiterhin die Probleme am Rand des Rekonstruktionsgebietes und die schon mehrfach beschriebene Wölbung aufgrund der zu kurz berechneten Vektoren. Die Darstellungen für $\gamma = 0,0113$ beinhalten abermals die gleichen störenden Vektoren am Rand, die schon in Abbildung 5.33 für die Kombination von Γ_1 und Γ_3 zu sehen waren. Deren Stärke ist allerdings durch die Mittelung über alle drei Kreise deutlich abgeschwächt, so dass sie in diesem Fall nicht ganz so gravierend wahrgenommen werden. Insgesamt erscheint die Länge der Vektoren bis auf einige Ausnahmen am Rand des Rekonstruktionsgebietes, die zu kurz dargestellt werden und dadurch auch den Eindruck einer leichten Wölbung in der rechten Grafik von Abbildung 5.37 vermitteln, sehr homogen. Auch die Richtung stimmt für den überwiegenden Teil mit dem Original überein. Für die Kombination aller drei Abtastkreise ergeben sich für den Längen- und Winkelfehler folgende Werte:

$$\begin{aligned} \gamma = 0,007 & : L = 0,6726 , \quad W = 0,007866 , \quad L + W = 0,68042 , \\ \gamma = 0,0113 & : L = 0,2016 , \quad W = 0,006956 , \quad L + W = 0,20855 . \end{aligned}$$

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass sich sowohl die subjektiven visuellen Beurteilungen als auch die Auswertungen der Fehler für die mit $\gamma = 0,007$ gemachten Tests nur minimal unterscheiden. Für $\gamma = 0,0113$ erhält man im letzten Fall das zweitbeste Resultat, wobei auch hier der Unterschied zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Abtastkurven nicht erheblich ist.

Es soll an dieser Stelle noch einmal erwähnt werden, dass für alle Abtastkurven der gleiche Regularisierungsparameter γ gewählt wurde. Während γ für die ersten Rekonstruktionen in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ mit Hilfe von Γ_1 zu Beginn dieses Abschnittes noch optimiert wurde, wurde auf diesen Schritt für jeden weiteren Abtastkreis verzichtet, da sich die betreffenden Regularisierungsparameter im Allgemeinen nur unwesentlich unterscheiden. Dennoch ist es möglich durch geschickte Wahl eines γ für jedes Γ_i , $i = 1, 2, 3$, die Resultate zu verbessern. Da, wie ebenfalls gezeigt wurde, für verschiedene Größenordnungen von γ unterschiedliche Aspekte wie Länge und Richtung der Vektoren eines Feldes betont werden, ist auch eine Kombination verschiedener γ für jeden Abtastkreis denkbar. Allerdings muss dabei stets die Dauer für die Berechnung der Rekonstruktionen in Betracht gezogen werden. Ein dreidimensionales, divergenzfreies Vektorfeld kann bereits mit zwei der drei vorgestellten Abtastkreise vollständig rekonstruiert werden, so dass damit die notwendige Minimalanzahl festgelegt ist. Jeder weitere Kreis benötigt sowohl für die Messung der Daten als auch für deren Rekonstruktion zusätzliche Zeit, die im medizinischen Kontext gewöhnlich knapp bemessen ist und nicht in jeder Situation durch eine erhöhte Rechenleistung oder parallele Ausführung des Algorithmus kompensiert werden kann. Dies gilt insbesondere für die Kombination zweier Rekonstruktionen mit unterschiedlichem γ für ein einzelnes Γ_i , wie sie beispielsweise in den Abbildungen 5.14 oder 5.23 vorgestellt wurde. Durch den erhöhten Zeitbedarf wird der Patientendurchsatz verringert, so dass dadurch die Rentabilität des Gerätes eventuell nicht mehr gewährleistet ist. Gerade in medizinischen Anwendungen wird also ein wichtiger Aspekt darin bestehen, stets einen guten Mittelweg zwischen Qualität der Rekonstruktionen und der dafür benötigten Zeit zu finden.

Das Vektorfeld $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$

Bis hierhin wurden zur Vereinfachung der Präsentation und zur übersichtlichen Vermittlung der Ideen lediglich relativ einfache Vektorfelder behandelt, die man sich ohne weitere Berechnungen und ohne Betrachtung der korrekten Daten vorstellen kann. Um nicht den Eindruck zu erwecken, dass das vorgestellte Verfahren nur für diese einfachen Felder funktioniert, soll das Beispiel $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ den Abschluss dieses Kapitels bilden. Ziel ist die vollständige dreidimensionale Rekonstruktion der Ebenen $\{x_3 = -0,4\}$, $\{x_3 = 0\}$ sowie $\{x_3 = 0,4\}$ wie sie in dieser Reihenfolge in Abbildung 5.38 zu sehen sind. Die Orientierung der Plots beruht jeweils auf den in Maple standardmäßig eingestellten Betrachtungswinkeln $\vartheta = \varphi = 45^\circ$. Für

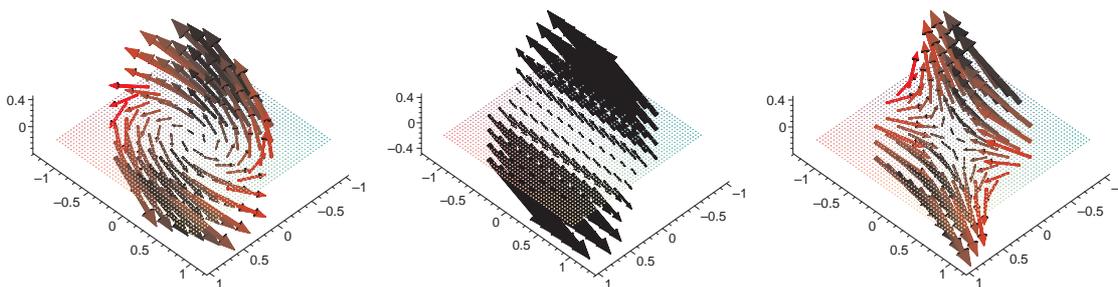


Abbildung 5.38: LINKS: Originaldaten für $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = -0,4\}$.
 MITTE: Analog für die Ebene $\{x_3 = 0\}$.
 RECHTS: Analog für die Ebene $\{x_3 = 0,4\}$.

dieses Beispiel wurde der Regularisierungsparameter sowohl für die jeweilige Ebene als auch für die entsprechende Abtastkurve Γ_i , $i = 1, 2, 3$, optimiert. Die entsprechenden Werte können Tabelle 5.1 entnommen werden. Für Γ_2 und Γ_3 weichen die Regularisierungsparameter innerhalb

	Γ_1	Γ_2	Γ_3
$\{x_3 = -0,4\}$	0,008465	0,01195	0,0119
$\{x_3 = 0\}$	0,00851	0,0122	0,01215
$\{x_3 = 0,4\}$	0,00922	0,01185	0,012

Tabelle 5.1: Optimierte Werte für γ für die entsprechende Abtastkurve zur Rekonstruktion der unterschiedlichen Ebenen.

einer Ebene nur wenig voneinander ab, während der Unterschied im Fall von Γ_1 etwas größer ist. Zudem liegen die Werte von γ für die drei Ebenen bei jeder Kurve recht nah zusammen, die

Tabelle zeigt allerdings auch, dass es offensichtlich nicht möglich ist, durch den Abstand von der Ebene $\{x_3 = 0\}$ auf den Wert von γ zu schließen. Augenscheinlich spielt also die Struktur des Vektorfeldes in der jeweiligen Ebene eine entscheidende Rolle bei der Wahl des optimalen Regularisierungsparameters.

Auf die Bilder der Rekonstruktionen mit Hilfe einer einzelnen Abtastkurve soll hier allerdings verzichtet werden, da dadurch eine vollständige, dreidimensionale Berechnung normalerweise nicht gewährleistet werden kann. Dennoch sollen für die drei Ebenen alle verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten, die es für die drei kreisförmigen Abtastkurven gibt, aufgezeigt werden.

In Abbildung 5.39 sind die Resultate aller vier Varianten für die Rekonstruktion in der Ebene $\{x_3 = -0,4\}$ zusammengefasst. Bild 5.39(a) zeigt das Ergebnis der Rekonstruktion für die Abtastkurve $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Die Vektoren sind hier, besonders in der x_3 -Komponente, wesentlich zu klein. Bedingt durch die zu kurzen Pfeile am Rand scheinen sie im Vergleich zu den anderen Rekonstruktionen auch eine viel zu starke Drehung zu zeigen, so dass man eher ein kreisförmiges Vektorfeld als Original erwartet. Im Gegensatz dazu sind für die Kombination von Γ_1 und Γ_3 in Grafik 5.39(b) die Vektoren zu lang, was ebenfalls vor allem am Rand des Rekonstruktionsgebietes auffällt und auch anhand der Skala des Koordinatensystems im Vergleich zum Original in Abbildung 5.38 überprüft werden kann. Die Richtungen sind in diesem Fall gut rekonstruiert. Verwendet man Γ_2 und Γ_3 , so erhält man damit das bestmögliche Resultat. Zwar sind die Pfeile besonders in der Mitte immer noch etwas zu stark und zeigen am Rand ein wenig nach außen, die Gesamtstruktur des Feldes ist dennoch gut zu erkennen. Das Ergebnis bei Verwendung aller drei Abtastkreise ist in Abbildung 5.39(d) zu sehen. Der visuelle Unterschied zum vorangegangenen Fall ist minimal, lediglich die Vektoren wirken etwas länger, während die Richtungen fast unverändert erscheinen. Auch die Fehlerwerte, die in Tabelle 5.2 zu finden sind, zeigen keine großen Differenzen zwischen diesen beiden. Insgesamt kann man der Tabelle entnehmen, dass

	L	W	Gesamt
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	0,31033	0,58951	0,89983
$\Gamma_1 \cup \Gamma_3$	0,35629	0,58978	0,94607
$\Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,29959	0,59043	0,89002
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,31824	0,58955	0,90778

Tabelle 5.2: Längen-, Winkel- und resultierender Gesamtfehler für die Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = -0,4\}$ von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ mit Hilfe der verschiedenen Kombinationen der Abtastkurven Γ_i , $i = 1, 2, 3$.

die Fehler aller Kombinationsmöglichkeiten recht nahe beieinander liegen und dass lediglich das Ergebnis des zweiten Versuchs, d.h. der Kombination von Γ_1 und Γ_3 , schlechter ist, was hauptsächlich auf die zu große Länge der Vektoren zurückzuführen ist. Alle anderen Werte unterscheiden sich hingegen nicht wesentlich.

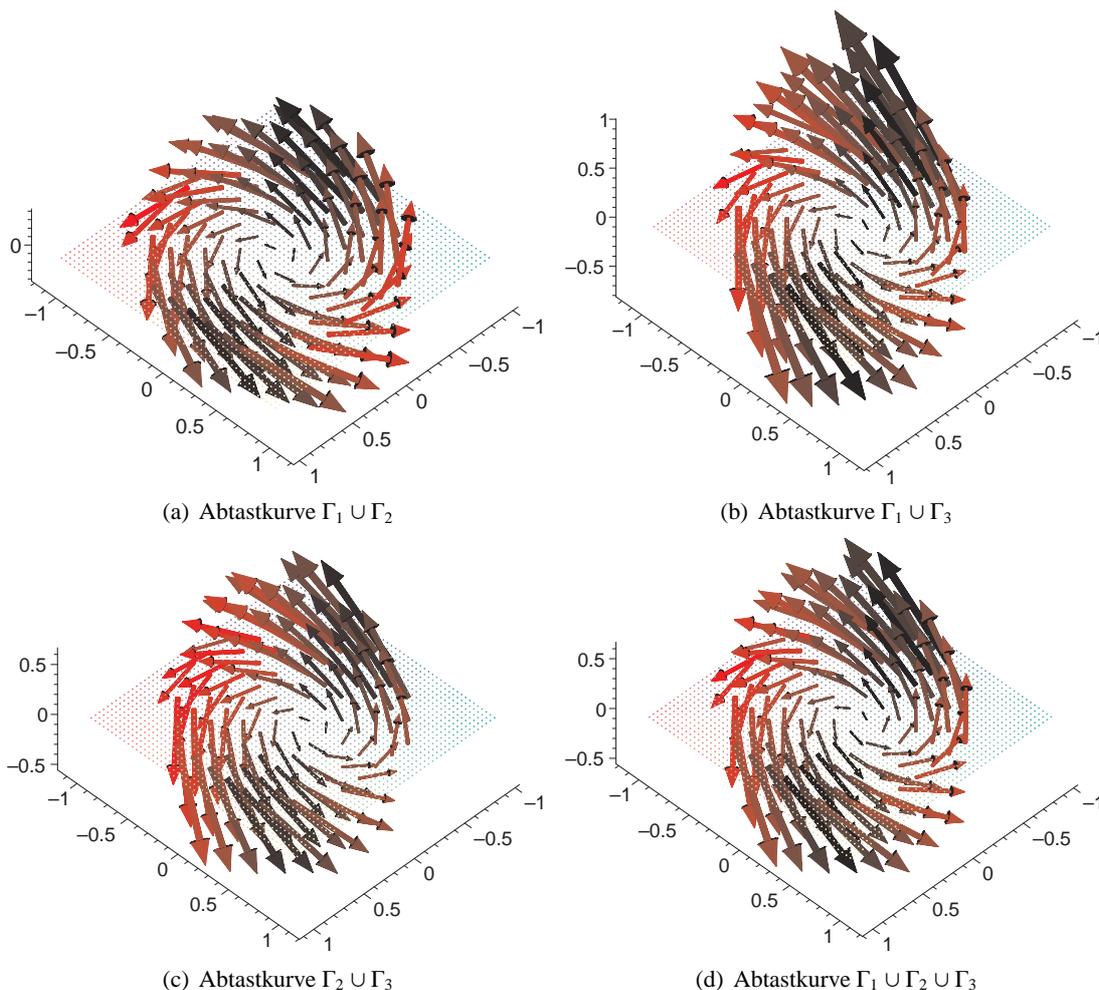


Abbildung 5.39: Vollständige Rekonstruktion von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = -0,4\}$ mit Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ in (a), Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ in (b), Abtastkurve $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (c) und unter Verwendung aller drei Kreise $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (d).

Demgegenüber sind für die Ebene $\{x_3 = 0\}$ deutliche Unterschiede in der Qualität der Rekonstruktionen erkennbar. In Abbildung 5.40 sind die entsprechenden Ergebnisse in analoger Reihenfolge zusammengefasst. Wie schon in Abbildung 5.39(a) für die Ebene $\{x_3 = -0,4\}$ zu sehen, führt die Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ auch in Abbildung 5.40(a) dazu, dass die Vektoren sichtlich zu kurz rekonstruiert werden. Zudem ist eine starke Krümmung in Richtung der Mitte des Rekonstruktionsgebietes zu erkennen, so dass auch in diesem Fall das Vektorfeld viel zu rund erscheint. Da die erste Komponente x_2x_3 des hier betrachteten Feldes $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ Null ist und damit, wie in Abbildung 5.38 erkennbar, ausschließlich gerade Vektoren vorhanden sind, muss diese Rekonstruktion als nicht zufriedenstellend bewertet

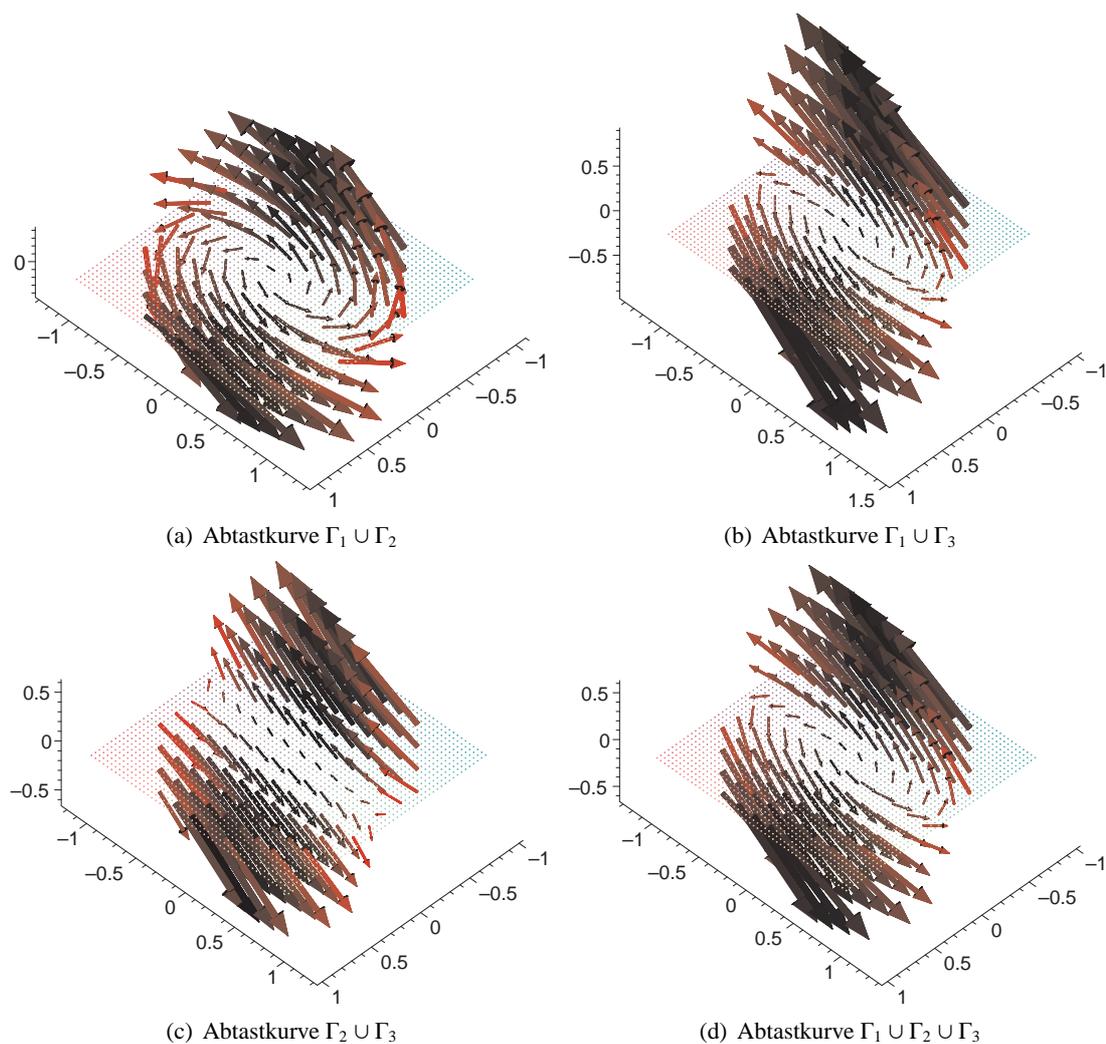


Abbildung 5.40: Vollständige Rekonstruktion von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ mit Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ in (a), Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ in (b), Abtastkurve $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (c) und unter Verwendung aller drei Kreise $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (d).

werden. Die Verwendung von Γ_1 und Γ_3 steigert die Qualität merklich, wie Abbildung 5.40(b) verdeutlicht. Nachteilig wirken sich in diesem Fall allerdings die zu großen Vektoren am Rand aus. Die Richtungen sind, bis auf den Bereich in der Mitte, recht gut berechnet, was auch auf die Abschwächung der Stärke der Pfeile zur Mitte hin zutrifft. Das beste Resultat erzielt man unter Zuhilfenahme der Kurven Γ_2 und Γ_3 . Sowohl die Länge als auch die Richtung der Vektoren erscheint passend rekonstruiert, lediglich eine leichte Krümmung nach außen ist erkennbar. Die Kombination aller drei kreisförmigen Abtastkurven resultiert in einer nur wenig schlechteren Rekonstruktion, wie in Grafik 5.40(d) zu sehen ist. Im Gegensatz zum vorhergehenden Versuch zeigen hier die Vektoren nach innen statt nach außen, wobei die Drehung in diesem Fall stärker

erscheint. Hinsichtlich der Länge der Vektoren unterscheiden sich die Abbildungen 5.40(c) und 5.40(d) nur unwesentlich. Diese subjektive Einschätzung wird durch die Fehler in Tabelle 5.3 bestätigt. Die Rekonstruktion mit Hilfe aller drei kreisförmigen Abtastkurven ist nur um wenig

	L	W	Gesamt
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	0,05259	0,12452	0,17711
$\Gamma_1 \cup \Gamma_3$	0,08034	0,06560	0,14594
$\Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,03155	0,02747	0,05903
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,02561	0,06208	0,08770

Tabelle 5.3: Längen-, Winkel- und resultierender Gesamtfehler für die Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = 0\}$ von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^T$ mit Hilfe der verschiedenen Kombinationen der Abtastkurven $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$.

schlechter als die mit den Kurven Γ_2 und Γ_3 erstellte, während die Qualität der beiden anderen geringer eingestuft werden muss. Obwohl für $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ die Länge der Vektoren besser berechnet wird als für $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$, hat die starke Krümmung der Vektoren den schlechtesten Winkelfehler W und damit auch das schlechteste Gesamtergebnis zur Folge. Insgesamt sind die Rekonstruktionen dieser Ebene doch besser als die der zuvor behandelten Ebene $\{x_3 = -0,4\}$.

Zum Ende der numerischen Beispiele sollen nun die Ergebnisse für die Ebene $\{x_3 = 0,4\}$ vorgestellt werden. Abbildung 5.41 zeigt noch einmal übersichtlich die Resultate für die verschiedenen Kombinationen der Abtastkurven. Die Rekonstruktion in Bild 5.41(a) zeigt offensichtlich wenig Gemeinsamkeiten mit dem Original in Abbildung 5.38. Hier wurde die Richtung der Vektoren sehr schlecht rekonstruiert, zudem sind sie zu kurz, so dass die langsame Abschwächung von außen nach innen kaum erkennbar wird. Demgegenüber sind die Vektoren in Abbildung 5.41(b), die durch Verwendung der Kurven Γ_1 und Γ_3 erzeugt wurde, eindeutig zu lang, allerdings kommt in dieser Rekonstruktion die Abschwächung der Pfeilstärke zur Mitte hin besser zum Ausdruck. Die Richtung der Pfeile ist jedoch gut rekonstruiert, was auch durch den Winkelfehler in Tabelle 5.4 bestätigt wird. Im dritten Teilbild 5.41(c) sind die Vektoren ebenfalls zu groß, allerdings nicht in dem Ausmaß wie zuvor. Dies wird vor allem in dem durch $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 1$ gekennzeichneten Bereich deutlich. Die Richtungen sind gut berechnet, auch wenn die Hinwendung der Vektoren zu den entsprechenden Rändern des Rekonstruktionsgebietes insgesamt etwas zu stark erscheint. Allerdings wird dieser Eindruck durch die schlechte Rekonstruktion der Längen – gerade in dem oben genannten Bereich – verstärkt. Verwendet man nun alle drei Kreise zugleich als Abtastkurve, so erhält man für diese Ebene das beste Ergebnis, wie Abbildung 5.41(d) zeigt. Wie man anhand der Skala des Koordinatensystems erkennen kann, sind die Vektoren im Vergleich zum Original nur wenig zu lang. Das Verhältnis der Längen untereinander und damit auch die Struktur des Vektorfeldes wird hier am besten wiedergegeben. Auch die Richtung der Pfeile stimmt weitestgehend mit den Originaldaten überein. Der gute

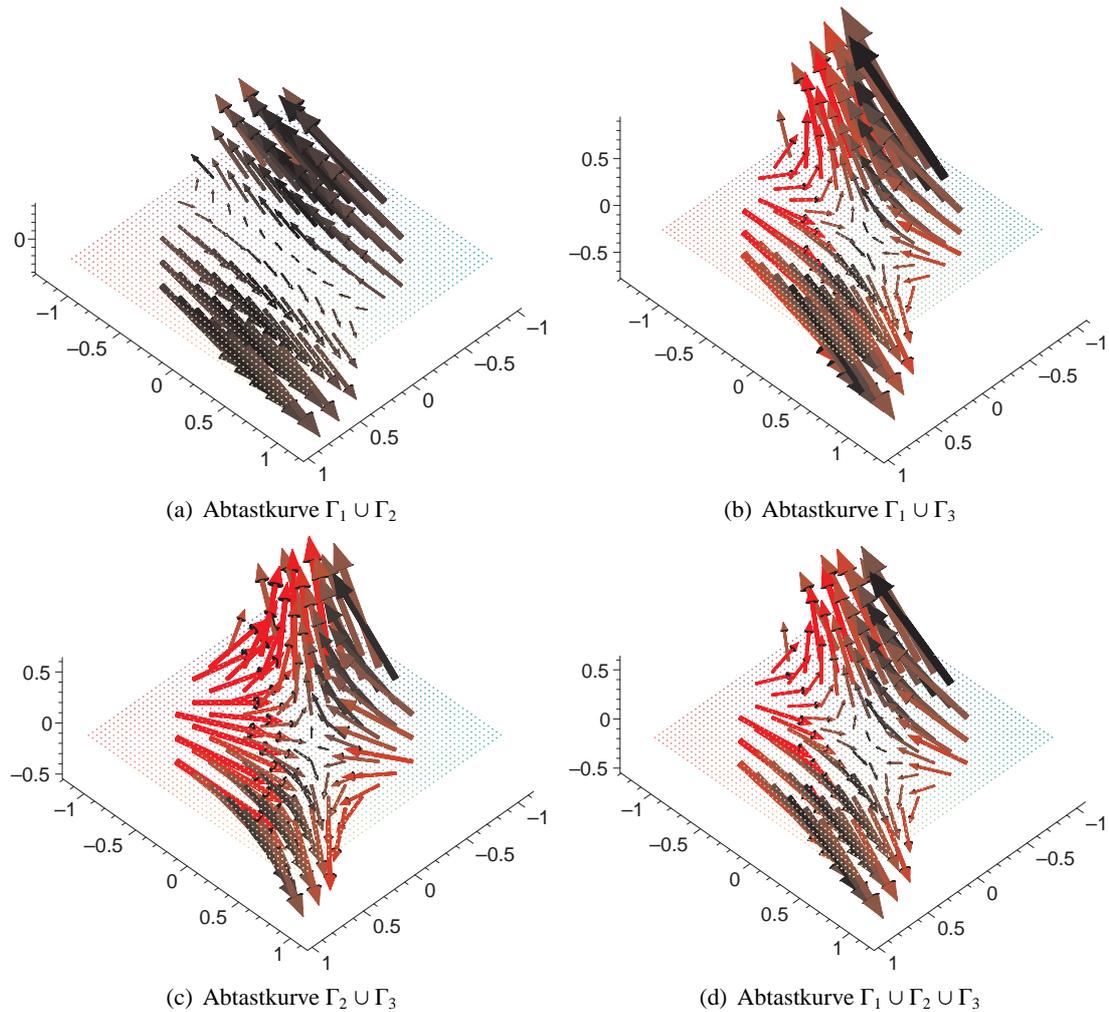


Abbildung 5.41: Vollständige Rekonstruktion von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ in der Ebene $\{x_3 = 0,4\}$ mit Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ in (a), Abtastkurve $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ in (b), Abtastkurve $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (c) und unter Verwendung aller drei Kreise $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ in (d).

visuelle Gesamteindruck dieser Rekonstruktion kann auch durch Tabelle 5.4 verifiziert werden. Man sieht, dass für die Ebene $\{x_3 = 0,4\}$ die Verwendung der Daten aller drei Abtastkurven das beste Resultat liefert. Zudem stellt dies auch über alle drei getesteten Ebenen und alle möglichen Kombinationen der Abtastkurven gesehen den besten Wert für den Gesamtfehler dar. Insbesondere der Längenfehler L ist für diese Rekonstruktion signifikant besser als bei allen anderen und auch für den Winkelfehler W ermittelt man in diesem Fall den Bestwert. Für $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ macht sich bei L die zu große Länge der Vektoren bemerkbar, die Richtung wird allerdings gut berechnet, wie der Wert des Winkelfehlers zeigt. Für $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sind die Rollen von L und W vertauscht. Während die Länge recht gut rekonstruiert wird und sogar den zweitbesten Wert erreicht, deutet

	L	W	Gesamt
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	0,04120	0,04972	0,09092
$\Gamma_1 \cup \Gamma_3$	0,06884	0,02005	0,08889
$\Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,04920	0,03274	0,08194
$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$	0,02731	0,01460	0,04191

Tabelle 5.4: Längen-, Winkel- und resultierender Gesamtfehler für die Rekonstruktion der Ebene $\{x_3 = 0,4\}$ von $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ mit Hilfe der verschiedenen Kombinationen der Abtastkurven $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$.

der Winkelfehler W auf eine unbefriedigende Rekonstruktion der Richtungen der Vektoren hin, was auch in der Beschreibung zu Abbildung 5.41(a) bereits zum Ausdruck gebracht wurde.

An diesem letzten Beispiel sollte klargemacht werden, dass sich die Verwendungsmöglichkeiten des auf Seite 114 angegebenen Algorithmus nicht auf einfache Vektorfelder beschränken. Diese einfachen Felder, wie beispielsweise $f(x) = (1, 1, 1)^\top$, wurden lediglich ausgewählt, um die Vermittlung der Ideen zur vollständigen, dreidimensionalen Rekonstruktion von Vektorfeldern zu erleichtern und dem Leser die Beurteilung der Qualität durch Verwendung bekannter Felder zu ermöglichen. Zudem wird aus den Rekonstruktionen der drei verschiedenen Ebenen des Feldes $f(x) = (x_2x_3, x_1, -0,5x_1)^\top$ auch ersichtlich, dass man sich nicht auf eine bestimmte Kombination der vorgestellten Abtastkreise festlegen kann, um das bestmögliche Ergebnis zu erreichen. Werden allerdings die Daten für alle $\Gamma_i, i = 1, 2, 3$, berechnet, so liefert die Mittelung über alle drei Kurven immer ein brauchbares Ergebnis. Wie schon erwähnt, ist allerdings sowohl für die Messung der Daten als auch für die Berechnung ein erhöhter Zeitbedarf einzuplanen, der im medizinischen Kontext nicht immer als gegeben vorausgesetzt werden kann. Ein Ziel in diesem Gebiet wird also die Optimierung der Auswahl der Abtastkurven und die Bestimmung eines möglichst optimalen Regularisierungsparameter γ für diese Kurven sein. Die verschiedenen Aspekte weiterführender Forschung sollen auch im nächsten Kapitel noch einmal thematisiert werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren entwickelt und implementiert, das die vollständige, dreidimensionale Rekonstruktion eines divergenzfreien Vektorfeldes ermöglicht. Die zugrunde liegende Integraltransformation, die den Strahlendurchgang durch das Vektorfeld modelliert, ist die Doppler-Transformation \mathfrak{D} . Durch die zunächst verwendete Messgeometrie mit einer einzelnen kreisförmigen Abtastkurve in der Ebene $\{x_3 = 0\}$, die auch im Zusammenhang mit der dreidimensionalen Cone Beam Transformation \mathcal{D} Anwendung findet, konnte bei der Entwicklung des Algorithmus auf bekannte Ergebnisse aus diesem Bereich zurückgegriffen werden. Insbesondere können die mit Hilfe der Approximativen Inversen schnell berechenbaren Rekonstruktionskerne für \mathcal{D} auch für die Rekonstruktion aus Daten der Doppler-Transformation verwendet werden.

Der Nachteil eines einzelnen Abtastkreises hat sich bei der Rekonstruktion eines dreidimensionalen Vektorfeldes gezeigt: Die Komponente des Feldes senkrecht zur Abtastebene kann nicht berechnet werden. Für den zuerst verwendeten Kreis in der Ebene $\{x_3 = 0\}$ kann also beispielsweise die x_3 -Komponente des Feldes nicht rekonstruiert werden. Aus diesem Grund wurden zunächst zwei, später drei zueinander orthogonale Kreise in den Koordinatenebenen verwendet. Zusätzlich werden durch diese zwei oder drei Kreise die Bedingungen von Tuy-Kirillov erfüllt, was für einen einzelnen Kreis nicht gewährleistet war.

Die numerischen Ergebnisse zeigen die hohe Qualität der berechneten Rekonstruktionen. Die mit dem Algorithmus aus synthetisch erzeugten Doppler-Daten berechneten Vektorfelder unterscheiden sich meist nur wenig von den Originalen. Ein wichtiger Aspekt, der bei der Darstellung der numerischen Resultate deutlich werden sollte, ist, dass für jedes Vektorfeld eine andere Kombination aus den drei vorgestellten zueinander orthogonalen Kreisen die beste Rekonstruktion liefern kann, dass die gleichzeitige Verwendung der Daten von allen drei Kreisen aber immer eine gute Wahl ist.

Wie auch bei der Cone Beam Transformation hängt die Qualität der Berechnungen stark von der Wahl eines guten Regularisierungsparameters γ ab, was eine rechnerische Bestimmung oder zumindest eine Näherung von γ wünschenswert macht. Die Versuche haben allerdings auch gezeigt, dass γ sowohl mit der Struktur des betrachteten Feldes als auch mit der zu rekonstruierenden Ebene variiert, was eine exakte Bestimmung wegen der Unkenntnis der Originaldaten unmöglich erscheinen lässt. Zudem hat sich für jedes Γ_i , $i = 1, 2, 3$, ein anderer Wert von γ als optimal erwiesen, so dass für die Doppler-Transformation mehrere Regularisierungsparameter bestimmt werden müssen, was im Vergleich zur Cone Beam Transformation eine zusätzliche Schwierigkeit darstellt.

Weiterführende Ideen zur Verbesserung des Algorithmus beinhalten die Verwendung unterschiedlicher Skalierungsfaktoren für die verschiedenen Ebenen, die Implementierung einer Gewichtungsfunktion oder eine effiziente Realisierung für die Mittelung über verschiedene Werte für den Regularisierungsparameter. Gleichzeitig darf dabei aber der zusätzliche Zeitaufwand nicht

außer Acht gelassen werden, um die medizinische Verwendbarkeit des Verfahrens weiterhin zu gewährleisten. Ein Ansatzpunkt für weitere Forschung ist auch die Betrachtung von speziellen Randbedingungen, um die hauptsächlich am Rand auftretenden Fehler zu reduzieren. Beispielsweise ist bekannt, dass aufgrund der Gefäßwand eine Krümmung des Feldes nach außen nicht möglich ist.

Die Arbeit an diesem Verfahren und dem Algorithmus erfolgt auch im Hinblick auf die Verwendung in der medizinischen Diagnostik. Ein Anwendungsgebiet für die Rekonstruktion von Vektorfeldern ist beispielsweise die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes einer Flüssigkeit. Dabei richtet sich das Augenmerk besonders auf den Blutfluss, von dem bekannt ist, dass er um Tumore deutlich intensiver und unregelmäßiger ist als in normalem Gewebe. Dementsprechend stellt die hier entwickelte Methode einen Ansatz für eine mögliche Alternative zur Erkennung von Krebserkrankungen dar.

Ein wesentlicher Unterschied zu den bislang verwendeten Verfahren in der Tomographie liegt in der Benutzung von Ultraschallwellen statt Röntgenstrahlen, da letztere in hohen Dosen sogar krebserregend sein können. Die zur Anwendung von Ultraschall notwendigen reflektierenden Partikel sind beispielsweise im Blut durch die roten Blutkörperchen gegeben. Im Zusammenhang mit der Erkennung von Brustkrebs sind zudem Berichte bekannt, wonach bei einer herkömmlichen Mammographie die Gefahr besteht, den Tumor durch den großen Druck auf das Brustgewebe zu zerstören und so die Ausbreitung der Krankheit zu beschleunigen. Die Untersuchung mit Ultraschall bietet daher eine – soweit bekannt – nicht gesundheitsschädliche und damit beliebig oft wiederholbare Option.

Gleichzeitig birgt die Verwendung von Ultraschall aber auch zusätzliche Schwierigkeiten, die insbesondere in der technischen Umsetzung des beschriebenen Verfahrens bestehen. Ein Beispiel bilden dabei die auftretenden Streuphänomene. Benutzt man zur Beschleunigung der Messungen zudem mehrere Quellen gleichzeitig, so werden diese Streuprobleme zusätzlich verstärkt und es wird schwierig, den Ursprung der reflektierten Strahlen eindeutig zu bestimmen. Auch das Problem der Signalabschwächung bei Ultraschall muss im weiteren Verlauf der Forschung in Betracht gezogen werden. Gleichzeitig sollte die Wellenstruktur von Ultraschallsignalen berücksichtigt werden, um dadurch die Qualität von Modell und Rekonstruktion zu verbessern.

Außerdem sind bislang leider keine Geräte bekannt, die eine den Modellannahmen entsprechende exakte Kreisbahn realisieren. Ein Ausweg besteht darin, die Bewegung eines auf die Haut aufgesetzten Ultraschallkopfes mit Hilfe von Motion Tracking und Motion Estimation Algorithmen zu erfassen. Dies führt gleich auf mehrere interdisziplinäre Probleme im Bereich zwischen Tomographie und Bildverarbeitung. Eine erfolgreiche Umsetzung dieser Idee würde aber gleichzeitig bedeuten, dass beliebige Abtastkurven realisiert werden können.

Weiterhin hat sich für computertomographische Untersuchungen mittlerweile die Spirale als Standardgeometrie in der medizinischen Diagnostik etabliert. Gründe dafür sind die kürzere Messdauer und damit einhergehend die geringere Strahlenbelastung für den Patienten. Außerdem ist eine Helix einfach zu realisieren. Dazu lässt man eine Röntgenquelle auf einer Kreisbahn rotieren und schiebt die Liege mit dem Patienten zeitgleich mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht zur Abtastebene durch den Mittelpunkt dieser Trajektorie. Mathematisch ist die Spirale auch dadurch von Bedeutung, dass sie die Bedingungen von Tuy-Kirillov erfüllt. Zusätzlich machen die Geschwindigkeitsvorteile gegenüber mehreren Kreisen eine Umsetzung auf die Doppler-Transformation interessant. In Bezug auf eine Übertragung der Ideen für diese Mess-

geometrie auf die Doppler-Transformation könnten die Ergebnisse von Katsevich in [14] hilfreich sein.

Das Paper von Denisjuk [3] ist für die Herleitung von Resultaten für Tensorfelder mit beliebigem Rang und in beliebiger Dimension von Bedeutung. Er formuliert darin außerdem eine Verallgemeinerung der Bedingung von Tuy-Kirillov auf Tensorfelder vom Rang m , die auch zur Berechnung von exakten Rekonstruktionskernen für die Doppler-Transformation verwendet werden könnte. Er beweist weiter, dass eine vollständige Rekonstruktion eines divergenzfreien Vektorfeldes bei vollständigen Daten unter bestimmten Bedingungen an die Abtastkurve möglich ist.

Selbstverständlich können auch Resultate für andere Transformationen hilfreich sein, wie man am Zusammenhang zwischen Radon- und Cone Beam Transformation, der in der Formel von Grangeat zum Ausdruck gebracht wird, erkennen kann. Für die Doppler-Transformation könnte beispielsweise auch die gedämpfte vektorielle Radon-Transformation von Interesse sein, für die Stråhlén in [47] ein Fourier Slice Theorem beweist. Zusammenfassend gibt es sicherlich noch viele weitere Ideen und Ansätze, die die Forschung dem Ziel, eine Inversionsformel für die Doppler-Transformation zu entwickeln, ein Stück näher bringen können.

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAMOWITZ, M. und I. A. STEGUN: *Handbook of mathematical functions*. Dover, New York, 1972.
- [2] BECKER, CLEMENS: *Unvollständige Daten bei der 3D Radon Transformation: Theorie und Algorithmen*. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2006.
- [3] DENISJUK, ALEXANDER: *Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve*. *Inverse Problems*, 22:399–411, 2006.
- [4] DESBAT, LAURENT und A. WERNSDÖRFER: *Direct algebraic reconstructions and optimal sampling in vector field tomography*. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 43(8):1798–1808, 1995.
- [5] DIETZ, RAINER: *Die approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der Röntgen-Computertomographie*. Doktorarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany, 1999.
- [6] DOPPLER, CHRISTIAN: *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels*. *Abhandlungen der Königl. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, 2:465–482, 1842. V. Folge, Bd. 2, Prag.
- [7] FELDKAMP, L. A., L. C. DAVIS und J. W. KRESS: *Practical cone beam algorithm*. *Journal of the Optical Society of America A*, 1(6):612–619, 1984.
- [8] GELFAND, IZRAIL M. und A. B. GONCHAROV: *Recovery of a compactly supported function starting from its integrals over lines intersecting a given set of points in space*. *Dokl.* 290 (1986), English translation in *Soviet. Math. Dokl.*, 34:373–376, 1987.
- [9] GELFAND, IZRAIL M. und G. E. SCHILOW: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I, Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen*. *Hochschulbücher für Mathematik*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [10] GRANGEAT, PIERRE: *Analyse d'un système d'imagerie 3D par reconstruction à partir de radiographie X en géométrie conique*. Doktorarbeit, École Normale Supérieure des Télécommunication, Paris, France, 1987.
- [11] GRANGEAT, PIERRE: *Mathematical framework of cone-beam reconstruction via the first derivative of the Radon transform*. In: HERMAN, GABOR T., ALFRED K. LOUIS und FRANK NATTERER (Herausgeber): *Lecture Notes in Math.*, Band 1497, Seiten 66–97, New York, 1991. Springer.

- [12] HAMAKER, C., K. T. SMITH, D. C. SOLMON und S. L. WAGNER: *The divergent beam X-ray transform*. Rocky Mountain J. Math., 10:252–283, 1980.
- [13] JUHLIN, P.: *Principles of Doppler Tomography*. Technischer Bericht, Center for Mathematical Sciences, Lund Institute of Technology, SE-221 00 Lund, Schweden, 1992.
- [14] KATSEVICH, ALEXANDER: *A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam CT*. Int. J. Math. Sci., 21:1305–1321, 2003.
- [15] KAZANTSEV, S. G. und A. A. BUKGHEIM: *Singular value decomposition for the 2D fan-beam Radon transform of tensor fields*. J. Inv. Ill-Posed Prob., 12(3):245–278, 2004.
- [16] KIRILLOV, A. A.: *On a problem of I. M. Gel'fand*. Soviet. Math. Dokl., 2:268–269, 1961.
- [17] LADE, S. J., D. PAGANIN und M. J. MORGAN: *3-D Vector tomography of Doppler-transformed fields by filtered-backprojection*. Optics Communications, 253:382–391, September 2005.
- [18] LOUIS, ALFRED K.: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [19] LOUIS, ALFRED K.: *Medical Imaging: State of the art and future development*. Inverse Problems, 8:709–738, 1992.
- [20] LOUIS, ALFRED K.: *The approximate inverse for linear and some nonlinear problems*. Inverse Problems, 12:175–190, 1996.
- [21] LOUIS, ALFRED K.: *Application of the Approximate Inverse to 3D X-ray CT and Ultrasound Tomography*. In: ENGL, HEINZ W., ALFRED K. LOUIS und W. RUNDELL (Herausgeber): *Inverse Problems in Medical Imaging and Nondestructive Testing*, Seiten 120–133. Springer, Wien, New York, 1997.
- [22] LOUIS, ALFRED K.: *A Unified Approach to Regularization Methods for Linear Ill-Posed Problems*. Inverse Problems, 15:489–498, 1999.
- [23] LOUIS, ALFRED K.: *Filter design in three-dimensional cone beam tomography: circular scanning geometry*. Inverse Problems, 19(6):S31–S40, 2003.
- [24] LOUIS, ALFRED K.: *Development of Algorithms in Computerized Tomography*. In: ÓLAFSSON, GESTUR und ERIC TODD QUINTO (Herausgeber): *The Radon Transform, Inverse Problems, and Tomography*, Band 63 der Reihe *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, Seiten 25–42. AMS, 2006.
- [25] LOUIS, ALFRED K.: *Combining image reconstruction and image analysis with an application to 2D-tomography*. SIAM Journal on Imaging Sciences, 1:188–208, 2008.
- [26] LOUIS, ALFRED K. und PETER MAASS: *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*. Inverse Problems, 6:427–440, 1990.
- [27] LOUIS, ALFRED K. und FRANK NATTERER: *Mathematical problems in computerized tomography*. Proceedings IEEE, 71:379–389, 1983.

- [28] LOUIS, ALFRED K., THOMAS WEBER und DAVID THEIS: *Computing Reconstruction Kernels for circular 3D Cone Beam Tomography*. In: *Proceedings 9th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Seiten 343–345, 2007.
- [29] LOUIS, ALFRED K., THOMAS WEBER und DAVID THEIS: *Computing Reconstruction Kernels for circular 3D Cone Beam Tomography*. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 27(7):880–886, 2008.
- [30] MOHR, JENS: *Rekonstruktionsfilter in der 3D-Computertomographie*. Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, 2002.
- [31] NATTERER, FRANK: *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, Chichester, 1986.
- [32] NATTERER, FRANK und FRANK WÜBBELING: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, Philadelphia, 2001.
- [33] NORTON, S. J.: *Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: Application to flow imaging*. *Geophysics Journal*, 97:161–168, 1988.
- [34] NORTON, S. J.: *Unique tomographic reconstruction of vector fields using boundary data*. *IEEE Trans. Image Processing*, 1:3:406–412, 1992.
- [35] PRINCE, JERRY L.: *A convolution backprojection formula for three-dimensional vector tomography*. In: *ICIP (2)*, Band 2, Seiten 820–824, November 1994.
- [36] PRINCE, JERRY L.: *Convolution backprojection formulas for 3-D vector tomography with application to MRI*. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(10):1462–1472, October 1996.
- [37] RADON, JOHANN: *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*. *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig*, 69:262–267, 1917.
- [38] RIEDER, ANDREAS und THOMAS SCHUSTER: *The Approximate Inverse in Action III: 3D-Doppler Tomography*. *Numerische Mathematik*, 97:353–378, 2004.
- [39] SCHUSTER, THOMAS: *The 3D Doppler transform: elementary properties and computation of reconstruction kernels*. *Inverse Problems*, 16(3):701–723, 2000.
- [40] SCHUSTER, THOMAS: *An efficient mollifier method for three-dimensional vector tomography: convergence analysis and implementation*. *Inverse Problems*, 17:739–766, 2001.
- [41] SCHUSTER, THOMAS: *The formula of Grangeat for tensor fields of arbitrary order in n dimensions*. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007:Article ID 12839, 4 Seiten, 2007. doi:10.1155/2007/12839.

- [42] SCHUSTER, THOMAS: *The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications*, Band 1906 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007.
- [43] SCHUSTER, THOMAS, DAVID THEIS und ALFRED K. LOUIS: *A Reconstruction Approach for Imaging in 3D Cone Beam Vector Field Tomography*. zur Publikation akzeptiert am 15 September 2008, *International Journal of Biomedical Imaging*, 2008.
- [44] SHARAFUTDINOV, VLADIMIR A.: *Integral Geometry of Tensor Fields*. VSP, Utrecht, 1994.
- [45] SMITH, B. D.: *Image reconstruction from cone-beam projections: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods*. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 4:14–25, 1985.
- [46] SPARR, GUNNAR, KENT STRÅHLÉN, K. LINDSTRÖM und H. W. PERSSON: *Doppler tomography for vector fields*. *Inverse Problems*, 11:1051–1061, 1995.
- [47] STRÅHLÉN, KENT: *Some Integral Transforms of Vector Fields*. Licentiate Thesis, Lund University and Lund Institute of Technology, Department of Mathematics, SE-221 00 Lund, Schweden, 1996.
- [48] STRÅHLÉN, KENT: *Studies of Vector Tomography*. Doktorarbeit, Lund Institute of Technology, Department of Mathematics, SE-221 00 Lund, Schweden, 1999.
- [49] THE NOBEL FOUNDATION: *The Nobel Prize in Physics 1901*. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1901/, 2008.
- [50] THE NOBEL FOUNDATION: *The Nobel Prize in Physiology or Medicine 1979*. http://nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1979/, 2008.
- [51] TUY, HEANG K.: *An inversion formula for cone-beam reconstruction*. *SIAM J. Appl. Math.*, 43:546–552, 1983.
- [52] WEBER, THOMAS: *Schnelle Rekonstruktionskernberechnung in der 3D-Computertomographie*. Doktorarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany, 2008.
- [53] WELLS, P. N. T., M. HALLIWELL, R. SKIDMORE, A. J. WEBB und J. P. WOODCOCK: *Tumour detection by ultrasonic Doppler blood-flow signals*. *Ultrasonics*, 15(5):231–232, 1977.
- [54] YOSIDA, KÔSAKU: *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Sixth Auflage, 1980.
- [55] ZENG, G. L., R. CLACK und GRANT T. GULLBERG: *Implementation of Tuy's cone-beam inversion formula*. *Phys. Med. Biol.*, 39(3):493–507, March 1994.