

Selbst-adaptive Finite-Elemente-Verfahren zur Simulation passiver
Mikrowellenstrukturen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Ingenieurwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II
- Physik und Mechatronik -
der Universität des Saarlandes

von

Markus Reiner Lösch

Saarbrücken

2013

Tag des Kolloquiums: 08.05.2014

Dekan: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Christian Wagner

Mitglieder des
Prüfungsausschusses: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Andreas Schütze
Univ.-Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels

Akademischer Mitarbeiter: Dr.-Ing. Dara Feili

Meiner Schwester gewidmet

Danksagungen

An erster Stelle möchte ich mich bei Prof. Romanus Dyczij-Edlinger herzlich bedanken. Mit seiner unermüdlichen Unterstützung während und über meine Mitarbeiterzeit am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik hinaus, seiner steten Diskussionsbereitschaft bei allen wissenschaftlichen Fragestellungen und seiner ansteckenden Begeisterung für die elektromagnetische Feldsimulation hat er einen wesentlichen Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

In gleicher Weise danke ich Prof. Diebels für das Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Mein herzlicher Dank gilt ebenso allen aktuellen und ehemaligen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik. Ihre unablässige Hilfsbereitschaft und der wunderbare Teamgeist haben zu einem einzigartigen Arbeitsklima beigetragen, das ich sehr zu schätzen gelernt habe.

Ebenfalls möchte ich meinen Freunden Björn Hayer, Susanne Kraemer und Ute Stroh für ihre Unterstützung danken.

Mein besonderer Dank gebührt meinen Eltern Monika und Reiner Lösch und meiner Schwester Andrea Lösch, die mich ermutigt haben diesen Weg zu gehen und mich in all dem zu jeder Zeit unterstützt haben.

Schließlich möchte ich meiner Frau Mirjam Lösch für ihre Zuversicht und den Rückhalt in einer anstrengenden Zeit von ganzem Herzen danken.

Kurzfassung

Die Methode der finiten Elemente (FE-Methode) ermöglicht den Verfahrensfehler einer berechneten Lösung durch Erhöhen der Netzdichte oder durch Verwenden von FE-Ansätzen höherer Ordnung zu steuern. Bei praktischen Problemstellungen mit Singularitäten verschlechtert sich die theoretisch erreichbare Konvergenzrate des FE-Verfahrens

In der vorliegenden Arbeit wird ein adaptives FE-Verfahren zur Simulation passiver Mikrowellenstrukturen entwickelt, das die Bereiche der Singularitäten identifiziert, um dort die Netzdichte lokal zu erhöhen und die theoretisch erreichbare Konvergenzrate wiederherzustellen. Hierzu wird ein impliziter lokaler a posteriori Fehlerindikator vorgestellt, der als Ausgangspunkt für ein zielorientiertes adaptives FE-Verfahren dient. Der Schätzwert des Fehlerindikators wird über ein lokales Dirichlet-Problem ermittelt, das diesen in der Zielgröße der Streuparameter ausdrückt. Anwendungsbeispiele zeigen, dass das vorgestellte adaptive Verfahren die Konvergenzraten bei praktischen Problemstellungen mit Singularitäten wiederherstellen kann.

Abstract

The finite element method (FE method) allows to control the error of approximation of a FE computation by increasing the mesh density or by using higher order elements. Typical problems with singularities lead to a worse convergence rate in the FE method as theoretically achievable.

The work in hand develops an adaptive FE method for the simulation of passive microwave devices, which detects the regions of singularities to locally increase mesh density and to restore the achievable convergence rate. For this reason an implicit local a posteriori error indicator is presented which is the basis for a goal-oriented adaptive FE method. The estimated error is expressed in terms of scattering parameters by using a local Dirichlet problem. Examples show that the presented adaptive method can restore the theoretically achievable convergence rates in the case of typical problems with singularities.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Physikalische Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen	5
2.1	Maxwell-Gleichungen	5
2.2	Randbedingungen	7
2.3	Eigenschaften axial homogener Wellenleiter	10
3	Finite-Elemente-Simulation passiver Mikrowellenstrukturen	13
3.1	Angepasste Funktionenräume	13
3.2	Finite-Elemente-Ansatz	16
3.2.1	Tetraedrische Finite-Elemente-Netze	16
3.2.2	Finite-Elemente-Ansatzfunktionen	18
3.3	Elektrische Feldformulierung	22
3.3.1	Schwache Formulierung	22
3.3.2	Finite-Elemente-Formulierung	25
3.4	Modale Mehrtore	26
3.4.1	Schwache Formulierung des Anregungsproblems	29
3.4.2	Finite-Elemente-Formulierung des Anregungsproblems	32

4	Hierarchische Verfeinerung von Finite-Elemente-Netzen	37
4.1	Geschachtelte Finite-Elemente-Netze	37
4.2	Finite-Elemente-Ansatzfunktionen inkonsistent verfeinerter Netze . .	41
4.2.1	Pufferansatzfunktionen für die Basis des \mathcal{V}^p	43
4.2.2	Pufferansatzfunktionen für die Basis des \mathcal{A}^p	46
4.2.3	Erstellung der Systemmatrix unter Berücksichtigung von Pufferansatzfunktionen	49
4.3	Prolongation und Restriktion	54
4.3.1	Darstellung der Ansatzfunktionen des \mathcal{W}^p eines Tetraeders T durch die seiner Zerlegung T_Σ	54
4.3.2	Prolongations- und Restriktionsoperator	57
5	Adaptive Finite-Elemente-Verfahren	61
5.1	Konvergenz	62
5.1.1	Konvergenzraten am Beispiel glatter Felder	65
5.1.2	Konvergenzraten am Beispiel singulärer Felder	66
5.2	Formulierung eines zielorientierten a posteriori Fehlerindikators für Streuparam.	67
5.2.1	Darstellung des Fehlers in der Zielgröße	69
5.2.2	Herleitung der lokalen Formulierung des Fehlerindikators . . .	71
5.3	h -Adaptivität	78
5.4	Numerisches Beispiel	82
6	Numerische Beispiele	91
6.1	Duales Problem	91
6.2	Patch-Antenne	95
6.3	Dielektrischer Würfel	97

INHALTSVERZEICHNIS	ix
6.4 Microstrip	99
7 Zusammenfassung und Ausblick	103
Abbildungsverzeichnis	105
Tabellenverzeichnis	110
Literaturverzeichnis	112

Kapitel 1

Einleitung

Ein wesentlicher Bestandteil beim Entwurf oder bei der Analyse von Bauelementen aus der Hochfrequenz- oder Mikrowellentechnik wie Filter oder Antennen liegt in der Kenntnis der dort vorherrschenden elektromagnetischen Felder sowie der aus ihnen abgeleiteten integralen Kenngrößen, wie z. B. Streuparameter. Eine vollständige Beschreibung der auftretenden Wellenphänomene liefern, im Sinne der klassischen Elektrodynamik, die hierfür grundlegenden *Maxwell-Gleichungen*. Wegen der oft komplizierten Geometrien der Bauelemente und unter Berücksichtigung inhomogener, verlustbehafteter Materialbereiche wie auch Abstrahlung in den Freiraum sind analytische Lösungen in der Regel nicht mehr verfügbar, sodass hierfür numerische Verfahren zur Lösung herangezogen werden. Diese können im Wesentlichen in zwei Klassen von numerischen Methoden unterteilt werden: Integralgleichungsverfahren und Differenzialgleichungsverfahren.

Im Gegensatz zu den Differenzialgleichungsverfahren werden bei den Integralgleichungsverfahren die Unbekannten nicht durch die Feldgrößen sondern mittels der Quellgrößen dargestellt. Dabei wird die Abstrahlung von der Quelle exakt berücksichtigt. Daraus ergibt sich, dass auch beliebig große Feldgebiete berücksichtigt werden können, da in der Regel die Quellverteilung hierbei räumlich beschränkt bleibt. Des Weiteren kann in vielen Fällen die Quelle im dreidimensionalen Raum durch eine flächenhafte Verteilung dargestellt werden, was den Aufwand der Diskretisierung vorteilhaft einschränkt. Problematisch ist jedoch die Berücksichtigung inhomogener oder nichtlinearer Materialien. Hierzu können Kopplungen zu Differenzialgleichungsverfahren hergestellt werden. Die aus den Integralgleichungsverfahren resultierenden linearen Gleichungssysteme führen auf vollbesetzte Matrizen, für deren Ausdünnung und effiziente Darstellung Verfahren wie die *Fast Multipole Method* (FMM) [Rok85], die *Adaptive Cross-Approximation* (ACA) [Beb00] oder \mathcal{H} -Matrizen [Hac99] herangezogen werden können.

Die Differenzialgleichungsverfahren hingegen basieren per se auf der differentiellen

Form der Maxwell-Gleichungen, mit Hilfe derer Lösungen direkt in den Feldgrößen berechnet werden. Zu den wichtigsten Vertretern dieser Klasse von Verfahren zählen die Methode der finiten Differenzen (FD) [Yee66], [TH05], die finite Integrations-technik (FIT) [Wei96] und die Methode der finiten Elemente (FE) [SF73]. Da bei den Differenzialgleichungsverfahren nicht die Quellen sondern die Felder diskretisiert werden, ist deren Anwendung prinzipiell nur auf beschränkten Gebiete durchführbar. Hierbei finden die beiden erstgenannten Methoden im Zeitbereich häufig Anwendung, da sie explizite Zeitschrittverfahren erlauben, die ohne Matrixfaktorisierung auskommen. Der FE-Methode wird hingegen im Frequenzbereich oft der Vorzug gegeben. Da sie im Gegensatz zu den FD-Verfahren und der FIT die Diskretisierung des Feldgebiets mittels unstrukturierter Netze erlaubt, bietet sie damit eine wesentlich höhere Flexibilität bei der Modellierung von Geometrie und Materialeigenschaften. Um dennoch Abstrahlung in den Freiraum zu berücksichtigen, können die Verfahren mit Integralgleichungsverfahren gekoppelt oder näherungsweise über *absorbierende Randbedingungen* [EM77], [BT80], *infinite Elemente* [Bet77] oder *perfectly matched layers* [SKLL95] eingebracht werden.

In der vorliegenden Arbeit werden lineare zeitinvariante Materialeigenschaften vorausgesetzt. Dies ermöglicht eine Beschreibung im Frequenzbereich und damit die Verwendung der FE-Methode. Die Grundlage der in weiterer Folge betrachteten Anregungsprobleme bildet die Diskretisierung mittels finiter Elemente, welche unter der bereits genannten Voraussetzung linearer zeitinvarianter Materialeigenschaften auf frequenzabhängige lineare Gleichungssysteme mit schwach besetzten Matrizen führt. Die FE-Diskretisierung wird mittels einer Triangulierung des Feldgebiets in Tetraeder und unter Verwendung rotorkonformer Ansatzfunktionen bis maximal vierter Ordnung durchgeführt [Ing06].

Eine wesentliche Frage, die sich im Kontext numerischer Verfahren ergibt ist, wie hoch die Genauigkeit der berechneten Lösung ist und wie sich der ergebende Fehler zuverlässig geschätzt werden kann. Zudem zeigt sich, dass sich im Rahmen des FE-Verfahrens die Konvergenzrate der berechneten Lösung bei Anwesenheit lokaler Singularitäten, wie z. B. einspringende Kanten oder Materialübergänge, verschlechtert. Damit ergibt sich die zweite wichtige Frage nach der Identifikation dieser Bereiche und der Wiederherstellung der Konvergenzrate. Da bei praktischer Problemstellung die wahre Lösung in der Regel unbekannt ist, muss der durch die Approximation verursachte Fehler geschätzt werden. Hierbei wird zwischen zwei Arten von Fehlerschätzern unterschieden: *A priori* Fehlerschätzer und *a posteriori* Fehlerschätzer. Erstere sind hinsichtlich theoretischer Betrachtungen der FE-Methode wichtig, da sie zeigen, ob und unter welchen Bedingungen das verwendete Verfahren konvergiert. Zweitgenannte können herangezogen werden, um quantitative Aussagen über den Fehler der FE-Lösung treffen zu können [BW11, S. 216].

Die *a posteriori* Fehlerschätzer nutzen hierzu bereits numerisch berechnete Lösungen als Grundlage, um eine Aussage über die Genauigkeit der Approximation zu erhal-

ten [BR78a]. Die Formulierung *lokaler* a posteriori Fehlerschätzer, die jedem finiten Element eine Approximation des Fehlers zuweisen, eröffnen die Möglichkeit Bereiche lokaler Singularitäten zu identifizieren. In diesen Bereichen kann mittels lokaler Verfeinerung des Netzes (*h*-Verfeinerung) die Konvergenzrate des FE-Verfahrens wiederhergestellt werden. Durch Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen (*p*-Anreicherung) lässt sich in den Bereichen, in denen die Lösung regulär ist die Genauigkeit der approximierten Lösung stark verbessern. Eine Kombination dieser beiden Methoden ermöglicht die Wiederherstellung der Konvergenzrate des FE-Verfahrens [GB86]. Diese Methoden bilden damit, eingebunden in einen adaptiven Prozess, die sogenannten *h*-, *p*-, bzw. *hp*-adaptiven Verfahren in der FE-Simulation. Als wichtige Vertreter lokaler a posteriori Fehlerschätzer sind unter anderem die *zielorientierten*, *residuenbasierten* Fehlerschätzer zu nennen.

Residuenbasierte a posteriori Fehlerschätzer beruhen auf dem Lösen lokaler residueller Hilfsprobleme für den Fehler. Diese Hilfsprobleme führen oft auf lokale Hilfsprobleme, die für jedes Element gestellt werden. Eine Schwierigkeit liegt darin, diese als gut gestellte Probleme zu formulieren [AO00, S. 111ff]. Einen Ansatz hierfür liefert unter anderem die sogenannte *Equilibrated Residual Method* [Kel84], die mithilfe passender Randbedingungen die Flussbilanzen lokal abgleichen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die lokalen Probleme durch geeignete Wahl von Ansatzfunktionen so zu formulieren, damit das lokale Neumann-Problem gut gestellt ist [Ver89], [AO00, S. 52f], [Ain96]. Ein Nachteil dieser Möglichkeit ist die starke Abhängigkeit der Qualität des Fehlerschätzers von der Wahl dieser Ansatzfunktionen [Ain96].

Zielorientierte a posteriori Fehlerschätzer formulieren den Fehler in einer Größe, die für das zugrunde liegende Problem von speziellem Interesse ist [BR01]. Dies ermöglicht es adaptive Verfahren zu konstruieren, die die Genauigkeit direkt in dieser Zielgröße verbessern. Solche zielorientierten Ansätze für adaptive Verfahren resultieren meist in einer starken Reduzierung des rechnerischen Aufwands, da nur diejenigen Merkmale in der Lösung, die die Zielgröße stark beeinflussen, aufgelöst werden.

Da bei der FE-Analyse elektromagnetischer Strukturen häufig nicht die Genauigkeit in der Feldgröße selbst von Interesse ist, sondern die Genauigkeit in integralen Größen, wie den Streuparametern, bietet sich der Entwurf eines zielorientierten selbst-adaptiven Verfahrens an, welches zentraler Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist. Hierbei wird ein zielorientierter a posteriori Fehlerindikator bezüglich der Streuparameter vorgestellt, der die Grundlage für ein adaptives Verfahren bildet. Dieses wird als *h*-Variante der FE-Methode realisiert, da die auf *h*-Verfeinerung beruhenden adaptiven Verfahren essenziell für die Wiederherstellung der Konvergenzordnung bei Anwesenheit von Singularitäten sind [Sch98, S. 89], [AS98]. Zur Netzverfeinerung wird eine hierarchische Unterteilung der Tetraeder verwendet [HFDE03], welche auf geschachtelte FE-Netze führt, die die Eigenschaft besitzen, dass sie bei Verfeinerung eine untere Schranke der Netzqualität sichern [Sha95, S. 68ff], [WM99],

[HFDE03] und geeignet sind um geometrische Multigrid-Verfahren als effiziente Löser einzusetzen [BEK92], [Rüd93, S. 35ff]. Damit diese Eigenschaften auch bei ungleichmäßiger Verfeinerung erhalten bleiben, wird in der vorliegenden Arbeit das Konzept der *hängenden Unbekannten* [HFDE04], [WM99] genutzt, sodass Elemente verminderter Qualität in den Bereichen ungleicher Verfeinerungstiefen vermieden werden, die bei gängigen Methoden wie der *Rot-Grün-Verfeinerung* auftreten [KA00, S. 174f].

Die vorliegende Dissertation gliedert sich in die folgenden Teilbereiche: Kapitel 2 beschreibt das zur physikalischen Modellierung passiver Mikrowellenstrukturen notwendige System der Maxwell-Gleichungen und führt die hierfür verwendeten Randbedingungen ein. Des Weiteren wird eine Charakterisierung axial homogener Wellenleiter vorgenommen. Kapitel 3 stellt das in dieser Dissertation zugrunde liegende Randwertproblem vor und leitet für dieses eine Finite-Elemente-Formulierung für Streuparameter her. Dabei werden die Anregungen passiver Mikrowellenstrukturen mittels modaler Mehr Tore berücksichtigt. Kapitel 4 behandelt die hierarchische Verfeinerung von FE-Netzen. Hierbei werden inkonsistent, ungleichmäßig verfeinerte FE-Netze unter Verwendung hängender Unbekannter diskutiert. Abschließend wird die FE-Formulierung für solche Netzhierarchien unter Berücksichtigung von Prolongation und Restriktion der Unbekannten hergeleitet. In Kapitel 5 wird ein *h*-adaptives FE-Verfahren vorgestellt, das es ermöglicht, mithilfe eines impliziten, zielorientierten Fehlerindikators Problem angepasste FE-Netze zu konstruieren. Die Formulierung des Fehlerindikators orientiert sich an der *Dual Weighted Residual Method* aus [BR01, BR95], die aufgrund der in dieser Arbeit verwendeten perfekt geschachtelten Funktionenräume eine einfache Schätzung des Fehlers erlaubt. Abschließend wird das *h*-adaptive Verfahren anhand eines numerischen Beispiels evaluiert. In Kapitel 6 werden verschiedene Beispiele ausgewertet, die die gängigen Problemstellungen in der Simulation passiver Mikrowellenstrukturen widerspiegeln. Den Abschluss der vorliegenden Arbeit bildet Kapitel 7, das neben einer Zusammenfassung einen Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen basierend auf den vorgestellten Konzepten gibt.

Kapitel 2

Physikalische Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen

2.1 Maxwell-Gleichungen

Bei der Modellierung passiver Mikrowellenstrukturen werden im Allgemeinen inhomogene, verlustbehaftete Materialeigenschaften und Abstrahlung in den Freiraum berücksichtigt. Die Einspeisung erfolgt hierbei über Wellenleiter. Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft eine solche Struktur. Grundlage für die Beschreibung dieser Strukturen auf elektromagnetischer Feldebene bilden die Maxwell-Gleichungen. In differenzieller Form lassen sich diese wie folgt notieren [RC09, S. 21]:

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \varrho, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0. \quad (2.1d)$$

Dabei werden die Quellenfelder durch die Stromdichte $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ und die Raumladungsdichte ϱ dargestellt. Das vermittelnde Feld wird durch die elektromagnetischen Feldgrößen, der elektrischen Feldstärke $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, der elektrischen Flussdichte $\boldsymbol{\mathcal{D}}$, der magnetischen Erregung $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, und der magnetischen Flussdichte $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ ausgedrückt. Neben den grundlegenden Gleichungen aus (2.1) sind zusätzliche Gleichungen anzugeben. Diese Konstitutivgleichungen formulieren die Materialbeziehungen, die im Allgemeinen Fall wie folgt festgehalten werden können [RC09, S. 28ff]:

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}), \quad (2.2a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}), \quad (2.2b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\mathcal{E}}). \quad (2.2c)$$

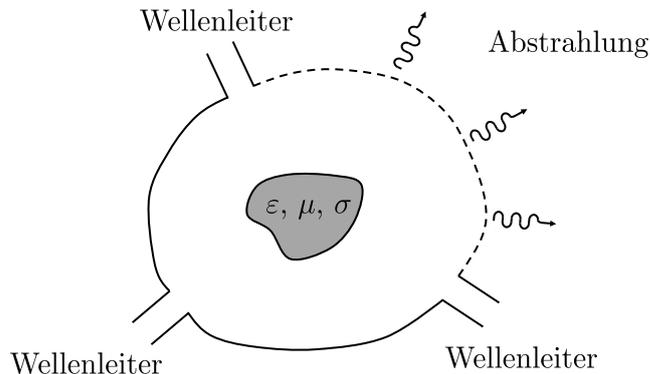


Abbildung 2.1: Verallgemeinerte passive Mikrowellenstruktur.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden symmetrische, lineare, zeitinvariante Materialien vorausgesetzt. Weiterhin werden eingeprägte Volumenstromdichten nicht betrachtet und ausschließlich Leitungsstromdichten berücksichtigt. Damit lassen sich die Materialbeziehungen der Konstitutivgleichungen (2.2) in expliziter Form angeben

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathcal{E}, \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H} = \mu_0 \mu_r \mathcal{H}, \quad (2.3b)$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}. \quad (2.3c)$$

Hierbei bezeichnet ε_0 die Permittivität des Vakuums und μ_0 die magnetische Permeabilität des Vakuums. Sowohl der relative Permittivitätstensor ε_r als auch der relative Permeabilitätstensor μ_r sind symmetrisch, positiv definite ortsabhängige Tensoren. Der Leitfähigkeitstensor σ ist ein symmetrisch, positiv semi-definiter ortsabhängiger Tensor. In der vorliegenden Arbeit werden indes isotrope Materialeigenschaften behandelt.

Angesichts der getroffenen Voraussetzung linearer, zeitinvarianter Materialeigenschaften können die Maxwell-Gleichungen im Frequenzbereich ausgedrückt werden [RC09, S. 196f]. Hierbei wird eine harmonische Zeitabhängigkeit angenommen, sodass sich eine Feldgröße \mathcal{F} ausdrücken lässt als

$$\mathcal{F} = \text{Re}\{\mathbf{F}e^{j\omega t}\}, \quad (2.4)$$

mit der Kreisfrequenz ω . Dies führt zu einer Algebraisierung der Zeitableitungen durch die Transformationsvorschrift

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F} \circ \bullet j\omega \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

und die Fundamentalgleichungen der Maxwell-Gleichungen nehmen die folgende Ge-

stalt an

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B}, \quad (2.6a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}, \quad (2.6b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.6c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.6d)$$

Hierbei bezeichnen \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} und ρ die den Feldgrößen \mathcal{E} , \mathcal{D} , \mathcal{H} , \mathcal{B} und ϱ zugeordneten Phasoren. Das Gleichungssystem (2.6) stellt ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung dar. Die Kopplung der Gleichungen kann durch Elimination einer der elektromagnetischen Feldgrößen aufgelöst werden und resultiert in einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um dies z. B. für die elektrische Feldstärke \mathbf{E} zu erreichen, wird Gleichung (2.6a) mit μ_r^{-1} multipliziert und anschließend die Rotation gebildet. Mit der Materialbeziehung (2.3b) der magnetischen Flussdichte ergibt sich

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}. \quad (2.7)$$

Mit Einsetzen von Gleichung (2.6b) und unter Rücksichtnahme der verbleibenden Materialbeziehungen (2.3a) und (2.3c) ergibt sich die vektorielle Helmholtz-Gleichung für die elektrische Feldstärke

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu_0\sigma\mathbf{E} - \omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E} = 0. \quad (2.8)$$

Durch Einführen des Freiraum-Feldwellenwiderstands

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2.9)$$

und der Freiraumwellenzahl

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c_0}, \quad (2.10)$$

wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet, ergibt sich die Helmholtz-Gleichung zu

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0\eta_0\sigma\mathbf{E} - k_0^2\varepsilon_r\mathbf{E} = 0. \quad (2.11)$$

In der vorliegenden Arbeit ist Gleichung (2.11) Ausgangspunkt aller weiteren Betrachtungen zur Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen.

2.2 Randbedingungen

Zur vollständigen physikalischen Modellierung passiver Mikrowellenstrukturen ist neben der Differentialgleichung aus (2.11) die Formulierung geeigneter Randbedingungen notwendig. Hierzu wird ein Feldgebiet Ω betrachtet, dessen Rand Γ sich in die folgenden nicht-überlappenden Teilränder unterteilt:

$$\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_Z \cup \Gamma_P. \quad (2.12)$$

Dabei werden auf den Teilrändern Γ_E und Γ_H die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} bzw. der magnetischen Erregung \mathbf{H} vorgegeben. Der Rand Γ_Z dient zur Vorgabe einer Impedanzrandbedingung und die Anregung erfolgt über den Teilrand Γ_P .

Die Randbedingungen für die Teilränder Γ_E und Γ_H lassen sich mit dem aus dem Feldgebiet zeigenden Flächennormalenvektor $\hat{\mathbf{n}}$ wie folgt angeben

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{E}}_t \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{H}}_t \quad \text{auf } \Gamma_H. \quad (2.14)$$

Ausgehend von der in der Feldgröße \mathbf{E} formulierten Gleichung (2.11) entspricht Bedingung (2.13) einer Dirichlet-Randbedingung, während Bedingung (2.14) einer Neumann-Randbedingung darstellt. Ideal elektrische Leiter (PEC, engl. perfect electric conductor) werden mittels der in (2.13) angegebenen Dirichlet-Randbedingung mit $\bar{\mathbf{E}}_t = 0$ modelliert, welche damit einer homogenen Dirichlet-Randbedingung entspricht.

Eine weitere relevante Randbedingung zur Beschreibung passiver Mikrowellenstrukturen stellt die Impedanzrandbedingung dar. Diese gibt eine lineare Beziehung zwischen der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} und der Tangentialkomponente der magnetischen Erregung \mathbf{H} wieder, mit

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = Z_s \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_Z. \quad (2.15)$$

Die Oberflächenimpedanz Z_s ist hierbei im Allgemeinen frequenz- und ortsabhängig. Im Rahmen der FE-Simulation passiver Mikrowellenstrukturen ist die Impedanzrandbedingung (2.15), die einer Robin-Randbedingung entspricht, von praktischem Belang, da sie es erlaubt gute Leiter und Abstrahlungsbedingungen zu modellieren. Gute elektrische Leiter besitzen im Gegensatz zu den PECs die Eigenschaft, dass die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Oberfläche des Leiters nicht exakt verschwindet. Die Leitfähigkeit σ bleibt demnach bei einem guten elektrischen Leiter stets endlich, dennoch ist sie hoch genug, dass die Verschiebungsstromdichte $j\omega\varepsilon\mathbf{E}$ gegenüber der Leitungsstromdichte $\sigma\mathbf{E}$ vernachlässigt werden kann. Damit wird das elektromagnetische Feld in das Innere des Leiters über die sogenannte *Eindringtiefe*

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.16)$$

exponentiell mit der Dämpfungskonstante $\alpha = 1/\delta$ gedämpft [Jac01, S. 407f]. Dies wird auch als *Skin-Effekt* bezeichnet und hat zur Folge, dass für Eindringtiefen die sehr viel kleiner als die Abmessungen des Leiters sind, das Innere des Leiters aus dem Feldgebiet Ω entfernt werden kann und durch die Impedanzrandbedingung (2.15) mit

$$Z_s = (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.17)$$

auf der Oberfläche des Leiters Berücksichtigung findet [Jac01, S. 410]. Des Weiteren kann die Impedanzrandbedingung (2.15) im FE-Kontext eingesetzt werden, um Abstrahlung ins Unendliche zu realisieren. Dies findet typischerweise bei der Simulation von Antennen oder der Berechnung von Streuproblemen Anwendung. Eine Möglichkeit Abstrahlung exakt zu berücksichtigen ist die Kopplung zu Integralgleichungen, welche allerdings auf eine vollbesetzte Teilmatrix der Systemmatrix führt [PRM98, S. 470ff]. Eine weitere Möglichkeit zur Berücksichtigung von Abstrahlung wird durch eine lokale Approximation dieser mittels sogenannter *absorbierender Randbedingungen* (engl. ABC, absorbing boundary condition) erreicht, die aus dem Feldgebiet Ω hinauslaufende Wellen absorbiert und unphysikalische Reflexionen vermeidet. Die einfachste Form solcher Randbedingungen für zeitharmonische elektromagnetische Randwertprobleme ist die absorbierende Randbedingung erster Ordnung [Jin02, S. 348ff]. Diese kann bei Annahme eines verlustlosen Mediums mit der Permittivität ε und der Permeabilität μ wie folgt angegeben werden:

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_Z. \quad (2.18)$$

Damit genügt die absorbierende Randbedingung erster Ordnung der Impedanzrandbedingung aus (2.15) mit der Oberflächenimpedanz

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \eta, \quad (2.19)$$

wobei η die Feldwellenimpedanz des betrachteten Mediums darstellt. Dies bedeutet, dass an dem absorbierenden Rand eine senkrecht zur betrachteten Fläche einfallende ebene Welle Reflexionsfreiheit besitzt. [RC09, S. 263f].

Die Berücksichtigung von Anregungen passiver Mikrowellenstrukturen wird auf den Rändern Γ_P durchgeführt. Hierbei wird die elektromagnetische Struktur mittels modaler Felder auf Γ_P gespeist, die das Verhalten einmündender axial homogener Wellenleiter beschreiben. Damit stellen die Ränder Γ_P die Tore der betrachteten elektromagnetischen Struktur dar und verbinden diese mit dem Rest des Mikrowellennetzwerks. Dies legt die Grundlage zur Charakterisierung des Systems mittels integraler Netzwerkparameter, wie z. B. den Streuparametern, die das Eingangs-/Ausgangsverhalten bezüglich der Tore beschreiben. In der vorliegenden Arbeit werden an den Toren transparente Randbedingungen verwendet, die formal auf Robin-Randbedingungen führen und die es erlauben die Systembeschreibung direkt in den Streuparametern zu formulieren. Die Herleitung einer solchen Formulierung in den Streuparametern wird ausgehend von einer Systembeschreibung über Impedanzmatrizen, die mittels einer Realisierung der Tore über modenspezifische Neumann-Randbedingungen erreicht wird durchgeführt.

Damit unter den Randbedingungen (2.13)-(2.15) die Maxwell-Gleichungen zu einer eindeutigen Lösung führen, darf der Realteil der Oberflächenimpedanz Z_s aus der Impedanzrandbedingung (2.15) nicht negativ sein. Dies entspricht einer passiven

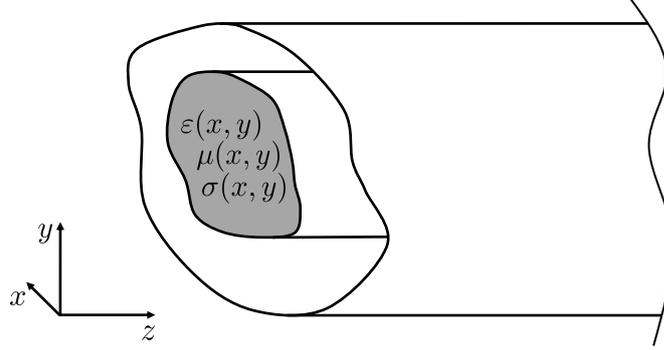


Abbildung 2.2: Axial homogener Wellenleiter.

Impedanzrandbedingung. Der Beweis zur Eindeutigkeit für ein solches Randwertproblem ist in [ZC06, S. 7f] gegeben.

2.3 Eigenschaften axial homogener Wellenleiter

Zur Modellierung passiver Mikrowellenstrukturen werden diese mittels axial homogener Wellenleiter mit endlichem Querschnitt gespeist. Axial homogene Wellenleiter sind dadurch gekennzeichnet, dass sich weder deren Geometrie noch die Materialeigenschaften längs der Axialrichtung ändern. Abbildung 2.2 zeigt einen solchen Wellenleiter. Hierbei wird die Axialrichtung in z -Richtung angenommen. Damit kann ein Separationsansatz bezüglich des axialen Verlaufs der elektromagnetischen Felder durchgeführt werden und die modale Charakterisierung der betrachteten Struktur reduziert sich auf die Transversalebene, welche mit dem Index t gekennzeichnet ist. Wird zudem Reflexionssymmetrie in z -Richtung vorausgesetzt, so existiert für axial homogene Wellenleiter mit endlichem Querschnitt zu jeder Eigenlösung $(\mathbf{e}_{t,k}, e_{z,k}; \mathbf{h}_{t,k}, h_{z,k})$ mit dem Eigenwert γ_k die korrespondierende Eigenlösung $(\mathbf{e}_{t,k}, -e_{z,k}; -\mathbf{h}_{t,k}, h_{z,k})$ mit dem Eigenwert $-\gamma_k$ [Col91, S. 418]. Diese Eigenschaft gilt neben den in der vorliegenden Arbeit betrachteten, isotropen Materialien ebenso auch für transversal anisotrope Materialien mit Symmetrie bezüglich der z -Richtung [FM94, S. 827f]. Damit können die vorlaufende Wellenform $(\mathbf{e}_k^v, \mathbf{h}_k^v; e^{-\gamma_k z})$ und die rücklaufende Wellenform $(\mathbf{e}_k^r, \mathbf{h}_k^r; e^{+\gamma_k z})$ des k -ten Modes wie folgt dargestellt werden [Poz98, S. 185]

$$\mathbf{e}_k^v = (\mathbf{e}_{t,k} + e_{z,k} \hat{\mathbf{z}}) e^{-\gamma_k z}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{e}_k^r = (\mathbf{e}_{t,k} - e_{z,k} \hat{\mathbf{z}}) e^{+\gamma_k z}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{h}_k^v = (\mathbf{h}_{t,k} + h_{z,k} \hat{\mathbf{z}}) e^{-\gamma_k z}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{h}_k^r = (-\mathbf{h}_{t,k} + h_{z,k} \hat{\mathbf{z}}) e^{+\gamma_k z}. \quad (2.23)$$

Abbildung 2.3 zeigt die hierbei getroffenen Konventionen bezüglich der vor- und rücklaufenden Welle anhand einer Ein-Tor-Mikrowellenstruktur. Da die Eigenmoden

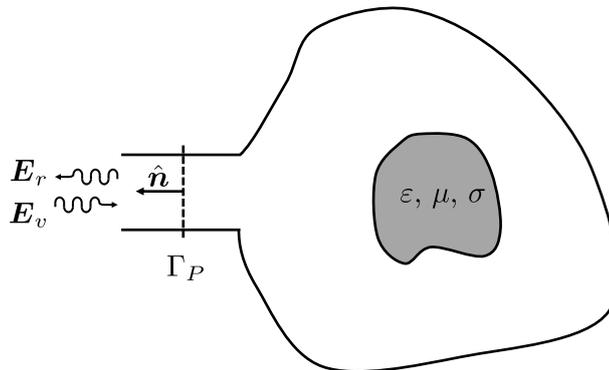


Abbildung 2.3: Richtungskonvention für vor- und rücklaufende Welle.

ein vollständiges System von Funktionen bilden, kann jede elektromagnetische Welle in einem solchen Wellenleiter als Superposition seiner Eigenmoden ausgedrückt werden [Col91, S. 426f]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^v + \mathbf{E}^r = \sum_k c_k^v \mathbf{e}_k^v + \sum_k c_k^r \mathbf{e}_k^r, \quad (2.24)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^v + \mathbf{H}^r = \sum_k c_k^v \mathbf{h}_k^v + \sum_k c_k^r \mathbf{h}_k^r. \quad (2.25)$$

Die Koeffizienten c_k^v und c_k^r stellen die komplexen Amplituden des Modes k dar. Darüber hinaus gilt für die Eigenmoden $(\mathbf{e}_i, \mathbf{h}_i; e^{\pm\gamma_i z})$ und $(\mathbf{e}_k, \mathbf{h}_k; e^{\pm\gamma_k z})$ mit unterschiedlichen Ausbreitungskonstanten $|\gamma_i| \neq |\gamma_k|$ die *verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation* [Col91, S. 416ff]

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{e}_i \times \mathbf{h}_k) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, d\Gamma = 0 \quad i \neq k. \quad (2.26)$$

Diese vereinfacht sich dabei unter Verwendung der Beziehungen (2.20) und (2.22) bzw. (2.21) und (2.23) zu

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{e}_{t,i} \times \mathbf{h}_{t,k}) \cdot \hat{\mathbf{z}} \, d\Gamma = 0 \quad i \neq k, \quad (2.27)$$

mit dem transversalen elektrischen Feld $\mathbf{e}_{t,i}$ des i -ten Modes und der transversalen magnetischen Erregung $\mathbf{h}_{t,k}$ des k -ten Modes. Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{z}}$ zeigt dabei in Axialrichtung und Γ bezeichnet den Wellenleiterquerschnitt. Die Modenorthogonalität (2.27) besagt damit, dass unterschiedliche Moden in einem Wellenleiter nicht verkoppelt sind, was auch für degenerierte Moden gilt [Col91, S. 359f]. Dies bedeutet, dass für einen Wellenleiter, bei dem n Moden berücksichtigt werden sollen, dieser auf Schaltungsebene durch n verschiedene Übertragungsleitungen modelliert werden kann. Wird demnach eine elektromagnetische Struktur von einem Wellenleiter

gespeist, an dessen Querschnitt mehrere Moden berücksichtigt werden, so kann jeder Mode unabhängig von den anderen als verallgemeinertes Tor der äquivalenten Netzwerkbeschreibung aufgefasst werden [Har01, S. 391f].

Kapitel 3

Finite-Elemente-Simulation passiver Mikrowellenstrukturen

In dem folgenden Kapitel wird eine FE-Formulierung zur Simulation passiver Mikrowellenstrukturen vorgestellt, die die Basis für das in Kapitel 5 vorgestellte selbst-adaptive Verfahren bildet. Abschnitt 3.1 behandelt die zur Beschreibung elektromagnetischer Felder angepassten Funktionenräume und stellt diese in Bezug zu den Feldgrößen aus den Maxwell-Gleichungen. Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten hierarchischen FE-Ansatzfunktionen werden in Abschnitt 3.2 vorgestellt, welche als Grundlage für die FE-Simulation der Mikrowellenstrukturen dienen. In Abschnitt 3.3 wird mittels der schwachen Formulierung des in Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.2 beschriebenen Randwertproblems eine FE-Formulierung in den Streuparametern hergeleitet, welche als Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen für das zielorientierte selbst-adaptive Verfahren dient, das in Kapitel 5 behandelt wird. Abschnitt 3.4 geht auf die elektromagnetische Modellierung von Teilstrukturen eines passiven Mikrowellennetzwerks ein, die über mehrere axial homogene Wellenleiter mit dem Rest des Netzwerks verbunden sind. Dabei wird die Anregung solcher Strukturen mittels modaler Felder beschrieben sowie deren FE-Modellierung hergeleitet.

3.1 Angepasste Funktionenräume

Um die in Abschnitt 2.1 eingeführten elektromagnetischen Feldgrößen zu beschreiben, werden in diesem Abschnitt die hierfür angepassten Funktionenräume vorgestellt. Damit die Funktionenräume definiert werden können, wird zunächst der Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren skalar- oder vektorwertigen Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eingeführt

$$L^2(\Omega) := \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|_{L^2} < \infty\}, \quad (3.1)$$

wobei $\|\cdot\|_{L^2}$ die durch das Skalarprodukt

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_2^H(\mathbf{x}) \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

induzierte Norm bedeutet. Damit können die bei der Beschreibung der Maxwell-Gleichungen auftretenden Funktionenräume wie folgt definiert werden [Mon03, S. 36ff]:

$$\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma_\phi) := \{\phi \in L^2(\Omega) \mid \nabla\phi \in L^2(\Omega) \wedge \phi = 0 \text{ auf } \Gamma_\phi \subseteq \partial\Omega\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) := \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \wedge \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \text{ auf } \Gamma_E \subseteq \partial\Omega\}, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma_B) := \{\mathbf{B} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{B} \in L^2(\Omega) \wedge \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ auf } \Gamma_B \subseteq \partial\Omega\}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}^0(\Omega) := \{\rho \in L^2(\Omega)\}. \quad (3.6)$$

Bis auf den $\mathcal{H}^0(\Omega)$ sind diese Räume nicht vollständig bezüglich des Skalarprodukts (3.2). Durch Einführen der den Räumen (3.3) bis (3.6) entsprechenden Skalarprodukte

$$(\phi_1, \phi_2)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} := (\phi_1, \phi_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla\phi_1, \nabla\phi_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.7)$$

$$(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} := (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \times \mathbf{E}_1, \nabla \times \mathbf{E}_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.8)$$

$$(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)_{\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)} := (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)_{L^2(\Omega)} + (\nabla \cdot \mathbf{B}_1, \nabla \cdot \mathbf{B}_2)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.9)$$

$$(\rho_1, \rho_2)_{\mathcal{H}^0(\Omega)} := (\rho_1, \rho_2)_{L^2(\Omega)} \quad (3.10)$$

werden diese jedoch zu Hilberträumen [Bos98, S. 128].

Die oben genannten Funktionenräume bilden eine Sequenz, welche üblicherweise wie folgt dargestellt wird [Mon03, S. 65]:

$$\mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma) \xrightarrow{\nabla \times} \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma) \xrightarrow{\nabla \cdot} \mathcal{H}^0(\Omega). \quad (3.11)$$

Hierbei ist jeder Pfeil mit einem Operator versehen und das Bild des Funktionenraums zur Linken liegt bei Anwendung des Operators im Kern des konsekutiven Operators zur Rechten. Wird demnach ausgehend von einer Funktion $\phi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma)$ der Gradientenoperator angewendet, so wird diese in den Funktionenraum $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma)$ überführt. Die Anwendung des Rotationsoperators auf ein Element aus $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma)$ führt dann zu einem Element aus $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma)$. Das Bilden der Divergenz eines Elements aus $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma)$ ergibt ein Element aus $\mathcal{H}^0(\Omega)$. Eine Betrachtung der Nullräume der Sequenz zeigt, dass der Gradient für $\Gamma = \emptyset$ einen nichttrivialen Nullraum besitzt, der aus den konstanten Funktionen auf Ω besteht

$$\ker\{\text{grad}; \mathcal{H}^1(\Omega)\} = \{\phi \in L^2(\Omega) \mid \phi = \text{const}\}. \quad (3.12)$$

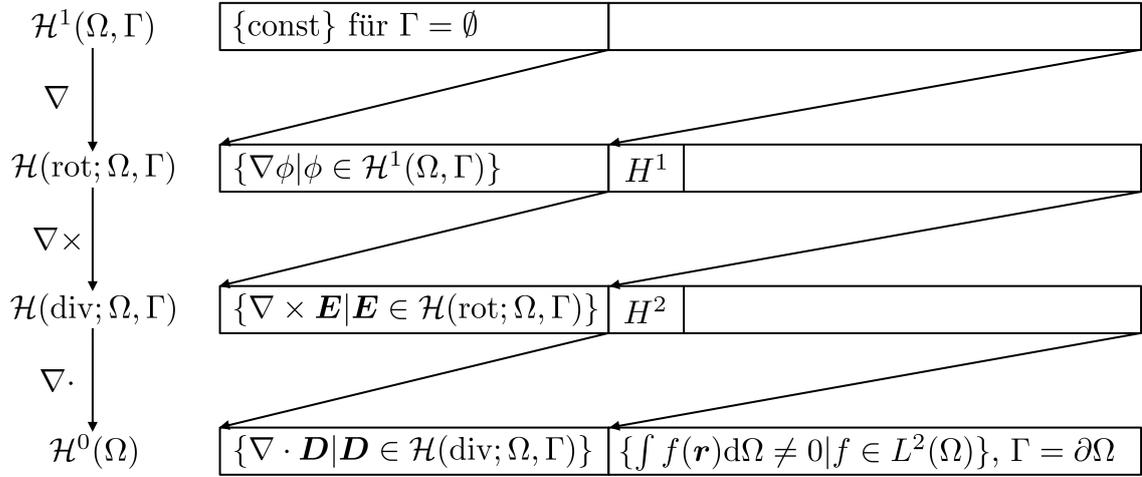


Abbildung 3.1: Der de-Rham-Komplex.

Der Nullraum der Rotation wird bei nicht-einfach zusammenhängenden Gebieten nicht einzig durch die Gradienten gebildet, sondern zudem durch den Quotientenvektorraum H^1

$$\ker\{\text{rot}; \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma)\} = \{\mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{E} = \nabla\phi, \phi \in \mathcal{H}^1(\Omega, \Gamma)\} \oplus H^1. \quad (3.13)$$

Dieser ist abhängig von der Topologie des Feldgebiets Ω und beschreibt die linear unabhängigen Schleifen, die innerhalb des Feldgebiets nicht auf einen Punkt kontrahiert werden können [Fra04, Kapitel 13]. Die Anzahl dieser linear unabhängigen Schleifen ergibt die Dimension des H^1 . Der Nullraum der Divergenz besteht bei nicht-kontrahierbaren Gebieten nicht nur aus den Rotationen der Elemente aus $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma)$ sondern zusätzlich aus dem Quotientenvektorraum H^2

$$\ker\{\text{div}; \mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma)\} = \{\mathbf{B} \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E}, \mathbf{E} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma)\} \oplus H^2. \quad (3.14)$$

Wie auch der Quotientenvektorraum H^1 , ist H^2 abhängig von der Topologie des Feldgebiets Ω und seine Dimension entspricht der Anzahl der Kavitäten in diesem Feldgebiet [Fra04, Kapitel 13]. Der Funktionenraum $\mathcal{H}^0(\Omega)$ besteht aus den Bildern der Divergenz von Elementen aus $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega, \Gamma)$. Entspricht jedoch der Rand Γ dem gesamten Rand $\partial\Omega$ des Feldgebiets, so müssen zusätzlich die Funktionen mit nicht verschwindendem Mittelwert zu $\mathcal{H}^0(\Omega)$ hinzugefügt werden. Diese liegen nicht mehr im Bild des Divergenzoperators, da wegen des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{B} \, d\Omega = \oint_{\Gamma=\partial\Omega} \underbrace{\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}}_{=0} \, d\Gamma = 0 \quad (3.15)$$

gilt. Eine zusammenfassende Darstellung der beschriebenen Funktionenräume und ihrer Beziehungen untereinander ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

Die Zuordnung der einzelnen Feldgrößen aus den Maxwell-Gleichungen zu den entsprechenden Funktionenräumen kann für ein vereinfachtes Problem mit disjunkten

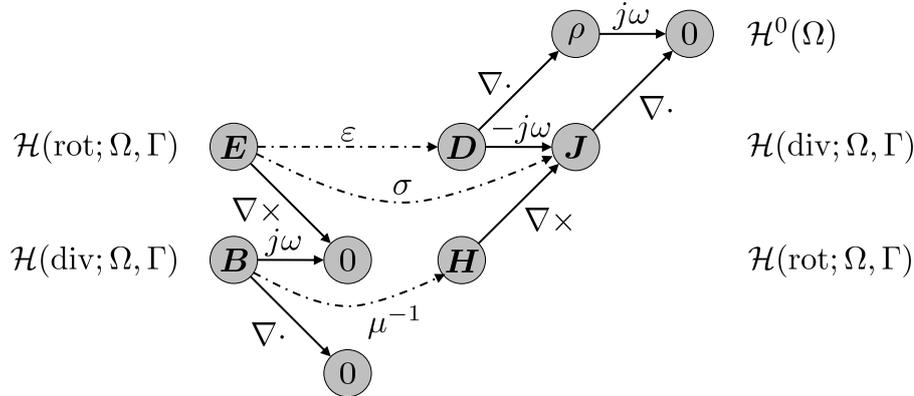


Abbildung 3.2: Tonti-Diagramm der Maxwell-Gleichungen [Kur03].

Rändern $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H$ in einem Tonti-Diagramm [Kur03] veranschaulicht werden, welches in Abbildung 3.2 dargestellt ist. Hierbei ergibt sich die in einem Kreis stehende Größe als Summe der auf den Kreis, mit durchgezogenen Pfeilen zeigenden zugeordneten Größen. Jeder Pfeil ist dabei mit dem anzuwendenden Operator versehen. Die Materialbeziehungen sind durch gestrichelte Pfeile repräsentiert.

3.2 Finite-Elemente-Ansatz

Der folgende Abschnitt beschreibt die zur Diskretisierung der Helmholtz-Gleichung (2.11) mittels finiter Elemente verwendeten diskreten Funktionenräume.

3.2.1 Tetraedrische Finite-Elemente-Netze

Die Grundlage zur Beschreibung eines FE-Funktionenraums wird durch die Diskretisierung eines betrachteten Feldgebiets Ω zu einem FE-Netz gelegt. Im dreidimensionalen Fall sind die Bausteine eines solchen FE-Netzes in der Regel durch Tetraeder, Hexaeder oder Prismen gegeben. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich tetraedrische Diskretisierungen behandelt, da sie eine einfache Generierung der benötigten FE-Netze erlauben. Dabei besteht eine tetraedrische Diskretisierung, welche auch als Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ eines Feldgebiets Ω bezeichnet wird, aus einer endlichen Anzahl von Tetraedern T und es gilt [Mon03, S. 112]:

1. Jedes T ist eine offene Menge.
2. Sind $T, T' \in \mathcal{T}_h$ zwei verschiedene Tetraeder, dann gilt: $T \cap T' = \emptyset$.
3. $\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \bar{T}$.

Tabelle 3.1: Punktbeschreibung der Simplizes.

Simplex	Beschreibung
Knoten	$N(N_i)$
Kante	$E(N_i, N_j)$
Dreieck	$D(N_i, N_j, N_k)$
Tetraeder	$T(N_i, N_j, N_k, N_l)$

Hierbei bezeichnet $\bar{\Omega}$ den Abschluss des Feldgebiets Ω und \bar{T} entsprechend den Abschluss des Tetraeders T . Das Tetraeder kann mittels eines 4-Tupels von Punkten, die dessen (Eck-)Knoten entsprechen, definiert werden. In gleicher Weise finden sich für alle weiteren vorkommenden Simplizes – den Punkten, Strecken und Dreiecken – entsprechende Definitionen mittels Tupeln von Punkten. Diese Simplizes treten als Knoten, Kanten und Dreiecksflächen des Tetraeders auf und ihre Beschreibung ist in Tabelle 3.1 gegeben. Eine charakteristische Größe für ein FE-Netz stellt die sogenannte Netzweite h dar. Diese ist im Falle einer Triangulierung definiert als der größte vorkommende Radius h_T der den Tetraedern \bar{T} entsprechenden Umkugeln [Mon03, S. 112], und es ist

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} h_T. \quad (3.16)$$

Die Elementqualität q_T wird dabei als Quotienten des Radius der größten vorkommenden Inkugel ρ_T eines Tetraeders \bar{T} und dem Umkugelradius h_T definiert

$$q_T := \frac{\rho_T}{h_T}. \quad (3.17)$$

Eine Triangulierung \mathcal{T}_h wird als *regulär* bezeichnet, wenn es für Netzweiten $h \rightarrow 0$ Konstanten $q_0 > 0$ und $h_0 > 0$ gibt, sodass

$$q_h \geq q_0 \quad \forall 0 < h \leq h_0, \quad (3.18)$$

mit

$$q_h := \max_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} q_T. \quad (3.19)$$

Eine Triangulierung wird zudem als *konsistent* bezeichnet, wenn ausgehend von zwei Tetraedern $T, T' \in \mathcal{T}_h$ mit $\bar{T} \cap \bar{T}' \neq \emptyset$ sich diese einzig auf eine der folgenden Arten berühren [Mon03, S. 112]:

- Beide Tetraeder berühren sich in genau einem Punkt und dieser Punkt ist ein Knoten beider Tetraeder.
- Beide Tetraeder berühren sich entlang einer gemeinsamen Kante, deren Knoten beiden Tetraedern eigen sind.

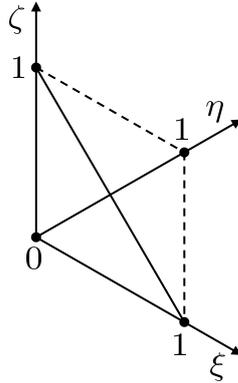


Abbildung 3.3: Referenztetraeder im lokalen Koordinatensystem.

- Beide Tetraeder berühren sich an einem gemeinsamen Dreieck, dessen Knoten beiden Tetraedern eigen sind.

Ausgangspunkt der weiteren Betrachtungen in der vorliegenden Arbeit ist eine konsistente Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω . Die Behandlung *inkonsistenter* FE-Netze, welche durch selbstähnliche Verfeinerung einzelner Tetraeder konsistenter Netze entstehen, wird in Kapitel 4 durchgeführt.

3.2.2 Finite-Elemente-Ansatzfunktionen

Die Basen der endlich-dimensionalen Funktionenräume werden aus Ansatzfunktionen mit beschränktem Träger gebildet. Hierzu werden entsprechend der tetraedrischen Diskretisierung des Feldgebiets die Ansatzfunktionen bezüglich eines Referenztetraeders \hat{T} mit den lokalen Koordinaten $\hat{\mathbf{x}} = [\xi, \eta, \zeta]^T$ ausgedrückt. Abbildung 3.3 zeigt das Referenztetraeder im lokalen Koordinatensystem. Die Transformation der lokalen Koordinaten in globale Koordinaten, welche das betrachtete Feldgebiet beschreiben, erfolgt im geradlinigen Fall über eine affine Abbildung. Liegt eine lokal definierte Ansatzfunktion in $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ oder in $\mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$, so bleibt dies auch unter Anwendung der Transformation erhalten [Mon03, S. 122ff]. Damit können problemangepasste Ansatzfunktionen mittels des Referenztetraeders in lokalen Koordinaten konstruiert werden, ohne dass die den Funktionenräumen eigenen Stetigkeitsbedingungen bei der Transformation verloren gehen. Es ist daher zweckmäßig die FE-Ansatzfunktionen mittels baryzentrischer Koordinaten λ_i auszudrücken. Diese lauten für das in Abbildung 3.3 gezeigte Referenztetraeder:

$$\lambda_0 = \xi, \quad (3.20)$$

$$\lambda_1 = \eta, \quad (3.21)$$

$$\lambda_2 = \zeta, \quad (3.22)$$

$$\lambda_3 = 1 - \xi - \eta - \zeta, \quad (3.23)$$

Tabelle 3.2: Beschreibung der Ansatzfunktionen.

Ansatzfunktion	Assoziiertes Simplex	Baryzent. Koordinaten	Träger
Knotenfunktion	Knoten $N(N_i)$	λ_i	$\text{supp}_{\mathcal{T}_h} f_N$
Kantenfunktion	Kante $E(N_i, N_j)$	λ_i, λ_j	$\text{supp}_{\mathcal{T}_h} f_E$
Flächenfunktion	Dreieck $D(N_i, N_j, N_k)$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$	$\text{supp}_{\mathcal{T}_h} f_D$
Volumenfunktion	Tetraeder $T(N_i, N_j, N_k, N_l)$	$\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k, \lambda_l$	T

mit der Eigenschaft

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \quad (3.24)$$

Diese sind entsprechend der vorkommenden Simplizes einem Knoten, den Knoten einer Kante, den Knoten eines Dreiecks oder den Knoten eines Tetraeders zugeordnet. Damit kann jede Ansatzfunktion mit dem Simplex assoziiert werden und als Knoten-, Kanten-, Flächen- oder Volumenansatzfunktionen bezeichnet. Der Träger der Ansatzfunktionen f_S ist dabei die Menge aller Tetraeder, deren Abschluss das mit ihr assoziierte Simplex S enthält

$$\text{supp}_{\mathcal{T}_h} f_S := \left\{ \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \bar{T} \mid \bar{T} \supseteq S \right\}. \quad (3.25)$$

Tabelle 3.2 stellt diese Begebenheit zusammenfassend dar.

Um die Feldgrößen bei der FE-Diskretisierung beschreiben zu können, werden die endlich-dimensionalen diskreten Funktionenräume $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}(\text{div}; \Omega)$ und $\mathcal{Z} \subset \mathcal{H}^0(\Omega)$ betrachtet. Diese besitzen die Eigenschaft, dass sie den de-Rham-Komplex aus Abschnitt 3.1 im Diskreten nachbilden. In der vorliegenden Arbeit treten wegen der verwendeten Formulierung der Helmholtz-Gleichung (2.11) lediglich die Räume \mathcal{V} und \mathcal{W} auf. Als FE-Basen dieser beiden Räume werden die hierarchischen Ansatzfunktionen aus [Ing06] herangezogen.

Die Ansatzfunktionen des diskreten Raums \mathcal{V} sind wegen $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ am Elementrand stetig. Die hierfür verwendete hierarchische Basis des \mathcal{V} ist in Tabelle 3.3 dargestellt. Wegen der hierarchischen Basis der skalaren Ansatzfunktionen kann der Raum \mathcal{V}^p der Ordnung p nach Tabelle 3.3 als direkte Summe der Inkrementalräume $\tilde{\mathcal{V}}^p$ ausgedrückt werden

$$\mathcal{V}^p := \begin{cases} \mathcal{V}^1 & \text{für } p = 1 \\ \mathcal{V}^{p-1} \oplus \tilde{\mathcal{V}}^p & \text{für } p \geq 2 \end{cases}. \quad (3.26)$$

Der Raum \mathcal{V}^p beinhaltet damit die Polynome vom Grad kleiner gleich p .

Die Ansatzfunktionen des diskreten Raums \mathcal{W} sind wegen $\mathcal{W} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ am Elementrand tangential stetig [Néd80] und werden deswegen oft als *rotorkonforme* An-

Tabelle 3.3: Hierarchische Basis für \mathcal{V} .

Raum	Ansatzfunktion	Assoz. Simplex
\mathcal{V}^1	λ_i	$N(i)$
$\tilde{\mathcal{V}}^2$	$4\lambda_i\lambda_j$	$E(i, j)$
$\tilde{\mathcal{V}}^3$	$\lambda_i\lambda_j(\lambda_i - \lambda_j),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k$	$E(i, j)$ $D(i, j, k)$
$\tilde{\mathcal{V}}^4$	$\lambda_i\lambda_j(\lambda_i^2 - 3\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k(\lambda_j - \lambda_k),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k(\lambda_k - \lambda_i),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l$	$E(i, j)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $T(i, j, k, l)$
$\tilde{\mathcal{V}}^5$	$\lambda_i\lambda_j(\lambda_i^3 - 6\lambda_i^2\lambda_j + 6\lambda_i\lambda_j^2 - \lambda_j^3),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k(\lambda_j^2 - 3\lambda_j\lambda_k + \lambda_k^2),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k(\lambda_k^2 - 3\lambda_k\lambda_i + \lambda_i^2),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k(\lambda_i^2 - 3\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l(\lambda_i - \lambda_j),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l(\lambda_j - \lambda_k),$ $\lambda_i\lambda_j\lambda_k\lambda_l(\lambda_k - \lambda_l)$	$E(i, j)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $T(i, j, k, l)$ $T(i, j, k, l)$ $T(i, j, k, l)$

satzfunktionen bezeichnet [Mon03, S.129]. Zur Beschreibung der rotorkonformen Basis \mathcal{W} wird der Raum der Gradienten von Funktionen aus \mathcal{V} benötigt

$$\nabla\mathcal{V}^p := \{\nabla\phi \mid \phi \in \mathcal{V}^p\}. \quad (3.27)$$

Des Weiteren findet der Raum \mathcal{A}^p Anwendung, der alle verbleibenden Funktionen vom Polynomgrad kleiner gleich p enthält, die keine reinen Gradienten sind. Dieser lässt sich gemäß Tabelle 3.4 wie folgt schreiben

$$\mathcal{A}^p := \begin{cases} \mathcal{A}^1 & \text{für } p = 1 \\ \mathcal{A}^{p-1} \oplus \tilde{\mathcal{A}}^p & \text{für } p \geq 2 \end{cases}. \quad (3.28)$$

Mit Hilfe der Inkrementalräume $\nabla\mathcal{V}^p$ und \mathcal{A}^p aus (3.27) bzw. (3.28), kann der polynomiell vollständige Raum $\mathcal{W}^{c,p}$ der rotorkonformen Ansatzfunktionen der Ordnung p wie folgt notiert werden

$$\mathcal{W}^{c,p} = \begin{cases} \mathcal{A}^1 \oplus \nabla\tilde{\mathcal{V}}^2 & \text{für } p = 1 \\ \mathcal{W}^{c,p-1} \oplus \nabla\tilde{\mathcal{V}}^{p+1} \oplus \tilde{\mathcal{A}}^p & \text{für } p \geq 2 \end{cases}. \quad (3.29)$$

Da in der Finite-Elemente-Formulierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung aus (2.11) sowohl Funktionen $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$ als auch deren Rotationen $\text{rot } \mathbf{w}$ auftreten, können die Gradienten höchster Ordnung in \mathcal{W} unberücksichtigt bleiben, ohne dass es zu

Tabelle 3.4: Hierarchische Ansatzfunktionen mit nicht verschwindender Rotation.

Raum	Ansatzfunktion	Assoz. Simplex
\mathcal{A}^1	$\lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i$	$E(i, j)$
$\tilde{\mathcal{A}}^2$	$\lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k - \lambda_i \lambda_k \nabla \lambda_j,$ $\lambda_j \lambda_i \nabla \lambda_k - \lambda_j \lambda_k \nabla \lambda_i$	$D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$
$\tilde{\mathcal{A}}^3$	$4\lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k)),$ $4\lambda_k \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_j \lambda_k \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i)),$ $4\lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_k \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j)),$ $4\lambda_j \lambda_k \lambda_l \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l),$ $4\lambda_k \lambda_l \lambda_i \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l),$ $4\lambda_l \lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l)$	$D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $T(i, j, k, l)$ $T(i, j, k, l)$ $T(i, j, k, l)$
$\tilde{\mathcal{A}}^4$	$5\lambda_j \lambda_k (\lambda_j^2 - 3\lambda_j \lambda_k + \lambda_k^2) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j^2 - 3\lambda_j \lambda_k + \lambda_k^2)),$ $5\lambda_k \lambda_i (\lambda_k^2 - 3\lambda_k \lambda_i + \lambda_i^2) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_k^2 - 3\lambda_k \lambda_i + \lambda_i^2)),$ $5\lambda_i \lambda_j (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i^2 - 3\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2)),$ $(6\lambda_i - \lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_k) \lambda_j \lambda_k \nabla \lambda_i +$ $(6\lambda_j - \lambda_k - \lambda_i)(\lambda_k - \lambda_i) \lambda_k \lambda_i \nabla \lambda_j +$ $(6\lambda_k - \lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j) \lambda_i \lambda_j \nabla \lambda_k,$ $5\lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k)),$ $5\lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l) \nabla \lambda_i - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l)),$ $5\lambda_k \lambda_l \lambda_i (\lambda_k - \lambda_l) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_k - \lambda_l)),$ $5\lambda_k \lambda_l \lambda_i (\lambda_l - \lambda_i) \nabla \lambda_j - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_l - \lambda_i)),$ $5\lambda_l \lambda_i \lambda_j (\lambda_l - \lambda_i) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_l - \lambda_i)),$ $5\lambda_l \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_k - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_i - \lambda_j)),$ $5\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_i - \lambda_j) \nabla \lambda_l - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_i - \lambda_j)),$ $5\lambda_i \lambda_j \lambda_k (\lambda_j - \lambda_k) \nabla \lambda_l - \nabla (\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l (\lambda_j - \lambda_k))$	$D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $D(i, j, k)$ $T(i, j, k, l)$ $T(i, j, k, l)$

Beeinträchtigungen in der Konvergenzordnung kommt [Web99]. Damit lässt sich der bezüglich der Gradienten unvollständige Raum $\mathcal{W}^{i,p}$ der Ordnung p durch

$$\mathcal{W}^{i,p} = \begin{cases} \mathcal{A}^1 & \text{für } p = 1 \\ \mathcal{W}^{i,p-1} \oplus \nabla \tilde{\mathcal{V}}^p \oplus \tilde{\mathcal{A}}^p & \text{für } p \geq 2 \end{cases} \quad (3.30)$$

aufspannen. In der vorliegenden Arbeit wird daher die polynomiell unvollständige Basis $\mathcal{W}^{i,p}$ verwendet und auf den Index i in weiterer Folge verzichtet. Weiterhin werden ausschließlich Ansatzfunktionen bis zu einem Polynomgrad von maximal $p = 4$ betrachtet.

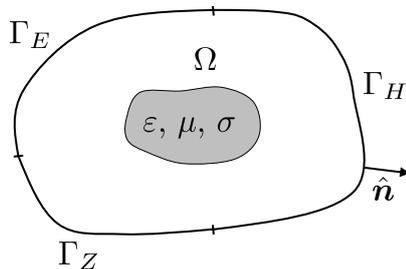


Abbildung 3.4: Betrachtetes Feldgebiet mit disjunkten Teilraendern.

3.3 Elektrische Feldformulierung

In diesem Abschnitt wird eine elektrische Feldformulierung zur FE-Diskretisierung der vektoriellen Helmholtz-Gleichung (2.11) hergeleitet, die die Grundlage aller weiteren Betrachtungen der vorliegenden Dissertation darstellt. Trotzdem die elektrische Feldformulierung zu Instabilitaeten im Niederfrequenzfall fuehrt [DEB96], und es unterdessen stabilere Formulierungen hierfür gibt [HFDE04], wird diese verwendet, da sie absolut ausreichend für die hier betrachteten Anwendungen aus der Hochfrequenztechnik ist und auch unter Verwendung der in Kapitel 5 vorgestellten adaptiven Netzverfeinerungsstrategien zu keinen Instabilitaeten fuehrt.

Der Ausgangspunkt für die folgenden Unterabschnitte ist das dargestellte Randwertproblem:

Problem 3.1 (Randwertproblem). *Gegeben ist das Feldgebiet Ω aus Abbildung 3.4. Der Rand des Feldgebiets unterteilt sich dabei in nichtüberlappende Teilraender mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_Z$ und es gilt*

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \sigma \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.31a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{E}}_t \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (3.31b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{H}}_t \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (3.31c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = Z_s \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_Z. \quad (3.31d)$$

Hierbei ist $\hat{\mathbf{n}}$ ein aus dem Feldgebiet zeigender Flächennormalenvektor, und die Größen $\bar{\mathbf{E}}_t$, $\bar{\mathbf{H}}_t$ und Z_s sind gegeben.

3.3.1 Schwache Formulierung

Um auf die schwache Form des Randwertproblems zu gelangen wird mittels der Methode der gewichteten Residuen und unter Verwendung eines Bubnov-Galerkin-Ansatzes [JW78, CL80] Gleichung (3.31a) mit einer Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$

multipliziert und über das Feldgebiet integriert:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \, d\Omega + jk_0 \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \sigma \mathbf{E} \, d\Omega - k_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} \, d\Omega = 0. \quad (3.32)$$

Partielle Integration bzw. Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert für den ersten Summanden aus (3.32)

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.33)$$

Das Integral über die Oberfläche auf der rechten Seite von (3.33) kann mit Hilfe des Faradayschen Gesetzes (2.6a) in die Darstellung

$$- \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = jk_0 \eta_0 \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (3.34)$$

überführt werden. Eine Aufspaltung des Randintegrals der rechten Seite in die disjunkten Teilränder der betrachteten Struktur führt auf

$$jk_0 \eta_0 \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_E} \underbrace{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}}_{=0} \cdot \mathbf{H} \, d\Gamma + jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma + jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_Z} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.35)$$

Wegen $\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ ist $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \equiv 0$, und das Integral über Γ_E in (3.35) liefert keinen Beitrag. Für das Integral über Γ_H ergibt sich mit der Aufspaltung der magnetischen Erregung in einen tangentialen und einen normalen Anteil

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}_t + H_n \hat{\mathbf{n}} \quad (3.36)$$

die Beziehung

$$jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = -jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}_t \, d\Gamma. \quad (3.37)$$

Das Integral über den Rand Γ_Z kann mittels der Bedingung (3.31d) dargestellt werden als

$$\begin{aligned} jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_Z} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma &= jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_Z} \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\ &= jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Einsetzen von (3.33), (3.35), (3.37) und (3.38) in (3.32) liefert

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} \, d\Omega + jk_0 \eta_0 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \sigma \mathbf{E} \, d\Omega \\
& \quad + jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \, d\Gamma - k_0^2 \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} \, d\Omega \\
& \quad = jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_H} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}_t \, d\Gamma. \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Eine Aufspaltung des rotorkonformen Raums $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ in einen Raum, dessen Funktionen mit der Tangentialkomponente am Dirichlet-Rand Γ_E verschwinden und in einen Raum, dessen Funktionen dies nicht tun

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega) = \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \oplus \mathcal{H}_D(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \quad (3.40)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) & := \\
& \{ \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \wedge \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \text{ auf } \Gamma_E \}, \quad (3.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_D(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) & := \\
& \{ \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \mid \nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega) \wedge \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) \neq 0 \text{ auf } \Gamma_E \}, \quad (3.42)
\end{aligned}$$

liefert die Zerlegung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_D \quad \text{mit } \mathbf{E}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E), \mathbf{E}_D \in \mathcal{H}_D(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (3.43)$$

Durch Einsetzen der Zerlegung (3.43) in Gleichung (3.39) kann die schwache Form des gegebenen Randwertproblems formuliert werden. Hierbei werden im Fall $\sigma \neq 0$ die ohmschen Verluste mit der elektrischen Permittivität zu

$$\varepsilon'_r = \varepsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \quad (3.44)$$

zusammengefasst.

Problem 3.2 (Schwache Formulierung). *Finde $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ so, dass gilt:*

$$\begin{aligned}
S(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) + jk_0 \eta_0 T_Z(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) = \\
jk_0 \eta_0 b_H(\mathbf{v}) - S(\mathbf{E}_D, \mathbf{v}) + k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_D, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Die verwendeten Bilinearformen sind dabei wie folgt definiert

$$S(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (3.46)$$

$$T_Z(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\Gamma_Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u} \, d\Gamma, \quad (3.47)$$

$$T_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \varepsilon'_r \mathbf{u} \, d\Omega, \quad (3.48)$$

und das lineare Funktional ist

$$b_H(\mathbf{w}) := \int_{\Gamma_H} \mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{H}}_t \, d\Gamma. \quad (3.49)$$

3.3.2 Finite-Elemente-Formulierung

Gegeben ist nun die Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω aus Abbildung 3.4. In Analogie zu (3.43) wird der Raum der rotorkonformen Ansatzfunktionen $\mathcal{W}^{h,p} := \mathcal{W}^p(\mathcal{T}_h(\Omega)) \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ der Ordnung p aufgespalten in Ansatzfunktionen, die auf dem Dirichlet-Rand Γ_E liegen und in jene, die das nicht tun

$$\mathcal{W}^{h,p} = \mathcal{W}_D^{h,p} \oplus \mathcal{W}_E^{h,p}, \quad (3.50)$$

wobei

$$\mathcal{W}_D^{h,p} := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} \neq 0 \text{ auf } \Gamma_E\} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega), \quad (3.51)$$

$$\mathcal{W}_E^{h,p} := \{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} = 0 \text{ auf } \Gamma_E\} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E). \quad (3.52)$$

Damit lässt sich die elektrische Feldstärke als lineare Superposition rotorkonformer Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_k \in \mathcal{W}_E^{h,p}$ und $\mathbf{w}_l \in \mathcal{W}_D^{h,p}$ darstellen

$$\mathbf{E}_0 \approx \mathbf{E}_0^{h,p} = \sum_{k=1}^{N_0} x_k \mathbf{w}_k \quad \text{mit } N_0 := \dim\{\mathcal{W}_E^{h,p}\}, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{E}_D \approx \mathbf{E}_D^{h,p} = \sum_{l=1}^{N_D} x_l \mathbf{w}_l \quad \text{mit } N_D := \dim\{\mathcal{W}_D^{h,p}\}, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{h,p} = \mathbf{E}_0^{h,p} + \mathbf{E}_D^{h,p}. \quad (3.55)$$

Hierbei werden die Koeffizienten der Ansatzfunktionen mit $x \in \mathbb{C}$ bezeichnet. Da am Dirichlet-Rand Γ_E die Koeffizienten x_l durch die Randbedingung bekannt sind, bleiben als Unbekannte lediglich die Koeffizienten x_k von $\mathbf{E}_0^{h,p}$ über. Damit kann die diskrete Form des gegebenen Randwertproblems analog zu Abschnitt 3.3.1 mit Hilfe eines Bubnov-Galerkin-Ansatzes mit Testfunktionen $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}_E^{h,p}$ formuliert werden.

Problem 3.3 (Finite-Elemente-Formulierung). *Finde $\mathbf{E}_0^{h,p} \in \mathcal{W}_E^{h,p}$ so, dass gilt:*

$$S(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{w}_i) + jk_0\eta_0 T_Z(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{w}_i) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{w}_i) = jk_0\eta_0 b_H(\mathbf{w}_i) - S(\mathbf{E}_D^{h,p}, \mathbf{w}_i) + k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_D^{h,p}, \mathbf{w}_i) \quad \forall \mathbf{w}_i \in \mathcal{W}_E^{h,p}. \quad (3.56)$$

Die Finite-Elemente-Formulierung führt unter Verwendung der Ansätze (3.53) und (3.54) auf ein lineares Gleichungssystem der Form

$$(\mathbf{S} + jk_0\eta_0 \mathbf{Z} - k_0^2 \mathbf{T}) \mathbf{x} = jk_0\eta_0 \mathbf{b} - \mathbf{b}_D, \quad (3.57)$$

mit dem Vektor \mathbf{x} der unbekanntenen Koeffizienten x_k und den Einträgen

$$S_{ik} = S(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i), \quad (3.58a)$$

$$Z_{ik} = T_Z(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i), \quad (3.58b)$$

$$T_{ik} = T_\varepsilon(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_i), \quad (3.58c)$$

$$b_i = b_H(\mathbf{w}_i), \quad (3.58d)$$

$$b_{D,i} = S(\mathbf{E}_D^{h,p}, \mathbf{w}_i) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_D^{h,p}, \mathbf{w}_i). \quad (3.58e)$$

Ist die Permeabilität μ_r ein positiv definiten Tensor, so ist die Steifigkeitsmatrix \mathbf{S} aus (3.57) positiv semidefinit, da die Gradienten im Nullraum der Rotation liegen. Die Massenmatrix \mathbf{T} aus (3.57) ist im verlustlosen Fall positiv definit, da in diesem Zusammenhang auch ε_r positiv definit ist.

Die Einträge (3.58a) und (3.58c) der Steifigkeits- bzw. Massenmatrix zeigen, dass in dem FE-Gleichungssystem die Ansatzfunktionen selbst als auch deren Rotation auftreten. Wird für die Feldgröße ein Ansatz der Ordnung p gewählt, so wird der Polynomgrad beim Bilden der Rotation um eins auf $p - 1$ reduziert und die in Abschnitt 3.2.2 getroffene Voraussetzung, dass in der vorliegenden Arbeit ausschließlich der unvollständige Ansatz Anwendung findet, ändert nichts an der Konvergenzordnung des Verfahrens, da die Gradienten höchster Ordnung im Nullraum der Rotation liegen und somit nicht zur Konvergenzordnung beitragen [Web99].

3.4 Modale Mehrtore

In diesem Abschnitt wird der Fall der Anregung passiver Mikrowellenstrukturen behandelt. Die Anregung erfolgt hierbei mit Hilfe axial homogener Wellenleiter, die in das Feldgebiet Ω münden und die die Tore der Struktur darstellen. Abbildung 3.5 zeigt eine solche elektromagnetische Mehrtor-Struktur. Die Berücksichtigung der Tore erfolgt in der Formulierung mittels der dem axial homogenen Wellenleiter entsprechenden modalen Felder an den Wellenleiterquerschnitten Γ_p^i . Ziel des Vorgehens ist es, das Eingangs-/Ausgangsverhalten der betrachteten Struktur bezüglich ihrer

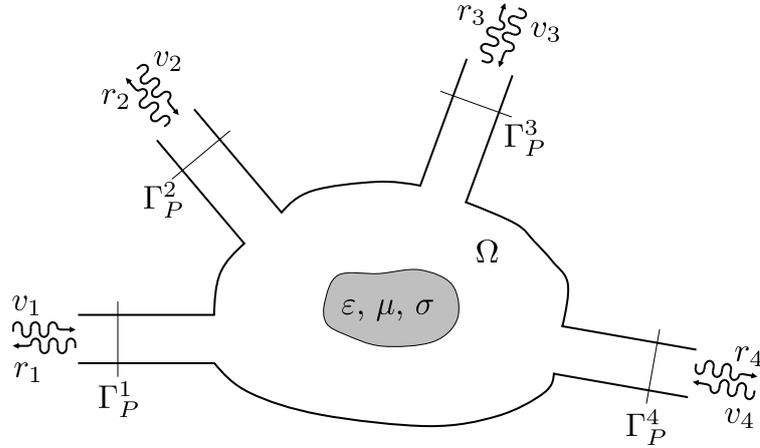


Abbildung 3.5: Schematische Darstellung eines Mehrtors mit inhomogener Diskontinuität.

Tore zu charakterisieren. Die Beschreibung dieses Verhaltens wird mit Hilfe von Netzwerkmatrizen durchgeführt. In der Hochfrequenztechnik ist die Verwendung von Streumatrizen zu diesem Zweck gebräuchlich [Poz98, S. 174]. Werden an einem Wellenleiterquerschnitt mehrere Moden berücksichtigt, so ist nach Abschnitt 2.3 in der Netzwerkbeschreibung jeder Wellenform ein modales Tor zuzuordnen.

Um die folgenden Ausführung möglichst kurz zu halten, wird o. B. d. A. die Struktur aus Abbildung 3.6 mit lediglich einem in das Feldgebiet Ω mündenden axial homogenen Wellenleiter betrachtet und es werden an den Rändern Γ_E und Γ_H homogene Randbedingungen angenommen. Um an dem Querschnitt Γ_P des einmündenden Wellenleiters die Anregung einzubringen, wird ausgehend von dem Faradayschen Gesetz (2.6a) die Aufspaltung der Feldgröße in einen vor- und einen rücklaufenden Anteil durchgeführt und durch bilden des Kreuzproduktes mit $\hat{\mathbf{n}}$ von rechts in die Form

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E})|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} = -jk_0 \eta_0 (\mathbf{H}^v + \mathbf{H}^r)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.59)$$

$$= (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^v)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} + (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^r)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.60)$$

überführt. Der erste Summand der rechten Seite kann nun durch Entwicklung des vorlaufenden Felds \mathbf{E}^v in normierte modale Felder $\hat{\mathbf{e}}_k^v$ nach (2.24) in der Form

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^v)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_k^v)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (3.61)$$

ausgedrückt werden. Die Normierung wird anhand der transversalen modalen Felder $(\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{h}}_i; e^{-\gamma_i z})$ am Wellenleiterquerschnitt Γ_P und ausgehend von der Orthogonalitätsrelation (2.27) mit

$$\int_{\Gamma_P} (\hat{\mathbf{e}}_{t,i} \times \hat{\mathbf{h}}_{t,k}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = -\delta_{ik} \quad (3.62)$$

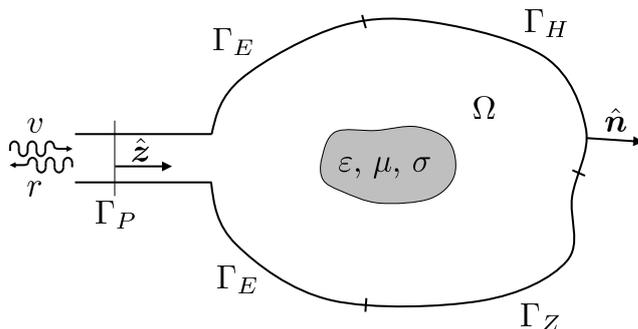


Abbildung 3.6: Feldgebiet mit einmündendem axial homogenen Wellenleiter.

durchgeführt. Unter Verwendung von Gleichung (2.20) und der Zerlegung des Differentialoperators in einen transversalen und einen axialen Anteil

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}, \quad (3.63)$$

ergibt sich für die rechte Seite von Gleichung (3.61) am Rand Γ_P , der o. B. d. A. am Ort $z = 0$ angenommen wird, der Ausdruck

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^v)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (3.64)$$

Die gleiche Vorgehensweise führt für den rücklaufenden Anteil \mathbf{E}^r des zweiten Summands der rechten Seite aus Gleichung (3.60) auf

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^r)|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} = - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^r \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (3.65)$$

Einsetzen von Gleichung (3.64) und (3.65) in Gleichung (3.60) liefert bei Umformung die Robin-Randbedingung

$$\begin{aligned} & (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E})|_{\Gamma_P} \times \hat{\mathbf{n}} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ & = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

für den Wellenleiterquerschnitt Γ_P . Damit lässt sich das zugrunde liegende Randwertproblem für den Fall der Anregung am Wellenleiterquerschnitt formulieren.

Problem 3.4 (Randwertproblem). *Gegeben ist das in Abbildung 3.6 dargestellte Feldgebiet Ω . Der Rand des Feldgebiets unterteilt sich dabei in nichtüberlappende*

Teiltränder mit $\partial\Omega = \Gamma_P \cup \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_Z$ und es gilt

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + jk_0 \eta_0 \sigma \mathbf{E} - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3.67a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (3.67b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_H, \quad (3.67c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = Z_s \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{auf } \Gamma_Z, \quad (3.67d)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ & = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad \text{auf } \Gamma_P, \end{aligned} \quad (3.67e)$$

wobei $\hat{\mathbf{n}}$ den aus dem Feldgebiet weisenden Flächennormalenvektor bezeichnet.

3.4.1 Schwache Formulierung des Anregungsproblems

Ausgehend von der schwachen Formulierung in Problem 3.2 ergibt sich für die betrachtete Struktur aus Abbildung 3.6 unter Berücksichtigung des Gaußschen Satzes in Gleichung (3.33) die Beziehung

$$S(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) + jk_0 \eta_0 T_Z(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_P} \mathbf{v} \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.68)$$

Mit der Definition der Bilinearform

$$\tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := S(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + jk_0 \eta_0 T_Z(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (3.69)$$

und dem Einsetzen der Randbedingung (3.67e) in die rechte Seite der Gleichung sowie die Verwendung der Beziehung

$$(\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{e}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} = \mu_r^{-1} (\nabla_t \hat{e}_{z,k} + \gamma_k \hat{\mathbf{n}} \times \hat{e}_{t,k} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (3.70)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{e}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\ = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{e}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Eine Zerlegung der Testfunktionen $\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ in Funktionen deren Tangentialkomponente auf Γ_P und Γ_E verschwinden und solche für die dies nicht gilt

$$\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) = \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \oplus \mathcal{M}, \quad (3.72)$$

mit

$$\mathcal{M} := \{\mathbf{v}_l \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E) \mid \mathbf{v}_l = \hat{\mathbf{e}}_l^v \text{ auf } \Gamma_P, l \in \mathbb{N}\}, \quad (3.73)$$

ergibt für $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \oplus \mathcal{M}$

$$\tilde{a}(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P), \quad (3.74a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}_l) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_l \, d\Gamma \\ = 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_l \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{v}_l \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (3.74b)$$

Mit Hilfe der Beziehung $\mathbf{v}_l = \hat{\mathbf{e}}_l^v$ für Testfunktionen aus \mathcal{M} am Wellenleiterquerschnitt Γ_P und der Einführung der Bilinearform

$$u(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{u}) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \quad (3.75)$$

ergibt sich für den zweiten Summand der linken Seite von Gleichung (3.74b) der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_l \, d\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) u(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l). \quad (3.76)$$

Daneben kann das Integral aus Gleichung (3.74b) mit dem Faradayschen Gesetz (2.6a) wie folgt notiert werden

$$\int_{\Gamma_P} (\mu_r^{-1} \nabla \times \hat{\mathbf{e}}_k^v) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}_l \, d\Gamma = -jk_0 \eta_0 \int_{\Gamma_P} \mathbf{v}_l \times \hat{\mathbf{h}}_k^v \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.77)$$

Damit lässt sich Gleichung (3.74b) angeben als

$$\tilde{a}(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}_l) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) u(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) = 2jk_0 \eta_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v f_k(\mathbf{v}_l), \quad (3.78)$$

mit dem linearen Funktional

$$f_k(\mathbf{v}_l) := - \int_{\Gamma_P} \mathbf{v}_l \times \hat{\mathbf{h}}_k^v \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.79)$$

Die explizite Zerlegung der elektrischen Feldstärke gemäß (3.72)

$$\mathbf{E}_0 = \bar{\mathbf{E}}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \mathbf{v}_k, \quad \bar{\mathbf{E}}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P), \mathbf{v}_k \in \mathcal{M} \quad (3.80)$$

liefert nach Einsetzen in die Gleichungen (3.78) und (3.74a) die im folgenden angegebene schwache Formulierung von Problem 3.4.

Problem 3.5 (Schwache Formulierung). *Finde $\mathbf{E}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \oplus \mathcal{M}$ so, dass gilt:*

$$a(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^v f_k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \oplus \mathcal{M}. \quad (3.81)$$

Der Ausdruck der linken Seite entspricht dabei

$$a(\mathbf{E}_0, \mathbf{v}) = \begin{cases} \tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0, \mathbf{v}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) \tilde{a}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_0) & \forall \mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \\ \tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0, \mathbf{v}_l) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^v + c_k^r) (\tilde{a}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l) + u(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l)) & \forall \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_l \in \mathcal{M} \end{cases}, \quad (3.82)$$

und das lineare Funktional der rechten Seite ergibt

$$f_k(\mathbf{v}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{v}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \\ f_k(\mathbf{v}_l) & \forall \mathbf{v}_l \in \mathcal{M} \end{cases}, \quad (3.83)$$

mit $\bar{\mathbf{E}}_0 \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P)$.

Eine Eigenschaft der oben angegebenen schwachen Formulierung ist es, dass unter der Voraussetzung $c_l^v \equiv 1$, sich die verallgemeinerten Streuparameter [Poz98, S. 204f]

$$S_{kl} := \left. \frac{c_k^r}{c_l^v} \right|_{c_{i \neq l}^v = 0}, \quad (3.84)$$

für eine Lösung \mathbf{E}_l von Problem 3.5 direkt durch das Ausgangsfunktional $f_k(\cdot)$ mit

$$S_{kl} = f_k(\mathbf{E}_l) - \delta_{kl} \quad (3.85)$$

berechnen lassen. Dies lässt sich mittels Entwicklung der Transversalkomponente der Lösung \mathbf{E}_l in Eigenlösungen am Wellenleiterquerschnitt Γ_P gemäß (2.24)

$$\mathbf{E}_{lt} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m^v + c_m^r) \hat{\mathbf{e}}_{t,m} \quad (3.86)$$

wie folgt zeigen. Einsetzen in Gleichung (3.85) liefert

$$S_{kl} = - \int_{\Gamma_P} \mathbf{E}_l \times \hat{\mathbf{h}}_k^v \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma - \delta_{kl} \quad (3.87)$$

$$= - \sum_{m=1}^{\infty} (c_m^v + c_m^r) \int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{e}}_{t,m} \times \hat{\mathbf{h}}_{t,k} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma - \delta_{kl} \quad (3.88)$$

$$= c_k^v + c_k^r - \delta_{kl}. \quad (3.89)$$

Wegen der Modenorthogonalität und der Normierung (3.62) folgt

$$S_{kl} = c_k^r = \frac{c_k^r}{c_l^v} \Big|_{c_{i \neq l}^v = 0} \quad (3.90)$$

da für $l = k$ der Koeffizient c_k^v nach Voraussetzung gleich eins und für $l \neq k$ nach Definition (3.84) c_k^v gleich Null ist.

3.4.2 Finite-Elemente-Formulierung des Anregungsproblems

Ausgehend von der schwachen Formulierung in Problem 3.5 und der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets aus Abbildung 3.6 bildet in Analogie zur Zerlegung des Funktionenraums $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ in (3.72) die Aufspaltung des diskreten Raums $\mathcal{W}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E)$ der rotorkonformen Ansatzfunktionen der Ordnung p

$$\mathcal{W}^{h,p} = \mathcal{W}_0^{h,p} \oplus \mathcal{W}_P^{h,p}, \quad (3.91)$$

in Ansatzfunktionen, die auf den Rändern Γ_E und Γ_P verschwinden, und jene, die am Wellenleiterquerschnitt Γ_P einen Beitrag liefern

$$\mathcal{W}_0^{h,p} := \{ \mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} = 0 \text{ auf } \Gamma_E \cup \Gamma_P \} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P), \quad (3.92)$$

$$\mathcal{W}_P^{h,p} := \{ \mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w} \neq 0 \text{ auf } \Gamma_P \} \subset \mathcal{M}, \quad (3.93)$$

die Grundlage zur diskreten Formulierung des Randwertproblems in Problem 3.4. Damit lässt sich der Finite-Elemente-Ansatz für die Feldgröße $\bar{\mathbf{E}}_0 \in H(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P)$ wie folgt notieren

$$\bar{\mathbf{E}}_0 \approx \bar{\mathbf{E}}_0^{h,p} = \sum_{j=1}^{N_0} c_j \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{w}_j \in \mathcal{W}_0^{h,p}, N_0 = \dim\{\mathcal{W}_0^{h,p}\}, \quad (3.94)$$

mit den Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$ der Ansatzfunktionen. Der k -te Mode am Wellenleiterquerschnitt Γ_P wird mit Hilfe der bekannten Koeffizienten m_n^k dargestellt

$$\mathbf{v}_k \approx \mathbf{v}_k^{h,p} = \sum_{m=1}^{N_P} m_m^k \mathbf{w}_m, \quad \mathbf{w}_m \in \mathcal{W}_P^{h,p}, N_P = \dim\{\mathcal{W}_P^{h,p}\}, \quad (3.95)$$

wobei die globale Ansatzfunktion $v_k^{h,p}$ auch als *Transfinite-Elemente-Ansatzfunktion* bezeichnet wird [CL88]. Die diskrete Form des Randwertproblems in Problem 3.4 kann mit Hilfe eines Bubnov-Galerkin-Ansatzes mit den Testfunktionen $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}^{h,p}$ formuliert werden. Es ist dabei unter der Voraussetzung, dass der Rand Γ_P in hinreichender Entfernung zu den Diskontinuitäten im Feldgebiet befindlich ist, ausreichend, dass lediglich die ausbreitungsfähigen und schwach gedämpften Moden berücksichtigt werden.

Problem 3.6 (Finite-Elemente-Formulierung). *Finde $\mathbf{E}_0^{h,p} \in \mathcal{W}_0^{h,p} \oplus \mathcal{W}_P^{h,p}$ so, dass gilt:*

$$a(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}^{h,p}) = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v f_k(\mathbf{v}^{h,p}) \quad \forall \mathbf{v}^{h,p} \in \mathcal{W}_0^{h,p} \oplus \mathcal{W}_P^{h,p}, \quad (3.96)$$

wobei N_M die Anzahl der berücksichtigten Moden bezeichnet.

Durch Verwenden der Beziehung (3.82) und des Ansatzes (3.94) sowie mit Hilfe der Darstellung der Moden am Wellenleiterquerschnitt durch (3.95) ergibt sich für die erste Gleichung in (3.81)

$$\tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0^{h,p}, \mathbf{v}_0^{h,p}) + \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) \tilde{a}(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_0^{h,p}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_0^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}, \quad (3.97)$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{N_0} c_j \tilde{a}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) + \sum_{k=1}^{N_M} \sum_{m=1}^{N_P} (c_k^v + c_k^r) m_m^k \tilde{a}(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_i) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_i \in \mathcal{W}_0^{h,p}. \quad (3.98)$$

Die zweite Gleichung in (3.81) liefert entsprechend

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) (\tilde{a}(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + u(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p})) \\ = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v f_k(\mathbf{v}_l^{h,p}). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Die Bilinearform $u(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p})$ kann wegen der Gleichheit $\mathbf{v}_{k,l}^{h,p} = (\hat{\mathbf{e}}_{k,l}^v)^{h,p}$ am Wellenleiterquerschnitt Γ_P und dem Faradayschen Gesetz (2.6a) wie folgt vereinfacht werden:

$$u(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) = -jk_0\eta_0 \int_{\Gamma_P} (\hat{\mathbf{e}}_l^v)^{h,p} \times (\hat{\mathbf{h}}_k^v)^{h,p} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (3.100)$$

$$= -jk_0\eta_0 \int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{e}}_{t,l}^{h,p} \times \hat{\mathbf{h}}_{t,k}^{h,p} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \quad (3.101)$$

Mit $((\hat{\mathbf{e}}_i^v)^{h,p}, (\hat{\mathbf{h}}_i^v)^{h,p})$ bzw. $(\hat{\mathbf{e}}_{t,i}^{h,p}, \hat{\mathbf{h}}_{t,i}^{h,p})$ wird die diskrete Approximation des i -ten vorlaufenden Modes $(\hat{\mathbf{e}}_i^v, \hat{\mathbf{h}}_i^v)$ bzw. dessen Transversalkomponenten $(\hat{\mathbf{e}}_{t,i}, \hat{\mathbf{h}}_{t,i})$ bezüglich $\mathcal{W}^{h,p}$ bezeichnet. Da die Modenorthogonalität auch im Diskreten erhalten bleibt [Far07, S. 38ff], folgt für Gleichung (3.101) unter Verwendung der zu (3.62) analogen diskreten Normierung

$$\int_{\Gamma_P} \hat{\mathbf{e}}_{t,l}^{h,p} \times \hat{\mathbf{h}}_{t,k}^{h,p} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = -\delta_{lk}, \quad (3.102)$$

dass sich die linke Seite von Gleichung (3.99) zu

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) (\tilde{a}(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + u(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p})) \\ = \tilde{a}(\bar{\mathbf{E}}_0^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) \tilde{a}(\mathbf{v}_k^{h,p}, \mathbf{v}_l^{h,p}) + jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) \delta_{lk} \end{aligned} \quad (3.103)$$

ergibt. Die gleiche Vorgehensweise liefert für die rechte Seite von Gleichung (3.99) mit (3.79)

$$2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v f_k(\mathbf{v}_l^{h,p}) = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v \delta_{lk}. \quad (3.104)$$

Einsetzen des FE-Ansatzes (3.94) sowie der Darstellung der Moden aus (3.95) in Gleichung (3.103) und in Gleichung (3.104) ergibt für den Ausdruck (3.99)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{n=1}^{N_P} c_j m_n^l \tilde{a}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_n) + \sum_{k=1}^{N_M} \sum_{m,n=1}^{N_P} (c_k^v + c_k^r) m_m^k m_n^l \tilde{a}(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_n) \\ + jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) \delta_{lk} = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v \delta_{lk}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Damit lässt sich die FE-Formulierung aus Problem 3.6 in folgender Weise notieren

$$\sum_{j=1}^{N_0} c_j \tilde{a}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) + \sum_{k=1}^{N_M} \sum_{m=1}^{N_P} (c_k^v + c_k^r) m_m^k \tilde{a}(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_i) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_i \in \mathcal{W}_0^{h,p}, \quad (3.106a)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{n=1}^{N_P} c_j m_n^l \tilde{a}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_n) + \sum_{k=1}^{N_M} \sum_{m,n=1}^{N_P} (c_k^v + c_k^r) m_m^k m_n^l \tilde{a}(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_n) \\ + jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} (c_k^v + c_k^r) \delta_{lk} = 2jk_0\eta_0 \sum_{k=1}^{N_M} c_k^v \delta_{lk} \quad \text{für } l = 1 \dots N_M. \end{aligned} \quad (3.106b)$$

Die Gleichungen (3.106) können nun in die Matrix-Darstellung überführt werden. Dazu werden zunächst die Koeffizienten m_i^k des k -ten Modes mittels des Vektors

$$\mathbf{m}^k = [m_1^k \quad m_2^k \quad \dots \quad m_{N_P}^k]^T \quad (3.107)$$

ausgedrückt und diese dann mit Hilfe der Matrix

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}^1 \quad \mathbf{m}^2 \quad \dots \quad \mathbf{m}^{N_M}] \quad (3.108)$$

zusammengefasst. Die Unbekannten-Koeffizienten werden durch Einführung der Vektoren

$$\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{N_0}]^T, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{c}^v = [c_1^v \quad c_2^v \quad \dots \quad c_{N_M}^v]^T, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{c}^r = [c_1^r \quad c_2^r \quad \dots \quad c_{N_M}^r]^T, \quad (3.111)$$

beschrieben, und Gleichung (3.106) kann als FE-Gleichungssystem in Matrix-Darstellung notiert werden

$$\left(\tilde{\mathbf{A}}_R + jk_0\eta_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^v + \mathbf{c}^r \end{bmatrix} = 2jk_0\eta_0 \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^v \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}_R = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{00} & \tilde{\mathbf{A}}_{0M} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{M0} & \tilde{\mathbf{A}}_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{00} & \tilde{\mathbf{A}}_{0P} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{P0} & \tilde{\mathbf{A}}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Gleichung (3.113) beschreibt eine *Restriktion der Ansatzfunktionen*, welche bewirkt, dass nur jene Superpositionen erlaubt sind, die Approximationen der am Wellenleiterquerschnitt Γ_P berücksichtigten Moden sind. Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_R$ wird als restringierte Systemmatrix bezeichnet und Matrix $\tilde{\mathbf{A}}_{MM}$ entspricht damit der Systemmatrix der globalen Ansatzfunktionen auf Γ_P . Da aus dem Gleichungssystem (3.112) durch Vorgabe einer Eins im k -ten Eintrag von \mathbf{c}^v und aller anderen Einträge in \mathbf{c}^v zu Null, der Koeffizientenvektor \mathbf{c}^r die k -te Spalte der Streumatrix \mathbf{S} liefert, kann mit Hilfe des Ausgangsfunktional (3.85) die Streumatrix wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^T \mathbf{x} - \mathbf{I}, \quad (3.114)$$

wobei in

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

alle möglichen Anregungen zusammengefasst sind und \mathbf{x} die Lösungsmatrix zufolge dieser Anregungen bezeichnet.

Die in diesem Unterkapitel beschriebene Vorgehensweise entspricht dabei der in [CL88] und [Lee90] vorgestellten Transfinite-Elemente-Methode, deren Ziel es ist, das Gleichungssystem wie in (3.112) so zu formulieren, dass sich aus dessen Lösung unmittelbar die Einträge der Streumatrix ergeben, was durch Gleichung (3.114) belegt wird. Die Formulierung in Problem 3.5 und Problem 3.6 wird auch als *Streuparameter-Formulierung* bezeichnet.

Kapitel 4

Hierarchische Verfeinerung von Finite-Elemente-Netzen

Ausgangspunkt der Betrachtungen des folgenden Kapitels ist die Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω , wie in Abbildung 4.1(a) beispielhaft dargestellt. Die Elemente der Triangulierung \mathcal{T}_h sind in der vorliegenden Arbeit durch Tetraeder gegeben. Um die Darstellung der Konzepte in den Abbildungen dennoch übersichtlich halten zu können, werden diesbezüglich statt der Tetraeder Dreiecke verwendet. Grundsätzlich existieren zwei Möglichkeiten um solche FE-Netze zu verfeinern. Eine Möglichkeit besteht darin, das Feldgebiet Ω unter Berücksichtigung der vorgegebenen Elementgröße $h_{\text{neu}} < h$ und der damit verbundenen höheren Netzdichte, wie in Abbildung 4.1(b) gezeigt, neu zu vernetzen. Die zweite Möglichkeit der Verfeinerung eines bestehenden Netzes ergibt sich durch Unterteilung der einzelnen Tetraeder in weitere Tetraeder, wie in Abbildung 4.1(c) dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird zur Verfeinerung des Ausgangsnetzes die Unterteilung der Tetraeder des Netzes verwendet.

4.1 Geschachtelte Finite-Elemente-Netze

Bei der Verfeinerung eines Netzes mittels Unterteilung der Tetraeder entstehen geschachtelte Netzhierarchien. Die Unterteilung der Tetraeder erfolgt dabei der in [Hil06, S. 149ff] vorgestellten Methode, die ähnlich zu der in [Bey95] behandelten Verfeinerung ist und eine Spezialisierung des für N -dimensionale Simplizes gezeigten Verfahrens in [Fre42] darstellt. Eine wichtige Eigenschaft dieser selbstähnlichen Unterteilung ist, dass bei rekursiver Anwendung des Verfeinerungsalgorithmus eine untere Schranke der Elementqualität q_T garantiert wird. Damit bleiben die durch die Verfeinerung entstehenden Triangulierungen des Feldgebiets regulär, und die Konditionszahlen der FE-Systemmatrizen werden nicht beliebig schlecht [Sha95, S. 112f].

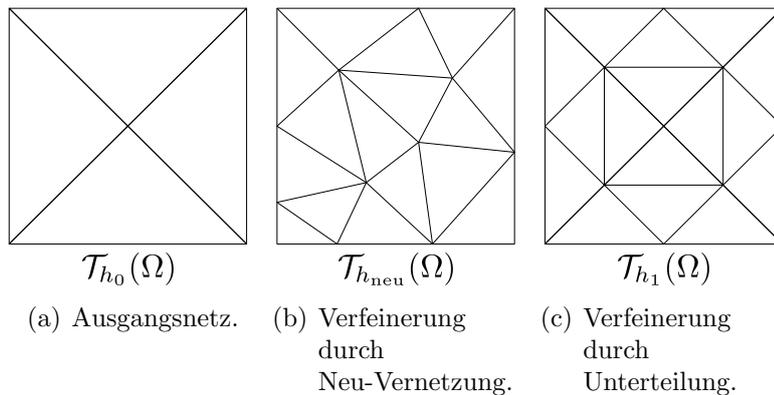


Abbildung 4.1: Verfeinerung eines Netzes.

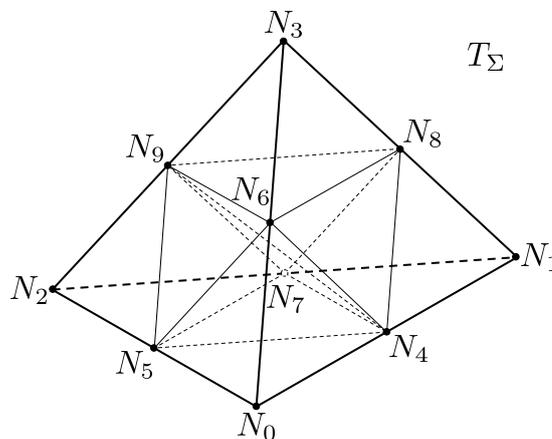


Abbildung 4.2: Beispiel der verwendeten Unterteilung von Tetraedern.

Abbildung 4.2 zeigt ein mit der verwendeten Methode unterteiltes Tetraeder T , welche eine Zerlegung T_Σ des Tetraeders in acht Untertetraeder bewirkt. Die Unterteilung eines Tetraeders erfolgt dabei über die Unterteilung E_Σ der dem Tetraeder zugehörigen Kanten E , welche durch Einföhrung von Mittelknoten in je zwei Kanten halber Länge zerlegt werden. Anschließend werden die Dreiecksflächen D des Tetraeders durch Einföhren von je drei Kanten pro Fläche in je vier Dreiecke unterteilt, sodass die eingeföhrteten Kanten die Mittelknoten der ursprünglichen Kanten untereinander verbindet. Die Zerlegung der Dreiecksfläche wird dabei mit D_Σ bezeichnet. Das damit entstehende Hexaeder im Inneren des zu unterteilenden Tetraeders wird mit Hilfe einer Volumenkante, deren Anfangs- und Endpunkt Mittelknoten sich gegenüberliegender windschiefer Kanten entsprechen, in vier weitere Tetraeder zerlegt. Die bestmögliche Elementqualität der Tetraederverfeinerung wird dabei durch die Wahl der kürzesten Volumenkante erreicht [Bey95]. Eine ausführliche Beschreibung des verwendeten Unterteilungsalgorithmus und der zugrunde liegenden Topologie ist in [Hil06, S. 149ff] gegeben.

In Anlehnung an Abschnitt 3.2.2 können die baryzentrischen Koordinaten des un-

verfeinerten Tetraeders T mit

$$\mathcal{T}_{h_0}(T) := \{T\} \quad (4.1)$$

und den Knoten $\{N_0, \dots, N_3\}$ durch die des, wie in Abbildung 4.2 dargestellten, verfeinerten Tetraeders mit

$$\mathcal{T}_{h_1}(T) := T_\Sigma = \{T_0, T_1, \dots, T_7\} \quad (4.2)$$

und den Knoten $\{N_0, \dots, N_9\}$ ausgedrückt werden. Für die Ausgangselementgröße h_0 gilt entsprechend der verwendeten Unterteilung

$$h_0 = 2h_1. \quad (4.3)$$

Die Koordinaten des unverfeinerten Tetraeders T sind mit (3.20) bis (3.23)

$$\lambda_i^{h_0} \quad \text{mit } i = 0, \dots, 3 \quad (4.4)$$

gegeben, wobei für $\lambda_i^{h_0}$ gilt:

$$\lambda_i^{h_0} = \begin{cases} 1 & \text{am Knoten } N_i \\ 0 & \text{an den Knoten } N_{j \neq i} \text{ für } j = 0, \dots, 3 \end{cases} . \quad (4.5)$$

Analog können die Koordinaten im verfeinerten Tetraeder mit

$$\lambda_k^{h_1} \quad \text{mit } k = 0, \dots, 9 \quad (4.6)$$

notiert werden, und es gilt:

$$\lambda_k^{h_1} = \begin{cases} 1 & \text{am Knoten } N_k \\ 0 & \text{an den Knoten } N_{l \neq k} \text{ für } l = 0, \dots, 9 \\ 0 & \text{in } T_m \text{ mit } T_m \cap \text{supp}_{\mathcal{T}_{h_1}} N_k = \emptyset, m = 0, \dots, 7 \end{cases} . \quad (4.7)$$

Da $\mathcal{T}_{h_0}(T) \subset \mathcal{T}_{h_1}(T)$ gilt, lassen sich die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i^{h_0}$ des unverfeinerten Tetraeders durch die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_k^{h_1}$ des verfeinerten Tetraeders ausdrücken

$$\lambda_0^{h_0} = \lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_4^{h_1} + \lambda_5^{h_1} + \lambda_6^{h_1}), \quad (4.8)$$

$$\lambda_1^{h_0} = \lambda_1^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_4^{h_1} + \lambda_7^{h_1} + \lambda_8^{h_1}), \quad (4.9)$$

$$\lambda_2^{h_0} = \lambda_2^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_5^{h_1} + \lambda_7^{h_1} + \lambda_9^{h_1}), \quad (4.10)$$

$$\lambda_3^{h_0} = \lambda_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_6^{h_1} + \lambda_8^{h_1} + \lambda_9^{h_1}). \quad (4.11)$$

Im Hinblick auf den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Raum der Ansatzfunktionen aus (3.30), ist es zweckmäßig darüber hinaus die Gradienten der baryzentrischen Koordinaten des unverfeinerten Tetraeders durch die des verfeinerten Tetraeders darzustellen

$$\nabla\lambda_0^{h_0} = \nabla\lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\nabla\lambda_4^{h_1} + \nabla\lambda_5^{h_1} + \nabla\lambda_6^{h_1}), \quad (4.12)$$

$$\nabla\lambda_1^{h_0} = \nabla\lambda_1^{h_1} + \frac{1}{2}(\nabla\lambda_4^{h_1} + \nabla\lambda_7^{h_1} + \nabla\lambda_8^{h_1}), \quad (4.13)$$

$$\nabla\lambda_2^{h_0} = \nabla\lambda_2^{h_1} + \frac{1}{2}(\nabla\lambda_5^{h_1} + \nabla\lambda_7^{h_1} + \nabla\lambda_9^{h_1}), \quad (4.14)$$

$$\nabla\lambda_3^{h_0} = \nabla\lambda_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\nabla\lambda_6^{h_1} + \nabla\lambda_8^{h_1} + \nabla\lambda_9^{h_1}). \quad (4.15)$$

Wie in Abbildung 4.3 beispielhaft gezeigt, heißen zwei Netze \mathcal{T}_{h_0} und \mathcal{T}_{h_1} mit $h_0 > h_1$ geschachtelt, wenn sie dieselbe Geometrie vernetzen, und wenn jedes Element des Grobnetzes \mathcal{T}_{h_0} aus Elementen des Feinnetzes \mathcal{T}_{h_1} zusammengesetzt werden kann, d. h. wenn gilt

$$\mathcal{T}_{h_0} \subset \mathcal{T}_{h_1}. \quad (4.16)$$

Damit kann eine Abfolge geschachtelter Netze mit dem Ausgangsnetz \mathcal{T}_{h_0} und dem Feinnetz \mathcal{T}_{h_N} mit

$$h_0 > h_1 > \dots > h_N \quad (4.17)$$

wie folgt notiert werden

$$\mathcal{T}_{h_0} \subset \mathcal{T}_{h_1} \subset \dots \subset \mathcal{T}_{h_N}. \quad (4.18)$$

Eine solche Abfolge wird auch als *Hierarchie* von Netzen bezeichnet. Ein tetraedrisches Netz $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$ mit $0 \leq k \leq N - 1$ aus der Sequenz (4.18) wird durch (hierarchische) Verfeinerung des Netzes \mathcal{T}_{h_k} gewonnen. Eine solche Verfeinerung kann dabei entweder einer *gleichmäßigen* oder einer *ungleichmäßigen Verfeinerung* der Triangulierung \mathcal{T}_{h_k} entsprechen. Erstere bedeutet in diesem Zusammenhang, dass jedes Tetraeder $T_{h_k} \in \mathcal{T}_{h_k}$ auf solche Weise in Tetraeder $T_{h_{k+1}} \in \mathcal{T}_{h_{k+1}}$ unterteilt wird, dass die Triangulierung $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$ konsistent ist. Eine gleichmäßige Verfeinerung ist exemplarisch in Abbildung 4.3 dargestellt. Mit einer ungleichmäßigen Verfeinerung der Triangulierung \mathcal{T}_{h_k} im Rahmen hierarchischer Netze wird eine Verfeinerung bezeichnet, die nicht jedes Tetraeder T_{h_k} der Triangulierung \mathcal{T}_{h_k} unterteilt. Dies hat zur Folge, dass nicht-verfeinerte Elemente in der Triangulierung $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$ erhalten bleiben. Die dabei entstehende Triangulierung $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$ muss wegen des Übergangs zwischen verfeinerten und nicht-verfeinerten Regionen der Triangulierung nicht zwingend konsistent sein. Abbildung 4.4(b) zeigt ein solches durch Verfeinerung erzeugtes inkonsistentes Netz. In Abbildung 4.4(c) ist das konsistente Pendant als Ergebnis einer Rot-Grün-Verfeinerung [BSW83] dargestellt. Eine Möglichkeit inkonsistente Netze

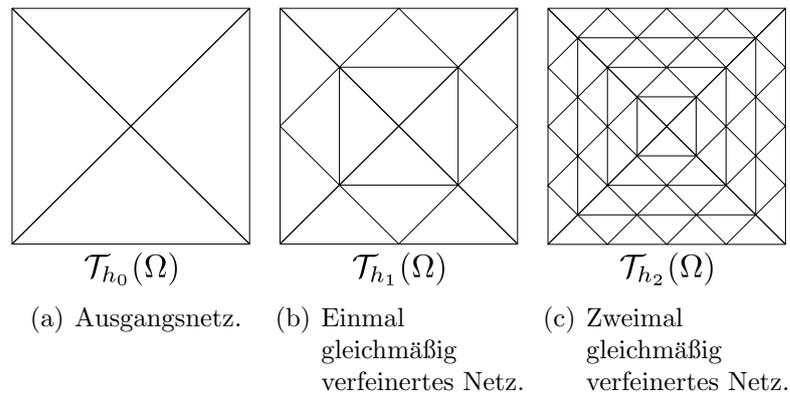


Abbildung 4.3: Gleichmäßige Verfeinerung eines Netzes.

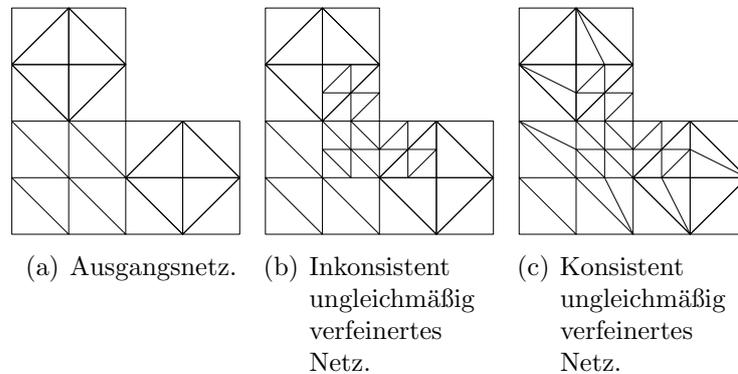


Abbildung 4.4: Ungleichmäßige Verfeinerung eines Netzes.

zu berücksichtigen besteht in der Verwendung der Methode der hängenden Unbekannten [HFDE03, HFDE04], welche in der vorliegenden Arbeit in Abschnitt 4.2 behandelt und in Kapitel 5 eingesetzt werden um lokale Verfeinerungen im Kontext der selbst-adaptiven FE-Verfahren durchzuführen. Dabei werden ausschließlich solche inkonsistente Netze behandelt, die Verfeinerungsunterschiede von höchstens eins zwischen zwei angrenzenden Elementen besitzen.

4.2 Finite-Elemente-Ansatzfunktionen inkonsistent verfeinerter Netze

Eine aus der in Abschnitt 4.1 vorgestellten Unterteilung von Tetraedern und der damit resultierenden geschachtelten Netze folgende wichtige Eigenschaft der verwendeten Funktionenräume $\mathcal{W}^{h,p}$ der Ansatzfunktionen ist es, dass diese ebenfalls eine Hierarchie bilden. Dies folgt aus der affinen Invarianz des Funktionenraums $\mathcal{W}^{h,p}$ [Mon03, S. 130ff] und der Eigenschaft, dass ausgehend von der Unterteilung eines Tetraeders, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, die Verfeinerung $\mathcal{T}_{h_1}(T)$ eine Partitionierung

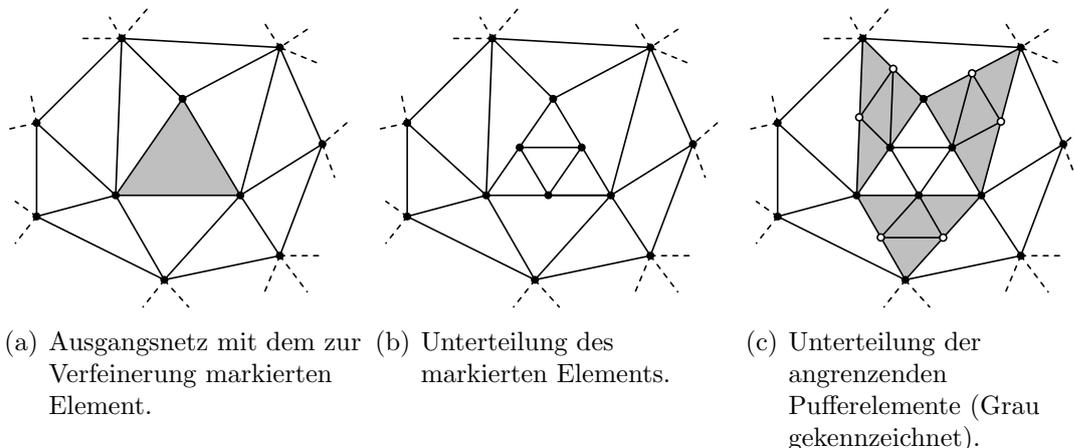


Abbildung 4.5: Lokale Verfeinerung eines Netzes.

von $\mathcal{T}_{h_0}(T)$ darstellt. Damit kann jede Ansatzfunktion aus $\mathcal{W}^{h_0,p} := \mathcal{W}^p(\mathcal{T}_{h_0})$ mit Ansatzfunktionen aus $\mathcal{W}^{h_1,p} := \mathcal{W}^p(\mathcal{T}_{h_1})$ dargestellt werden. Demnach gilt für die Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ eines Feldgebiets Ω mit dem Ausgangsnetz \mathcal{T}_{h_0} , dem Feinnetz \mathcal{T}_{h_N} und der Hierarchie (4.18), dass

$$\mathcal{W}^{h_0,p} \subset \mathcal{W}^{h_1,p} \subset \dots \subset \mathcal{W}^{h_N,p}. \quad (4.19)$$

Da im Hinblick auf das in Kapitel 5 vorgestellte selbst-adaptive FE-Verfahren grundsätzlich lokale Verfeinerungen im Feldgebiet von Interesse sind, findet in diesem Zusammenhang die Methode der hängenden Unbekannten [HFDE03, HFDE04] Anwendung, um inkonsistente Netze behandeln zu können. Bei dieser Methode werden in einem ersten Schritt die zur Verfeinerung markierten Elemente, wie in Abbildung 4.5(a) gezeigt, nach der im vorangegangenen Abschnitt diskutierten selbstähnlichen Unterteilung zerlegt. Das dabei entstehende Netz ist, wie in Abbildung 4.5(b) dargestellt, inkonsistent und an den Grenzflächen bzw. Grenzkanten zwischen verfeinertem und unverfeinertem Element werden die Stetigkeitsbedingungen des verwendeten Funktionenraums $\mathcal{W}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ aus (3.30) verletzt. Die Elemente in denen die Stetigkeitsbedingungen verletzt werden, werden als *Pufferelemente* bezeichnet. Diese werden im Zuge der Verfeinerung des markierten Elements ebenfalls unterteilt und mit Hilfe ihrer Feinnetzansatzfunktionen durch Superposition Pufferansatzfunktionen konstruiert, die die verletzten Stetigkeitsbedingungen des verwendeten Funktionenraums so wiederherstellen, dass der verfeinerte Funktionenraum perfekt in den unverfeinerten Funktionenraum geschachtelt bleibt. Die Unbekannten mit Hilfe derer die Pufferansatzfunktionen im Pufferelement zusammengesetzt werden, werden als *hängende Unbekannte* bezeichnet [WM99]. Diese werden, wie in Abbildung 4.5(c) gezeigt, als weiß unterlegte Knoten dargestellt.

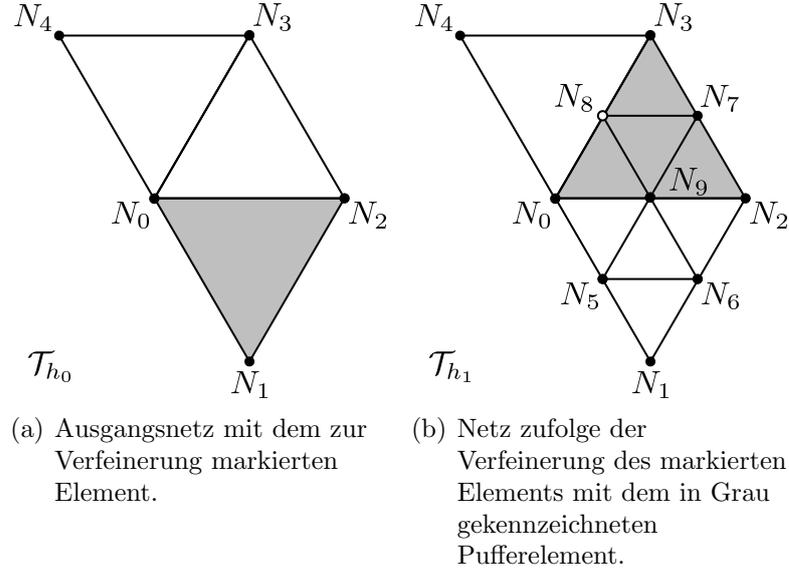


Abbildung 4.6: Konstruktion der Pufferansatzfunktionen.

4.2.1 Pufferansatzfunktionen für die Basis des \mathcal{V}^p

Um die Vorgehensweise der Konstruktion der Pufferansatzfunktionen für die Basis des \mathcal{V}^p übersichtlich zu halten, wird diese für den zweidimensionalen Fall des \mathcal{V}^1 durchgeführt. Abbildung 4.6(a) zeigt die Ausgangssituation mit dem zur Verfeinerung markierten Element $D(N_0, N_1, N_2)$. Die Verfeinerung des Dreiecks $D(N_0, N_1, N_2)$ bewirkt eine Unterteilung des angrenzenden Pufferelements $D(N_0, N_2, N_3)$, damit die Stetigkeit der Ansatzfunktionen an der Kante $E(N_0, N_2)$ gewährleistet ist. Dies führt zu der in Abbildung 4.6(b) dargestellten Situation. Um die Stetigkeit am Übergang zwischen dem Pufferelement und dem unverfeinerten Element wiederherzustellen, werden an der Grenzkante $E(N_0, N_3)$ Pufferansatzfunktionen konstruiert. Die Ansatzfunktionen des Ausgangsnetzes \mathcal{T}_{h_0} aus Abbildung 4.6(a) sind mit

$$\phi_0^{h_0}, \dots, \phi_4^{h_0} \in \mathcal{V}^{h_0,1} \quad (4.20)$$

gegeben und die des verfeinerten Netzes \mathcal{T}_{h_1} aus Abbildung 4.6(b) werden mit

$$\phi_0^{h_1}, \dots, \phi_9^{h_1} \in \mathcal{V}^{h_1,1} \quad (4.21)$$

bezeichnet, wobei für $\phi_i \in \mathcal{V}^1$ nach Tabelle 3.3 gilt

$$\phi_i = \lambda_i. \quad (4.22)$$

Dabei kann jede Ansatzfunktion ϕ_i nach Abschnitt 3.2.2 mit dem Knoten N_i assoziiert werden. Zur Behebung der Unstetigkeit zwischen dem Pufferelement $D(N_0, N_2, N_3)$ und dem unverfeinerten Element werden Pufferansatzfunktionen ϕ_0^P und ϕ_3^P konstruiert. An diese werden die folgenden zwei Anforderungen gestellt:

1. Die Pufferansatzfunktionen müssen an den Elementgrenzen stetig sein.
2. Der Funktionenraum des unverfeinerten Netzes muss ein echter Unterraum des Funktionenraums des verfeinerten Netzes sein.

Die Pufferansatzfunktionen können damit an der Kante $E(N_0, N_3)$ durch Superposition der Ansatzfunktionen des verfeinerten Netzes \mathcal{T}_{h_1} ausgedrückt werden

$$\phi_0^P|_{E(N_0, N_3)} = \phi_0^{h_1} + c_1 \phi_8^{h_1}, \quad (4.23)$$

$$\phi_3^P|_{E(N_0, N_3)} = \phi_3^{h_1} + c_2 \phi_8^{h_1}, \quad (4.24)$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Die entsprechenden Ansatzfunktionen des unverfeinerten Netzes \mathcal{T}_{h_0} dargestellt durch die Ansatzfunktionen des verfeinerten Netzes ergeben wegen der in Abschnitt 4.1 entsprechend ausgedrückten homogenen Koordinaten

$$\phi_0^{h_0} = \phi_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_8^{h_1} + \phi_9^{h_1}) \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3), \quad (4.25)$$

$$\phi_3^{h_0} = \phi_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_8^{h_1} + \phi_7^{h_1}) \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3). \quad (4.26)$$

Um die gestellte Anforderung nach Stetigkeit der Pufferansatzfunktionen an der Grenzkannte $E(N_0, N_3)$ zu gewährleisten, müssen diese der Restriktion der Ansatzfunktionen des unverfeinerten Netzes an der Grenzkannte entsprechen

$$\phi_0^P|_{E(N_0, N_3)} \stackrel{!}{=} \phi_0^{h_0}|_{E(N_0, N_3)}, \quad (4.27)$$

$$\phi_3^P|_{E(N_0, N_3)} \stackrel{!}{=} \phi_3^{h_0}|_{E(N_0, N_3)}, \quad (4.28)$$

wobei

$$\phi_0^{h_0}|_{E(N_0, N_3)} = \phi_0^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1}, \quad (4.29)$$

$$\phi_3^{h_0}|_{E(N_0, N_3)} = \phi_3^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1}. \quad (4.30)$$

Damit ergibt sich für die Unbekannten c_1, c_2 mittels Koeffizientenvergleich von (4.29) bzw. (4.30) mit (4.23) bzw. (4.24), dass $c_1 = c_2 = 1/2$ und für die Pufferansatzfunktionen gilt

$$\phi_0^P = \begin{cases} \phi_0^{h_0} & \text{in } D(N_0, N_3, N_4) \\ \phi_0^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1} & \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3) \end{cases}, \quad (4.31)$$

$$\phi_3^P = \begin{cases} \phi_3^{h_0} & \text{in } D(N_0, N_3, N_4) \\ \phi_3^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1} & \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3) \end{cases}. \quad (4.32)$$

Der Träger der Pufferansatzfunktion ϕ_0^P ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

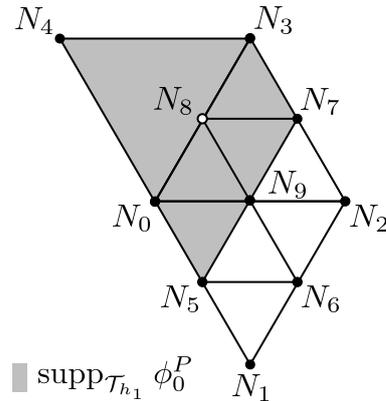


Abbildung 4.7: Träger der Pufferansatzfunktion ϕ_0^P .

Die zweite gestellte Anforderung bedingt die Darstellbarkeit der Ansatzfunktionen auf \mathcal{T}_{h_0} durch Ansatzfunktionen auf \mathcal{T}_{h_1} . Die Ansatzfunktionen des Ausgangsnetzes im Pufferelement können wie folgt notiert werden

$$\phi_0^{h_0} = \underbrace{\phi_0^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_9^{h_1}}_{\phi_0^P} \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3), \quad (4.33)$$

$$\phi_3^{h_0} = \underbrace{\phi_3^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_8^{h_1} + \frac{1}{2}\phi_7^{h_1}}_{\phi_3^P} \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3), \quad (4.34)$$

womit die zweite geforderte Bedingung erfüllt ist. Die Ansatzfunktion $\phi_8^{h_1}$ trägt damit im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen $\phi_5^{h_1}$, $\phi_7^{h_1}$, $\phi_9^{h_1}$ keinen Freiheitsgrad.

Die Verallgemeinerung auf Ansatzfunktionen höherer Ordnung und für den dreidimensionalen Fall verläuft in gleicher Weise zu der hier beschriebenen Vorgehensweise. So müssen an der Grenzfläche bzw. Grenzkannte zwischen einem verfeinerten und einem unverfeinerten Element Pufferansatzfunktionen konstruiert werden, die den beiden geforderten Bedingungen nach Stetigkeit und Darstellbarkeit der Ansatzfunktionen des größeren Netzes genügen. Dabei entsprechen die Pufferansatzfunktionen in dem unverfeinerten Element den entsprechenden Ansatzfunktionen dieses Elements. Im Pufferelement entsprechen die Pufferansatzfunktionen an der Grenzfläche bzw. Grenzkannte jener Superpositionen von Ansatzfunktionen der Grenzfläche bzw. Grenzkannte, die die entsprechenden Ansatzfunktionen des größeren Netzes an der Grenzfläche bzw. Grenzkannte darstellen. Die restlichen Ansatzfunktionen im Pufferelement müssen ihre Freiheitsgrade bewahren, damit die Ansatzfunktionen des größeren Netzes im Pufferelement dargestellt werden können. Dies entspricht im FE-Kontext einer Zunahme von Unbekannten.

4.2.2 Pufferansatzfunktionen für die Basis des \mathcal{A}^p

Die Vorgehensweise zur Konstruktion von Pufferansatzfunktionen für den Funktionenraum \mathcal{A}^p ist analog zu der im vorherigen Abschnitt durchgeführten Konstruktion von Pufferansatzfunktionen für den \mathcal{V}^p . Um auch hier das Vorgehen übersichtlich zu halten, wird die Konstruktion der Pufferansatzfunktionen für den zweidimensionalen Fall und für den Funktionenraum \mathcal{A}^1 durchgeführt. Ausgangspunkt ist das Startnetz aus Abbildung 4.6(a) mit dem zur Verfeinerung markierten Element. Die Verfeinerung des Elements bewirkt eine Unterteilung der direkten Nachbarn, um Unstetigkeiten an der Kante $E(0, 2)$ zu vermeiden. Die betrachteten Ansatzfunktionen des Ausgangsnetzes \mathcal{T}_{h_0} zur Konstruktion der Pufferansatzfunktionen für den Puffer $D(N_0, N_2,)$ ist durch

$$\mathbf{u}_{03}^{h_0} \in \mathcal{A}^{h_0,1} \quad (4.35)$$

gegeben. Die relevanten Ansatzfunktionen des verfeinerten Netzes \mathcal{T}_{h_1} werden mit

$$\mathbf{u}_{08}^{h_1}, \mathbf{u}_{83}^{h_1}, \mathbf{u}_{09}^{h_1}, \mathbf{u}_{92}^{h_1}, \mathbf{u}_{98}^{h_1}, \mathbf{u}_{97}^{h_1}, \mathbf{u}_{87}^{h_1} \in \mathcal{A}^{h_1,1} \quad (4.36)$$

bezeichnet, wobei für $\mathbf{u}_{ij} \in \mathcal{A}^1$ nach Tabelle 3.4 gilt

$$\mathbf{u}_{ij} = \lambda_i \nabla \lambda_j - \lambda_j \nabla \lambda_i. \quad (4.37)$$

Dabei kann jede Ansatzfunktion \mathbf{u}_{ij} mit der entsprechenden Kante $E(N_i, N_j)$ assoziiert werden und besitzt die Eigenschaft, dass für das Linienintegral entlang der Kante gilt [Web93]

$$\int_{E(N_k, N_l)} \mathbf{u}_{ij} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} 1 & \text{für } (k, l) = (i, j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.38)$$

Die Anforderungen an die Pufferansatzfunktion für den Funktionenraum \mathcal{A}^1 können wie folgt formuliert werden:

1. Die Pufferansatzfunktionen müssen an den Elementgrenzen tangential stetig sein.
2. Der Funktionenraum des unverfeinerten Netzes muss perfekt in den Funktionenraum des verfeinerten Netzes geschachtelt sein.
3. Die Pufferansatzfunktionen müssen die Gradienten der Ansatzfunktionen aus \mathcal{V}^1 darstellen können, da $\nabla \mathcal{V}^1 \subset \mathcal{A}^1$ gilt.

Um die Stetigkeit an der Grenzkante $E(N_0, N_3)$ wiederherzustellen, findet für die Pufferansatzfunktion der Ansatz

$$\mathbf{u}_{03}^P|_{E(N_0, N_3)} = c_1 \mathbf{u}_{08}^{h_1} + c_2 \mathbf{u}_{83}^{h_1}, \quad (4.39)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Anwendung. Dabei muss die Pufferansatzfunktion \mathbf{u}_{03}^P der Ansatzfunktion des größeren Netzes an der Grenzkante $E(N_0, N_3)$ entsprechen, um die Stetigkeit zwischen dem verfeinerten Element und dem unverfeinerten Element zu sichern

$$\mathbf{u}_{03}^P|_{E(N_0, N_3)} \stackrel{!}{=} \mathbf{u}_{03}^{h_0}|_{E(N_0, N_3)}. \quad (4.40)$$

Nach Gleichung (4.37) gilt für die Ansatzfunktion des größeren Netzes an der Grenzkante

$$\mathbf{u}_{03}^{h_0} = \lambda_0^{h_0} \nabla \lambda_3^{h_0} - \lambda_3^{h_0} \nabla \lambda_0^{h_0} \quad \text{in } D(N_0, N_2, N_3). \quad (4.41)$$

Unter Verwendung der durch die baryzentrischen Koordinaten eines verfeinerten Tetraeders ausgedrückten Koordinaten des unverfeinerten Tetraeders aus (4.8) und (4.9) folgt für Gleichung (4.41)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{03}^{h_0} &= (\lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_8^{h_1} + \lambda_9^{h_1})) \nabla(\lambda_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_8^{h_1} + \lambda_7^{h_1})) \\ &\quad - (\lambda_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_8^{h_1} + \lambda_7^{h_1})) \nabla(\lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\lambda_8^{h_1} + \lambda_9^{h_1})). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Durch Ausmultiplizieren des Ausdrucks und mit Hilfe der Identitäten

$$\lambda_0^{h_1} \nabla \lambda_3^{h_1} - \lambda_3^{h_1} \nabla \lambda_0^{h_1} \equiv 0, \quad (4.43)$$

$$\lambda_0^{h_1} \nabla \lambda_7^{h_1} - \lambda_7^{h_1} \nabla \lambda_0^{h_1} \equiv 0, \quad (4.44)$$

$$\lambda_9^{h_1} \nabla \lambda_3^{h_1} - \lambda_3^{h_1} \nabla \lambda_9^{h_1} \equiv 0, \quad (4.45)$$

folgt mit Gleichung (4.37)

$$\mathbf{u}_{03}^{h_0} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{08}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1}) + \frac{1}{4}(\mathbf{u}_{87}^{h_1} + \mathbf{u}_{98}^{h_1} + \mathbf{u}_{97}^{h_1}) \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3). \quad (4.46)$$

Restriktion von Ausdruck (4.46) auf die Grenzkante

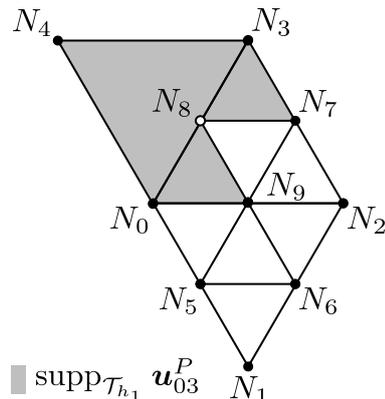
$$\mathbf{u}_{03}^{h_0}|_{E(N_0, N_3)} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{08}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1}) \quad (4.47)$$

liefert wegen der Forderung (4.40) nach Stetigkeit an der Grenzkante für die unbekanntenen Koeffizienten durch Vergleich, dass $c_1 = c_2 = 1/2$ ist und damit für die Pufferansatzfunktion gilt

$$\mathbf{u}_{03}^P = \begin{cases} \mathbf{u}_{03}^{h_0} & \text{in } D(N_0, N_3, N_4) \\ \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{08}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1}) & \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3) \end{cases}. \quad (4.48)$$

Der Träger der Pufferansatzfunktion \mathbf{u}_{03}^P ist in Abbildung 4.8 dargestellt.

Die zweite gestellte Anforderung nach perfekt geschachtelten Funktionenräumen bedingt die Darstellbarkeit der Ansatzfunktionen des $\mathcal{A}^{h_0,1}$ durch Ansatzfunktionen

Abbildung 4.8: Träger der Pufferansatzfunktion \mathbf{u}_{03}^P .

des $\mathcal{A}^{h_1,1}$ für die vorliegenden Triangulierungen \mathcal{T}_{h_0} , bzw. \mathcal{T}_{h_1} . Die Ansatzfunktion an der Grenzkannte $E(N_0, N_3)$ des Ausgangsnetzes im Pufferelement kann mit (4.48) wie folgt notiert werden

$$\mathbf{u}_{03}^{h_0} = \mathbf{u}_{03}^P + \frac{1}{4}(\mathbf{u}_{87}^{h_1} + \mathbf{u}_{98}^{h_1} + \mathbf{u}_{97}^{h_1}) \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3), \quad (4.49)$$

womit die zweite Bedingung erfüllt ist. Die Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{08}^{h_1}$ und $\mathbf{u}_{83}^{h_1}$ tragen damit im Gegensatz zu den Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{87}^{h_1}$, $\mathbf{u}_{89}^{h_1}$ und $\mathbf{u}_{97}^{h_1}$ keine Freiheitsgrade.

Um der dritten Forderung nach der Darstellbarkeit der Gradienten des \mathcal{V}^1 mit Hilfe der Pufferansatzfunktion (4.48) nachzukommen, werden die Gradienten der Ansatzfunktionen $\phi_0^{h_0}$ und $\phi_3^{h_0}$ an der Grenzkannte $E(N_0, N_3)$ betrachtet. Mit der Darstellung (4.25) und (4.26) durch Ansatzfunktionen des verfeinerten Netzes ergibt sich mit

$$\nabla \phi_0^{h_1} = -\mathbf{u}_{09}^{h_1} - \mathbf{u}_{08}^{h_1}, \quad (4.50)$$

$$\nabla \phi_3^{h_1} = -\mathbf{u}_{83}^{h_1} - \mathbf{u}_{73}^{h_1}, \quad (4.51)$$

$$\nabla \phi_7^{h_1} = -\mathbf{u}_{73}^{h_1} + \mathbf{u}_{27}^{h_1} + \mathbf{u}_{87}^{h_1} + \mathbf{u}_{97}^{h_1}, \quad (4.52)$$

$$\nabla \phi_8^{h_1} = \mathbf{u}_{08}^{h_1} - \mathbf{u}_{83}^{h_1} + \mathbf{u}_{98}^{h_1} - \mathbf{u}_{87}^{h_1}, \quad (4.53)$$

$$\nabla \phi_9^{h_1} = -\mathbf{u}_{98}^{h_1} - \mathbf{u}_{97}^{h_1} + \mathbf{u}_{09}^{h_1} - \mathbf{u}_{92}^{h_1}, \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

für die Gradienten

$$\nabla \phi_0^{h_0} = -\frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{u}_{08}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1})}_{2\mathbf{u}_{03}^P} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{09}^{h_1} + \mathbf{u}_{92}^{h_1}) - \mathbf{u}_{97}^{h_1} - \mathbf{u}_{87}^{h_1} \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3), \quad (4.56)$$

$$\nabla \phi_3^{h_0} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{u}_{08}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1})}_{2\mathbf{u}_{03}^P} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{27}^{h_1} + \mathbf{u}_{73}^{h_1}) + \mathbf{u}_{97}^{h_1} + \mathbf{u}_{98}^{h_1} \quad \text{in } D_\Sigma(N_0, N_2, N_3). \quad (4.57)$$

Damit können die Gradienten durch Superposition der Pufferansatzfunktion und der verbleibenden Ansatzfunktionen des $\mathcal{A}^{h_1,1}$ dargestellt werden, womit die dritte

Forderung erfüllt ist. Da zur Erfüllung der Anforderungen an die Pufferansatzfunktionen zusätzliche Freiheitsgrade verwendet werden, entspricht dies im FE-Kontext einer Ausbreitung von Unbekannten. Die Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Fall und Ansätze höherer Ordnung erfolgt nach der gleichen hier vorgestellten Vorgehensweise.

4.2.3 Erstellung der Systemmatrix unter Berücksichtigung von Pufferansatzfunktionen

Die Behandlung von Pufferansatzfunktionen im Kontext der FE-Verfahren wird o. B. d. A. anhand des Randwertproblems 3.1 und der zugehörigen FE-Formulierung aus Problem 3.3 für homogene Randbedingungen auf Γ_E und mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H$ durchgeführt. Ausgangspunkt ist die aus einer konsistenten tetraedrischen Triangulierung $\mathcal{T}_{h_0}(\Omega)$ durch ungleichmäßige, hierarchische Verfeinerung entstandene inkonsistente Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω . Die Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ besitzt dabei N Grenzkanten E_k^G und M Grenzflächen D_l^G und zwischen benachbarten Elementen existieren ausschließlich Verfeinerungsunterschiede von höchstens eins. Abbildung 4.4(b) zeigt beispielhaft eine solche inkonsistente Triangulierung für den zweidimensionalen Fall. Unter Verwendung der FE-Formulierung (3.56) folgt mit den angenommenen homogenen Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_E, \quad (4.58)$$

und der symmetrischen Bilinearform

$$a(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}_i) := S(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}_i) - k_0^2 T_\varepsilon(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}_i), \quad (4.59)$$

dass für $\mathbf{E}_0^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ gilt

$$a(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}_i) = jk_0\eta_0 b_H(\mathbf{v}_i) \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathcal{W}^{h,p}. \quad (4.60)$$

Wie in Abschnitt 4.2.1 und Abschnitt 4.2.2 gezeigt, lassen sich die Pufferansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k}^P \in \mathcal{W}^{h,p}$ der korrespondierenden Grenzkanten E_k^G als Superposition von Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma} \in \mathcal{W}^{h,p}$ der verfeinerten Grenzkanten $E_{k\Sigma}^G$ in den Pufferelementen T_P und als Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k n}^\Gamma$ der Grenzkanten in den unverfeinerten Elementen T_U der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ darstellen

$$\mathbf{w}_{E_k}^P := \begin{cases} \mathbf{w}_{E_k}^\Gamma & \text{in } T_U \subset \text{supp}_{\mathcal{T}_h} \mathbf{w}_{E_k}^\Gamma \\ \sum_{n=1}^{N_G} c_{E_k n} \mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma} & \text{in } T_{P\Sigma} \subset \bigcup_{n=1}^{N_G} \text{supp}_{\mathcal{T}_h} \mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma} \end{cases}, \quad (4.61)$$

mit $k = 1 \dots N$. Gleiches gilt für die Pufferansatzfunktionen $\mathbf{w}_{D_l}^P \in \mathcal{W}^{h,p}$ der korrespondierenden Grenzflächen D_l^G . Diese lassen sich in den Pufferelementen T_P als

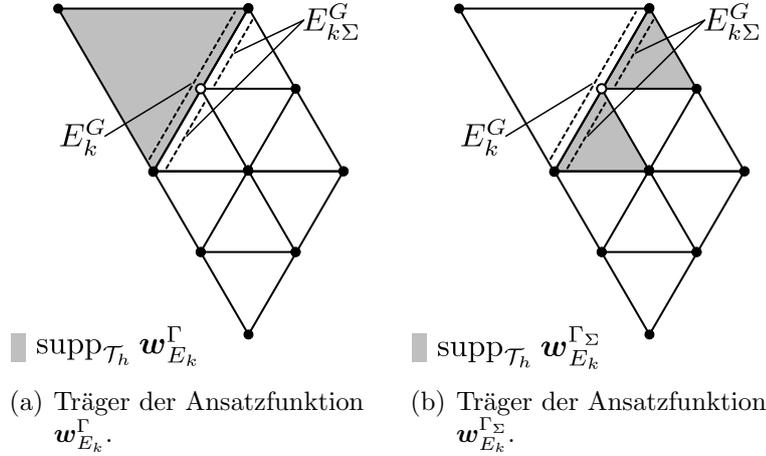


Abbildung 4.9: Träger der Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma$ und $\mathbf{w}_{E_k}^{\Gamma\Sigma}$, die die Pufferansatzfunktionen bilden.

Superposition von Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{D_{lm}}^{\Gamma\Sigma} \in \mathcal{W}^{h,p}$ darstellen, die mit der Unterteilung $D_{l\Sigma}^G$ der Grenzfläche D_l^G und den dabei entstehenden inneren Kanten $E_{l\Sigma}^I$, mit

$$E_{l\Sigma}^I \subset \bigcup_{1 \leq i < j \leq 4} \bar{D}_i \cap \bar{D}_j \quad \text{für } D_{i,j} \in D_{l\Sigma}^G, \quad (4.62)$$

assoziiert werden können. In den unverfeinerten Elementen T_U der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ entsprechen die Pufferansatzfunktionen den Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{D_l}^\Gamma$ der Grenzfläche und es gilt

$$\mathbf{w}_{D_l}^P := \begin{cases} \mathbf{w}_{D_l}^\Gamma & \text{in } T_U \subset \text{supp}_{\mathcal{T}_h} \mathbf{w}_{D_l}^\Gamma \\ \sum_{m=1}^{M_G} c_{D_{lm}} \mathbf{w}_{D_{lm}}^{\Gamma\Sigma} & \text{in } T_{P\Sigma} \subset \bigcup_{m=1}^{M_G} \text{supp}_{\mathcal{T}_h} \mathbf{w}_{D_{lm}}^{\Gamma\Sigma} \end{cases}, \quad (4.63)$$

wobei und $l = 1 \dots M$. Dabei bezeichnet N_G die Anzahl der der Zerlegung einer Grenzfläche entsprechenden Ansatzfunktionen der Ordnung p . M_G entspricht der Anzahl der Ansatzfunktionen der Ordnung p , die mit der Zerlegung einer Grenzfläche assoziiert werden können, zuzüglich jener Ansatzfunktionen, die den bei dieser Zerlegung entstehenden inneren Kanten zugeordnet werden können und es gilt nach Abschnitt 3.2.2

$$N_G = 2p, \quad (4.64)$$

$$M_G = 4p(p-1) + 3p. \quad (4.65)$$

Die Träger der Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma$ und $\mathbf{w}_{E_k}^{\Gamma\Sigma}$ sind für den zweidimensionalen Fall in Abbildung 4.9 beispielhaft für Ansatzfunktionen erster Ordnung dargestellt, wobei hierfür gilt

$$\mathbf{w}_{E_k}^{\Gamma\Sigma} := \mathbf{w}_{E_{k1}}^{\Gamma\Sigma} + \mathbf{w}_{E_{k2}}^{\Gamma\Sigma}. \quad (4.66)$$

Die Aufspaltung des Funktionenraums $\mathcal{W}^{h,p}$ in Ansatzfunktionen, die weder mit einer Grenzkannte E^G oder Grenzfläche D^G noch mit deren Zerlegungen E_Σ^G, D_Σ^G , und inneren Kanten E_Σ^I assoziiert werden können und in Pufferansatzfunktionen ergibt

$$\mathcal{W}^{h,p} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}, \quad (4.67)$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_E \oplus \mathcal{P}_D, \quad (4.68)$$

mit

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{w}_i^\Omega \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \mathbf{w}_i^\Omega \text{ nicht assoz. mit } E^G, D^G, E_\Sigma^G, D_\Sigma^G, E_\Sigma^I \subset \mathcal{T}_h(\Omega)\}, \quad (4.69)$$

$$\mathcal{P}_E = \{\mathbf{w}_{E_i}^P \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \mathbf{w}_{E_i}^P \text{ assoz. mit } E_i^G \subset \mathcal{T}_h(\Omega)\}, \quad (4.70)$$

$$\mathcal{P}_D = \{\mathbf{w}_{D_i}^P \in \mathcal{W}^{h,p} \mid \mathbf{w}_{D_i}^P \text{ assoz. mit } D_i^G \subset \mathcal{T}_h(\Omega)\}. \quad (4.71)$$

Damit lässt sich der FE-Ansatz aus (3.53) mit $\mathbf{w}_j \in \mathcal{W}^{h,p}$ wie folgt schreiben

$$\mathbf{E}_0^{h,p} = \sum_{j=1}^{N_\Omega} x_j \mathbf{w}_j^\Omega + \sum_{k=1}^N x_k \mathbf{w}_{E_k}^P + \sum_{l=1}^M x_l \mathbf{w}_{D_l}^P, \quad (4.72)$$

wobei N_Ω der Anzahl aller Ansatzfunktionen entspricht, die nicht mit einer Grenzkannte bzw. Grenzfläche oder deren Zerlegungen assoziiert werden können. Mit dem Ansatz (4.72) und der diskreten Form (4.60) des betrachteten Randwertproblems kann die FE-Formulierung unter Verwendung von Pufferansatzfunktionen zur Berücksichtigung inkonsistenter Triangulierungen, die durch ungleichmäßige, hierarchische Verfeinerung entstanden sind, wie folgt notiert werden.

Problem 4.1 (Finite-Elemente-Formulierung). *Finde $\mathbf{E}_0^{h,p} \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}_E \oplus \mathcal{P}_D$ so, dass gilt:*

$$a(\mathbf{E}_0^{h,p}, \mathbf{v}_i) = 2jk_0 b_H(\mathbf{v}_i) \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}_E \oplus \mathcal{P}_D. \quad (4.73)$$

Mit dem Ansatz (4.72) und der Definition der Pufferansatzfunktionen (4.61), (4.63) lässt sich Problem 4.1 zu

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N_\Omega} x_j a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_i) + \sum_{k=1}^N x_k a(\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma, \mathbf{v}_i) + \sum_{l=1}^M x_l a(\mathbf{w}_{D_l}^\Gamma, \mathbf{v}_i) \\ & + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{N_G} x_k c_{E_k n} a(\mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_i) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^{M_G} x_l c_{D_l m} a(\mathbf{w}_{D_l m}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_i) \\ & = jk_0 \eta_0 b_H(\mathbf{v}_i), \quad (4.74) \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v}_i \in \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}_E \oplus \mathcal{P}_D$ umformen. Damit folgt bei entsprechender Aufspaltung

der Testfunktionen

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_\Omega} x_j a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_i^\Omega) + \sum_{k=1}^N x_k a(\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma, \mathbf{v}_i^\Omega) + \sum_{l=1}^M x_l a(\mathbf{w}_{D_l}^\Gamma, \mathbf{v}_i^\Omega) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{N_G} x_k c_{E_k n} a(\mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_i^\Omega) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^{M_G} x_l c_{D_l m} a(\mathbf{w}_{D_l m}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_i^\Omega) \\
& \quad = j k_0 \eta_0 b_H(\mathbf{v}_i^\Omega) \quad \text{für } i = 1 \dots N_\Omega, \quad (4.75a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_\Omega} x_j a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_{E_i}^\Gamma) + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \sum_{r=1}^{N_G} x_j c_{E_i r} a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_{E_i}^{\Gamma_\Sigma}) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N x_k a(\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma, \mathbf{v}_{E_i}^\Gamma) + \sum_{l=1}^M x_l a(\mathbf{w}_{D_l}^\Gamma, \mathbf{v}_{E_i}^\Gamma) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N \sum_{n,r=1}^{N_G} x_k c_{E_k n} c_{E_i r} a(\mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_{E_i}^{\Gamma_\Sigma}) + \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^{M_G} \sum_{r=1}^{N_G} x_l c_{D_l m} c_{E_i r} a(\mathbf{w}_{D_l m}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_{E_i}^{\Gamma_\Sigma}) \\
& \quad = j k_0 \eta_0 (b_H(\mathbf{v}_{E_i}^\Gamma) + \sum_{r=1}^{N_G} c_{E_i r} b_H(\mathbf{v}_{E_i}^{\Gamma_\Sigma})) \quad \text{für } i = 1 \dots N, \quad (4.75b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{N_\Omega} x_j a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_{D_i}^\Gamma) + \sum_{j=1}^{N_\Omega} \sum_{s=1}^{M_G} x_j c_{D_i s} a(\mathbf{w}_j^\Omega, \mathbf{v}_{D_i}^{\Gamma_\Sigma}) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N x_k a(\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma, \mathbf{v}_{D_i}^\Gamma) + \sum_{l=1}^M x_l a(\mathbf{w}_{D_l}^\Gamma, \mathbf{v}_{D_i}^\Gamma) \\
& \quad + \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^{N_G} \sum_{s=1}^{M_G} x_k c_{E_k n} c_{D_i s} a(\mathbf{w}_{E_k n}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_{D_i}^{\Gamma_\Sigma}) + \sum_{l=1}^M \sum_{m,s=1}^{M_G} x_l c_{D_l m} c_{D_i s} a(\mathbf{w}_{D_l m}^{\Gamma_\Sigma}, \mathbf{v}_{D_i}^{\Gamma_\Sigma}) \\
& \quad = j k_0 \eta_0 \sum_{s=1}^{M_G} c_{D_i s} b_H(\mathbf{v}_{D_i}^{\Gamma_\Sigma}) \quad \text{für } i = 1 \dots M, \quad (4.75c)
\end{aligned}$$

und das Gleichungssystem lässt sich in Matrixschreibweise darstellen

$$\mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^T \mathbf{x} = j k_0 \eta_0 \mathbf{R} \mathbf{b}, \quad (4.76)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\Omega\Omega} & \mathbf{A}_E^{\Omega\Gamma} & \mathbf{A}_D^{\Omega\Gamma} & \mathbf{A}_E^{\Omega\Sigma} & \mathbf{A}_D^{\Omega\Sigma} \\ \mathbf{A}_E^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}_{EE}^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{A}_{ED}^{\Gamma\Gamma} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_D^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}_{DE}^{\Gamma\Gamma} & \mathbf{A}_{DD}^{\Gamma\Gamma} & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_E^{\Sigma\Omega} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{EE}^{\Sigma\Sigma} & \mathbf{A}_{ED}^{\Sigma\Sigma} \\ \mathbf{A}_D^{\Sigma\Omega} & 0 & 0 & \mathbf{A}_{DE}^{\Sigma\Sigma} & \mathbf{A}_{DD}^{\Sigma\Sigma} \end{bmatrix}, \quad (4.77)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^\Omega \\ \mathbf{x}_E^P \\ \mathbf{x}_D^P \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{C}_E & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & \mathbf{C}_D \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{C}_E = [\mathbf{c}_{E_1} \quad \mathbf{c}_{E_2} \quad \dots \quad \mathbf{c}_{E_N}]^T, \quad (4.80)$$

$$\mathbf{C}_D = [\mathbf{c}_{D_1} \quad \mathbf{c}_{D_2} \quad \dots \quad \mathbf{c}_{D_M}]^T, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{c}_{E_k} = [c_{E_k1} \quad c_{E_k2} \quad \dots \quad c_{E_k N_G}]^T, \quad (4.82)$$

$$\mathbf{c}_{D_l} = [c_{D_l1} \quad c_{D_l2} \quad \dots \quad c_{D_l M_G}]^T. \quad (4.83)$$

Die Systemmatrix \mathbf{A} ist dabei ohne Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen an den Grenzkanten und Grenzflächen der inkonsistenten Triangulierung erstellt. Die Matrix \mathbf{R} stellt in diesem Zusammenhang einen *Restriktionsoperator* dar, der die Beziehung zwischen den Pufferansatzfunktionen und den Ansatzfunktionen der inkonsistenten Triangulierung herstellt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}^\Omega \\ \mathbf{W}_E^P \\ \mathbf{W}_D^P \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^\Omega \\ \mathbf{W}_E^\Gamma \\ \mathbf{W}_D^\Gamma \\ \mathbf{W}_E^{\Gamma\Sigma} \\ \mathbf{W}_D^{\Gamma\Sigma} \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

wobei für die Matrizen der Ansatzfunktionen gilt

$$\mathbf{W}^\Omega = [\mathbf{w}_1^\Omega \quad \mathbf{w}_2^\Omega \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_\Omega}^\Omega]^T, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{W}_E^P = [\mathbf{w}_{E_1}^P \quad \mathbf{w}_{E_2}^P \quad \dots \quad \mathbf{w}_{E_N}^P]^T, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{W}_D^P = [\mathbf{w}_{D_1}^P \quad \mathbf{w}_{D_2}^P \quad \dots \quad \mathbf{w}_{D_M}^P]^T, \quad (4.87)$$

$$\mathbf{W}_E^\Gamma = [\mathbf{w}_{E_1}^\Gamma \quad \mathbf{w}_{E_2}^\Gamma \quad \dots \quad \mathbf{w}_{E_N}^\Gamma]^T, \quad (4.88)$$

$$\mathbf{W}_D^\Gamma = [\mathbf{w}_{D_1}^\Gamma \quad \mathbf{w}_{D_2}^\Gamma \quad \dots \quad \mathbf{w}_{D_M}^\Gamma]^T, \quad (4.89)$$

$$\mathbf{W}_E^{\Gamma\Sigma} = [\mathbf{w}_{E_11}^{\Gamma\Sigma} \quad \mathbf{w}_{E_12}^{\Gamma\Sigma} \quad \dots \quad \mathbf{w}_{E_N N_G}^{\Gamma\Sigma}]^T, \quad (4.90)$$

$$\mathbf{W}_D^{\Gamma\Sigma} = [\mathbf{w}_{D_11}^{\Gamma\Sigma} \quad \mathbf{w}_{D_12}^{\Gamma\Sigma} \quad \dots \quad \mathbf{w}_{D_M M_G}^{\Gamma\Sigma}]^T. \quad (4.91)$$

Demgemäß bezeichnet der Ausdruck \mathbf{RAR}^T die *Restriktion* der Matrix \mathbf{A} . Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{C}_E und \mathbf{C}_D bestehen aus den Koeffizienten, die aus den Superpositionen der Ansatzfunktionen der unterteilten Grenzkanten bzw. Grenzflächen

in der Herleitung zur Konstruktion der Pufferansatzfunktionen in Abschnitt 4.2.1 und Abschnitt 4.2.2 bekannt sind. Der Vektor \mathbf{x}_E^P bzw. \mathbf{x}_D^P genügt entsprechend den unbekanntem Koeffizienten der Pufferansatzfunktionen der Grenzkanten bzw. Grenzflächen der zugrunde liegenden Diskretisierung.

4.3 Prolongation und Restriktion

Wie in Abschnitt 4.2 angedeutet lässt sich wegen der affinen Invarianz des Funktionenraums $\mathcal{W}^{h,p}$ [Mon03, S. 130ff] und der verwendeten Unterteilung eines Tetraeders, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, jede Ansatzfunktion des $\mathcal{W}^{h_k,p}$ durch die des $\mathcal{W}^{h_{k+1},p}$ darstellen. Im Folgenden wird dies für Ansatzfunktionen der Ordnung $p = 1$ durchgeführt, um die Notation übersichtlich zu halten.

4.3.1 Darstellung der Ansatzfunktionen des \mathcal{W}^p eines Tetraeders T durch die seiner Zerlegung T_Σ

Gegeben ist die Unterteilung T_Σ eines Tetraeders T , wie in Abbildung 4.2 dargestellt. Da für die Ansatzfunktionen $\phi_i^{h_k} \in \mathcal{V}^{h_k,1}$, mit $h_k = 2h_{k+1}$, nach Tabelle 3.3 gilt

$$\phi_i^{h_k} = \lambda_i^{h_k}, \quad (4.92)$$

ergibt sich für die Darstellung der Ansatzfunktionen $\phi_i^{h_0}$ des unverfeinerten Tetraeders T durch die Ansatzfunktionen $\phi_j^{h_1}$ der Zerlegung T_Σ nach (4.8) - (4.11)

$$\phi_0^{h_0} = \phi_0^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_4^{h_1} + \phi_5^{h_1} + \phi_6^{h_1}), \quad (4.93)$$

$$\phi_1^{h_0} = \phi_1^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_4^{h_1} + \phi_7^{h_1} + \phi_8^{h_1}), \quad (4.94)$$

$$\phi_2^{h_0} = \phi_2^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_5^{h_1} + \phi_7^{h_1} + \phi_9^{h_1}), \quad (4.95)$$

$$\phi_3^{h_0} = \phi_3^{h_1} + \frac{1}{2}(\phi_6^{h_1} + \phi_8^{h_1} + \phi_9^{h_1}). \quad (4.96)$$

Die Ansatzfunktionen erster Ordnung $\mathbf{u}_{ij}^{h_k} \in \mathcal{A}^{h_k,1}$ können nach Tabelle 3.4 wie folgt notiert werden

$$\mathbf{u}_{ij}^{h_k} = \lambda_i^{h_k} \nabla \lambda_j^{h_k} - \lambda_j^{h_k} \nabla \lambda_i^{h_k}, \quad (4.97)$$

wobei $\mathbf{u}_{ij}^{h_k}$ mit der Kante $E(N_i, N_j)$ assoziiert wird. Damit existieren für das Tetraeder T sechs Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{ij}^{h_0}$ erster Ordnung und 25 Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{ij}^{h_1}$ für die in Abschnitt 4.1 beschriebene und in Abbildung 4.2 gezeigte Unterteilung T_Σ . Die Vorgehensweise zur Darstellung der Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{ij}^{h_0}$ durch die

Ansatzfunktionen $\mathbf{u}_{ij}^{h_1}$ der Zerlegung, wird anhand der mit der Kante $E(N_0, N_1)$ assoziierten Ansatzfunktion gezeigt

$$\mathbf{u}_{01}^{h_0} = \lambda_0^{h_0} \nabla \lambda_1^{h_0} - \lambda_1^{h_0} \nabla \lambda_0^{h_0}. \quad (4.98)$$

Mit den Gleichungen (4.8) bis (4.11) und (4.12) bis (4.15) eingesetzt in (4.98) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{01}^{h_0} &= [\lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2} (\lambda_4^{h_1} + \lambda_5^{h_1} + \lambda_6^{h_1})] \nabla [\lambda_1^{h_1} + \frac{1}{2} (\lambda_4^{h_1} + \lambda_7^{h_1} + \lambda_8^{h_1})] \\ &\quad - [\lambda_1^{h_1} + \frac{1}{2} (\lambda_4^{h_1} + \lambda_7^{h_1} + \lambda_8^{h_1})] \nabla [\lambda_0^{h_1} + \frac{1}{2} (\lambda_4^{h_1} + \lambda_5^{h_1} + \lambda_6^{h_1})]. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ausmultiplizieren des Ausdrucks der rechten Seite und mithilfe der folgenden Identitäten für die zugrunde liegende Zerlegung T_Σ

$$\lambda_0^{h_1} \nabla \lambda_1^{h_1} - \lambda_1^{h_1} \nabla \lambda_0^{h_1} \equiv 0, \quad (4.100)$$

$$\lambda_5^{h_1} \nabla \lambda_1^{h_1} - \lambda_1^{h_1} \nabla \lambda_5^{h_1} \equiv 0, \quad (4.101)$$

$$\lambda_6^{h_1} \nabla \lambda_1^{h_1} - \lambda_1^{h_1} \nabla \lambda_6^{h_1} \equiv 0, \quad (4.102)$$

$$\lambda_0^{h_1} \nabla \lambda_7^{h_1} - \lambda_7^{h_1} \nabla \lambda_0^{h_1} \equiv 0, \quad (4.103)$$

$$\lambda_0^{h_1} \nabla \lambda_8^{h_1} - \lambda_8^{h_1} \nabla \lambda_0^{h_1} \equiv 0, \quad (4.104)$$

$$\lambda_5^{h_1} \nabla \lambda_8^{h_1} - \lambda_8^{h_1} \nabla \lambda_5^{h_1} \equiv 0, \quad (4.105)$$

$$\lambda_6^{h_1} \nabla \lambda_7^{h_1} - \lambda_7^{h_1} \nabla \lambda_6^{h_1} \equiv 0, \quad (4.106)$$

ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (4.97) für die Ansatzfunktion des unverfeinerten Tetraeders der Ausdruck

$$\mathbf{u}_{01}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{04}^{h_1} + \mathbf{u}_{41}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{47}^{h_1} + \mathbf{u}_{48}^{h_1} - \mathbf{u}_{45}^{h_1} + \mathbf{u}_{57}^{h_1} - \mathbf{u}_{46}^{h_1} + \mathbf{u}_{68}^{h_1}). \quad (4.107)$$

Für die verbleibenden Ansatzfunktionen des unverfeinerten Tetraeders ergibt sich entsprechend

$$\mathbf{u}_{02}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{05}^{h_1} + \mathbf{u}_{52}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{59}^{h_1} - \mathbf{u}_{56}^{h_1} + \mathbf{u}_{69}^{h_1} + \mathbf{u}_{45}^{h_1} + \mathbf{u}_{57}^{h_1} + \mathbf{u}_{47}^{h_1} + \mathbf{u}_{49}^{h_1}), \quad (4.108)$$

$$\mathbf{u}_{03}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{06}^{h_1} + \mathbf{u}_{63}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{46}^{h_1} + \mathbf{u}_{68}^{h_1} + \mathbf{u}_{48}^{h_1} + \mathbf{u}_{56}^{h_1} + \mathbf{u}_{69}^{h_1} + \mathbf{u}_{59}^{h_1} + \mathbf{u}_{49}^{h_1}), \quad (4.109)$$

$$\mathbf{u}_{12}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{17}^{h_1} + \mathbf{u}_{72}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{79}^{h_1} - \mathbf{u}_{78}^{h_1} + \mathbf{u}_{89}^{h_1} - \mathbf{u}_{47}^{h_1} - \mathbf{u}_{57}^{h_1} + \mathbf{u}_{45}^{h_1} + \mathbf{u}_{49}^{h_1}), \quad (4.110)$$

$$\mathbf{u}_{13}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{18}^{h_1} + \mathbf{u}_{83}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{46}^{h_1} + \mathbf{u}_{48}^{h_1} - \mathbf{u}_{68}^{h_1} + \mathbf{u}_{78}^{h_1} + \mathbf{u}_{89}^{h_1} + \mathbf{u}_{79}^{h_1} + \mathbf{u}_{49}^{h_1}), \quad (4.111)$$

$$\mathbf{u}_{23}^{h_0} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{29}^{h_1} + \mathbf{u}_{93}^{h_1}) + \frac{1}{4} (\mathbf{u}_{59}^{h_1} - \mathbf{u}_{69}^{h_1} + \mathbf{u}_{56}^{h_1} - \mathbf{u}_{89}^{h_1} + \mathbf{u}_{79}^{h_1} + \mathbf{u}_{78}^{h_1}). \quad (4.112)$$

Damit lassen sich nach Definition (3.30) der Basis \mathcal{W}^p in gleicher Vorgehensweise die Ansatzfunktionen des Tetraeders T des Funktionenraums $\mathcal{W}^p(T)$ durch die der Zerlegung T_Σ des Funktionenraums $\mathcal{W}^p(T_\Sigma)$ ausdrücken, und es gilt

$$\mathbf{W}^{h_0,p} = \mathbf{R}_{h_1}^{h_0} \mathbf{W}^{h_1,p}, \quad (4.113)$$

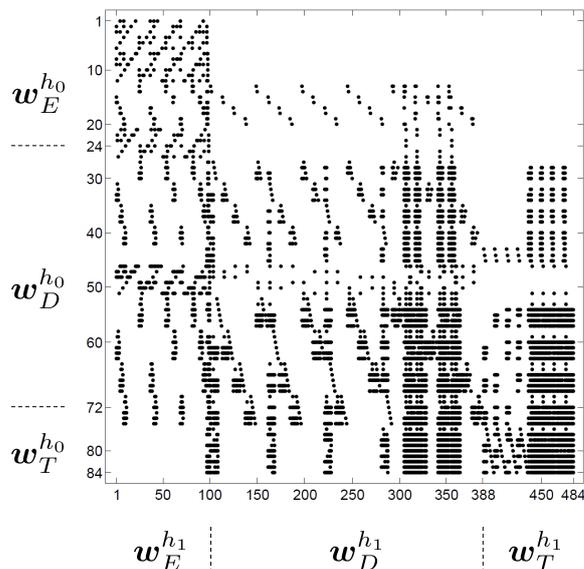


Abbildung 4.10: Besetzungsstruktur der Restriktionsmatrix $\mathbf{R}_{h_1}^{h_0}$ eines Tetraeders für die Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_E^{h_k}, \mathbf{w}_D^{h_k}, \mathbf{w}_T^{h_k} \in \mathcal{W}^{h_k,4}(T)$. Hierbei werden die Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_E^{h_k}$ mit den Kanten, $\mathbf{w}_D^{h_k}$ mit den Flächen und $\mathbf{w}_T^{h_k}$ mit den Tetraedern assoziiert. Die Anzahl der Nicht-Null-Elemente beträgt $nz = 5133$.

wobei sich die Matrizen $\mathbf{W}^{h_0,p}$ und $\mathbf{W}^{h_1,p}$ der Ansatzfunktionen wie folgt zusammensetzen

$$\mathbf{W}^{h_k,p} = [\mathbf{w}_1^{h_k} \quad \mathbf{w}_2^{h_k} \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_k}^{h_k}]_{h_k,p}^T, \quad \text{für } \mathbf{w}_i^{h_k} \in \mathcal{W}^{h_k,p}, N_k = \dim\{\mathcal{W}^{h_k,p}\}. \quad (4.114)$$

Die Matrix $\mathbf{R}_{h_1}^{h_0}$ wird als *Restriktionsmatrix* bezeichnet und stellt eine Verallgemeinerung der in Abschnitt 4.2.3 beschriebenen Restriktionsmatrix zur Berücksichtigung hängender Unbekannten dar. Sie beinhaltet die in den Gleichungen (4.107) bis (4.112) gewonnenen Koeffizienten und weist die in Abbildung 4.10 dargestellte Besetzungsstruktur auf.

Da sich die in diesem Unterkapitel beschriebene Vorgehensweise zur Ermittlung der Koeffizienten zur Darstellung der Ansatzfunktionen des Tetraeders durch die seiner Verfeinerung für Ansatzfunktionen höherer Ordnung aufwendig gestaltet, können diese auch numerisch berechnet werden. Hierzu wird die Darstellung der Ansatzfunktionen des Tetraeders

$$\mathbf{w}_i^{h_0} = \sum_{j=1}^{N_1} r_{ij} \mathbf{w}_j^{h_1} \quad \text{für } i = 1 \dots N_0, \text{ mit } \mathbf{w}_i^{h_0} \in \mathcal{W}^{h_0,p}, \mathbf{w}_j^{h_1} \in \mathcal{W}^{h_1,p}, \quad (4.115)$$

durch Testen mit den Funktionen $\mathbf{w}_n^{h_1} \in \mathcal{W}^{h_1,p}$ und mittels Integration über das

Tetraeder T in die Gewichtete-Residuen-Formulierung überführt

$$\sum_{j=1}^{N_1} r_{ij} \int_T \mathbf{w}_n^{h_1} \cdot \mathbf{w}_j^{h_1} d\Omega = \int_T \mathbf{w}_n^{h_1} \cdot \mathbf{w}_i^{h_0} d\Omega \quad \text{für } n = 1 \dots N_1, i = 1 \dots N_0. \quad (4.116)$$

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung der i -ten Zeile \mathbf{r}_i^T der Restriktionsmatrix aus (4.113)

$$\mathbf{T} \mathbf{r}_i = \mathbf{b}_i \quad i = 1 \dots N_0, \quad (4.117)$$

mit den Beiträgen

$$T_{nj} = \int_T \mathbf{w}_n^{h_1} \cdot \mathbf{w}_j^{h_1} d\Omega, \quad (4.118)$$

$$b_{in} = \int_T \mathbf{w}_n^{h_1} \cdot \mathbf{w}_i^{h_0} d\Omega. \quad (4.119)$$

Wegen der Regularität der Massenmatrix \mathbf{T} existiert für jede Anregung \mathbf{b}_i eine eindeutige Lösung \mathbf{r}_i und die Restriktionsmatrix ergibt sich aus diesen in folgender Form

$$\mathbf{R}_{h_1}^{h_0} = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \dots \quad \mathbf{r}_{N_0}]^T. \quad (4.120)$$

4.3.2 Prolongations- und Restriktionsoperator

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist das Randwertproblem 3.1 mit der zugehörigen FE-Formulierung aus Problem 3.3 für homogene Randbedingungen auf Γ_E und mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H$. Weiterhin ist eine Hierarchie tetraedrischer Triangulierungen $\mathcal{T}_{h_k}(\Omega)$ des Feldgebiets Ω mit $h_k = 2h_{k+1}$ gegeben

$$\mathcal{T}_{h_0} \subset \mathcal{T}_{h_1} \subset \dots \subset \mathcal{T}_{h_k} \subset \dots \subset \mathcal{T}_{h_N}, \quad (4.121)$$

die, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, eine Hierarchie des verwendeten Funktionenraums $\mathcal{W}^{h,p}$ bezüglich der Netzfolge bedingt

$$\mathcal{W}^{h_0,p} \subset \mathcal{W}^{h_1,p} \subset \dots \subset \mathcal{W}^{h_k,p} \subset \dots \subset \mathcal{W}^{h_N,p}. \quad (4.122)$$

Die verschiedenen Triangulierungen müssen dabei nicht durch gleichmäßige, hierarchische Verfeinerung erstellt sein, sondern sind im allgemeinen Fall durch ungleichmäßige, hierarchische Verfeinerung gewonnene inkonsistente Triangulierungen. Abbildung 4.3 zeigt beispielhaft eine durch gleichmäßige, hierarchische Verfeinerung

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^{N_k} & \xrightarrow{\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}}} & \mathbb{C}^{N_{k+1}} \\
\mathbf{C}^{h_k,p} \downarrow & & \downarrow \mathbf{C}^{h_{k+1},p} \\
\mathcal{W}^{h_k,p} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{W}^{h_{k+1},p}
\end{array}$$

Abbildung 4.11: Beziehung zwischen dem Prolongationsoperator $\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}}$ und den Funktionenräumen $\mathcal{W}^{h_k,p}$ und $\mathcal{W}^{h_{k+1},p}$.

hervorgerufene Triangulierung. Ausgehend von der betrachteten FE-Formulierung in (3.56) lässt sich die folgende Abbildung formulieren

$$\mathbf{C}^{h_k,p} : \mathbb{C}^{N_k} \longrightarrow \mathcal{W}^{h_k,p}, \quad (4.123)$$

$$\mathbf{x}^{h_k,p} \longmapsto \sum_{i=1}^N x_i^{h_k,p} \mathbf{w}_i \quad \text{mit } \mathbf{w}_i \in \mathcal{W}^{h_k,p}, N_k = \dim\{\mathcal{W}^{h_k,p}\}, \quad (4.124)$$

mit $\mathbf{x}^{h_k,p} = [x_1^{h_k,p} x_2^{h_k,p} \dots x_N^{h_k,p}]^T$. Somit kann jede Ansatzfunktion $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{h_k,p}$ mit einem Koeffizientenvektor $\mathbf{x}^{h_k,p} \in \mathbb{C}^{h_k,p}$ assoziiert werden. Der FE-Ansatz (3.53) mit $\mathbf{E}^{h_k,p} = \mathbf{C}^{h_k,p}(\mathbf{x}^{h_k,p})$ führt nach (3.57) auf ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}^{h_k,p} \mathbf{x}^{h_k,p} = j k_0 \eta_0 \mathbf{b}^{h_k,p}. \quad (4.125)$$

Der *Prolongationsoperator* $\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}}$ beschreibt für die Lösung $\mathbf{x}^{h_k,p}$ des Gleichungssystems (4.125) folgenden Zusammenhang [Hac03, S. 66ff]

$$\mathbf{C}^{h_k,p}(\mathbf{x}^{h_k,p}) = \mathbf{C}^{h_{k+1},p}(\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}} \mathbf{x}^{h_k,p}), \quad (4.126)$$

wobei $\bar{\mathbf{x}}^{h_{k+1},p} = \mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}} \mathbf{x}^{h_k,p}$ den zu dem Funktionenraum $\mathcal{W}^{h_{k+1},p}$ gehörenden Koeffizientenvektor bezeichnet. Diese Beziehung ist in Abbildung 4.11 veranschaulicht. Bezeichnet $\mathbf{W}^{h_k,p}$ die in dem Gleichungssystem (4.125) verwendeten Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W}^{h_k,p}$ mit

$$\mathbf{W}^{h_k,p} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \dots \quad \mathbf{w}_{N_k}]_{h_k,p}^T, \quad N_k = \dim\{\mathcal{W}^{h_k,p}\}, \quad (4.127)$$

so lassen sich die Ansatzfunktionen der Triangulierung \mathcal{T}_{h_k} durch die der verfeinerten Triangulierung $\mathcal{T}_{h_{k+1}}$ wegen der perfekt geschachtelten Funktionenräume $\mathcal{W}^{h_k,p} \subset \mathcal{W}^{h_{k+1},p}$ und nach den Ausführungen in Abschnitt 4.3.1 mit dem *Restriktionsoperator* $\mathbf{R}_{h_{k+1}}^{h_k}$ wie folgt ausdrücken

$$\mathbf{W}^{h_k,p} = \mathbf{R}_{h_{k+1}}^{h_k} \mathbf{W}^{h_{k+1},p}. \quad (4.128)$$

Unter Verwendung der Beziehung (4.126) ergibt sich für die Abbildung $\mathbf{C}^{h_{k+1},p}$ der prolongierten Koeffizienten $\bar{\mathbf{x}}^{h_{k+1}}$

$$\mathbf{C}^{h_{k+1},p}(\bar{\mathbf{x}}^{h_{k+1}}) = (\bar{\mathbf{x}}^{h_{k+1}})^T \mathbf{W}^{h_{k+1},p}, \quad (4.129)$$

$$= (\mathbf{x}^{h_k,p})^T (\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}})^T \mathbf{W}^{h_{k+1},p} \stackrel{(4.126)}{=} \mathbf{C}^{h_k,p}(\mathbf{x}^{h_k,p}), \quad (4.130)$$

womit gilt

$$\mathbf{W}^{h_k,p} = (\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}})^T \mathbf{W}^{h_{k+1},p}, \quad (4.131)$$

und wegen Gleichung (4.128) damit folgende Beziehung zwischen dem Prolongationsoperator $\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}}$ und dem Restriktionsoperator $\mathbf{R}_{h_{k+1}}^{h_k}$ gegeben ist

$$\mathbf{R}_{h_{k+1}}^{h_k} = (\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}})^T. \quad (4.132)$$

Kapitel 5

Adaptive Finite-Elemente-Verfahren

Um zuverlässige und präzise numerische Ergebnisse bei der Simulation elektromagnetischer Strukturen mithilfe der in Kapitel 3 vorgestellten FE-Verfahren zu erhalten, sind für viele realistische Probleme FE-Netze mit hoher Netzdichte und FE-Ansatzfunktionen höherer Ordnung notwendig. Dies führt zu einer großen Anzahl an Freiheitsgraden und damit zu einem sehr hohen numerischen Aufwand. Ein Ansatz den numerischen Aufwand zu verringern besteht darin a priori Wissen bei der Verteilung der Freiheitsgrade effizient einzubringen. So kann z. B. bei der Konstruktion des FE-Netzes im Vorhinein die Netzdichte in der Nähe von Singularitäten im Feldgebiet [Bla91, S. 116ff] sowie in Bereichen glatter Felder die Ordnung der Ansatzfunktionen erhöht werden. Diese Vorgehensweise ist für praktische Problemstellung jedoch meist unzureichend, da zum einen diese Bereiche im Feldgebiet zunächst erkannt werden müssen und zum anderen unklar ist, in welchem Maße z. B. die Netzdichte oder die Ordnung der Ansatzfunktionen erhöht werden muss, um eine bestimmte Genauigkeit zu erhalten. Die *adaptiven FE-Verfahren* liefern einen Ansatz um diese Problematik zu umgehen und den numerischen Aufwand zu verringern ohne dabei die Zuverlässigkeit und die Genauigkeit der Ergebnisse zu beeinträchtigen [GB86]. Die effiziente Verteilung der Freiheitsgrade wird dabei innerhalb eines adaptiven Prozesses ausgehend von einer initialen numerischen Lösung des zugrunde liegenden Problems durch Verwendung sogenannter lokaler *a posteriori Fehlerindikatoren* bzw. lokaler *a posteriori Fehlerschätzer* ermittelt, die einzelnen Regionen oder Elementen des FE-Netzes einen Schätzwert des FE-Fehlers in einer dem Problem zweckmäßigen Größe zuweisen. Dabei kann z. B. in Regionen großer Fehler die benötigten Freiheitsgrade entweder durch Verfeinerung des vorliegenden FE-Netzes (*h-Adaptivität*), oder durch Erhöhen des Grades der Ansatzfunktionen (*p-Adaptivität*), oder durch Kombination beider Methoden (*hp-Adaptivität*), oder durch Verschieben der Knoten des FE-Netzes (*r-Adaptivität*) hinzugefügt [GB86], [SB91, S. 57ff]. Algorithmus 5.1 zeigt den prinzipiellen Ablauf eines adaptiven FE-Verfahrens. In der vorliegenden Arbeit

Algorithmus 5.1 Prinzipieller Ablauf eines adaptiven FE-Verfahrens unter Verwendung lokaler, a posteriori Fehlerschätzer.

Berechne initiale FE-Lösung.

while $err > TOL$ **do**

 Berechne lokale Schätzwerte des Beitrags zum FE-Approximationsfehler.

 Markiere die Freiheitsgrade mit den größten Beiträgen.

 Verfeinere die markierten Freiheitsgrade.

 Berechne den globalen Schätzwert err des FE-Approximationsfehlers.

 Berechne die FE-Lösung der angepassten Diskretisierung.

end while

werden ausschließlich h -adaptive FE-Verfahren behandelt. Diese bieten die Möglichkeit angepasste Netze zu erzeugen und sind damit bei nicht glatten Lösungen, wie dies unter anderem bei Anwesenheit von Singularitäten im Feldgebiet auftritt, essenziell für die Wiederherstellung der Konvergenzordnung [Sch98, S. 89], [AS98]. Hierfür wird ein impliziter lokaler a posteriori Fehlerindikator vorgestellt, der jedem Tetraeder des FE-Netzes einen Schätzwert des FE-Fehlers zuordnet und damit die Grundlage für den adaptiven Prozess legt. Der vorgestellte Fehlerindikator wird in den Streuparametern ausgedrückt, da bei der FE-Analyse passiver Mikrowellenstrukturen häufig nicht die Feldgröße an sich von Interesse ist, sondern vielmehr die integralen Größen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen der folgenden Unterkapitel ist die FE-Formulierung aus Problem 3.6 mit der regulären Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω . Die Ordnung p der Ansatzfunktionen wird zur Diskretisierung als homogen über das gesamte Feldgebiet vorausgesetzt.

5.1 Konvergenz

Betrachtet wird das Feldgebiet Ω mit den disjunkten Teilrändern Γ_E , Γ_H und Γ_P mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_P$. Hierbei werden homogene Randbedingungen auf dem Dirichlet-Rand Γ_E und dem Neumann-Rand Γ_H angenommen. Die Anregung erfolgt wie in Abschnitt 3.4 beschrieben über den Tor-Rand Γ_P .

Unter der Annahme hinreichend glatter Lösungen des Problems können im FE-Kontext a priori Aussagen über den Approximationsfehler getroffen werden. Dieser genügt für die exakte Lösung $\mathbf{E} \in \mathcal{H}^{r+1}(\Omega)$ und mit der Lösung $\mathbf{E}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p} \subset \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ des FE-Problems für hinreichend kleine Elementgrößen h der folgenden Abschätzung [Mon92]:

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^{h,p}\|_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} \leq Ch^{\min\{p,r\}} \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)}. \quad (5.1)$$

Mit r wird in diesem Zusammenhang der Regularitätsindex bezeichnet und C ist eine von der Elementgröße h unabhängige Konstante. Der Funktionenraum $\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)$ meint dabei den Sobolev-Raum, dessen Funktionen $(r + 1)$ schwache Ableitungen auf Ω besitzen

$$\mathcal{H}^{r+1}(\Omega) := \{\mathbf{E} \in L^{r+1}(\Omega) \mid D^\alpha \mathbf{E} \in L^{r+1}(\Omega) \text{ mit } |\alpha| \leq r + 1\}, \quad (5.2)$$

mit dem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und den Ableitungen $D^\alpha \mathbf{E}$ mit

$$D^\alpha \mathbf{E} := \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{E}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad (5.3)$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (5.4)$$

Die Ableitungen aus (5.3) sind dabei im schwachen Sinne zu verstehen, d. h. für $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L^1(\Omega)$ gilt

$$\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot D^\alpha \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \quad \forall \mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega), \quad (5.5)$$

wobei mit \mathbf{q} die α -te schwache Ableitung $D^\alpha \mathbf{p}$ von \mathbf{p} bezeichnet wird. Entsprechend gilt für das innere Produkt des $\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)$ sowie für die damit induzierte Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{r+1}}$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq r+1} (D^\alpha \mathbf{u}, D^\alpha \mathbf{v})_{L^2(\Omega)}, \quad (5.6)$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} := ((\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \quad (5.7)$$

mit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}^{r+1}(\Omega)$.

Da im Rahmen der FE-Simulation von Mikrowellenstrukturen häufig nicht der Fehler in den Feldgrößen von Interesse ist, sondern vielmehr der Fehler in den integralen Größen, wird im Folgenden eine Abschätzung von (5.1) in Streuparametern ausgedrückt. Mithilfe des linearen Ausgangsfunktional (3.85) aus Problem 3.5, kann der durch die FE-Approximation entstandene Fehler $\Delta S_{kl} = S_{kl} - S_{kl}^{h,p}$ in den Streuparametern angegeben werden

$$|\Delta S_{kl}| = |S_{kl} - S_{kl}^{h,p}| \quad (5.8)$$

$$= |f_k(\mathbf{E}_l) - f_k(\mathbf{E}_l^{h,p})|, \quad (5.9)$$

wobei $\mathbf{E}_l \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega, \Gamma_E \cup \Gamma_P) \oplus \mathcal{M}$ die Lösung des schwachen Problems und $\mathbf{E}_l^{h,p} \in \mathcal{W}_0^{h,p} \oplus \mathcal{W}_P^{h,p}$ die Lösung des entsprechenden FE-Problems bezeichnet. Die Verwendung der Beziehungen (3.81) und (3.82) führt für den Ausdruck der rechten Seite auf

$$\begin{aligned} & |f_k(\mathbf{E}_l) - f_k(\mathbf{E}_l^{h,p})| \\ &= C_1 |a(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l) - a(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p})| \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= C_1 |\tilde{a}(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l) - \tilde{a}(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p}) + u(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l) - u(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p})|, \quad (5.11)$$

wobei $C_1 := (2k_0\eta_0)^{-1}$. Mit der Definition (3.75) des Randterms am Tor und der Aufspaltung der elektrischen Feldstärke in (3.72) bzw. (3.91) ergibt sich unter Verwendung der Modenorthogonalität (3.62) und der Näherung

$$u(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p}) \approx -\delta_{kl}, \quad (5.12)$$

dass

$$u(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l) - u(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p}) = -\delta_{kl} + \delta_{kl} = 0. \quad (5.13)$$

Damit folgt für (5.11)

$$|f_k(\mathbf{E}_l) - f_k(\mathbf{E}_l^{h,p})| = C_1 |\tilde{a}(\mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)|, \quad (5.14)$$

mit $\Delta \mathbf{E}_l := \mathbf{E}_l - \mathbf{E}_l^{h,p}$. Ausnutzen der Galerkin-Orthogonalität

$$a(\mathbf{E}_l - \mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_k^{h,p}) = 0 \quad (5.15)$$

liefert bei Addition der rechten Seite von (5.14) mit Null und unter Verwendung der Symmetrie der Bilinearform den Ausdruck

$$|\Delta S_{kl}| = C_1 |\tilde{a}(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)|. \quad (5.16)$$

Einsetzen der Definition (3.69) für $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ ergibt

$$|\Delta S_{kl}| = C_1 |S(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l) - k_0^2 T_\varepsilon(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)| \quad (5.17)$$

$$\leq C_1 (|S(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)| + k_0^2 |T_\varepsilon(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)|) \quad (5.18)$$

$$\leq C_1 \max(k_0^2, 1) (S(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l) + T_\varepsilon(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)) \quad (5.19)$$

$$= C_1 \max(k_0^2, 1) (\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)}. \quad (5.20)$$

Mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung kann eine Abschätzung gegenüber der $\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ -Norm getroffen werden, und es gilt

$$(\Delta \mathbf{E}_k, \Delta \mathbf{E}_l)_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} \leq \|\Delta \mathbf{E}_k\|_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} \|\Delta \mathbf{E}_l\|_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)}. \quad (5.21)$$

Anwenden von (5.21) auf (5.20) und Einsetzen der Ungleichung (5.1) liefert die Abschätzung für den Fehler in Streuparametern

$$|\Delta S_{kl}| \leq C_2 h^{2 \min\{p, r\}} \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)}^2, \quad (5.22)$$

mit $C_2 := C^2 C_1 \max(k_0^2, 1)$.

Die Abschätzungen (5.1) und (5.22) können unter Berücksichtigung, dass die Anzahl der Freiheitsgrade N der Diskretisierung proportional zu $1/h^3$ ist, wie folgt ausgedrückt werden

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^{h,p}\|_{\mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)} \leq C N^{-\frac{1}{3} \min\{p, r\}} \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)} \quad (5.23)$$

$$|\Delta S_{kl}| \leq C_2 N^{-\frac{2}{3} \min\{p, r\}} \|\mathbf{E}\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)}^2. \quad (5.24)$$

Die Konvergenz des Fehlers zwischen exakter und approximierter Lösung ist damit beschränkt durch die Ordnung p der Ansatzfunktionen und durch die Regularität r der Lösung.

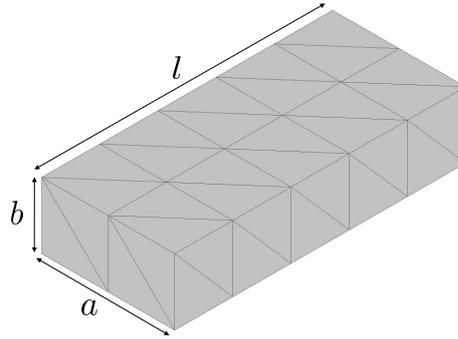


Abbildung 5.1: WR90 Rechteck-Hohlleiter. Schematische Darstellung der Struktur. Abmessungen: $a = 22.86$ mm, $b = 11.43$ mm und $l = 50$ mm. Die relative Permittivität beträgt $\varepsilon_r = 1$. Die relative Permeabilität beträgt $\mu_r = 1$.

Tabelle 5.1: WR90 Rechteck-Hohlleiter. Berechnete und prognostizierte Konvergenzraten.

Ordnung p	Konvergenzrate in h	
	Berechnet	Prognostiziert
1	0,6549	$2/3$
2	1,3678	$4/3$
3	2,0215	2
4	2,6442	$8/3$

5.1.1 Konvergenzraten am Beispiel glatter Felder

Im Folgenden wird der in Abbildung 5.1 gezeigte Rechteck-Hohlleiter mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ betrachtet. Dieser wird bei der Frequenz $f = 10$ GHz betrieben und über zwei Tore, die sich an dessen vorderer und rückwärtigen Querschnittsfläche befinden, gespeist. Da für die exakte Lösung \mathbf{E} des Problems 3.4 der betrachteten Geometrie gilt, dass $\mathbf{E} \in C_0^\infty(\Omega)$ ist, kann unter Verwendung homogener h - und p -Verfeinerung des entsprechenden FE-Problems 3.6 die in (5.22) gezeigte Konvergenz von $\mathcal{O}(h^{2p})$ bezüglich des Approximationsfehlers in den Streuparametern validiert werden. Abbildung 5.2 zeigt die berechneten Konvergenzkurven für die in dieser Arbeit verwendeten Ansatzfunktionen des $\mathcal{W}^{h,p}$ für verschiedene Ordnungen p . Die aus Abbildung 5.2 erhaltenen Konvergenzraten sind in Tabelle 5.1 aufgeführt und liefern eine gute Übereinstimmung mit den prognostizierten Konvergenzraten aus (5.22). Neben den Konvergenzraten bezüglich der homogenen h -Verfeinerung ist in Abbildung 5.2 ebenfalls angedeutet zu erkennen, dass die Konvergenz bezüglich der homogenen p -Verfeinerung wesentlich höher ist als die der homogenen h -Verfeinerung. Die p -Konvergenz ist dabei einzig durch die Regularität der exakten Lösung beschränkt [Dem07, S. 87ff] und ist damit für hinreichend glatte Lösungen das Mittel der Wahl.

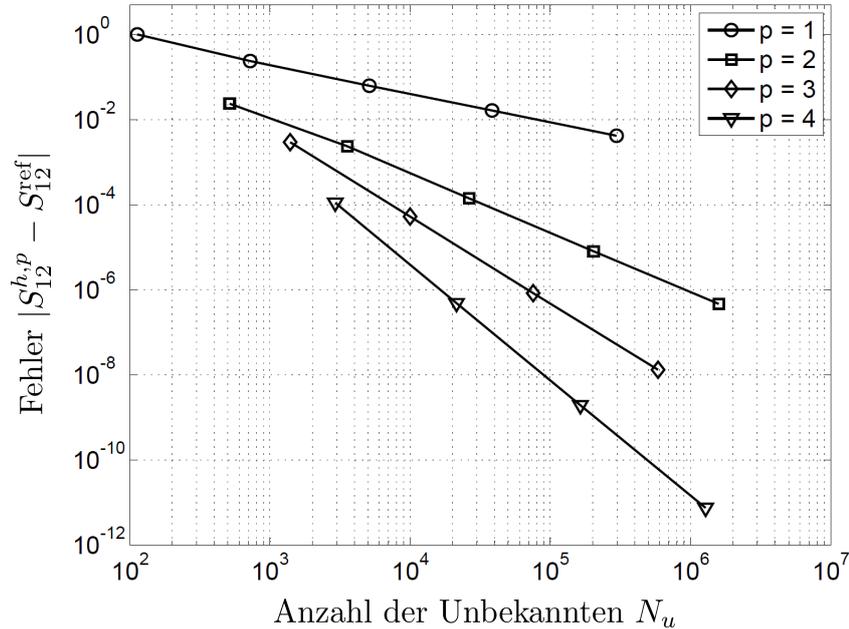


Abbildung 5.2: Konvergenz der FE-Methode für $\mathbf{E}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ am Beispiel eines Rechteck-Hohlleiters mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ ausgedrückt in dem Streuparameter S_{12} . Als Referenz dient die analytische Lösung des zugrunde liegenden Problems.

Tabelle 5.2: Gekrümmter Rechteck-Hohlleiter. Berechnete Konvergenzraten bei homogener h -Verfeinerung.

Ordnung p	Konvergenzrate in h
1	0,3918
2	0,4377
3	0,5188
4	0,5045

5.1.2 Konvergenzraten am Beispiel singularer Felder

Betrachtet wird der in Abbildung 5.3 dargestellte, um 90° gekrümmte Rechteck-Hohlleiter. Dieser wird an den beiden Querschnittsflächen über zwei Tore bei der Frequenz $f = 10$ GHz angeregt. Als Referenzlösung wird die FE-Lösung des äquivalenten zweidimensionalen E-Ebenen-Problems, das mithilfe einer starken h -Verfeinerung und für die Ordnung $p = 3$ berechnet wurde, herangezogen [KW90]. Abbildung 5.4 zeigt die berechneten Konvergenzkurven. Hierbei ist zu erkennen, dass die homogene h -Verfeinerung für verschiedene Ordnungen p der Ansatzfunktionen näherungsweise dieselben Konvergenzraten liefert. Diese sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Die Konvergenz ist damit nicht mehr abhängig von der Ordnung p der Ansatzfunktionen, sondern wird bestimmt durch die Singularität im Feldgebiet. Im Hinblick

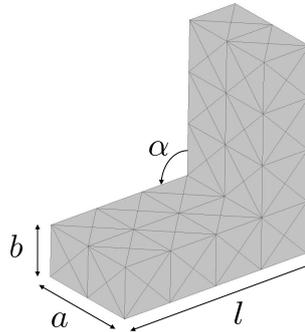


Abbildung 5.3: Gekrümmter Rechteck-Hohlleiter. Schematische Darstellung der Struktur. Abmessungen: $a = 22,86$ mm, $b = 11,43$ mm, $l = 45,72$ mm und $\alpha = 90^\circ$. Die relative Permittivität beträgt $\varepsilon_r = 1$. Die relative Permeabilität beträgt $\mu_r = 1$.

auf die Ergebnisse in Abschnitt 5.1.1 bedeutet dies, dass der Nutzen den Elemente höherer Ordnung mit sich bringen bei Problemen, die in nicht-regulären Lösungen resultieren, verloren geht.

Einen Ausweg liefern hierfür Problem angepasste Netze, die den Einfluss der Regularität der Lösung auf die Konvergenzrate eliminieren [BKP79] und es damit ermöglichen die Konvergenzraten wiederherzustellen, die für reguläre Lösungen erzielt werden. Eine Möglichkeit, solche Problem angepasste Netze zu erzeugen, liefern die sogenannten *geometrisch abgestuften Netze* [SB91, S. 65ff], [AN98]. Diese benötigen allerdings nicht nur a priori Wissen über die Lage der Singularitäten im Feldgebiet, sondern ebenfalls über die Natur der Singularitäten, was bei realen Problemstellung zumeist nicht gegeben ist. Eine weitere Möglichkeit Problem angepasste Netze zu erzeugen ist durch die *h*-adaptiven Verfahren gegeben, die Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind und deren prinzipieller Ablauf in Algorithmus 5.1 dargestellt ist. In den folgenden Unterkapiteln wird ein lokaler a posteriori Fehlerindikator vorgestellt, der für die Realisierung solcher *h*-adaptiver Verfahren zur Erzeugung Problem angepasster Netze essenziell ist. Die konkrete Verwirklichung eines *h*-adaptiven FE-Verfahrens ist in dem letzten der beiden Unterkapiteln besprochen.

5.2 Formulierung eines zielorientierten a posteriori Fehlerindikators für Streuparameter

Um ein adaptives FE-Verfahren entwickeln zu können, sind lokale Fehlerindikatoren bzw. lokale Fehlerschätzer unentbehrlich. Im Kontext der *h*-adaptiven FE-Verfahren weisen sie den Elementen des FE-Netzes Schätzungen des Beitrags zum Approximationsfehler der FE-Lösung des gegebenen Problems zu. Je nach Formulierung des Fehlerschätzers können bspw. Kanten, Flächen oder Tetraedern solche lokalen

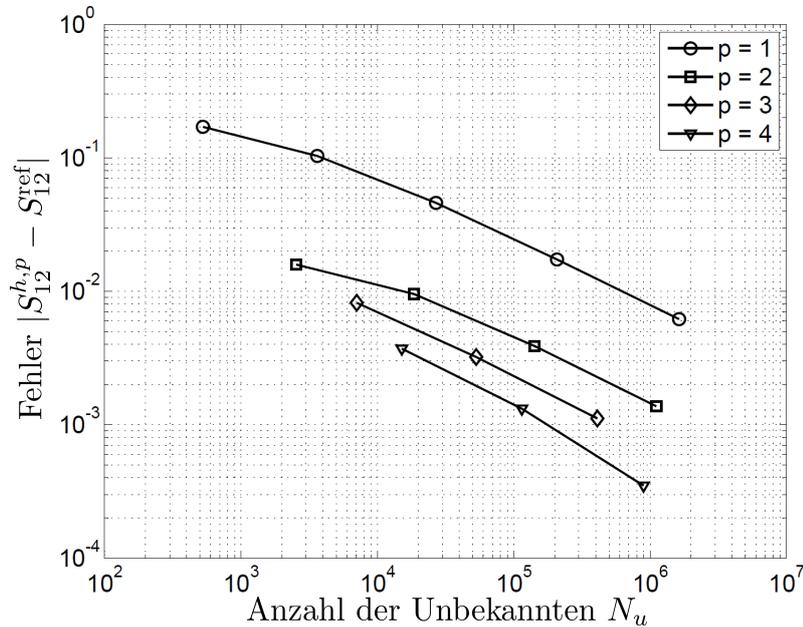


Abbildung 5.4: Konvergenz der FE-Methode für $\mathbf{E}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ am Beispiel eines gekrümmten Rechteck-Hohlleiters mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ ausgedrückt in dem Streuparameter S_{12} . Als Referenz dient die zweidimensionale, äquivalente E-Ebenen-Lösung des zugrunde liegenden Problems.

Schätzwerte zugewiesen werden. In der vorliegenden Arbeit wird ein Fehlerindikator vorgestellt, der die lokalen Schätzungen des Fehlerbeitrags ausschließlich den Tetraedern der Triangulierung zuweist. Da für die Berechnung dieses lokalen Fehlerindikators eine bereits numerisch berechnete Lösung benötigt wird, zählt dieser zu den lokalen *a posteriori* Fehlerschätzern.

Unter ihnen kann zwischen den *expliziten* *a posteriori* Fehlerschätzern und den *impliziten* *a posteriori* Fehlerschätzern unterschieden werden. Hierbei verwenden die expliziten *a posteriori* Fehlerschätzer direkt die Residuen der aktuellen Approximation [BR79, KGZB83], während bei impliziten *a posteriori* Fehlerschätzern die Residuen indirekt bei der Schätzung des Fehlers durch Lösen kleiner linearer Gleichungssysteme verwenden [BR78a, BR78b]. Für elliptische Randwertprobleme können in diesen zwei Fällen beidseitige Schranken des Fehlers angegeben werden [Ver94, Ver89]. Bei den expliziten Fehlerschätzern tragen dabei typischerweise mehrere Arten von Residuen, skaliert durch Konstanten, die von der Netzweite h abhängig sind, zu dem Schätzwert bei. Diese sind in der Regel jedoch unbekannt und müssen ebenfalls geschätzt werden. Dies führt bei dieser Art von Fehlerschätzern oftmals zu unscharfen, pessimistischen Schätzungen [AO00, S. 43f]. Diesen Nachteil versuchen die impliziten Fehlerschätzer zu umgehen, indem lokale Hilfsprobleme konstruiert werden, die auf kleine Gleichungssysteme führen, die es zu lösen gilt. Diese führen oft auf lokale Neumann-Probleme, deren Schwierigkeit darin besteht, die Randbe-

dingungen in Übereinstimmung mit den inneren Residuen zu formulieren um ein gut gestelltes Problem zu erhalten [AO00, S. 111ff]. Einen Ansatz hierfür liefern unter anderem sogenannte *Equilibrated Residual* Methoden [Kel84], die den Fluss über den Elementrand mit dem inneren Residuum abgleichen. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die lokalen Probleme über einen Raum angepasster Funktionen zu formulieren, damit das Problem gut gestellt ist [Ver89], [AO00, S. 52f]. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise ist die starke Abhängigkeit der Qualität des Fehlerschätzers von diesen angepassten Funktionen [Ain96].

Ein wichtiger Vertreter der impliziten Fehlerschätzer sind die sogenannten *zielorientierten a posteriori* Fehlerschätzer. Diese formulieren den Fehler dabei in einer Größe, die für das zugrunde liegende Problem von speziellem Interesse ist [BR01]. Dies ermöglicht es adaptive Verfahren zu konstruieren, die erzielen, dass die Genauigkeit direkt in dieser Zielgröße verbessert wird. Solche zielorientierten Ansätze für adaptive Verfahren resultieren meist in einer starken Reduzierung des rechnerischen Aufwands, da nur jene Merkmale in der Lösung, die die Zielgröße stark beeinflussen, aufgelöst werden. Im Folgenden wird daher ein zielorientierter, impliziter a posteriori Fehlerschätzer vorgestellt, der es ermöglicht den Fehler direkt in den Streuparametern zu schätzen. Hierbei wird, im Hinblick auf das h -adaptive Verfahren, der Fehlerschätzer in den Streuparametern bezüglich der Verfeinerung in h ausgedrückt. Der im Folgenden vorgestellte Fehlerschätzer orientiert sich an den Ausführungen in [IHDE06]. Der wesentliche Unterschied zu [IHDE06] besteht darin, dass neben der Möglichkeit höhere Moden bei der Anregung zu berücksichtigen, der Fehlerschätzer hängende Unbekannte unterstützt, und damit im Rahmen der h -Verfeinerung im adaptiven Prozess eine untere Schranke der Elementqualität gesichert bleibt.

5.2.1 Darstellung des Fehlers in der Zielgröße

Betrachtet wird die FE-Formulierung aus Problem 3.6 mit der regulären Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω . Der Rand $\partial\Omega$ des Feldgebiets ist in die disjunkten Teilrändern Γ_E , Γ_H und Γ_P mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_P$ unterteilt. Weiterhin werden homogene Randbedingungen auf dem Dirichlet-Rand Γ_E und dem Neumann-Rand Γ_H angenommen. Die Anregung erfolgt wie in Abschnitt 3.4 beschrieben über den Tor-Rand Γ_P . Der FE-Approximationsfehler ΔS_{kl} in den Streuparametern kann mithilfe der Lösung $\mathbf{E}_l \in \mathcal{H}(\text{rot}; \Omega)$ des Problems 3.5 und der entsprechenden FE-Lösung $\mathbf{E}_l^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ dargestellt werden.

$$\Delta S_{kl} = S_{kl}^{h,p} - S_{kl} \tag{5.25}$$

$$= f_k(\mathbf{E}_l^{h,p}) - f_k(\mathbf{E}_l) \tag{5.26}$$

$$= f_k(\mathbf{E}_l^{h,p} - \mathbf{E}_l). \tag{5.27}$$

Nach Gleichung (3.81) ergibt sich unter Verwendung der Symmetrie und Linearität von $a(\cdot, \cdot)$ mit der Lösung \mathbf{E}_k

$$\Delta S_{kl} = Ca(\mathbf{E}_k, \mathbf{E}_l^{h,p} - \mathbf{E}_l) \quad (5.28)$$

$$= Ca(\mathbf{E}_l^{h,p} - \mathbf{E}_l, \mathbf{E}_k) \quad (5.29)$$

$$= C(a(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_k) - a(\mathbf{E}_l, \mathbf{E}_k)), \quad (5.30)$$

wobei $C := (2jk_0\eta_0)^{-1}$ ist. Mithilfe der schwachen Formulierung in Gleichung (3.81) und der FE-Formulierung in (3.96) ergibt sich mit $\mathbf{w}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ der Fehler in den Streuparametern zu

$$\Delta S_{kl} = Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_k) - f_l(\mathbf{E}_k) \quad (5.31)$$

$$= Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_k) - f_l(\mathbf{E}_k) + Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{w}^{h,p}) - f_l(\mathbf{w}^{h,p}) \quad (5.32)$$

$$= Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_k - \mathbf{w}^{h,p}) - f_l(\mathbf{E}_k - \mathbf{w}^{h,p}). \quad (5.33)$$

Da die Lösung \mathbf{E}_k des dualen schwachen Problems im Allgemeinen nicht bekannt ist, gilt dies auch für den exakten Fehler in (5.33). Eine Approximation des exakten Fehlers in den Streuparametern kann jedoch durch Hinzuziehen einer approximierten dualen Lösung $\tilde{\mathbf{E}}_k$ gewonnen werden:

$$\Delta \tilde{S}_{kl} = Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \tilde{\mathbf{E}}_k - \mathbf{w}^{h,p}) - f_l(\tilde{\mathbf{E}}_k - \mathbf{w}^{h,p}). \quad (5.34)$$

Diese Vorgehensweise, den Fehler in der Zielgröße durch Hinzuziehen der dualen Lösung auszudrücken, entspricht der in [BR01, BR95] vorgestellten *Dual Weighted Residual Method*. Liegt die approximierte duale Lösung in $\mathcal{W}^{h,p}$, so liefert die rechte Seite aus (5.34) wegen (5.31) keinen Beitrag zu dem Fehler $\Delta \tilde{S}_{kl}$. Daher ist es sinnvoll zur Darstellung der dualen Lösung einen Funktionenraum $\tilde{\mathcal{W}}$, mit $\mathcal{W}^{h,p} \subset \tilde{\mathcal{W}}$, höherer Ordnung zu verwenden, z. B. $\mathcal{W}^{h/2,p}$, wobei jedoch zu beachten ist, dass damit in aller Regel die Berechnung der dualen Lösung, und folglich auch die Berechnung des Fehlers aus (5.34), zu einem hohen Rechenaufwand führt. Um dies zu umgehen, besteht nun die Idee darin nicht die duale Lösung selbst, sondern die Korrektur $\tilde{\mathbf{E}}_k^c := \tilde{\mathbf{E}}_k - \mathbf{E}_k^{h,p}$ zu approximieren. Mit der Eigenschaft, dass für die Anteile von $\tilde{\mathbf{E}}_k$, die in $\mathcal{W}^{h,p}$ liegen, der Fehler $\Delta \tilde{S}_{kl}$ in (5.34) unverändert bleibt und unter Verwendung der FE-Formulierung (3.96) gilt für $\tilde{\mathbf{E}}_k \in \tilde{\mathcal{W}}$

$$a(\tilde{\mathbf{E}}_k, \mathbf{w}^c) = b_k(\mathbf{w}^c) \quad \forall \mathbf{w}^c \in \tilde{\mathcal{W}} \setminus \mathcal{W}^{h,p}, \quad (5.35)$$

mit $b_k(\mathbf{w}^c) = 2jk_0\eta_0 f_k(\mathbf{w}^c)$. Damit kann für die Korrektur $\tilde{\mathbf{E}}_k^c$ das folgende Problem formuliert werden:

Problem 5.1. *Finde $\tilde{\mathbf{E}}_k^c \in \tilde{\mathcal{W}} \setminus \mathcal{W}^{h,p}$ so, dass gilt*

$$a(\tilde{\mathbf{E}}_k^c, \mathbf{w}^c) = b_k(\mathbf{w}^c) - a(\mathbf{E}_k^{h,p}, \mathbf{w}^c) \quad \forall \mathbf{w}^c \in \tilde{\mathcal{W}} \setminus \mathcal{W}^{h,p}, \quad (5.36)$$

mit $\mathbf{E}_k^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$.

Die approximierte duale Lösung kann damit zu $\tilde{\mathbf{E}}_k := \mathbf{E}_k^{h,p} + \tilde{\mathbf{E}}_k^c$ notiert werden und liefert mit (5.34) einen Fehlerindikator bezüglich der Zielgröße in Streuparametern:

$$\Delta \tilde{S}_{kl} = Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \tilde{\mathbf{E}}_k^c) - f_l(\tilde{\mathbf{E}}_k^c). \quad (5.37)$$

5.2.2 Herleitung der lokalen Formulierung des Fehlerindikators

Betrachtet wird die FE-Formulierung aus Problem 3.6 mit der regulären Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ des Feldgebiets Ω . Der Rand $\partial\Omega$ des Feldgebiets ist in die disjunkten Teilrändern Γ_E , Γ_H und Γ_P mit $\partial\Omega = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_P$ unterteilt. Weiterhin werden homogene Randbedingungen auf dem Dirichlet-Rand Γ_E und dem Neumann-Rand Γ_H angenommen. Die Anregung erfolgt wie in Abschnitt 3.4 beschrieben über den Tor-Rand Γ_P . Um eine lokale Formulierung des zielorientierten Fehlerindikators zu erhalten wird neben der Lösung $\mathbf{E}_l^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ des Originalproblems 3.6 jene Lösung $\mathbf{E}_{l,T}^{h/2,p}$ betrachtet, die sich durch die in Kapitel 4 beschriebene hierarchische h -Verfeinerung des Elements T der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ ergibt. Die Verfeinerung des Tetraeders T bedingt dabei, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, die Verfeinerung aller Kanten-Nachbarn dieses Elements, sowie die Einführung hängender Unbekannte an den Elementgrenzen zu den unverfeinerten Elementen, um die Stetigkeitsbedingung an diesen Stellen zu erhalten. Die sich dabei ergebende Triangulierung $\mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$ ist somit inkonsistent. Die Änderung in den Streuparametern bezüglich dieser beiden Lösungen kann im Hinblick auf die Ausführungen des vorhergehenden Unterkapitels wie folgt ausgedrückt werden

$$\Delta\tilde{S}_{kl}^T = f_k(\mathbf{E}_l^{h,p}) - f_k(\mathbf{E}_{l,T}^{h/2,p}). \quad (5.38)$$

Damit ergibt sich in analoger Weise der *lokale Fehlerindikator* zu

$$\Delta\tilde{S}_{kl}^T = Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \mathbf{E}_{k,T}^{h/2,p} - \mathbf{w}^{h,p}) - f_l(\mathbf{E}_{k,T}^{h/2,p} - \mathbf{w}^{h,p}) \quad \forall \mathbf{w}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}, \quad (5.39)$$

wobei $C := (2jk_0\eta_0)^{-1}$. Bei Betrachtung der rechten Seite von Gleichung (5.39) liefert die Wahl $\mathbf{w}^{h,p} = \mathbf{E}_k^{h,p}$

$$\Delta\tilde{S}_{kl}^T = Ca(\mathbf{E}_l^{h,p}, \Delta\mathbf{E}_{k,T}) - f_l(\Delta\mathbf{E}_{k,T}), \quad (5.40)$$

mit $\Delta\mathbf{E}_{k,T} := \mathbf{E}_{k,T}^{h/2,p} - \mathbf{E}_k^{h,p}$.

Da in Anbetracht des h -adaptiven FE-Verfahrens für jedes Tetraeder T der Triangulierung der Fehlerindikator $\Delta\tilde{S}_{kl}^T$ bereitgestellt werden muss, ist deren Berechnung über die dualen Lösungen infolge der Verfeinerung der jeweiligen Elemente in aller Regel äußerst aufwendig. Um dennoch eine Aussage über den lokalen Fehler nach (5.40) zu erhalten, wird im Folgenden ein lokales Hilfsproblem hergeleitet, das eine Approximation $\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ der Korrektur $\Delta\mathbf{E}_{k,T}$ erlaubt, die mit geringem numerischen Aufwand berechnet werden kann. Hierzu wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass sich bei Verfeinerung des Elements T die Änderung in der Lösung lediglich auf die Freiheitsgrade dieses Elements auswirkt und die Lösung im restlichen Feldgebiet unverändert bleibt. Dies bedeutet, dass all jene Freiheitsgrade der Triangulierung $\mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$, die nicht mit den Kanten, Flächen und Tetraedern der Zerlegung T_Σ des betrachteten Tetraeders T assoziiert werden können, keinen Beitrag zur

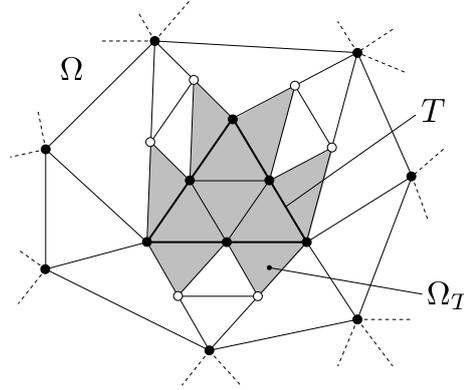


Abbildung 5.5: Schematische Darstellung der Lokalität des wirksamen Gebiets für das Tetraeder T der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$.

Approximation $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ der Korrektur liefern. Damit kann das Feldgebiet Ω auf das betrachtete Tetraeder T selbst, so wie dessen unmittelbare Nachbarschaft beschränkt werden: Das Gebiet Ω_T beschreibt die Vereinigung aller Tetraeder $T' \in \mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$, die mit der Zerlegung $T_\Sigma \subset \mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$ des betrachteten Tetraeders T zumindest eine Kante gemein haben, und es gilt

$$\Omega_T := \bigcup_{\mathcal{E}(T_\Sigma) \cap \mathcal{E}(T') \neq \emptyset} T'. \quad (5.41)$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{E}(T')$ die dem Tetraeder T' zuzuordnenden Kanten, und entsprechend meint $\mathcal{E}(T_\Sigma)$ die Menge jener Kanten, die den Tetraedern der Zerlegung T_Σ zugeordnet werden können. Abbildung 5.5 zeigt schematisch das für ein Tetraeder wirksame Gebiet $\Omega_T \subset \Omega$ einer zugrunde liegenden Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$. Um nun einen Ausdruck für die Approximation $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ herzuleiten, wird ausgehend von dem für das Feldgebiet Ω_T formulierte Problem 3.6

$$a_T(\mathbf{E}_{k,T}^{h/2,p}, \mathbf{w}^{h/2,p}) = b_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) \quad \forall \mathbf{w}^{h/2,p} \in \mathcal{W}^{h/2,p}, \quad (5.42)$$

ein lokales Hilfsproblem hergeleitet. Der Index T bezeichnet hierbei die Assoziation von $a_T(\cdot, \cdot)$ und $b_{k,T}(\cdot)$ mit dem für das Tetraeder T relevante Gebiet Ω_T . Mit der Definition der Approximation der Korrektur

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T} := \mathbf{E}_{k,T}^{h/2,p} - P_h^{h/2}(\mathbf{E}_k^{h,p}), \quad (5.43)$$

wobei $P_h^{h/2}(\mathbf{E}_k^{h,p})$ jene Approximierte in $\mathcal{W}^{h/2,p}$ bezeichnet, die durch Prolongation der Koeffizienten der bekannten Lösung $\mathbf{E}_k^{h,p}$ in $\mathcal{W}^{h,p}$ auf das (inkonsistent) verfeinerte Netz nach (4.126) gewonnen wird, ergibt sich für das lokale Problem in (5.42) bei Subtraktion des Ausdrucks $a_T(P_h^{h/2}(\mathbf{E}_k^{h,p}), \mathbf{w}^{h/2,p})$ auf beiden Seiten

$$a_T(\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}, \mathbf{w}^{h/2,p}) = b_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) - a_T(P_h^{h/2}(\mathbf{E}_k^{h,p}), \mathbf{w}^{h/2,p}) \quad \forall \mathbf{w}^{h/2,p} \in \mathcal{W}^{h/2,p}. \quad (5.44)$$

Damit kann für die Approximation $\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ von $\Delta\mathbf{E}_{k,T}$ das folgende sogenannte *lokale Dirichlet-Hilfsproblem* formuliert werden.

Problem 5.2 (Lokales Dirichlet-Hilfsproblem). *Finde $\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T} \in \mathcal{W}^{h/2,p} \setminus \mathcal{W}^{h,p}$ so, dass gilt*

$$a_T(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}, \mathbf{w}^{h/2,p}) = r_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) \quad \text{in } \Omega_T, \quad (5.45)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T} \times \hat{\mathbf{n}}) = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D = \partial\Omega_T \setminus \Gamma_H, \quad (5.46)$$

für alle $\mathbf{w}^{h/2,p} \in \mathcal{W}^{h/2,p}$, mit

$$r_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) = b_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) - a_T(P_h^{h/2}(\mathbf{E}_k^{h,p}), \mathbf{w}^{h/2,p}). \quad (5.47)$$

Der Rand Γ_D ist nach (5.46) ein homogener Dirichlet-Rand. Mit Kenntnis der Lösung $\mathbf{E}_l^{h,p}$ des Ausgangsproblems und unter Verwendung der Lösung $\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ des lokalen Hilfsproblems lässt sich nach (5.40) und (5.47) der lokale Fehlerindikator $\Delta\tilde{S}_{kl}^T$ für das Tetraeder T der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ wie folgt notieren

$$\Delta\tilde{S}_{kl}^T = C a_T(P_h^{h/2}(\mathbf{E}_l^{h,p}), \Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}) - f_{l,T}(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}) \quad (5.48)$$

$$= -C r_{l,T}(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}). \quad (5.49)$$

Physikalische Interpretation der Anregung des lokalen Hilfsproblems

Um eine Interpretation der Anregung $r_{l,T}(\mathbf{w}^{h/2,p})$ des lokalen Hilfsproblems aus Problem 5.2 zu erhalten, wird im Folgenden ein inneres Tetraeder T aus Ω mit $\partial\Omega_T \cap \partial\Omega = \emptyset$ betrachtet. Nach (5.47) und der Definition der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ nach (3.69) ergibt sich für die Anregung

$$r_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) = a_T(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}, \mathbf{w}^{h/2,p}) \quad (5.50)$$

$$= S(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}, \mathbf{w}^{h/2,p}) - k_0^2 T_\varepsilon(\Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T}, \mathbf{w}^{h/2,p}). \quad (5.51)$$

Die Verwendung der Definitionen (3.46), (3.48) und (3.44) liefert unter Berücksichtigung der Aufspaltung des Gebiets Ω_T in Tetraeder T' der aktuellen Triangulierung:

$$r_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) = \sum_{T' \in \Omega_T} \int_{T'} \nabla \times \mathbf{w}^{h/2,p} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T} \, d\Omega - k_0^2 \sum_{T' \in \Omega_T} \int_{T'} \mathbf{w}^{h/2,p} \cdot \varepsilon'_r \Delta\tilde{\mathbf{E}}_{k,T} \, d\Omega. \quad (5.52)$$

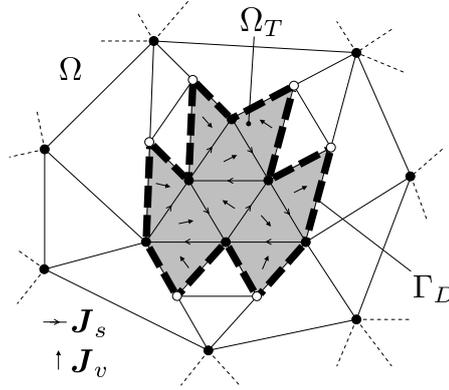


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung der Anregung des lokalen Dirichlet-Hilfsproblems.

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert für den ersten Term der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
 \sum_{T' \in \Omega_T} \int_{T'} \nabla \times \mathbf{w}^{h/2,p} \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T} d\Omega \\
 = \sum_{T' \in \Omega_T} \int_{T'} \mathbf{w}^{h/2,p} \cdot \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T} d\Omega \\
 + \sum_{T' \in \Omega_T} \oint_{\partial T'} (\mu_r^{-1} \nabla \times \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}) \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}^{h/2,p} d\Gamma. \quad (5.53)
 \end{aligned}$$

Einsetzen von (5.53) in (5.52) und unter Berücksichtigung, dass für jede innere Dreiecksfläche D in Ω_T beide angrenzenden Tetraeder einen Beitrag liefern, ergibt sich die folgende Unterteilung der Anregung

$$r_{k,T}(\mathbf{w}^{h/2,p}) = \sum_{T' \in \Omega_T} r_{T'}^v + \sum_{D \in \Omega_T} r_D^s, \quad (5.54)$$

$$r_{T'}^v = \int_{T'} \mathbf{w}^{h/2,p} \cdot \underbrace{(\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T} - k_0^2 \varepsilon'_r \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T})}_{=j\omega\mu_0 \mathbf{J}_v} d\Omega, \quad (5.55)$$

$$r_D^s = \int_D \underbrace{[\mu_r^{-1} \nabla \times \Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}]_D}_{-j\omega\mu_0 [\Delta \tilde{\mathbf{H}}_{k,T}]_D \times \hat{\mathbf{n}} = j\omega\mu_0 \mathbf{J}_s} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{w}^{h/2,p} d\Gamma. \quad (5.56)$$

Hierbei stellt der Anteil $r_{T'}^v$ nach (2.6) die die Korrektur $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ anregenden Fehler-volumenstromdichten \mathbf{J}_v im Inneren der Tetraeder dar. Der Anteil r_D^s bedeutet entsprechend die die Korrektur anregenden Fehlerflächenstromdichten \mathbf{J}_s , wobei $[\cdot]_D$ den Sprung über die Fläche D bezeichnet. Abbildung 5.6 verdeutlicht schematisch die Anregung des lokalen Dirichlet-Hilfsproblems.

Realisierung des lokalen Fehlerindikators

Betrachtet wird Problem 3.6, für das die lokalen Fehlerindikatoren nach (5.49) berechnet werden sollen. Da im Hinblick auf das Hilfsproblem aus Problem 5.2 die Beiträge aller Kantennachbarn der Zerlegung des betrachteten Tetraeders in die Berechnung der Korrektur $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ eingehen, wird im Folgenden das globale Problem auf dem einmal vollständig verfeinerten FE-Netz $\mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$ betrachtet

$$a(\mathbf{E}_k^{h/2,p}, \mathbf{w}^{h/2,p}) = b_k(\mathbf{w}^{h/2,p}) \quad \forall \mathbf{w}^{h/2,p} \in \mathcal{W}^{h/2,p}, \quad (5.57)$$

mit $\mathbf{E}_k^{h/2,p} \in \mathcal{W}^{h/2,p}$. Die Assemblierung dieses Systems nach (3.106) bezüglich der Anregung mit dem k -ten Mode, dargestellt in Matrixschreibweise, führt auf

$$\mathbf{A}^{h/2,p} \mathbf{e}_k^{h/2,p} = \mathbf{b}_k^{h/2,p}, \quad (5.58)$$

mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{e}_k^{h/2,p}$ des FE-Ansatzes $\mathbf{E}_k^{h/2,p}$. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit beträgt die maximale Dimension der Systemmatrix aus (5.58), welche für die Ordnung $p = 4$ erreicht wird, unter Berücksichtigung des verwendeten Funktionenraums nach (3.30)

$$\dim(\mathbf{A}^{h/2,p=4}) = 484. \quad (5.59)$$

Damit kann das globale Residuum mithilfe der Lösung $\mathbf{E}_k^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ des Ausgangsproblems mit der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ nach (5.47) zu

$$\mathbf{r}_k^{h/2,p} = \mathbf{b}_k^{h/2,p} - \mathbf{A}^{h/2,p} \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{e}_k^{h,p} \quad (5.60)$$

angegeben werden, wobei $\mathbf{e}_k^{h,p}$ den zur FE-Lösung $\mathbf{E}_k^{h,p}$ korrespondierenden Koeffizientenvektor bezeichnet. Die Matrix $\mathbf{P}_h^{h/2}$ meint den Prolongationsoperator nach (4.126) zur Darstellung der Koeffizienten $\mathbf{e}_k^{h,p}$ der Lösung des Ausgangsnetzes auf dem verfeinerten Netz $\mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$. Dabei ist zu beachten, dass die Modenkoeffizienten der Anregung des Ausgangsproblems nach den Ausführungen in Abschnitt 3.4.2, auf das verfeinerte Netz $\mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$ prolongiert werden um die Vergleichbarkeit der beiden Lösungen zur korrekten Approximation der Korrektur $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ zu gewährleisten. Die prolongierten Modenkoeffizienten stellen im Hinblick auf die verwendete Formulierung in Streuparametern aus (3.112) und der Berechnung des globalen Residuenvektors (5.60) eine natürliche Wahl der Modenkoeffizienten des verfeinerten Netzes dar, was im folgenden gezeigt wird.

Die Repräsentation der Unbekannten $\mathbf{x}_\Gamma^{h,p}$ am Tor-Rand Γ_P des Ausgangsnetzes auf dem verfeinerten Netz lässt sich durch den Prolongationsoperator $\mathbf{P}_h^{h/2}$ darstellen

$$\mathbf{x}_\Gamma^{h/2,p} = \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{x}_\Gamma^{h,p}. \quad (5.61)$$

Mithilfe der globalen Ansatzfunktionen am Tor-Rand Γ_P lässt sich die Restriktion der Tor-Unbekannten $\mathbf{x}_\Gamma^{h,p}$ unter Verwendung der Modenkoeffizienten $\mathbf{M}^{h,p}$ nach (3.108) des unverfeinerten Netzes ausdrücken und es gilt

$$\mathbf{x}_\Gamma^{h/2,p} = \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{M}^{h,p} \bar{\mathbf{x}}_\Gamma^{h,p}, \quad (5.62)$$

wobei $\bar{\mathbf{x}}_\Gamma^{h,p}$ die Unbekannten der globalen Ansatzfunktionen bezeichnet. Ein Vergleich mit der Restriktion der Unbekannten $\mathbf{x}_\Gamma^{h/2,p}$ am Tor-Rand des verfeinerten Netzes

$$\mathbf{x}_\Gamma^{h/2,p} = \mathbf{M}^{h/2,p} \bar{\mathbf{x}}_\Gamma^{h/2,p} \quad (5.63)$$

zeigt, dass für die Wahl

$$\mathbf{M}^{h/2,p} := \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{M}^{h,p} \quad (5.64)$$

die Unbekannten der globalen Ansatzfunktionen unverändert erhalten bleiben und damit die prolongierten Lösungen hinsichtlich des Residuenvektors (5.60) verträglich mit den Anregungen des verfeinerten Problems sind. Die Wahl (5.64) besitzt weiterhin den wesentlichen Vorteil, dass für die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Fehlerschätzung Anregungen mit Modensuperpositionen in einfacher Weise durch (5.60) berücksichtigt werden.

Das lokale Hilfsproblem wird mithilfe der entsprechenden Einträge der globalen Systemmatrix $\mathbf{A}^{h/2,p}$ und dem Residuenvektor \mathbf{r}_k , die dem Tetraeder T zuordenbar sind, wie folgt beschrieben:

$$\bar{\mathbf{A}}_T^{h/2} \Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} = \bar{\mathbf{r}}_{k,T}^{h/2,p}, \quad (5.65)$$

wobei $\Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T}$ den der Approximation der Korrektur $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ aus Problem 5.2 entsprechende Koeffizientenvektor darstellt. Die lokale Matrix $\bar{\mathbf{A}}_T^{h/2,p}$ enthält die Beiträge der Kanten-Nachbarn der Zerlegung T_Σ und entspricht daher nicht der Elementmatrix $\mathbf{A}_T^{h/2,p}$, die lediglich die Beiträge eines einzelnen Tetraeders zur globalen Systemmatrix $\mathbf{A}^{h/2,p}$ enthält. Der lokale Fehlerindikator aus (5.49) kann demzufolge mithilfe des lokalen Residuenvektors $\bar{\mathbf{r}}_{k,T}^{h/2,p}$ und der Lösung $\Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T}$ des lokalen Hilfsproblems berechnet werden:

$$\Delta \tilde{S}_{kl}^T = -\Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{l,T}^{h/2,p}. \quad (5.66)$$

Um eine Repräsentation des globalen Fehlers nach (5.37) zu erhalten, werden die Beiträge der einzelnen Tetraeder der lokalen Approximationen $\Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T}$ der Korrektur über alle Tetraeder der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ summiert

$$\Delta \tilde{S}_{kl} = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \mathbf{r}_{l,T}^{h/2,p}, \quad (5.67)$$

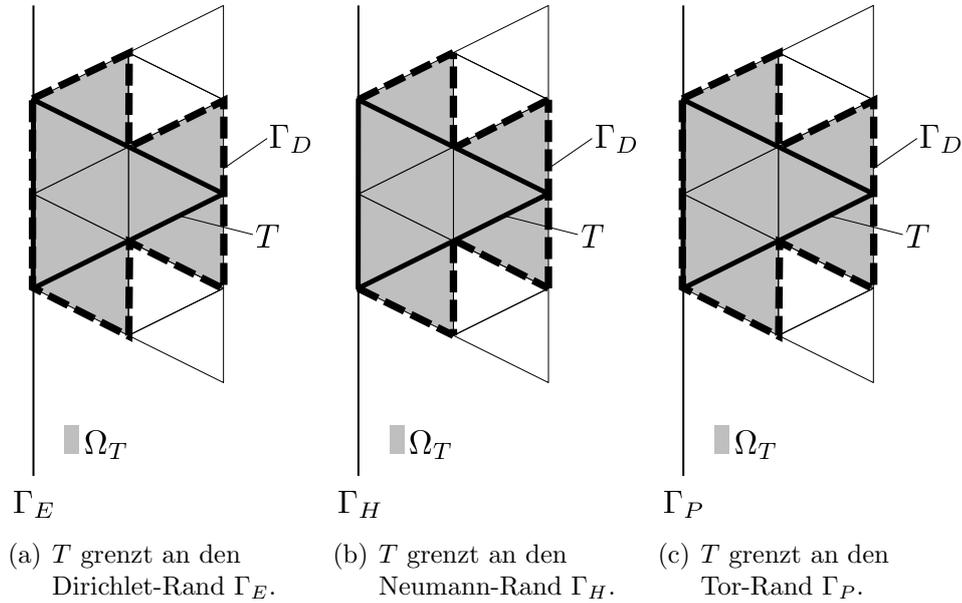


Abbildung 5.7: Eingeprägte Ränder des lokalen Hilfsproblems bezüglich verschiedener Ausgangskonstellationen des Tetraeders T im Ausgangsproblem.

Dabei ist $\mathbf{r}_{l,T}^{h/2,p}$ der Beitrag des Tetraeders T zu $\mathbf{r}_l^{h/2,p}$ aus (5.60). Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem lokalen Residuenvektor $\tilde{\mathbf{r}}_{l,T}^{h/2,p}$, der zudem die Beiträge benachbarter Tetraeder enthält.

Bei der Formulierung sind in Bezug auf das global gestellte Ausgangsproblem 3.6 drei wichtige Konstellationen für das im Hinblick auf das lokale Hilfsproblem betrachtete Tetraeder T der Triangulierung zu beachten, welche in Abbildung 5.7 schematisch dargestellt sind. Im ersten Fall grenzt dieses Tetraeder, wie in Abbildung 5.7(a) dargestellt, direkt an den Dirichlet-Rand Γ_E des Originalproblems. Da in diesem Fall die Tangentialkomponente des elektrischen Felds auf Γ_E explizit vorgegeben ist, wird für die Approximation $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ der Korrektur ein homogener Dirichlet-Rand für das lokale Hilfsproblem eingeprägt. Im zweiten Fall grenzt das Tetraeder, wie Abbildung 5.7(b) zeigt, direkt an den Neumann-Rand Γ_H des Originalproblems. Dieser Rand wird für das lokale Hilfsproblem bezüglich der Korrekturapproximation nicht gesondert behandelt und entspricht daher, wie im vorangegangenen Unterkapitel besprochen, einer Anregung der betrachteten Struktur durch eine Fehlerflächenstromdichte. Im letzten Fall grenzt das Tetraeder, wie in Abbildung 5.7(c) dargestellt, direkt an den Tor-Rand Γ_P . Da sich durch die Wahl (5.64) der Modenkoeffizienten des verfeinerten Problems die Unbekannten der globalen Ansatzfunktionen der Anregung eins-zu-eins übersetzen, wird für den Tor-Rand Γ_P ebenfalls ein homogener Dirichlet-Rand bezüglich der Korrekturapproximation $\Delta \tilde{\mathbf{E}}_{k,T}$ für das lokale Hilfsproblem eingeprägt. Das der lokale Fehlerindikator aus (5.66) dennoch hinreichend Informationen zur Verfeinerung am Tor-Rand Γ_P liefert wird anhand numerischer Beispiele im folgenden Unterkapitel belegt. Die algorithmische Umsetzung des Feh-

Algorithmus 5.2 Realisierung des impliziten a posteriori Fehlerindikators.

```

 $\mathbf{A}^{h,p} \mathbf{e}_k^{h,p} = \mathbf{b}_k^{h,p}$  // Berechne initiale Lösung
 $\mathcal{T}_h(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$  // Verfeinere Netz
 $\tilde{\mathbf{e}}_k^{h/2,p} = \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{e}_k^{h,p}$  // Prolongiere initiale Lösung auf das Feinnetz
 $\mathbf{M}^{h/2} = \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{M}^h$  // Prolongiere die globalen Ansatzfunktionen
 $\mathbf{A}^{h/2,p}, \mathbf{b}_k^{h/2,p}$  // Assembliere das verfeinerte Problem
 $\mathbf{r}_k^{h/2,p} = \mathbf{b}_k^{h/2,p} - \mathbf{A}^{h/2,p} \tilde{\mathbf{e}}_k^{h/2,p}$  // Berechne den Residuenvektor
for  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$  do
   $\bar{\mathbf{A}}_T^{h/2,p} \Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} = \bar{\mathbf{r}}_T^{h/2,p}$  // Löse lokales Hilfsproblem
   $\Delta \tilde{S}_{kl}^T = -\Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{l,T}^{h/2,p}$  // Berechne lokalen Fehlerindikator
   $\Delta \tilde{S}_{kl} = \Delta \tilde{S}_{kl}^T - \Delta \tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \mathbf{r}_{l,T}^{h/2,p}$  // Berechne globalen Fehlerindikator
end for

```

lerindikators ist in Algorithmus 5.2 dargestellt.

5.3 h -Adaptivität

Ausgehend von einer gleichmäßigen Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$ kann mit dem in Abschnitt 5.2 vorgestellten Verfahren für jedes Tetraeder eine Approximation des Fehlers in Streuparametern nach Algorithmus 5.2 berechnet und diesen zugeordnet werden. Damit lässt sich ein h -adaptives Verfahren konstruieren, dessen prinzipielle Struktur in Algorithmus 5.3 dargestellt ist. Dabei dient der Fehlerindikator als Grundlage zur Markierung jener Tetraeder, die im Hinblick auf den Fehler in der Zielgröße zweckmäßigerweise verfeinert werden sollen, und führt damit durch das adaptive FE-Verfahren. Die Verfeinerung der so markierten Tetraeder erfolgt dergestalt, dass ein Verfeinerungsunterschied benachbarter Tetraeder von höchstens eins in der Triangulierung auftritt. Diese Wahl begründet sich einerseits in dem Ziel, eine möglichst homogene Netzstruktur zu erhalten und andererseits in dem unverhältnismäßig hohen implementatorischen Aufwand, der zur Berücksichtigung einer beliebigen Anzahl von hängenden Unbekannten an einer Grenzfläche bzw. Grenzkannte erforderlich ist. Wegen der in der vorliegenden Arbeit verwendeten ungleichmäßigen Verfeinerung treten in der Regel bereits nach dem ersten Durchlauf der adaptiven Schleife inkonsistente Netze auf, womit sowohl bei der Markierung, als auch bei der Verfeinerung der entsprechenden Tetraeder verschiedene Ausgangssituationen zu beachten sind. Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9 zeigen die wesentlichen Situationen, die im Ausgangsnetz vorgefunden werden. Hierbei kann zwischen vier verschiedenen Typen von Tetraedern im FE-Netz unterschieden werden:

Typ A: Das Tetraeder ist nicht unterteilt und das übergeordnete Tetraeder, sofern dieses existiert, besitzt keine hängenden Unbekannten.

Algorithmus 5.3 Prinzipielle Struktur des h -adaptiven FE-Verfahrens.

```

A $h,p$ e $k$  $h,p$  = b $k$  $h,p$  // Berechne initiale Lösung
while max $k,l$  | $\Delta\tilde{S}_{kl}$ | ≥  $TOL$  do
     $\mathcal{T}_h(\Omega) \rightarrow \mathcal{T}_{h/2}(\Omega)$  // Verfeinere Netz einmal gleichmäßig
    M $h/2$  = P $h$  $h/2$ M $h$  // Prolongiere die globalen Ansatzfunktionen
     $\tilde{\mathbf{e}}_k^{h/2,p} = \mathbf{P}_h^{h/2} \mathbf{e}_k^{h,p}$  // Prolongiere berechnete Lösung auf das Feinnetz
    A $h/2,p$ , b $k$  $h/2,p$  // Assembliere das verfeinerte Problem
    r $k$  $h/2,p$  = b $k$  $h/2,p$  - A $h/2,p$  $\tilde{\mathbf{e}}_k^{h/2,p}$  // Berechne den Residuenvektor
    for  $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$  do
         $\bar{\mathbf{A}}_T^{h/2,p} \Delta\tilde{\mathbf{e}}_{k,T} = \bar{\mathbf{r}}_T^{h/2,p}$  // Löse lokales Hilfsproblem
         $\Delta\tilde{S}_{kl}^T = -\Delta\tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{l,T}^{h/2,p}$  // Berechne lokalen Fehlerindikator
    end for
    Markiere Tetraeder  $\rightarrow \Omega_m$ 
    for  $T \in \Omega_m$  do
         $\Delta\tilde{S}_{kl} = \Delta\tilde{S}_{kl} - \Delta\tilde{\mathbf{e}}_{k,T} \cdot \bar{\mathbf{r}}_{l,T}^{h/2,p}$ 
    end for
    Verfeinere markierte Tetraeder
    A $h_{ad},p$ e $k$  $h_{ad},p$  = b $k$  $h_{ad},p$  // Berechne Lösung des adaptiv verfeinerten Systems
end while

```

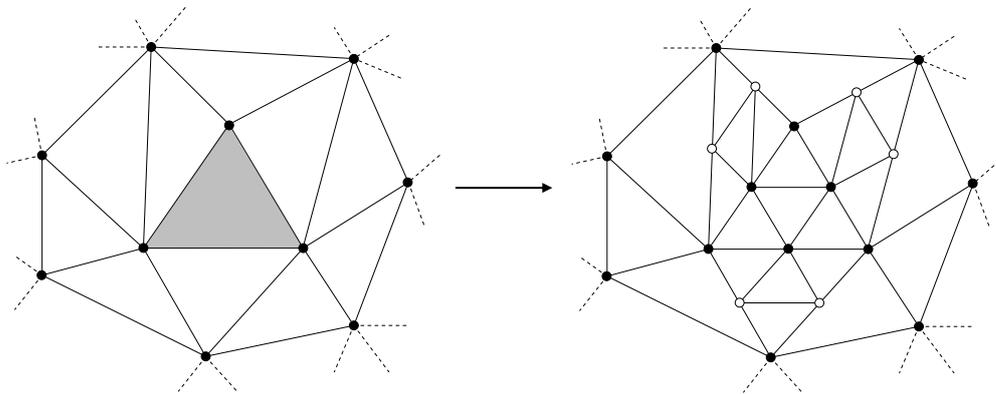
Typ B: Das Tetraeder ist unterteilt und besitzt hängende Unbekannte.

Typ C: Das Tetraeder ist unterteilt und besitzt keine hängenden Unbekannten.

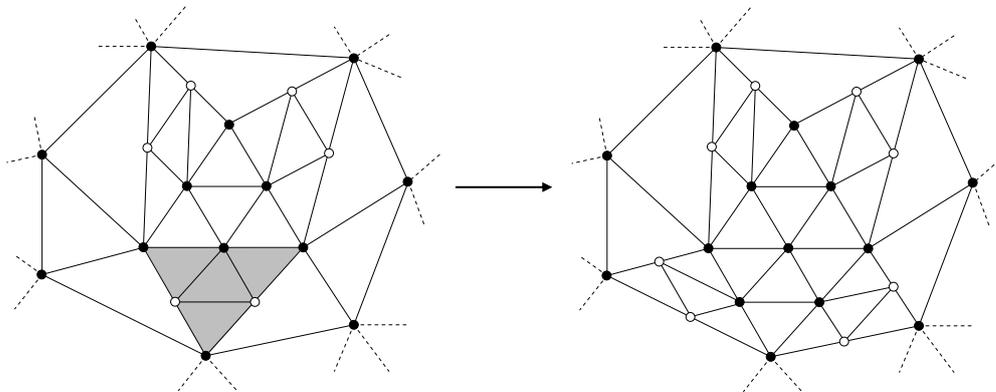
Typ D: Das Tetraeder ist nicht unterteilt und das übergeordnete Tetraeder besitzt hängende Unbekannte.

Tetraeder vom Typ A und vom Typ B können zur Verfeinerung markiert werden. Hingegen können Tetraeder vom Typ C und vom Typ D nicht unterteilt und damit nicht für die Markierung freigegeben werden. Der Grund hierfür liegt zum einen für Typ D-Tetraeder in der Forderung einen Verfeinerungsunterschied von höchstens eins zuzulassen und zum anderen für Typ C-Tetraeder darin, dass diese nicht mehr Teil der aktuellen Triangulierung sind. In Abbildung 5.8 sind schematisch die zu den verschiedenen Ausgangssituationen durchgeführten Verfeinerungen der markierten Elemente dargestellt. Ein Aspekt dieser Verfeinerung ist, dass sie, wie in Abbildung 5.10 gezeigt, zu einer Ausbreitung von Unbekannten in der unmittelbaren Nachbarschaft des zu verfeinernden Tetraeders führen kann, um einen Verfeinerungsunterschied benachbarter Tetraeder von höchstens eins zu gewährleisten.

Im Hinblick auf die Berechnung der elementbasierten Fehlerindikatoren ist zur Konstruktion der lokalen Hilfsprobleme entsprechend den Ausführungen zur Realisie-



(a) Das markierte Element ist nicht unterteilt und besitzt kein übergeordnetes Element (Typ A-Tetraeder).



(b) Das markierte Element ist unterteilt und besitzt hängende Unbekannte (Typ B-Tetraeder).

Abbildung 5.8: Zulässige Markierungen von Tetraedern im Ausgangsnetz. Das zur Verfeinerung markierte Tetraeder ist grau hinterlegt. Das resultierende Netz nach der Verfeinerung des markierten Elements ist jeweils rechter Hand dargestellt.

rung des verwendeten Fehlerindikator aus Abschnitt 5.2.2 und des Algorithmus 5.3 das einmal gleichmäßig verfeinerte FE-System zu assemblieren. Da im Rahmen des betrachteten adaptiven Verfahrens die Ausgangsnetze, abgesehen von dem Startnetz, inkonsistente ungleichmäßige Netze sind, wird eine gleichmäßige Verfeinerung solcher Ausgangsnetze wie folgt definiert und durchgeführt:

1. Auflösen der hängenden Unbekannten der Typ B-Tetraeder durch Unterteilung der entsprechenden Grenzkanten-Nachbarn (Typ B \rightarrow Typ C).
2. Verfeinerung aller Typ A-Tetraeder (Typ A \rightarrow Typ C).

Diese Vorgehensweise ist exemplarisch in Abbildung 5.11 dargestellt. Die Abbruchbedingung des h -adaptiven FE-Verfahrens ist, wie in Algorithmus 5.3 dargestellt, auf das Unterschreiten des maximalen geschätzten globalen Fehlers $\Delta \tilde{S}_{kl}$ eines vom

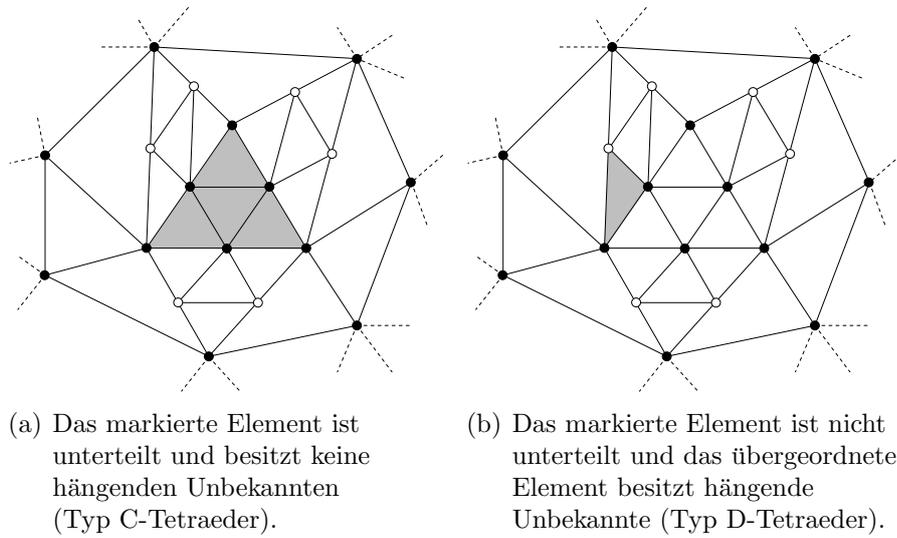


Abbildung 5.9: Unzulässige Markierungen von Tetraedern im Ausgangsnetz.

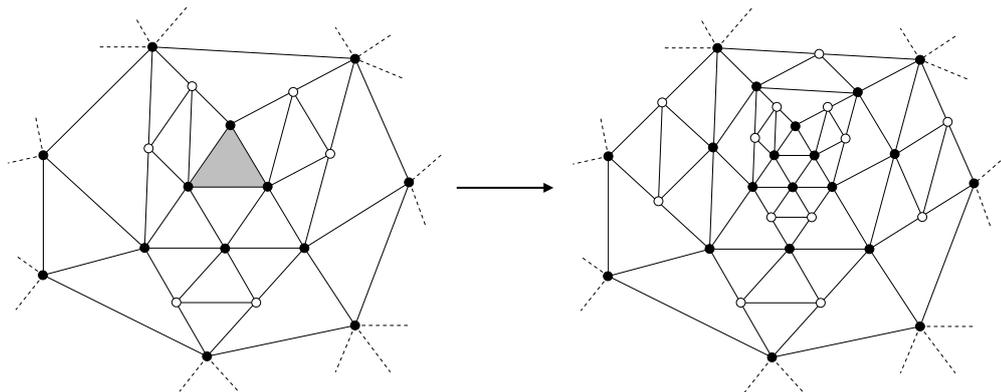


Abbildung 5.10: Ausbreitung der Verfeinerung zur Gewährleistung eines Verfeinerungsunterschieds benachbarter Elemente von höchstens eins.

Nutzer vorgegebenen Schwellwertes TOL festgelegt, d. h.

$$\max_{k,l} |\Delta \tilde{S}_{kl}| < TOL. \tag{5.68}$$

Es ist zudem von praktischem Interesse, dem Nutzer ebenfalls die Möglichkeit zu geben den adaptiven Prozess nach einer vorgegebenen Anzahl von Schleifendurchläufen abzubrechen, um hinsichtlich des Speicherbedarfs und der benötigten Laufzeit einwirken zu können.

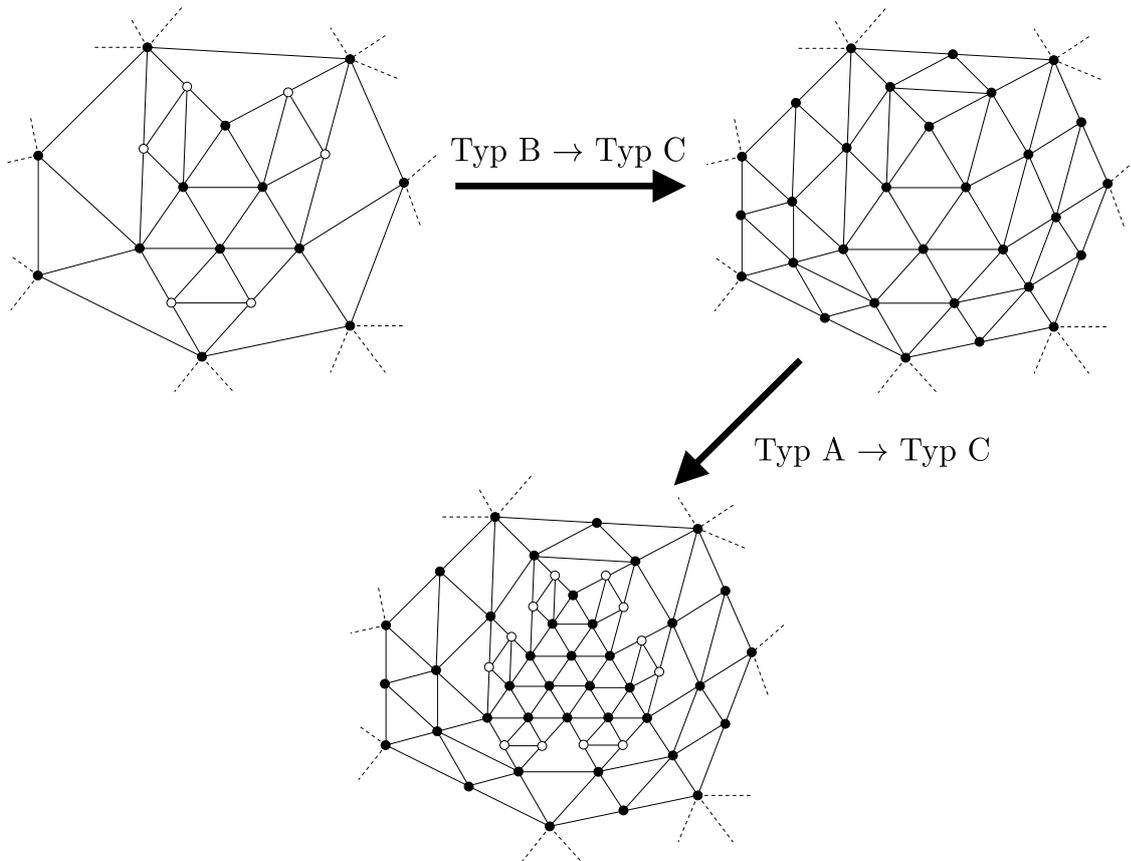
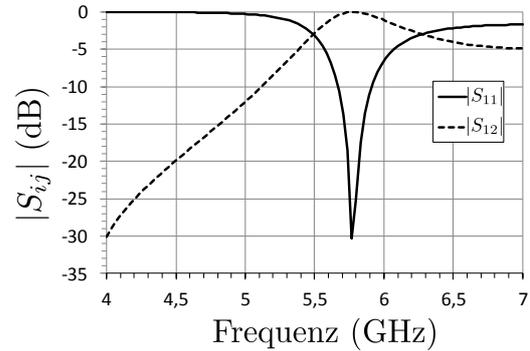
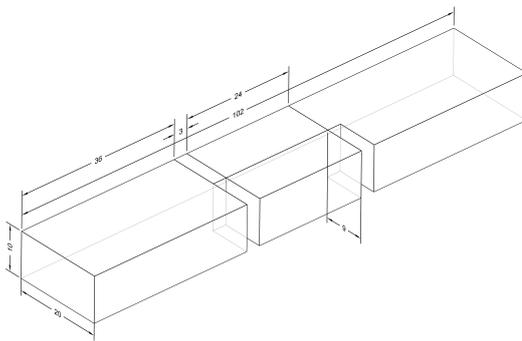


Abbildung 5.11: Gleichmäßige Verfeinerung eines inkonsistenten ungleichmäßig verfeinerten Ausgangsnetzes. Die Typenbezeichnungen der Elemente beziehen sich auf deren Konfiguration im Ausgangsnetz.

5.4 Numerisches Beispiel

Das vorgestellte h -adaptive FE-Verfahren wird am Beispiel der in Abbildung 5.12(a) gezeigten Filterstruktur evaluiert. Das Verhalten des Filters über den Frequenzbereich von 4 – 7 GHz ist in Abbildung 5.12(b) gezeigt. Die Anregung des Filters erfolgt an den beiden Stirnflächen der Struktur über Tor-Ränder, an denen der TE_{10} -Mode eingepreßt wird. An den einspringenden Kanten des Resonators treten singuläre Felder auf, sodass ohne die Anwendung eines adaptiven Verfahrens die Konvergenz des Fehlers in den Streuparametern wie in Abschnitt 5.1.2 ausgeführt mit $|\Delta S_{kl}| \approx \mathcal{O}(N^{-\frac{1}{2}})$ zu erwarten ist. Die Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens ist in Abbildung 5.13 für die Ansatzfunktionenordnungen $p = 1, \dots, 4$ dargestellt. Die Markierungsstrategie der Tetraeder innerhalb des h -adaptiven Verfahrens ist durch die Markierung jener Tetraeder gegeben, die den betragsgrößten geschätzten lokalen Fehler, also $\max_{kl} |\Delta \tilde{S}_{kl}^T|$, aufweisen. Die asymptotischen Konvergenzraten sind zusammenfassend in Tabelle 5.3 aufgelistet. Die mithilfe des h -adaptiven Verfahrens erreichte Konvergenz $\mathcal{O}(h^{2,01})$ und $\mathcal{O}(h^{3,79})$ der Ordnungen $p = 1$ und $p = 2$



- (a) Geometrie der betrachteten Filterstruktur. Dargestellt ist aufgrund der Symmetrie lediglich die Hälfte der Struktur. Die Angaben sind in mm.
- (b) Frequenzgang der Filterstruktur bezüglich der Streuparameter S_{11} und S_{12} .

Abbildung 5.12: Hohlleiter-Filter mit einspringenden Kanten.

Tabelle 5.3: Erzielte Konvergenzraten mithilfe des h -adaptiven Verfahrens am Beispiel der Filterstruktur aus Abbildung 5.12(a). Die formal erreichbaren, asymptotischen Konvergenzraten sind zum Vergleich ebenfalls angegeben.

Ordnung p	Konvergenzrate in h	
	Berechnet	Formal erreichbar
1	0,67	$2/3$
2	1,23	$4/3$
3	1,53	2
4	1,41	$8/3$

stimmt mit der theoretisch erreichbaren Konvergenz in den Streuparametern von $\mathcal{O}(h^{2p})$ gut überein. Die erreichte Konvergenz von $\mathcal{O}(h^{4,59})$ für die Ordnung $p = 3$ liefert in dem betrachteten Bereich eine Abweichung von etwa 0,5 zur theoretischen Konvergenzrate von $2p$. Ein Vergleich der Konvergenzraten der Ordnungen $p = 3$ und $p = 4$ weist keinen signifikanten Unterschied mehr auf, sodass bei dem vorliegenden Beispiel im Rahmen des betrachteten Bereichs bis 10^6 Unbekannten die Verwendung der Ordnung $p = 4$ keinen Vorteil liefert. Allerdings ist bezüglich der Konvergenzraten für $p = 3$ und $p = 4$ in Abbildung 5.13 zu erkennen, dass diese zu mehr Unbekannten hin zunehmen. Dies lässt vermuten, dass die asymptotische Konvergenzrate noch nicht erreicht ist. Abbildung 5.14 zeigt ausgehend vom Ausgangsnetz die adaptiv verfeinerten, inkonsistent ungleichmäßigen Netze nach dem ersten und dem letzten Durchlauf. Die Singularitäten werden dabei hinsichtlich des Übertragungsverhaltens der Filterstruktur von dem Fehlerschätzer erkannt und im Rahmen des h -adaptiven Verfahrens verfeinert. Abbildung 5.15(a) zeigt die Konvergenz des adaptiven Verfahrens im Sperrbereich bei 4 GHz bezüglich des Fehlers $|S_{11}^{h,p} - S_{11}^{\text{ref}}|$ einmal mit der Zielgröße S_{11} ein andermal mit der Zielgröße S_{12} . Abbil-

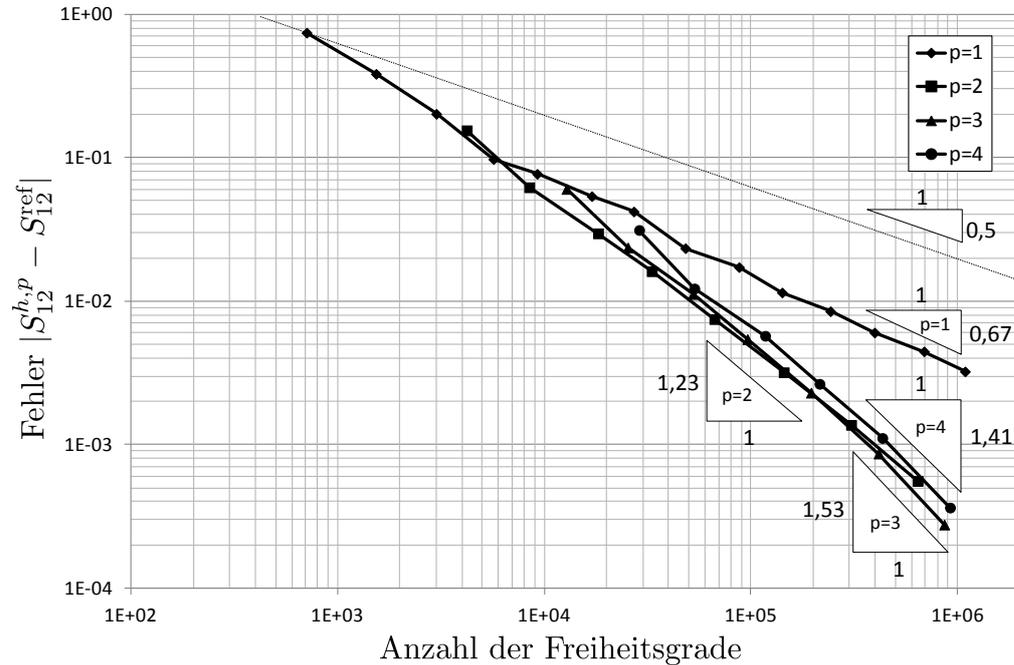


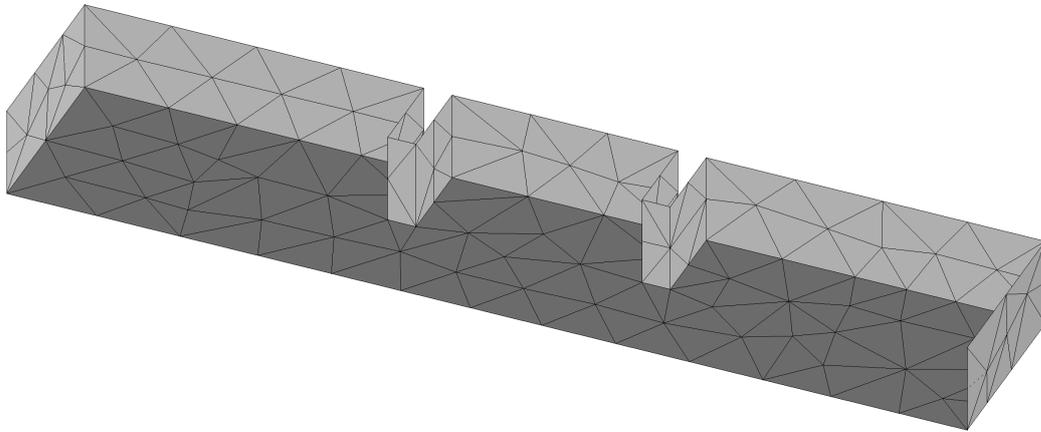
Abbildung 5.13: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich S_{12} am Beispiel des Filters bei $f = 5,8$ GHz. Als Referenzwert S_{12}^{ref} wird die Lösung des äquivalenten zweidimensionalen H-Ebenen Problems [WP86] mit stark verfeinertem Netz und Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.

Abbildung 5.15(b) zeigt in gleicher Weise die Konvergenz bezüglich des Fehlers $|S_{12}^{h,p} - S_{12}^{\text{ref}}|$ ebenfalls für die beiden Zielgrößen S_{12} und S_{11} . In beiden Fällen ist zu erkennen, dass die Konvergenz im betrachteten Fehler entscheidend von der Wahl der Zielgröße abhängt. So wird im ersten Fall in Bezug auf den Fehler $|S_{11}^{h,p} - S_{11}^{\text{ref}}|$ eine höhere Genauigkeit bei gleicher Anzahl von Freiheitsgraden unter Verwendung der korrespondierenden Zielgröße S_{11} erreicht, als unter Verwendung von S_{12} als Zielgröße. Der zweite Fall liefert in gleicher Weise, dass eine h -adaptive Verfeinerung in der Zielgröße des betrachteten Fehlers eine höhere Genauigkeit bei gleicher Anzahl von Unbekannten liefert als bei einer abweichend vom betrachteten Fehler gewählten Zielgröße. Eine Verdeutlichung dieser *Zielorientiertheit* ist in Abbildung 5.16 mithilfe der adaptierten Netze bei S_{11} - und S_{12} -Verfeinerung gegeben. Die Zuverlässigkeit des (globalen) Fehlerindikators aus (5.67) ist in Abbildung 5.17 für den Fehler in S_{12} bei einer Frequenz von 5,8 GHz im Durchlassbereich bezüglich des adaptiven Durchlaufs dargestellt. Das h -adaptive Verfahren ist hinsichtlich des betrachteten Fehlers ebenfalls in S_{12} formuliert. Hierbei ist zu erkennen, dass die Schätzung des globalen Fehlers zwar eine vergleichbare Konvergenz zu der des wahren Fehlers liefert, jedoch der wahre Fehler unterschätzt wird. Abbildung 5.18 zeigt, dass die Wahl der Markierungsstrategie Einfluss auf die Konvergenz besitzt. Hierbei ist zu beachten, dass die gewählte Strategie bei diesem Beispiel nicht nur die bestmögliche Konvergenzrate erreicht, sondern ebenfalls der Rechenaufwand möglichst gering bleibt. Die Laufzei-

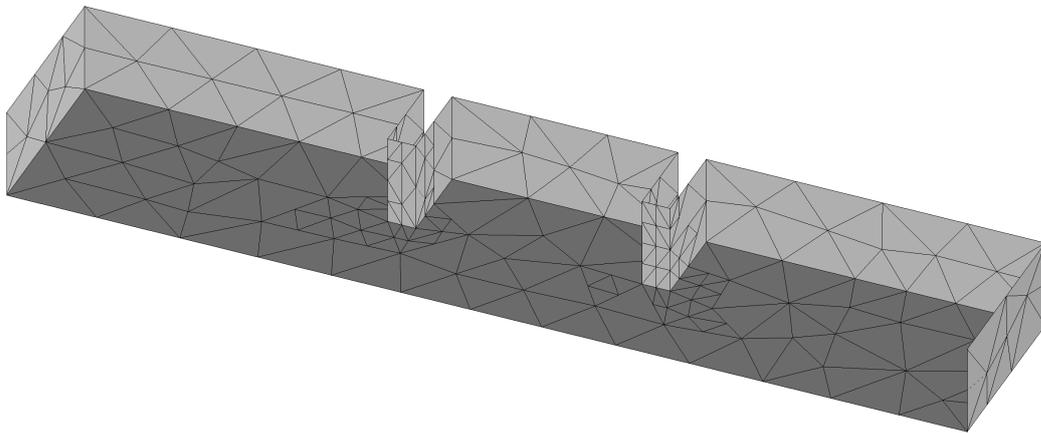
Tabelle 5.4: Laufzeiten des h -adaptiven Verfahrens mit verschiedenen Markierungsstrategien.

Markierungsstrategie	CPU-Zeit in s
32%	422,641
16%	984,672
8%	941,141
0,5%	6239,8
$\max_{k,l} \Delta \tilde{S}_{kl}^T > \text{SD}$	976,875

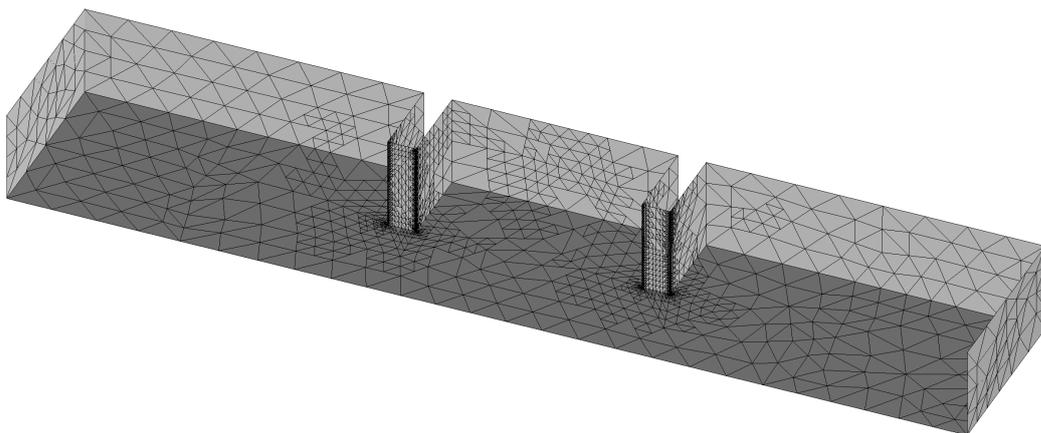
ten des h -adaptiven Verfahrens für die betrachtete Filterstruktur unter Verwendung der verschiedenen Markierungsstrategien sind in Tabelle 5.4 gelistet.



(a) Ausgangsvernetzung der Filterstruktur.

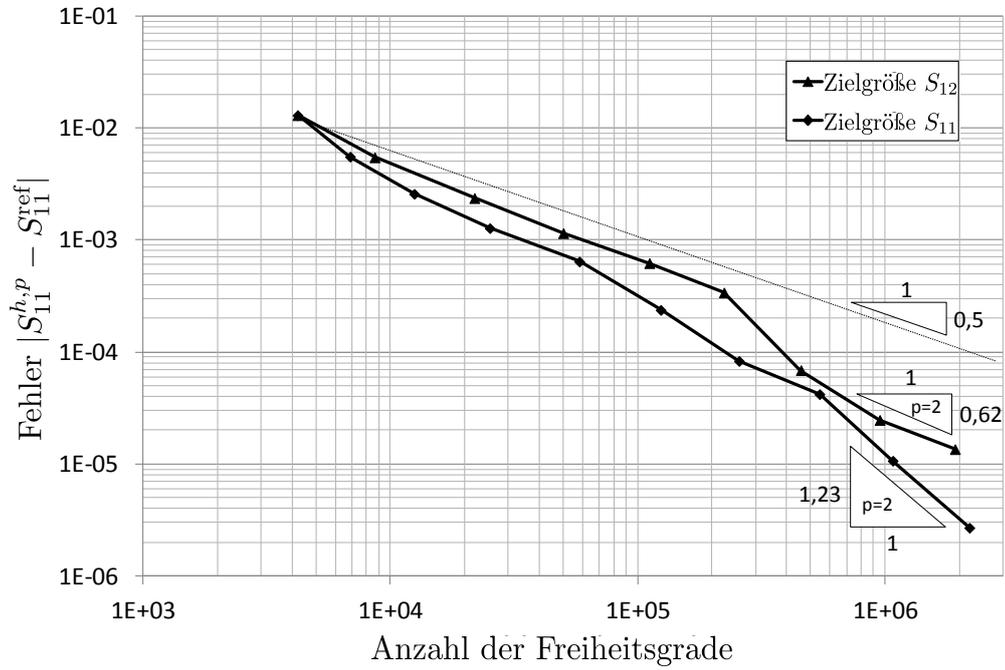


(b) Adaptiv verfeinertes Netz nach dem ersten Durchlauf.

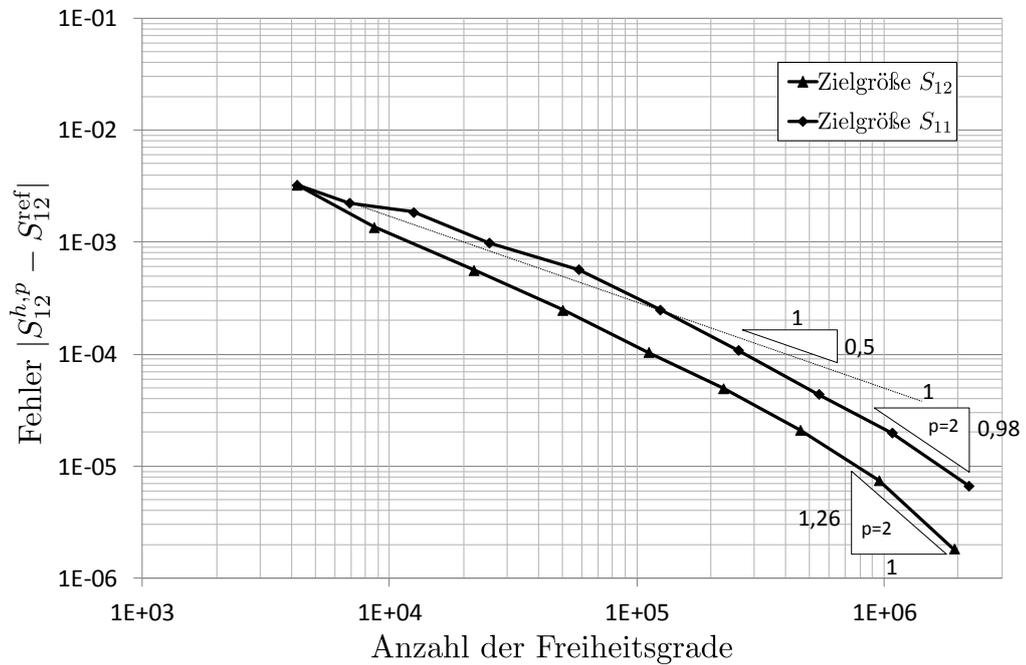


(c) Adaptiv verfeinertes Netz nach dem letzten Durchlauf.

Abbildung 5.14: Schnitt der Filterstruktur. Dargestellt sind die Oberflächennetze nach verschiedenen Durchläufen des h -adaptiven Verfahrens.

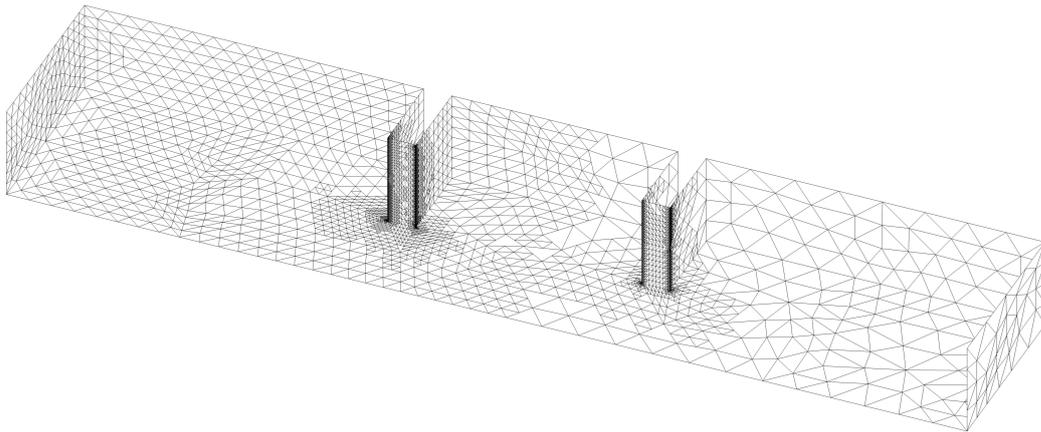


(a) Fehler in S_{11} .

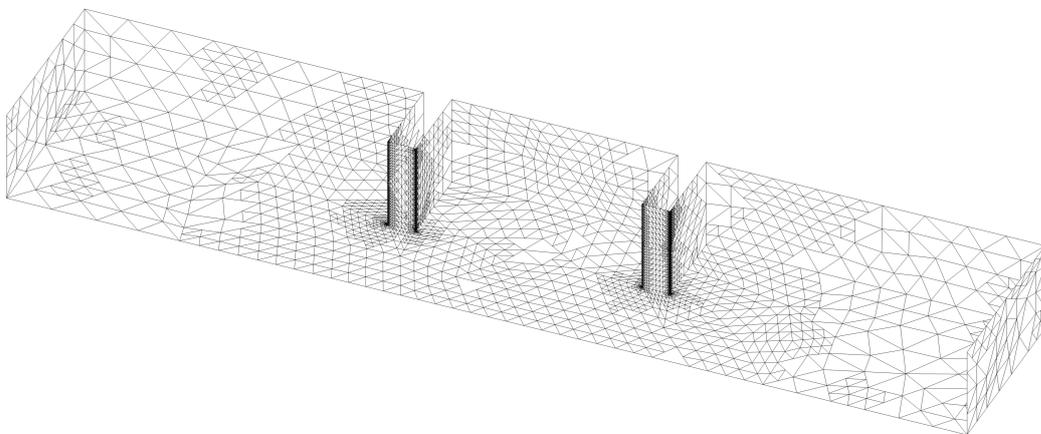


(b) Fehler in S_{12} .

Abbildung 5.15: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens für $p = 2$ bezüglich der Zielgrößen S_{11} und S_{12} der Filterstruktur bei $f = 4$ GHz.



(a) Verfeinerung bezüglich der Zielgröße S_{11} .



(b) Verfeinerung bezüglich der Zielgröße S_{12} .

Abbildung 5.16: Schnitt der Filterstruktur. Dargestellt ist jeweils das Oberflächennetz nach dem letzten Durchlauf des h -adaptiven Verfahrens im Sperrbereich des Filters bei 4 GHz.

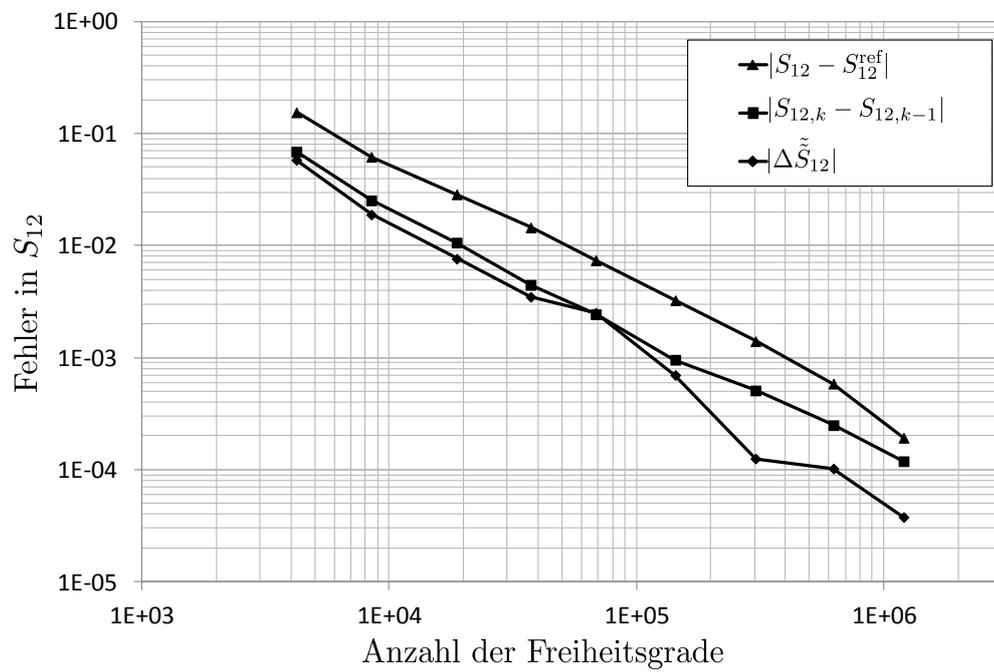


Abbildung 5.17: Vergleich des geschätzten globalen Fehlers $\Delta \tilde{S}_{12}$ anhand der Filterstruktur bei $f = 5,8$ GHz mit dem Fehler bezüglich der Referenzlösung und mit der Änderung des S-Parameters zwischen zwei aufeinanderfolgenden adaptiven Schritten k .

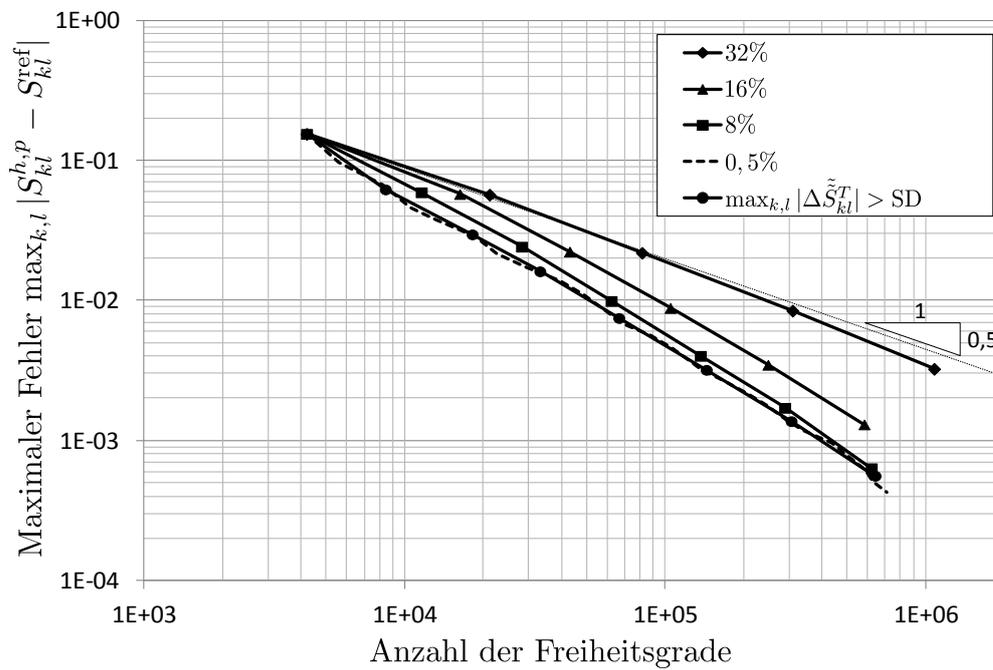


Abbildung 5.18: Vergleich verschiedener Markierungsstrategien bezüglich des Fehlers $\max_{k,l} |S_{kl}^{h,p} - S_{kl}^{\text{ref}}|$ anhand der Filterstruktur bei $f = 5,8$ GHz und für $p = 2$. SD bezeichnet hierbei die Standardabweichung der lokalen Fehler $\max_{k,l} |\Delta \tilde{S}_{kl}^T|$ der Tetraeder $T \in \mathcal{T}_h$.

Kapitel 6

Numerische Beispiele

Im Folgenden sind numerische Beispiele gegeben, die eine Beurteilung des in der vorliegenden Arbeit vorgestellten adaptiven FE-Verfahrens erlauben. Hierbei werden gängige Problemstellungen aus der Simulation passiver Mikrowellenstrukturen herangezogen. In den folgenden Abschnitten wird neben einem Parallelplattenwellenleiter und Rechteck-Hohlleiterstrukturen auch ein Abstrahlungsproblem einer Antenne herangezogen und das h -adaptive Verfahren hinsichtlich seiner Konvergenz besprochen. Für alle numerischen Beispiele dient als Referenzlösung zur Darstellung der Konvergenz das entsprechende Problem mit stark adaptiv verfeinertem Netz und mit der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$. Die erreichten Konvergenzraten werden mit den im vorherigen Kapitel beschriebenen theoretisch erreichbaren asymptotischen Konvergenzraten verglichen.

6.1 Duales Problem

Betrachtet wird der in Abbildung 6.1(a) gezeigte Parallelplattenwellenleiter. Um das in der vorliegenden Arbeit beschriebene h -adaptive Verfahren bezüglich seiner Konvergenz bei Anwesenheit kapazitiver und induktiver Singularitäten vergleichen zu können, wird die betrachtete Struktur einmal mit den Randbedingungen wie in Abbildung 6.1 beschrieben mithilfe des h -adaptiven Verfahrens simuliert, und ein weiteres Mal wird das hierzu duale Problem gelöst, indem die perfekt elektrisch leitenden Randbedingungen bzw. die perfekt magnetisch leitenden Randbedingungen des Ausgangsproblems in perfekt magnetisch leitende Randbedingungen bzw. in perfekt elektrisch leitende Randbedingungen des dualen Problems gewandelt werden. Für beide Problemstellungen wird der Wellenleiter bei einer Frequenz von 2 GHz betrieben. Das Ausgangsnetz beider Anregungsprobleme ist in Abbildung 6.1(b) dargestellt. Für die Simulation des Ausgangsproblems und des hierzu dualen Problems sind identische Konvergenzraten zu erwarten. Abbildung 6.2 zeigt die Konvergenz

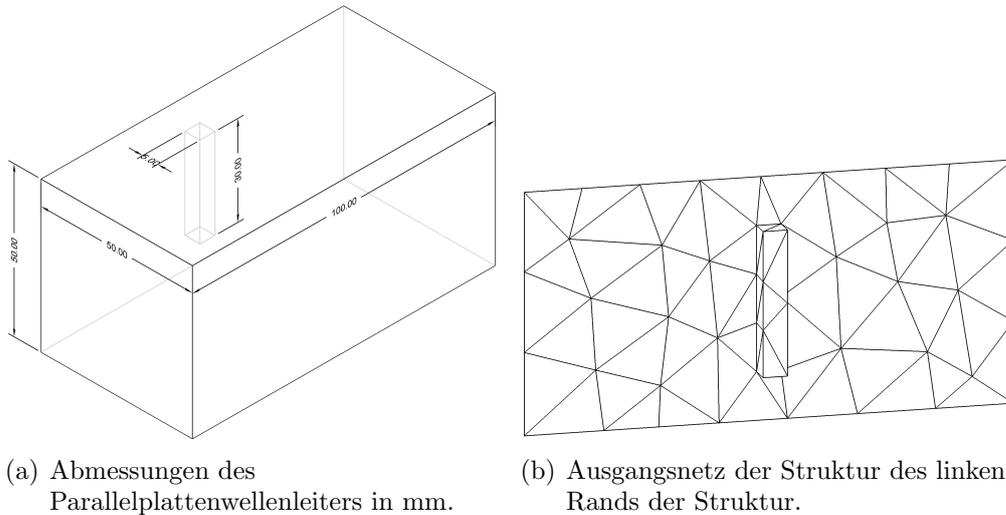


Abbildung 6.1: Parallelplattenwellenleiter mit perfekt elektrisch leitendem Block. Der Block ist horizontal und vertikal mittig am Rand der Struktur angeordnet. Die perfekt leitenden Platten des Wellenleiters sind horizontal angeordnet. Der linke und rechte Rand der Struktur ist perfekt magnetisch leitend.

des h -adaptiven Verfahrens für die Ordnungen $p = 1$ und $p = 2$. Die Auswertung der Konvergenzrate zeigt, dass diese für das Problem und das duale Problem vergleichbar sind. Die Unterschiede im Fehler der Lösung des noch nicht adaptierten Netzes können mit der Anisotropie des FE-Netzes begründet werden. Die Konvergenz beider Verfahren ist abgesehen von der Abweichung im Fehler der initialen Lösung vergleichbar. Die erzielten Konvergenzraten von $\mathcal{O}(N^{-0,57})$ und $\mathcal{O}(N^{-1,7})$ bzw. $\mathcal{O}(N^{-2,1})$ zeigen, dass die Konvergenz mithilfe des vorgestellten h -adaptiven Verfahrens wiederhergestellt wird. Das der Fehlerindikator des h -adaptiven Verfahrens ebenfalls ähnliche Verfeinerungen an den jeweiligen Singularitäten der beiden dualen Probleme liefert, ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Abbildung 6.4 zeigt eine Vergrößerung der adaptiv verfeinerten Netze an den Singularitäten der beiden Probleme.

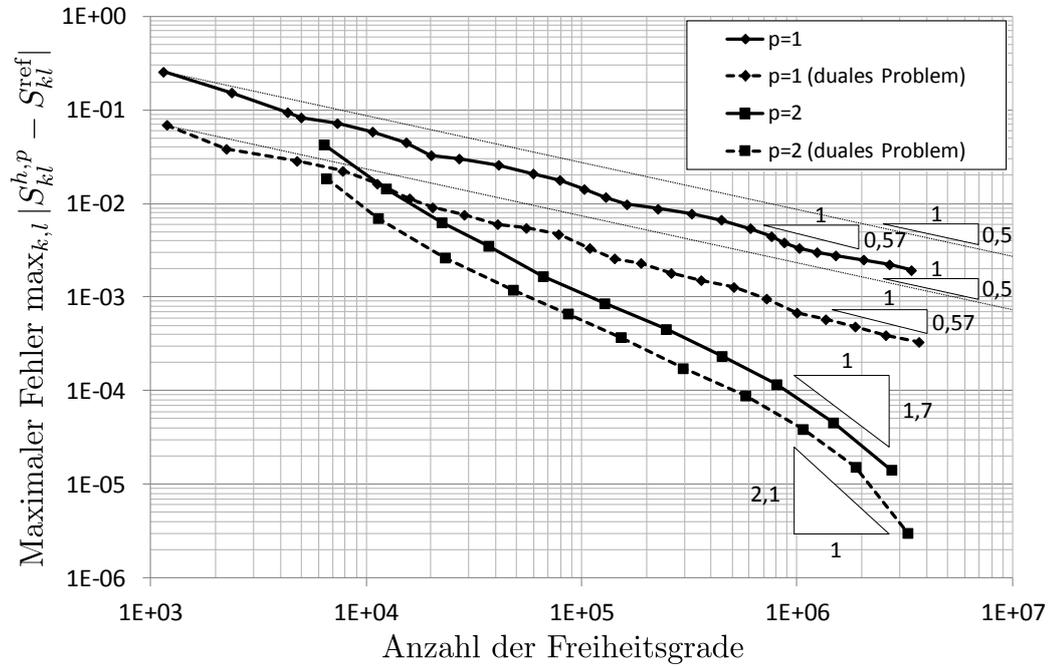


Abbildung 6.2: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Betragsmaximums des Fehlers im S -Parameters bei $f = 2$ GHz. Als Referenzwert S_{kl}^{ref} wird die Lösung des jeweiligen Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.

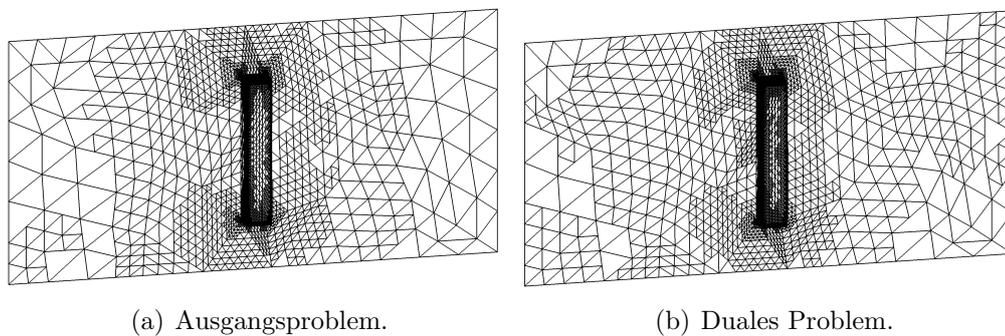
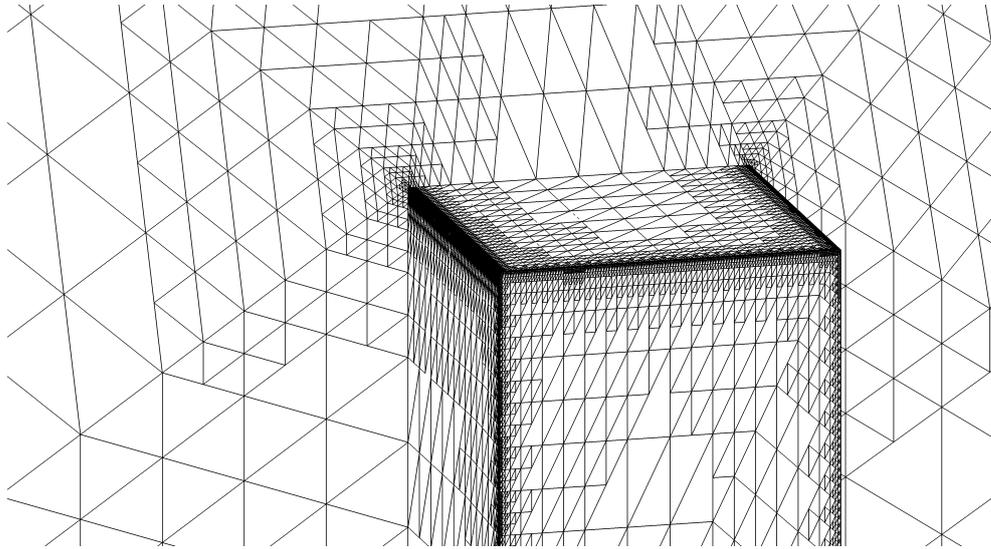
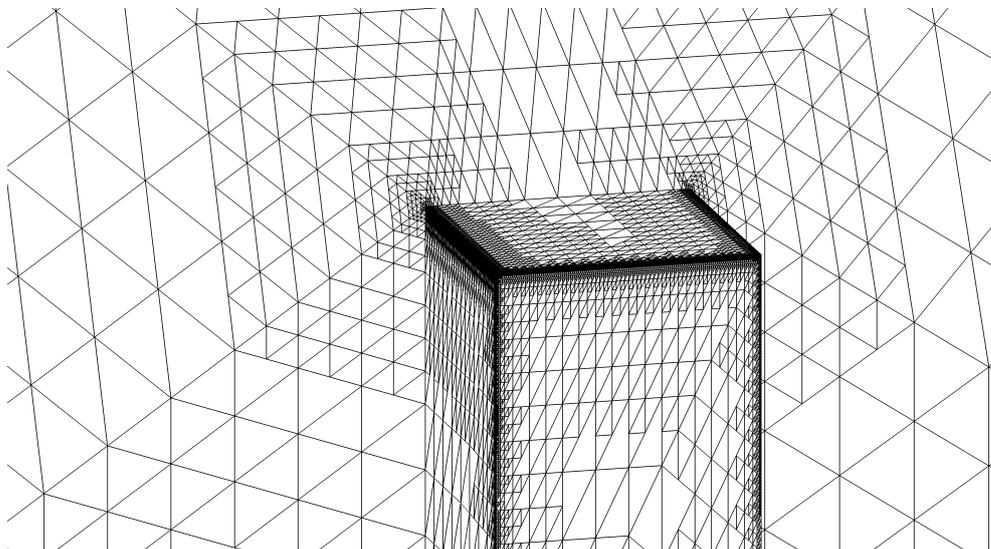


Abbildung 6.3: Adaptiv verfeinertes Netz nach dem jeweils letzten adaptiven Schritt.



(a) Ausgangsproblem.

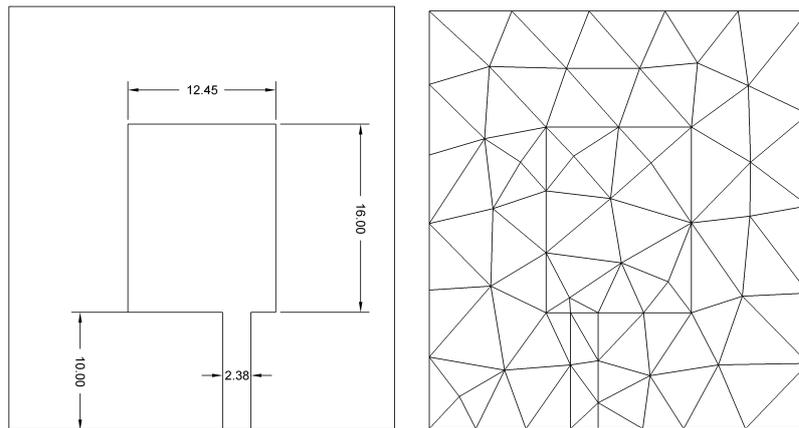


(b) Duales Problem.

Abbildung 6.4: Ausschnittsvergrößerung des adaptiv verfeinertes Netz an der Singularität nach dem jeweils letzten adaptiven Schritt.

6.2 Patch-Antenne

Im folgenden Beispiel wird die Abstrahlung einer Antenne simuliert. Diese Antenne besteht aus einer metallisierten Fläche auf einem dielektrischen Substrat [SAAK90]. Das Substrat ist auf einer metallischen Leiterplatte aufgebracht. Die Geometrie der Struktur ist in Abbildung 6.5(a) dargestellt. Die Antenne dient als Beispiel für eine



(a) Geometrie der Patch-Antenne in mm. (b) Ausgangsnetz der Struktur.

Abbildung 6.5: Patch-Antenne aus [SAAK90].

Struktur, die in den freien Raum abstrahlt. Hierzu wird im Rahmen der Simulation mithilfe des h -adaptiven Verfahrens, der Rand mit absorbierenden Randbedingungen belegt, um der Abstrahlung in den freien Raum genüge zu tun. Das Ausgangsnetz für das h -adaptive Verfahren ist in Abbildung 6.5(b) gezeigt. Die Patch-Antenne wird im Abstrahlungsbereich bei einer Frequenz von 7,52 GHz betrieben. Abbildung 6.6 zeigt die Konvergenzkurve für die Ansatzfunktionenordnung $p = 2$. Hierbei ist zu erkennen, dass sich eine Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-1,6})$ für den Fehler im S -Parameter einstellt, welche besser ist als die theoretisch erreichbare asymptotische Konvergenzrate von $\mathcal{O}(N^{-\frac{4}{3}})$. Eine Ursache für dieses Verhalten ist bisher jedoch nicht bekannt. Das nach dem letzten adaptiven Schritt verfeinerte Netz ist in Abbildung 6.7(a) dargestellt. Abbildung 6.7(b) zeigt eine Ausschnittsvergrößerung dieses adaptiv verfeinerten Netzes.

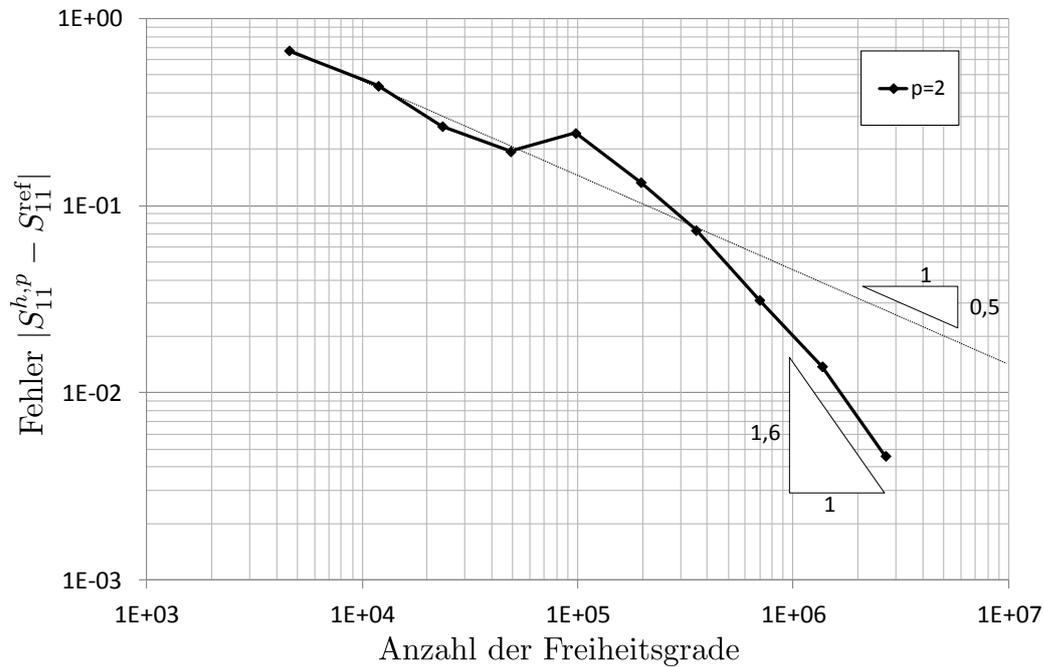


Abbildung 6.6: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers im Reflexionsparameter bei $f = 7,52$ GHz. Als Referenzwert S_{11}^{ref} wird die Lösung des jeweiligen Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionsordnung $p = 4$ herangezogen.

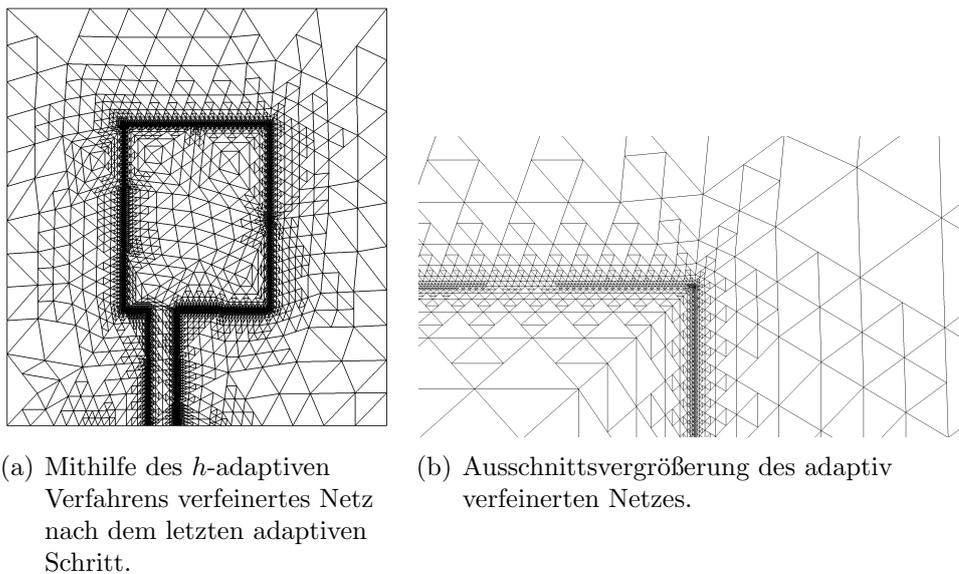


Abbildung 6.7: Adaptiv verfeinertes Netz der Patch-Antenne.

6.3 Dielektrischer Würfel

Im Folgendem wird ein rechteckiger Hohlleiter mit dielektrischem Einsatz betrachtet [Kat84]. Die Geometrie der Struktur ist in Abbildung 6.8(a) dargestellt. Das Ausgangsnetz ist für einen Schnitt in der Transversalebene in Abbildung 6.8(b) gezeigt. Der Rechteck-Hohlleiter wird im Durchlassbereich bei 9,7 GHz betrieben. Die Konvergenz bezüglich des Betragsmaximums in den S -Parametern ist für die Ansatzfunktionenordnungen $p = 1$ und $p = 2$ in Abbildung 6.9 dargestellt. Hierbei ist

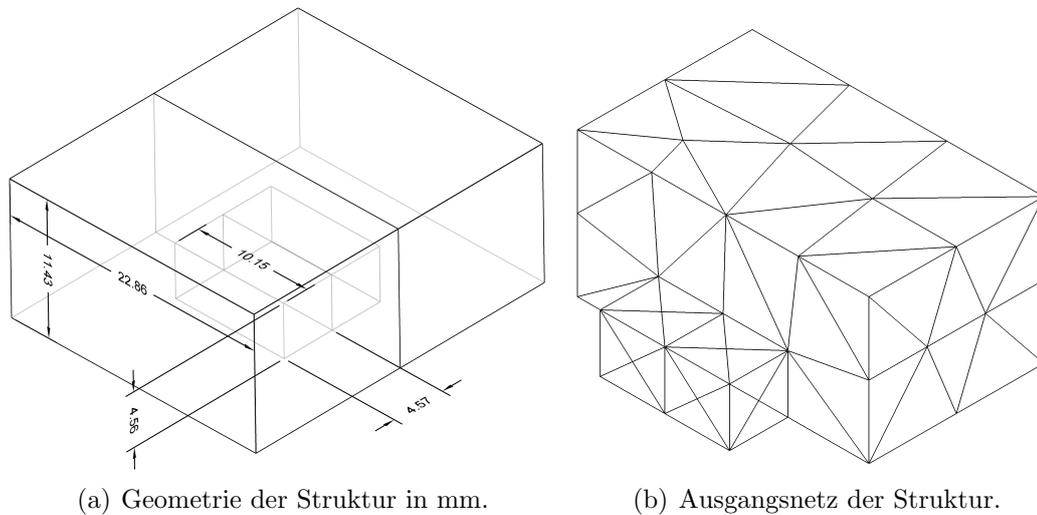


Abbildung 6.8: WR90 Rechteck-Hohlleiter mit dielektrischem Einsatz [Kat84] und Permittivität $\varepsilon_r = 6$.

zu erkennen, dass die theoretisch erreichbaren asymptotischen Konvergenzraten von $\mathcal{O}(N^{-\frac{2}{3}})$ bzw. $\mathcal{O}(N^{-\frac{4}{3}})$ für $p = 1$ bzw. $p = 2$ mit $\mathcal{O}(N^{-0,62})$ bzw. $\mathcal{O}(N^{-1,7})$ annähernd erreicht werden, und damit die Konvergenzordnung wiederhergestellt wird. Abbildung 6.10 zeigt die erreichte Verfeinerung des Netzes nach dem letzten adaptiven Schritt.

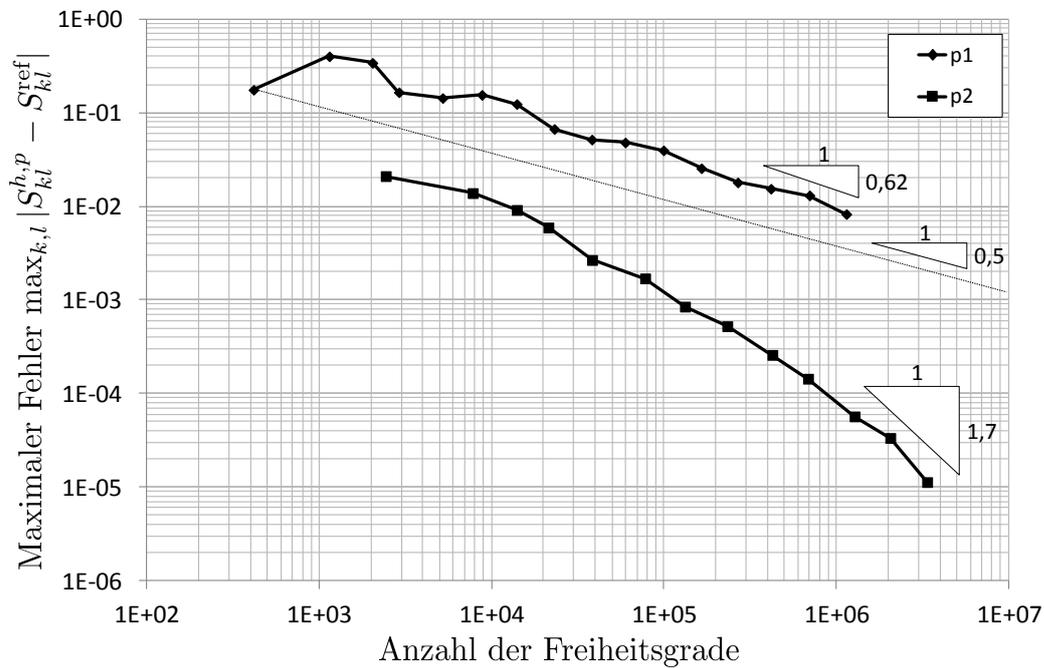
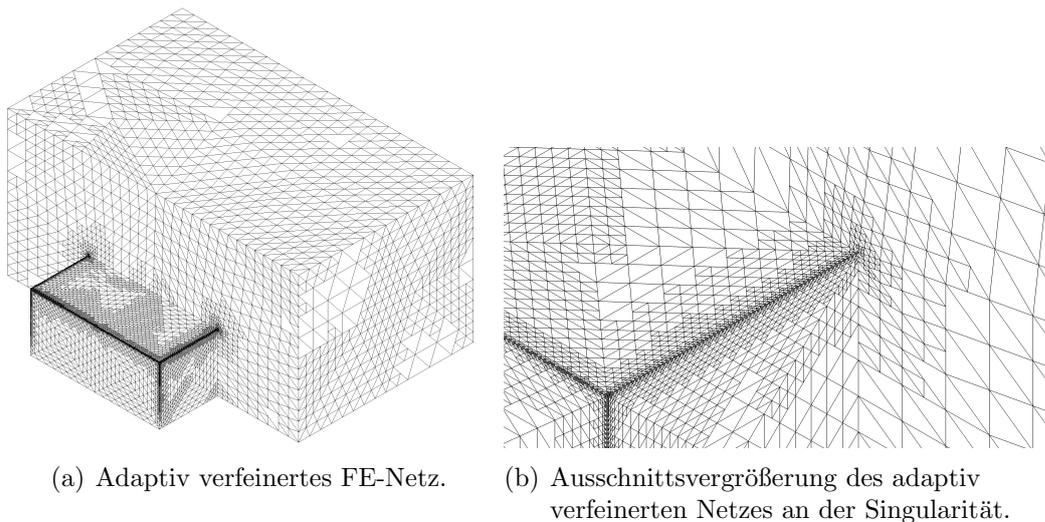


Abbildung 6.9: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers des Betragsmaximums in den S -Parametern bei $f = 9,7$ GHz. Als Referenzwerte für die Streuparameter wird die Lösung des Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.



(a) Adaptiv verfeinertes FE-Netz.

(b) Ausschnittsvergrößerung des adaptiv verfeinerten Netzes an der Singularität.

Abbildung 6.10: Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz des Rechteck-Hohlleiters mit dielektrischem Einsatz.

6.4 Microstrip

Als abschließendes Beispiel wird ein Mikrostreifenwellenleiter mit Stichleitung betrachtet. Diese besteht aus einer metallisierten Schicht, die über einer Metalleiterplatte angeordnet ist. Die Geometrie der Struktur ist in Abbildung 6.11(a) dargestellt. Die beim Betrieb bei 1 GHz entstehenden Felder sind in Abbildung 6.12

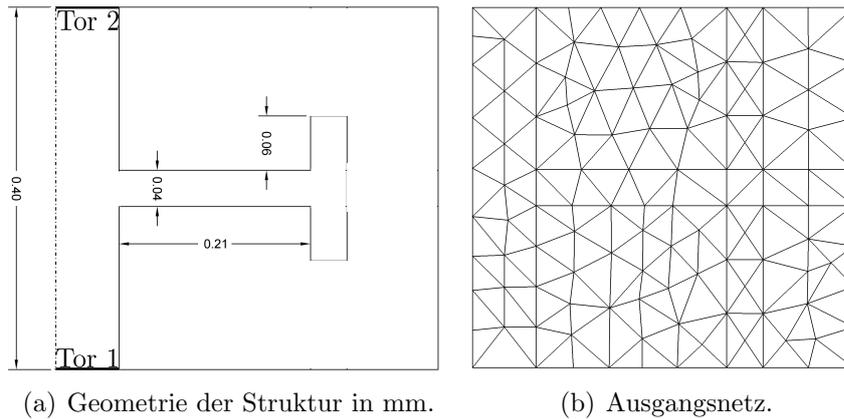


Abbildung 6.11: Mikrostreifenwellenleiter mit Stichleitung.

gezeigt. Hierbei ist zu erkennen, dass im Abschluss der Stichleitung hauptsächlich

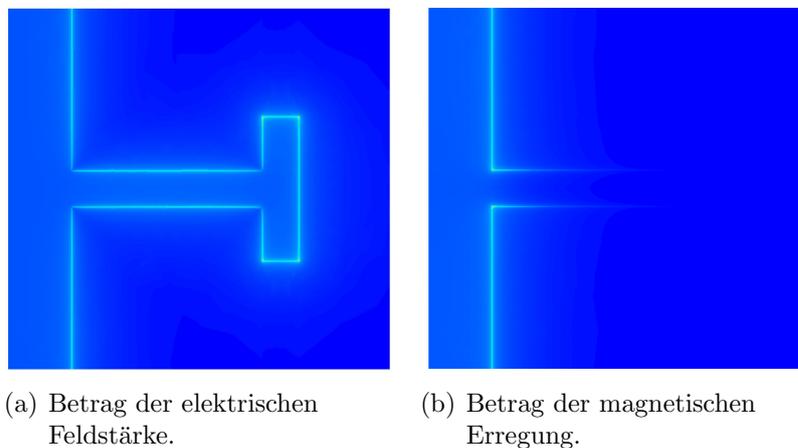


Abbildung 6.12: Felder beim Betrieb des Mikrostreifenwellenleiters mit Stichleitung bei 1 GHz.

kapazitive Singularitäten entstehen, hingegen an der Anschlussstelle der Stichleitung sich sowohl kapazitive als auch induktive Singularitäten ergeben. Als Grundlage des adaptiven Verfahrens dient das in Abbildung 6.11(b) dargestellte Ausgangsnetz. Die Auswertung der Konvergenzraten bezüglich des Betragsmaximums des Fehlers in den Streuparametern ist in Abbildung 6.13 gezeigt. Wie die Konvergenzkurve für die Ansatzfunktionenordnung $p = 1$ des in vorherigen Kapitel beschriebenen

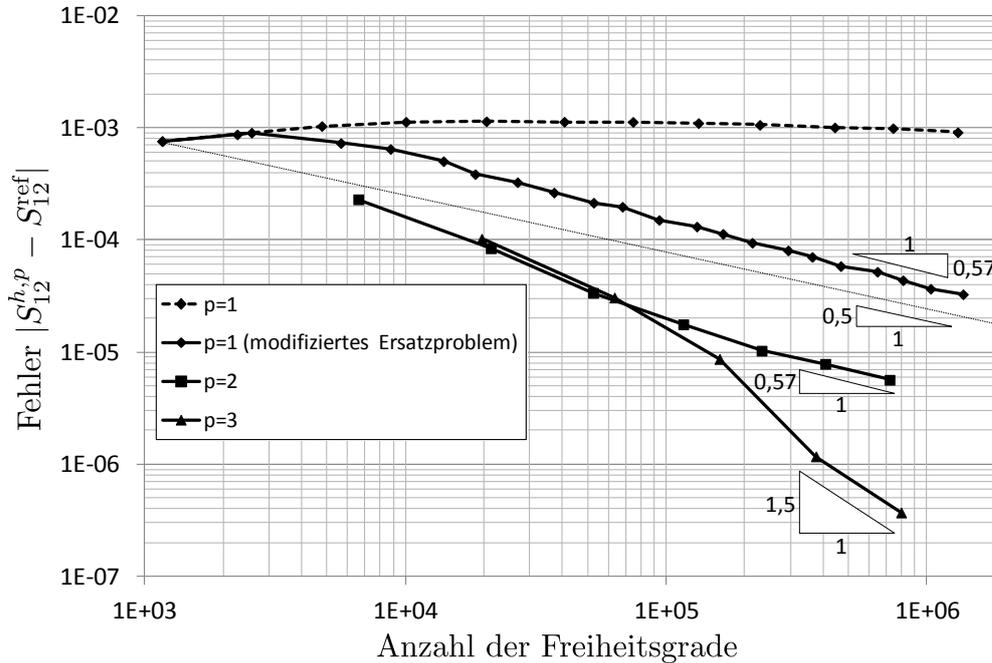
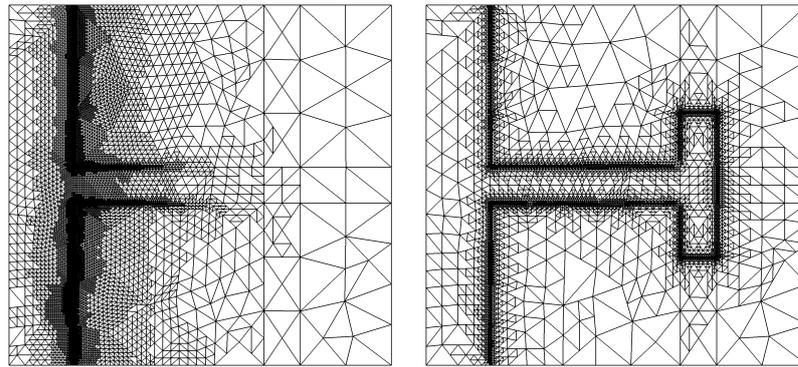


Abbildung 6.13: Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers in S_{12} bei $f = 1$ GHz. Als Referenzwerte für die Streuparameter wird die Lösung des Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.

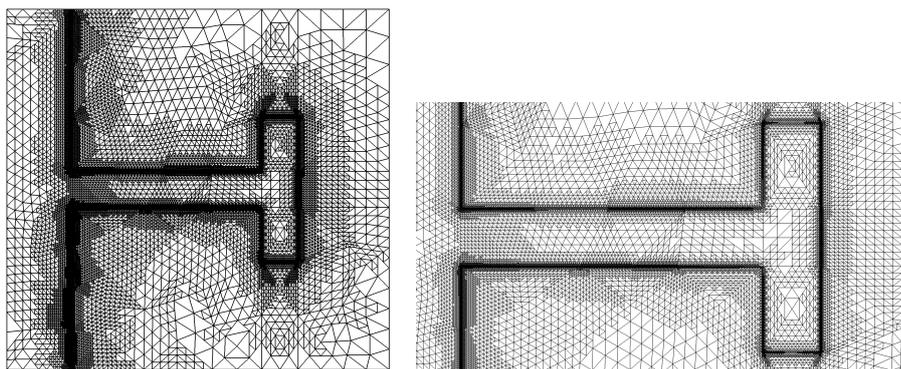
h -adaptiven Verfahrens zeigt, konvergiert für diesen Fall das Verfahren nicht. Für Ansatzfunktionen höherer Ordnung konvergiert das Verfahren jedoch, wenn auch für $p = 2$ mit $\mathcal{O}(N^{-0,57})$ unterhalb der prognostizierten asymptotischen Konvergenzrate. Die in Abbildung 6.14 dargestellten adaptiv verfeinerten Netze zeigen, dass im Falle $p = 1$ die kapazitiven Singularitäten von dem Fehlerindikator nicht erkannt werden, bzw. im Rahmen des adaptiven Prozesses keinen wesentlichen Beitrag gegenüber den induktiven Singularitäten leisten und daher unberücksichtigt bleiben. Im Fall $p = 2$ werden diese kapazitiven Singularitäten jedoch erkannt und das h -adaptive Verfahren konvergiert. Nach den Ausführungen in Abschnitt 5.2 wird der Fehlerindikator zuverlässigere Ergebnisse liefern, wenn die gestellten lokalen Hilfsprobleme vergrößert werden. Daher wird im Folgenden das lokale Dirichlet-Problem für $p = 1$ erweitert, indem alle Flächennachbarn des betrachteten Tetraeders T in das wirksame Gebiet des Hilfsproblems mit einbezogen werden. Die Ergebnisse des so modifizierten h -adaptiven Verfahrens für $p = 1$ sind in Abbildung 6.13 dargestellt. Hierbei wird die asymptotische Konvergenzrate näherungsweise erreicht und das Verfahren konvergiert damit ebenfalls für $p = 1$. Das adaptiv verfeinerte FE-Netz für diesen Fall ist in Abbildung 6.15 gezeigt. Im Vergleich zu dem erreichten FE-Netz des nicht angepassten Verfahrens für $p = 1$ werden in diesem Fall die kapazitiven Singularitäten von dem Fehlerindikator erkannt und entsprechend verfeinert.



(a) Adaptive Verfeinerung für $p = 1$.

(b) Adaptive Verfeinerung für $p = 2$.

Abbildung 6.14: Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz bei 1 GHz nach dem letzten adaptiven Schritt.



(a) Adaptive Verfeinerung für $p = 1$.

(b) Ausschnittsvergrößerung der adaptiven Verfeinerung für $p = 1$.

Abbildung 6.15: Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz bei 1 GHz nach dem letzten adaptiven Schritt für das modifizierte lokale Dirichlet-Problem.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein selbst-adaptives FE-Verfahren behandelt, das die Simulation passiver Mikrowellenstrukturen mithilfe eines h -adaptiven Prozesses erlaubt.

Hierzu wurde in Kapitel 3 und Kapitel 4 basierend auf einer hierarchischen FE-Basis mit Ansatzfunktionen bis zur Ordnung $p = 4$ eine selbstähnliche Verfeinerung tetraedrischer Triangulierungen herangezogen, die die Prolongation und Restriktion der FE-Lösungen zwischen den geschachtelten Netzhierarchien erlaubt. Durch die Verwendung hängender Unbekannter zur Konstruktion inkonsistent ungleichmäßig verfeinerter Netze wurde in Kapitel 4 der Grundstein zur lokalen Verfeinerung einer gegebenen Triangulierung gelegt und damit die Voraussetzung des in Kapitel 5 hergeleiteten lokalen Fehlerindikators geschaffen.

In Kapitel 5 wurde auf dieser Grundlage ein zielorientierter, impliziter, lokaler a posteriori Fehlerindikator entwickelt, der sich an der *Dual Weighted Residual Method* orientiert [BR01, BR95]. Dieser diente in weiterer Folge als Grundlage zur Konstruktion eines h -adaptiven FE-Verfahrens mit den Streuparametern als Zielgröße. Dabei wurde gezeigt, dass mithilfe eines Prolongationsoperators in einfacher Weise höhere Moden und Modensuperpositionen am Tor-Rand im Rahmen des vorgestellten h -adaptiven Prozesses behandelt werden können. Ein weiterer Vorteil der eingeführten Vorgehensweise der hierarchischen h -Verfeinerung ist, dass durch die Unterstützung hängender Unbekannte im gesamten adaptiven Prozess eine untere Schranke der Elementqualität gesichert bleibt.

Den Abschluss von Kapitel 5 bildet ein numerisches Beispiel anhand dessen der Fehlerindikator und das darauf basierende zielorientierte h -adaptive Verfahren evaluiert wurde. Hierbei wurde gezeigt, dass das h -adaptive Verfahren für Ansatzfunktionen bis dritter Ordnung die Konvergenz wiederherstellt, es jedoch für Ansatzfunktionen vierter Ordnung die Konvergenzordnung kaum verbessert. Weiterhin wurden

verschiedene Markierungsstrategien ausgewertet und im Hinblick auf die Selbst-Adaptivität eine Markierungsstrategie vorgeschlagen, die auf Basis der Standardabweichung die Ausreißer markiert und damit dynamisch die Menge der zu markierenden Tetraeder während des adaptiven Prozesses anpasst. Dies ist besonders dann von Vorteil, wenn komplexe Strukturen simuliert werden, die zum einen im Hinblick auf die Laufzeit keine kleine Gesamtzahl der zu markierenden Tetraeder erlaubt und zum anderen keine gute Bestimmung der Anzahl der zu markierenden Tetraeder zulässt.

In Kapitel 6 wurde das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte h -adaptive Verfahren anhand verschiedener Problemstellungen hinsichtlich der erreichten Konvergenzraten ausgewertet. Hierbei wurde gezeigt, dass das h -adaptive Verfahren zuverlässig arbeitet. Das abschließende Beispiel des Kapitels weist auf einen Sonderfall hin, in dem der Fehlerindikator bei Anwesenheit ausschließlich kapazitiver Singularitäten diese für Ansatzfunktionen erster Ordnung nicht erkennt. Abhilfe konnte geschaffen werden, indem das lokale Dirichlet-Problem mittels Hinzuziehen der Flächennachbarn des betrachteten Tetraeders vergrößert, und die Konvergenzordnung wiederhergestellt wurde.

Im Gegensatz zu der in [IHDE06] vorgestellten h -adaptiven FE-Methode werden in der vorliegenden Dissertation die lokalen Dirichlet-Probleme auf inkonsistenten Triangulierungen formuliert. Eine wesentliche Neuerung besteht in der Einführung hängender Unbekannten, die es erlauben eine hierarchische h -Verfeinerung im Rahmen des h -adaptiven FE-Verfahrens zu berücksichtigen, womit eine untere Schranke der Elementqualität über das gesamte Verfahren hinweg gesichert bleibt. Des Weiteren besitzt diese Vorgehensweise den Vorteil, dass auf einfache Weise Anregungen mit Modensuperpositionen berücksichtigt werden können. Das lokale Dirichlet-Problem wird dabei so formuliert, dass jener Effekt geschätzt wird, den eine h -Verfeinerung eines Elements des FE-Netzes im Fehler des Streuparameters bewirkt.

Das in dieser Arbeit vorgestellte h -adaptive Verfahren lässt sich in weiterer Folge aufgrund der verwendeten geschachtelten Netzhierarchien mit Mehrpunktverfahren zur schnellen Berechnung von Frequenzgängen passiver Mikrowellenstrukturen in einfacher Weise gewinnbringend kombinieren [Far07]. Hierzu werden an verschiedenen Frequenzen h -adaptiv verfeinerte Lösungen berechnet, die im Anschluss auf das kleinste gemeinsame FE-Netz prolongiert werden. Das FE-Modell wird daraufhin mit der entsprechend konstruierten prolongierten Basis reduziert. Dies bietet den Vorteil, dass sichergestellt ist, dass an jeder betrachteten Frequenz immer eine eigens für diesen Frequenzpunkt adaptiv berechnete Lösung vorliegt, die das Problem an dieser Stelle in der Regel deutlich besser approximiert als eine Lösung, die mithilfe eines FE-Netzes berechnet wurde, das an einer anderen Frequenz adaptiert wurde. Des Weiteren ist eine Einbettung geometrischer Multigrid-Löser, wie in [Hil06] vorgestellt, durch die erzeugten Netzhierarchien in dem vorgestellten h -adaptiven Verfahren in einfacher Weise möglich.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verallgemeinerte passive Mikrowellenstruktur.	6
2.2	Axial homogener Wellenleiter.	10
2.3	Richtungskonvention für vor- und rücklaufende Welle.	11
3.1	Der de-Rham-Komplex.	15
3.2	Tonti-Diagramm der Maxwell-Gleichungen [Kur03].	16
3.3	Referenztetraeder im lokalen Koordinatensystem.	18
3.4	Betrachtetes Feldgebiet mit disjunkten Teilrändern.	22
3.5	Schematische Darstellung eines Mehrtors mit inhomogener Diskontinuität.	27
3.6	Feldgebiet mit einmündendem axial homogenen Wellenleiter.	28
4.1	Verfeinerung eines Netzes.	38
4.2	Beispiel der verwendeten Unterteilung von Tetraedern.	38
4.3	Gleichmäßige Verfeinerung eines Netzes.	41
4.4	Ungleichmäßige Verfeinerung eines Netzes.	41
4.5	Lokale Verfeinerung eines Netzes.	42
4.6	Konstruktion der Pufferansatzfunktionen.	43
4.7	Träger der Pufferansatzfunktion ϕ_0^P	45
4.8	Träger der Pufferansatzfunktion \mathbf{u}_{03}^P	48

4.9	Träger der Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_{E_k}^\Gamma$ und $\mathbf{w}_{E_k}^{\Gamma_\Sigma}$, die die Pufferansatzfunktionen bilden.	50
4.10	Besetzungsstruktur der Restriktionsmatrix $\mathbf{R}_{h_1}^{h_0}$ eines Tetraeders für die Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_E^{h_k}, \mathbf{w}_D^{h_k}, \mathbf{w}_T^{h_k} \in \mathcal{W}^{h_k,4}(T)$. Hierbei werden die Ansatzfunktionen $\mathbf{w}_E^{h_k}$ mit den Kanten, $\mathbf{w}_D^{h_k}$ mit den Flächen und $\mathbf{w}_T^{h_k}$ mit den Tetraedern assoziiert. Die Anzahl der Nicht-Null-Elemente beträgt $nz = 5133$	56
4.11	Beziehung zwischen dem Prolongationsoperator $\mathbf{P}_{h_k}^{h_{k+1}}$ und den Funktionenräumen $\mathcal{W}^{h_k,p}$ und $\mathcal{W}^{h_{k+1},p}$	58
5.1	WR90 Rechteck-Hohlleiter. Schematische Darstellung der Struktur. Abmessungen: $a = 22.86$ mm, $b = 11.43$ mm und $l = 50$ mm. Die relative Permittivität beträgt $\varepsilon_r = 1$. Die relative Permeabilität beträgt $\mu_r = 1$	65
5.2	Konvergenz der FE-Methode für $\mathbf{E}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ am Beispiel eines Rechteck-Hohlleiters mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ ausgedrückt in dem Streuparameter S_{12} . Als Referenz dient die analytische Lösung des zugrunde liegenden Problems.	66
5.3	Gekrümmter Rechteck-Hohlleiter. Schematische Darstellung der Struktur. Abmessungen: $a = 22,86$ mm, $b = 11,43$ mm, $l = 45,72$ mm und $\alpha = 90^\circ$. Die relative Permittivität beträgt $\varepsilon_r = 1$. Die relative Permeabilität beträgt $\mu_r = 1$	67
5.4	Konvergenz der FE-Methode für $\mathbf{E}^{h,p} \in \mathcal{W}^{h,p}$ am Beispiel eines gekrümmten Rechteck-Hohlleiters mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ ausgedrückt in dem Streuparameter S_{12} . Als Referenz dient die zweidimensionale, äquivalente E-Ebenen-Lösung des zugrunde liegenden Problems.	68
5.5	Schematische Darstellung der Lokalität des wirksamen Gebiets für das Tetraeder T der Triangulierung $\mathcal{T}_h(\Omega)$	72
5.6	Schematische Darstellung der Anregung des lokalen Dirichlet-Hilfsproblems.	74
5.7	Eingeprägte Ränder des lokalen Hilfsproblems bezüglich verschiedener Ausgangskonstellationen des Tetraeders T im Ausgangsproblem.	77
5.8	Zulässige Markierungen von Tetraedern im Ausgangsnetz. Das zur Verfeinerung markierte Tetraeder ist grau hinterlegt. Das resultierende Netz nach der Verfeinerung des markierten Elements ist jeweils rechter Hand dargestellt.	80

5.9 Unzulässige Markierungen von Tetraedern im Ausgangsnetz. 81

5.10 Ausbreitung der Verfeinerung zur Gewährleistung eines Verfeinerungsunterschieds benachbarter Elemente von höchstens eins. 81

5.11 Gleichmäßige Verfeinerung eines inkonsistenten ungleichmäßig verfeinerten Ausgangsnetzes. Die Typenbezeichnungen der Elemente beziehen sich auf deren Konfiguration im Ausgangsnetz. 82

5.12 Hohlleiter-Filter mit einspringenden Kanten. 83

5.13 Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich S_{12} am Beispiel des Filters bei $f = 5,8$ GHz. Als Referenzwert S_{12}^{ref} wird die Lösung des äquivalenten zweidimensionalen H-Ebenen Problems [WP86] mit stark verfeinertem Netz und Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen. 84

5.14 Schnitt der Filterstruktur. Dargestellt sind die Oberflächennetze nach verschiedenen Durchläufen des h -adaptiven Verfahrens. 86

5.15 Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens für $p = 2$ bezüglich der Zielgrößen S_{11} und S_{12} der Filterstruktur bei $f = 4$ GHz. 87

5.16 Schnitt der Filterstruktur. Dargestellt ist jeweils das Oberflächennetz nach dem letzten Durchlauf des h -adaptiven Verfahrens im Sperrbereich des Filters bei 4 GHz. 88

5.17 Vergleich des geschätzten globalen Fehlers $\Delta \tilde{S}_{12}$ anhand der Filterstruktur bei $f = 5,8$ GHz mit dem Fehler bezüglich der Referenzlösung und mit der Änderung des S-Parameters zwischen zwei aufeinanderfolgenden adaptiven Schritten k 89

5.18 Vergleich verschiedener Markierungsstrategien bezüglich des Fehlers $\max_{k,l} |S_{kl}^{h,p} - S_{kl}^{\text{ref}}|$ anhand der Filterstruktur bei $f = 5,8$ GHz und für $p = 2$. SD bezeichnet hierbei die Standardabweichung der lokalen Fehler $\max_{k,l} |\Delta \tilde{S}_{kl}^T|$ der Tetraeder $T \in \mathcal{T}_h$ 90

6.1 Parallelplattenwellenleiter mit perfekt elektrisch leitendem Block. Der Block ist horizontal und vertikal mittig am Rand der Struktur angeordnet. Die perfekt leitenden Platten des Wellenleiters sind horizontal angeordnet. Der linke und rechte Rand der Struktur ist perfekt magnetisch leitend. 92

6.2	Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Betragsmaximums des Fehlers im S -Parameters bei $f = 2$ GHz. Als Referenzwert S_{kl}^{ref} wird die Lösung des jeweiligen Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.	93
6.3	Adaptiv verfeinertes Netz nach dem jeweils letzten adaptiven Schritt.	93
6.4	Ausschnittsvergrößerung des adaptiv verfeinertes Netz an der Singularität nach dem jeweils letzten adaptiven Schritt.	94
6.5	Patch-Antenne aus [SAAK90].	95
6.6	Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers im Reflexionsparameter bei $f = 7,52$ GHz. Als Referenzwert S_{11}^{ref} wird die Lösung des jeweiligen Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.	96
6.7	Adaptiv verfeinertes Netz der Patch-Antenne.	96
6.8	WR90 Rechteck-Hohlleiter mit dielektrischem Einsatz [Kat84] und Permittivität $\varepsilon_r = 6$	97
6.9	Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers des Betragsmaximums in den S -Parametern bei $f = 9,7$ GHz. Als Referenzwerte für die Streuparameter wird die Lösung des Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.	98
6.10	Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz des Rechteck-Hohlleiter mit dielektrischem Einsatz.	98
6.11	Mikrostreifenwellenleiter mit Stichleitung.	99
6.12	Felder beim Betrieb des Mikrostreifenwellenleiters mit Stichleitung bei 1 GHz.	99
6.13	Konvergenz des h -adaptiven Verfahrens bezüglich des Fehlers in S_{12} bei $f = 1$ GHz. Als Referenzwerte für die Streuparameter wird die Lösung des Problems mit stark adaptiv verfeinertem Netz und der Ansatzfunktionenordnung $p = 4$ herangezogen.	100
6.14	Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz bei 1 GHz nach dem letzten adaptiven Schritt.	101

6.15 Mithilfe des h -adaptiven Verfahrens verfeinertes FE-Netz bei 1 GHz
 nach dem letzten adaptiven Schritt für das modifizierte lokale Dirichlet-
 Problem. 101

Tabellenverzeichnis

3.1	Punktbeschreibung der Simplizes.	17
3.2	Beschreibung der Ansatzfunktionen.	19
3.3	Hierarchische Basis für \mathcal{V}	20
3.4	Hierarchische Ansatzfunktionen mit nicht verschwindender Rotation.	21
5.1	WR90 Rechteck-Hohlleiter. Berechnete und prognostizierte Konvergenzraten.	65
5.2	Gekrümmter Rechteck-Hohlleiter. Berechnete Konvergenzraten bei homogener h -Verfeinerung.	66
5.3	Erzielte Konvergenzraten mithilfe des h -adaptiven Verfahrens am Beispiel der Filterstruktur aus Abbildung 5.12(a). Die formal erreichbaren, asymptotischen Konvergenzraten sind zum Vergleich ebenfalls angegeben.	83
5.4	Laufzeiten des h -adaptiven Verfahrens mit verschiedenen Markierungsstrategien.	85

Literaturverzeichnis

- [Ain96] AINSWORTH, M.: The influence and selection of subspaces for a posteriori error estimators. In: *Numer. Math.* 73 (1996), S. 399–418
- [AN98] APEL, T. ; NICAISE, S.: The finite element method with anisotropic mesh grading for elliptic problems in domains with corners and edges. In: *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 21 (1998), Oct, Nr. 4, S. 519–549
- [AO00] AINSWORTH, M. ; ODEN, J. T.: *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley-Interscience, 2000
- [AS98] AINSWORTH, M. ; SENIOR, B.: An adaptive refinement strategy for *hp*-finite element computations. In: *Applied Numerical Mathematics* 26 (1998), S. 165–178
- [Beb00] BEBENDORF, M.: Approximation of boundary element matrices. In: *Numer. Math.* 86 (2000), S. 565–589
- [BEK92] BORNEMANN, F. ; ERDMANN, B. ; KORNHUBER, R.: Adaptive multi-level methods in three space dimensions. In: *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, Report SC-92-14* (1992)
- [Bet77] BETTESS, P.: Infinite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), Nr. 1, S. 53–64
- [Bey95] BEY, J.: Tetrahedral Grid Refinement. In: *Computing* 55 (1995), Oct, Nr. 4, S. 355–378
- [BKP79] BABUŠKA, I. ; KELLOGG, R. B. ; PITKÄRANTA, J.: Direct and inverse error estimates for finite elements with mesh refinements. In: *Numerische Mathematik* 33 (1979), S. 447–471
- [Bla91] BLADEL, J. van: *Singular Electromagnetic Fields and Sources*. Oxford Science Publications, 1991
- [Bos98] BOSSAVIT, A.: *Computational Electromagnetism*. Academic Press (Boston), 1998

- [BR78a] BABUŠKA, I. ; RHEINBOLDT, W. C.: A-posteriori error estimates for the finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), S. 1597–1615
- [BR78b] BABUŠKA, I. ; RHEINBOLDT, W. C.: Error estimates for adaptive finite element computations. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 15 (1978), Nr. 4, S. 736–754
- [BR79] BABUŠKA, I. ; RHEINBOLDT, W. C.: Analysis of optimal finite element meshes in R^1 . In: *Mathematics of Computation* 33 (1979), Nr. 146, S. 435–463
- [BR95] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: Weighted a posteriori error control in FE methods. In: *Lecture ENUMATH-95*, 1995, S. 18–22
- [BR01] BECKER, R. ; RANNACHER, R.: An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. In: *Acta Numerica* 10 (2001), S. 1–102
- [BSW83] BANK, R. E. ; SHERMAN, A. H. ; WEISER, A.: Some Refinement Algorithms and Data Structures for Regular Local Mesh Refinement. In: *Scientific Computing* (1983), S. 3–17
- [BT80] BAYLISS, A. ; TURKEL, E.: Radiation boundary conditions for wave-like equations. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 33 (1980), November, S. 707–725
- [BW11] BABUŠKA, I. ; WHITEMAN, J. R.: *Finite elements: an introduction to the method and error estimation*. Oxford University Press, 2011
- [CL80] CHEN, C. H. ; LIEN, C.-D.: The Variational Principle for Non-Self-Adjoint Electromagnetic Problems. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 28 (1980), August, Nr. 8, S. 878–886
- [CL88] CENDES, Z. J. ; LEE, J.-F.: The Transfinite Element Method for Modeling MMIC Devices. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 36 (1988), Dezember, Nr. 12, S. 1639–1649
- [Col91] COLLIN, R. M.: *Field Theory of Guided Waves*. 2. Auflage. Piscataway, NY : IEEE Press, 1991 (The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory)
- [DEB96] DYCZIJ-EDLINGER, R. ; BIRO, O.: A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44 (1996), Januar, S. 15–23

- [Dem07] DEMKOWICZ, L.: *Computing with hp-adaptive finite elements*. Bd. 1, One and two dimensional elliptic and maxwell problems. Chapman and Hall/CRC, 2007
- [EM77] ENGQUIST, B. ; MAJDA, A.: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. In: *Mathematics of Computation* 31 (1977), Juli, Nr. 139, S. 629–651
- [Far07] FARLE, O.: *Ordnungsreduktionsverfahren für die Finite-Elemente-Simulation parameterabhängiger passiver Mikrowellenstrukturen*, Universität des Saarlandes, Diss., 2007
- [FM94] FELSEN, L. B. ; MARCUVITZ, N.: *Radiation and Scattering of Waves*. IEEE Press, 1994 (The IEEE/OUP Series on Electromagnetic Wave Theory)
- [Fra04] FRANKEL, T.: *The Geometry of Physics*. 2. Auflage. Cambridge University Press, 2004
- [Fre42] FREUDENTHAL, H.: Simplicialzerlegungen von beschränkter Flachheit. In: *Annals of Mathematics* 43 (1942), Nr. 3, S. 580–582
- [GB86] GUI, W. ; BABUŠKA, I.: The h , p and h - p versions of the finite element method in 1 dimension. Part I: The error analysis of the p -version, Part II: The error analysis of the h - and h - p versions, Part III: The adaptive h - p version. In: *Numerische Mathematik* 49 (1986), S. 577–683
- [Hac99] HACKBUSCH, W.: A sparse matrix arithmetic based on H-matrices. Part I: Introduction to H-matrices. In: *Computing* 62 (1999), S. 89–108
- [Hac03] HACKBUSCH, W.: *Mult-Grid Methods and Applications*. Springer, 2003 (2)
- [Har01] HARRINGTON, R. F.: *Time-harmonic Electromagnetic Fields*. Neuaufgabe. Piscataway, NY : IEEE Press, 2001
- [HFDE03] HILL, V. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A stabilized multilevel vector finite-element solver for time-harmonic electromagnetic waves. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 39 (2003), Nr. 3, S. 1203–1206
- [HFDE04] HILL, V. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Finite element basis functions for nested meshes of nonuniform refinement level. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 40 (2004), Nr. 2, S. 981–984
- [Hil06] HILL, V.: *Schnelle Finite-Elemente-Methoden zur Simulation elektromagnetischer Felder im Frequenzbereich*, Universität des Saarlandes, Diss., 2006

- [IHDE06] INGELSTRÖM, P. ; HILL, V. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Goal-Oriented Error Estimates for *hp*-Adaptive Solutions of the Time-Harmonic Maxwell's Equations. In: *Electromagnetic Field Computation, 2006 12th Biennial IEEE Conference on*, 2006, S. 396
- [Ing06] INGELSTRÖM, Pär: A new set of H(curl)-conforming, hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 54 (2006), Januar, S. 106–114
- [Jac01] JACKSON, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*. 3. Auflage. Berlin : de Gruyter, 2001
- [Jin02] JIN, J.: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. 2. Auflage. John Wiley & Sons, Inc., 2002
- [JW78] JENG, G. ; WEXLER, A.: Self-adjoint variational formulation of problems having non-self-adjoint operators. In: *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* 26 (1978), Februar, Nr. 2, S. 91–94
- [KA00] KNABNER, P. ; ANGERMANN, L.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, 2000
- [Kat84] KATZIER, H.: Streuverhalten elektromagnetischer Wellen bei sprunghaften Übergängen geschirmter dielektrischer Leitungen. In: *AEU* 38 (1984)
- [Kel84] KELLY, D. W.: The self-equilibration of residuals and complementary a posteriori error estimates in the finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 20 (1984), S. 1491–1506
- [KGZB83] KELLY, D. W. ; GAGO, J. P. d. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; BABUŠKA, I.: A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I - Error analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19 (1983), S. 1593–1619
- [Kur03] KURZ, S.: Kontinuierliche und diskrete Differenzialformen als Ausgangspunkt für numerische Methoden in der Elektrodynamik. In: *Advances in Radio Science* 1 (2003), Mai, S. 73–80
- [KW90] KANELLOPOULOS, V. N. ; WEBB, J. P.: A complete E-plane analysis of waveguide junctions using the finite element method. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 38 (1990), S. 290–295
- [Lee90] LEE, J.-F.: Analysis of passive microwave devices by using three-dimensional tangential vector finite elements. In: *International Journal of Numerical Modeling: Electronic Networks, Devices and Fields* 3 (1990), S. 235–246

- [Mon92] MONK, P.: A finite element method for approximating the time-harmonic Maxwell equations. In: *Numerische Mathematik* 63 (1992), S. 243–261
- [Mon03] MONK, P.: *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford Science Publications, 2003 (Numerical mathematics and scientific computation)
- [Néd80] NÉDÉLEC, J. C.: Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . In: *Numerische Mathematik* 35 (1980), September, Nr. 3, S. 315–341
- [Poz98] POZAR, David M.: *Microwave Engineering*. Second. New York : John Wiley & Sons, 1998
- [PRM98] PETERSON, A. F. ; RAY, S. L. ; MITTRA, R.: *Computational Methods for Electromagnetics*. Piscataway, NY : IEEE Press, 1998
- [RC09] ROTHWELL, E. J. ; CLOUD, M. J.: *Electromagnetics*. Second edition. CRC Press, 2009
- [Rüd93] RÜDE, U.: *Mathematical and computational techniques for multilevel adaptive methods*. PA: SIAM, 1993
- [Rok85] ROKHLIN, V.: Rapid solution of integral equations of classical potential theory. In: *Journal of Computational Physics* 60 (1985), S. 187–207
- [SAAK90] SHEEN, David M. ; ALI, Sami M. ; ABOUZAHRA, Mohamed D. ; KONG, Jin A.: Application of the Three-Dimensional Finite-Difference Time-Domain Method to the Analysis of Planar Microstrip Circuits. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique* 38 (1990), Jul, Nr. 7
- [SB91] SZABÓ, B. A. ; BABUŠKA, I.: *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991
- [Sch98] SCHWAB, Ch.: *p- and hp-finite element methods: Theory and applications in solid and fluid mechanics*. Oxford Science Publications, 1998 (Numerical Mathematics and Scientific Computation)
- [SF73] STRANG, W. G. ; FIX, G. J.: *Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley Cambridge Press, 1973
- [Sha95] SHAIUROV, V. V.: *Multigrid methods for finite elements*. Kulwer Academic Publishers, 1995
- [SKLL95] SACKS, Z. S. ; KINGSLAND, D. M. ; LEE, R. ; LEE, J.-F.: A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 43 (1995), Dezember, Nr. 12, S. 1460–1463

- [TH05] TAFLOVE, A. ; HAGNESS, S. C.: *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3. Auflage. Artech House Publishers, 2005
- [Ver89] VERFÜRTH, R.: A posteriori error estimators for the Stokes equations. In: *Numer. Math.* 55 (1989), S. 309–325
- [Ver94] VERFÜRTH, R.: A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. In: *Journal of Computational Applied Mathematics* 50 (1994), S. 67–83
- [Web93] WEBB, J. P.: Edge Elements and What They can do for You. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 29 (1993), Nr. 2, S. 1460–1465
- [Web99] WEBB, J. P.: Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 47 (1999), August, Nr. 8, S. 1244–1253
- [Wei96] WEILAND, T.: Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods. In: *International Journal of Numerical Modelling* 9 (1996), S. 295–319
- [WM99] WEBB, J. P. ; MCFEE, S.: Nested tetrahedral finite elements for h -adaption. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 33 (1999), S. 1338–1341
- [WP86] WEBB, J. P. ; PARIHAR, S.: Finite element analysis of H-plane rectangular waveguide problems. In: *IEEE Proceedings* 133 (1986), S. 91–94
- [Yee66] YEE, K.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14 (1966), Mai, Nr. 3, S. 302–307
- [ZC06] ZHU, Y. ; CANGELLARIS, A.: *Multigrid Finite Element Methods for Electromagnetic Field Modeling*. Piscataway, NY : IEEE Press, 2006