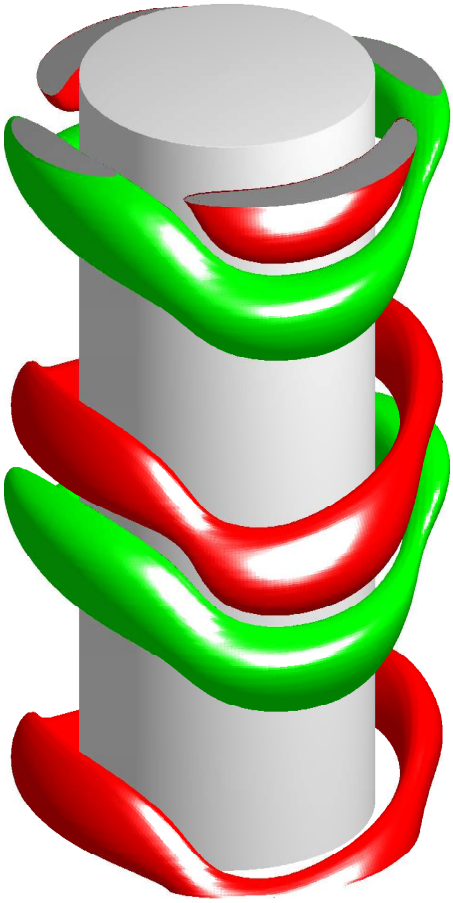
Untersuchung von komplexen Wirbelströmungen mit newtonschem Fluid und Ferrofluiden im Taylor–Couette System



Dissertation von
Sebastian Altmeyer

Untersuchung von komplexen Wirbelströmungen mit newtonschem Fluid und Ferrofluiden im Taylor–Couette System

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades

des Doktors der Naturwissenschaften

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II
- Physik und Mechatronik -
der Universität des Saarlandes

von
Sebastian Altmeyer

Saarbrücken
2011

Sebastian Altmeyer: *Untersuchung von komplexen Wirbelströmungen mit newtonschem Fluid und Ferrofluiden im Taylor-Couette System. Dissertation an der Universität des Saarlandes (2011)*

Tag des Koloquiums:	30.09.2011
Dekan:	Prof. Dr. H. Seidel
Mitglieder des Prüfungsausschusses:	
Vorsitzender:	Prof. Dr. R. Pelster
1. Gutachter:	Prof. Dr. M. Lücke
2. Gutachter:	Prof. Dr. K. Kruse
Akad. Mitarbeiter:	Dr. S. Gruener

Es gibt keine induktive Methode, welche zu den Grundbegriffen der Physik führen könnte.

(Albert Einstein, Physik und Realität (1935))

Danke!

Ich möchte an dieser Stelle allen Menschen danken, die mich in meinem Studium unterstützt haben.

- Meinem Doktorvater, *Herrn Prof. Dr. Manfred Lücke*, dessen Anregungen, Kritik und Intuition wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.
- Meinen *Eltern* für die finanzielle Unterstützung.
- Meinen *Freunden* und *Kameraden*, die mich im Studium begleitet haben.
- *Dr. Klaus Schindler* und *Jutta Kronenberger* für die angenehme und interessante Zeit am Lehrstab Mathematik.
- Meinem Freund und Zimmergenossen *Dr. Christian Hoffmann* für fruchtbare Zusammenarbeit und vieles darüber hinaus.
- Allen Korrekturlesern.
- Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für die angenehme Zusammenarbeit.

Diese Arbeit wurde mit Unterstützung der DFG, unter anderem des Graduiertenkollegs 1276/1, angefertigt.

Saarlouis, im Februar 2011 Sebastian Altmeyer

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich diese Arbeit selbst angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet habe.

Saarbrücken, den 30.09.2011

Sebastian Altmeyer

Kurzdarstellung

I

Mittels numerischer Simulationen wurden u.a. Bifurkationsverhalten, nichtlineare Dynamik, Stabilität, strukturelle Eigenschaften und das raumzeitliche Verhalten verschiedener Strömungszustände im Taylor-Couette System (TCS) untersucht.

Insbesondere wurde der Fragestellung nachgegangen, wie sich der Übergang zwischen topologisch unterschiedlichen Strukturen, wie toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln (TVF) und offenen, helikalen Spiral Wirbeln (SPI), vollzieht. Es konnte nachgewiesen werden, dass dieser Übergang über spezielle, sekundär bifurkierende Wirbel Strukturen, die toroidal geschlossenen Wavy Taylor Wirbel (wTVF) und die helikalen Wavy Spiral Wirbel (wSPI), abläuft.

Unter axial periodischen Randbedingungen läuft dieser Übergang in beiden Richtungen symmetrisch ab, also von TVF über wTVF zu SPI Strukturen bzw. von SPI über wSPI zu TVF Strukturen. Hierbei treten in beiden Fällen instabile Ribbon (RIB) Lösungen als transiente Zustände auf. Bei diesen handelt es sich um axial stehende Wellen als nichtlineare Superposition zweier SPI Lösungen unterschiedlicher Helizität.

Andererseits existieren im axial begrenzten TCS anstelle der reinen Spiralen mit kontinuierlicher Gleit-Drehsymmetrie, aufgrund der an den Deckeln vorhandenen Ekman Wirbel und der durch diese im Innern des Annulus' angeregten Störungen, nur modulierte Spiral Lösungen (wSPI). Abgesehen davon verläuft der Übergang von TVF zu wSPI über wTVF Lösungen im endlichen System analog wie unter periodischen Randbedingungen, mit dem einzigen Unterschied, dass eine diskrete Wellenzahl selektiert werden kann. Der Übergang von wSPI zu TVF Strukturen verläuft im endlichen System über einen transienten Zwischenzustand eines propagierenden Defekts.

Darüber hinaus wurde eine vollständig neue Form eines Übergangs zwischen SPI Lösungen unterschiedlicher Ganghöhe untersucht. Dabei tritt eine neue Art von Lösungen, sogenannte Mixed-Cross-Spirals (MCS) auf, die als Zwischenzustände existieren.

II

Im zweiten Teil der Arbeit wurde der Einfluss verschiedener Magnetfelder auf ein Ferrofluid im TCS untersucht. Unabhängig von ihrer Orientierung führen Magnetfelder im Allgemeinen zu einer Stabilisierung des Grundzustands.

Die magnetischen Kopplungsterme in den Grundgleichungen wirken sich auf die topologischen Eigenschaften der unterschiedlichen Lösungsstrukturen aus. So werden z.B. reine Taylor oder Spiral Wirbel durch spezielle Magnetfeldkonfigurationen modifiziert und treten dann nur noch in Form von modulierten Taylor bzw. Spiral Wirbeln auf.

Abstract

I

Bifurcation behavior, non-linear dynamics, stability, structural properties, and the spatio-temporal behavior of different flow states in the Taylor-Couette system (TCS) are investigated by numerical simulations of the Navier-Stokes equations.

In particular, the transition between topological different structures is examined, i.e. between the toroidal closed Taylor vortices (TVF) and the open, helical spirals (SPI). These transitions are mediated by specific, secundarily bifurcating wavy structures, namely the toroidal closed wavy Taylor vortices (wTVF) and the helical wavy spiral vortices (wSPI).

Under periodic boundary conditions (pbc), the transition from TVF to SPI via wTVF corresponds to the transition from SPI to TVF via wSPI. In both cases unstable ribbons (RIB) are found as a transient state. These are axial standing waves generated by nonlinear superposition of two SPI states with different helicity.

On the other hand in the finite-length TCS, pure SPI states with continuous glide-rotation symmetry are generally replaced by modulated SPI states (wSPI). This is due to the boundary-induced perturbations from the Ekman vortices near the lids into the bulk. Beside this, the transition from TVF to wSPI via wTVF is similar to the pbc situation but with wave number selection. The transition from wSPI to TVF in the finite system is performed by a propagating defect.

Furthermore, a new kind of transitions between SPI states with different pitches was investigated. Thereby, a new type of solutions occur, so-called mixed-cross-spirals (MCS).

II

In the second part of this theses, the influence of different magnetic fields on a ferrofluid in the TCS was investigated. Generally, magnetic fields of any orientation stabilize the ground state.

The magnetic coupling terms in the basic equations influence the topological properties of the different solutions: pure Taylor and spiral vortices are changed into modulated Taylor (wTVF) and spiral (wSPI) vortices.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **IV**

Abbildungsverzeichnis **XI**

Tabellenverzeichnis **XIII**

Symbolverzeichnis **XIII**

Filmverzeichnis **XV**

1 Das Taylor-Couette System - Systembeschreibung **1**
1.1 Allgemeine Einführung - Vorbemerkungen 1
1.2 Literaturbetrachtung 2
1.3 Aufbau des Taylor-Couette Systems 9
1.4 Grundgleichungen 11
1.4.1 Entdimensionalisierung 12
1.4.2 Grundzustand 13
1.5 Numerische und analytische Untersuchungsmethoden 16

I Klassisches Taylor-Couette System mit newtonschem Fluid **19**

2 Einführung Teil I **21**
2.1 Motivation 21
2.2 Ziele und Gliederung – Teil I 21

3 Strukturen im Taylor-Couette System (TCS) **25**
3.1 Überblick über die untersuchten Parameterbereiche 25
3.2 Charakterisierung unterschiedlicher Strukturen im TCS 29
3.3 Strukturen im klassischen TCS 30
3.3.1 Taylor Vortex Flow (TVF), Taylor Wirbel 30
3.3.2 Spiral Vortex Flow (SPI), Spiral Wirbel 31
3.3.3 Mixed Cross Spirals (MCS) 36
3.3.4 Ribbon (RIB) und Cross Spirals (CSPI) 38
3.3.5 Wavy Vortex Flow (WVF) 42
3.3.6 Wavy Taylor Vortex Flow (wTVF), Wavy Taylor Wirbel 44
3.3.7 Wavy Spiral Vortex Flow (wSPI), Wavy Spiral Wirbel 44
3.4 Strukturen im TCS mit Ferrofluiden 49

3.4.1 Wavy Taylor Vortex Flow (wTVF), Wavy Taylor Wirbel in Magnetfeldern . . . 49
3.4.2 Wavy Spiral Vortex Flow (wSPI), Wavy Spiral Wirbel in Magnetfeldern 52

4 Übergänge zwischen TVF und SPI (pbc) 57
4.1 Einleitung - Motivation . . . 57
4.2 Theoretische Beschreibung . . . 58
4.3 Bifurkationsszenarien und Phasendiagramm . . . 62
4.3.1 Bifurkationsverhalten als Funktion von R_1 . . . 62
4.3.2 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm . . . 65
4.3.3 Wellenzahlabhängigkeit k . . . 68
4.3.4 $k - R_1 - R_2$ Phasendiagramm . . . 70
4.4 Eigenschaften von Wavy Strukturen . . . 73
4.4.1 Klassifikation . . . 73
4.4.2 Strukturen: wTVF und wSPI . . . 75
4.4.3 Frequenzen . . . 78
4.5 Raumzeitliches Verhalten von Transienten . . . 80
4.6 Axialer Durchfluss . . . 84
4.6.1 Bifurkationsverhalten als Funktion von Re . . . 85
4.6.2 $R_1 - Re$ Phasendiagramm . . . 89
4.7 Resumé . . . 95

5 Übergänge zwischen TVF und wSPI (rbc) 99
5.1 Einleitung - Motivation . . . 99
5.2 Übergänge zwischen TVF und wSPI . . . 100
5.2.1 Übergänge von TVF zu wSPI . . . 102
5.2.2 Übergang von wSPI zu TVF . . . 106
5.3 Lokalisierte Defekte und Strukturen . . . 112
5.3.1 Bifurkationsverhalten . . . 113
5.3.2 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm . . . 114
5.3.3 Strukturen . . . 116
5.4 Axialer Durchfluss Re . . . 119
5.5 Resumé . . . 120

6 Mixed Cross Spirals (MCS) 123
6.1 Einleitung - Motivation . . . 123
6.2 Theoretische Beschreibung – Grundlagen . . . 124
6.2.1 Ribbons (RIB) und Cross Spirals (CSPI) . . . 124
6.2.2 Charakterisierung von MCS Strukturen . . . 124
6.3 Strukturelle Eigenschaften . . . 125
6.3.1 Ribbons (RIB) und Mixed Ribbons (MRIB) . . . 125
6.3.2 Cross Spirals (CSPI) und Mixed Cross Spirals (MCS) . . . 126
6.3.3 Raumzeitliche Eigenschaften . . . 128
6.4 Bifurkationsverhalten und Stabilität von MCS . . . 132
6.4.1 Bifurkationsszenarien . . . 132
6.4.2 Frequenzen . . . 134
6.4.3 Stabilität . . . 135
6.4.4 Phasendiagramm . . . 136
6.4.5 Eingrenzung des Parameterbereiches . . . 137
6.5 Übergänge zwischen SPI mittels MCS . . . 139

6.5.1 Bifurkationsverhalten beim Übergang L-SPI↔MCS↔R-SPI 140
6.5.2 Raumzeitliches Verhalten beim transienten Übergang R4L3-MCS→R4L3-MRIB→L3R4-MCS 142
6.5.3 L1R3-MCS gegenüber R3L1-MCS 146
6.6 Vergleich mit dem Experiment und Ausblick 148
6.7 Resumé 150

II Ferrofluide im Taylor-Couette System 153

7 Einführung Teil II 155
7.1 Einleitung - Motivation 155
7.2 Literatur 155
7.3 Ziele und Gliederung – Teil II 158

8 Theoretische Grundlagen zu Ferrofluiden 161
8.1 Grundlagen – System und theoretische Beschreibung 161
8.1.1 Magnetisierungsgleichungen 162
8.1.2 Erweiterte Navier-Stokes Gleichungen 163
8.2 Klassifikation der untersuchten Strukturen 165
8.3 Modenkopplung – angeregte Moden im Magnetfeld 166
8.4 Resumé 166

9 Strömungsmuster von Ferrofluiden 169
9.1 Bifurkationsverhalten 169
9.1.1 Axiales Feld 171
9.1.2 Transversales Feld 171
9.1.3 Überlagerte und kombinierte Felder - schräges Feld 171
9.1.4 Steigungen der TVF Bifurkationsäste in axialen Feldern 173
9.1.5 Bifurkationsäste im transversalen Feld 173
9.1.6 Modenzusammensetzung von (w)SPI im transversalen Feld 176
9.2 Wirbelstrukturen und Modenzusammensetzungen 176
9.2.1 Axiales Feld 178
9.2.2 Transversale und überlagerte Felder 178
9.2.3 Strukturelle Zerlegung 179
9.3 Auswirkungen von **H** Feldern auf die Bifurkationsschwellen 179
9.3.1 Überschneidung der SPI und TVF Bifurkationsschwellen 179
9.3.2 Stabilisierung des CCF Grundzustands 182
9.4 Wavy Taylor Wirbel im Magnetfeld 183
9.5 Vergleich: Wavy Strukturen mit und ohne Magnetfeld 184
9.6 Frequenzen von SPI und wSPI Strukturen 186
9.7 Übergänge von wTVF zu wSPI im Magnetfeld 187
9.7.1 Bifurkation in R_1 187
9.7.2 Bifurkation in s_x und s_z 189
9.8 Strömungsmuster im endlichen System ($\Gamma = 10$) 193
9.9 Resumé 195

10 Zusammenfassung 199

A Lineare Stabilitätsanalyse **205**
A.1 Mathematisches Vorgehen . . . 205
A.2 Herleitung der Gleichungen . . . 205

B $M = 2$ Inseln und bikritische Zustände **213**
B.1 Motivation . . . 213
B.2 System . . . 214
B.3 Axial unendlich ausgedehnte Wirbel Strukturen . . . 215
B.3.1 Axialer Durchfluss . . . 215
B.3.2 Gegenrotierende Zylinder . . . 220
B.4 Lokalisierte Strukturen - Wellenpakete . . . 223
B.4.1 Konvektive und absolute Instabilität . . . 224
B.4.2 Fronten . . . 235
B.5 Resumé . . . 239

C Visualisierungsmethoden - Vortizität **241**

D Numerische Lösungsverfahren **247**
D.1 G2D2 . . . 248
D.1.1 Darstellung der Gleichungen . . . 248
D.1.2 Entwicklung der Felder in azimutaler und axialer Richtung . . . 250
D.1.3 Diskretisierung . . . 252
D.1.4 Druckiteration - Poisson Gleichung . . . 253
D.1.5 Randbedingungen . . . 255
D.1.6 Stabilisierung instabiler Strukturen . . . 256
D.1.7 Überprüfung des Codes . . . 257
D.2 G1D3 mit Niklas Näherung . . . 264
D.2.1 Modenentwicklung in Niklas Näherung . . . 264
D.2.2 Diskretisierung . . . 266
D.2.3 Druckiteration - Poisson Gleichung . . . 268
D.2.4 Randbedingungen . . . 269

E Diskretisierte Form der Gleichungen **271**
E.1 Diskretisierte Form der NSE - G2D2 . . . 271
E.1.1 Lineare Terme . . . 272
E.1.2 Nichtlineare Terme . . . 272
E.2 Diskretisierte Form der Poisson Gleichung . . . 272
E.3 Diskretisierte Form der NSE - G1D3 . . . 276
E.3.1 Lineare Terme . . . 277
E.3.2 Nichtlineare Terme . . . 278

Literaturverzeichnis **283**

Abbildungsverzeichnis

1.1 Schematische Darstellung des *Taylor-Couette Systems* (TCS) für periodische Randbedingungen (pbc). 9
1.2 Einfluss von R_2 und η auf $v_{CCF}(r)$. 14
1.3 Einfluss von R_2 und η auf $w_{APF}(r)$. 15

3.1 Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über den, im ersten Teil dieser Arbeit, untersuchten Parameterbereich im Hinblick auf Übergänge zwischen toroidal geschlossenen TVF und offenen, helikalen SPI Strukturen. $\eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 26
3.2 Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über den Parameterbereich der, weiter im ersten Teil dieser Arbeit, bzgl. der komplexen MCS Strukturen untersucht wird. $\eta = 0.883, k = 3.927, Re = 0$. 27
3.3 Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über den Parameterbereich der im zweiten Teil dieser Arbeit im Zusammenhang mit Ferrofluiden und extern angelegten Magnetfeldern untersucht wurde. $\eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. . . 28
3.4 Charakterisierung eines TVF Zustands: $R_1 = 80, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 32
3.5 Charakterisierung eines L1-SPI Zustands: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 33
3.6 Charakterisierung eines L2-SPI Zustands: $R_1 = 150, R_2 = -125, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 34
3.7 Charakterisierung eines L3R5-MCS Zustands: $R_1 = 200, R_2 = 0, \eta = 0.833, k = 3.927, Re = 0$. 37
3.8 Schematischer Aufbau einer MCS Lösung als Superposition zweier reiner SPI Strukturen unterschiedlicher Helizität und azimutaler Wellenzahl M. . 39
3.9 Charakterisierung eines 1-RIB Zustands: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 40
3.10 Charakterisierung eines 2-RIB Zustands: $R_1 = 200, R_2 = -400, \eta = 0.5, k = 4.883, Re = 0$. 41
3.11 Schematischer Aufbau von CSPI und RIB Lösungen als Superposition zweier reiner SPI Strukturen verschiedener Helizität und identischer Wellenzahl M. 43
3.12 Charakterisierung eines 2-WVF Zustands: $R_1 = 244, R_2 = -150, \eta = 0.5, k = 4.2, Re = 0$. 45
3.13 Charakterisierung eines wTVF Zustands: $R_1 = 116, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 46
3.14 Charakterisierung eines weiteren wTVF Zustands: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 47
3.15 Charakterisierung eines wSPI Zustands: $R_1 = 96, R_2 = -25, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 48

3.16 Charakterisierung eines wTVF Zustands in rein transversalem Magnetfeld: $s_x = 0.6, s_z = 0.0, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 50
3.17 Charakterisierung eines weiteren wTVF Zustands bei überlagerten, axial- und transversalen Magnetfeldern: $s_x = 0.6, s_z = 0.6, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 51
3.18 Schematische Darstellung einer klassischen wTVF Lösung und einer durch ein Magnetfeld erzeugten wTVF Struktur. 52
3.19 Charakterisierung eines wSPI Zustands in rein transversalem Magnetfeld: $s_x = 0.6, s_z = 0.0, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 53
3.20 Charakterisierung eines weiteren wSPIs Zustand bei überlagerten, axial- und transversalen Magnetfeldern: $s_x = 0.6, s_z = 0.6, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$. 54

4.1 Kopplungsschema der drei kritischen Moden für wTVF und wSPI Lösungen im (m, n) Modenraum. 60
4.2 Schematisches Modell der möglichen Übergänge zwischen CCF, TVF, SPI, RIB, wTVF und wSPI Strukturen für pbc Bedingungen. 62
4.3 Bifurkationen verschiedener Wirbelstrukturen in Abhängigkeit von R_1 für $R_2 = -100$ und $R_2 = -25, \eta = 0.5, k = 3.927$. 63
4.4 Schematisches Bifurkationsdiagramm von Wavy Strukturen für pbc Bedingungen und einen geeigneten Parameter, z.B. R_2. 64
4.5 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF und wSPI Lösungen $\eta = 0.5$, $k = 3.927$. 66
4.6 Schematisches Phasendiagramm in der $R_1 - R_2$ Ebene für pbc Bedingungen. Bifurkationsverhalten der verschiedenen Lösungen um den polykritischen Punkt γ. 68
4.7 Bifurkationsdiagramm für verschiedene Wirbelstrukturen in Abhängigkeit der Wellenzahl k für $R_1 = 120$, $R_2 = -100$ und $R_1 = 96$, $R_2 = -25$, $\eta = 0.5$. 69
4.8 Phasendiagramm in der $k - R_1$ Ebene für $R_2 = -100, \eta = 0.5$. 70
4.9 Phasendiagramm in der $k - R_2$ Ebene für $R_1 = 115, \eta = 0.5$. 71
4.10 Phasendiagramm im $k - R_1 - R_2$ Raum mit den verschiedenen Sektionen der unterschiedlichen Wirbel Zustände. 72
4.11 Schematische Darstellung verschiedener Wirbel Zustände auf einer in azimutaler Richtung abgerollten Zylinderoberfläche. 74
4.12 Raumzeitliche Eigenschaften eines wTVF Zustands bei $R_1 = 120$, $R_2 = -100$ und einer links gewundener wSPI Struktur bei $R_1 = 96$, $R_2 = -25$, $k = 3.927, \eta = 0.5$. 76
4.13 Strukturelle Zerlegung eines wTVF Zustands bei $R_1 = 120$, $R_2 = -100$, $k = 3.927$ und eines wSPI Zustands bei $R_1 = 115$, $R_2 = -50$, $k = 4.8$, $\eta = 0.5$ in verschiedene Anteile des Modenunterraums. 77
4.14 Bifurkationsdiagramme der verschiedenen Frequenzen $\omega_{m,n}$ mit denen die Amplituden der komplexen Moden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in der Mitte des Spaltes oszillieren. $k = 3.927$, $\eta = 0.5$ bei $R_2 = -100$ und $R_2 = -25$. 79
4.15 Zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ während des Übergangs von TVF→wTVF→SPI bei $R_1 = 115, R_2 = -100$ und SPI→wSPI→TVF bei $R_1 = 92.2, R_2 = 0$, $R_1 = 85, R_2 = -25$ und $R_1 = 90, R_2 = -25$, so wie $k = 3.927, \eta = 0.5$. 82
4.16 Snapshots der Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ zu acht verschiedenen Zeitpunkten aus Abbildung 4.15 für $R_1 = 115, R_2 = -100$ und $R_1 = 92.2, R_2 = 0$ mit $k = 3.927, \eta = 0.5$. 83

4.17 Bifurkation von wTVF Strukturen in Abhängigkeit von Re für die dominanten Modenamplituden $|u_{m,n}|$ und deren zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ bei $R_1 = 120, R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$. 86
4.18 Bifurkation von wSPI Strukturen in Abhängigkeit von Re für die dominanten Modenamplituden $|u_{m,n}|$ und deren zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ bei $R_1 = 115, R_2 = -50, k = 4.8, \eta = 0.5$. 88
4.19 $R_1 - Re$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF und wSPI Lösungen bei endlichem Durchfluss $-40 \leq Re \leq 40$ für $R_2 = -100, \eta = 0.5$, $k = 3.927$. . 90
4.20 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für TVF, SPI und wSPI (L-wSPI) Lösungen bei endlichem Durchfluss $-20 \leq Re \leq 20$ für $R_2 = -50, \eta = 0.5$, $k = 4.8$. . . . 91
4.21 Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ von wTVF Lösungen bei verschiedenen Re und $R_1 = 120$, $R_2 = -100$, $k = 3.927, \eta = 0.5$. 93
4.22 Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ von wSPI Lösungen bei verschiedenen Re und $R_1 = 115$, $R_2 = -50$, $k = 4.8, \eta = 0.5$. 94
4.23 Schematische Darstellung, der, bei endlichem Re, stabil existierenden Strukturen für pbc Bedingungen. 95

5.1 Vergleich des Bifurkationsverhaltens von wTVF Lösungen als Übergangsstruktur zwischen TVF und (w)SPI für pbc und rbc Randbedingungen in Abhängigkeit von R_1 bei $R_2 = -100, \eta = 0.5$. 101
5.2 Raumzeitliche Veränderungen der Wirbel Strukturen während des Übergangs von TVF → wTVF → wSPI. Vergleich zwischen numerischen und experimentellen Daten. $\Gamma = 12, R_2 = -100, \eta = 0.5$. 105
5.3 Numerisch erhaltenes Bifurkationsdiagramm der Moden $|u_{m,k}|$ und zugehöriger Frequenzen $\omega_{m,k}$ für TVF und wSPI Zustände, aufgetragen gegen R_1 für rbc. $R_2 = -100, \eta = 0.5, \Gamma = 12$. 108
5.4 Raumzeitliche Veränderungen der Wirbel Strukturen während des Übergangs von wSPI → TVF Zuständen für numerische Simulationen und experimentelle Ergebnisse zum Vergleich. $R_2 = -100, \eta = 0.5, \Gamma = 12$. 109
5.5 Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 40$ der Strukturen im $\Gamma = 12$ System während der transienten Wanderung eines Defektes durch den Bulk und Profile der verschiedenen Felder. 112
5.6 Bifurkationsverhalten der dominanten Modenamplituden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,k}|$ einer l-wSPI Lösung in Abhängigkeit von R_1 bei $R_2 = -80, \eta = 0.5, \Gamma = 12$. 113
5.7 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF, wSPI und l-wSPI Lösung für $\eta = 0.5$ im endlichen $\Gamma = 12$ System. 115
5.8 Visualisierung zweier verschiedener Strukturen im Bulk. *Oben:* Lokalisierte wSPI bzw. RIB Struktur bei $R_1 = 106$, $R_2 = -100$ in Bulk Mitte. *Unten:* Vollständig ausgebildete linksgewundene L-wSPI Struktur bei $R_1 = 109$, $R_2 = -100$ bei $\eta = 0.5, \Gamma = 12$. 117
5.9 Visualisierung verschiedener Strukturen im Bulk. *Oben:* Lokalisierter Defekt in Bulk Mitte bei $R_1 = 101$, $R_2 = -78$. *Unten:* Lokalisierte rechtsgewundene R-wSPI Struktur bei $\eta = 0.5, \Gamma = 12$. 118
5.10 Bifurkationsverhalten von lokalisierten wSPI Lösungen und Defekt Strukturen in Abhängigkeit des externen Durchflusses Re für $R_1 = 104, R_2 = -78, \eta = 0.5, \Gamma = 12$. 119
5.11 Schematisches Bifurkationsdiagramm der Amplituden des Wirbelflusses im endlichen System (rbc) für die beiden Übergänge: TVF → wSPI und wSPI → TVF. 121

6.1 Charakterisierung verschiedener Wirbel Strukturen durch Linien konstanter Phase, $\Phi = 0$, auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte. . . . 126
6.2 Schematische Darstellung einer MCS Lösung mit unterschiedlichen Anteilen von L1-SPI und R2-SPI Lösungen. 127
6.3 Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ von 3-RIB und L3R5-MCS Lösungen für die komplette Struktur, sowie zerlegt in die separaten Anteile der zugehörigen L-SPI und R-SPI Strukturen bei $R_1 = 200, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$. 129
6.4 Angeregte Moden von 3-RIB und L3R5-MCS Strukturen der Abbildung 6.3 im zweidimensionalen (m, n) Fouriermodenraum. $R_1 = 200, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$. 129
6.5 Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ und Modenamplituden $|u_{m,n}|$ verschiedener voll entwickelter Strukturen: 3-RIB, 4-RIB, 5-RIB, L3R4-MCS, L3R5-MCS und L4R5-MCS im Vergleich.
$R_1 = 200, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$. 131
6.6 Vergleich der Bifurkationsszenarien von L3R4-MCS aus reinen L3-SPI, L3R5-MCS Strukturen aus reinen L3-SPI und L4R5-MCS aus reinen L4-SPI sowie R-SPI und RIB Lösungen für $k = 3.927, \eta = 0.883$. 133
6.7 Schematische Darstellung verschiedener Bifurkationsszenarien und ihrer Kombinationen nahe der MCS Bifurkationsschwellen für pbc Bedingungen. . . 136
6.8 Abhängigkeit der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ und ihrer zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ von 1-SPI und 1-RIB Zuständen vom Radienverhältnis η.
$k = 3.927, R_1 = 120, R_2 = -100$. 138
6.9 Bifurkationsdiagramme von L1-SPI, R2-SPI, 1-RIB und 2-RIB Lösungen.
$R_1 = 130, k = 3.927, \eta = 0.883$. 139
6.10 Schematisches Bifurkationsdiagramm für einen geeigneten Parameter, z.B. R_2 für pbc Bedingungen, bei dem eine MCS Lösung als Übergangsstruktur auftritt. 140
6.11 Bifurkationsverhalten von L3R4-MCS und R4L3-MCS als Übergangsstrukturen zwischen zwei SPI Strukturen unterschiedlicher Helizität, L3-SPI und R4-SPI, in Abhängigkeit von R_2. $R_1 = 370, k = 3.927, \eta = 0.883$. 141
6.12 Snapshots der Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ bei drei verschiedenen Kontrollparametern $R_1 = 370, k = 3.927, R_2 = -500, -666.5, -800$ während des Übergangs von L3R4-MCS→L3R4-MRIB→R4L3-MCS (vgl. Abb. 6.11). 143
6.13 Zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ während des transienten Übergangs der Strukturen: R4L3-MCS→R4L3-MRIB=L3R4-MRIB→L3R4-MCS. $R_1 = 370, R_2 = -550, k = 3.927, \eta = 0.883$. 144
6.14 Visualisierung der, während des Übergangs von einer R4L3-MCS zu einer L3R4-MCS (aus Abb. 6.13) auftretenden Strukturen in $r - z$, $\varphi - z$ und Isovortizitätsplots. $R_1 = 370, R_2 = -550, k = 3.927, \eta = 0.883$. 145
6.15 Bifurkationsszenarien für L3R1-MCS und R1L3-MCS Lösungen in Abhängigkeit von R_2 und deren transienter Übergang. $R_1 = 250, k = 3.927, \eta = 0.883$. 147
6.16 Darstellung der Strukturen von R1L3-MCS und L3R1-MCS für $R_2 = -200$ und $R_2 = -100$ (aus Abb. 6.15). $R_1 = 250, k = 3.927, \eta = 0.883$. 149

7.1 Schematische Darstellung eines Ferrofluids. 156
7.2 Schematische Darstellung zur Erklärung der Rotationsviskosität. 157

8.1 Schematische Darstellung des Taylor-Couette System in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{H}_{ext}$. 162

8.2 Variation des absoluten Wertes $\mathbf{s}_N(H)$ bei Variation eines extern angelegten Magnetfeld für verschiedene Modelle: DEBYE, POLY und S72 (84). . . . 164
8.3 Schematische Darstellung der Anregung verschiedener Moden in Anwesenheit unterschiedlicher extern angelegter Magnetfelder. 165

9.1 Bifurkationdiagramme für TVF und wTVF Lösungen in unterschiedlichen Magnetfeldern: $s_x = 0 = s_z$; $s_x = 0, s_z = 0.6$; $s_x = 0.6, s_z = 0$; $s_x = 0.6, s_z = 0.6$ aufgetragen gegen den relativen Abstand μ bei $\eta = 0.5$, $k = 3.927$, $R_2 = 0$. 170
9.2 Bifurkationdiagramme für SPI und wSPI Lösungen in unterschiedlichen Magnetfeldern: $s_x = 0 = s_z$; $s_x = 0, s_z = 0.6$; $s_x = 0.6, s_z = 0$; $s_x = 0.6, s_z = 0.6$ aufgetragen gegen den relativen Abstand μ bei $\eta = 0.5$, $k = 3.927$, $R_2 = -150$. 172
9.3 Quadratische Modenamplituden $|u_{0,1}|^2$ des TVF Zustands in Spaltmitte aufgetragen gegen den relativen Abstand μ in verschiedenen axialen Magnetfeldern $0 \leqslant s_z \leqslant 0.5$ bei $R_2 = -50$, $k = 3.1415, \eta = 0.5$. 173
9.4 Einfluss eines transversalen Feldes auf das nichtlineare Bifurkationsverhalten von wTVF und wSPI Lösungen für verschiedene überkritische Werte $\mu = 0.025, 0.05, 0.075, 0.1$ bei $R_2, \eta = 0.5, k = 3.1415$. 174
9.5 Veränderung der Modenzusammensetzung einer (w)SPI Lösung bei Variation des transversalen Feldparameters s_x ($s_z = 0$) für $k = 3.927, R_2 = 0, \eta = 0.5$. 175
9.6 Visualisierung des Einflusses verschieden orientierter Magnetfelder auf die unterschiedlichen Wirbelstrukturen und auf das zugehörige Modenspektrum von (w)TVF und (w)SPI Lösungen durch Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ bei $R_1 = 150, R_2 = 0$ für (w)TVF Zustände und $R_1 = 160, R_2 = -150$ für (w)SPI Strukturen für $k = 3.927$ und $\eta = 0.5$. 177
9.7 Zerlegung verschiedener (w)TVF und (w)SPI Strukturen in ihre dominanten Modenunterräume für verschiedene Magnetfeldkombinationen bei $R_1 = 100, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.5$. 180
9.8 Einfluss rein axialer Magnetfelder ($s_x = 0, s_z \neq 0$) auf die Lage der Bifurkationsschwellen in der $R_1 - R_2$ Ebene, von TVF und SPI Lösungen aus dem CCF heraus und die resultierende Verschiebung des γ Punkts höherer Codimension durch das Magnetfeld für $k = 3.1415$ und $\eta = 0.5$. 181
9.9 Stabilisierung des CCF durch rein transversale und rein axiale Magnetfelder für $R_2 = 0, -50, -100, -150$ mit $k = 3.927$, $\eta = 0.5$. 183
9.10 Vergleich zwischen klassischen Wavy Zuständen und den, durch ein Magnetfeld erzeugten, Wavy Strukturen bei $R_1 = 90, R_2 = 0$, $R_1 = 160, R_2 = -150$, $s_x = 0.6$, $s_z = 0.0$ und $s_x = 0.6$, $s_z = 0.6$ für $k = 3.927, \eta = 0.5$. 185
9.11 Bifurkationsdiagramm der Frequenzen $\omega_{1,1}$ für (w)SPI Zustände in verschiedenen Magnetfeldern für $s_x = 0.0 = s_z$; $s_x = 0.0$, $s_z = 0.6$; $s_x = 0.6$, $s_z = 0.0$; $s_x = 0.6$, $s_z = 0.6$ mit $k = 3.927, R_2 = -150, \eta = 0.5$. 186
9.12 Bifurkationen verschiedener Wirbelstrukturen beim Übergang der Strukturen wTVF→wTVF→wSPI in einem rein transversalen Feld, $s_x = 0.4, s_z = 0.0$, in Abhängigkeit von R_1 bei $R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$. 188
9.13 Bifurkationsdiagramme der Amplituden dominanter Moden $|u_{m,n}|$ sowie deren zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ aufgetragen gegen die Magnetfeldparameter s_x und s_z beim Übergang wTVF→wTVF→wSPI für $k = 3.927, R_2 = -100, R_1 = 120, \eta = 0.5$. 190

9.14 Modenspektrum verschiedener Wavy Strukturen, während des in Abbildung 9.13 dargestellten Übergangs für rein transversales Feld $s_x \neq 0, s_z = 0$ und rein axiales Feld $s_x = 0, s_z \neq 0$. $k = 3.927, R_2 = -100, R_1 = 120, \eta = 0.5$. 191
9.15 Visualisierung des wTVF Strömungsmusters eines Ferrofluids im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem rein transversalen Magnetfeld für $k = 2.78, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.0, \eta = 0.5$. 193
9.16 Visualisierung der Strömung eines Ferrofluids für u und w Feld des wTVF Zustands im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem rein transversalen Magnetfeld für $k = 2.78, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.0, \eta = 0.5$. 194
9.17 Visualisierung des wTVF Strömungsmusters eines Ferrofluids im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem axial- und transversal überlagerten Magnetfeld für $k = 2.85, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.4, \eta = 0.5$. 195
9.18 Visualisierung der Strömung eines Ferrofluids für u und w Feld des wTVF Zustands im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem axial- und transversal überlagerten Magnetfeld für $k = 2.85, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.4, \eta = 0.5$. 196

B.1 Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ für TVF, L1-SPI und L2-SPI Lösungen in der Nähe der jeweiligen Onsets, $\epsilon = 0.02$, $\eta = 0.5$, $k = 3.927$. 216
B.2 Marginale Stabilitätsschwellen des Grundzustands gegenüber Wirbelstörungen bei $R_2 = 0$ mit azimutalen Wellenzahlen $M = 0, 1, 2$ für $Re = 0$ und $Re = -6$, $\eta = 0.5$. 217
B.3 Oberflächen des linearen Wachstumsparameters $\gamma(k, R_1)$ über der $k - R_1$ Ebene für TVF, L1-SPI und L2-SPI Lösungen bei $R_2 = 0, Re = -6, \eta = 0.5$. 218
B.4 Marginale Stabilitätsoberflächen, $\gamma = 0$, der L2-SPI Moden im $k - R_1 - Re$ Parameterraum bei $R_2 = 0$ und im $k - R_1 - R_2$ Raum bei $Re = -6$, $\eta = 0.5$. 219
B.5 Kritische axiale Wellenzahl k_c, kritische Reynoldszahl $R_{1,c}$ und kritische Frequenz ω_c für TVF, 1-SPI und 2-SPI Zustände aufgetragen gegen den axialen Durchfluss Re und R_2, $\eta = 0.5$. 221
B.6 Axiale Phasengeschwindigkeit, $w_{ph} = \omega_c/k_c$, und Gruppengeschwindigkeit, $w_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}\big|_c$, von TVF und SPI Lösungen aufgetragen gegen Re für $R_2 = 0$, $\eta = 0.5$. 222
B.7 Schematische Darstellung des zeitlichen Verlaufs lokalisierter bzw. unendlich ausgedehnter Störungen mit den daraus resultierenden Stabilitätsbereichen: absolut stabil; konvektiv instabil; absolut instabil. 225
B.8 Konvektiv und absolut instabile Regionen des CCF gegenüber L2-SPI Störungen, gewonnen aus den LNSE ϵ_{c-a} und der GLE Näherung $\epsilon_{c-a}(GLE)$ für verschiedene Re und R_2 für $\eta = 0.5$. 226
B.9 Zusammenhang zwischen Fronten und Stabilitätsschwellen. Dargestellt sind die Frontgeschwindigkeiten v_s zu den beiden, aus dem unendlich ausgedehnten $M = 2$ Zustand entstehenden Sattelpunkten. $R_2 = 0, Re = 0, \eta = 0.5$. 227
B.10 Abhängigkeit der Schwellen, $\epsilon_{c-a}(Re)$, der absolut instabilen Gebiete vom Radienverhältnis η für $m = 2$, $R_2 = 0$, $k = 3.927$, $\eta = 0.5$. 228
B.11 Projektionen der Trajektorien von drei komplexen Sattelpunkten Q_s des $k - K - R_1$ Raums in die $k - R_1$ und in die $k - K$ Ebene und Darstellung der zugehörigen Frontgeschwindigkeiten v_s und zeitliche Wachstumsparameter γ_s für $R_2 = 0$, $Re = 0$ $\eta = 0.5$. 230
B.12 Projektionen der Trajektorien von drei komplexen Sattelpunkten Q_s des $k - K - R_1$ Raums in die $k - R_1$ und in die $k - K$ Ebene und Darstellung der zugehörigen Frontgeschwindigkeiten v_s und zeitliche Wachstumsparameter γ_s für $R_2 = -40, Re = -11.83, \eta = 0.5$. 231

B.13 $\gamma(Q)$ Oberfläche in Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ für zwei verschiedene Sattelpunkte bei $R_{1,c-a} = 228.63$ und $R_{1,c-a} = 229.65$ von $m = 2$ Störungen bei $Re = -11.83$, $R_2 = -40$, $\eta = 0.5$. 233
B.14 Projektionen der Trajektorien von drei komplexen Sattelpunkten Q_s des $k-K-R_1$ Raums in die $k-R_1$ und in die $k-K$ Ebene und Darstellung der zugehörigen Frontgeschwindigkeiten v_s und zeitliche Wachstumsparameter γ_s für $R_2 = 0$, $Re = -2$, $\eta = 0.5$. 234
B.15 $\gamma(Q)$ Oberfläche in Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ (vgl. Abb. B.13) für $R_{1,c-a} = 228.7$, $Re = -11.83$, $R_2 = -40$, $\eta = 0.5$. . . . 235
B.16 Schematische Darstellung der beiden unterschiedlichen Fronttypen: +Front und –Front. 236
B.17 Frontgeschwindigkeiten w_{S}, axialer Wachstumsparameter K_{S}, axiale Wellenzahl k_{S} und Frequenzen ω_{S} für +Fronten und für –Fronten von lokalisierten $m = 2$ Wellenpaketen als eine Funktion von μ erhalten aus dem Ginzburg Landau Modell (GLE) sowie aus den linearisierten Navier-Stokes Gleichungen (LNSE) bei $R_2 = 0$, $\eta = 0.5$ und verschiedenen Durchflüssen $Re = 1, 5, 10, 15$. 237
B.18 Zusammenhang der Frontpropagationen und der verschiedenen Stabilitätsschwellen in Abhängigkeit von R_1 bei Variation von Re für $\eta = 0.5$. 238

C.1 Schematische Darstellung von Vektorplots $(u(r,z), w(r,z))$ und azimutaler Vortizität Ω_φ eines TVF Zustands. 242
C.2 Vergleich verschiedener farbkodierter Kenngrößen zur Visualisierung eines TVF Zustands. 243
C.3 Vergleich verschiedener farbkodierter Kenngrößen zur Visualisierung eines SPI Zustands. 244
C.4 Vergleich verschiedener Kenngrößen u, v, w, Ω_φ zu unterschiedlichen Wirbel Strukturen. 246

D.1 Radiales Gitter, auf dem die verschiedenen Geschwindigkeitsfelder u, v, w sowie die nichtlinearen Terme (NL) im Fall des numerischen Codes G2D2 berechnet werden. 252
D.2 Unterräume verschiedener Strukturen im (m, n) Modenraum. 256
D.3 Vergleich der Wachstumsparameter γ für TVF und SPI Lösungen in Abhängigkeit der inneren Reynoldszahl R_1 für verschiedene numerische Verfahren bei $k = 3.1415, R_2 = 0$ und $k = 3.927, R_2 = -100$, $\eta = 0.5$. 258
D.4 Vergleich der Bifurkationsschwellen von TVF und SPI Lösungen in der $k-R_2$ Ebene bei $R_1 = 115, \eta = 0.5$ für verschiedene numerische Verfahren. 260
D.5 Verwendetes Gitter in der $r - z$ Ebene für den numerischen Code G1D3. . 267

Tabellenverzeichnis

1.1 Charakteristische Größen des *Taylor-Couette Systems* (TCS). 10

3.1 Charakterisierung der verschiedenen in dieser Arbeit diskutierten Strukturen im TCS. 29
3.2 Stabilitätseigenschaften von Lösungen und gewählte Randbedingungen im TCS. 30

4.1 Grundlegende Frequenzen $\omega_{m,n}$ für wTVF Lösungen bei $R_2 = -100$ und wSPI bei $R_2 = -25$ (vgl. Abb. 4.14)für $k = 3.927, \eta = 0.5$. 80
4.2 Frequenzen $\omega_{m,n}$ der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ des wTVF Zustands, sowie deren Kombinationen bei Variation von Re. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$ 87

6.1 Isovortizitätswerte verschiedener Strukturen der Abb. 6.3. 128
6.2 Isovortizitätswerte verschiedener Strukturen der Abb. 6.5. 130

D.1 Vergleich überkritischer Reynoldszahlen der TVF Lösung, bei verschiedenen Wellenzahlen k bei $\epsilon = 0.05$ und $\epsilon = 0.1$, für die beiden numerischen Verfahren G2D2, G1D3 sowie der AG mit Ergebnissen der linearen Analyse. Kontrollparameter: $R_2 = 0, \eta = 0.5$. 259
D.2 Gemittelte Werte $E(\cdot)$ und Standardabweichung $\sigma(\cdot)$ der relativen Fehler $\delta k = |k_{\mathrm{G2D2}}/k_{\mathrm{lin}}| - 1$ und $\delta R_2 = |R_{2,\mathrm{G2D2}}/R_{2,\mathrm{lin}}| - 1$ in k und R_2 bezogen auf die Bifurkationsschwellen in Abbildung D.4. 259
D.3 Frequenzen für TVF und SPI Lösungen bei Durchfluss $Re = 5, 10$ und verschiedener Wellenzahl k für überkritische Werten $\epsilon = 0.05$ und $\epsilon = 0.1$ bei $\eta = 0.5$, TVF: $R_2 = 0$, SPI: $R_2 = -100$. Hier: $\epsilon_x := 1 - \omega_{1,x}/\omega_{1,lin}$ mit $x :=$ G2D2, G1D3, AG. 261
D.4 Fouriermoden des u Feldes eines stationären TVF Zustands sowie einer L1-SPI Lösung in Spaltmitte für unterschiedliche m_{max} und n_{max}. 262

E.1 Diskretisierung der linearen Terme der NSE für G2D2. 274
E.2 Diskretisierung der nichtlinearen Terme der NSE für G2D2. 275
E.3 Diskretisierung der linearen Terme der NSE für G1D3. 277
E.4 Diskretisierung der nichtlinearen Terme der NSE für G1D3. 279
E.5 Diskretisierung der $m \pm 2$ Zusatzterme bei transversalem Magnetfeld für G1D3. 280
E.6 Diskretisierung der $m \pm 1$ Zusatzterme bei Kopplung von transversalem und axialem Magnetfeld für G1D3. 281

Filmverzeichnis

1.avi Transienter Übergang vom TVF zum L-SPI Zustand über eine wTVF Lösung im periodischen System für $R_1 = 115, R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$. *Links:* Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 90$ (rot = positiv, grün = negativ). *Rechts:* Kontrollparameter (*oben*) und Modenamplituden (*unten*) des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ über dem (m, n) Modenraum. 83

2.avi Transienter Übergang vom L-SPI zum TVF Zustand über eine wSPI Lösung im periodischen System für $R_1 = 92.2, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.5$. *Links:* Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 90$ (rot = positiv, grün = negativ). *Rechts:* Kontrollparameter (*oben*) und Modenamplituden (*unten*) des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ über dem (m, n) Modenraum. 83

3.avi Transienter Übergang vom R-SPI zum TVF Zustand über einen wandernden Defekt im endlichen ($\Gamma = 12$) System (hier: von oben nach unten) im Bulk für $R_1 = 122, R_2 = -100, \eta = 0.5$. Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 95$ (rot = positiv, grün = negativ). 109

4.avi Entstehung einer L3R5-MCS Struktur aus einer reinen L3-SPI Lösung bei $R_1 = 200, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. 144

5.avi Transiente Entwicklung einer R4-SPI Struktur über eine R4L3-MCS Lösung hin zu einem L3R4-MCS Zustand bei $R_1 = 370, R_2 = 550, k = 3.927, \eta = 0.883$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. 145

6.avi Transienter Entwicklung einer R4L3-SPI Struktur über eine R4L3-MRIB=L3R4-MRIB hin zu einem L3R4-MCS Zustand. $R_1 = 370, R_2 = 666.5, k = 3.927, \eta = 0.883$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$).

Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. 143

7.avi Entstehung einer wTVF Lösung aus einem reinen TVF Zustand durch Einschalten und Verstärkung eines transversalen Magnetfeldes bei $R_1 = 150, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.5, s_z = 0, 0 \leqslant s_x \leqslant 0.6$. *Links:* Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 100$ (rot = positiv, grün = negativ). *Rechts:* Kontrollparameter und Modenamplituden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ über dem (m, n) Modenraum. 177

8.avi Entstehung einer wTVF Lösung aus einem reinen TVF Zustand in einem rein axialen Magnetfeld durch Zuschalten und Verstärkung eines transversalen Magnetfeldes bei $R_1 = 150, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.5, s_z = 0.6, 0 \leqslant s_x \leqslant 0.6$. *Links:* Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 110$ (rot = positiv, grün = negativ). *Rechts:* Kontrollparameter und Modenamplituden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ über dem (m, n) Modenraum. 177

9.avi wTVF Struktur in einem rein transversalen Magnetfeld bei $R_1 = 150, R_2 = 0, k = 3.927, s_x = 0.6, s_z = 0.0, \eta = 0.5$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. Die vertikale blaue Linie gibt die φ Position an. 185

10.avi wTVF Struktur in einem gekreuzten Magnetfeld bei $R_1 = 150, R_2 = 0, k = 3.927, s_x = 0.6, s_z = 0.6, \eta = 0.5$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. Die vertikale blaue Linie gibt die φ Position an. 185

11.avi Klassischer wTVF Zustand bei $R_1 = 150, R_2 = 0, k = 3.927, s_x = 0.6, s_z = 0.6, \eta = 0.5$. *Links:* Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität Ω_φ von blau (Minimum) bis rot (Maximum). *Rechts:* Graukodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Die rote Linie entspricht der $u = 0$ Konturlinie. Die vertikale blaue Linie gibt die φ Position an. 185

Symbol	**Bezeichnung**	**Seite**
$\pm$, Index	$\pm$ Front	230,236
a_1, a_2, a_3	Koeffizienten	212
A	Amplitude	36,59
A	Integrationskonstante	14
$A(z,t)$	Amplitude	223
$\underline{\underline{A}}$	Matrix	212
APF	Annular Poiseuille Flow	15,29
B	Amplitude	36,59
B	Integrationskonstante	14
c, Index	kritisch	223,223
$c-a$, Index	konvektiv absolut	225,224,225
c	Fourierkoeffizient	207
c_0, c_1, c_2	Koeffizienten der GLE	223,223
c_N	allgemeiner Niklas Parameter	163
C	Amplitude	36,59
C	Integrationskonstante	15
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	211
CCF	Circular Couette Flow	13,29
CSPI	Cross Spiral	38
d	Spaltbreite	10
D	Integrationskonstante	15
D	kombinierte Amplitude	60
DEBYE	Modell	164
E	Integrationskonstante	15,210
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}$	Matrix	207
$\underline{\underline{\mathbf{E}}}^*$	Matrix	209
$\overline{E}(\cdot)$	Mittelwert	259
eff, Index	effektiv	162
eq, Index	'Equilibrium', Gleichgewicht	162
ext, Index	extern	162
F	komplexe Funktion	60
G	komplexe Funktion	60
G, Index	Grundzustand	205
GLE	Ginzburg Landau Equation – Näherung	223
H	komplexe Funktion	60
$\mathbf{H}$	externes Magnetfeld	162
$Im[\cdot]$	Imaginärteil	212
i, Index	Imaginärteil	60
j, Index	j-tes Partikelteilchen	163
k, k_c	Realteil der Wellenzahl, kritische Wellenzahl	215,207,223,221
K	Imaginärteil der Wellenzahl	223

Symbol	**Bezeichnung**	**Seite**
{L,R}{M}-(w)SPI	L- und R-(w)SPI mit Strukturwellenzahl M	29,35
{L,R}{M_1}		
{R,L}{M_2}-MCS	MCS mit Strukturwellenzahlen M_1, M_2	29,36
{L,R}-wTVF	TVF mit dominantem {L,R}-SPI Anteil	85
l-' '	lokalisiert	112
L	Systemlänge	10
L, Index	L-SPI Anteil	35
$\underline{\underline{\mathbf{L}}}$	Matrix	207
$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^*$	Matrix	209
$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**}$	Matrix	210
$LNSE$	linearisierte NSE	215
m	azimutale Fouriermode	207,223
M	Strukturwellenzahl	213,35
$\mathbf{M}$	Magnetisierung	162
MCS	Mixed Cross Spiral	27,29,36,123
MRIB	Mixed Ribbon	36,125
n	axiale Fouriermode	207
NSE	Navier-Stokes Gleichungen	11
p	Ganghöhe	35,124
p	Druck	10,12
p_M	Druck inkl. magnetischer Terme	163
$\hat{p}$	Störung von p	205
P	kombinierte Amplitude	60
pbc	periodische Randbedingungen	30
POLY	Modell	164
$Q = k - iK$	komplexe Wellenzahl	233,235,234,223
$\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$	Ortsvektor in Zylinderkoordinaten	11
r, Index	Realteil	60
r	radiale Koordinate	11
R, Index	R-SPI Anteil	35
r_1, r_2	innerer, äußerer Zylinderradius	10
R_1, R_2	innere, äußere Reynoldszahl	12
rbc	endliche Randbedingungen	30
Re	Durchflussreynoldszahl	15,215
$Re[\cdot]$	Realteil	212
RIB	Ribbon	29,38,62,62,124
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	211
s, Index	Sattelpunkt	224
$\mathcal{S}$	nichtlinearer Summand	271
S	kombinierte Amplitude	60
s_N	Niklas Parameter	163,164

Symbol	**Bezeichnung**	**Seite**
s_x, s_z	transversaler, axialer Magnetfeldparameter	164
S72	Modell	164
SPI	Spiral Vortex flow, Spiral Wirbel	29,31,62,62
t	Zeit	10,205,207,223
$T, (T_c)$	Taylorzahl, (kritische)	12
TCS	Taylor-Couette System	9
TVF	Taylor Vortex Flow, Taylor Wirbel	29,30,62,62
u	radiale Geschwindigkeitskomponenete	11,206
$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	Geschwindigkeitsfeld	10
$\hat{\mathbf{u}}$	kl. Störung von $\mathbf{u}$	205
$\hat{u}$	radiale Eigenmode	207
v	azimutale Geschwindigkeitskomponenete	11,206
$v_g = w_g$	Gruppengeschwindigkeit	223,222
$v_{ph} = w_{ph}$	Phasengeschwindigkeit	222,38
v_s	Frontgeschwindigkeit	230
$\hat{v}$	azimutale Eigenmode	207
w	axiale Geschwindigkeitskomponenete	11,206
$\hat{w}$	axiale Eigenmode	207
wTVF	Wavy Taylor Vortex Flow, Wavy Taylor Wirbel	29,44,62,62
wTVF	Wavy Taylor Vortex Flow in FF, Wavy Taylor Wirbel	29,49,170
wSPI	Wavy Spiral Vortex Flow, Wavy Spiral Wirbel	29,44,62,62
wSPI	Wavy Spiral Vortex Flow in FF, Wavy Spiral Wirbel	29,52,172
WVF	Wavy Taylor Vortex Flow, Wavy Wirbel	42
X	Eigenmode	209
$\mathbf{X}$	Lösungsvektor	212
$\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$	Startvektoren	212,211
Y	Eigenmode	209
z	axiale Koordinate	11
Z	Eigenmode	209
α	Abkürzung	210
δ	Steigungen	173,173
$\widehat{\delta}$	Steigungen	175,174
Δ	Differenzen, Laplaceoperator	182,176,183,12
ϵ	relativer Abstand zum Onset	215
φ	azimutale Koordinate	11
γ	Realteil von σ	212
γ_χ	Koeffizient in Magnetisierungsgleichung	162
γ_τ	Koeffizient in Magnetisierungsgleichung	162
Γ	Aspektverhältnis	10

Symbol	**Bezeichnung**	**Seite**
χ	Ferrofluidparameter	164
$\lambda = \frac{2\Pi}{k}$	Wellenlänge	11,207,207
μ	relativer Abstand zum Onset	215,169,224
μ_0	Ferrofluidparameter	164
ν	kinematische Viskosität	10
ρ	Massendichte	10
σ	zeitlicher Eigenwert der LNSE	212,207,223
σ	Spannungstensor	248
$\sigma(\cdot)$	Standardabweichung	259
τ_0	Koeffizient der GLE	223,223
τ	Relaxationszeit	163
$\eta = \frac{r_1}{r_2}$	Radienverhältnis	10
ω	Imaginärteil von σ, Frequenz	212
$\mathbf{\Omega}, \Omega_\varphi$	Vortizität, azimutale Vortizität	162,241
Ω_1, Ω_2	Winkelgaschwindigkeit des inneren, äußeren Zylinders	10
Φ	kombinierte Phase	36
${\xi_0}^2$	Koeffizient der GLE	223,223
κ	Koeffizient in Magnetisierungsgleichung	162
∇	Nablaoperator	12
$\nabla^2 = \Delta$	Laplaceoperator	12
$\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$	Tensor der Impulsstromdichte	248
θ	Phasenwinkel	60
∂	partielle Ableitung	11

Kapitel 1

Das Taylor-Couette System - ein Mustersystem zur Untersuchung strukturbildender Prozesse

1.1 Allgemeine Einführung - Vorbemerkungen

In der Natur lassen sich eine große Anzahl verschiedenster physikalischer Systeme finden, die fernab vom thermischen Gleichgewicht Übergänge aufweisen, bei denen sich ihr makroskopisches Verhalten in Raum und Zeit dramatisch verändert.

Im Allgemeinen sind die hierbei auftretenden Strukturen und vor allem die, diese darstellenden Gleichungen bei solchen Nichtgleichgewichtssystemen äußerst komplex, so dass die Beschreibung der raumzeitlichen Strukturübergänge qualitativ und quantitativ häufig sehr schwierig ist. Verschiedene Modelle und Konzepte der nichtlinearen Dynamik sollen dazu dienen, die grundlegenden Prinzipien der Entstehung solcher Strukturen und Muster besser zu verstehen. Ebenso wichtig wie entscheidend ist hierbei die Überprüfung dieser Konzepte anhand 'einfacher' experimentell zugängiger Systeme.

Ein solches hydrodynamisches Modellsystem stellt auch das *Taylor-Couette System* dar, das sich sehr gut zur Untersuchung von verschiedenen Strukturbildungsphänomenen und Selbstorganisationsprozessen eignet, da es ein sehr weites Spektrum verschiedenster Zustände besitzt. So lassen sich abhängig von einzelnen Systemparametern, wie z.B. Randbedingungen oder Antrieb, die unterschiedlichsten Strukturen von laminaren Strömungen über raumzeitlich periodische Zustände, bis hin zu turbulenten und chaotischen Formen finden.

Ein großer Vorteil des Taylor-Couette Systems als Modellsystem besteht darin, dass die zur Beschreibung notwendigen Gleichungen, die Navier-Stokes Gleichungen (NSE), wohlbekannt und vollkommen ausreichend zur qualitativen, wie auch quantitativen Analyse der Strömungsfelder sind. Diese Voraussetzung ist in den meisten anderen physikalischen Systemen nicht unbedingt gegeben. Aber auch hier können die partiellen Differentialgleichungen nur in einzelnen Sonderfällen analytisch gelöst werden, so dass man im Allgemeinen auf numerische Lösungsverfahren angewiesen ist. Ein Vergleich der Numerik mit experimentellen Daten führt zu einem weiteren Verständnis von allgemeinen Strukturbildungsphänomenen. Auch dies ist ein wesentlicher Punkt, der für das Taylor-Couette System als Modellsystem spricht, da der experimentelle Aufbau relativ einfach realisierbar ist und es bereits zahlreiche Erfahrungen, sowohl in Experiment als auch der Numerik gibt.

1.2 Literaturbetrachtung

In diesem Abschnitt soll die vorliegende Arbeit in die bisher in der Literatur betrachteten Phänomene und bereits durchgeführten Untersuchungen verschiedener Strukturen eingeordnet werden. Hierzu wird ein kurzer Einblick in die wichtigsten Arbeiten gegeben, die in Zusammenhang mit den in dieser Arbeit diskutierten Phänomenen, bzw. Strukturen und deren Eigenschaften stehen.

Strukturbildung

Thematisch stellt die hier vorliegende Arbeit ein Beispiel aus dem Forschungsgebiet der nichtlinearen Dynamik und der Strukturbildung in kontinuierlichen Systemen dar.

Die Kennzeichnung solcher *strukturbildenden* Systeme erfolgt dabei für gewöhnlich über gewisse Kontrollparameter (z.B. R). Dies bedeutet, dass eine im Allgemeinen unstrukturierte Grundzustandslösung, die für alle Werte R existiert mit Erreichen eines kritischen Schwellenwertes R_c gegenüber einer Störung mit kritischer Wellenzahl $k_c > 0$ instabil wird und somit von einer periodischen Lösung verdrängt wird. Später folgende sekundäre Bifurkationen können dann zu weiteren räumlichen und zeitlichen Symmetriebrechungen führen. Diese gehen unter anderem von einer Periodenverdopplung aus und führen schließlich bis zu chaotischem Verhalten hin. Zahlreiche Beispiele solcher Phänomene sind durch Übergänge zwischen verschiedenen Bewegungsmustern in den unterschiedlichsten hydrodynamischen Systemen gegeben, wenn ein Kontrollparameter, wie etwa die Reynoldszahl verändert wird.

Als eine der grundlegendsten Arbeiten, die alle Bereiche der Strukturbildung sehr ausführlich darstellt, ist hier der Übersichtsartikel von Cross und Hohenberg (33) zu nennen. Dieser deckt eine große Vielzahl verschiedener Systeme im Bereich der Fluiddynamik, über chemische Reaktionen bis hin zu biologischen Systemen und sogar der nichtlinearen Optik ab.

Ein sehr interessantes Beispiel für die spontane Strukturbildung aus einem homogenen Zustand eines nichtlinear getriebenen Systems bei Überschreitung der kritischen Schwelle sind unter anderem helikale Strukturen, wie etwa die Spiral Wirbel, wie sie im Taylor-Couette System vorkommen. Sowohl die toroidal geschlossenen Taylor Wirbel, wie auch diese helikalen Spiral Wirbel bifurkieren primär vorwärts aus dem unstrukturierten Grundzustand des Circular Couette Flow heraus, der stabil gegenüber kleinen Rotationszahlen des inneren Zylinders ist. Anders als die rotationssymmetrischen und nicht axial propagierenden Taylor Wirbel, wird die Rotationssymmetrie im Fall von Spiralen gebrochen. Bei letzteren handelt es sich um ein zeitlich oszillierendes Muster, das als Ganzes azimutal, in die gleiche Richtung wie der inneren Zylinder rotiert und gleichzeitig in axialer Richtung wandert. Dabei liegen SPI Lösungen symmetrieentartet als links- und rechtsgewundene Strukturen vor.

Historisches

Die ersten Untersuchungen im *Taylor-Couette System* wurden bereits vor mehr als hundert Jahren durchgeführt, so dass sich unweigerlich die Frage aufdrängt, warum auch heute noch Interesse an der Untersuchung dieses 'alten' Systems besteht.

Die ursprüngliche Idee des Ende des 19. Jahrhunderts von G. I. Taylor (147) beschriebenen Systems bestand in der experimentellen Bestimmung der Viskosität eines Fluids so wie der Bestätigung der hydrodynamischen Grundgleichungen.

Taylor fand zunächst eine rein azimutale Strömung bei niedrigen Rotationsfrequenzen, die sogenannte *Couette Strömung*, oder auch Circular Couette Flow (CCF) genannt, und später bei höheren Rotationsfrequenzen die nach ihm benannten *Taylor Wirbel*, bzw. der Taylor Vortex Flow (TVF). Entscheidend hierbei war, dass er bereits deren Existenzbereich im Fall periodischer Randbedingungen theoretisch vorhersagen konnte. Somit wandelte sich das anfängliche Interesse auch recht bald hin zu einer Untersuchung der unterschiedlichen, im System auftretenden Strukturen und insbesondere deren Bifurkationsverhalten (79; 41). Heute ist eine große Anzahl verschiedenster Strukturen (145; 7) bekannt, wie etwa *Spiral Wirbel*, bzw. Spiral Vortex Flow (SPI), *wavyartige Wirbel* (62) (um nur exemplarisch zwei Vertreter aus der großen Masse verschiedener Strukturen zu nennen) bis hin zu chaotischen Strukturen (32). Spätestens seit den 1980er Jahren gibt es ein riesiges Spektrum verschiedenster Forschungsaktivitäten (36; 40; 33; 22; 153; 7; 54; 55; 79; 143; 43; 44; 74; 145; 31; 9; 131; 131; 62; 99; 35; 114; 78; 63) die sich mit dem Taylor-Couette System befassen.

Die Reichhaltigkeit dieser verschiedensten Strömungsmuster wird in der 1986 veröffentlichten, experimentellen Arbeit von Andereck et al. (7) deutlich, in dem eine große Vielzahl von unterschiedlichen Zuständen charakterisiert und klassifiziert wurden.

Eine erste Untersuchung des Übergangs von CCF zu wandernden Wellen im endlichen Taylor-Couette System mit gegenrotierenden Zylindern erfolgte in der 1990 veröffentlichten Arbeit von Edwards (43) und später in (44) für periodische, nichtlineare Spiralen mit nicht periodischem Druck, nachdem vorherige Rechnungen stets axial periodische Randbedingungen verwendeten und damit einen, durch die nichtlinearen Spiralen erzeugten, nicht verschwindenden, axialen Nettodurchfluss aufwiesen.

Für einen sehr ausführlichen Literaturüberblick sei auf die beiden Artikel von Tagg von 1992 (8) und den zwei Jahre später folgenden Übersichtsartikel (145) verwiesen. Eine Darstellung der bifurkationstheoretischen Grundlagen vieler Strukturen im Taylor-Couette System geben Chossat und Iooss in ihrem Buch (31) von 1994. Hierin wurde unter anderem gruppentheoretische Analysen verschiedener Lösungen durchgeführt.

Lineare Stabilitätsanalyse

Ab einem bestimmten Antrieb, den sogenannten kritischen Werten, wird der Grundzustand instabil gegenüber Störungen, wobei die axiale Translationsinvarianz gebrochen wird. Hierbei wird von dem System eine neue Lösung angenommen. Entsprechende Schwellen können mittels der Linearen Stabilitätsanalyse (vgl. Anh. A) bestimmt werden.

Wesentliche Berechnungen der kritischen Werte unter Durchfluss sind auf Takeuchi und Jankowski (1981) (146) zurückzuführen. Sie analysierten Verhältnisse $\mu = R_2/R_1 = 0, 0.2, -0.5$ bei $\eta = 0.5$ für Durchflüsse bis $Re = 100$ und verglichen diese mit experimentellen Daten. Eine spätere Vervollständigung und Erweiterung dieses Parameterbereiches erfolgte von Rani et al. (2001) (121). Erstmals wurden in der Veröffentlichung von Ng und Turner (1982) (120) die kritischen Werte als Funktion des Durchflusses bei den Parametern $R_2 = 0, \eta = 0.95$ aufgelistet.

Als eine der grundlegendsten Arbeiten ist hier die Arbeit von Langford et al. (79) (1988) zu nennen, da dort die verschiedenen primären Bifurkationsschwellen für einen sehr großen Parameterbereich, unter anderem auch Gegenrotationen, berechnet wurden. Sowohl Antriebe, Frequenzen als auch die kritischen azimutalen Moden wurden aufgelistet und weiter noch für verschiedene Parameter ein Vergleich mit experimentellen Daten durchgeführt. Eine Formel zur approximativen Bestimmung der Stabilitätschwellen, welche unterschiedliche Radien und Geschwindigkeitsverhältnisse berücksichtigt, wurde später von Esser und Grossmann (1996) (46) hergeleitet.

Periodische Systeme

Eine spezifische Untersuchung einzelner Übergänge und Strukturen im Taylor-Couette System wurde von Antonijoan et al. (9; 10) (1998/2000) durchgeführt, die eine umfangreiche numerische Analyse des Spiral Wirbelzustands im System mit relativ schmalem Spalt und axial periodischen Randbedingungen lieferten. Als numerisches Verfahren wurde ein Pseudospektralcode verwendet. Dieser basierte auf einer eindimensionalen Diskretisierung der Navier-Stokes Gleichungen in einem mitrotierenden Bezugssystem und helikalen Koordinaten, die an das zu erwartende Spiralmuster angepasst sind.

Endliche Systeme

Naturgemäß handelt es sich in allen Experimenten immer um endliche Systeme, welche aber ebenso numerisch simuliert werden können. Da der Aufwand, also die benötigte Rechenzeit hierbei, aber insbesondere bei sehr großen Systemen deutlich höher als bei periodischen Randbedingungen ist, stellt sich unweigerlich die Frage, ab welcher Systemlänge auch periodische Randbedingungen eine ausreichend genaue Beschreibung des Experiments zulassen. Verschiedenste Untersuchungen diesbezüglich wurden unter anderem von Hoffmann et al. (63) (2004) durchgeführt, wobei numerische Simulationen mit experimentellen Werten von Schulz und Pfister (2000) (131) für ein $\Gamma = 12$ System verglichen wurden. Die Ergebnisse wiesen eine ausgezeichnete Übereinstimmung auf.

Im Bereich kurzer endlicher Systeme sind die Arbeiten von Czarny et al. (34; 35) (2001/2002), welche die Strukturen von Wavy Vortex Flow (WVF) und SPI für Systemlängen, $5 \leqslant \Gamma \leqslant 6$, untersuchten, ebenso wie die Arbeit von Langenberg et al. (77) (2003) für die Betrachtung von Ribbon (RIB) Zuständen bei $\Gamma \approx 6$ und $\eta = 0.5$ zu nennen.

Die geringe axiale Ausdehnung des Systems und damit verbunden der starke Einfluss von Randeffekten in Form der Ekman Wirbel erzeugen zwei unterschiedliche Typen von RIB Lösungen, die in einer festen Phasenbeziehung zueinander stehen. In periodischen Systemen kann, aufgrund der dort fehlenden Ekman Wirbel nicht zwischen diesen beiden Strukturen unterschieden werden.

Eine sehr ausführliche systematische Untersuchung des Einflusses der Zylinderlänge auf das Bifurkationsverhalten im gegenrotierenden Taylor-Couette System erfolgte von Langenberg et al. (78) (2004), wobei der Einsatz unterschiedlicher Strukturen im System als Funktion von Γ ermittelt wurde. Eine Erkenntnis hieraus ist die Tatsache, dass in kurzen Systemen offensichtlich die RIB Lösung präferiert wird, während bei langen Systemen, $\Gamma \geqslant 16$, in den dort untersuchten Parameterbereichen, nur noch SPI Strukturen auftraten.

Sehr kurze Systeme $\Gamma = 0.5$ mit Radienverhältnissen, $0.65 \leqslant \eta \leqslant 0.7$, wurden von Lopez und Marques (87) (2003) im Hinblick auf die unterschiedlichen Bifurkationsszenarien betrachtet.

Numerische Verfahren

Zur Simulation der Navier-Stokes Gleichungen werden in der hier vorliegenden Arbeit zwei unterschiedliche numerische Verfahren, G2D2 und G1D3, verwendet. In beiden Fällen handelt es sich um kombinierte Verfahren aus finiten Differenzen und Galerkinentwicklung in unterschiedlicher Anzahl und Richtung. Wie diese im Einzelnen aussehen, wird in Anhang D genauer beschrieben. Die Grundlage dieser Verfahren, insbesondere für G1D3, ist im Wesentlichen zurückzuführen auf das sogenannte Marker und Cell Verfahren (MAC).

Der dem MAC Verfahren zugrunde liegende numerische Code zur Vollsimulation der Strömung inkompressibler und viskoser Fluide stammt aus dem Jahr 1965 und geht auf

Harlow und Welch (58) zurück. Grundzüge der hier verwendeten Codes wurden von Chorin (28; 29) (1967/68) eingeführt. Dort wurde die Näherung der partiellen Ableitungen mit Hilfe der finiten Differenzen explizit vorgestellt, ebenso wie die Druckiteration zur Sicherstellung der Divergenzfreiheit. Weitere Ausführungen diesbezüglich sind bei Viecelli (151) (1971) zu finden. Eine Anwendung im Bezug auf rotationssymmetrische Strukturen erfolgte in der Diplomarbeit von Barten (16) (1986). Später wurde von Hoffmann (61) (1998) eine Erweiterung mit azimutaler φ Abhängigkeit eingebaut. Ausführliche Lehrbücher bezüglich Computertechniken in der Fluiddynamik wurden von Peyret und Taylor (110) (1983), so wie Fletcher (50) (1988) und Roache (125) (1998) geschrieben.

Amplitudengleichung

Solange man sich nur leicht oberhalb der kritischen Schwelle befindet, ist für Vorwärtsbifurkationen eine schwach nichtlineare Analyse ausreichend.

Mit Hilfe eines recht einfachen Modellsystem (Swift Hohenberg Gleichung) wurde die entsprechende Amplitudengleichung von Cross und Hohenberg (33) (1993) hergeleitet. Mit dem Ansatz einer räumlich variierende Amplitudengleichung von Graham und Domaradzki (52) (1982) konnten Messungen von Pfister und Rehberg (111) (1981) zu TVF Lösungen in langen Systemen sehr gut bestätigt werden.

In der Arbeit von Chossat und Iooss (30) (1984) wurden mit Hilfe der Bifurkationstheorie und Symmetriegruppeneigenschaften Amplitudengleichungen für räumlich konstante Amplituden gefolgert, welche die verschiedenen Bifurkationsszenarien im Taylor-Couette System zu sehr großen Teilen erklären können. Neben der Vorhersage von TVF Zuständen und anderer Strukturen bei stark gegenrotierenden Zylindern wurden auch mögliche sekundär bifurkierende Strukturen aus wTVF, SPI und RIB Zuständen heraus vorhergesagt.

In der Veröffentlichung von Demay und Iooss (36) (1984) wurden gekoppelte kubische Amplitudengleichungen zur Beschreibung von SPI und RIB Lösungen für $\eta = 0.752$ behandelt und unter anderem stabile RIB Zustände der azimutalen Wellenzahl $M = 2$ am Einsatz prognostiziert.

Eine ausführliche Untersuchung des gegenrotierenden Taylor-Couette Systems mit Hilfe von gekoppelten Amplitudengleichungen erfolgte durch Golubitsky und Langford (55) (1988). Sie untersuchten Bistabilitätspunkte in einem weiten Parameterbereich, $0.43 \leqslant \eta \leqslant 0.98$, und konnten für diese unterschiedliche Bifurkationsszenarien ableiten.

Knobloch und Pierce (74) (1992) untersuchten unter anderem SPI und RIB Strukturen in endlichen Systemen mittels kubisch gekoppelten Amplitudengleichungen.

In dem Buch von Chossat und Iooss (31) (1994) wird ein allgemeiner Überblick über die Amplitudengleichungen für die im Taylor-Couette System auftretenden Strukturen gegeben, wobei auch kleine Störungen und die Interaktion der verschiedenen Moden diskutiert wurden.

Von Pinter et al. (112; 114) (2001/2006) wurden Cross Spiral (CSPI) Lösungen mittels kubischer Amplitudengleichungen inklusive Kopplungen quintischer Ordnung beschrieben.

Strukturen

Wie bereits zuvor erwähnt gibt es im Taylor-Couette System eine sehr große Anzahl verschiedenster auftretender Strukturen. Deshalb kann und soll hier nur ein kurzer Überblick über Existenzbereich, raumzeitliches Verhalten und die Stabilität unterschiedlicher Lösungen gegeben werden. Die für diese Arbeit interessanten Strukturen werden in Kapitel 3 im Einzelnen genauer beschrieben.

Frühe Simulationen von Taylor Wirbel Zuständen im periodischen System gehen auf Majumdar und Spalding (94) (1977) und Meyer-Spasche und Keller (138) (1980) zurück.

Rechnungen mit endlichen Geometrien hierzu wurden später unter anderem von Lücke und Roth (91) (1990) durchgeführt.

Erste experimentelle Untersuchungen von Wavy Vortex Zuständen für $\eta = 0.5$ und $R_2 = 0$ sind von Fenstermacher et al. (49) (1979) durchgeführt worden. Ihre Beobachtungen ergaben einen quasiperiodischen Zustand. Eine genauere Betrachtung dieser Struktur ist in einer Veröffentlichung von Marcus (93) (1984) für Parameter $R_2 = 0, \eta = 0.875, \lambda = 3$ und $M = 6$ zu finden. Die Lösungen der nicht achsensymmetrischen Spiral Wirbel wurden erst relativ spät von Krueger et al. (75) (1966) prognostiziert, dann aber zwei Jahre danach durch Snyder (137) experimentell bestätigt.

Insgesamt gibt die Arbeit von Andereck et al. (7) (1986) einen sehr guten Überblick über die verschiedenen im Taylor-Couette System auftretenden Strukturen. Sie ermittelten experimentell ein Phasendiagramm für einen großen Parameterbereich bei $\eta = 0.883$ und $20 \leqslant \Gamma \leqslant 48$. Dabei variierten die Antriebe in einem sehr weiten Bereich von $0 \leqslant R_1 \leqslant 2000$ und $-4000 \leqslant R_2 \leqslant 1000$.

Eine Untersuchung von Struktur und Existenz nichtlinearer SPI Lösungen bei $\eta = 0.8$ und periodischen Randbedingungen ist in der Arbeit von Antonijon et al. (9) (1998) für hohe Reynoldszahlen unter Verwendung eines Pseudospektralcodes gegeben. Visuelle Darstellungen aus der Diplomarbeit von Hoffmann (61) (1998) geben Aufschluss über die Struktur der SPI.

Von DiPrima und Grannick (38) (1971) wurden erstmals im Rahmen von gekoppelten kubischen Amplitudengleichungen die Existenz axial stehender RIB Zustände für $\eta = 0.95$ vorausgesagt, die sich in ihren Untersuchungen für $M = 3$ instabil vorwärtsbifurkierend bzw. für $M = 4$ instabil vor- und rückwärtsbifurkierend zeigten. Von Tagg et al. (143) (1988) wurden für $\eta = 0.727$ zuerst experimentell und dann auch numerisch RIB Zustände der azimutalen Wellenzahl $M = 2$ stabil beobachtet. Der experimentelle Nachweis von RIB Lösungen als eine Folge einer vorwärts gerichteten Hopfbifurkation wurde von Langenberg et al. (77) (2003) für $\eta = 0.5$ und $\Gamma \approx 6$ erbracht.

In der Veröffentlichung von Hoffmann et al. (66) (2009) werden stabile Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel (wTVF) und Wavy Spiral Wirbel (wSPI) diskutiert, die als Übergangsstrukturen zwischen den toroidal geschlossenen TVF und den helikalen SPI Lösungen auftreten.

Komplexere Strukturen wurden erstmals von Pinter et al. (114) (2006) mithilfe numerischer Simulationen, unter der Annahme periodischer Randbedingungen gefunden. Hierbei handelt es sich um sogenannte Cross Spirals (CSPI), d.h. gekoppelte Spiralwirbel Zustände gleicher azimutaler Wellenzahl, aber entgegengesetzter Helizität.

Neuere Untersuchungen von noch allgemeineren und komplexeren Strukturen, sogenannte Mixed Cross Spirals (MCS) wurden von Altmeyer et al. (5) (2010) durchgeführt. Diese stellen eine nichtlineare Kopplung und Überlagerung zweier SPI Zustände unterschiedlicher Helizität und im Allgemeinen unterschiedlicher azimutaler Wellenzahl dar. Somit ergeben sich unter anderem eine Vielzahl der bereits bekannten Strukturen im Taylor-Couette System, wie z.B. CSPI und RIB, als Spezialfälle dieser neuen Lösungen.

Durchfluss

Ein axialer Druckgradient bricht die $z \to -z$ Symmetrie des Systems, was weitreichende Konsequenzen hat. So z.B. liegen L- und R-SPI Zustände nicht mehr symmetrieentartet vor und die RIB Lösung existiert überhaupt nicht mehr.

Eine Vielzahl verschiedenster Effekte aufgrund endlichen Durchflusses ist bereits teilweise in den frühen 1930er Jahren untersucht worden. (24) gibt einen Überblick über Publikationen zu diesem Thema. In späteren Untersuchungen stand die lineare Analyse

des Wettbewerbs zwischen der Scher- und Zentrifugalinstabilität (51), oder aber lineare Spiral und Taylor Wirbelfronten und Pulse (114), so wie die schwach nichtlineare Bifurkationsanalyse von axial ausgedehnten Spiralen, Ribbons und komplexeren kombinierten Zuständen mit homogenen Amplituden (119; 31) im Vordergrund.

Weiterhin wurden zahlreiche weitere theoretische, numerische Analysen im Bezug auf die verschiedenen Stabilitätsbereiche durchgeführt. So z.B. für Musterselektion im absolut instabilen Bereich unter Durchfluss (24), Muster im konvektiv instabilen Bereich unter Rauschen (140; 92; 37) und die Analyse der Sensibilität gegenüber Rauschen an der Grenze zwischen konvektiver und absoluter Instabilität (15; 141).

Weitere experimentelle Untersuchungen des Einflusses von Durchfluss auf TVF und SPI Lösungen für $\eta = 0.707$ und $R_2 = 0$ wurden von Tsameret und Steinberg (150) (1994) durchgeführt. Hierbei wurden lange Systeme $\Gamma > 48$ untersucht und ein Phasendiagramm aufgenommen. Eine Analyse der kritischen Werte als Funktion des axialen Durchflusses (bis $Re = 120$) für ein System mit $\eta = 0.5$ ist in der Arbeit von Meseguer und Marques (99) (2002) zu finden. In der Arbeit von Hoffmann et al. (63) (2004) wurde der Einfluss eines axial aufgeprägten Durchflusses auf TVF und SPI Zustände im Hinblick auf deren Amplituden und Frequenzen, sowohl für lange, als auch sehr kurze Systeme diskutiert.

Konvektive und absolute Instabilität

Befindet sich das System im überkritischen Bereich, d.h. oberhalb einer kritischen Schwelle, so können Störungen mit verschiedenen axialen Wellenzahlen aus einem ganzen Band heraus anwachsen. Die Superposition dieser verschiedenen überkritischen Moden führt zu Wellenpaketen, deren Ränder eine auf- und abklingende Front darstellen. Entscheidend für das Verhalten dieses lokalisierten Wellenpaketes ist die zugehörige Gruppengeschwindigkeit, durch die das Wellenpaket auch im überkritischen Parameterbereich aus dem System heraustransportiert werden kann. Erst bei noch höheren Antrieben wächst die Störung schneller als der Wegtransport durch die Gruppengeschwindigkeit erfolgt. In diesem Fall breitet sich die Störung dann im ganzen System aus. Hieraus resultieren zwei unterschiedliche Stabilitätsschwellen, die sogenannte konvektive und die höhere absolute Instabilitätsschwelle.

Bereits in den Arbeiten von Lücke et al. (89; 90) (1984/1985) wurden Frontlösungen zwischen dem CCF Grundzustand und dem rotationssymmetrischen TVF Zustände bei $\Gamma = 25$ numerisch untersucht. Die konvektive Instabilität im Zusammenhang mit dem Taylor-Couette System wurde erstmals in der Arbeit von Tagg et al. (144) (1990) untersucht. Dort wurde der komplexe Ginzburg Landau Eigenwert bestimmt und die zugehörigen Koeffizienten für lineare $m = 1$ und $m = 2$ SPI Lösungen bei verschiedenen Radienverhältnissen, $\eta = 0.65, 0.727, 0.8$, berechnet.

Die Schwelle zwischen konvektiver und absoluter Instabilität für TVF Lösungen bei $R_2 = 0, \eta = 0.738, \Gamma = 144$ wurde erstmals von Babcock et al. (12) (1991) bestimmt. Recktenwald et al. und (123) (1993) untersuchten im Rahmen der Ginzburg Landau Gleichung Taylor Wirbel im Bereich $Re \leqslant 20$ und Radienverhältnissen, $0.1 \leqslant \eta \leqslant 0.975$. Weitere experimentelle Untersuchungen bezüglich konvektiver und absoluter Instabilitätsschwellen bei axialem Durchfluss wurden von Tsamaret et al. (148; 149) (1991/1994) vorgenommen.

Büchel et al. (24) (1996) beschäftigten sich mit der Frontpropagation von Taylor Wirbeln und verglichen Ergebnisse aus numerischer Simulation und Amplitudengleichung. Eine Diskussion von Frontlösungen und der Schwelle zwischen konvektiver und absoluter Instabilität im Rayleigh-Bénard System wurde in der Veröffentlichung von Büchel und Lücke (25) (2000) behandelt.

Eine sehr ausführliche Diskussion über Fronten ist in der Arbeit von Saarloos et al. (128) zu finden.

In einem $\eta = 0.5$ System wurden von Pinter et al. (112; 114) (2003/2006), für $M = 0$ und $M = 1$ Lösungen, im Bereich, $150 \leqslant R_2 \leqslant 50$, die Schwellen der konvektiven und absoluten Instabilität als Funktion des Durchflusses bestimmt und Ergebnisse der vollen linearen Analyse mit denen der Amplitudengleichung verglichen. Entsprechende Messungen für TVF und SPI Lösungen wurden im Anschluss experimentell von Langenberg et al. (2004) vorgenommen, deren Ergebnisse hervorragend mit den theoretisch vorhergesagten übereinstimmten.

Eine weiterführende Analyse von linearen $|m| = 2$ SPI Zuständen von Altmeyer et al. (2) (2007) ergab ein neues unerwartetes Verhalten von lokalisierten Störungen. Bei bestimmten Parameterkombinationen schien es möglich das System über eine zweite konvektive Stabilitätsschwelle aus dem absolut instabilen zurück in den konvektiv instabilen Bereich zu treiben. Neben diesen konnten auch noch Inseln marginaler Stabilität ermittelt werden, d.h. Gebiete, in denen $M = 2$ SPI Störungen wachstumsfähig sind, die aber umschlossen sind von solchen, in denen diese Störungen immer weggedämpft werden.

1.3 Aufbau des Taylor-Couette Systems

Das *Taylor-Couette System* besteht aus zwei konzentrischen Zylindern mit unterschiedlichen Radien r_1 und r_2, zwischen denen sich ein Fluid befindet. Die beiden Zylinder können dabei unabhängig voneinander in gleicher oder entgegengesetzter Richtung rotieren. Das verwendete Fluid wird im Allgemeinen als inkompressibel und isotherm mit kinematischer Viskosität ν angenommen und füllt den Spalt zwischen den Zylindern vollständig aus. Der Aufbau Systems ist in der Abbildung 1.1 schematisch dargestellt und in der Tabelle 1.1 sind die wichtigsten charakteristischen Größen zusammengefasst. In axialer Richtung können

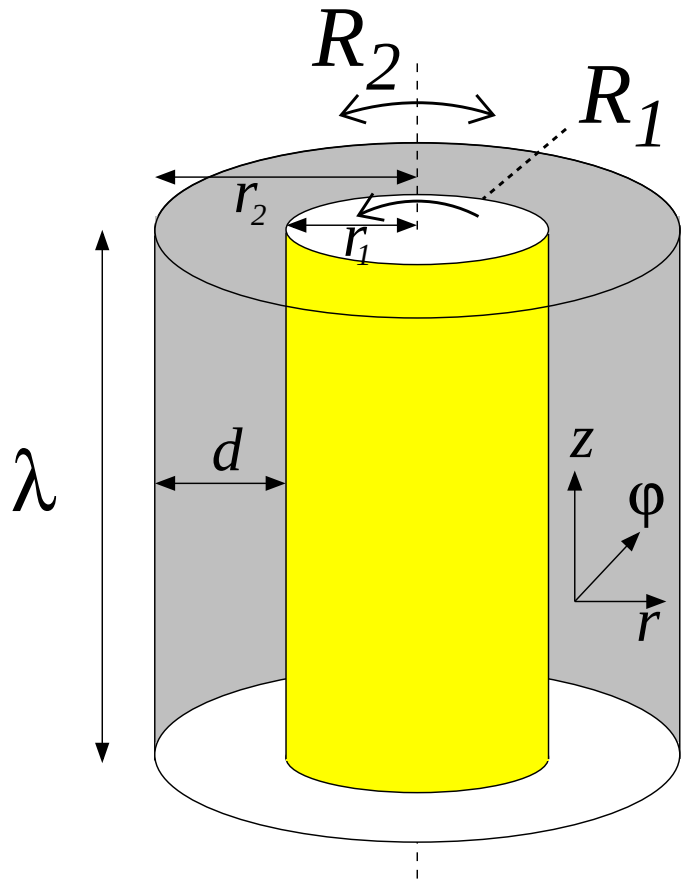


Abbildung 1.1 – Schematische Darstellung des *Taylor-Couette Systems* (TCS) für periodische Randbedingungen (pbc).

dem System (zumindest in der Theorie) verschiedene Randbedingungen auferlegt werden:

- **Periodische Randbedingungen (pbc):**
  Bei periodischen Randbedingungen werden sowohl das Geschwindigkeits- als auch das Druckfeld nach einer axialen Wellenlänge[1] λ wiederholt. Die pbc Randbedingungen

[1]Diese wird für pbc Randbedingungen von außen durch die axiale Wellenzahl k fest vorgegeben. Im periodischen System gilt gerade $L = \lambda = \Gamma$.

r_1	=	innerer Zylinderradius
r_2	=	äußerer Zylinderradius
d	=	Spaltbreite: $r_2 - r_1$
L	=	Länge des Zylinders
Γ	=	Aspektverhältnis: $\frac{L}{d}$
η	=	Radienverhältnis: $\frac{r_1}{r_2}$
$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	=	Geschwindigkeitsfeld ($\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$)
p	=	Druck
ρ	=	Massendichte
ν	=	kinematische Viskosität
Ω_1	=	Winkelgeschwindigkeit des inneren Zylinders
Ω_2	=	Winkelgeschwindigkeit des äußeren Zylinders

Tabelle 1.1 – Charakteristische Größen des *Taylor-Couette Systems* (TCS).

sind sowohl Grundlage der linearen Stabilitätsanalyse (Anh. A), finden aber ebenso, aufgrund eines geringeren Rechenaufwandes, Anwendung bei voll numerischen Simulationen (Anh. D). Bei letzteren ist allerdings darauf zu achten, dass es im Vergleich mit Experimenten insbesondere bei kurzen[2] Systemen zu Differenzen in den Ergebnissen der Lösungen kommen kann. Für genügend lange Systeme, $\Gamma > 12$ (62; 64), sind periodische Randbedingungen mit einer Wellenlänge λ zur Beschreibung periodischer Wirbelstrukturen im Bulk vollkommen ausreichend, da randindzierte Störungen exponentiell in den Bulk hinein abnehmen. Es ist allerdings zu beachten, dass hierdurch einzelne Instabilitätsmechanismen unter Umständen nicht berücksichtigt werden. Ein Beispiel hierzu wäre etwa die Eckhaus Instabilität (42).

- **Endliche Randbedingungen (rbc):**
  Hierbei handelt es sich um die klassischen, im Experiment von Natur aus vorgegebenen Randbedingungen. Dort werden sie durch Deckel am oberen und unteren Ende der Zylinder realisiert, die z.B. mit einem der beiden Zylinder mitrotieren, oder aber stationär sind, den Spalt aber axial vollkommen abschließen. Als charakteristische Systemgröße wird meistens das Aspektverhältnis, $\Gamma := L/d$, benutzt, welches das Verhältnis von Zylinderlänge L und Spaltbreite d beschreibt. Großes [kleines] Γ bedingt einen kleinen [großen] Einfluss der Deckel auf die, im System entstehenden Strukturen. Je länger das System ist, umso weniger ist der Einfluss von randinduzierten Störungen in der Mitte des Bulks zu spüren. Verantwortlich hierfür sind die im endlichen System in der Nähe der Deckel *immer* existierenden Ekman Wirbel, die einen rotationssymmetrischen $m = 0$ Modenanteil in den Bulk induzieren. Dieser klingt zwar exponentiell in das System hinein ab, bleibt aber *immer* vorhanden. Die unterschiedlichen Grenzfälle diesbezüglich sind hierbei in der Literatur (62; 77; 78) zu finden. In der Simulation werden endliche Randbedingungen, wie in Anhang D beschrieben, realisiert. Im Fall langer Systeme kostet dies zwar einen höheren Rechenaufwand, hat aber eine Minimierung der Differenzen in den Ergebnissen, verglichen mit experimentellen Daten, zur Folge. Insbesondere ist dies in Kapitel 5 von Interesse, das sich unter anderem mit Störungen befasst, die durch die axiale Berandung

[2] Hier ist der Einfluss der Ränder natürlich gerade entscheidend.

des System entstehen, bzw. durch diese modifiziert werden.

In der hier vorliegenden Arbeit werden sowohl Systeme mit periodischen, als auch mit endlichen Randbedingungen untersucht. Im Fall periodischer Randbedingungen werden fast ausschließlich Systeme mit einer kleinen Länge L simuliert, so dass die dort auftretenden Strukturen eine Wellenlänge $\lambda = L$ (mit entsprechender Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$) besitzen. Für endliche, feste Randbedingungen wird in Kapitel 5 [9] ein $\Gamma = 12$ [10] System angenommen. Dies hat unter anderem zur Folge, dass die Wellenzahl nicht mehr fest vorgegeben ist, sondern vielmehr vom System selbst, aus allen zur Verfügung stehenden Wellenzahlen, selektiert wird.

An den Zylinderwänden des äußeren und inneren Zylinder werden immer *no-slip* (haftende) Randbedingungen angenommen, die besagen, dass das Fluid am Zylinderrand die gleiche Geschwindigkeit wie der Zylinder selbst besitzt.

Das vorwiegende Interesse gilt der Untersuchung von Geschwindigkeits- und Druckfeldern, welche das Strömungsverhalten der Flüssigkeit zwischen den Zylindern charakterisieren, sowie Übergänge verschiedener Bewegungsformen und Strukturen. Aus Geometriegründen werden die Felder hierzu in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) umgeschrieben:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi + w\mathbf{e}_z. \tag{1.1}$$

Hierbei entsprechen u der radialen, v der azimutalen und z der axialen Geschwindigkeitskomponente des Strömungsfeldes.

1.4 Grundgleichungen

Der Ausgangspunkt zur Berechnung der Geschwindigkeitsfelder sind sogenannte Bilanzgleichungen für Masse und Impuls. Hierbei wird im Folgenden von inkompressiblen ($\rho \equiv$ konst.) Flüssigkeiten ausgegangen.

- Die Massenbilanz führt auf eine (hier noch allgemeine) *Kontinuitätsgleichung*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{1.2}$$

  die sich im vorliegenden Fall inkompressibler Flüssigkeiten ($\rho \equiv$ konst.) zu

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1.3}$$

  vereinfacht.

- Die Impulsbilanz liefert die *Navier-Stokes Gleichungen* (NSE) (76):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nu\nabla^2\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{1.4}$$

Die beiden Gleichungen (1.3) und (1.4) stellen die Grundlage zur Beschreibung des TCS dar.
Wie bereits erwähnt werden in radialer Richtung no-slip Randbedingungen an den Zylindern angenommen. Desweiteren werden dem System in axialer Richtung (i) periodische

Randbedingung auferlegt, um axial periodische Strukturen in langen Zylinder zu simulieren.

$$\mathbf{u}(r_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1\Omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(r_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2\Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(z) = \mathbf{u}(z+L), \qquad p(z) = p(z+L).$$

Zur Simulation endlicher Systeme (ii) werden aber auch Deckel in axialer Richtung betrachtet.

1.4.1 Entdimensionalisierung

Zur Implementierung der Grundgleichungen (1.3) und (1.4) werden diese zuerst folgendermaßen entdimensionalisiert (vgl. auch Abb. 1.1).

- Längenskala:

$$r, r_1, r_2, \lambda_1, \nabla, \nabla^2 \qquad \longrightarrow \qquad \frac{r}{d}, \frac{r_1}{d}, \frac{r_2}{d}, \frac{\lambda_1}{d}, d\nabla, d^2\nabla^2.$$

- Geschwindigkeitsskala:

$$\mathbf{u} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\mathbf{u}}{r_1\Omega_1}. \tag{1.5}$$

- Zeitskala (Impulsdiffusionszeit):

$$t, \frac{\partial}{\partial t} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\nu}{d^2}t, \frac{d^2}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}.$$

- Druck[3]:

$$p \qquad \longrightarrow \qquad \frac{d}{\rho r_1 \Omega_1 \nu} p.$$

Dies führt zu den entdimensionalisierten Gleichungen:

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla^2\mathbf{u} - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nabla p, \tag{1.6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{1.7}$$

Hierbei sind die auftretende *innere* und *äußere Reynoldszahl* wie folgt definiert:

$$R_1 := \frac{r_1\Omega_1 d}{\nu}, \qquad R_2 := \frac{r_2\Omega_2 d}{\nu}.$$

Aufgrund der hier vorliegenden Systemgeometrie bietet es sich an, die Gleichungen (1.3) und (1.4) in Zylinderkoordinaten umzuschreiben. Zusammen mit der Entdimensionalisierung (1.5) erhält man die von nun ab verwendete Darstellung der System beschreibenden Gleichungen:

[3] Zur genaueren Implementierung und der Gewährleistung der Impulserhaltung sei an dieser Stelle auf Anhang D verwiesen.

- *Navier-Stokes Gleichungen:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1\frac{v^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - R_1\frac{uv}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)w - \frac{\partial p}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

- *Kontinuitätsgleichung:*

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial}{\partial z}w. \tag{1.9}$$

- *Randbedingungen (no-slip und periodisch):*

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(r = \frac{\eta}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(r = \frac{1}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{u}(z=0) = \mathbf{u}(z=L), \qquad \mathbf{p}(z=0) = \mathbf{p}(z=L).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\
(\mathbf{u}\cdot\nabla) &= u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

1.4.2 Grundzustand

Reine Rotation - Circular Couette Flow (CCF)

Für kleine Reynoldszahlen R_1, R_2 und ohne externen Durchfluss, $Re = 0$, bildet sich eine rein radiale Strömung innerhalb des Spalts aus. Hierbei handelt es sich um ein laminares Strömungsprofil um die Zylinderachse (siehe Abb. 1.2), zumindest für pbc Bedingungen. Aufgrund der Symmetrie der Randbedingungen ist dieses Feld rotations- und z translationsinvariant und muss an beiden Seiten verschwinden. Das Profil dieses, als *Circular Couette Flow (CCF)* bezeichneten Feldes, lautet somit:

$$\mathbf{u}_{CCF} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v_{CCF}(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_{CCF} \equiv p_{CCF}(r). \tag{1.11}$$

Setzt man nun (1.11) in die obigen Grundgleichungen (1.8) ein, so reduzieren sich diese zu

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\right) v_{CCF}(r) = 0, \tag{1.12}$$

$$R_1\frac{{v^2}_{CCF}(r)}{r} = \frac{\partial p_{CCF}(r)}{\partial r}, \tag{1.13}$$

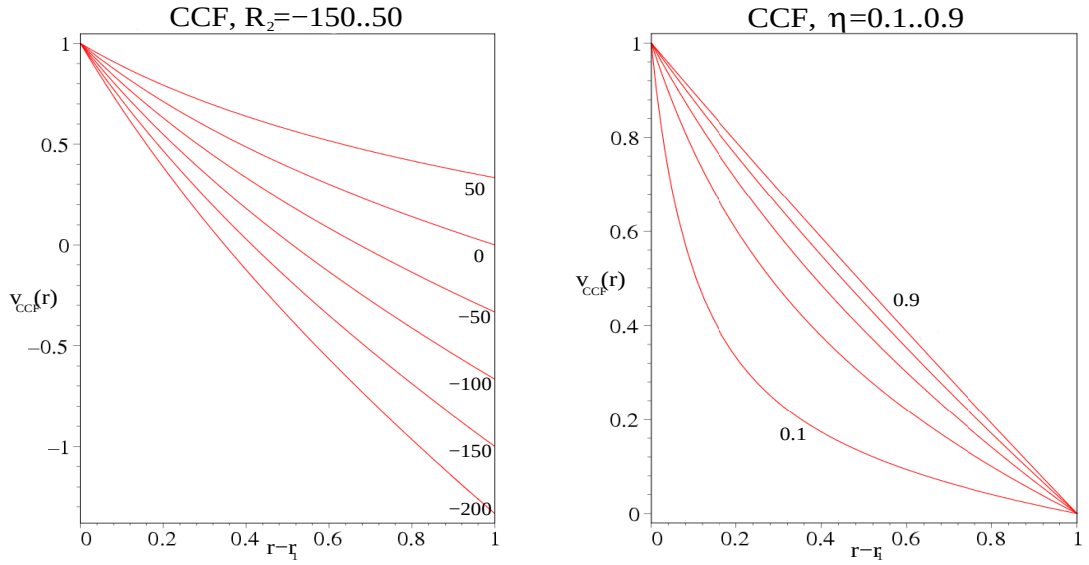


Abbildung 1.2 – Einfluss von R_2 und η auf das Geschwindigkeitsprofil $v_{CCF}(r)$ des *Circular Couette Flow*. Kontrollparameter: $R_1 = 150, Re = 0$; *links*: $\eta = 0.5$, *rechts*: $R_2 = 0$.

mit der allgemeinen Lösung

$$v_{CCF}(r) = Ar + \frac{B}{r}, \tag{1.14}$$

deren Integrationskonstanten A und B aus den Randbedingungen (1.10) folgen. Dabei ist zu beachten, dass diese jedoch auch noch von der gewählten Entdimensionalisierung abhängig sind. Im hier vorliegenden Fall ergeben sich diese zu:

$$A = -\frac{\eta^2 - \mu}{\eta(1+\eta)}, \quad B = \frac{\eta(1-\mu)}{(1-\eta)(1-\eta^2)}. \tag{1.15}$$

Der Druck wird durch Aufintegration von (1.13) gewonnen:

$$\begin{aligned} p_{CCF}(r) &= R_1 \int_{r_1}^{r} \frac{{v_{CCF}}^2(r')}{r'} dr' \\ &= \frac{R_1}{2} \left[A^2 r'^2 + 4AB \ln(r') - \frac{B^2}{r'^2} \right] \Bigg|_{r_1}^{r}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Reiner Durchfluss - Annular Poisseuille Flow (APF)

Prägt man nun dem System im Gegensatz zu dem vorherigen Abschnitt einen in axialer Richtung verlaufenden Druckgradienten auf, so kommt es zur Ausbildung eines stationären Durchflusses entlang der z Achse. Dieser wird als *Annular Poiseuille Flow (APF)* bezeichnet (siehe Abb. 1.3), dessen Profil gegeben ist zu:

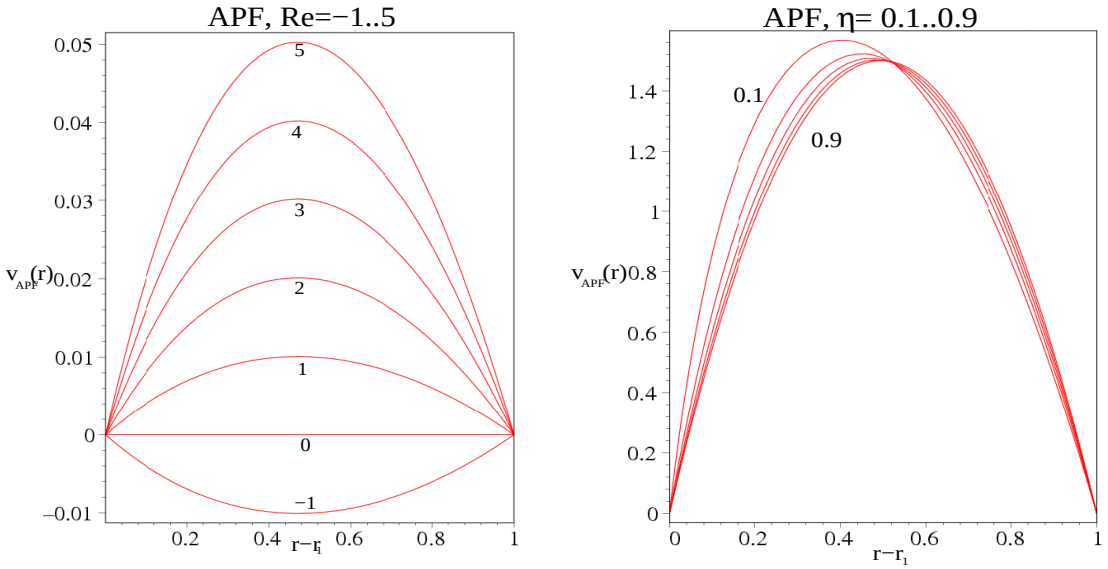


Abbildung 1.3 – Einfluss von R_2 und η auf das Geschwindigkeitsprofil $w_{APF}(r)$ des *Annular Poiseuille Flow*. Kontrollparameter: $R_1 = 150, R_2 = 0$, *links:* $\eta = 0.5$, *rechts:* $Re = 1$.

$$\mathbf{u}_{APF}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{APF}(r) \end{pmatrix}, \quad p_{APF} = p_{APF}(r, z). \tag{1.17}$$

Analog wie schon zuvor beim CCF reduzieren sich die NSE und die Kontinuitätsgleichung durch das Einsetzen dieses Geschwindigkeits- und Druckprofils (1.17) in die Gleichung (1.8), hier zu:

$$\frac{\partial p_{APF}(r,z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) \frac{\partial w_{APF}(r)}{\partial r}. \tag{1.18}$$

Hierbei gilt $\frac{\partial p_{APF}}{\partial z}$:= von außen angelegter Druckgradient. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich zu:

$$w_{APF}(r) = \frac{\partial p_{APF}}{\partial z} \frac{1}{4}(r^2 + C\ln(r) + D) = Re\frac{r^2 + C\ln(r) + D}{E}, \tag{1.19}$$

mit der Durchflussreynoldszahl (vgl. auch Anh. A)

$$Re = \int w_{APF}(r)dr = \frac{1}{4}\frac{\partial p_{APF}}{\partial z}E. \tag{1.20}$$

Die auftretenden Integrationskonstanten C, D und E folgen aus den jeweiligen Randbedingungen und lauten in der hier verwendeten Entdimensionalisierung:

$$C = \frac{1+\eta}{(1-\eta)\ln(\eta)}, \tag{1.21}$$

$$D = \frac{(1+\eta)\ln(1-\eta)}{(1-\eta)\ln(\eta)} - \frac{1}{(1-\eta)^2}, \tag{1.22}$$

$$E = -\frac{1-\eta^2+(1+\eta^2)ln(\eta)}{(1-\eta)^2 ln(\eta)}. \tag{1.23}$$

Gesamtgrundzustand

In den beiden vorherigen Abschnitten wurden die beiden Grenzfälle, im unterkritischen Bereich, der im System auftretenden Strukturen für die Fälle ausschließlicher Rotation und reinen Durchflusses diskutiert. Für den Fall, dass sowohl der Durchfluss Re, als auch die Rotationsgeschwindigkeit des inneren Zylinders Ω_1 hinreichend klein sind, ergibt sich ein stationärer Grundzustand (Index G), der sich additiv aus diesen beiden superponieren lässt und, für pbc Bedingungen, eine Lösung der NSE in allen Parameterkombinationen darstellt.

$$\mathbf{u}_G(r) = \mathbf{u}_{CCF}(r) + \mathbf{u}_{APF}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{CCF}(r) \\ w_{APF}(r) \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Unter rbc Bedingungen gilt diese Lösungen streng genommen nicht, bzw. nur eingeschränkt in der Mitte des Bulks, da dort die Einflüsse der Deckel und der durch diese in das System induzierten Störungen vernachlässigbar sind.

1.5 Numerische und analytische Untersuchungsmethoden

In diesem Abschnitt werden kurz die verschiedenen Methoden vorgestellt, die zur Untersuchung des Taylor-Couette Systems in dieser Arbeit benutzt wurden.

Zunächst einmal ist hier die *Lineare Stabilitätsanalyse* zu nennen. Mit Hilfe dieser lässt sich der Antrieb ermitteln, ab welchem einzelne Moden den Grundzustand stören. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Lineare Analyse einerseits zum Vergleich von Bifurkationsschwellen und marginalen Frequenzen mit denen der vollen numerischen Simulation herangezogen. Andererseits werden im Anhang B konkrete lineare $m = 2$ Spiralwirbelstörungen untersucht, was eine Fortsetzung und Verallgemeinerung meiner Diplomarbeit (2) darstellt. Das Verfahren hierzu wird in Anhang A kurz beschrieben. Entscheidend hierbei ist, dass die Lineare Stabilitätsanalyse nur Aussagen über das Verhalten bzw. die Entwicklung einzelner Moden direkt am Onset machen kann. Somit können die Bifurkationsschwelle, kritische Wellenzahl und Frequenz bestimmt werden.

Zur *vollständigen Numerischen Simulation* der Strömungen werden die beiden, in Anhang D beschriebenen, numerischen Verfahren, **G2D2** und **G1D3**, verwendet. Diese sind im Wesentlichen sehr ähnlich, unterscheiden sich aber in der verwendeten Diskretisierung und der Entwicklung nach harmonischen Funktionen. Der Code G2D2 benutzt eine Diskretisierung in radialer r Richtung und der Zeit t (**D2**) kombiniert mit einer Entwicklung nach harmonischen Funktionen in azimutaler φ und axialer z Richtung (**G2**). Demgegenüber wird in dem Code G1D3 eine Diskretisierung in der gesamten $r - z$ Ebene und der Zeit t (**D3**) benutzt, während nur in azimutaler φ Richtung nach harmonische Funktionen entwickelt wird (**G1**). Die Vor- und Nachteile beider Verfahren werden in Anhang D genauer

diskutiert. Die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung wird in beiden Fällen durch ein Nachregulieren des Drucks nach jedem Iterationsschritt gewährleistet. Im Wesentlichen beruht dies auf der Lösung einer Poisson Gleichung, wie in Anhang D.1.4 genauer beschrieben. Da diese beiden Verfahren die wesentliche Untersuchungsmethode dieser Arbeit darstellen, werden sie fast vollständig hergeleitet (Anh. D) und die zur Implementierung notwendige Diskretisierung der Felder (Anh. E) vorgestellt. Mit Außnahme von Anhang B sind alle Phasendiagramme wie auch Bifurkationsdiagramme dieser Arbeit mit den Verfahren G2D2 oder G1D3 berechnet worden.

Amplitudengleichungen stellen eine Theorie zur schwach nichtlinearen Analyse zur Verfügung. Hierbei werden schwach nichtlineare Terme berücksichtigt, so dass diese Theorie auch bei vorwärts bifurkierenden Strukturen etwas oberhalb des Einsatzpunktes ihre Gültigkeit behält. In dieser Arbeit finden die Amplitudengleichungen nur in Kapitel 4 im Rahmen eines einfachen Dreimodenmodells Verwendung, sowie in Anhang D zur Überprüfung der Genauigkeit der benutzten numerischen Verfahren. Zusätzlich werden sie noch in Anhang B als Vergleichsreferenz benutzt, um das dort beschriebene Verhalten zu quantifizieren.

Teil I

Klassisches Taylor-Couette System mit newtonschem Fluid

Kapitel 2

Einführung Teil I

2.1 Motivation

Auch wenn das Taylor-Couette System schon zu den etwas betagteren Modellsystemen zählt, so existieren immer noch interessante und vor allem grundlegende Fragestellungen, die bislang noch gar nicht bzw. nur unzureichend untersucht und geklärt sind. Eine solch interessante Fragestellung ist zum Beispiel wie der Übergang von toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln hin zu offenen, helikalen Spiral Wirbeln abläuft. Hierbei handelt es sich um eine Fragestellung von sehr allgemeinem Interesse, und zwar, wie eine stehende Welle (z.B. TVF) in eine wandernde Welle (z.B. SPI) übergeht.

Ebenso lassen sich im klassischen System auch heute noch immer neue, bislang unbekannte und somit nicht klassifizierte Strukturen, wie auch die, in dieser Arbeit untersuchten, Mixed Cross Spirals finden.

Zusammenfassend kann man feststellen, dass sich doch immer noch neue Erkenntnisse aus diesem alten Modellsystem gewinnen lassen. Dies gilt bereits für ein klassisches newtonsches Fluid das sich im Bulk zwischen den Zylindern befindet, wie es im ersten Teil dieser Arbeit betrachtet wird. Insbesondere aber natürlich auch für komplexere Flüssigkeiten, wie z.B. Ferrofluide im System, die im zweiten Teil dieser Arbeit diskutiert werden.

2.2 Gliederung und Ziele – Teil I – Durchgeführte Untersuchungen

Im Teil I der hier vorliegenden Arbeit, Kapitel 4-6, wird ausschließlich das klassische Taylor-Couette System betrachtet, bei dem der Spalt zwischen den Zylindern mit einem newtonschen Fluid befüllt ist.

In **Kapitel 3** wird zunächst mit Hilfe verschiedener Phasendiagramme ein ausführlicher Überblick über die in dieser Arbeit untersuchten Parameterbereiche gegeben. Danach werden die verschiedenen hierbei auftretenden Strukturen im Detail charakterisiert. Dies geschieht unter anderem durch Betrachtung der zugehörigen Modenspektren, wie auch der Darstellung in 2D Vektorplots charakteristischer Schnittebenen und 3D Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ. Beide letzteren Darstellungen dienen insbesondere der Charakterisierung des raumzeitlichen Verhaltens der einzelnen Strukturen. Für verschiedene komplexere (Mehrmoden-) Zustände wird eine Superposition aus Einmodenzuständen betrachtet.

In **Kapitel 4** werden Übergänge zwischen topolgisch unterschiedlichen Wirbelstrukturen, den toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln und den offenen, helikalen Spiral Wirbeln, unter der Annahme periodischer Randbedingungen untersucht. Es wird gezeigt, dass diese Übergänge über sekundär, vorwärts bifurkierende Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel und Wavy Spiral Wirbel, vollzogen werden. Hierzu werden die Bifurkations- und Stabilitätseigenschaften der einzelnen Strukturen diskutiert. Alle Rechnungen diesbezüglich sind Ergebnisse der vollen numerischen Simulation.

Dabei konnten die hier diskutierten stabilen Wavy Strukturen als Übergangsstrukturen zwischen verschiedenen Zuständen erstmals numerisch berechnet werden, nachdem sie bereits zum Teil in der Literatur theoretisch vorhergesagt wurden. Insbesondere der Ast der stabilen Wavy Spiral Wirbel war bislang noch nicht bekannt. Es konnten verschiedene Parameterbereiche gefunden werden, in denen diese Wavy Lösungen bistabil mit einer reinen Struktur existieren. Die jeweiligen Wavy Lösungen bifurkieren sekundär aus der topologisch identischen reinen Struktur heraus, wTVF aus TVF und wSPI aus SPI Lösungen, und nähern sich der Ribbon Lösung an. Da diese im untersuchten Parameterbereich aber immer nur als instabile Lösung vorliegt, vollzieht das System einen transienten Übergang hin zu der jeweils einzig stabil im System verbleibenden Lösung.

Die hier gefundenen Wavy Strukturen als Übergangsstrukturen werden in einem weiten Parameterbereich bezüglich der inneren und äußeren Reynoldszahl sowie der Wellenzahl klassifiziert und auch hinsichtlich ihrer Frequenzen untersucht. Zusammenfassend ergibt sich als 3D Phasendiagramm eine Art Zwiebelschalenmodell, in dem die verschiedenen Strukturen in unterschiedlichen Ebenen übereinander stabil und zum Teil auch bistabil existieren.

Besonderes Augenmerk lag hierbei auf dem raumzeitlichen Verhalten während des Übergangs und insbesondere der dabei beteiligten Moden. Es zeigte sich, dass es sich um eine nicht nichtlineare Anregung handelt, die mit Hilfe eines einfachen Dreimodenmodells beschrieben werden kann.

Das folgende **Kapitel 5** stellt die logisch konsequente Weiterführung des vorangegengenen Kapitels dar. Hier werden die zuvor betrachteten Übergänge unter der realistischeren Annahme eines endlichen Systems ($\Gamma = 12$) mit Deckeln an beiden Enden betrachtet. Das Interesse liegt dabei gerade auf den durch diese Deckel permanent in das System induzierten Störungen und die hieraus resultierenden Einflüsse auf die verschiedenen Übergänge und Strukturen.

Verglichen mit dem periodischen existiert im endlichen System nur der Übergang von TVF zu wSPI Lösungen in ähnlicher Art und Weise mit stabilen Wavy Taylor Wirbeln als Übergangsstrukturen. Der einzige Unterschied besteht lediglich darin, dass aufgrund der an den Rändern immer vorhandenen Ekman Wirbel permanent Störungen in das System hineingetragen werden, so dass keine reinen Spiralen sondern nur Wavy Spiral Wirbel existieren. Der Übergang in umgekehrter Richtung von SPI→wSPI→TVF Lösungen existiert im endlichen System so überhaupt nicht, da hier die (Wavy) Spiral Wirbel, als notwendige Ausgangsstruktur für diesen Übergang in dem entsprechenden Parameterbereich nicht als stabile Lösungen existieren. Stattdessen konnte aber für andere Parameter ein anderes Übergangszenario von wSPI zu TVF Lösungen beobachtet werden. Hierbei propagiert ein Defekt axial durch den Bulk und verdrängt die ursprünglich vorliegende wSPI Struktur.

Entscheidend bei endlichen Randbedingungen ist auch, dass das System nun nicht mehr eine von außen fest vorgegebene Wellenzahl besitzt, sondern diese vielmehr aus allen zur Verfügung stehenden Wellenzahlen selbst selektiert. So z.B. können diverse Taylor Wirbel Strukturen mit verschiedenen Wellenzahlen, d.h. unterschiedlicher Anzahl an Wirbelpaaren, im Bulk parallel stabil nebeneinander existieren. Bei der sekundären Bifurkation einer

Wavy Taylor Wirbel Lösung aus einer dieser Taylor Wirbel Lösung bleibt die Wellenzahl dabei unverändert, während sie sich im Allgemeinen bei dem transienten Übergang hin zu der Wavy Spiral Struktur verändern kann. Diese Änderung der Wellenzahl ist dabei insbesondere von der Systemlänge abhängig.

Das **Kapitel 6** befasst sich mit komplexeren helikalen Strukturen, sogenannten Mixed Cross Spirals, die wie der Name bereits vermuten lässt, aus unterschiedlichen Spiral Zuständen zusammengesetzt sind. In erster Näherung kann man sich diese Strukturen als eine Superposition zweier reiner Spiralen unterschiedlicher Helizität und im Allgemeinen auch unterschiedlicher Ganghöhe bzw. azimutaler Wellenzahl vorstellen. Die jeweilige majorante Mode bestimmt dabei die Helizität und damit die Propagationsrichtung der Mixed Cross Spiral Struktur, während die minorante Mode eine Modulation hervorruft, die dieser überlagert ist und gerade in entgegengesetzter Richtung wandert.

Diese Strukturen bifurkieren jeweils sekundär aus einem reinen Spiral Zustand heraus. Dabei können im Wesentlichen zwei Fälle auftreten. Entweder liegt die Mixed Cross Spiral Lösung als eine Art Bypass Lösung **(i)** vor, d.h. sie endet erneut in der Spiral Lösung, aus der sie entstanden ist, oder sie beschreibt eine Übergangslösung **(ii)** und verbindet zwei unterschiedliche Spiral Lösungsäste miteinander. Beide Szenarien sind neu und bislang in der Literatur noch nicht beschrieben worden.

Diese neuen Mixed Cross Spiral Lösungen charakterisieren sehr allgemeine Zustände, aus denen sich eine große Anzahl weiterer, schon lange bekannte Lösungen im Taylor-Couette System als Spezialfälle ableiten lassen. So handelt es sich im Fall gleicher azimutaler Wellenzahlen der beteiligten Spiral Strukturen um die bekannten Cross Spiral Lösungen. Sind zudem noch die Amplituden der dominanten Moden gleich groß, so liegt eine klassische Ribbon Lösung vor.

Anhang

Im Anhang werden im Wesentlichen (mit Ausnahme von Anh. B) die unterschiedlichen verwendeten numerischen Verfahren vorgestellt, die zur Berechnung der Ergebnisse dieser Arbeit benutzt wurden.

In **Anhang A** wird die Lineare Stabilitätsanalyse mittels Shooting Verfahren kurz vorgestellt.

Der **Anhang B** ist eine Fortsetzung und Verallgemeinerung meiner Diplomarbeit und nutzt ausschließlich die Lineare Stabilitätsanalyse (aus Anh. A). Hierbei werden Spiralwirbelstrukturen mit azimutaler Wellenzahl $M = 2$ betrachtet. Diese wurden sowohl im Fall unendlich ausgedehnter Störungen bezüglich ihrer marginal- und kritischen Bifurkationsschwellen wie auch für den Fall lokalisierter Störungen in Form von Wellenpaketen und Frontlösungen im Hinblick auf ihre unterschiedlichen Stabilitätseigenschaften untersucht. Mit letzteren zusammenhängend wurde ebenfalls noch eine Analyse von Frontpropagationen durchgeführt.

Es zeigte sich, dass bei diesen Strukturen, anders als bei solchen mit $|M| \leqslant 1$ zum Teil vollkommen neue Phänomen auftreten. Im Fall unendlich ausgedehnten $M = 2$ Störungen konnten isolierte Inseln gefunden werden, innerhalb derer Störungen anwachsen können, in dessen Umgebung diese aber immer weggedämpft werden. Das Entstehen einer solchen Insel lässt sich durch diverse Systemparameter, wie z.B. R_2, Re, η bedingen.

Auch bei den lokalisierten Wellenpaketen für $M = 2$ zeigte sich eine Insel Lösung, die aber auf einem anderen Mechanismus beruht. Hierbei konnten Parameterbereiche gefunden werden, in denen das System durch Veränderung eines Kontrollparameters von dem Bereich absoluter Stabilität über konvektiv instabiles Verhalten hinein in einen absolut instabilen Bereich und aus diesem erneut zurück in ein Gebiet konvektiver Instabilität getrieben werden kann.

Weiterhin wurde ein Vergleich der Ergebnisse aus der Linearen Stabilitätsanalyse mit der schwach nichtlinearen Ginzburg Landau Näherung durchgeführt. Hierbei zeigte sich, dass diese zum Teil gar nicht mehr in der Lage ist, dieses besondere Verhalten für $M = 2$ Störungen zu beschreiben.

Die Ursache dieses etwas sonderbaren und zunächst scheinbar unphysikalischen Stabilitätsverhaltens konnte letztendlich auf die Tatsache zurückgeführt werden, dass es über der komplexen $k - K$ Ebene eine Vielzahl verschiedener Sattelpunkte gibt. Unter all diesen gibt es aber immer mindestens zwei verschiedene Sättel, die Fronten charakterisieren, die in entsprechende Richtungen propagieren und somit gewährleisten, dass das physikalische Verhalten des Systems gesichert ist. D.h. einmal im absolut instabilen Bereich angekommen, verbleibt das System auch in diesem!

Der **Anhang C** soll dazu dienen die zur Visualisierung der verschiedenen Strukturen in dieser Arbeit benutzte Kenngröße, die Vortizität Ω, insbesondere deren azimutalen Komponente Ω_φ, vorzustellen und besser zu verstehen.

In **Anhang D** werden die beiden numerischen Verfahren, G2D2 und G1D3, vorgestellt, die zur Simulation der vollen NSE in dieser Arbeit verwendet wurden. Weiterhin werden die Ergebnisse gewonnen mit G2D2 mit denen anderer numerischer, sowie analytischer Verfahren verglichen.

Der **Anhang E** beinhaltet die diskretisierte Form der NSE für die beiden verwendeten numerischen Verfahren G2D2 und G1D3.

Kapitel 3

Strukturen im Taylor-Couette System (TCS)

3.1 Überblick über die untersuchten Parameterbereiche

Im Folgenden werden kurz die verschiedenen, in dieser Arbeit untersuchten, Parameterbereiche und die dort auftretenden Strukturen skizziert.

Wie bereits in der Motivation erläutert, beschäftigt sich der erste Teil dieser Arbeit mit dem Taylor-Couette System, befüllt mit einem 'klassischem' newtonschen Fluid. Hierzu geben die beiden Abbildungen 3.1 und 3.2 einen Überblick über die verschiedenen untersuchten Strukturen und deren Existenzbereiche im $R_1 - R_2$ Parameterraum. Zum Vergleich ebenfalls mit aufgenommen sind die marginalen Stabilitätsschwellen für $m = 0$ (blau) und $m = 1$ (orange) Störungen aus der linearen Analyse (vgl. hierzu auch Anh. A) mittels Shooting Verfahren.

Die Abbildung 3.3 zeigt entsprechend den untersuchten Parameterbereich, einschließlich der Strukturen, die im zweiten Teil dieser Arbeit, bei der Untersuchung von Ferrofluiden im Taylor-Couette System und den Auswirkungen von extern angelegten Magnetfelder auf das Strömungsverhalten dieser, von Interesse ist. Dieser ist im Wesentlichen identisch mit dem der Abbildung 3.1. Die hier vorliegenden Strukturen sind allerdings zum Teil modulierte bzw. deformierte Varianten (Abb. 3.3) dieser, andererseits aber auch vollkommen andere, aufgrund der extern angelegten Magnetfelder, die die Topologie der Strukturen zum Teil drastisch verändern.

Die durchgeführten numerischen Simulationen beinhalten ein Radienverhältnis $\eta = 0.5$ in den beiden Abbildung 3.1 und 3.3, sowie $\eta = 0.883$ in Abbildung 3.2.

In den Bereichen A und B der Abbildung 3.1 wurden Wavy Taylor Wirbel (Wavy Taylor Vortex Flow, wTVF) und Wavy Spiral Wirbel (Wavy Spiral Vortex Flow, wSPI) als Übergangsstrukturen zwischen den primär bifurkierenden toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln (Taylor Vortex Flow, TVF) und den helikalen Spiral Wirbeln (Spiral Vortex Flow, SPI) untersucht. In beiden Fällen handelt es sich um stabile sekundär bifurkierende Strukturen, die topologisch den 'reinen' Strukturen entsprechen, aus denen sie heraus entstehen. Die axiale Wellenlänge wurde hierbei für die meisten Untersuchungen fixiert gewählt mit $\lambda = 1.6$, was einer Wellenzahl $k = 3.927$ entspricht. Im Zuge der Untersuchungen wird die Abhängigkeit dieser Wavy Strukturen von verschiedenen Kontrollparametern,

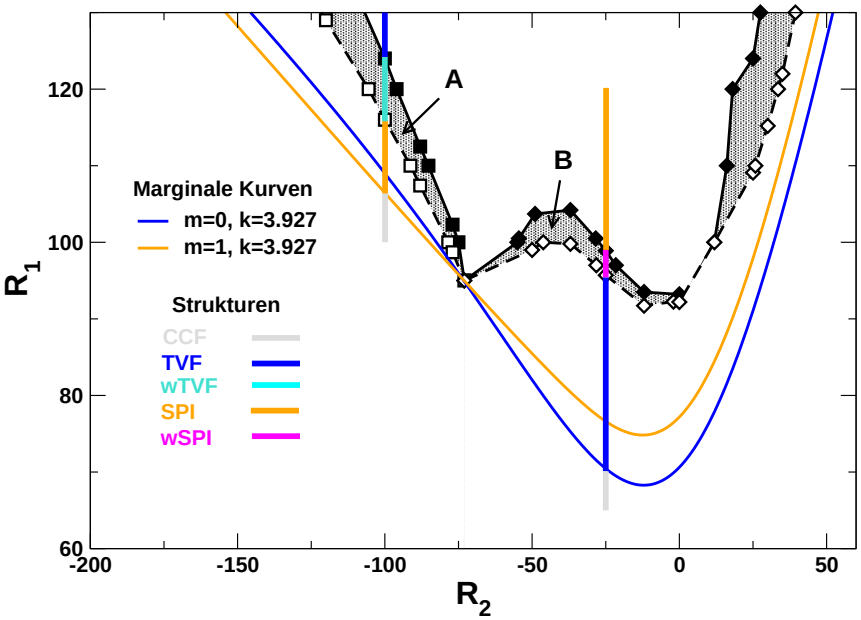


Abbildung 3.1 – Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über den, im Wesentlichen untersuchten, Parameterbereich im ersten Teil dieser Arbeit im Hinblick auf die Übergänge zwischen TVF und SPI Strukturen (Kap. 4 und 5). Bei den durchgezogenen Kurven handelt es sich um, mittels Shooting Verfahren (vgl. Anh. A), ermittelte lineare Bifurkationsschwellen für $m = 0$ (blau) und $m = 1$ (orange). Diese weichen um ca. 2% von den nichtlinear ermittelten Schwellen für periodische Randbedingungen (pbc), wie auch für endliche Systeme (rbc) ab (siehe auch Anh. D). Die eingezeichneten vertikalen Linien kennzeichnen Schnitte, die im Einzelnen in Bifurkationsdiagrammen näher untersucht werden. Entsprechende Strukturen sind, wie in der Legende dargestellt durch verschiedene Farben kodiert. Der graue Bereich A [B] gibt den Existensbereich von wTVF [wSPI] Lösungen an. Das hier dargestellte $R_1 - R_2$ Phasendiagramm gibt die Strukturen und Bifurkationsschwellen unter der Annahme periodischer Randbedingungen wieder. Das entsprechende Diagramm für endliche Systemgeometrie ist in der Abbildung 5.7 dargestellt. Kontrollparameter: $\eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

wie etwa R_1, R_2, k und schließlich auch Re analysiert. Dabei ist insbesondere letzterer sehr interessant, da bei endlichem axialem Durchfluss Re die Symmetrieentartung von L- (linksgewundenen) und R-SPI (rechtsgewundenen) Zuständen aufgehoben wird.

Bei den Untersuchungen dieser Übergänge wurden sowohl periodische (pbc), wie auch endliche (rbc) Randbedingungen in axialer Richtung angenommen. Im Fall endlicher Systemlänge existiert eine permanente $m = 0$ Modenbeimischung im Bulk, die durch die, an den Deckeln immmer vorhandenen Ekman Wirbel hervorgerufen wird. Aus diesem Grund existieren zum Beispiel auch keine reinen SPI Zustände mehr, sondern genau genommen nur noch modulierte wSPI Lösungen. Hieraus resultiert auch ein $R_1 - R_2$ Phasendiagramm, das gegenüber dem hier für den periodischen Fall gezeigten (Abb. 3.1) deutlich verändert und zum Teil auch komplexer ist. Dies ist in Abbildung 5.7 genauer dargestellt. Sowohl für periodische (Kap. 4), als auch endliche Randbedingungen (Kap. 5) wurde ein Radienverhältnis von $\eta = 0.5$ angenommen.

Die Abbildung 3.2 zeigt die Parameterbereiche, in denen die komplexen Mixed Cross

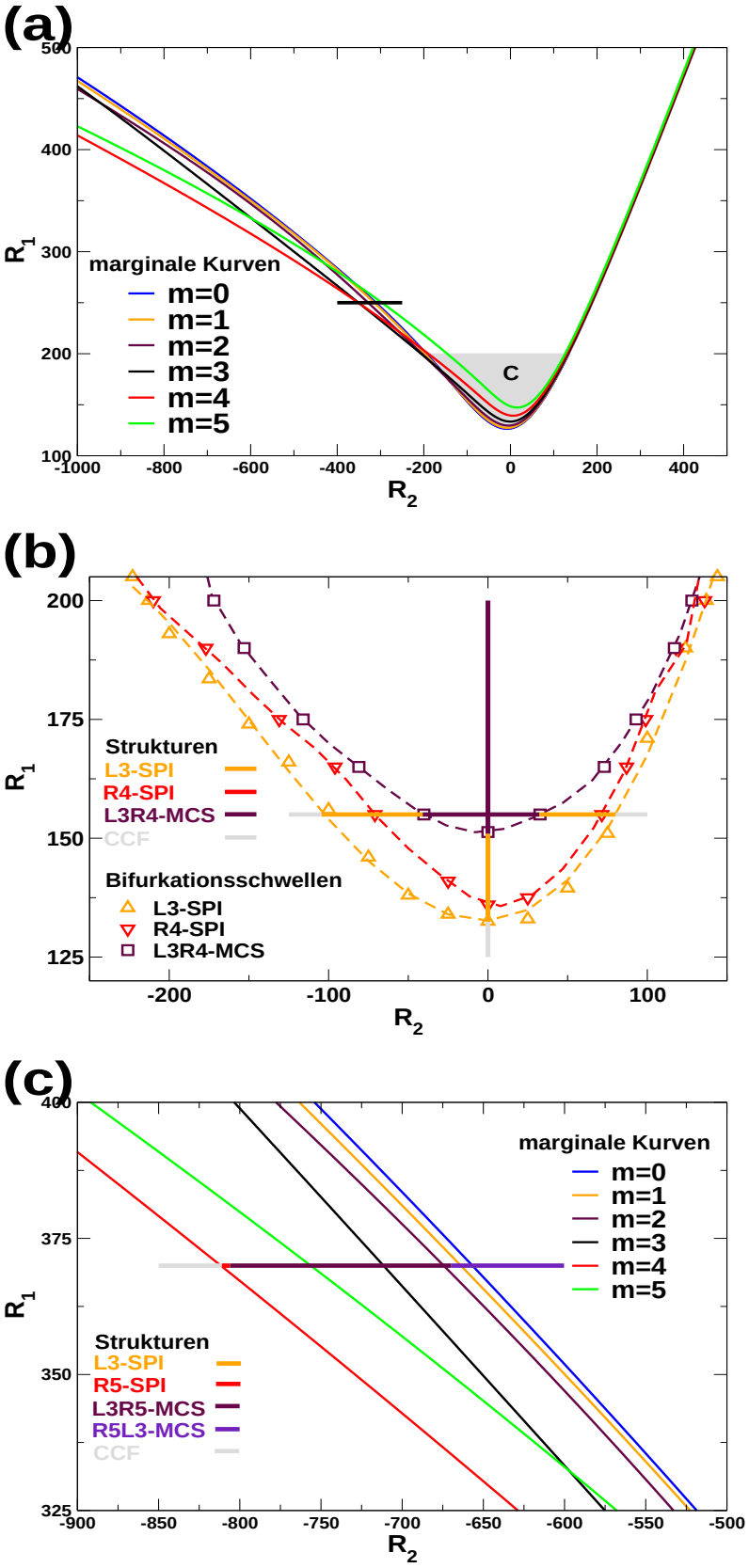


Abbildung 3.2 – **(a)** Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über weitere Parameterbereiche im Taylor-Couette System in denen Mixed Cross Spirals in Kapitel 6 untersucht werden. Zu sehen sind marginale Stabilitätskurven $m = 0, .., 5$ (Legende in **(a,c)**) gewonnen aus der linearen Analyse mittels Shooting Verfahren (vgl. Anh. A). Der Bereich C (grau) in **(a)**, innerhalb dessen die MCS Zustände als eine Art Bypaßlösung existieren, ist exemplarisch für den Fall einer L3R4-MCS Lösung in **(b)** (Bereich oberhalb der gestrichelten (maroonen) L3R4-MCS Bifurkationsschwelle) nochmals vergrößert dargestellt. Die hier eingezeichnete vertikale und horizontale Linie kennzeichnen zwei Schnitte, die in Bifurkationsdiagrammen näher untersucht werden. Entsprechende Strukturen sind, wie in der Legende dargestellt, durch verschiedene Farben kodiert. **(c)** zeigt einen Ausschnitt des Parameterbereiches aus **(a)**, ebenfalls vergrößert. In diesem Bereich wird die MCS als Übergangsstruktur zwischen zwei verschiedenen SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität und azimutaler Wellenzahl untersucht. Kontrollparameter: $\eta = 0.883, k = 3.927, Re = 0$. Für alle Rechnungen zu MCS Lösungen wurden ausschließlich periodische (pbc) Randbedingungen angenommen.

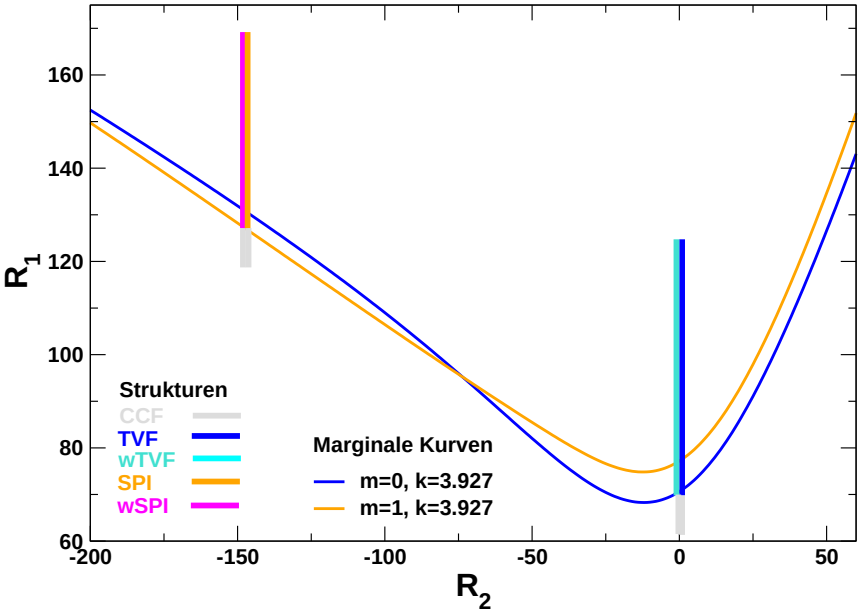


Abbildung 3.3 – Übersichtsplot in der $R_1 - R_2$ Ebene über den, im Wesentlichen untersuchten, Parameterbereich im zweiten Teil dieser Arbeit (Kap. 8 und 9) mit Ferrofluiden im Taylor-Couette System. Die eingezeichneten vertikalen Linien kennzeichnen Schnitte, die in Bifurkationsdiagrammen näher untersucht werden. Abhängig der angelegten Magnetfelder bifurkieren unterschiedliche Strukturen aus dem Grundzustand heraus. Neben den reinen TVF und SPI Lösungen existieren auch primär bifurkierende Wavy Strukturen, wTVF und wSPI, die sich jedoch zum Teil deutlich von den, im ersten Teil dieser Arbeit diskutierten, klassischen Wavy Strukturen unterscheiden. Diese primäre Bifurkation von Wavy Lösungen (unter pbc) ist neu und bislang noch nicht beobachtet worden. Die eingezeichneten durchgezogenen marginalen Kurven (lineare Analyse) entsprechen denen ohne Magnetfeld unter der Annahme periodischer (pbc) Randbedingungen; im Fall endlicher Magnetfelder verschieben sich diese zu größeren R_1 Werten hin. Kontrollparameter: $\eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

Spiral (MCS) Strukturen untersucht wurden. Der graue Bereich C in **(a)** markiert die Parameter innerhalb derer verschiedene MCS Zustände als *'Bypasslösungen'* auftreten. Dies bedeutet, dass die MCS Lösung sekundär aus dem Lösungsast einer reinen SPI Struktur herausbifurkiert und auch wieder in dem *selben* Lösungsast endet. In **(b)** ist das $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für diese Bypasslösung exemplarisch für den Flall einer L3R4-MCS Struktur dargestellt. Die eingezeichnete vertikale und horizontale Linie geben Parameter an, für die das Bifurkationsszenario im Detail genauer untersucht wird. Der Bereich um die schwarze horizontale Linie in **(a)** ist in **(c)** vergrößert dargestellt und zeigt die Parameter, bei denen die MCS als Übergangslösung zwischen zwei SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität untersucht wurden. Bei allen Untersuchungen zu MCS Strukturen wurde ein Radienverhältnis von $\eta = 0.883$ und eine axiale Wellenzahl von $k = 3.927$ zugrunde gelegt. Das größere Radienverhältnis wurde gewählt, da die komplexen MCS Strukturen bei diesen einfacher zu finden und zu analysieren sind.

Die Abbildung 3.3 zeigt den Parameterbereich, in dem, im zweiten Teil dieser Arbeit, verschiedene Strukturen im Taylor-Couette System, befüllt mit Ferrofluiden unter dem Ein-

fluss verschiedener extern angelegter Magnetfelder, untersucht wurden. Im Wesentlichen ist der Parameterbereich identisch dem der Abbildung 3.1. Der große Unterschied besteht hierbei in der Existenz, von primär vorwärts bifurkierenden Wavy Strukturen (Wavy Taylor Wirbel (wTVF) und Wavy Spiral Wirbeln (wSPI) unter dem Einfluss verschiedener Magnetfelder, die in diesem Zusammenhang erstmals analysiert wurden. Die vertikalen Linien entsprechen ebenfalls Parametern, bei denen die unterschiedlichen Strukturen hinsichtlich ihrer Bifurkationen genauer untersucht wurden. Wie bei der Analyse der Übergänge in Teil I wurde auch hier $\eta = 0.5$ gewählt und fixiert gehalten.

3.2 Charakterisierung unterschiedlicher Strukturen im Taylor-Couette System

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen, in dieser Arbeit untersuchten, Strukturen im Taylor-Couette System im Einzelnen mit ihren jeweiligen charakteristischen Eigenschaften vorgestellt. Die Tabelle 3.1 fasst alle diese Strukturen, einschließlich der für die jeweilige Struktur verwendeten Symbole und Farben, wie sie folgend in der Arbeit benutzt werden, zusammen. Gefüllte [leere] Symbole kennzeichnen hierbei eine stabil [instabil] vorliegende Lösung. Ebenso werden stabile [instabile] Bifurkationsschwellen mittels durchgezogenen [gestrichelten] Linien dargestellt, wie in Tabelle 3.2 zu sehen. Weiterhin werden sowohl Untersuchungen mit periodischen Randbedingungen (pbc), als auch solche mit endlichen Randbedingungen (rbc) durchgeführt (Tab. 3.2).

Symbol/Farbe	Abkürzung	Struktur
klassisches newtonsches Fluid		
-	CCF	Circular Couette Flow
-	APF	Annular Poiseuille Flow
●, ○	TVF	Taylor Vortex Flow (Taylor Wirbel)
▼, ▽	RM-SPI	rechtsgewundener Spiral Vortex Flow (Spiral Wirbel)
▲, △	LM-SPI	linksgewundener Spiral Vortex Flow (Spiral Wirbel)
♦, ◇	RIB	Ribbon
■, □	wTVF	Wavy Taylor Vortex Flow (Wavy Taylor Wirbel)
♦, ◇	wSPI	Wavy Spiral Vortex Flow (Wavy Spiral Wirbel)
■, □	LM_iRM_i-MCS[1]	Mixed Cross Spirals
Ferrofluid		
■, □	wTVF	Wavy Taylor Vortex Flow (Wavy Taylor Wirbel)
♦, ◇	wSPI	Wavy Spiral Vortex Flow (Wavy Spiral Wirbel)

Tabelle 3.1 – Charakterisierung der verschiedenen in dieser Arbeit diskutierten Strukturen im Taylor-Couette System einschließlich der, zu ihrer Charakterisierung verwendeten Symbole und Farben. M gibt die azimutale Strukturwellenzahl an. Die Farben der wTVF (blau) und wSPI (rot) Lösungen, die durch angelegte Magnetfelder erzeugt werden orientieren sich an denen der reinen, primär bifurkierenden Strukturen, TVF (blau) und SPI (rot), da diese dort zum Teil nicht mehr existieren und durch diese Wavy Strukturen ersetzt werden.

Bifurkations-/Stabilitätsschwellen	
————	stabil
– – – –	instabil
Randbedingungen	
pbc	**p**eriodic **b**oundary **c**onditions – periodisch
rbc	**r**igid **b**oundary **c**onditions – endlich

Tabelle 3.2 – Stabilitätseigenschaften von Lösungen und gewählte Randbedingungen im TCS.

Die Farben der wTVF (blau) und wSPI (rot) Lösungen, die durch angelegte Magnetfelder erzeugt werden orientieren sich an denen der reinen, primär bifurkierenden Strukturen, TVF (blau) und SPI (rot), da diese dort zum Teil nicht mehr existieren und durch diese Wavy Strukturen ersetzt werden. Die Entstehung unterscheidet sich somit deutlich von den klassischen wTVF und wSPI (schwarz), die i.A. sekundär bifurkierend vorliegen.

3.3 Strukturen im klassischen TCS

Zur Analyse der einzelnen Strukturen werden die physikalischen Felder als Modenentwicklung in azimutaler (φ) und axialer (z) Richtung wie folgt dargestellt:

$$f(r,\varphi,z;t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{m,n} e^{i(m\varphi+nkz)}, \qquad f \in \{u,v,w,p\}. \tag{3.1}$$

Strukturen mit der azimutalen Wellenzahl M enthalten nur solche Moden m, die ein ganzzahliges Vielfaches von M sind, gemäß dem Zusammenhang: $m = M \cdot n$.

Um die verschiedenen in dieser Arbeit untersuchten Strukturen zu klassifizieren wird auf die Fouriermodenindizes entsprechender azimutaler und axialer Grundmoden,

$$(m,n) := f_{m,n}\, e^{i(m\varphi+nkz)}, \quad f \in \{u,v,w,p\}, \tag{3.2}$$

Bezug genommen (vergleiche Gl. (D.11)). In dieser Notation steht m für die azimutale und n für die axiale Fouriermode.

3.3.1 Taylor Vortex Flow (TVF), Taylor Wirbel

Die einfachsten Strukturen, die im Taylor-Couette System überkritisch auftreten können sind die sogenannten Taylor Wirbel (TVF). Hierbei handelt es sich um toroidal geschlossene Wirbelzustände, die primär aus dem CCF Grundzustand herausbifurkieren. Diese wurden bereits im Jahr 1923 erstmals von G. I. Taylor (147) entdeckt. Hierbei handelt es sich um, sowohl stationär als auch rotationsinvariante Lösungen. Folglich ist das Geschwindigkeitsfeld auch nur von der radialen r und axialen z Koordinate abhängig.

$$f(r,\varphi,z;t) = f(r;t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_{0,n}| e^{inkz}, \qquad f \in \{u,v,w,p\}. \tag{3.3}$$

Taylor Wirbel stellen eine rotationssymmetrische und axial translationsinvariante Struktur dar. Die Addition einer Konstanten zur Phase nkz in Gleichung (3.3) bedeutet demnach eine Verschiebung der Struktur als Ganzes in z Richtung.

Die möglichen angeregten Moden (blaue Quadrate) sind in Abbildung 3.4**(a)** zu sehen. Hierbei sind konsequenterweise nur Moden mit $m = 0$ vertreten. Abbildung 3.4**(b)** zeigt das Modenspektrum eines numerisch berechneten TVF Zustands (Kontrollparameter siehe Legende der Abbildung) und insbesondere die relative Stärke der Anregung. Die stärkste und dominante Mode (rote Kreise, hier $u_{0,1}$[2], i.A. gleichbedeutend mit der kritischen Mode) ist hierbei willkürlich auf den Wert 1 skaliert. Die nächst höher harmonische Mode (hier $u_{0,2}$) ist um Größenordnungen schwächer als die dominante Mode. Die Abbildungen 3.4**(c)** und **(d)** geben Aufschluss über das räumliche Verhalten der Felder. Hierbei handelt es sich um Schnitte zu fixierten Werten von z und r bzw. φ. In **(c)** sind Vektorplots der beiden Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in einer φ =konst. Ebene einschließlich Falschfarben der azimutalen Vortizität Ω_φ dargestellt (rot=Max, blau=Min). Ähnlich zeigt **(d)** einen $\varphi - z$ Schnitt in Spaltmitte ($r = 0.5$) des Systems und in Falschfarben (rot=Max, blau=Min) ist das, senkrecht zur Ebene liegende, radiale u Feld dargestellt. Für Kontrollparameter wie sie in Abbildung 3.4 benutzt wurden, sind die TVF Strukturen relativ homogen über den gesamten Spalt ausgedehnt. Dies ändert sich jedoch mit zunehmender Gegenrotation des Außenzylinders, was ein ganz allgemeines Phänomen im Taylor-Couette System darstellt. Mit Zunahme der Gegenrotation werden alle Strukturen immer stärker zum inneren Zylinder hin gedrängt (113).

3.3.2 Spiral Vortex Flow (SPI), Spiral Wirbel

Bei Spiral Wirbeln (SPI) handelt es sich um eine Art Wellen, die ebenso wie die Taylor Wirbel primär aus dem Grundzustand herausbifurkieren, anders als diese aber i.A. noch zusätzlich axial propagieren. Wie auch bei der TVF Lösung ist auch bei diesen Strukturen nur eine Grundmode, hier mit $m \neq 0$ notwendig, die als erste wachstumsfähig wird. Wie in Abbildung 3.1 zu sehen können SPI Lösungen auch unterhalb der TVF Lösungen bifurkieren.

SPI Strukturen sind periodisch in der Zeit, mit einer oszillierenden Frequenz ω, periodisch in axialer Richtung z, mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, sowie periodisch in azimutaler Raumrichtung φ mit der Wellenzahl M. Weiterhin besitzen SPI Zustände eine kontinuierliche Symmetrie: Sie sind invariant gegenüber einer Rotation und axialer Translation, entsprechend einer zeitlichen Translation.

$$\Phi := M\varphi + Kz - \omega t. \tag{3.4}$$

Die Felder der SPI Lösung hängen also nicht einzeln von φ, z und t ab, sondern nur von dieser *kombinierten Phase* Φ (115), so dass gilt:

$$f(r, \varphi, z, t) = F(r, \Phi). \tag{3.5}$$

Hierbei hängen die SPI Frequenzen ω von diversen Kontrollparametern, wie z.B. den Reynoldszahlen, R_1 und R_2, und den beiden Wellenzahlen, M und K, ab. Letztere ist

[2]Genau genommen sind es zwei kritische Moden, $u_{0,1}$ und $u_{0,-1}$, wobei sich die eine gerade als komplex konjugierte Mode ergibt.

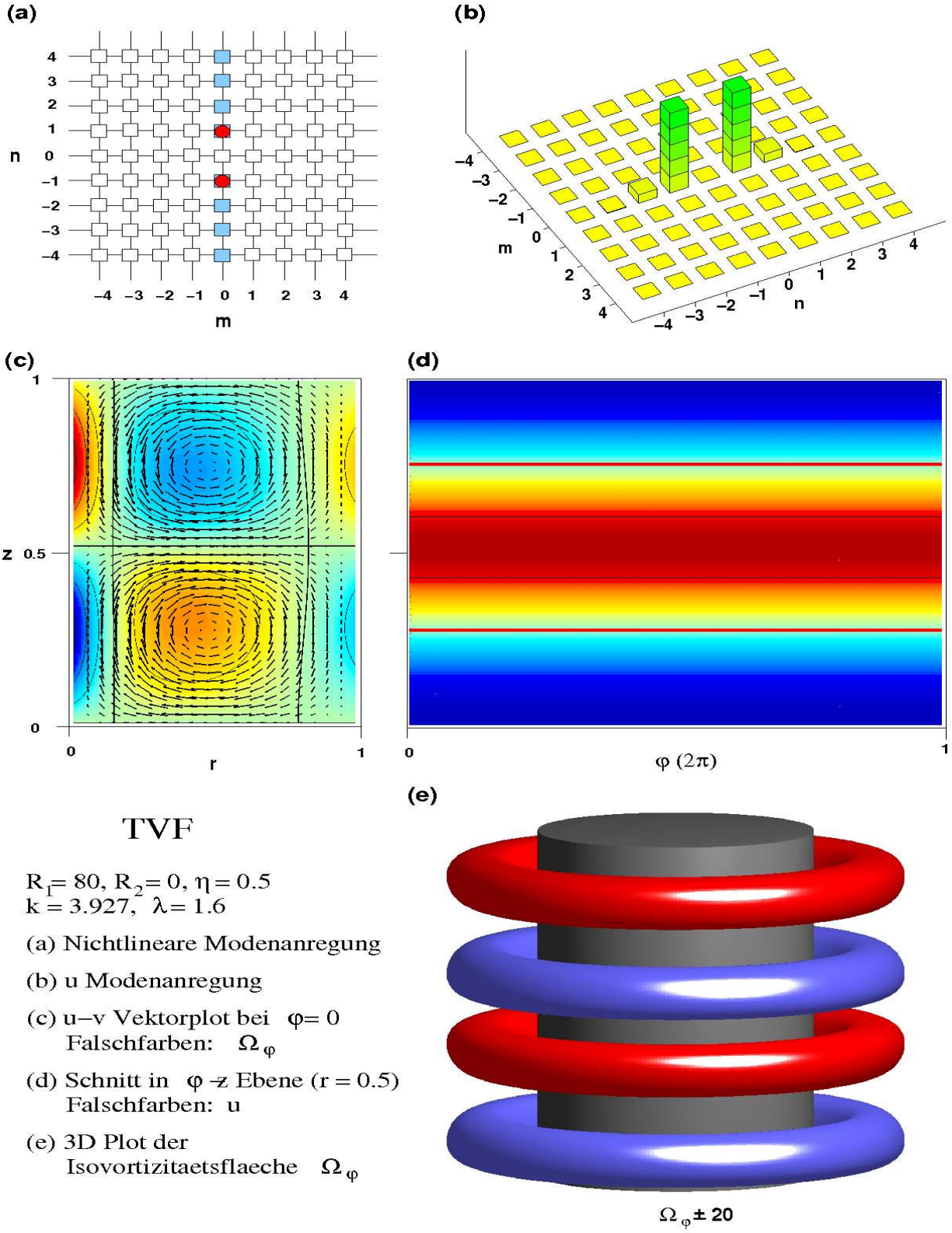


Abbildung 3.4 – Charakterisierung eines TVF Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 20$. Kontrollparameter: $R_1 = 80, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

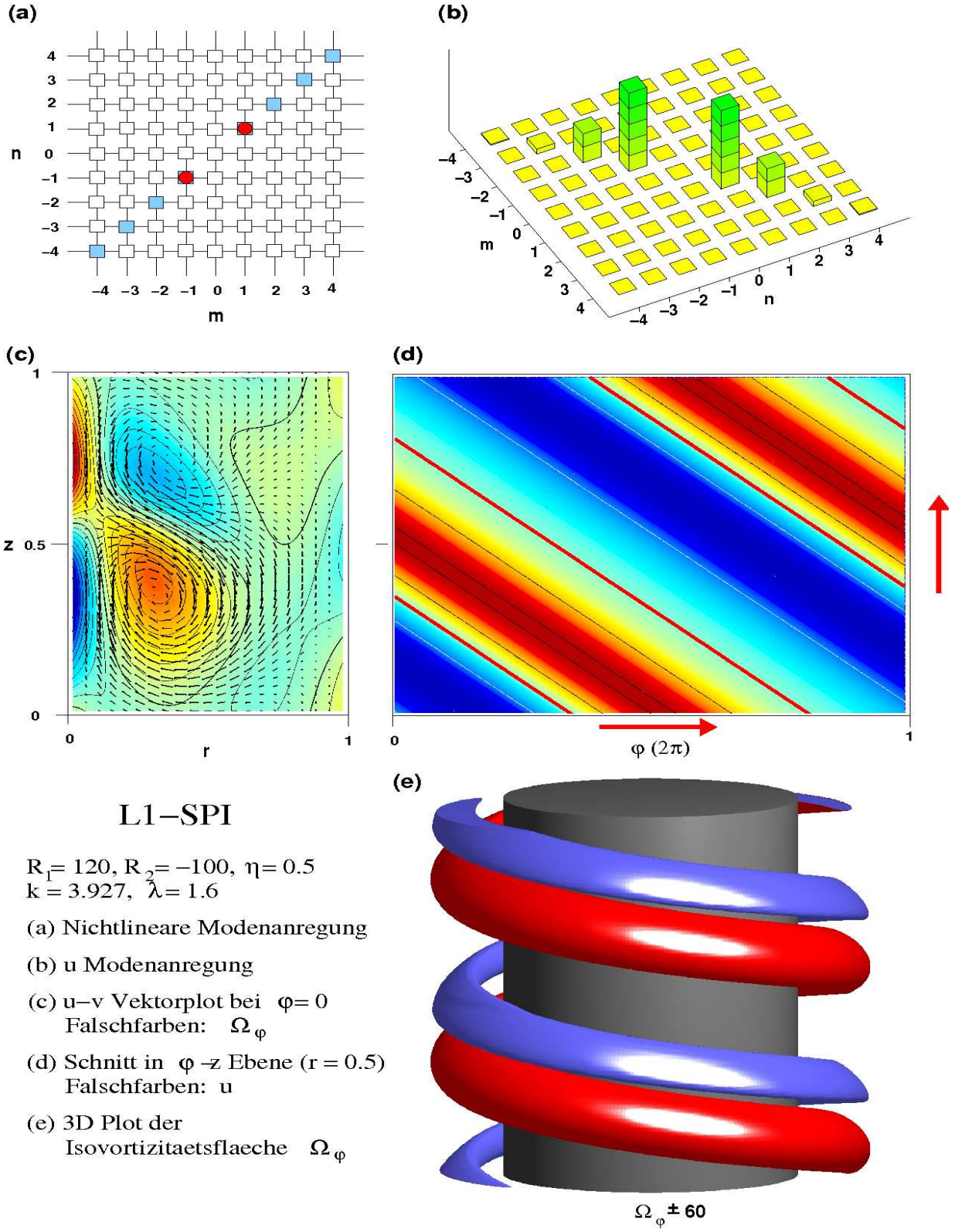


Abbildung 3.5 – Charakterisierung eines L1-SPI Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

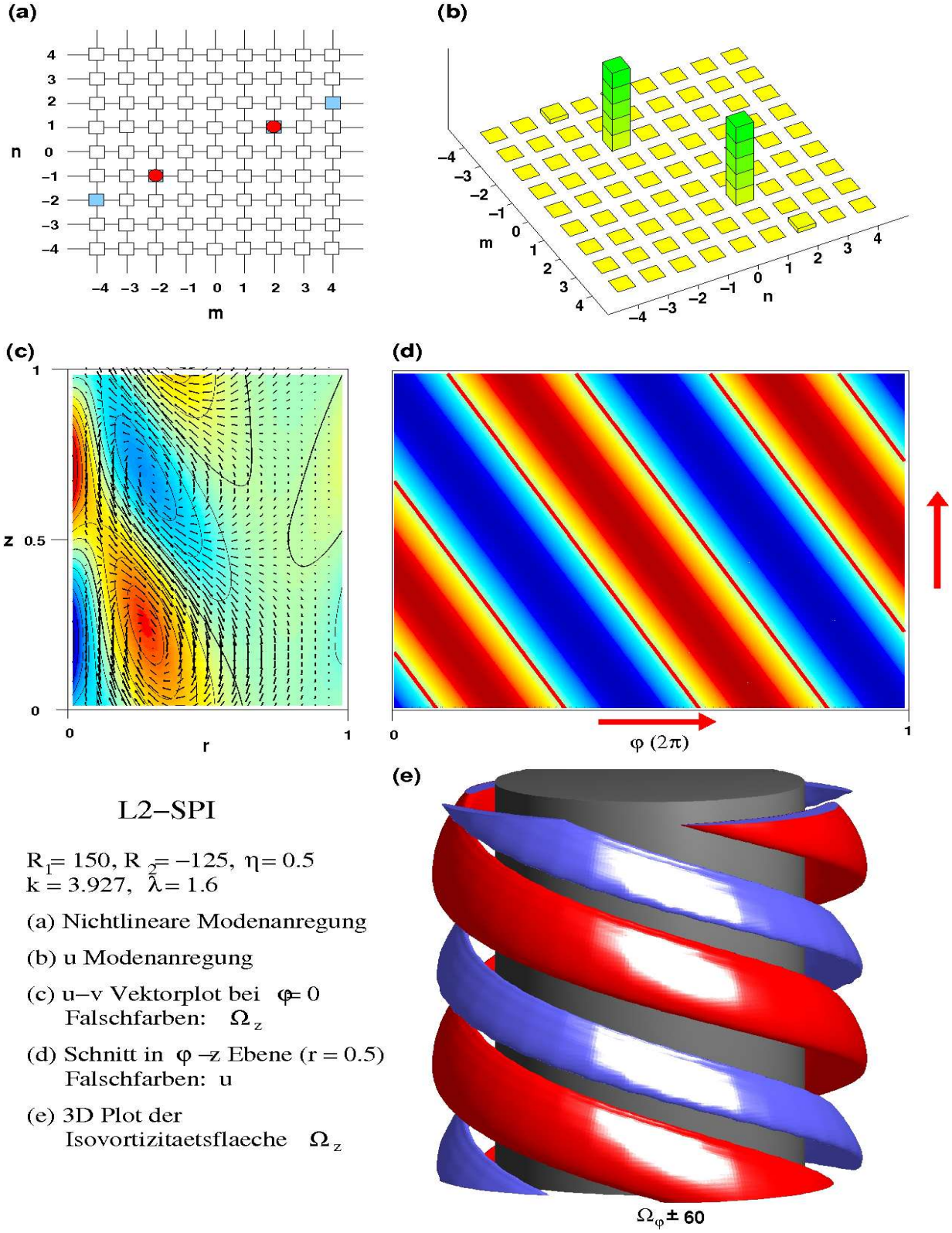


Abbildung 3.6 – Charakterisierung eines L2-SPI Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 150, R_2 = -125, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

hierbei durch den Ausdruck $K = \pm k$ bestimmt, abhängig von der Helizität der zugehörigen SPI Struktur, z.B. $K > 0$ für L-SPI und $K < 0$ für R-SPI. R-SPI und L-SPI Lösungen werden charakterisiert durch $K = K_R$, $M = M_R$, $\omega = \omega_R$ und sind gegenseitig Spiegelbilder unter der Operation $z \to -z$, d.h.,

$$\Phi_{\text{L-SPI}}(z, \varphi, t) = \Phi_{\text{R-SPI}}(-z, \varphi, t). \tag{3.6}$$

Unter Berücksichtigung beliebiger $M_{R,L} \geq 1$ ergibt sich somit:

$$K_L = -K_R,\ M_L = M_R \text{ und } \omega_L = \omega_R. \tag{3.7}$$

Die Frequenzen sind positiv, da die SPI Lösungen, ungeachtet ihrer Helizität, immer in die *gleiche* Richtung rotieren wie der innere Zylinder. Dies impliziert sinngemäß, dass die Phase einer L-SPI Struktur aufwärts propagiert, während das Gegenteil für die R-SPI Struktur gilt – der lokalisierte Ort $z_0(\varphi)$ eines speziellen Phasenwertes, z.B. $\Phi = 0$, bei fixierter Zeit t ist gegeben durch den Ausdruck:

$$z_0 = -\frac{M}{K}\varphi + \frac{\omega}{K}t. \tag{3.8}$$

Somit ist die reduzierte axiale *Ganghöhe* p einer SPI durch

$$p := \frac{z_0(2\pi) - z_0(0)}{\lambda} = M\frac{k}{K} = -\text{sgn}(K)M, \tag{3.9}$$

bestimmt und gibt die Anzahl der axialen Wellenlängen an, die bei Wanderung in azimutaler Richtung entlang eines helikalen Wirbelschlauches und einmaliger Umrundung des Zylinders, überschritten werden. $p\lambda/2\pi = -M/K$ stellt die Steigung der Linien konstanter Phase in der $\varphi - z$ Ebene einer azimutal abgerollten Zylinderoberfläche dar. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur positive axiale Wellenzahlen $k = |K|$ betrachtet.

Die unterschiedlichen hier untersuchten SPI Lösungen werden im Folgenden durch Kombinationen von Buchstaben und Ziffern charakterisiert: z.B. steht L1-SPI für eine linksgewundene SPI Lösung mit azimutaler Wellenzahl $M = 1$, somit Ganghöhe $p = -1$, während R2-SPI eine rechtsgewundene SPI Lösung mit azimutaler Wellenzahl $M = 2$, also $p = 2$, charakterisiert.

Im Fall der SPI Lösung sind alle azimutalen Wellenzahlen $M \geqslant 1$ möglich. Da aber z.B. die L-SPI Lösung die $z \to -z$ Symmetrie bricht, muss aufgrund der $z \to -z$ Symmetrie des Taylor-Couette Systems (vgl. Abb. 1.1) eine entsprechend entgegen dieser gewundene R-SPI Lösung auftreten. Dabei ist die Rotationsrichtung in beiden Fällen identisch mit der Rotation des inneren Zylinders, d.h. in positive φ Richtung. Demnach propagieren L-SPI [R-SPI] Zustände axial aufwärts [abwärts].

Wie in Abbildung 3.5**(a)** zu sehen, 'lebt' die L1-SPI Lösung (linksgewundene SPI Lösung mit $M = 1$, bzw. reduzierter Ganghöhe $p = -1$) im (m, n) Modenraum nur auf der Diagonalen mit $m = n$. Der symmetrieentarteten Lösung der R1-SPI (rechtsgewundene SPI Lösung mit $M = -1$, bzw. reduzierter Ganghöhe $p = 1$), die sich durch Spiegelung in axialer Richtung, $z \to -z$, ergibt, entspricht in der Modensprache der Übergang $n \to -n$.

Alle höheren M Spiralen leben im (m, n) Modenraum gesprochen auf einer Geraden mit $m = M \cdot n$. Exemplarisch ist dies in Abbildung 3.6 für eine L2-SPI Lösung gezeigt, bei der nur (gerade) Moden $m = 2n$ angeregt sind. Die Abbildungen **(b)** geben Aufschluss über die relative Stärke der Moden in den Strukturen (Kontrollparameter siehe Legende

der Abbildung).

In der Nähe des Onsets können SPI Lösungen durch den Ausdruck [3]

$$u(r,\varphi,z;t) \approx |A,B|(r)e^{i(M\varphi \pm kz - \omega_{A,B}t)} + c.c.^4 \tag{3.10}$$

beschrieben werden, wobei $|A| := |u_{M,1}|$ und $|B| := |u_{M,-1}|$ für die Amplituden, sowie $|\omega_A| := |\omega_{M,1}|$ und $|\omega_B| := |\omega_{M,-1}|$ für die Frequenzen von L- und R-SPI Zuständen verwendet wurden. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der SPI Lösungen gelten folgende Identitäten:

$$|u_{m,n}| = |u_{-m,-n}|, \quad \omega_{m,n} = -\omega_{m,n}. \tag{3.11}$$

Wie bereits erwähnt hängen die SPI Lösungen von den Variablen φ, z und t, nur durch die kombiniert Phase , $\Phi_{A,B} = M\varphi \pm kz - \omega_{A,B}t$, für L- und R-SPI Lösung, ab. Aufgrund der Tatsache, dass für SPI Lösungen $\omega_A = \omega_B = \omega(M,k)$ gilt, bewegt sich die jeweilige Struktur mit konstanter Phasengeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \frac{\omega_{A,B}}{M}$ in azimutaler und $w_{ph} = \frac{\omega_{A,B}}{k}$ in axialer Richtung.

Abbildung 3.5 zeigt exemplarisch das raumzeitliche Verhalten einer L1-SPI Struktur für ausgewählte Parameter und entsprechend gibt Abbildung 3.6 das Verhalten im Fall einer L2-SPI Struktur wieder. Die in **(d)** eingetragenen roten Pfeile geben die Propagationsrichtung der Struktur wieder. Für L-SPI [R-SPI] Lösungen bedeutet dies, dass sie nach oben [unten] propagieren. Azimutal rotieren beide entartete Lösungen in die gleiche Richtung wie der Innenzylinder.

3.3.3 Mixed Cross Spirals (MCS)

Bei den Mixed Cross Spiral (MCS) Strukturen handelt es sich, verglichen mit den zuvor betrachteten SPI Strukturen, um deutlich komplexere Zustände. Man kann sie sich aus zwei reinen SPI Strukturen unterschiedlicher Helizität mit im Allgemeinen verschiedenen azimutalen Wellenzahlen M aufgebaut vorstellen. Dabei entscheidet die Stärke der jeweiligen Anteile dieser Einzelnen über die Propagationsrichtung der Gesamtstruktur, sowie der dieser überlagerten Modulation. Als geeignete Charakterisierung solcher MCS Lösungen erwies sich die Ganghöhe p (vgl. Gl. (3.9) und Kap. 6), als am besten geeignet. Diese gibt die Anzahl der axialen Periodizitätslängen an, die bei Wanderung in azimutaler Richtung entlang der helikalen Wirbelschläche und einmaliger Umrundung des Zylinders, überschritten werden.

Abbildung 3.7 zeigt exemplarisch das raumzeitliche Verhalten einer L3R5-MCS Struktur für ausgewählte Parameter. Hierbei handelt es sich um eine MCS Lösung, die aus den beiden Anteilen einer L3-SPI und einer R5-SPI Struktur aufgebaut ist. Die Struktur propagiert als Ganzes (roter Pfeil in **(d)**) entsprechend des dominanten L3 Anteils nach *oben*, während die ihr überlagerte Modulation, hervorgerufen durch den R5 Anteil, nach *unten* wandert. Entsprechend umgekehrt verhält sich dies bei der symmetrieentarteten R5L3-MCS Struktur.

Aufbau der MCS und MRIB

[3] Hier exemplarisch für das radiale Geschwindigkeitsfeld u gezeigt (alle anderen Felder völlig analog).

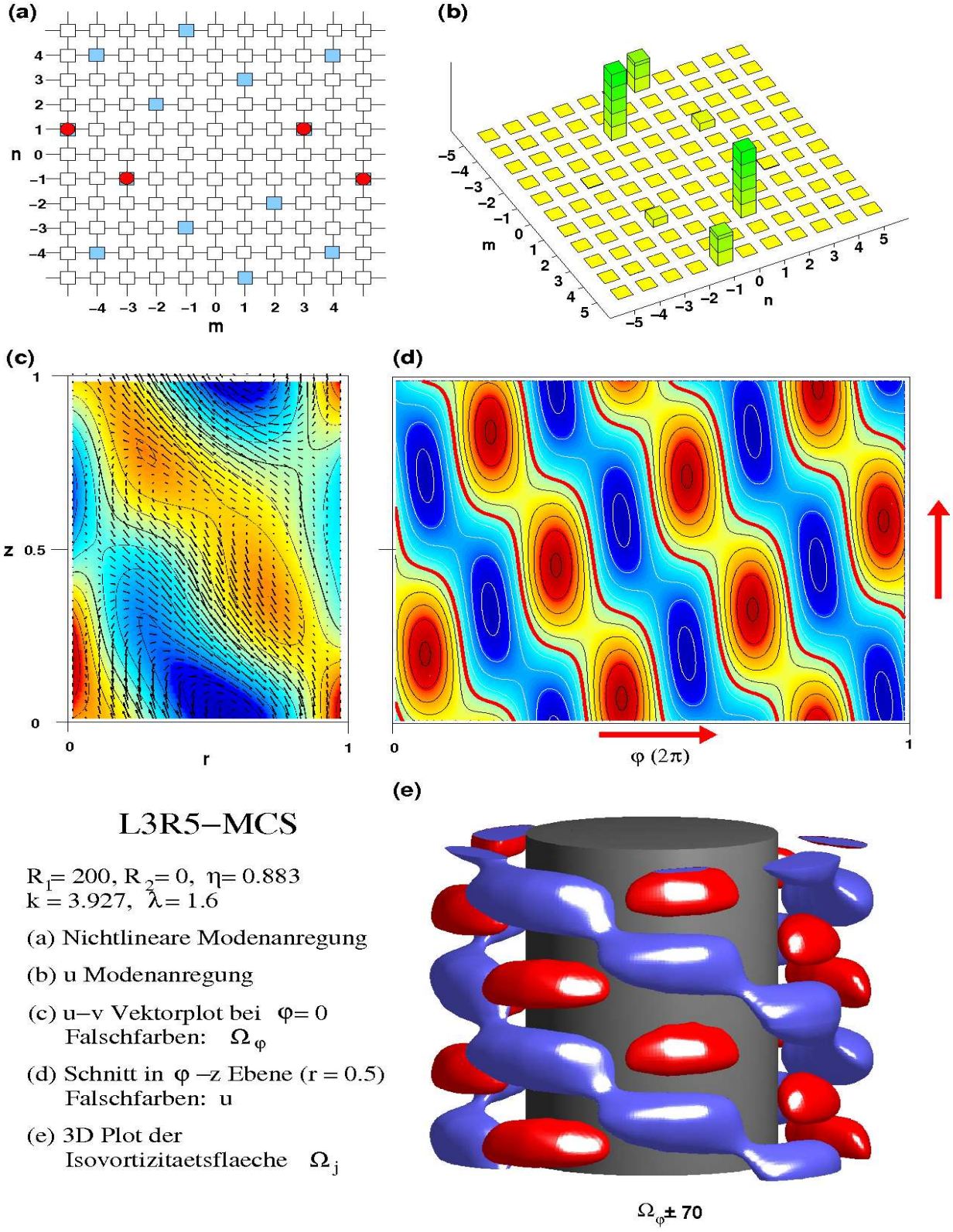


Abbildung 3.7 – Charakterisierung eines L3R5-MCS Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r - z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 70$. Kontrollparameter: $R_1 = 200, R_2 = 0, \eta = 0.833, k = 3.927, Re = 0$.

In der Abbildung 3.8 ist der schematische Aufbau einer L1R2-MCS **(d)** bzw. R2L1-MCS **(e)** Lösung, abhängig von dem jeweils dominanten Strukturanteil, aus den beiden reinen Strukturen, L1-SPI **(a)** und R2-SPI **(b)**, dargestellt. Hierzu werden die verschiedenen Wirbelstrukturen durch Linien konstanter Phase, $\Phi = 0$, auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte charakterisiert. **(a)** L1-SPI (orange) mit Ganghöhe $p = -1$, **(b)** R2-SPI (rot) mit $p = 2$, **(c)** L1R2-MRIB (maroon) mit $p = 1/2$ zusammengesetzt aus L1-SPI (orange) und R1-SPI (rot), **(d)** L1R2-MCS [**(e)** R2L1-MCS](maroon) mit $p = 1/2$ zusammengesetzt aus L1-SPI (orange) und R2-SPI (rot) Phasenlinien. Das versetzte Schachbrettmuster der MCS Lösung ergibt sich aus den unterschiedlichen Steigungen der beiden Spiralkomponenten ($p = -1$(L1), $p = 2$(R2)).

Im Folgenden wird eine Notation verwendet, die die beiden dominanten Komponenten in einer MCS oder MRIB Struktur wiederspiegelt. So z.B. kombinieren in der Abbildung 3.8**(d)** die L1 und die R2 Anteile zu einer L1R2-MRIB Lösung oder, im Fall ungleicher Anteile zu einer L1R2-MCS bzw. R2L1-MCS Lösung, abhängig der dominanten Komponente.

Im Gegensatz zu einer klassischen 1-RIB Struktur mit vertikalen und horizontalen Phasenlinien (vgl. Abb. 3.9), d.h. mit Ganghöhe $p = 0$, besteht eine L1R2-MRIB Struktur aus vertikal wie auch azimutal anwachsenden oder abnehmenden Phasenlinien, d.h. mit $p \neq 0$. Hierbei überlagern sich gleiche Anteile von SPI Lösungen mit unterschiedlichen Ganghöhen gemäß, $\mathrm{sgn}(p_1 p_2) = -1$, zu einem MRIB Muster mit $|p_1 - p_2|$ vertikalen $\Phi = 0$ Linien und der Ganghöhe $p = (p_1 + p_2)/2$. Es ist anzumerken, dass im Allgemeinen der Wert der azimutalen Wellenzahl, $M = |p|$, einer willkürlichen helikalen Struktur gerade immer gleich der Hälfte der Anzahl der Nullstellen Φ in azimutaler Richtung ist.

Entartete Formen der MCS Lösungen sind die sogenannten Cross Spirals (CSPI) und die Ribbon (RIB) Zustände. Bei den CSPI Zuständen handelt es sich um MCS Lösungen, die aus zwei SPI Strukturen mit *gleicher* azimutaler Wellenzahl M, aber unterschiedlicher Helizität, aufgebaut sind. RIB Strukturen haben neben dieser Einschränkung noch zusätzlich gleich große dominante Modenamplituden und erfüllen somit die $z \to -z$ Spiegelsymmetrie.

3.3.4 Ribbon (RIB) und Cross Spirals (CSPI)

Die Ribbon (RIB) Strukturen stellen, wie die bereits zuvor erwähnten MRIB Zustände, spezielle Lösungen der CSPI dar, die selbst bereits als entartete Lösungen der MCS Strukturen vorhanden sind. Gegenüber den CSPI Zuständen, die aus den Anteilen zweier gegenläufiger L- und R-SPI Strukturen mit gleicher Strukturwellenzahl M, aber beliebigem Verhältnis dominanter Modenamplituden, aufgebaut sind, zeichnen sich RIB Zustände durch gleich große Modenamplituden in diesen Anteilen aus. Sie stellen demzufolge eine weitere Spezialisierung dar. Es handelt sich hierbei ebenfalls um primär bifurkierende Strukturen, die am gleichen Punkt, wie die reinen SPI Lösungen entstehen.

Da es sich um den gleichen Unterraum, mit zusätzlichen Zwangsbedingungen, handelt, sind auch die gleichen Moden wie bei der entsprechend entarteten MCS, bzw. CSPI Lösung angeregt. Die Abbildungen 3.9**(a)** und 3.10**(a)** zeigen dies exemplarisch für eine 1-RIB und eine 2-RIB Struktur. Die zusätzlichen Symmetrien, die die RIB Lösungen gegenüber den CSPI Lösungen noch erfüllen müssen lauten:

$$|u_{m,n}| = |u_{-m,n}| = |u_{m,-n}| = |u_{-m,-n}|, \tag{3.12}$$

$$\omega_{m,n} = \omega_{-m,n} = \omega_{m,-n} = \omega_{-m,-n}. \tag{3.13}$$

Hieraus resultiert unmittelbar, dass die Rotationsgeschwindigkeit der Phase durch $v_{ph} =$

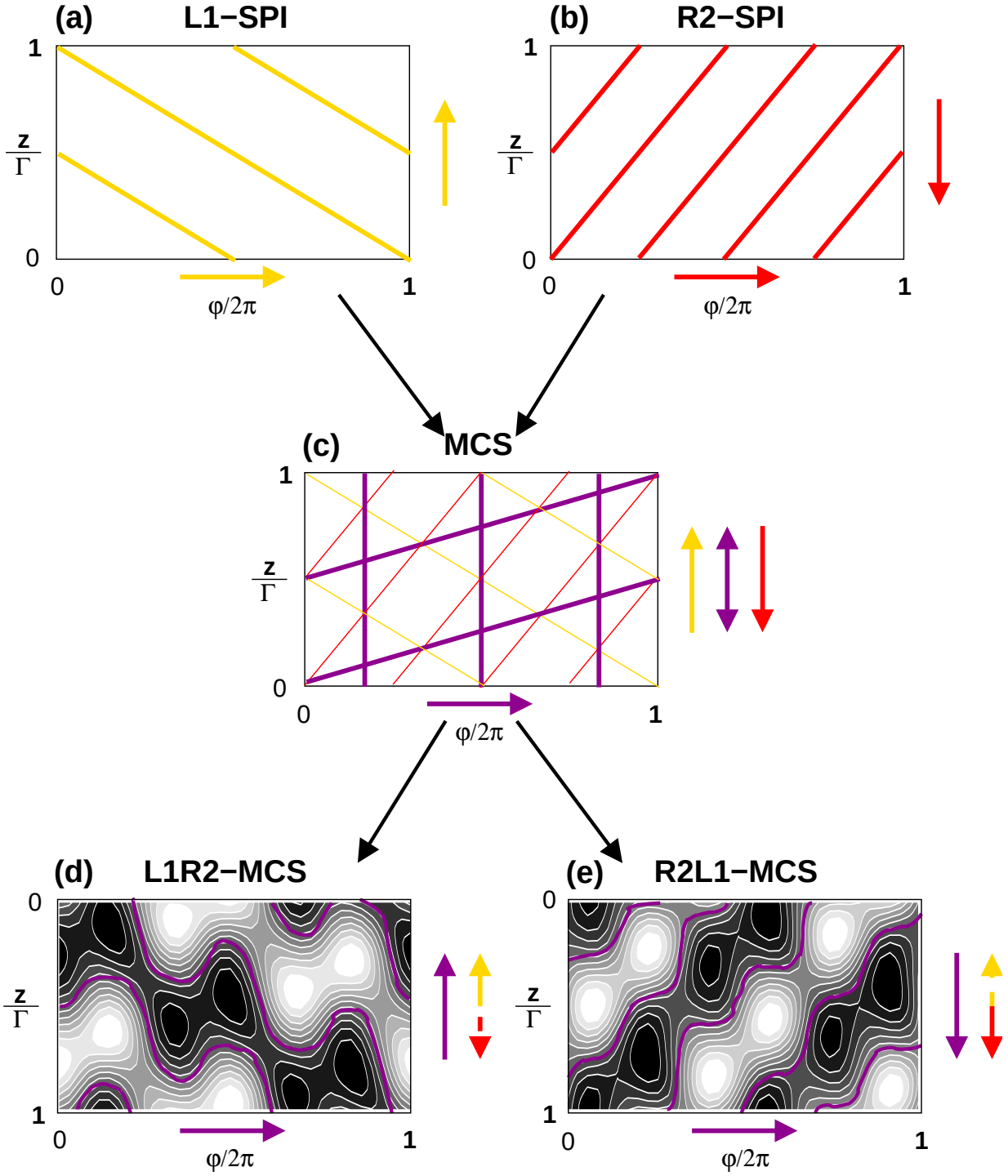


Abbildung 3.8 – Schematischer Aufbau einer MCS (R2L1- bzw. L1R2-MCS) Lösung als Superposition zweier reiner SPI (L1-SPI und R2-SPI) Strukturen unterschiedlicher Helizität und azimutaler Wellenzahl M (hier: $M = 1$ und $M = 2$). **(a)** Nulllinien des u Feldes einer L1-SPI Struktur (orange). **(b)** Nulllinien des u Feldes einer R2-SPI Struktur (rot). **(c)** Theoretische Nulllinien des u Feldes einer MCS Struktur (maroon) als Überlagerung der Bilder **(a)** und **(b)**. Abhängig der dominanteren Struktur ergeben sich die beiden MCS Strukturen: **(d)** L1R2-MCS: Strukturpropagation ($M = 1$) nach oben und Modulationspropagation ($M = -2$) nach unten (vgl. Pfeile rechts neben der Abbildung). **(e)** R2L1-MCS: Strukturpropagation ($M = -2$) nach oben und Modulationspropagation ($M = 1$) nach unten. In **(d,e)** ist das u Feld der MCS Struktur graukodiert dargestellt, Nulllinien maroon; dunkel [hell] symbolisiert Outflow [Inflow].

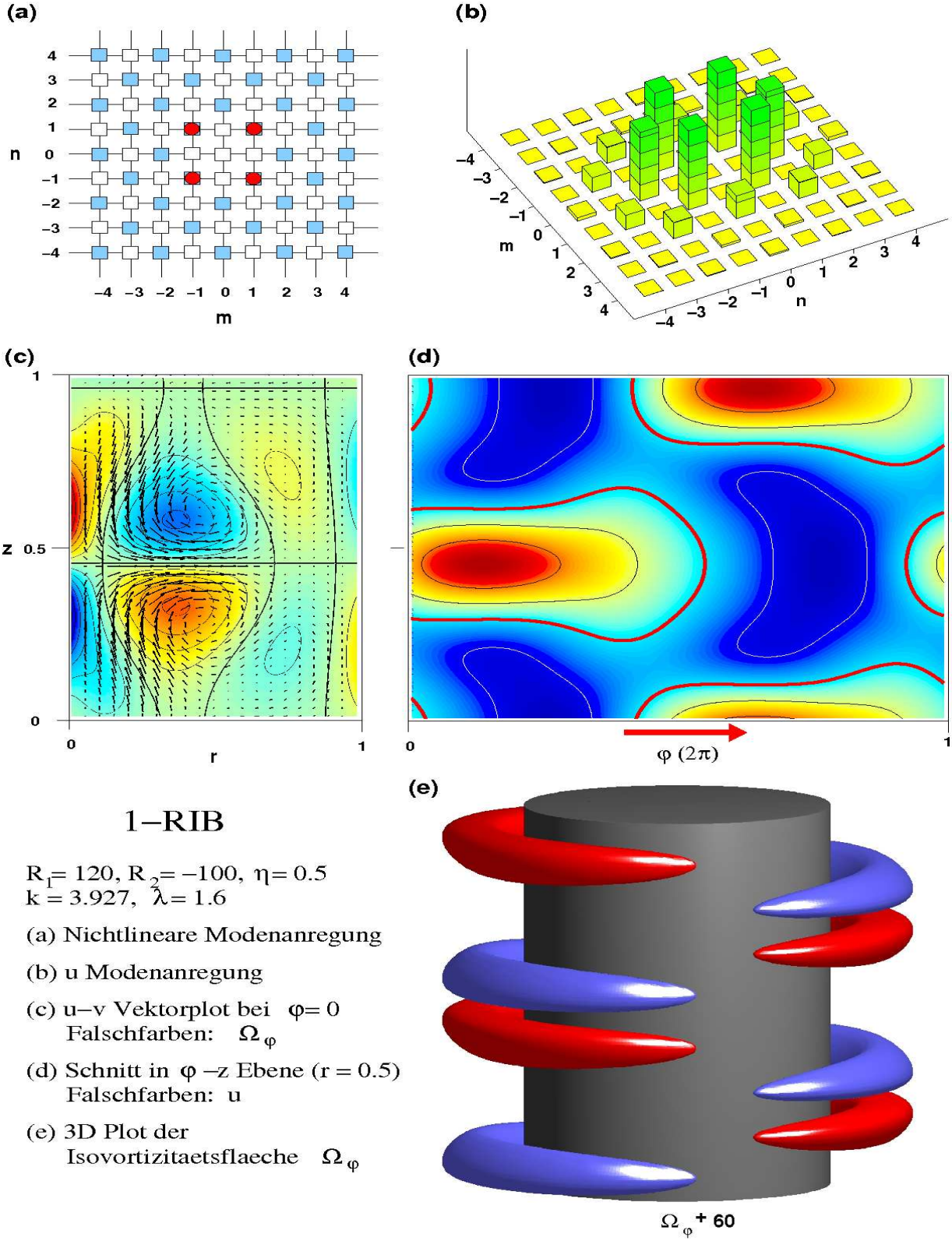


Abbildung 3.9 – Charakterisierung eines 1-RIB Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

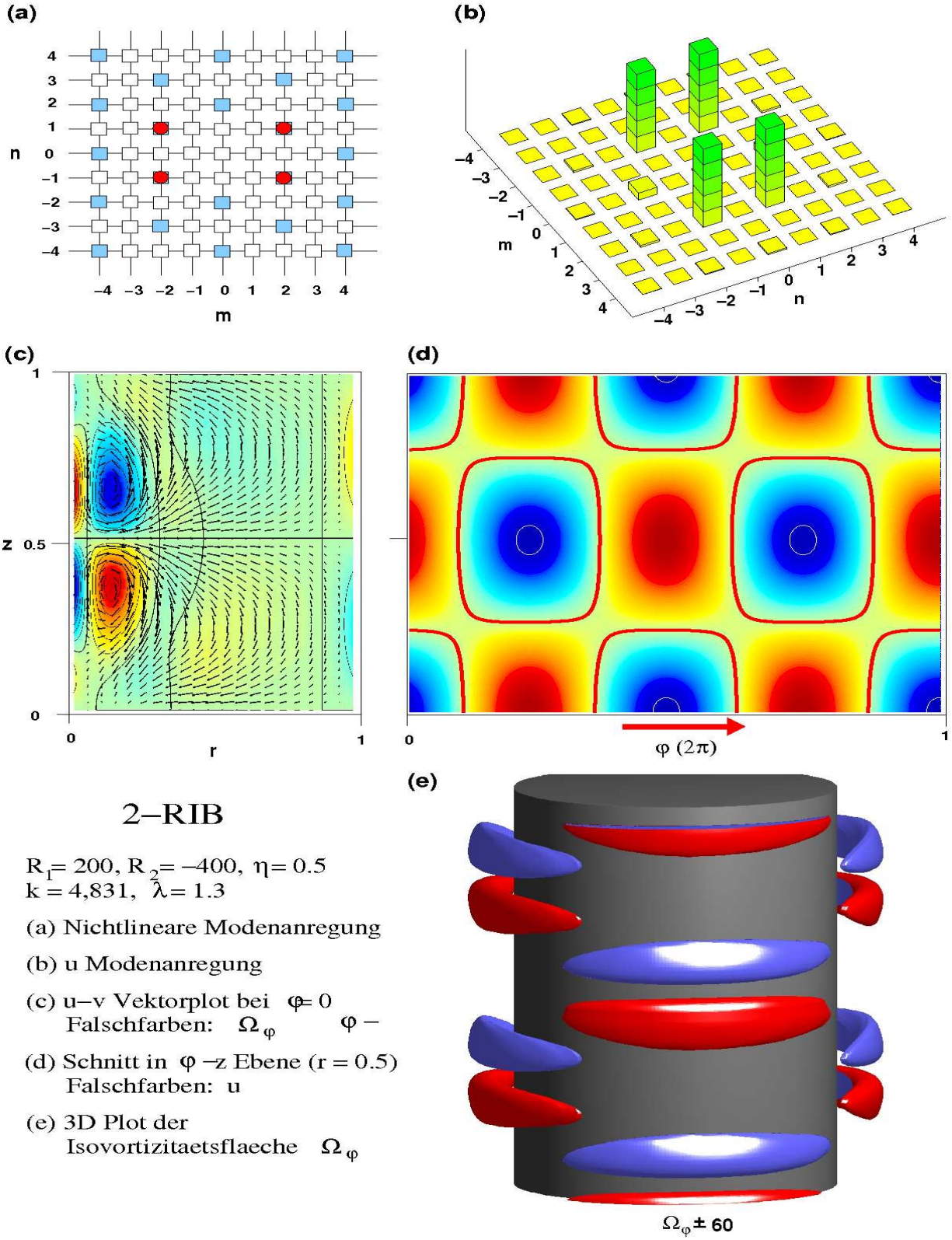


Abbildung 3.10 – Charakterisierung des 2-RIB Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 200, R_2 = -400, \eta = 0.5, k = 4.833, Re = 0$.

$\frac{\omega}{M}$ (mit $\omega = \omega_{m,n} = \omega_{-m,n}$) gegeben ist. Somit handelt es sich bei RIB Lösungen um, in axialer Richtung, stehende Wellen. Sowohl Beträge der Moden, wie auch Frequenzen sind *zeitunabhängig*.

Die Abbildungen 3.9**(b)** und 3.10**(b)** geben einen Eindruck von der relativen Stärke der beteiligten Moden in einer 1-RIB bzw. 2-RIB Lösung.

Aufbau der RIB

Analog der Abbildung 3.8 ist in der Abbildung 3.11 der schematische Aufbau der Strukturen, L1-CSPI **(d)**, 1-RIB **(e)** und R1-CSPI **(f)**, aus den beiden reinen Strukturen, einer L1-SPI **(a)** und R1-SPI **(b)**, dargestellt. Hierzu werden die verschiedenen Wirbelstrukturen durch Linien konstanter Phase, $\Phi = 0$, auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte charakterisiert. Die beiden wandernden Strukturen, **(a)** L1-SPI Struktur (orange) mit Ganghöhe $p = -1$ und die hierzu spiegelsymmetrische (und im Fall ohne symmetriebrechende Effekte, entartet vorliegende) **(b)** R1-SPI Struktur (rot) mit $p = 1$ können sich im Fall gleich großer Modenamplituden zu einer stehenden Welle, der RIB Struktur mit $p = 0$ (grün) **(c,e)**, nichtlinear überlagern. Für den Fall ungleicher Modenamplituden in den beteiligten SPI Anteilen ergibt sich eine CSPI Struktur, deren Helizität und damit auch ihre Propagationsrichtung durch den majoranten Modenanteil bestimmt wird, während der minorante Anteil lediglich zu einer Modulation der Struktur führt, die sich entgegen der Propagationsrichtung bewegt. Bei dominantem L1-SPI [R1-SPI] Anteil entsteht demzufolge eine L1-CSPI **(d)** [R1-CSPI **(f)**] Lösung. Dies ist absolut identisch zu den übergeordneten MCS Strukturen, mit der einzigen Einschränkung, dass die beiden beteiligten SPI Anteile die *selbe* Wellenzahl M besitzen.

3.3.5 Wavy Vortex Flow (WVF)

Die Wavy Vortex Flow (WVF) Struktur stellt eine sekundär bifurkierende Lösung aus dem primär bifurkierenden TVF Zustand dar. Theoretisch ist aber auch eine primäre Bifurkation dieses Zustands direkt aus dem CCF heraus denkbar, an einer, mindestens bikritischen, Stelle von $m = 0$ und einer weiteren $m \neq 0$ Mode. Es muss aber zumindest eine $m \neq 0$ Mode wachstumsfähig sein, damit die Struktur überhaupt existiert.

In der Abbildung 3.12 ist eine 2-WVF Lösung dargestellt. In **(a)** sind die beteiligten Moden dargestellt, während **(b)** die Stärke der zugehörigen Amplituden des u Feldes zeigt. In dem hier gewählten Beispiel des 2-WVF Zustandes sind im Modenspektrum nur gerade m Moden, d.h. $m = 2n$, im Fourierraum angeregt, wobei die $m = 0$ Moden die deutlich dominanten Moden sind. Der Vollständigkeit sei erwähnt, dass im Fall einer 1-WVF Lösung alle m Moden angeregt sind. Die nächst höheren angeregten Moden ($m \neq 0$) sind deutlich schwächer, haben aber eine azimutale φ und zeitliche t Abhängigkeit der gesamten Struktur zufolge. Im Grunde genommen handelt es sich hierbei um einen deformiert und axial verzerrten TVF Zustand, ähnlich einer Welle (daher der Name 'Wavy'), der als Ganzes azimutal rotiert. Diese WVF Lösungen genügen einer Gleitspiegelsymmetrie:

$$|u_{m,n}| = |u_{m,-n}| = |u_{-m,n}| = |u_{-m,-n}| \tag{3.14}$$

$$\omega_{m,n} = \omega_{m,-n} = -\omega_{-m,n} = -\omega_{-m,-n}. \tag{3.15}$$

Hierbei sind sowohl die Beträge der Modenamplituden, als auch die zugehörige Frequenzen *zeitunabhängig*.

Das raumzeitliche Verhalten eines 2-WVF Zustands für ausgewählte Parameter ist in Abbildung 3.12 exemplarisch dargestellt. Wie in **(d)** und **(e)** zu erkennen, so führt die

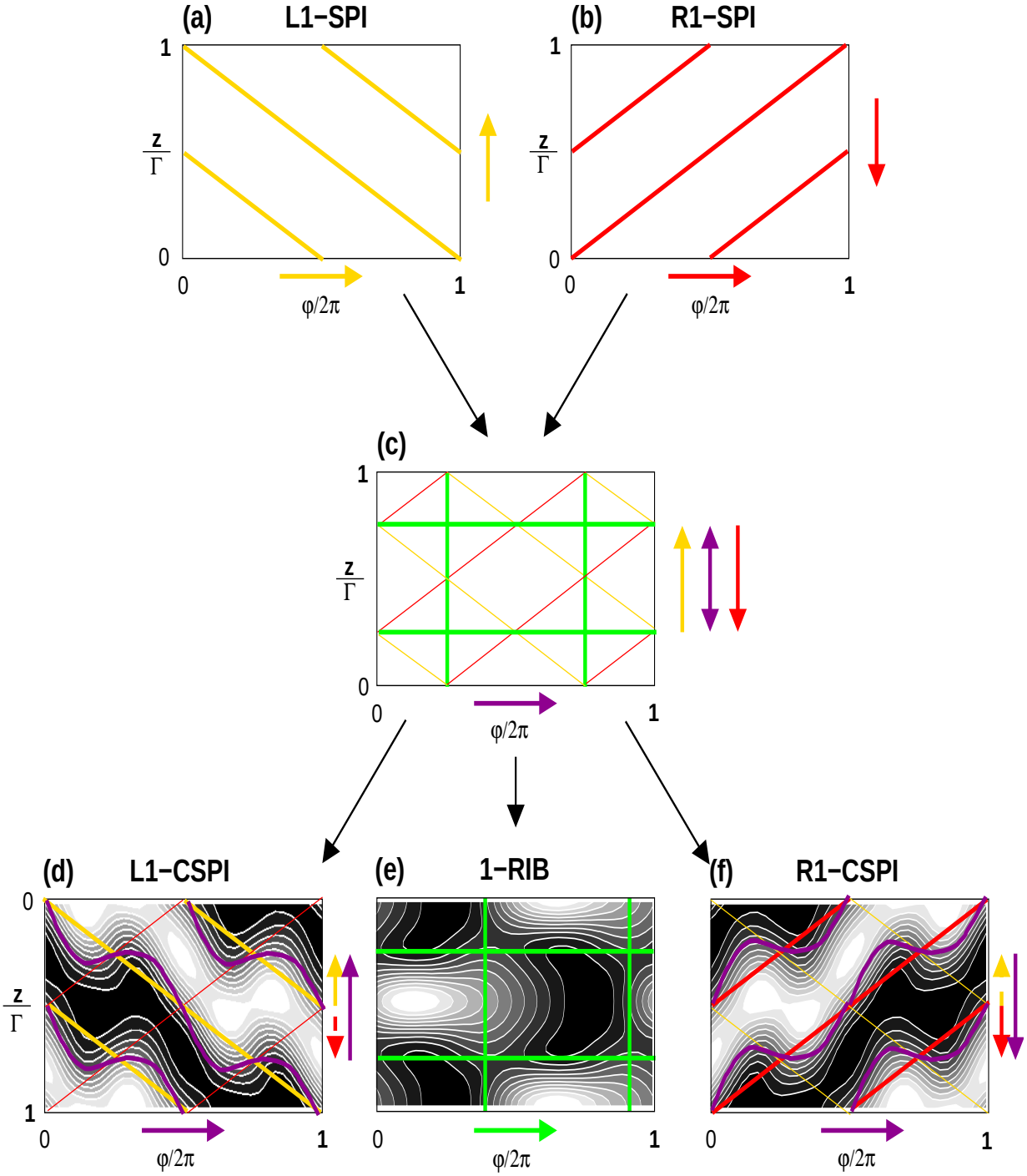


Abbildung 3.11 – Schematischer Aufbau von CSPI und RIB Lösungen als Superposition zweier reiner SPI Strukturen unterschiedlicher Helizität aber identischer Wellenzahl M (hier: $M = 1$). **(a)** Nulllinien des u Feldes einer L1-SPI Struktur (orange). **(b)** Nulllinien des u Feldes einer R1-SPI Struktur (rot). **(c)** Theoretische Nulllinien des u Feldes einer RIB Struktur (grün) als Überlagerung der Bilder **(a)** und **(b)** für gleiche Modenamplituden. Abhängig der dominanten Struktur ergeben sich die drei möglichen Strukturen: **(d)** L1-CSPI: Strukturpropagation ($M = 1$) nach oben und Modulationspropagation ($M = -1$) nach unten (vgl. Pfeile rechts neben den Abbildungen). **(e)** 1-RIB: stehende Struktur mit gleich starken Modenanteilen beider Strukturen $M = 1$ und $M = -1$. Nulllinien des u Feldes der RIB (grün). **(f)** R1-CSPI: Strukturpropagation ($M = -1$) nach oben und Modulationspropagation ($M = 1$) nach unten. In **(d,f)** [**(e)**] ist das u Feld der R1-CSPI [RIB] Struktur graukodiert dargestellt, Nulllinien maroon [grün]; dunkel [hell] symbolisiert Outflow [Inflow].

Modulation des TVF (vgl. Abb. 3.4) Zustands zu einem zeitabhängigen Bewegungsmuster. Dieses rotiert dabei azimutal mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der gleichen Richtung wie der innere Zylinder. Für ein fixiertes φ oszilliert das Muster zwar in axialer Richtung, es findet aber *keine* Propagation in dieser Richtung statt. Die in **(d)** eingetragenen roten Pfeile geben gerade die Propagationsrichtung der Struktur wieder. Für die 2-WVF Lösungen bedeutet dies, dass sie sich weder nach oben noch nach unten bewegt, also axial *nicht* propagiert, sie rotiert lediglich in azimutaler Richtung.

Im Folgenden werden diese WVF Strukturen ebenfalls als wTVF Strukturen (s.u.) bezeichnet, da sie topologisch mit diesen identisch sind. Die wTVF Lösungen als Übergangsstrukturen werden hier deshalb separat eingeführt, da sie in dieser Arbeit sehr ausführlich untersucht werden.

3.3.6 Wavy Taylor Vortex Flow (wTVF), Wavy Taylor Wirbel

Anders als die schon lange bekannten und viel untersuchten WVF Zustände (s.o.) besitzen die wTVF Strukturen eine andere Entstehungsgeschichte. Sie bifurkieren zwar auch sekundär aus der reinen TVF Lösung, treten dann aber als Übergangsstrukturen zwischen zwei topologisch unterschiedlichen Strukturen auf; einerseits die toroidal geschlossenen TVF Zustände und andererseits die helikalen SPI Strukturen, genau genommen SPI $\rightarrow$ wSPI $\rightarrow$ TVF. Sie besitzen ebenfalls die gleichen Symmetrien (auch Gleitspiegelsymmetrie) wie die WVF Lösungen des letzten Abschnitts, entscheidend ist aber, dass die $m \neq 0$ Moden der wTVF Zustände *nicht nichtlinear* angeregt werden, während dies bei den WVF Strukturen i.A. der Fall ist. Notwendigerweise existiere aber auch die wTVF Lösungen nur dort, wo neben der $m = 0$ mindestens eine weitere $m \neq 0$ Mode wachstumsfähig ist.

Die beiden Abbildung 3.13 und 3.14 zeigen exemplarisch das raumzeitliche Verhalten zweier verschiedener wTVF Lösungen für unterschiedliche Kontrollparameter. Die in **(d)** eingetragenen roten Pfeile geben die Propagationsrichtung der Strukturen, hier *nur* azimutal, wieder. D.h. die wTVF Lösungen sind *axial nicht propagierend*. Abhängig der jeweiligen Kontrollparameter ist der Wavycharakter, wie in den beiden Abbildungen 3.13 und 3.14 zu sehen, unterschiedlich stark ausgeprägt. In Abbildung 3.13 ist die Deformation, d.h. die Verzerrung der Wirbel in positiver und negativer axialer Richtung (siehe **(d,e)**), deutlich stärker ausgeprägt als in Abbildung 3.14. Die Intensität dieser Modulation ist dabei insbesondere vom Abstand zur Bifurkationsschwelle abhängig (die wTVF Lösung bifurkiert hier mit abnehmendem Kontrollparameter R_1), die hier bei fixiertem $R_2 = -100$ etwa bei $R_1 = 122.5$ liegt. Somit ist Abbildung 3.13 mit $R_1 = 116$ deutlich weiter von dem Bifurkationspunkt entfernt als Abbildung 3.13 mit $R_1 = 120$, was die, deutlich zu erkennende, stärkere Modulation der Wirbel erklärt.

3.3.7 Wavy Spiral Vortex Flow (wSPI), Wavy Spiral Wirbel

Wie bei den wTVF Lösungen handelt es sich auch bei den wSPI Lösungen um Übergangsstrukturen zwischen SPI und TVF Zuständen. Diese treten hierbei gerade in umgekehrter Richtung des Übergangs von SPI$\rightarrow$wSPI$\rightarrow$TVF auf, wobei es sich ebenfalls um sekundär bifurkierende Strukturen, aus den reinen SPI Lösungen heraus, handelt.

Die Abbildung 3.15 zeigt exemplarisch das raumzeitliche Verhalten einer wSPI Lösung, wie sie beim Übergang von TVF zu SPI Zuständen als stabile Struktur auftritt. Die in **(d)** eingetragenen roten Pfeile geben die Propagationsrichtung der Strukturen wieder; hier wandert die wSPI Struktur als Ganzes nach oben. Der Wavycharakter ist, wie bei den

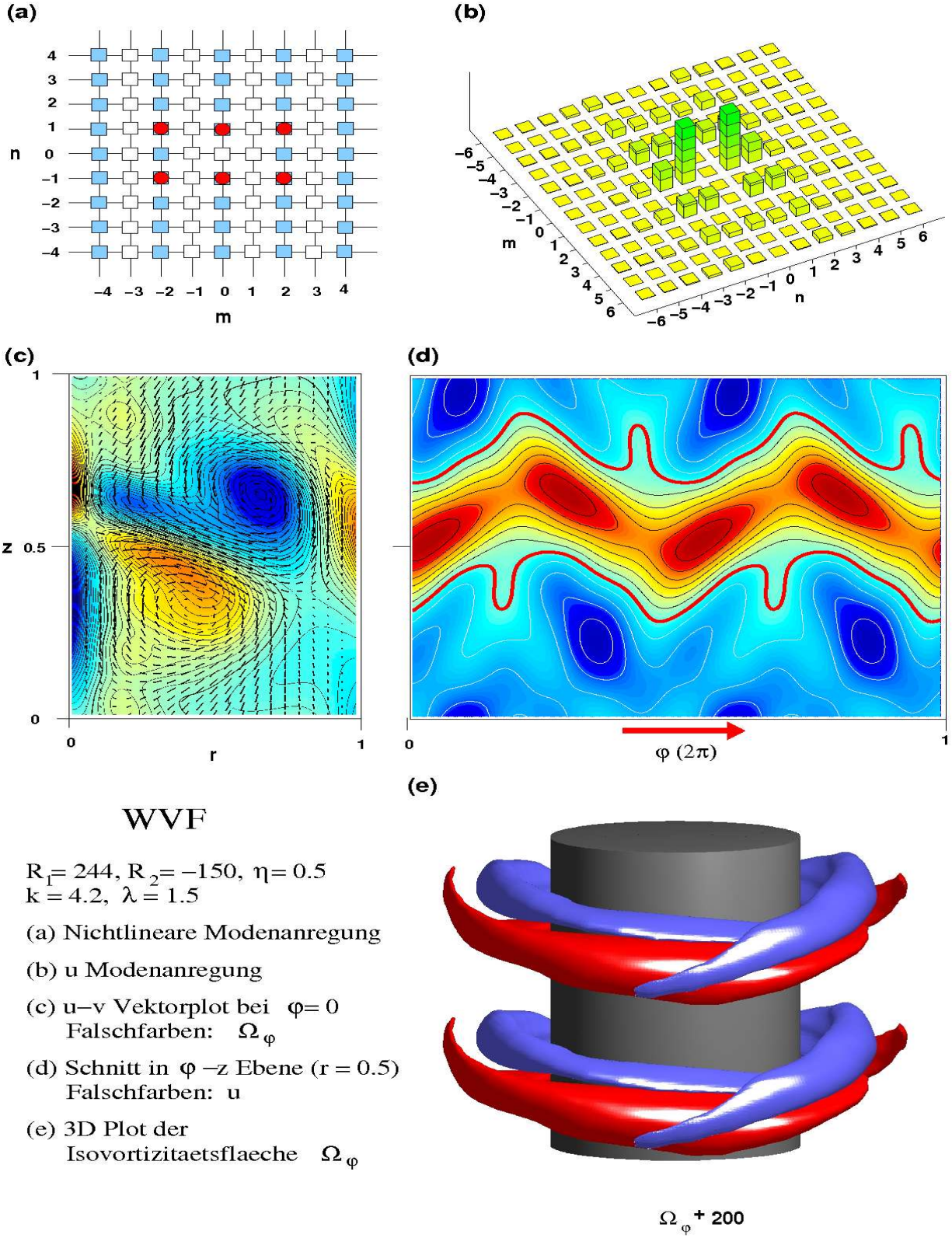


Abbildung 3.12 – Charakterisierung des 2-WVF Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung, hier nur $m = 2n$; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r - z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 200$. Kontrollparameter: $R_1 = 244, R_2 = -150, \eta = 0.5, k = 4.2, Re = 0$.

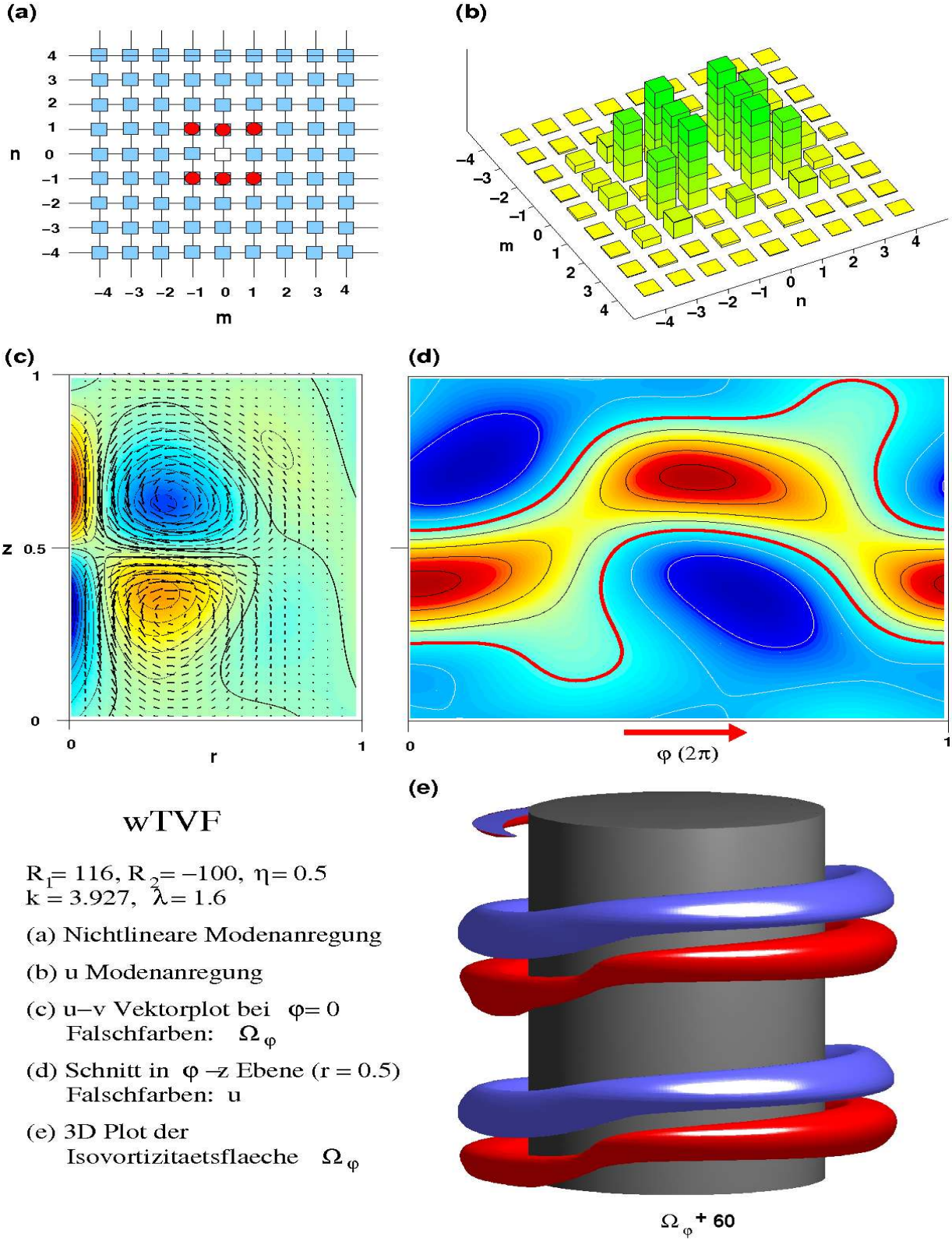


Abbildung 3.13 – Charakterisierung eines wTVF Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 116, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

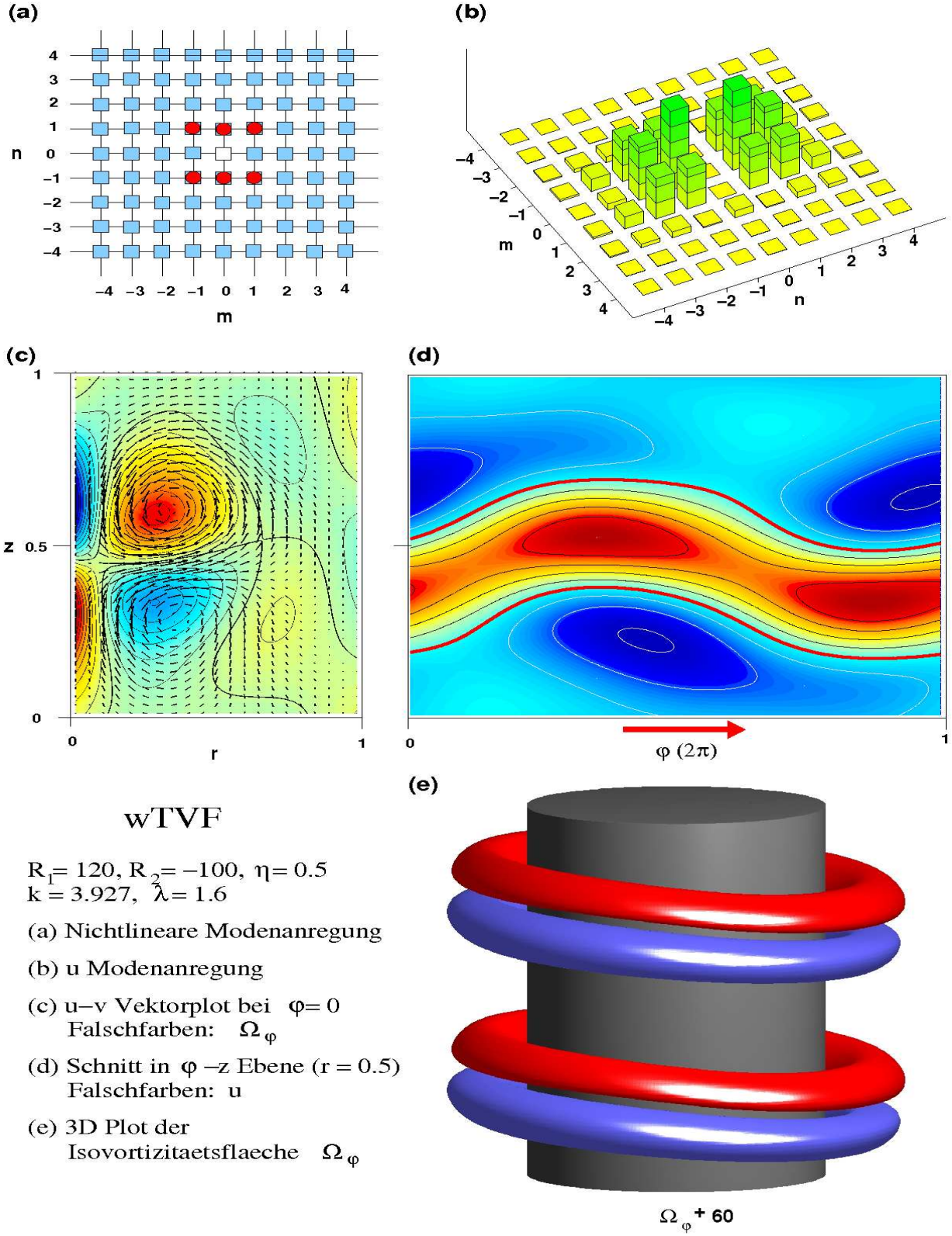


Abbildung 3.14 – Charakterisierung eines weiteren wTVF Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi-z$ Ebene in Spaltmitte ($r=0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

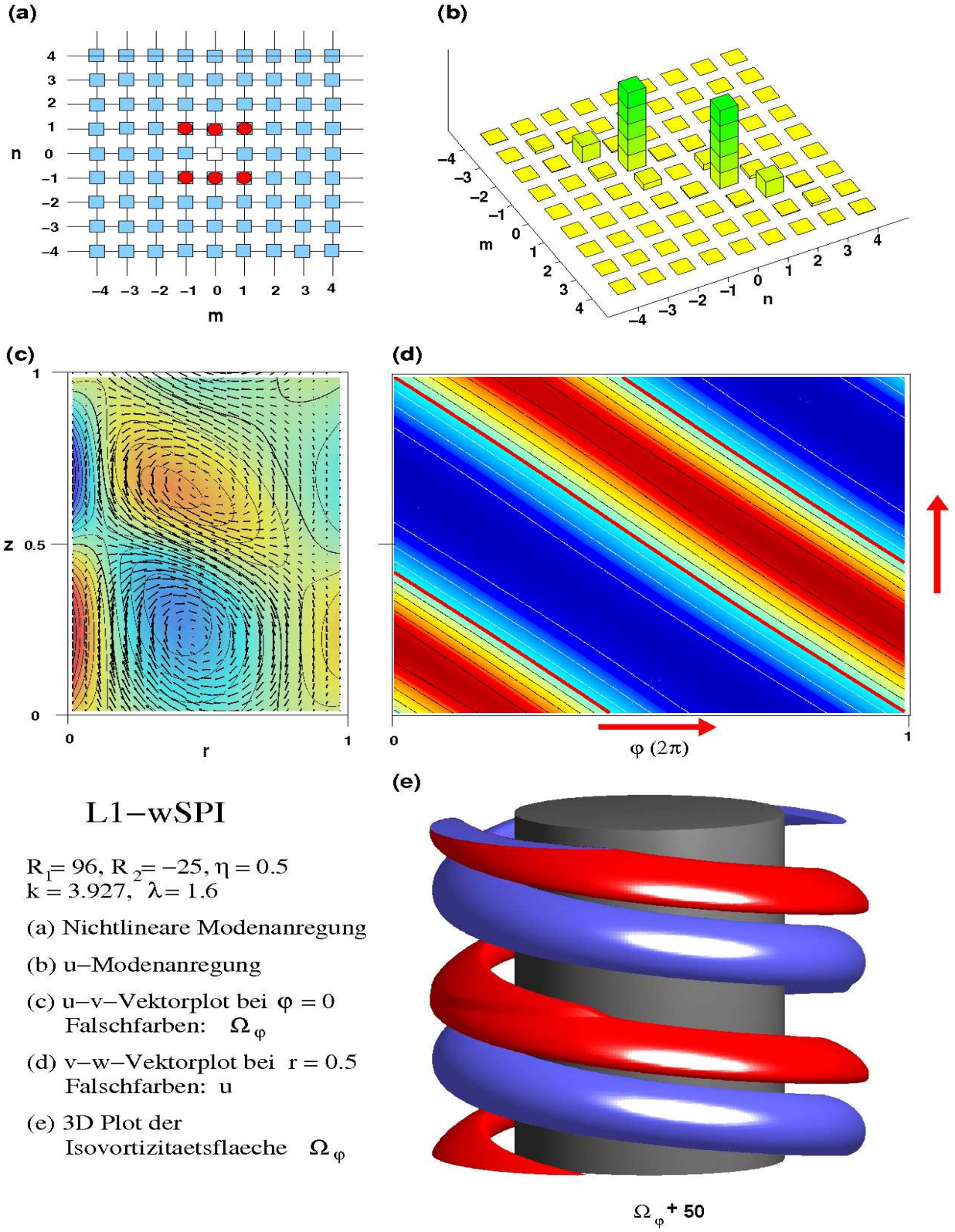


Abbildung 3.15 – Charakterisierung eines wSPI Zustands: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 50$. Kontrollparameter: $R_1 = 96, R_2 = -25, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

wTVF Zuständen, stark von den gewählten Kontrollparametern abhängig und in der Abbildungen 3.15**(d,e)** nur schwach ausgeprägt und deshalb fast nicht zu erkennen. In **(b)** sind aber deutlich die zusätzlich angeregten Moden zu sehen. Insbesondere sind hier auch die endlichen Amplituden der $(0, \pm 1)$ Moden zu nennen, da diese nicht nichtlinear angeregt werden.

3.4 Strukturen im TCS mit Ferrofluiden bei extern angelegten Magnetfeldern

Bei allen, im vorherigen Abschnitt 3.3 vorgestellten Strukturen, handelt es sich um solche Strukturen wie sie im klassischen Taylor-Couette System mit newtonschem Fluid auftreten. Befindet sich jedoch eine Flüssigkeit mit Ferrofluiden zwischen den Zylindern, so kann es, abhängig der Richtung eines extern angelegten Magnetfeldes, zur Ausbildung neuer Strukturen kommen. Darüber hinaus können einige der Lösungen des klassischen TCS überhaupt nicht mehr entstehen.

3.4.1 Wavy Taylor Vortex Flow (wTVF), Wavy Taylor Wirbel in Magnetfeldern

Vergleicht man die wTVF Strukturen der Abbildung 3.16 und 3.17, die durch ein extern angelegtes Magnetfeld mit endlicher Transversalkomponente entstehen mit den klassischen wTVF Zuständen der Abbildungen 3.13 und 3.14, so erkennt man insbesondere in der Darstellung der $\varphi - z$ Ebene **(d)**, sowie der Isovortizitätsplots **(e)** sehr deutliche und entscheidende Unterschiede. Die rote $\Phi = 0$ Phasenlinie des u Feldes bei den klassischen wTVF Zuständen beschreibt eine wellenförmige Bewegung auf der Oberfläche des abgerollten Zylinders in der $\varphi - z$ Ebene. Entscheidender ist aber die Tatsache, dass alle $\Phi = 0$ Phasenlinien annähernd *parallel* verlaufen, was in den Isovortizitätsplots durch die, als Ganzes, in z und $-z$ Richtung verzerrten Wirbelschläuche erkennbar ist. Dies gilt für die wTVF Strukturen im Magnetfeld so *nicht* mehr! Bei diesen bewegen sich die $\Phi = 0$ Phasenlinien an einzelnen diskreten Stellen aufeinander zu bzw. voneinander weg, die Wirbelschläuche werden an diskreten φ Positionen zusammengeschnürt und bei anderen aufgeweitet. Im Fall von gekreuzten, transversal und axial überlagerten Magnetfeldern (Abb. 3.16) ist neben diesem Effekt auch eine leichte wellenförmige Deformation wie bei den klassischen wTVF Strukturen zu erkennen.

Der signifikante Unterschied gegenüber klassischen, *rotierenden* wTVF Lösungen ist die Tatsache, dass es sich hierbei um *stationäre, nicht rotierende* wTVF Strukturen handelt. Die Deformationen der Wirbel sind also lokal an einer φ Position fixiert.

Die beiden Abbildungen 3.16 und 3.17 zeigen exemplarisch das raumzeitliche Verhalten von wTVF Zuständen in einem rein transversalen und einem gekreuzten, transversal und axial überlagerten, Magnetfeld für ausgewählte Parameter. In beiden Fällen handelt es sich, wie bereits erwähnt, um stationäre, nicht rotierende Strukturen. In **(b)** sind die, durch das jeweilige Magnetfeld, zusätzlich angeregten Moden gut zu erkennen. Der $\varphi - z$ Plot **(d)** zeigt die Unterschiede zu den klassischen wTVF Zuständen. Hier sind die roten, $\phi = 0$, Phasenlinien *nicht* mehr parallel, sondern bewegen sich teilweise aufeinander zu und dann wieder voneinander weg. Für die Wirbel als Ganzes bedeutet dies, dass sie lokal zusammengeschnürt und an anderer Stelle aufgeweitet sind. Im Fall von gekreuzten Magnetfeldern (Abb. 3.17) sieht die Modulation aufgrund noch weiterer zusätzlich angeregter Moden etwas anders aus. Neben dem Zusammenschnüren und der Aufweitung ist noch eine

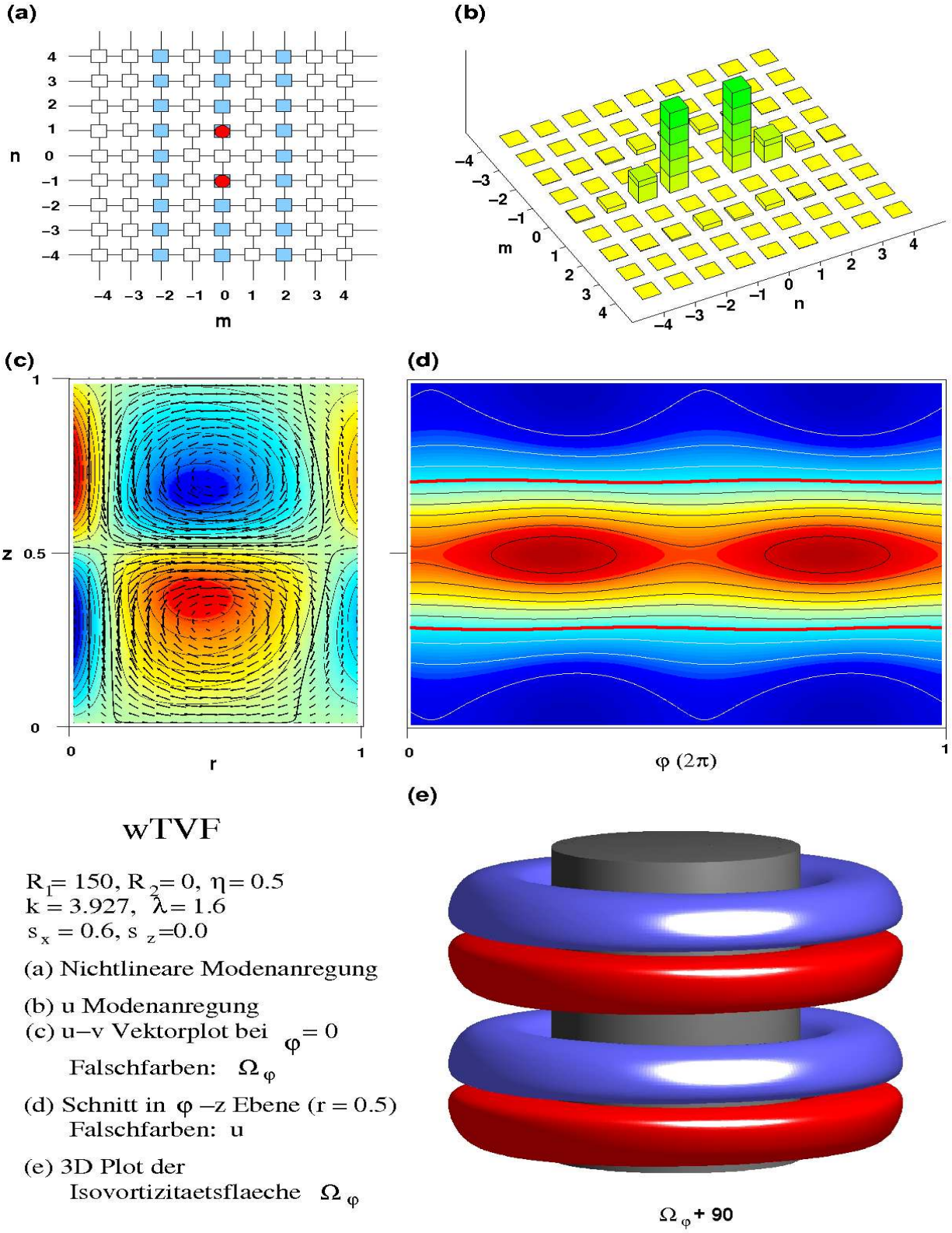


Abbildung 3.16 – Charakterisierung eines wTVF Zustands in einem rein transversalen Magnetfeld: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; da $s_x \neq 0$ sind hier auch $m = \pm 2$ Moden angeregt; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi-z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 90$. Kontrollparameter: $s_x = 0.6, s_z = 0.0, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

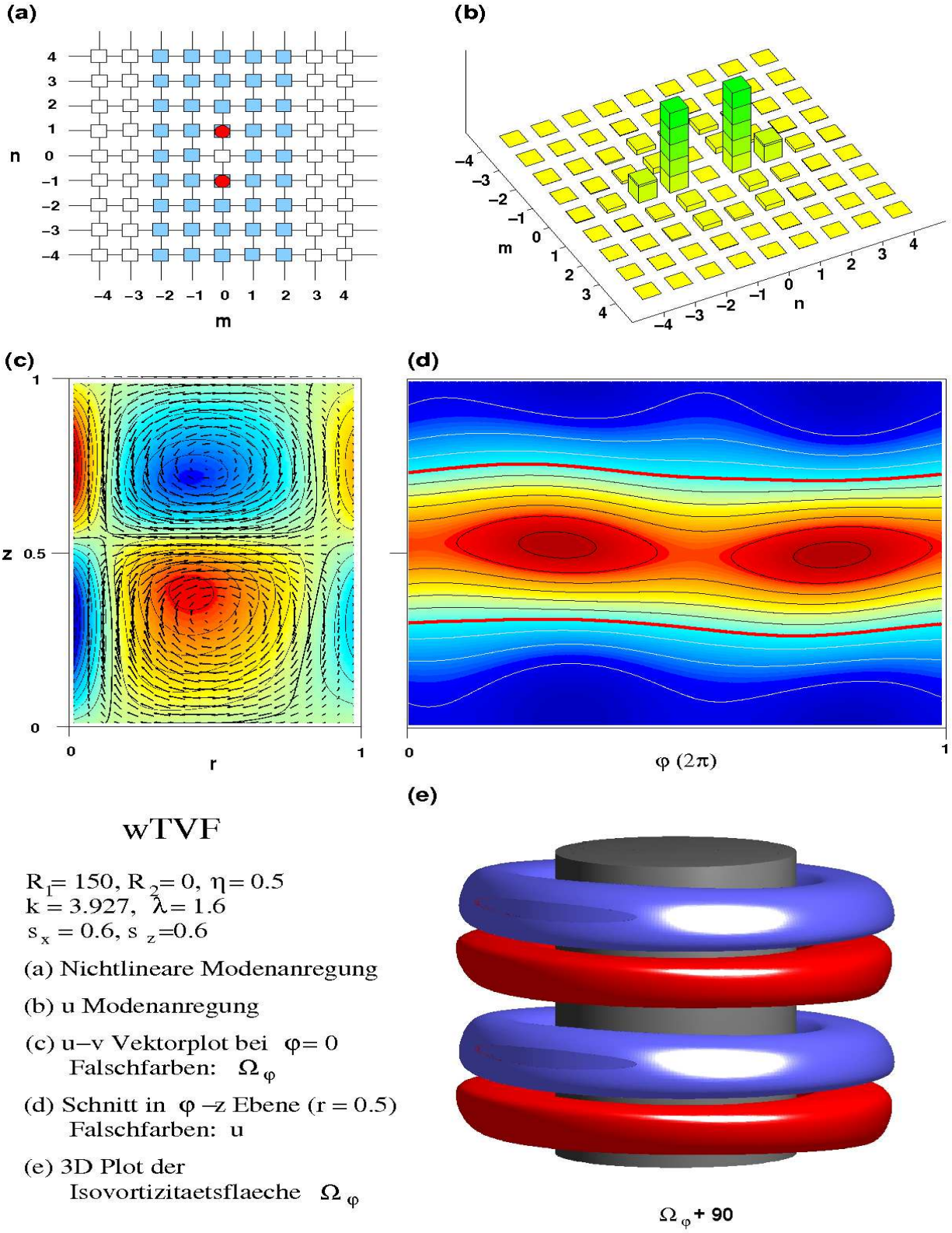


Abbildung 3.17 – Charakterisierung eines weiteren wTVF Zustands bei überlagerten, axial- und transversalen Magnetfeldern: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; da $s_x \neq 0, s_z \neq 0$ sind hier auch $m = \pm 1, \pm 2$ Moden angeregt; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r - z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 90$. Kontrollparameter: $s_x = 0.6, s_z = 0.6, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

'Verkippung', d.h. eine axiale Modulation, der Wirbel als Ganzes zu erkennen. Aber auch in diesem Fall handelt es sich immer noch um stationäre und nicht rotierende Strukturen.

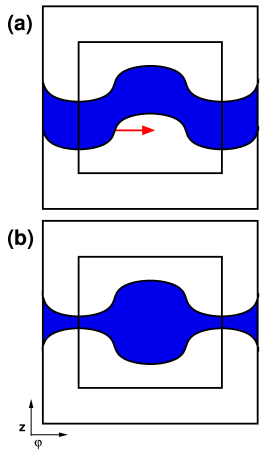


Abbildung 3.18 – Schematische Darstellung einer klassischen wTVF Lösung **(a)** und einer durch ein Magnetfeld erzeugten wTVF Struktur **(b)**. Die blauen [weißen] Bereiche charakterisieren radialen Outflow [Inflow] ($u > 0$ [$u < 0$]), in der Ebene der ausgerollten Zylinderoberfläche im Spalt. Die inneren Quadrate beinhalten eine azimutale Periode 2π in horizontaler Richtung und eine axiale Wellenlänge λ in vertikaler Richtung. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Strukturen periodisch über diese Ränder (äußere Quadrate) hinweg fortgesetzt. Der rote Pfeil in **(a)** deutet die Rotation der klassischen wTVF Zustände an, während die in **(b)**, durch Magnetfelder generierten wTVF Strukturen stehende Wellen darstellen.

Um die verschiedenen, hier aufgeführten, Wavy Strukturen, mit und ohne angelegte Magnetfelder (vgl. Abb. 3.13, 3.16), besser verstehen zu können, sind in der Abbildung 3.18 schematische Darstellungen einer klassischen wTVF Lösung **(a)** und einer durch ein Magnetfeld erzeugten wTVF Struktur **(b)** zu sehen. Die blauen [weißen] Bereiche charakterisieren radialen Outflow [Inflow] ($u > 0$ [$u < 0$]), in der Ebene der ausgerollten Zylinderoberfläche im Spalt. Beide wTVF Lösungen zeichnen sich dadurch aus, dass die $\Phi = 0$ Phasenlinien (Grenze zwischen weißen und blauen Bereichen) einen wellenförmigen (wavyartigen) Verlauf in axialer Richtung besitzen, toroidal aber in sich geschlossen sind. Es gibt aber *zwei* gravierende Unterschiede dieser wTVF Lösungen. Erstens verlaufen die $\Phi = 0$ Phasenlinien der klassischen wTVF Zustände **(a)** parallel während sie sich bei den durch ein externes Magnetfeld generierten wTVF Zustände **(b)** periodisch aufeinander zu und wieder voneinander weg bewegen. Zweitens und noch entscheidender ist aber die Tatsache, dass die klassischen wTVF Strukturen **(a)** azimutal rotierende Strukturen (siehe roten Pfeil in der Abbildung) mit einer endlichen Frequenz darstellen, wohingegen es sich bei den, durch Magnetfelder generierten wTVF Strukturen **(b)** um stationäre, stehende Lösungen handelt. In letzterem Fall ist das Muster also fixiert.

3.4.2 Wavy Spiral Vortex Flow (wSPI), Wavy Spiral Wirbel in Magnetfeldern

Die beiden Abbildungen 3.19 und 3.20 zeigen exemplarisch das raumzeitliche Verhalten von wSPI Zuständen in einem rein transversalen und einem gekreuzten, transversal und axial überlagerten, Magnetfeld für ausgewählte Parameter. Wie bei den zuvor beschriebenen, durch Magnetfelder erzeugten, wTVF Zuständen sind auch bei entsprechenden wSPI Strukturen zusätzliche Moden angeregt, wie in **(b)** zu sehen. Der $\varphi - z$ Plot **(d)** zeigt die Unterschiede zu den klassischen wSPI Zuständen. Auch hier sind die roten $\phi = 0$ Phasenlinien *nicht* mehr parallel, sondern bewegen sich teilweise aufeinander zu und dann wieder voneinander weg. Für die Wirbel als Ganzes bedeutet dies, dass sie lokal zusammengeschnürt und an anderer Stelle aufgeweitet sind. Da aber bereits die reinen SPI Strukturen,

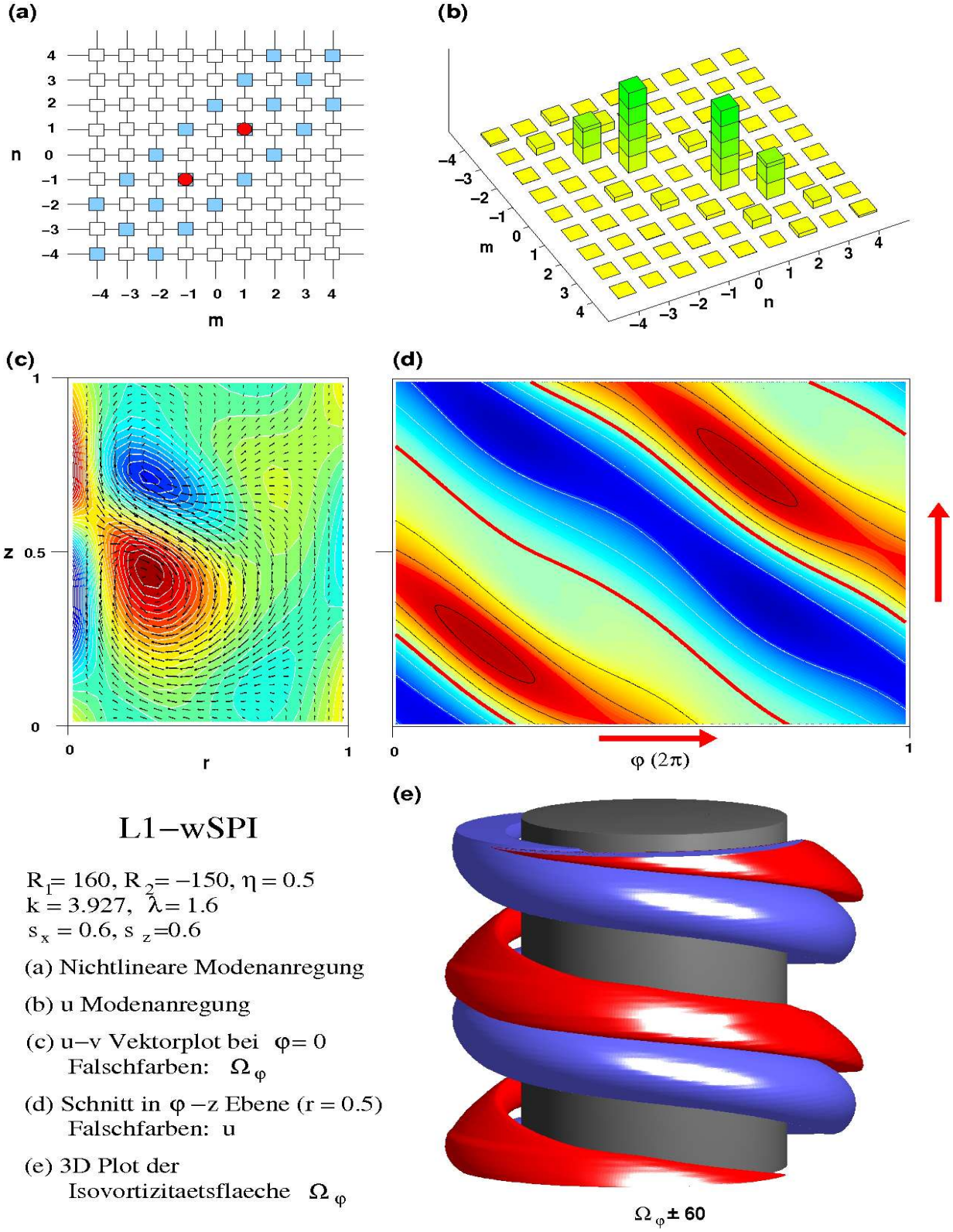


Abbildung 3.19 – Charakterisierung eines wSPI Zustands in einem rein transversalen Magnetfeld: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; da $s_x \neq 0$ sind hier auch $m = n \pm 2$ Moden angeregt; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r-z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi-z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 60$. Kontrollparameter: $s_x = 0.6, s_z = 0.0, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

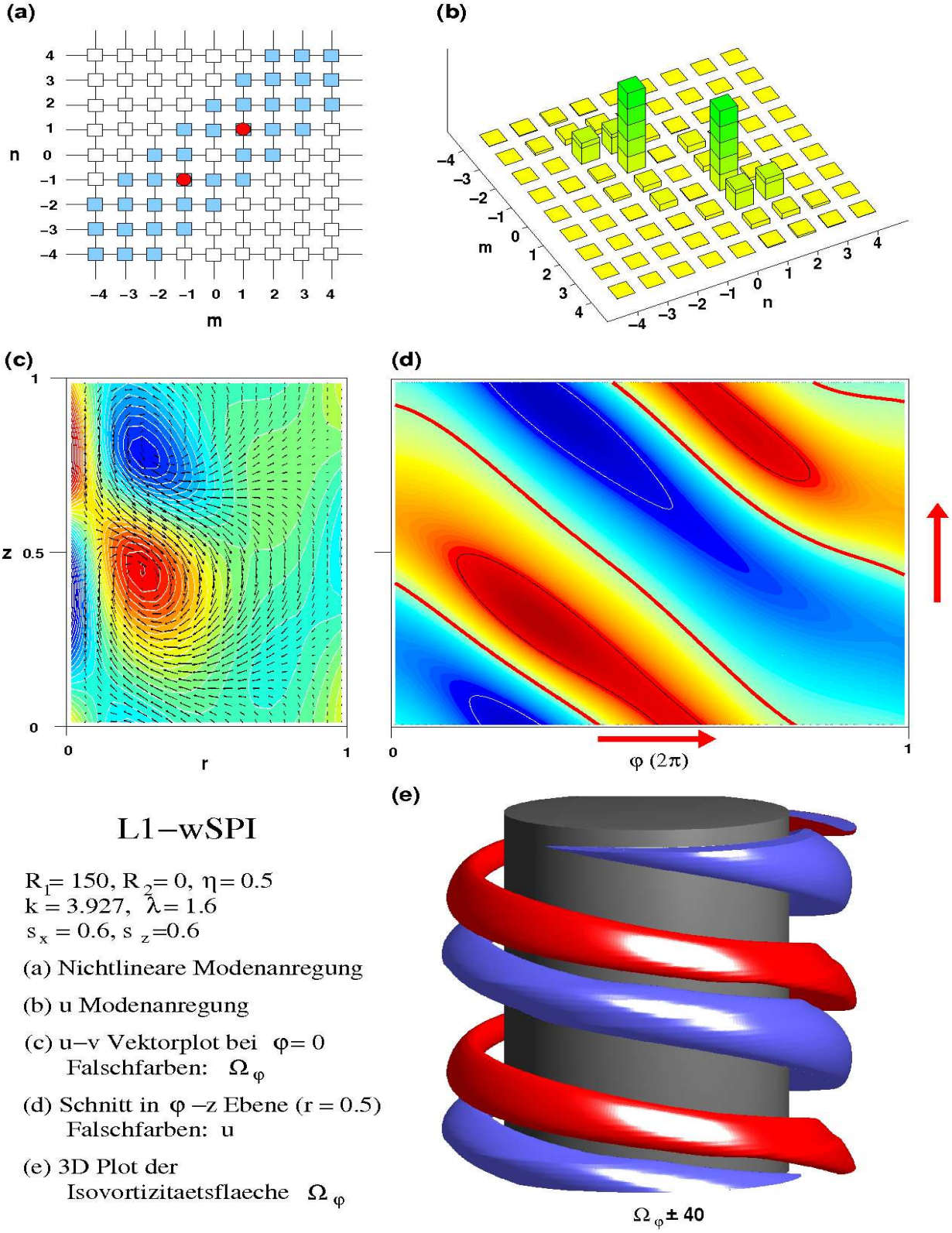


Abbildung 3.20 – Charakterisierung eines wSPI Zustands in axial- und transversal überlagertem Magnetfeld: **(a)** Nichtlineare Modenanregung; da $s_x \neq 0, s_z \neq 0$ sind hier auch $m = n \pm 1, \pm 2$ Moden angeregt; blaue Quadrate zeigen die nichtlinear angeregten Moden, die roten Kreise die dominanten Moden, bzw. die Moden der linearen Struktur. **(b)** u Modenanregung. **(c)** Vektorplots der Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r - z$ Ebene (φ =konst.); Falschfarben kodieren die azimutale Vortizität Ω_φ (blau=Max, rot=Min). **(d)** Schnitt in der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$); Falschfarben kodieren das radiale Geschwindigkeitsfeld u (blau=Max, rot=Min). **(e)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 40$. Kontrollparameter: $s_x = 0.6, s_z = 0.6, R_1 = 150, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927, Re = 0$.

ohne extern angelegtes Magnetfeld, azimutal rotieren und axial propagieren und demzufolge auch eine endliche Frequenz besitzen, gilt dies natürlich auch für die wSPI Strukturen, die durch Magnetfelder generiert werden. Lediglich die absoluten Werte der Frequenzen werden durch die Magnetfelder verändert (vgl. auch Kap. 9). Der Unterschied zwischen rein transversalen und gekreuzten Magnetfeldern ist deutlich schwächer als im Fall von wTVF Zuständen (vgl. Abb. 3.16 und 3.17).

Kapitel 4

Übergänge zwischen TVF und SPI Zuständen unter periodischen Randbedingungen (pbc)

4.1 Einleitung - Motivation

Dieses Kapitel befasst sich mit der Fragestellung, wie sich rotationssymmetrische, stationäre Taylor Wirbel (TVF) in helikale, wandernde Spiral Wirbel (SPI) transformieren. Dies ist von grundlegendem Interesse, da es hierbei um die allgemeine Frage geht, wie sich aus einer stehenden Welle eine wandernde Welle ergibt und umgekehrt. Hierzu werden die Übergänge zwischen diesen beiden topologisch unterschiedlichen Strukturen in beiden Richtungen qualitativ und quantitativ im Detail untersucht. Zum Teil wurden solche Übergänge, die über wavyartige Strukturen ablaufen, bereits theoretisch vorhergesagt, bislang aber noch nicht ausführlich, insbesondere noch nicht weiter numerisch, betrachtet. Im Detail wird untersucht, wie die beiden Lösungsäste der Taylor Wirbel und der Spiralen durch eine stabile Zwischenlösung miteinander verbunden sind. Von besonderem Interesse sind hierbei solche Fragestellungen, wie sich die raumzeitlichen Eigenschaften entlang dieses Verbindungsastes ändern, wie die Stabilität zwischen den Ästen transferiert wird und wo, bzw. was für Arten von transienten Lösungen dabei auftreten.

In der Literatur findet man eine große Anzahl von theoretischen und experimentellen Untersuchungen, die sich mit Wechselwirkungen zwischen TVF, SPI Strukturen und einer Vielzahl anderer Lösungen (56; 55; 71; 73; 142; 7; 10; 11) befassen. Hier liegt der Fokus aber auf den Wavy Taylor Wirbeln (wTVF) und den Wavy Spiral Wirbeln (wSPI), die eine dominante Rolle, neben den Ribbon (RIB) Zuständen (36; 31), beim Übergang zwischen TVF und SPI Zuständen einnehmen. Die wTVF [wSPI] Lösung erscheint hierbei als sekundäre, nicht histeretische Vorwärtsbifurkation aus dem reinen TVF [SPI] Zustand (71; 73) heraus. Im Großteil der in der Literatur zu findenden Publikationen kehrt der wTVF Lösungsast[1] in den TVF Ast zurück oder es zeigt sich eine Bifurkation höherer Ordnung (73; 7; 10; 11; 1; 109) bei weiterer Erhöhung der Kontrollparameter. Generell lässt sich festhalten, dass diese, in der Literatur bislang diskutierten wTVF Zustände, bei deutlich höheren Kontrollparametern auftreten, als die wTVF Strukturen, die nun in diesem Kapitel im Bezug auf Übergänge zwischen TVF und SPI Lösungen diskutiert werden.

[1] In der Literatur auch oft als Wavy Vortex Flow (WVF) bezeichnet.

Die toroidal geschlossenen TVF Strukturen entstehen in einer primären, stationären Bifurkation aus dem rotationssymmetrischen, axial homogenen Grundzustand, dem Circular Couette Flow (CCF) heraus. Ebenso entstehen auch die beiden, axial symmetrieentarteten und oszillierenden SPI Zustände mit ihrer links (L-) und rechts (R-) gewundenen helikalen Spiral Wirbel Struktur (SPI) in einer Hopfbifurkation zusammen mit der RIB Lösung, ebenfalls primär, aus dem CCF heraus (62; 63). Letztere kann man hierbei als eine nichtlineare Überlagerung von zwei gegenläufig wandernden (L- und R-) SPI Zustände zu einer axial stehenden Welle auffassen. Typischerweise liegen RIB Zustände nahe des Onsets als instabile Lösung vor, können aber unter bestimmten Voraussetzungen später stabilisiert werden (115). Die Stabilität von TVF und SPI Lösungen am Onset hingegen wird durch die Reihenfolge ihres Erscheinens bei Anwachsen der Rotationsrate Ω_1 des inneren Zylinders bestimmt: Die erste [zweite] aus dem CCF bifurkierende Lösung ist [in]stabil. Allerdings kann auch die zweite Lösung für größere Ω_1 stabil vorliegen. Welcher der beiden Zustände als erstes bifurkiert hängt dabei insbesondere von der Rotationsgeschwindigkeit des äußeren Zylinders ab (145).

Neben Parameterbereichen mit monostabil existierenden TVF und SPI Strukturen findet man auch Bereiche mit Bistabilität dieser beiden Lösungen (63). Für andere Kontrollparameter, weit oberhalb des Parameterbereiches, der hier von Interesse ist, gibt es natürlich eine sehr große Anzahl verschiedenster polystabil existierender Strukturen wie z.B. bei Andereck et al. (7) dargestellt. Verändert man nun einen Kontrollparameter, so dass er aus diesem Parameterbereich der Bistabilität von TVF und SPI Zuständen herausfällt, so verliert eine der beiden Lösungen ihre Stabilität und das System vollzieht einen Übergang zum einzig stabil verbleibenden Zustand, d.h., von der TVF zur SPI Lösung oder umgekehrt (63). Theoretische Bifurkationsuntersuchungen und Symmetriegruppenbetrachtungen (56; 55), wie Entwicklung mittels Amplitudengleichungen in (71) sagen eine Verbindung des stabilen TVF Lösungsastes mit dem instabilen RIB Lösungsast über stabile wTVF Zustände voraus. In (56) wird eine 'Jump Bifurkation' vom Ende des stabilen wTVF Astes hin zum stabilen SPI Ast erwartet. In der Tat konnte solch ein Verhalten mittels der hier durchgeführten numerischen Simulationen bestätigt werden und es scheint auch Ansätze für experimentelle Nachweise zu geben (142).

Bereits in (55) wurden einige qualitative Bifurkationsdiagramme für einen großen Bereich mit Radienverhältnissen, $0.43 \leqslant \eta \leqslant 0.98$, präsentiert und gezeigt, dass einige Eigenschaften, z.B. die Vorwärts- oder Rückwärtsbifurkation, Stabilitätswechsel u.v.m., sehr stark vom gewählten Radienverhältnis η abhängen. Die Untersuchungen von (56; 55; 71) lassen weiterhin auf die Existenz eines wSPI Lösungsastes schließen, der manchmal auch als modulierte Spiralen bezeichnet wird. Diese bifurkieren aus den SPI Zuständen heraus, aber diese Lösung konnte bisher weder im Einzelnen weiter verfolgt, noch konnte eine Verbindung zu einer anderen Lösung festgestellt werden. In diesem Kapitel wird nun unter anderem gezeigt, dass dieser wSPI Ast tatsächlich existiert und den Übergang von SPI zu TVF Lösungen darstellt. In der Tat lassen die Symmetriebetrachtungen in (55) eine Verbindung von SPI zu instabilen RIB über wSPI Strukturen vermuten. Die Analysen von Iooss (71) geben eine gute Anleitung zur Untersuchung von wSPI und wTVF Lösungen.

4.2 Theoretische Beschreibung

In diesem Kapitel werden als SPI und RIB Strukturen ausschließlich solche mit azimutaler Strukturwellenzahl $M = 1$ (bzw. Ganghöhe $p = \pm 1$, vgl. Kap. 3), d.h. L1-SPI, R1-SPI und 1-RIB diskutiert. Die helikale Orientierung dieser SPI Strukturen zeichnet sich dadurch aus, dass man sich bei einmaligem 'Umwandern' des Zylinders in azimutaler Richtung genau

eine 'Etage' nach oben ($p = 1$) bzw. unten ($p = -1$) wandert (vgl. auch Kap. 3, Abs. 3.3.2). Aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit werden diese im Folgenden, innerhalb dieses Kapitels, kurz nur als L-SPI, R-SPI und RIB Zustände bezeichnet. Ebenso werden auch nur die Bezeichnung wSPI Zustände verwendet, da nur solche wSPI Zustände mit dominanter $M = 1$ Wellenzahl, d.h. L1-wSPI und R1-wSPI Zustände, diskutiert werden.

Amplitudengleichungen – Dreimodenmodell

Ziel dieses Abschnitts ist es, das in dem späteren Abschnitt 4.3.1, gezeigte Bifurkationsverhalten (z.B. Abb. 4.3) inklusive der zugehörigen Stabilitätswechsel mit Hilfe eines Minimalmodenmodells, hier eines Dreimodenmodells, verstehen zu können (30; 66). Hierzu werden die beiden Übergänge TVF→wTVF→SPI und SPI→wSPI→TVF durch gekoppelte Ampiludengleichungen (31) beschrieben. Dies stellt ein relativ einfaches Modell dar, da es bei diesem Vorgehen genügt, die linear wachstumsfähigen Moden zu betrachten.

Übergänge: (i) TVF→wTVF→SPI und (ii) SPI→wSPI→TVF

Es werden nun gekoppelte Amplitudengleichungen hergeleitet, die das Bifurkationsverhalten, wie etwa in Abbildung 4.3 zu sehen, beschreiben. Das Vorgehen hierbei ist analog (31) und beschreibt das Bifurkationsverhalten von wTVF und wSPI Lösungen in der Nähe des kritischen Punktes mittels eines Dreimodenmodells. In diesem erscheinen die beiden kritischen SPI Moden, die einer linksgewundenden SPI (L-SPI), $A \equiv (m, n) = (1, 1)$, und die einer rechtsgewundenen SPI (R-SPI), $B \equiv (1, -1)$, zusammen mit der kritischen TVF Mode, $C \equiv (0, 1)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= A\,F(|A|^2, |B|^2, |C|^2) + iq_1\,B\,C\,C, \\
\frac{\partial B}{\partial t} &= B\,G(|A|^2, |B|^2, |C|^2) + iq_1\,A\,\bar{C}\,\bar{C}, \\
\frac{\partial C}{\partial t} &= C\,H(|A|^2, |B|^2, |C|^2) + \,q_0\,A\,\bar{B}\,\bar{C}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Hierbei beschreiben die Querstriche ($^-$) die komplex konjugierten Amplituden. Die Kopplungskonstanten q_0, q_1 werden als reell angenommen. Die genaue Zusammensetzung dieser Kopplungsterme ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt.

Durch die axiale Translationsinvarianz und Spiegelsymmetrie im Taylor-Couette System werden den, ansonsten beliebigen, komplexen Funktionen F, G, H einige Beschränkungen auferlegt. Deshalb sind die Gleichungen (4.1) invariant unter den Operationen $(A, B, C) \leftrightarrow (B, A, \bar{C})$ die auf der axialen Symmetrieoperation, $z \to -z$, beruht. Mit den Beschränkungen eines solchen Modells kann gezeigt werden, und zum Teil wurde dies auch bereits gezeigt, dass der wTVF Ast den stabilen TVF Lösungsast mit der instabilen RIB Lösungen verbindet. Diese instabile RIB Lösung destabilisiert dann gegenüber der stabilen SPI Lösung.

In den Untersuchungen von (31) wurde bereits die Existenz von wSPI Lösungen, die den stabilen SPI Ast mit den instabilen RIB Lösungsast verbinden, prognostiziert.

Eine Entwicklung der Gleichungen (4.1) mit

$$\begin{aligned}
X &= |X|\,e^{-i\theta_X}, \quad X \in \{A, B, C\}, \\
Z &= Z_r + iZ_i, \quad Z \in \{F, G, H\},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

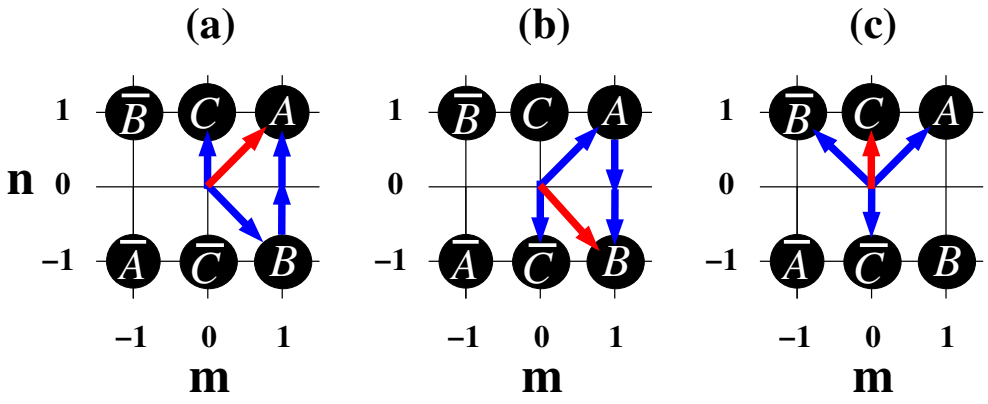


Abbildung 4.1 – Kopplungsschema der drei kritischen Moden im (m, n) Modenraum für L-SPI: $A \equiv (m, n) = (1, 1)$, R-SPI: $B \equiv (1, -1)$ und TVF: $C \equiv (0, 1)$. $^-$ repräsentieren hierbei die komplex konjugierten Moden.

und Ersetzung mit der gekoppelten Phase $\Phi = \theta_B - \theta_A + 2\theta_C - \pi$ ergibt sechs gekoppelte Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right| &= |A|\, F_r - q_1\, |B|\, |C|^2 \sin\Phi, \\
\left|\frac{\partial B}{\partial t}\right| &= |B|\, G_r + q_1\, |A|\, |C|^2 \sin\Phi, \\
\left|\frac{\partial C}{\partial t}\right| &= |C|\, H_r - q_0\, |A|\, |B|\, |C| \cos\Phi, \\
\frac{\partial \theta_A}{\partial t} &= -F_i + q_1 \frac{|B|\, |C|^2}{|A|} \cos\Phi, \\
\frac{\partial \theta_B}{\partial t} &= -G_i + q_1 \frac{|A|\, |C|^2}{|B|} \cos\Phi, \\
\frac{\partial \theta_C}{\partial t} &= -H_i + q_0\, |A|\, |B| \sin\Phi.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Mit den Substitutionen (113; 118):

$$S = \frac{|A|^2 + |B|^2}{2}, D = \frac{|A|^2 - |B|^2}{2}, \tag{4.4}$$
$$P = |A|\, |B| = S \sqrt{1 - \left(\frac{D}{S}\right)^2},$$

und der Abkürzung $G^{\pm}_{r,i} = F_{r,i} \pm G_{r,i}$ wird ein neues Koordinatensystem eingeführt. Die hieraus resultierenden, nun nur noch vier, Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D\, G^-_r + S\, G^+_r,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} &= D\,G_r^+ + S\,G_r^- - 2q_1\,P\,|C|^2\,\sin\Phi, \\
\left|\frac{\partial C}{\partial t}\right| &= |C|\,H_r - q_0\,P\,|C|\,\cos\Phi, \\
\frac{\partial \Phi}{\partial t} &= G_i^- - 2H_i + 2q_1\,D\,P^{-1}\,|C|^2\,\cos\Phi + 2q_0\,P\,\sin\Phi.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Lösungen der Amplitudengleichungen (4.3) bzw. (4.5) ergeben sich wie folgt:

SPI: Für den Fall $|C| = 0$ folgt aus Gleichung (4.5) direkt $D = \pm S$, d.h. also die Lösung der *reinen* L-SPI oder R-SPI Struktur. In diesem Fall gilt: $G_r^{\pm}(S, D) \neq 0$ für $D = \pm S$.

RIB: Für $D = 0$ und $S \neq 0$ repräsentieren diese eine weitere Lösung gemäß $G_r^{\pm}(S, D = 0) = 0$ (71; 31). Hierbei ist zu beachten, dass im Fall des RIB Zustands die (erste höher harmonische) Mode $C' \equiv (0, 2)$ angeregt ist und nicht die dominante Mode $C \equiv (0, 1)$ des TVF Zustands. Die nichtlineare Kopplung der Moden $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ ergebt die Mode $(0, 2)$.

TVF: Für $|C| > 0$, ist $D = \pm S$ nicht länger eine weitere Lösung der Gleichung (4.5). Insbesondere ergibt sich für $S = D = 0$ die klassische TVF Lösung.

Somit besteht jede dieser Lösungen aus einer oder drei Moden (A, B, C). Im Allgemeinen sind kontinuierliche Übergänge offensichtlich möglich von:

(i) TVF ($D = S = 0$, $|C| > 0$) zu wTVF ($|A| = |B| \neq 0$, $|C| > 0$) und wTVF zu SPI ($D = \pm S$, $|C| = 0$) oder zu RIB ($|A| = |B| \neq 0$, $|C| = 0$) Lösungen, ebenso wie von

(ii) SPI ($D = \pm S$, $|C| = 0$) zu wSPI ($|A|, |B|, |C| > 0$) und von wSPI zu TVF oder RIB Lösungen.

Eine grundlegende theoretische Untersuchung bezüglich der Übergänge zwischen TVF und SPI Lösungen wurde bereits von Golubitsky et al. (55) vorgenommen. Darin wurden die verschiedenen Isotropiegruppen und deren Zusammenhänge untereinander untersucht. Die Resultate dieser Untersuchungen gaben Grund zur Annahme, dass es einen stabilen Ast der wSPI Lösung gibt, der die SPI mit der instabilen RIB Lösung verbindet. Abbildung 4.2 zeigt ein schematisches Modell der möglichen Übergänge zwischen CCF, TVF, SPI, RIB, wTVF und wSPI Strukturen. Die dünne Linie beim Übergang von wSPI zu RIB Zuständen soll verdeutlichen, dass diese Verbindung in der Literatur (55) zwar schon vermutet, aber bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht numerisch entdeckt wurde. Desweiteren werden in der Literatur verschiedene andere Verbindungsäste zwischen den unterschiedlichen Lösungen vorhergesagt. So z.B. werden in (56; 55) sogenannte Twisted Vortices (TWV) beschrieben, welche die beiden Lösungen, TVF und RIB, miteinander verbinden, oder aber auch sogenannte Interpenetrating Spirals (IPS), die als Zwischenzustände auftreten können. Diese werden aber im Zusammenhang mit dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

Der Übergang von der TVF zu SPI Lösung und umgekehrt lässt sich wie folgt zusammenfassen:

$$\mathrm{TVF} \overset{\mathrm{wTVF}}{\leftrightarrows} \mathrm{RIB} \underset{\mathrm{wSPI}}{\overset{\dashrightarrow}{\leftarrow}} \mathrm{SPI}.$$

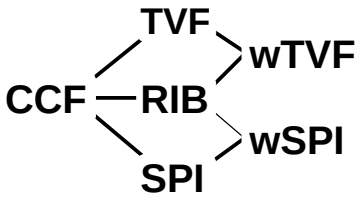


Abbildung 4.2 – Schematisches Modell der möglichen Übergänge zwischen CCF, TVF, SPI, RIB, wTVF und wSPI Zuständen für pbc Bedingungen. Die dünne Linie beim Übergang von wSPI hin zur RIB Lösung soll verdeutlichen, dass dieser Übergang bislang in der Literatur (55) nur vermutet, aber noch nicht entdeckt wurde, im Rahmen dieser Arbeit aber numerisch nachgewiesen werden konnte.

4.3 Bifurkationsszenarien und Phasendiagramm

In den nun folgenden Abschnitten werden die Bifurkationseigenschaften von TVF, SPI, RIB Strukturen und die der Verbindungsäste von wTVF und wSPI Lösungen untersucht. Dies geschieht zunächst einzeln in Abhängigkeit von der Rotation des inneren Zylinders, R_1, des äusseren Zylinders, R_2, sowie von der Wellenzahl k. Die Ergebnisse werden schließlich in einem dreidimensionalen Phasendiagramm im $k - R_1 - R_2$ Parameterraum zusammengefasst.

4.3.1 Bifurkationsverhalten als Funktion von R_1

In der Abbildung 4.3 sind stabile (durchgezogene Linien mit gefüllten Symbolen) und instabile (gestrichelte Linien mit leeren Symbolen) Bifurkationsäste für die Lösungen: TVF (●, blaue Kreise), L-SPI (▲, orange Dreiecke), RIB (◊, grüne Rauten), wTVF (■, schwarze Quadrate) und wSPI (♦, schwarze Rauten) in Abhängigkeit von R_1 für zwei verschiedene, aber fixierte Werte R_2, dargestellt. Die Parameterwerte, die zu diesen beiden Bifurkationsdiagrammen gehören sind zusätzlich mit Pfeilen **(a)** und **(b)** in das Phasendiagramm in Abbildung 4.5 eingetragen. Hierbei handelt es sich um Übergänge von TVF zu SPI **(a)**, bzw. SPI zu TVF **(b)** Lösungen, die im Folgenden ausführlich diskutiert werden.

Wavy Taylor Wirbel (wTVF)

Zunächst soll der Übergang von stabilen TVF Zuständen hin zu stabilen SPI Strukturen **(a)**, der über stabile wTVF Lösungen abläuft, untersucht werden. Dazu starten wir in Abbildung 4.3**(a)** mit einer stabilen TVF Lösung in der Region E (rechts). Bei Verminderung von R_1 bleibt diese TVF Lösung zunächst stabil, bis sie den in der Abbildung grau hinterlegten Bereich F erreicht. An dieser Grenze ($R_1 \approx 123$) verliert die TVF Lösung ihre Stabilität gegenüber einer neuen Lösung, die sekundär aus dem TVF Ast herausbifurkiert. Entscheidend hierbei ist, dass die beiden Moden $(1, 1)$ und $(1, -1)$ mit exakt der *gleichen* Amplitude anwachsen und so zu der neuen stabilen Lösung des wTVF führen. Diese ist im Wesentlichen aus den drei dominanten Moden $(0, 1)$, $(1, 1)$ und $(1, -1)$ aufgebaut (vgl. auch Abs. 4.2). Mit weiter abnehmendem R_1 wächst das Verhältnis der Amplituden $|u_{1,\pm1}/u_{0,1}|$ weiter an; dies bedeutet, dass die Modulationen, also der Wavycharakter des wTVF Zustands immer stärker wird.

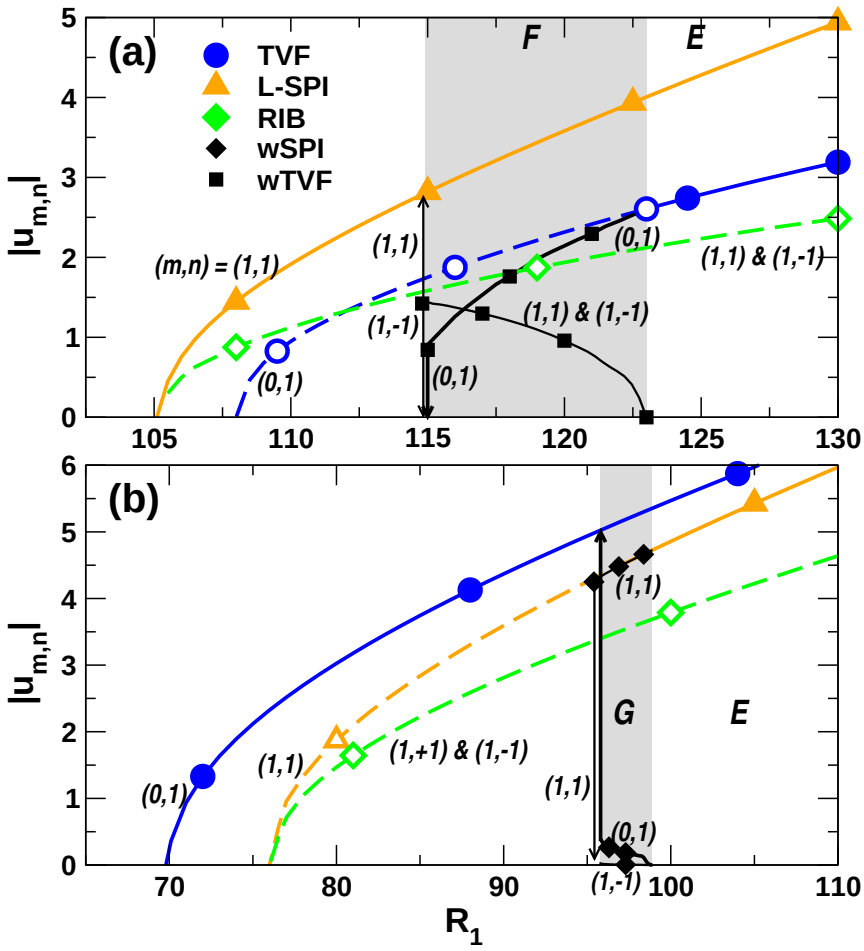


Abbildung 4.3 – Bifurkationen verschiedener Wirbelstrukturen in Abhängigkeit von R_1 für **(a)** $R_2 = -100$ und **(b)** $R_2 = -25$ (siehe auch Pfeile **(a,b)** in Abb. 4.5). Durchgezogene [gestrichelte] Linien mit gefüllten [leeren] Symbolen charakterisieren stabile [instabile] Lösungen. Dargestellt sind die Amplituden der dominanten Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in der Mitte des Spaltes ($r = 0.5$) für TVF(●) $(m,n) = (0,1)$, L-SPI(▲) $(m,n) = (1,1)$, 1-RIB(◊) ($|u_{1,1}| = |u_{1,-1}|$), wTVF(■) und wSPI(♦) Lösungen. Die beiden Wavy Lösungen zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen $u_{0,1} \neq 0$ und $u_{1,\pm1} \neq 0$, während für die reinen Strukturen gilt: $u_{0,1}^{SPI} = 0 = u_{1,\pm1}^{TVF}$. Die Amplitude der $(1,1)$ Mode der wSPI Struktur **(b)** ist hierbei sehr klein und kann deshalb nicht von der Abszisse unterschieden werden. Aus Gründen der Übersicht sind die Bifurkationsäste, die zur symmetrieentarteten Lösung der R-SPI führen, hier nicht dargestellt. Weitere Kontrollparameter sind: $\eta = 0.5, k = 3.927$. In dieser und den weiter folgenden Abbildungen dienen die verschiedenen Symbole in erster Linie zur Unterscheidung verschiedener Strukturen. Alle numerischen Rechnungen wurden für weit mehr Parameter durchgeführt, als es die Symbole zeigen.

Es ist offensichtlich, dass sich die beiden Amplituden $(1,1)$ und $(1,-1)$ der wTVF Lösung, dem instabilen RIB Ast annähern[2]. Da diese Lösung aber im gesamten, hier dargestellten Parameterbereich instabil ist, kann das System in dieser nicht verbleiben und muss deshalb einen Übergang zu der einzig verbleibenden stabilen Lösung, der SPI, vollziehen. Dies bedeutet, dass die $m = 0$ und eine der $m = 1$ Amplituden (hier $u_{1,-1}$) am linken Rand der Region F verschwinden (angedeutet durch vertikale Pfeile in Abb. 4.3), während die verbleibende $m = 1$ Mode (hier $u_{1,1}$) auf die dominante Lösung der reinen SPI anwächst (hier L-SPI). Dabei liegt die reine SPI Lösung, entartet zu L- und R-SPI, da keine Symmetriebrechenden Effekte vorhanden sind, im gesamten Parameterbereich der Abbildung 4.3**(a)** als stabile Lösung vor. Hieraus ergibt sich, dass SPI Strukturen sowohl bistabil mit TVF Zuständen in Region E, wie auch bistabil mit wTVF Lösungen in Region F existieren.

Aus Gründen der Übersicht ist in Abbildung 4.3**(a)** nur eine SPI Lösung, die L-SPI, dargestellt. Der entsprechende Übergang von TVF über wTVF und RIB Lösung hin zur R-SPI Lösung verläuft völlig analog in Abwesenheit symmetiebrechender Effekte.

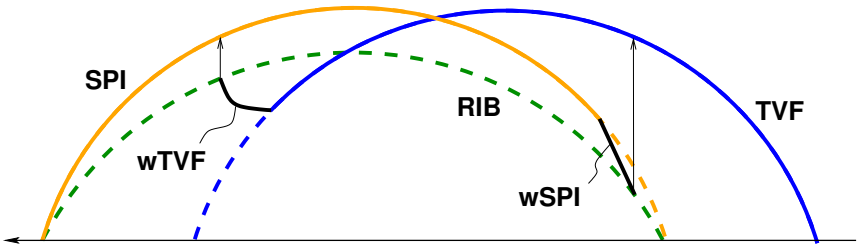


Abbildung 4.4 – Schematisches Bifurkationsdiagramm für einen geeigneten Parameter, z.B. R_2 unter pbc Bedingungen. Dieses Diagramm stellt eine Zusammenfassung der Ergebnisse der beiden Abbildungen 4.3 und 4.5 dar. Stabile [instabile] Lösungen sind als durchgezogene [gestrichelte] Linien dargestellt. Die beiden dünnen Pfeile symbolisieren den transienten Übergang der bereits in (56) als 'Jump bifurcation' bezeichnet wurde. Es ist darauf zu achten, dass die beiden eingezeichneten stabilen Wavy Lösungsäste *nicht* bis ganz auf den RIB Ast gehen, sondern sich diesem nur annähern, da diese Lösung hier instabil ist.

Wavy Spiral Wirbel (wSPI)

Analog dem Übergang von TVF zu SPI Zuständen, der über eine stabile wTVF Lösung führt, wird nun der Übergang in umgekehrter Richtung von SPI zu TVF Strukturen diskutiert. In Abbildung 4.3**(b)** ist das Bifurkationsverhalten für Parameter, $R_2 = -25$, dargestellt, bei denen wSPI Zustände auftreten. Wie in **(a)** starten wir in der Abbildung rechts in Gebiet E, nun aber in einer stabilen SPI Lösung (hier in einer L-SPI Struktur mit dominanter $(1,1)$ Mode) und vermindern R_1. Diese Lösung verliert ihre Stabilität am rechten Rand des grauen Bereiches G, wobei zwei weitere Moden, $(0,1)$ und $(1,-1)$, anwachsen. Die beiden Moden[3], $(1,1)$ und $(1,-1)$, wechselwirken nichtlinear miteinander und gene-

[2]Wie weit sich die wTVF Lösung der instabilen RIB Lösung annähert, hängt von diversen Systemparametern ab. Entscheidend ist jedoch, dass das System letztere nie erreichen kann, da diese hier immer instabil vorliegt.

[3]Bei reinen L-SPI und R-SPI Zuständen sind $(1,1)$ und $(1,-1)$ gerade die dominanten Moden.

rieren eine $(0,2)$ Mode, deren Amplitude aber signifikant kleiner als die der $(0,1)$ Mode ist. Hier zeigt sich, dass es sich im Fall der $(0,1)$ Mode in der wTVF Lösung *nicht* um eine nichtlinear angeregte Mode handelt! Bei weiterer Verminderung von R_1 wachsen die beiden Moden $(0,1)$ und $(1,-1)$ monoton an, während die $(1,1)$ Mode kleiner wird. Dieses Verhalten lässt eine Annäherung an den instabilen RIB Ast vermuten. Aber wie bereits in Abbildung 4.3**(a)** gesehen, kann das System keine RIB Lösung generieren und die meisten Moden verschwinden am linken Rand des grauen Bereiches G. Nur die $(0,1)$ Mode bleibt endlich und wächst an zur einzig verbleibenden stabilen TVF Lösung. Somit existieren auch wSPI und TVF Zustände bistabil in Region G.

Für die in der Abbildung 4.3**(b)** gewählten Parameter unterscheiden sich die Amplituden der beiden Moden, $(1,1)$ und $(1,-1)$, in der wSPI Lösung wesentlich voneinander. Insbesondere folgt die Amplitude der $(1,1)$ Mode nahezu unverändert der entsprechenden Mode der reinen L-SPI Struktur, während die Amplitude der $(1,-1)$ Mode sehr klein ist. Dies ist aber nicht immer der Fall. Neben diesen sind für andere Kontrollparameter auch wSPI Lösungen mit moderaterem Modenverhältnis gefunden worden. Soll heißen, der Unterschied in den Moden ist kleiner, insbesondere in der minoranten Mode der wSPI Struktur, hier $(1,-1)$. Weiter soll aber auf diese nicht eingegangen werden, da es keine qualitativen Unterschiede zu der hier präsentierten wSPI Lösung gibt.

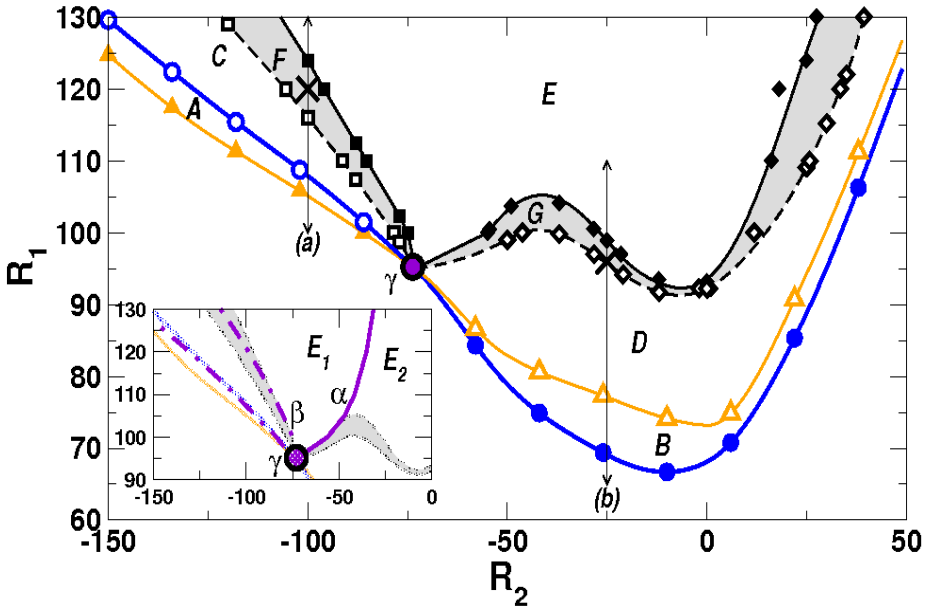
Am linken Rand der Regionen F und G in Abbildung 4.3**(a,b)** zeigen entsprechende Amplituden der wTVF und wSPI Lösung einen signifikanten Sprung. Es wurde versucht, die Wavy Lösungen auch links der grauen Bereiche F und G zu stabilisieren und somit weiter zu verfolgen. Hierzu wurde Gleitspiegelsymmetrie auferlegt, welche die Wavy Lösung erfüllen, nicht aber etwa die SPI Lösung. Dies führte aber immer zu einer Stabilisierung der RIB Lösung, die ebenfalls den gleichen Symmetrien wie die Wavys genügen. Somit konnten mit diesen Einschränkungen die erwarteten Äste der instabilen wTVF und wSPI Lösungen nicht gefunden werden. Weitere Versuche, diese Lösungen für R_1 Werte links der Gebiete F und G zu erhalten wurden nicht unternommen.

Abbildung 4.4 fasst die Ergebnisse von Abschnitt 4.3.1 in einem *schematischen* Bifurkationsdiagramm für einen möglichen Kontrollparameter, z.B. R_2, zusammen. Hierbei ist erneut darauf zu achten, dass die Bifurkationsäste der wTVF und wSPI Lösungen (schwarz) nicht exakt auf dem Ast der RIB Lösung enden, da diese nur instabil vorliegt. Die transienten Übergänge von den instabilen RIB Zuständen hin zu den stabilen Lösungen des TVF bzw. der SPI, sind durch dünne vertikale Pfeile gekennzeichnet.

4.3.2 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm

Die blaue [orange] Linie kennzeichnet die längst bekannte primäre Bifurkationsschwelle für TVF [SPI] Zustände aus dem CCF Grundzustand heraus. Die oberen Grenzen der Gebiete F und G stellen die Schwellen der vorwärts bifurkierenden Lösungen der wTVF aus den TVF, bzw. der wSPI aus den SPI Lösungen dar. Beide Wavy Lösungen sind nur als *stabile* Lösungen im hier untersuchten Parameterbereich aufgetreten. Wie bereits zuvor erwähnt, erlaubt es der verwendete Code leider nicht, instabile Wavys zu verfolgen.

Die Abbildung 4.5 (66) stellt im Wesentlichen eine detailliertere Version eines schon bekannten Phasendiagramms, der Abbildung 2 aus (63), dar. Anders als in dieser 'alten' Version sind hier aber die nichtlinear erhaltenen Bifurkationsschwellen von TVF (blau) und SPI (orange) Strukturen, anstelle der linearen, und die neu gefundenen (grauen) Wavy Bereiche F, G mit aufgenommen. Es zeigt den vollständigen hier untersuchten $R_1 - R_2$ Parameterbereich, einschließlich aller dort existenten Strukturen. Die zuvor gezeigten Bifurkationsdiagramme in Abbildung 4.3 wurden entlang der beiden eingetragenen Pfeile **(a)** und **(b)** aufgenommen.



$R_1 - R_2$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF und wSPI Lösungen für $\eta = 0.5$, $k = 3.927$.

Region	A	B	C	D	E	F	G
TVF	-	s	i	s	s	i	s
SPI	s	-	s	i	s	s	i
wTVF	-	-	-	-	-	s	-
wSPI	-	-	-	-	-	-	s

stabil (s) ,
instabil (i) ,
nicht existent (-).

Abbildung 4.5 – Die blaue Linie mit Kreisen, sowie die orange Linie mit Dreiecken kennzeichnen die Bifurkationsschwellen für TVF (●) und SPI (▲) Lösungen aus dem CCF Grundzustand heraus. Gefüllte [leere] Symbole geben an ob die jeweilige Lösung stabil [instabil] an der Schwelle ist. In Region E liegen beide Lösungen, TVF uns SPI, *bistabil* vor. Die schwarzen durchgehenden Linien beschreiben die oberen Bifurkationsschwellen von wTVF (■) und wSPI (♦) aus den TVF bzw. SPI Lösungen heraus. Diese Wavy Lösungen sind in den jeweiligen grauen Bereichen F und G stabil und werden instabil an der schwarz gestrichelten Kurve mit offenen Symbolen (□,◊). Die beiden vertikalen Pfeile **(a)** und **(b)** kennzeichnen die Parameterbereiche der Bifurkationsdiagramme aus Abbildung 4.3. Die beiden Kreuze geben die Parameter an, für die in Abbildung 4.7 die Wellenzahlabhängigkeit des Bifurkationsverhaltens gezeigt wird. Die durchgehende violette Linie α, in dem Bildausschnitt in der Abbildung links unten, teilt das Gebiet E in zwei Teile: Zum einen in E_1, in dem die Amplituden der SPI Struktur $|u_{1,\pm 1}|$ größer sind, als die der TVF Lösung $|u_{0,1}|$, und entsprechend umgekehrt in E_2. Die strichpunktierte Kurve β beschreibt die Projektion dieser 'bikritischen' Kurve, d.h. die Schnittlinien von TVF und SPI Bifurkationsflächen im $k - R_1 - R_2$ Phasenraum auf die $R_1 - R_2$ Ebene bei $k = 3.927$ (siehe auch Abb. 4.10). Der violette Punkt γ gibt den Punkt höherer Codimension an, in dem die Bifurkationsschwellen der verschiedenen Strukturen zusammenlaufen.

Insgesamt können die Strukturen im Phasendiagramm der Abbildung 4.5 wie folgt zusammengefasst werden: In Region E, oberhalb der Gebiete F und G, liegen die Strukturen, TVF und SPI, als bistabile Lösungen vor. In Region C (unterhalb von F) sind nur SPI aber nicht die TVF Zustände stabil und entsprechend existieren in Region D, (unterhalb von G) nur stabile TVF, aber keine SPI Lösungen. Bei Verminderung von R_1, ausgehend von Gebiet E, hinein in den grauen Bereich G, wird Stabilität von der TVF Lösung hin zur wTVF Lösung transferiert. Analog verlieren SPI Zustände ihre Stabilität gegenüber wSPI Strukturen beim Übergang von Gebiet E hinein in Gebiet F. An den unteren gestrichelten Schwellen von F und G findet ein transienter Übergang hin zu der einzig monostabil verbleibenden Lösung, dem TVF, bzw. der SPI, statt. Die Bifurkationsschwellen von TVF und SPI Zuständen aus dem CCF heraus sind durch blau Linien mit Kreisen (TVF) und orange Linien mit Dreiecken (SPI) gekennzeichnet.

Wie bereits erwähnt, wurden diese Bifurkationsschwellen hier mittels numerischer Simulationen der vollen nichtlinearen Gleichungen erhalten und unterscheiden sich deshalb etwas von denen in Abbildung 2 in (63) dargestellten Schwellen (vgl. auch Abb. D.4). Diese wurden in Rechnungen mit einer linearen Analyse mittels Shooting Verfahren ermittelt. Ein Vergleich hierzu befindet sich im Anhang D in Abschnitt D.1.7.

TVF und SPI Amplituden in Gebiet E

Wie bereits oben erwähnt, existieren die beiden Strukturen, TVF und SPI, in Gebiet E bistabil nebeneinander. Im Allgemeinen sind aber die Amplituden der dominanten Moden $u_{0,1}$ und $u_{1,\pm1}$ voneinander verschieden. Die Region E lässt sich somit in zwei Unterbereiche, E_1 und E_2, unterteilen, die durch die violette α Kurve im Bildausschnitt von Abbildung 4.5 voneinander getrennt sind. Hierbei gilt: In E_1 ist die Amplitude der dominanten Mode der SPI Lösung größer als die des TVF Zustands, und umgekehrt in Region E_2.

Man beachte, dass die α Kurve immer oberhalb der oberen Schwelle (gefüllte Rauten) der Region G liegt. Dies hat zur Folge, dass bei einer Verminderung von R_1 immer zuerst die Wirbel Struktur mit der kleineren Amplitude (TVF in E_1 und SPI in E_2) instabil gegenüber dem Entstehen der Wavy Strukturen an der oberen durchgezogenen schwarzen Kurve des grauen Gebietes wird. Der Zustand mit der größeren Amplitude bleibt demgegenüber stabil auf dem gesamten Weg (in R_1) bis zu der zugehörigen Bifurkationsschwelle aus dem CCF heraus.

In Abbildung 4.6 ist das Bifurkationsverhalten der verschiedenen Lösungen, um den polykritischen Punkt γ herum, zusammenfassend dargestellt. Dies ist die schematische Darstellung, des im Bildausschnitt von Abbildung 4.5, gezeigten Diagramms. Hierbei bedeuten durchgezogene [gestrichelte] Linien eine [in]stabile Bifurkation von TVF (blau) und SPI (rot) Lösungen. Stabile Strukturen sind dick und instabile kursiv geschrieben. Die grauen Bereiche charakterisieren die beiden Gebiete F und G (siehe Abb. 4.5), in denen die Wavys existieren.

Startet man in der Nähe des polykritischen Punktes γ im unterkritischen Bereich, im CCF Grundzustand, und bewegt sich im mathematisch positiven Sinn um diesen Punkt herum, so ergibt sich die folgende Abfolge stabil und instabil bifurkierender Strukturen: Zunächst bifurkiert die TVF Lösung (blau) stabil aus dem Grundzustand heraus. Oberhalb der instabil bifurkierenden SPI Lösung (rot) existieren ebenfalls nur TVF Zustände stabil. Erst oberhalb des Übergangs ('Jump Bifurkation') von wSPI zu TVF Lösungen liegt Bistabilität von TVF und wSPI Strukturen vor. Diese bleibt oberhalb der Bifurkationsschwelle der wSPI aus den SPI Zuständen heraus erhalten, allerdings nun zwischen TVF und SPI Strukturen, unabhängig welche der dominanten Modenamplituden am größten ist (Bereiche E_1 und E_2). Ebenfalls existieren nach Überschreitung der wTVF Bifurkationsschwelle aus den TVF, wTVF und SPI Zustände bistabil. Diese Bistabilität geht erst an

der Schwelle des Übergangs von wTVF zu SPI Strukturen ('Jump-Bifurkation') verloren so dass nur noch SPI als stabile Strukturen vorliegen. Dies gilt sowohl ober- als auch unterhalb der Bifurkationsschwelle der instabilen TVF Lösung. Bei Überschreiten der SPI Bifurkationsschwelle endet man wieder im unterkritischen CCF Zustand.

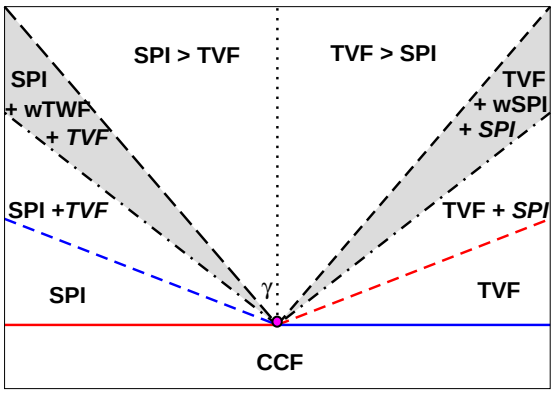


Abbildung 4.6 – Schematisches Phasendiagramm in der $R_1 - R_2$ Ebene für pbc Bedingungen. Bifurkationsverhalten der verschiedenen Lösungen um den polykritischen Punkt γ. Durchgezogene [gestrichelte] Linien charakterisieren [in]stabile Bifurkationsschwellen von TVF (blau) und SPI (rot) Lösungen. Stabile Strukturen sind dick und instabile kursiv geschrieben. Graue Bereiche charakterisieren die beiden Gebiete F und G (siehe Abb. 4.5) in denen die Wavy Strukturen existieren.

Dieses hier aufgezeigte Bifurkationsverhalten steht in Einklang mit Symmetriegruppenüberlegungen und Untersuchungen wie sie bereits von Golubitsky et al. (55) durchgeführt wurden.

4.3.3 Wellenzahlabhängigkeit k

Als weiterer wichtiger Kontrollparameter wurde, neben dem Bifurkationsverhalten als Funktion von R_1 (Abb. 4.3), die Wellenzahlabhängigkeit der verschiedenen Wavy Strukturen eingehender untersucht. Hierbei werden jeweils R_1 und R_2 fixiert gehalten. Als zwei repräsentative Beispiele sollen hier Kontrollparameter, wie sie in Abbildung 4.5 durch die beiden Kreuze markiert sind, herangezogen werden.

Bifurkationsdiagramme

Startet man in einer stabilen TVF Lösung etwa bei $R_1 = 120$, $R_2 = -100$ in Gebiet E_1 der Abbildung 4.7**(a)** und vermindert die Wellenzahl k, so bleibt die TVF Lösung zunächst stabil, oberhalb der rechten Grenze des grauen Bereiches F. Dort wird diese Lösung, wie schon bei Verminderung von R_1 gesehen, instabil gegenüber der wTVF Lösung. Neben der $(0,1)$ Mode des TVF Zustands sind die Einflüsse der nun anwachsenden $(1,1)$ und $(1,-1)$ Moden für die azimutale Modulation des wTVF Zustands verantwortlich. Mit zunehmender Verminderung von k und somit wachsenden Einflüssen der $(1,1)$ und $(1,-1)$ Moden am gesamten Modenspektrum, wird die Modulation der wTVF Lösung ebenfalls zunehmend stärker (vgl. auch Abb. 4.16). An der linken Grenze des Bereiches F verschwinden die Amplituden der meisten Moden in einem transienten Übergang, d.h. sie gehen auf Null (angedeutet durch vertikale Pfeile). Ausgenommen ist hierbei die Amplitude der $(1,1)$ Mode, die auf die dominante Modenamplitude der stabilen L-SPI Lösung springt, wie durch die vertikalen Pfeile in Abbildung 4.7**(a)** dargestellt.

Für den Fall betragsmäßig kleiner $|R_2|$, wie er in Abbildung 4.7**(b)** für $R_1 = 96$ und $R_2 = -25$ zu sehen ist, liegt die grau dargestellte Region G mit stabilen wSPI Lösungen *oberhalb* des bistabilen Gebietes E_2 (rechts in der Abb. 4.8), während sie für

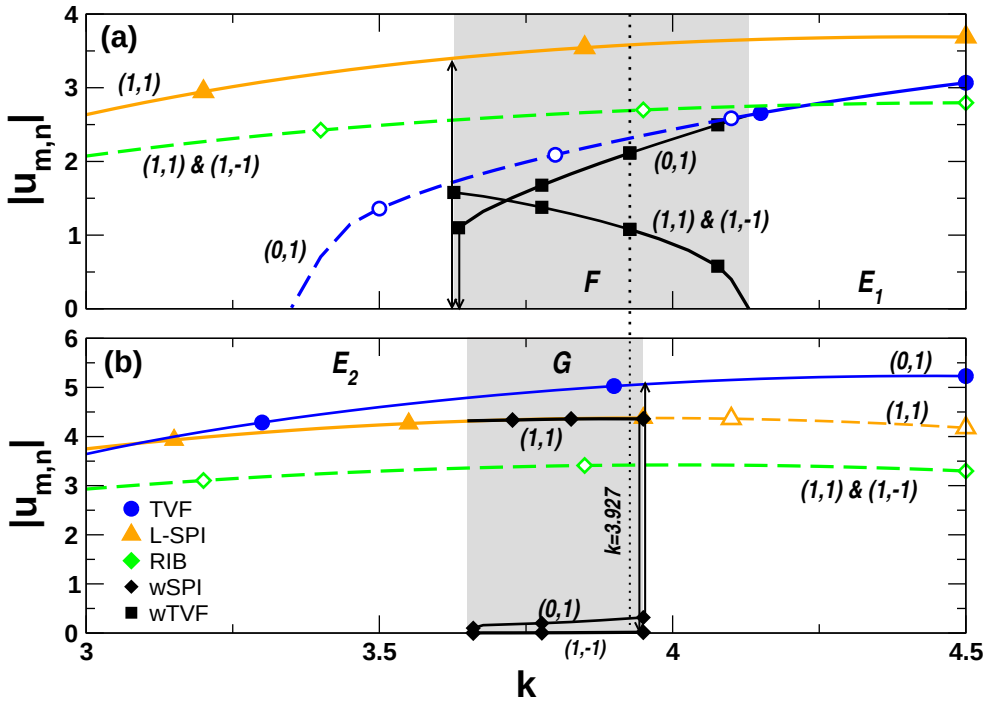


Abbildung 4.7 – Bifurkationsdiagramm für verschiedene Wirbelstrukturen (siehe Legende) in Abhängigkeit der Wellenzahl k. Für eine weitere Beschreibung, siehe Bildunterschrift der Abbildung 4.3. Die beiden hier dargestellten Parameterkombinationen $\eta = 0.5$, **(a)** $R_1 = 120$, $R_2 = -100$ und **(b)** $R_1 = 96$, $R_2 = -25$ sind in Abbildung 4.5 durch die beiden Kreuze markiert.

$R_1 = 120, R_2 = -100$**(a)** *unterhalb* dieses Gebietes liegt (links in der Abb. 4.8). Man kann also zusammenfassend festhalten: Die Schwelle der Region F [G] in Abbildung 4.7 **(a)**[**(b)**] mit stabilen wTVF [wSPI] verschiebt sich abwärts [aufwärts] mit Zunahme der Wellenzahl k. Hierbei ist es hilfreich das Phasendiagramm in der $k - R_1$ Ebene, das in Abbildung 4.8 dargestellt ist, zu betrachten, um die verschiedenen Regionen $A - E$ besser zu erkennen.

Phasendiagramm

Im Folgenden wird noch die äußere Reynoldszahl als fixiert bei $R_2 = -100$ angenommen. Hierbei bleiben die Schwellen und Regionen verschiedener Stabilität topologisch identisch zu denen in der $R_1 - R_2$ Ebene aus Abbildung 4.5. Die Bifurkationsschwellen laufen alle im γ Punkt bei $k^\gamma = 5.18, R_1^\gamma = 108$ zusammen. Die violette β Kurve repräsentiert gleich große Amplituden der Strukturen, TVF und SPI, in Gebiet E. Diese sind bereits aus den Abbildungen 4.5 und 4.7 bekannt, während diese in Abbildung 4.8 zu einer geraden, vertikalen Linie entartet ist. Somit sind die Modenamplituden von TVF und SPI Zuständen bei diesen Kontrollparametern unabhängig von R_1. Dass dies aber nur zufällig für diese Parameterkombination gilt wird später noch am Beispiel anderer R_2 zu sehen sein.

Die Abbildung 4.9 stellt einen horizontalen Querschnitt des drei dimensionalen $k - R_1 - R_2$ Raums (vgl. Abb. 4.10) bei $R_1 = 115$ dar. Bildlich gesprochen sind die Kurven der Bifurkations- und der Stabilitätsschwellen wie Zwiebelschalen angeordnet. Insbesondere

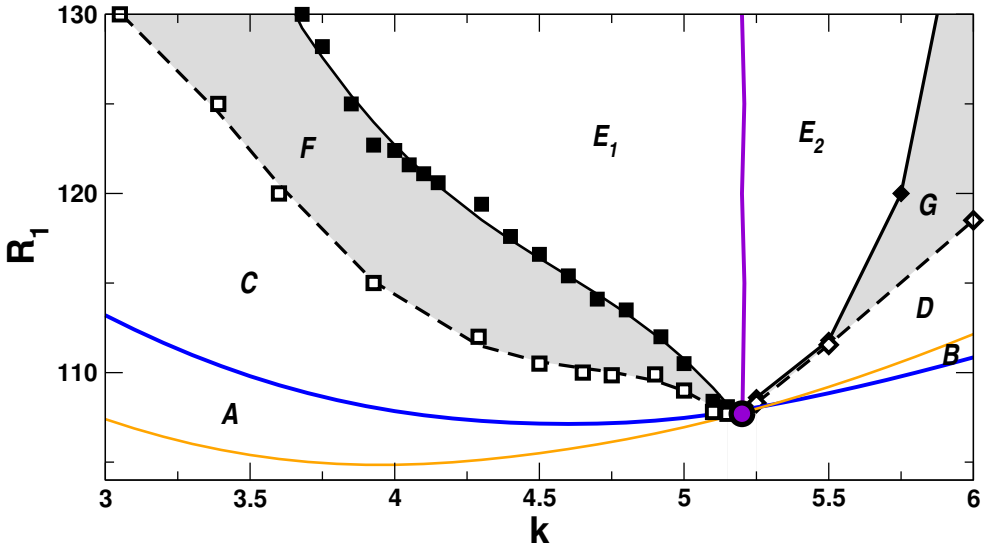


Abbildung 4.8 – Phasendiagramm in der $k - R_1$ Ebene für $R_2 = -100, \eta = 0.5$. Für eine weitere Beschreibung der einzelnen Gebiete siehe Abbildung 4.5.

existieren in der $k - R_2$ Ebene *zwei* γ Punkte, in die alle Kurven hineinlaufen. Diese γ Punkte bewegen sich für kleinere R_1 Werte aufeinander zu. Wie zuvor ist auch die α Kurve (durchgezogene violette Linie) mit aufgenommen. Sie trennt den Bereich E in die beiden Teilgebiete E_1 und E_2, wie im Abschnitt 4.3.2 beschrieben. Diese besitzt ihren Ursprung ebenfalls im γ Punkt. In der Region E_2 in Abbildung 4.9 existieren TVF und SPI Zustände gemeinsam stabil nebeneinander, wobei die dominante Modenamplitude der TVF Lösung größer ist als diejenige der SPI Struktur. Diese Region sollte auch vollständig, entweder von unten durch die schwarze Linie mit gefüllten Rauten, d.h. also den Bifurkationsschwellen zu stabilen wSPI Lösungen in Region G, oder aber von Bifurkationsschwellen zu einer anderen Lösung umschlossen sein. Es gibt Hinweise dafür, dass die beiden schwarzen Linien, welche die Region G begrenzen, in der Tat in dem linken γ Punkt, wie dort schematisch angedeutet, enden. Allerdings war es leider nicht möglich diese beiden Stabilitätsschwellen für die wSPI Lösung in Gebiet G zwischen dem linken γ Punkt bei $k \simeq 2$ und dem Minimum bei $k \simeq 4$ zu verfolgen: Die schraffierte Fläche in der Abbildung 4.9 deutet schematisch an, dass ungefähr in diesem Bereich TVF und SPI Zustände durch Störungen mit größeren Wellenzahlen destabilisiert werden. In den durchgeführten numerischen Simulationen zeigte sich dies meist durch eine Wellenzahlverdopplung bzw. entsprechend eine Halbierung der Wellenlänge, indem die Amplitude der ersten höheren harmonischen Mode die dominante Rolle übernahm. Für eine L-SPI Lösung bedeutet dies z.B., dass nicht mehr die $(1, 1)$ Modenamplitude am größten ist, sondern die Amplitude der $(2, 2)$ Mode,

4.3.4 $k - R_1 - R_2$ Phasendiagramm

Die Abbildung 4.10**(a,b)** stellt eine Zusammenfassung der zuvor gezeigten Bifurkationsdiagramme 4.5, 4.8,4.9 dar. Sie gibt, von zwei verschiedenen Blickwinkeln aus, einen Überblick über die Bifurkationsoberflächen und die Regionen, in denen die verschiedenen Wirbelstrukturen, im 3 dimensionalen Raum, der durch die Parameter k, R_1 und R_2 aufgespannt wird,

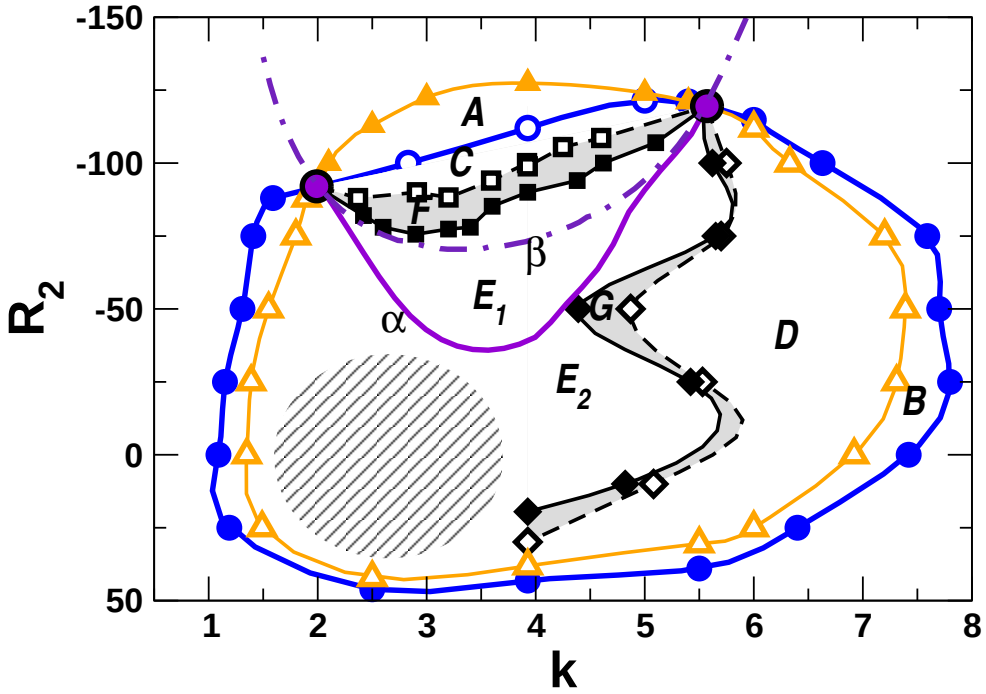


Abbildung 4.9 – Phasendiagramm in der $k-R_2$ Ebene für $R_1 = 115, \eta = 0.5$. Für eine weitere Beschreibung der einzelnen Gebiete und Bifurkationsschwellen siehe Abbildung 4.5. Die durchgezogene, dicke violette Linie repräsentiert die α Kurve, welche die Region in die beiden Teilgebiete E_1 und E_2 unterteilt (siehe auch Abb. 4.5). In dem schraffiert eingezeichneten Bereich destabilisieren Störungen mit größeren Wellenzahlen die Lösungen mit $2\pi/k$ Periodizität. Für weitere Erklärungen, siehe Text.

existieren und auftreten. Um eine bessere Sichtbarkeit zu gewährleisten sind im Gegensatz zu den zuvor gezeigten Bifurkationsdiagrammen einige Achsen invertiert dargestellt. Aus diesem Grund sind die Bifurkationsflächen auch aus zwei verschiedenen Blickwinkeln **(a)** und **(b)** dargestellt. Die graue Fläche bei $k = 3.927$ entspricht der in Abbildung 4.5 gezeigten, die gelbe Fläche bei $R_2 = -100$ ist bereits aus Abbildung 4.8 bekannt und die grüne für $R_1 = 125$ wurde bereits in Abbildung 4.9 gezeigt. Insgesamt gesehen lässt sich dieses $k-R_1-R_2$ Phasendiagramm, mit den unterschiedlichen Gebieten verschiedener Lösungen, am besten mit dem Aufbau einer Zwiebel vergleichen.

Abbildungen 4.10**(c)** zeigt die beiden ineinandergreifenden 'Berge', die sich bei 3 dimensionaler Darstellung der Bifurkationsflächen für $m = 0$ TVF (blau) und $m = 1$ SPI (rot) Lösungen, aus dem CCF ergeben. In dieser Abbildung sind die Oberflächen durch eine lineare Stabilitätsanalyse mittels Shooting Verfahren (siehe Anh. A) erhalten worden. Die weiter außen liegende Fläche gibt die Schwelle für diejenige Wirbel Struktur an, die am Onset stabil bifurkiert. Entsprechend ist die Wirbel Struktur, welche an der inneren Fläche bifurkiert, stets instabil am Onset.

Die schwarze Linie stellt die β Kurve der γ Punkte höherer Codimension dar, die sich beim Schnitt der Flächen der Stabilitätsschwellen von TVF und SPI Lösungen im $k - R_1 - R_2$ Raum ergeben. Der parabolische Verlauf dieser β Kurve mit dem Extremum bei $(k = 3.52, R_2 = -70.8, R_1 = 94.1)$ erklärt, dass für fixierte Werte $R_1 > 94.1$ zwei γ Punkte existieren, während es für $R_1 < 94.1$ überhaupt keinen gibt. Oberhalb des in Abbil-

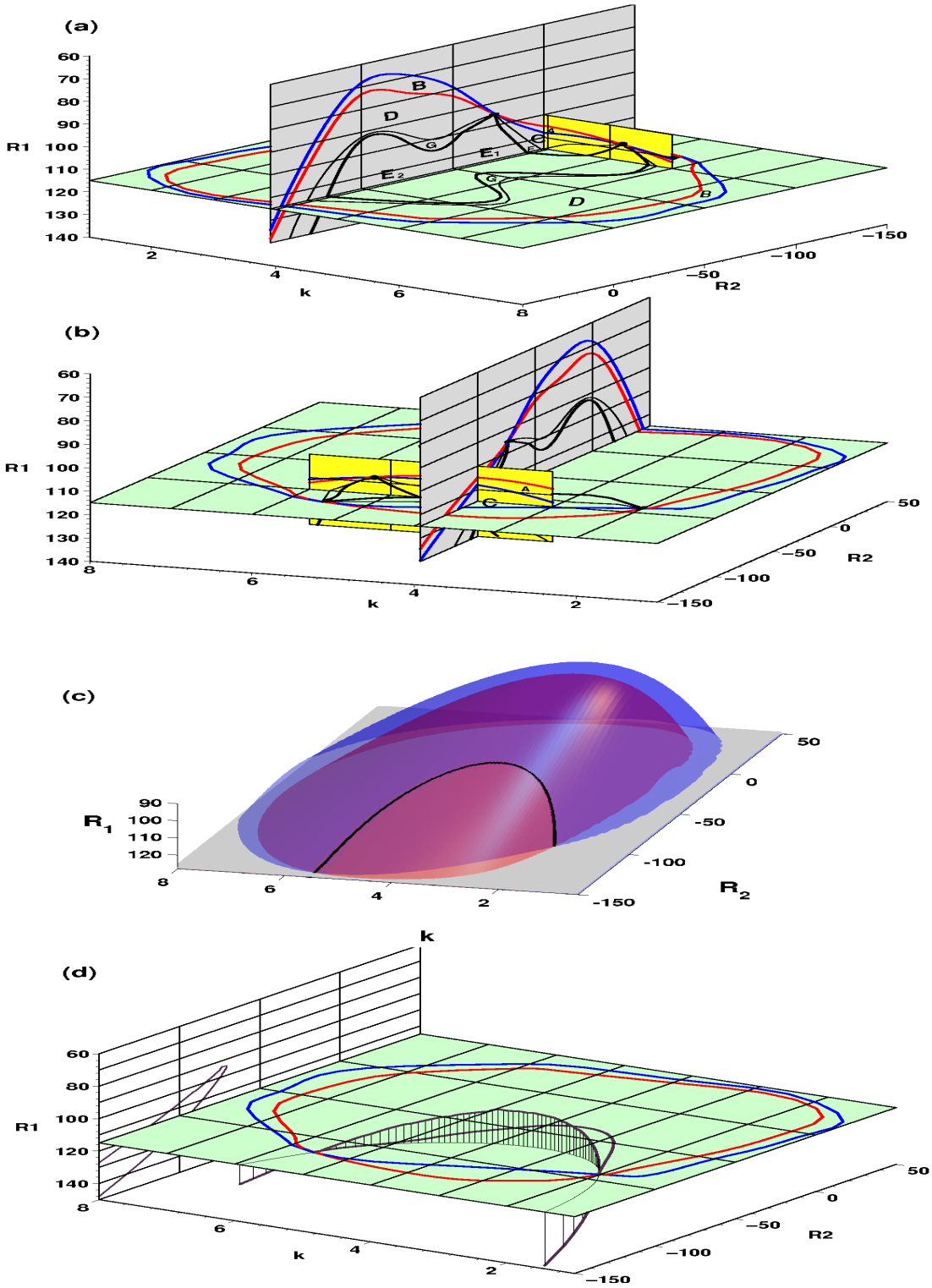


Abbildung 4.10 – **(a,b)** Phasendiagramm im $k - R_1 - R_2$ Raum mit verschiedenen Sektionen aus zwei unterschiedlichen Blickwinkeln. Die verschiedenen Regionen des Phasenraums mit den unterschiedlichen Strukturen sind mit den gleichen Buchstaben wie in der Abbildung 4.5 gekennzeichnet. Die graue Ebene bei $k = 3.927$ entspricht der Abbildung 4.5, die gelbe Ebene für $R_2 = -100$ der Abbildung 4.8, sowie die grüne Ebene für $R_2 = -115$ der Abbildung 4.9. **(c)** Oberfläche der neutralen Stabilität von TVF (blau) und SPI (rot) Lösungen. Die schwarze Linie repräsentiert die Schnittlinie dieser beiden, entsprechend der β Kurve des Punktes höherer Dimension. **(d)** Verlauf der α und β Kurven im $k - R_1 - R_2$ Phasenraum und deren Projektionen auf die verschiedenen Ebenen. Weiterer Kontrollparameter: $\eta = 0.5$.

dung 4.10**(c)** dargestellten Berges liegt die stabile CCF Grundzustandslösung vor, so dass stabile Wirbelstrukturen nur innerhalb dieses Berges erscheinen. Durch die verschiedenen Lösungesgebiete ergibt sich eine Art Zwiebelschalenmodell. Die Umrisse dieser blauen und roten Berge sind in den verschiedenen Bereichen der Abbildungen 4.10**(a)** als rote bzw. blaue Linien eingetragen.

Das Innere der Berge, bzw. die verschiedenen Zwiebelschalen sind mittels der Buchstaben von $A - G$ (vgl. Abb. 4.5) in unterschiedliche Regionen unterteilt, in denen die jeweiligenen Wirbelstrukturen erscheinen. Der äußerste Bereich ist gekennzeichnet durch die Buchstaben A (stabile SPI Zustände) bei kleinen R_2 und B (stabile TVF Strukturen) bei moderaten $|R_2|$. Das Innerste, der Kern des Berges ist gekennzeichnet durch das Gebiet E, in dem TVF und SPI Lösung bistabil vorliegen. Aus Gründen der besseren Sichtbarkeit ist in den Abbildungen 4.10**(a)** und **(b)** die weitere Unterteilung dieses Gebietes in E_1 und E_2 außer Acht gelassen. Für größere R_1, z.B. unterhalb der horizontalen $k - R_2$ Ebene erscheinen weitere Instabilitäten (145) von TVF und SPI Lösungen, die an dieser Stelle aber nicht von Interesse sind und daher auch nicht weiter diskutiert werden.

4.4 Eigenschaften von Wavy Strukturen

Die *reinen* Strukturen, wie TVF und SPI, sind *einfach*, in dem Sinne, dass ihre φ und z Abhängigkeit durch nur einige, wenige repräsentative Fouriermoden dargestellt werden kann. Abgesehen von axial höher harmonischen Moden werden TVF Lösungen durch die $(0, \pm 1)$ Mode charakterisiert. Reine L-SPI [R-SPI] Strukturen werden durch die Mode $(1, 1)$ $[(1, -1)]$ charakterisiert, einschließlich ihrer höher harmonischen und komplex Konjugierten auf der Diagonalen, $m = n$ $[m = -n]$, im Fourierraum.

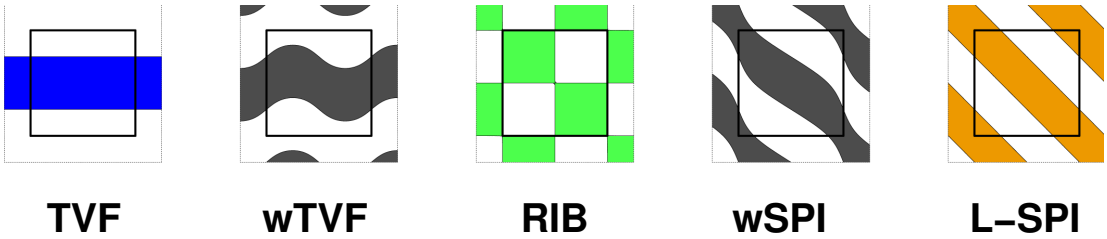
Im Gegensatz zu SPI und TVF Zuständen, bestehen die Wavy Strukturen aus einem Mix dieser verschiedenen Basismoden und deren nichtlinear getriebenen Modenkombinationen (vgl. auch Abs. 4.2).

4.4.1 Klassifikation

Im Wesentlichen kann man zwei grundlegende Wirbelstrukturen aufgrund ihrer Topologie unterscheiden (Turbulente Zustände sind hierbei ausgenommen.). Einerseits Strukturen mit toroidal geschlossenen Wirbeln und andererseits Strukturen mit offener, helikaler Orientierung. Eine schematische Darstellung bezüglich dieser Aufteilung ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Die unterschiedlichen Strukturen werden schematisch durch Linien konstanter Phase, auf einer abgerollten Zylinderoberfläche beschrieben (vgl. Kap. 3). Die farbigen Bereiche grenzen diese Linien konstanter Phase voneinander ab. Die inneren Quadrate beschreiben eine azimutale Periode mit 2π in horizontaler und eine axiale Periode mit $\lambda = 2\pi/k$ in vertikaler Richtung. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Strukturen etwas über die periodischen Ränder hinweg fortgesetzt (äußere Quadrate).

Hierbei ist entscheidend, dass die Linien konstanter Phase von SPI und wSPI Lösungen die horizontale Berandung schneiden, während diejenigen von TVF und wTVF Zustände in azimutaler Richtung in sich geschlossen sind. Allgemein gesprochen heißt dies, in offenen linksgewundenen [rechtsgewundene] Wirbelstrukturen ist die $(1, 1)$ $[(1, -1)]$ Mode signifikant größer als alle anderen Moden, insbesondere $(0, 1)$, $(0, 2)$ und $(1, -1)$ $[(1, 1)]$. Im Fall einer reinen L-SPI Struktur verschwinden die letzten drei Moden in der Tat vollständig (vgl. auch Abb. 3.5**(a)**). Mit zunehmender Beimischung dieser Moden wird der Wavycharakter dieser linksgewundenen Spiral Struktur verstärkt, d.h. Modulationen und Deformationen wachsen an.

Wenn schließlich die Mode $u_{1,-1}$ gleich groß wie die Mode $u_{1,1}$ ist, so liegt als Lösung entweder eine RIB mit $u_{0,1} = 0$ oder ein wTVF Zustand mit $u_{0,1} \neq 0$ vor. Hierbei ist es wichtig, dass die RIB, die als instabile Lösung aus dem CCF, ebenfalls an der $m = 1$ SPI Schwelle herausbifurkiert, durch die Moden $u_{0,1} = 0$ aber $u_{0,2} \neq 0$ charakterisiert ist (aufgrund der nichtlinearen Kopplungen, vgl. Abb. 3.9).



Schematische Struktur verschiedener Wirbel Zustände auf einer in azimutaler Richtung abgerollten Zylinderoberfläche. In den farbig markierten Bereichen kann der radiale Fluss u als auswärts gerichtet und in den weißen Bereichen, entgegen diesem, als einwärts gerichtet, angenommen werden. Die inneren Quadrate stellen 2π in azimutaler und $\lambda = 2\pi/k$ in axialer Richtung dar. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Strukturen periodisch über diesen Ausschnitt hinweg fortgesetzt (äußere Quadrate). Die Plots wurden durch Überlagerung von Einflüssen der verschiedenen Moden $u_{0,1}, u_{1,1}, u_{1,-1}$, sowie ihrer komplex konjugierten dargestellt. Die verschiedene Gewichtung der einzelnen Moden ist in der folgenden Tabelle qualitativ aufgelistet:

	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
TVF	●	–	–
wTVF	●	◐	◐
RIB	–	●	●
wSPI	◐	●	○
L-SPI	–	●	–

Abbildung 4.11 – Die jeweiligen Symbole stehen für große (●), moderate (◐) und kleine (○) Amplituden der zugehörigen Mode (m, n), bzw. deren Abwesenheit (–). Die hier dargestellte wSPI Struktur wird als linksgewundenen angenommen. Im Fall einer entgegengesetzt, rechtsgewundenen, d.h. gespiegelten wSPI Struktur wäre die $(1, -1)$ Mode diejenige mit der größten Amplitude.

wSPI gegenüber Cross Spirals (CSPI)

Die hier diskutierten wSPI Strukturen unterscheiden sich deutlich von den sogenannten Cross Spirals (CSPI) Zuständen mit azimutaler Wellenzahl $m = 2$, die nahe des Onsets gefunden wurden (115). Diese CSPI Strukturen sind im Wesentlichen eine Überlagerung von L- und R-SPI Zuständen mit gleichem $|m|$ aber unterschiedlich großen Amplituden. Sie stellen also einen Spezialfall der noch allgemeineren Mixed Cross Spirals (MCS) Lösungen (siehe Kap. 6) dar. Analog der hier diskutierten wSPI Strukturen, stellen auch die CSPI Lösungen eine Verbindung zwischen SPI und RIB Lösungsästen her, wobei die CSPI

Zustände immer als stabile Lösungen existieren (115; 116). Die Nähe zu der SPI Bifurkationsschwelle bedingt, dass die Amplitude der dominanten SPI Mode sehr stark und die Beimischung der minoranten SPI Mode sehr gering ist. Somit kann der CSPI Zustand im Wesentlichen durch eine (lineare) Überlagerung von zwei $m = 2$ Moden beschrieben werden; die $(2, 1)$ und die $(2, -1)$ Mode mit unterschiedlichen Amplituden. Bislang wurden in der Tat nur 2-CSPI Strukturen, d.h. solche CSPI Lösungen mit $M = 2$ gefunden. Die theoretisch möglichen 1-CSP konnten bisher noch nicht beobachtet werden.

wTVF bei großen R_1

Für moderate R_2 existiert ein weiteres Gebiet in dem stabile wTVF Lösungen zu finden sind, allerdings liegt dieses bei größeren Rotationsgeschwindigkeiten des inneren Zylinders, oberhalb von $R_1 = 130$, also außerhalb des hier untersuchten Parameterbereiches. Diese Strukturen wurden bereits in verschiedenen früheren Arbeiten (7; 71; 72; 73) diskutiert. In diesen wurden sie aber gewöhnlich als Wavy Vortex Flow (WVF) (vgl. Kap. 3, Abb. 3.12) bezeichnet. Ausgehend von topologischen, wie auch von bifurkationstheoretischen Gesichtspunkten verhalten sich diese WVF Zustände analog der hier untersuchten wTVF Strukturen. Beide bifurkieren sekundär vorwärts aus dem TVF Zustand heraus. Anders als die wTVF Strukturen enden die WVF Strukturen aber nicht in einem RIB Zustand, sondern in anderen wavyartigen Strukturen, die starken wavyartigen Inflow oder Outflow beinhalten, auf dem gleichen TVF Ast (71; 73), oder sogar in chaotischen Zuständen.

4.4.2 Strukturen: wTVF und wSPI

Nun sollen die strukturellen Eigenschaften von wTVF Zuständen im Gebiet F, bzw. wSPI Lösungen in Gebiet G des Phasendiagramms (Abb. 4.5), weiter untersucht werden. Hierzu sind in Abbildung 4.12 die numerischen Resultate für zwei typische Vertreter, **(a)** $R_1 = -120$, $R_2 = -100$ für eine wTVF Struktur und **(b)** $R_1 = 96$, $R_2 = -25$ für einen wSPI Zustand (für $k = 3.927, \eta = 0.5$) dargestellt. Die oberste Reihe zeigt Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$. Nachdem zahlreiche Alternativen (26) getestet wurden erschien die azimutale Vortizität als ein adäquates Maß, sowohl die Form, wie auch Bewegungen und Veränderungen der hier diskutierten Strukturen darzustellen. Diese vermittelt den besten Gesamteindruck der verschiedenen Strukturen (vgl. auch Anh. C).

Für die Parameter der Abbildung 4.12 sind die wTVF Strukturen sichtlich stärker deformiert als die wSPI Zustände. Dies ist auch deutlich daran zu erkennen, dass in der Darstellung der Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ (bei $r = 0.5$) in der Mitte der Abbildung 4.12 beim wTVF Zustand **(a)** deutlich mehr Moden angeregt sind, als bei der wSPI Lösung **(b)**. Neben diesen gibt es aber noch andere Parameterbereiche, in denen wSPI Zustände, mit den gleichen angeregten Moden existieren, aber mit signifikant größeren Modenanteilen.

Der untere Teil der Abbildung 4.12 stellt Vektorplots der Geschwindigkeitsfelder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in der $r - z$ Ebene bei konstantem φ dar.

Strukturelle Zerlegung

In diesem Abschnitt werden die geometrischen Eigenschaften der Wavy Strukturen weiter untersucht, indem die zugrunde liegenden hydrodynamischen Felder in zwei Teile zerlegt werden. Zum einen in einen Teil, der nur Anteile des Modenunterraums der zugehörigen *reinen* Struktur enthält, d.h. $m = 0$ für TVF Lösungen und $m = 1$ [$m = -1$] für L-SPI [R-SPI] Lösungen. Zum anderen in einen restlichen zweiten Teil, der durch alle, zu erst

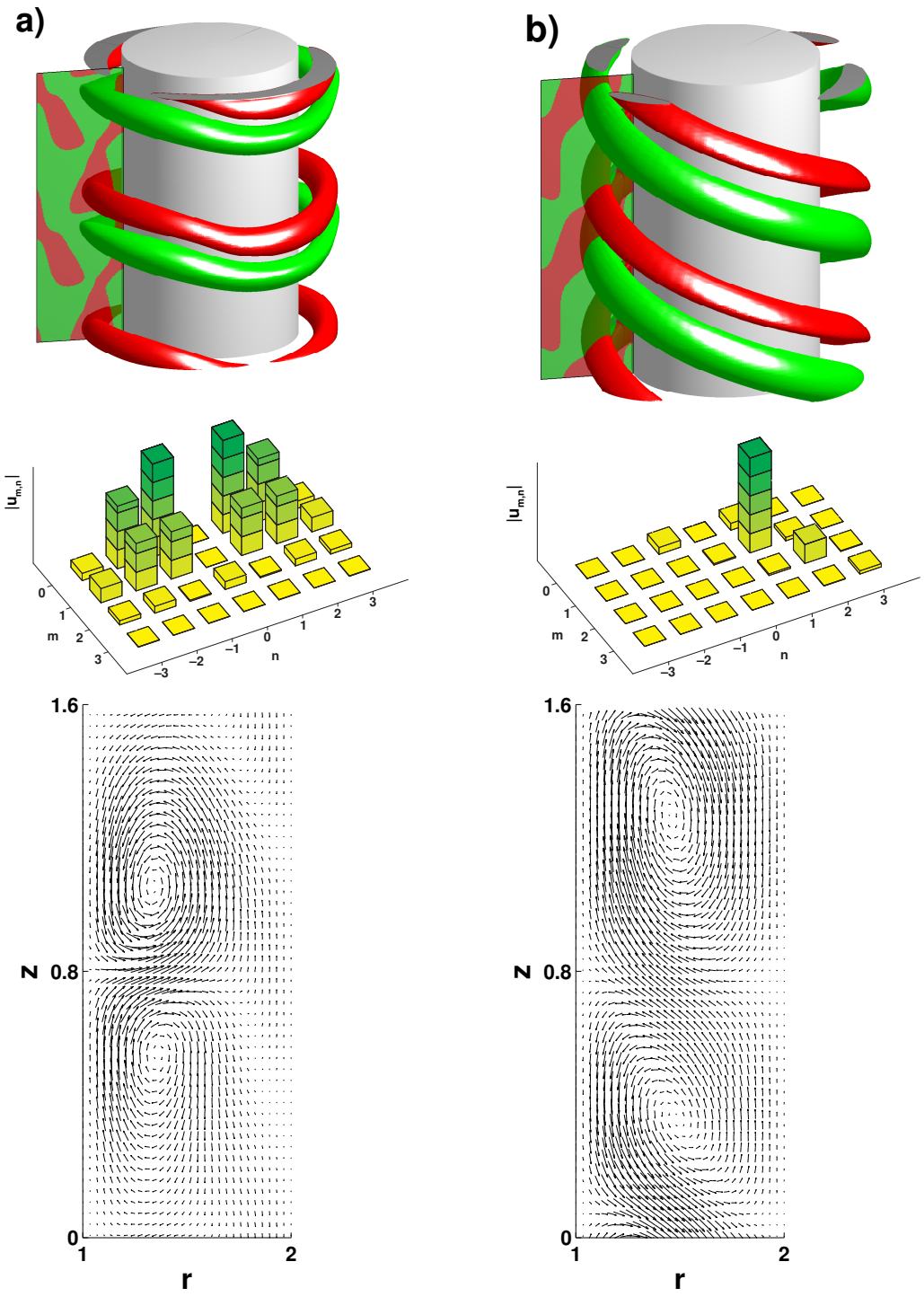


Abbildung 4.12 – Strukturen der **(a)** wTVF Lösung bei $R_1 = 120$, $R_2 = -100$ und der **(b)** linksgewundenen wSPI Lösung bei $R_1 = 96$, $R_2 = -25$. Weitere Kontrollparameter: $k = 3.927, \eta = 0.5$. *Oben*: Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = 70$ (rot) und -70 (grün). Zur besseren Sichtbarkeit sind in axialer und azimutaler Richtung jeweils zwei Perioden dargestellt. Die 2D rechteckige Fläche, die die Isoflächen auf der linken Seite schneidet, stellt die Verteilung der azimutalen Vortizität in der $r-z$ Ebene dar (rot>0, grün<0). *Mitte*: Amplitudenverteilung der Moden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes über der $m-n$ Ebene. *Unten*: Vektorplots der beiden Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in einer $\varphi =$ konst. Ebene. Dargestellt ist jeweils eine axiale Wellenlänge.

genannten Unterräumen komplementären Moden, erzeugt wird. D.h. $m \neq 0$ für wTVF Lösungen und $m \neq n$ $[m \neq -n]$ für L-wSPI [R-wSPI] Lösungen.

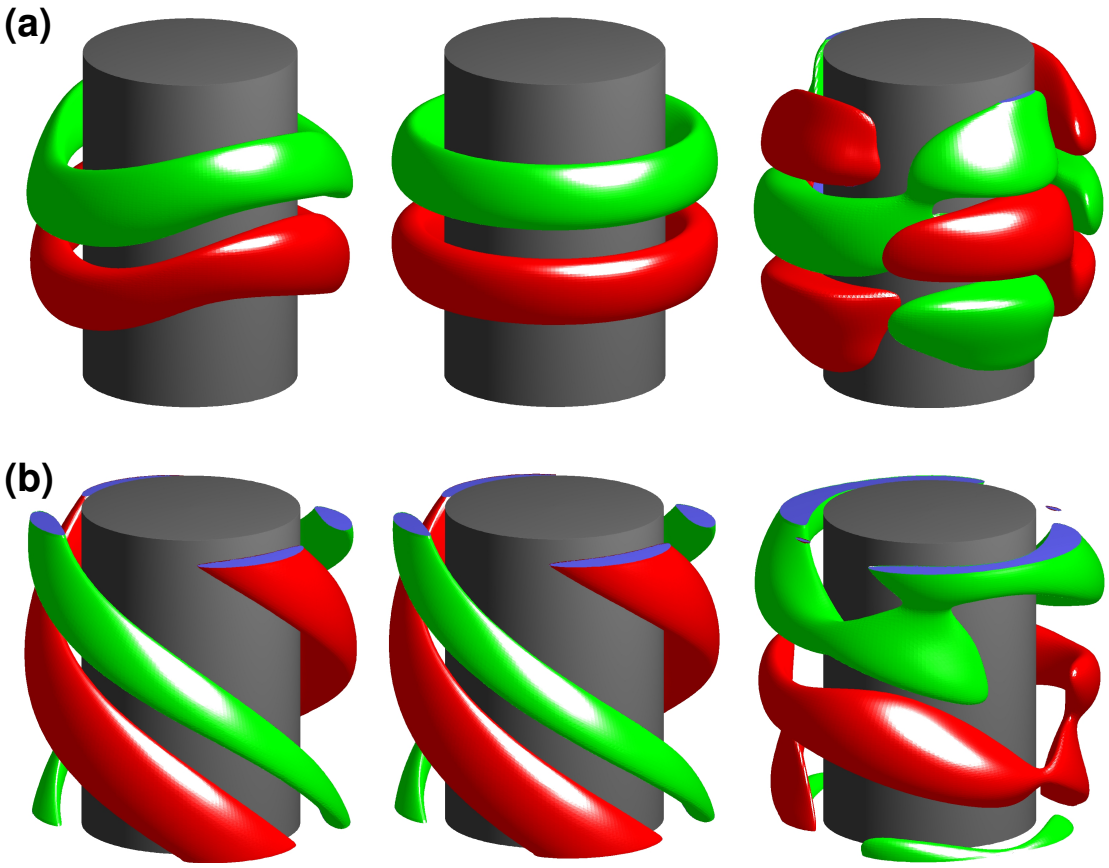


Abbildung 4.13 – Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ eines **(a)** wTVF Zustands bei $R_1 = 120$, $R_2 = -100$, $k = 3.927$ und **(b)** einer linksgewundenen wSPI Lösung bei $R_1 = 115$, $R_2 = -50$, $k = 4.8$. Die erste Spalte zeigt die vollständige Struktur. Die zweite Spalte gibt den Anteil in der Struktur wieder, der für **(a)** aus dem $m = 0$ TVF Modenunterraum, bzw. für **(b)** dem $m = n$ SPI Modenunterraum herrührt. Die dritte Spalte gibt den komplementären Rest zur zweiten Spalte an. Hier also $m \neq 0$ **(a)** und $m \neq n$ **(b)**. Rot [grün] bedeutet positive [negative] Vortizität. Aus Gründen der besseren Sichtbarkeit sind in azimutaler Richtung zwei Perioden dargestellt. Die folgende Tabelle enthält die Werte, der jeweils dargestellten Isoflächen, sowie die zugehörende maximale Vortizität (dargestellter Isowert/maximale Vortizität).

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
(a)	60/220	60/175	15/155
(b)	90/210	90/200	6.5/25

In Abbildung 4.13 sind diese Anteile der Strukturen am gesamten Vortizitätsfeld, mit Hilfe von Isoflächen der azimutalen Vortizität bestimmter Werte dargestellt. Die genauen

Werte hierzu, sowie die maximale azimutale Vortizität der Strukturen sind in der Tabelle in der Bildunterschrift zu finden. Vergleicht man diese Werte, so erkennt man, dass der Anteil des Unterraums der *reinen* Struktur, für die hier gewählten Parameter deutlich dominiert. Insbesondere kann man ablesen, dass der Anteil des komplementären Modenunterraums der wSPI Lösung in Abbildung 4.13**(b)** sehr klein ist.

Im Allgemeinen können aber sowohl wTVF, wie auch wSPI Lösungen ein deutlich breiteres Modenspektrum aufweisen. Wie dieses im Einzelnen aussieht, ist aber sehr stark von den zugehörigen Kontrollparametern abhängig. Für solche Fälle ist auch zu erwarten, dass das hier benutzte einfache Dreimodenmodell (vgl. Abs. 4.2) nicht mehr ausreicht um die verschiedenen Bifurkationsäste zu beschreiben.

Es ist aber wichtig nochmals deutlich zu betonen, dass die Abbildung 4.13, aufgrund unterschiedlicher Isowerte, nur einen qualitativen Eindruck der Deformationen in den Isoflächen der Vortizitäten als Anteile des $m \neq 0$ und $m \neq n$ Modenunterraums geben kann.

4.4.3 Frequenzen

Abbildung 4.14 zeigt die Frequenzen $\omega_{m,n}$ verschiedener Wirbelstrukturen, mit denen die komplexen Modenamplituden $|u_{m,n}(r,t)|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes (vgl. Abb. 4.3) in Spaltmitte oszillieren.

SPI und RIB:

Reine SPI und RIB Strukturen wachsen in einer primären Hopf Bifurkation mit einer gemeinsamen Frequenz aus dem CCF heraus. Mit zunehmend anwachsenden R_1 wachsen im Allgemeinen auch die SPI Frequenzen kontinuierlich an (wie in Abb. 4.14**(b)**), zumindest solange $|R_2|$ klein genug ist (63). Andererseits können die SPI Frequenzen in der Nähe des Onsets aber auch mit Zunahme von R_1 zunächst *abfallen*, wie im Fall stärker gegenrotierender Systeme (wie in Abb. 4.14**(a)** – oder aber auch in Abbildung 3 in (63)). Dieses Verhalten basiert auf nichtlinearen Effekten, da die linearen Frequenzen, der Imaginäranteil der SPI Eigenwerte (dünne Linien in Abb. 4.14) der, um den CCF linearisierten NSE, für beliebiges R_2 mit zunehmendem R_1 anwachsen.

Diesbezüglich ist bemerkenswert, dass die Frequenzen der instabilen RIB Lösungen (grün gestrichelte Linie mit Rauten in Abb. 4.14) das gleiche Anwachsverhalten wie die linearen Frequenzen zeigen.

Wavy Taylor Wirbel (wTVF):

Im grauen Bereich F der Abbildung 4.14**(a)** sind die Frequenzen $\omega_{m,n}$ der wTVF Lösung entsprechend der in Abbildung 4.3**(a)** dargestellten Modenamplituden zu sehen. Da es sich bei den wTVF Zuständen um zeitlich periodisch rotierende Lösungen handelt, die in axialer Richtung *nicht* wandern, verschwinden die Frequenzen der zugehörigen Moden $\omega_{0,1} = 0$, oder sind Vielfache von $\omega_{1,1} = \omega_{1,-1}$. Somit ergibt sich beispielsweise $\omega_{2,0} = 2\omega_{1,1}$ (siehe Tab. 6.1). Hieraus resultiert, dass die Dynamik der wTVF Struktur im Grunde ziemlich einfach zu beschreiben ist, während des raumzeitliche Verhalten sehr komplex ist. Dies gilt zumindest wenn es in dem weiten Modenspektrum wie in Abbildung 4.12**(a)** untersucht wird.

Auf den ersten Blick erscheint es bemerkenswert, dass die Frequenzen $\omega_{1,1}$ der, am rechten Rand des grauen Bereiches F bifurkierenden wTVF Lösung (schwarze Kurve mit Quadraten), identisch sind mit denjenigen, der voll entwickelten nichtlinearen SPI (orange Linie mit Dreiecken) Struktur. Dies stellt aber kein allgemeines Verhalten dar und ist nur auf die hier verwendeten Parameter zurückzuführen und somit Zufall. Für andere Parameter besitzen die wTVF Zustände am Onset Frequenzen, die *nichts* mit denen der reinen SPI

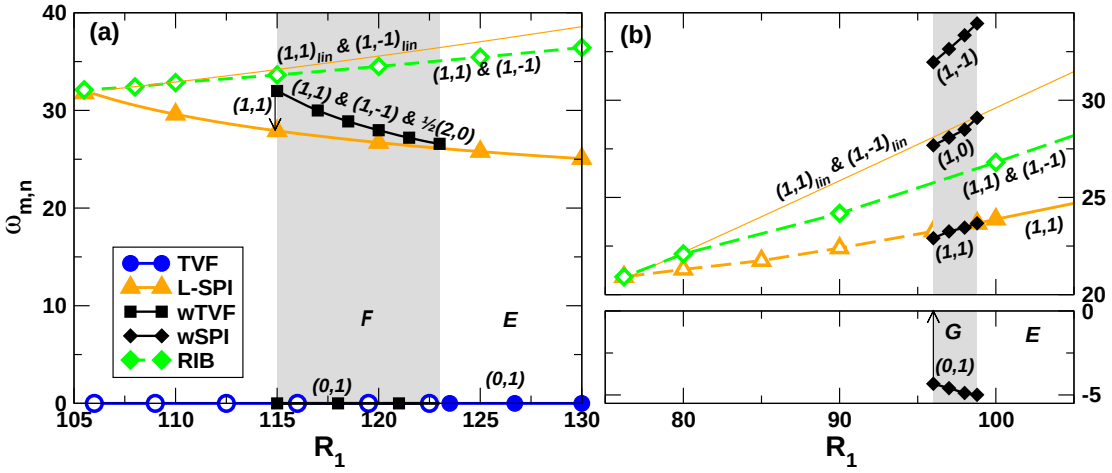


Abbildung 4.14 – Bifurkationsdiagramme der verschiedenen Frequenzen $\omega_{m,n}$ mit denen die Amplituden der komplexen Moden $|u_{m,n}(r,t)|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in der Mitte des Spaltes ($r = 0.5$) oszillieren. Kontrollparameter der Wirbelstrukturen: $k = 3.927, \eta = 0.5$ bei $R_2 = -100$ **(a)** und $R_2 = -25$ **(b)**. Zugehörige Bifurkationsdiagramme der Moden $|u_{m,n}(r,t)|$ sind bereits in Abbildung 4.3 dargestellt. Durchgehende [gestrichelte] Linien mit vollen [leeren] Symbolen gehören zu stabilen [instabilen] Lösungen. Zum Vergleich sind auch noch die linearen Spiralfrequenzen (dünne Linien), d.h. der imaginär Anteil des SPI Eigenwertes der um den CCF linearisierten NSE, mit in die Abbildung aufgenommen.

Struktur zu tun haben. Dies wird später insbesondere im Kapitel 5, bei Betrachtung endlicher Randbedingungen, verdeutlicht. Dies stimmt auch mit linearen Untersuchungen von Iooss et al. (71) überein, die ebenfalls keine Korrelation von wTVF und SPI Frequenzen in der Nähe des wTVF Onsets gefunden haben.

Ein allgemeines Verhalten, was aber bei allen Parameterkombinationen aufzufinden ist, ist die Tatsache, dass mit abnehmendem R_1 die Frequenzen $\omega_{1,1}$ der wTVF Lösung kontinuierlich gegen die RIB Frequenzen anwachsen. Am linken Rand des grauen Existenzbereiches F der wTVF Lösung vollziehen die Frequenzen der $(1,1)$ Mode einen Sprung auf die der reinen SPI Frequenz (siehe auch Abb. 4.3**(a)**). Der sich schließlich einstellende Endzustand ist entweder der einer L-SPI oder R-SPI Lösung, abhängig von der Systemgeschichte, bzw. den rauschinduzierten Störungen.

Wavy Spiral Wirbel (wSPI):

Die Frequenzen der wSPI Lösung, der dominanten Modenanteile der linksgewundenen wSPI Struktur, sind in der Abbildung 4.14**(b)** (schwarze Kurven mit Rauten) dargestellt. Die genauen Anteile der Amplituden einzelner Moden im Fourierraum für Parameter $R_1 = 96, R_2 = -25$ können der Bildunterschrift der Abbildung 4.12 entnommen werden. Diese Parameter liegen an der linken Schwelle der Region G in den Abbildungen 4.3**(b)** und 4.5. Dort ist die $(1,1)$ Mode die dominante mit einer Frequenz $\omega_{1,1} \simeq 23$, gefolgt von der höher harmonischen in der $(2,2)$ Mode. Die nächste, für Struktur und Dynamik, entscheidende Mode ist die $(0,1)$, die eine Frequenz $\omega_{0,1} \simeq -4.3$ besitzt. Resultierend aus diesen verschiedenen Frequenzen mit ihren signifikanten Moden ergeben sich die wSPI als quasiperiodische Strukturen. Entscheidend dabei ist, dass die Frequenz $\omega_{0,1}$ in der wSPI Lösung *nicht nichtlinear* angeregt wird.

R_1	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,-1}$	$\omega_{0,1}$	$\omega_{2,0}/2$	$\frac{\omega_-}{\omega_{0,1}}$	$\frac{\omega_+}{\omega_{2,0}}$
(a)						
115	31.98	31.98	0.0	31.98	1.0	1.0
117	29.99	29.99	0.0	29.99	1.0	1.0
119	28.54	28.54	0.0	28.54	1.0	1.0
121	27.43	27.43	0.0	27.43	1.0	1.0
123	26.57	26.57	0.0	26.57	1.0	1.0
(b)						
96.0	22.90	31.95	-4.331	27.68	1.044	0.991
97.0	23.25	32.63	-4.594	28.08	1.020	0.995
98.0	23.44	33.34	-4.880	28.49	1.014	0.996
98.8	23.67	33.94	-4.994	29.09	1.028	0.990

Tabelle 4.1 – Grundlegende Frequenzen für eine **(a)** wTVF Lösungen bei $R_2 = -100$ und eine **(b)** wSPI Lösung bei $R_2 = -25$ (vgl. Abb. 4.14). Weitere Kontrollparameter: $k = 3.927, \eta = 0.5$. Abkürzungen: $\omega_- \equiv \frac{1}{2}(\omega_{1,1} - \omega_{1,-1}), \omega_+ \equiv \frac{1}{2}(\omega_{1,1} + \omega_{1,-1})$

Das raumzeitliche Verhalten solch einer linksgewundenen wSPI Lösung kann als Überlagerung einer dominant, größeren, azimutal rotierenden und in axialer Richtung aufwärts wandernden Welle $\sim |u_{1,1}| \cos(\varphi + kz - \omega_{1,1}t)$ mit einer axial abwärts wandernden, rotationssymmetrischen Modulation $\sim |u_{0,1}| \cos(kz - \omega_{0,1}t)$ (c.f. (117)) angesehen werden. Allerdings können für andere Parameterkombinationen auch die Anteile anderer Moden, wie z.B. die der $(1,1)$ Mode, signifikant anwachsen und demzufolge entscheidend werden. Immer gleichbleibend ist aber die Tatsache, dass mit Verminderung von R_1 auch immer alle wSPI Frequenzen kleiner werden.

Wie in Abbildungen 4.3**(b)** bereits gezeigt, erscheint am linken Rand des grauen Bereiches G eine transiente Struktur, die schließlich im TVF Zustand endet. Dies hat zur Folge, dass die Frequenz $\omega_{0,1}$ dort auf Null abfällt und verschwindet (vgl. vertikale Pfeile in der Abb. 4.14**(b)**, die das Verschwinden der zugehörigen Moden symbolisieren).

4.5 Raumzeitliches Verhalten von Transienten

Nun soll das raumzeitliche Verhalten der auftretenden transienten Strukturen beim Übergang der instabilen SPI zur stabilen TVF Lösung, sowie der umgekehrte Fall, von instabilen TVF zu stabilen SPI Lösung diskutiert werden. Hierzu werden zunächst, durch Auferlegung von Zwangsbedingungen und Einschränken des Modenraums (siehe Anh. D), instabile Anfangszustände, TVF und SPI, erzeugt. Instabile SPI Lösungen werden als Anfangszustände in Gebiet D der Phasendiagramme der Abbildungen 4.5, 4.8, 4.9 und 4.10**(a,b)** präpariert, indem sie zusammen mit den monostabilen TVF Zustand coexistieren. Ebenso existieren in Gebiet C instabile TVF und stabile SPI Strukturen nebeneinander.

Präparation instabiler Zustände:

Die Präparation der instabilen TVF und SPI Zustände erfolgt auf zwei verschiedene Arten.

(i) Einerseits durch offensichtliches Auferlegung von Restriktionen, d.h. Einschränkung auf die jeweiligen Unterräume: $m = 0$ für TVF und $m = n$ $[m = -n]$ für eine L-SPI [R-SPI] Lösung (vgl. Anh. D). Nachdem sich, nach genügend langer Relaxationszeit, die jeweiligen gewünschten Strukturen eingestellt haben, wird die Einschränkung aufgehoben und der gesamte Fourierraum als Lösungsraum zur Verfügung gestellt[4].

(ii) Andererseits wird verständlicher Weise Random Noise als Anfangszustand angenommen. Für gewisse Parameter Kombinationen nimmt das System dann zunächst die eigentlich 'falsche', da instabile, Lösung an, bevor sich ein Übergang zu der 'richtigen', einzigen stabilen Lösung vollzieht.

In beiden Szenarien vermitteln Wavy Strukturen den Übergang hin zur finalen Lösung, so dass sich die beiden Übergange TVF→wTVF→SPI und SPI→wSPI→TVF ergeben.

Zeitliche Entwicklung der Moden:

In den Abbildungen 4.15**(c)** und **(d)** ist die zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ für das Präparationsszenario **(i)** während des Übergangs SPI→wSPI→TVF für zwei verschiedene Parameterkombinationen in Gebiet D dargestellt. In beiden Fällen wird das System nur durch Computer Noise, d.h. rauschinduzierte Störungen, von der instabilen SPI Lösung hin zur stabilen TVF Lösung getrieben. Entscheidend für die Verweildauer in der eigentlich instabilen Lösung ist hierbei die Nähe zum Bereich E, in dem beide Strukturen, TVF und SPI, bistabil existieren. Die Parameter $(R_1 = 90, R_2 = -25)$ der Abbildung 4.15**(d)** liegen hierbei sehr nahe an Gebiet E, während die Parameter $(R_1 = 85, R_2 = -25)$ der Abbildung 4.15**(c)** weiter von diesem entfernt sind. In diesem Fall 'überlebt' die instabile SPI Struktur in Abbildung 4.15**(d)** länger, als die in Abbildung 4.15**(c)**. Beiden Fällen ist aber gemein, dass während eines Zeitintervalls von etwa einer radialen Diffusionszeit, wSPI Zustände als kurzlebige transiente Übergangsstruktur erscheinen.

Die Abbildungen 4.15**(a)** und **(b)** zeigen die zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ nach dem Präparationsszenario **(ii)**. D.h. die Simulationen wurden mit Random Noise in allen Moden gestartet. Die Kontrollparameter liegen in Abbildungen 4.15**(a)** in Gebiet C $(R_1 = 115, R_2 = -100)$ und in **(b)** in Gebiet D $(R_1 = 92.2, R_2 = 0)$. Wenn die Amplituden des numerischen Rauschens Werte von 10^{-6} übersteigen, generiert der Code, für diese Parameterkombinationen, zunächst die eigentlich instabile Lösung bevor schließlich ein Übergang zu der endgültig stabilen Struktur erfolgt, ähnlich der Situation in den Abbildungen 4.15**(c)** und **(d)**. Für kleinere Rauschamplituden generiert der Code 'unmittelbar' den *stabilen* Wirbel Zustand, d.h. TVF Zustände in Region D und SPI Strukturen in Region C, wie es anhand der linearen Wachstumsparameter zu erwarten ist. Es scheint so, dass für diese Parameter, größere Rauschamplituden $(\geqslant 10^{-6})$ das System schneller in eine nichtlineare, zwischenliegende Ordnung bringen, die den instabilen Zustand bevorzugt, bevor schließlich der finale Zustand gewinnt. Auf jeden Fall ist es ziemlich bemerkenswert, dass z.B. in Abbildungen 4.15**(b)** bei $R_2 = 0$ zunächst eine SPI Lösung und dann eine wSPI Lösung anwächst, bevor diese letztendlich in die TVF Lösung übergeht.

Strukturelle Änderungen:

[4]Hierbei müssen kleine, durch Computer Noise induzierte, Störungen 10^{-8} auf die Moden aufaddiert werden, da sonst die Moden, die zuvor identisch Null gesetzt wurden, auch immer identisch Null bleiben würden.

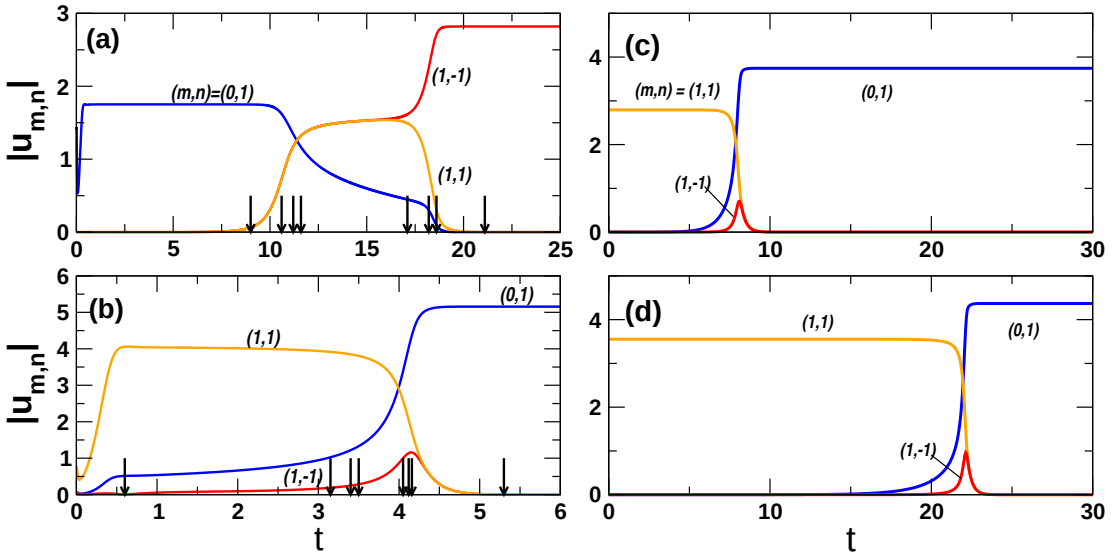


Abbildung 4.15 – Zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ während des Übergangs von TVF→wTVF→SPI **(a)** und SPI→wSPI→TVF **(b)-(d)**. Kontrollparameter sind: **(b)** $R_1 = 92.2, R_2 = 0$, **(c)** $R_1 = 85, R_2 = -25$, und **(d)** $R_1 = 90, R_2 = -25$ liegen in Gebiet D der Abbildungen 4.5, 4.8, 4.9, 4.10 innerhalb dessen SPI Lösungen instabil und TVF Lösungen monostabil vorliegen. Die Parameter in **(a)** $R_1 = 115, R_2 = -100$ liegen in Gebiet C, mit instabilen TVF Strukturen und monostabilen SPI Strukturen. In beiden Fällen gilt weiterhin $k = 3.927, \eta = 0.5$. Während in **(a)** und **(b)** 'Random Noise' als Startzustand der numerischen Rechnungen angenommen wurde – Szenario **(ii)**, wurden in **(c)** und **(d)** die L-SPI Zustände durch Modenbeschränkungen stabilisiert und als Anfangszustand genutzt – Szenario **(i)**. Weitere Details zu diesem Vorgehen werden im Text beschrieben. Die Pfeile in **(a)** und **(b)** kennzeichnen Snapshot zu verschiedenen Zeiten, die in Abbildung 4.16 dargestellt sind und später noch genauer diskutiert werden.

Die Pfeile in Abbildungen 4.15**(a)** und **(b)** markieren acht Zeiten, für die in der Abbildungen 4.16 acht Snapshots mit Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ zu sehen sind. Diese geben einen angemessen guten Eindruck der Struktur der Wirbel. Die beiden Snapshot Serien zeigen jeweils die strukturellen Änderungen während der Übergänge TVF → wTVF → SPI in Abbildungen 4.16**(a)** und SPI → wSPI → TVF in **(b)**. Um die vollständige Veränderung der Strukturen in azimutaler Richtung, in einem einzigen Plot darzustellen, wurden hier 4π Zylinder verwendet. Axial sind entsprechend zwei Wellenlängen dargestellt.

Startet man mit Random Noise, so bildet das System beinahe unmittelbar einen reinen TVF Zustand (Abb. 4.16**(a1)**), auf der Zeitskala der Abbildung 4.15**(a)**, aus. Hierbei ist zu erwähnen, dass dies auch gilt, wenn das Anfangsrauschen in den Anteilen der TVF Moden schwächer ist, als in allen übrigen Moden des gesamten Fourierraums. Mit zunehmend anwachsenden Amplituden der $m \neq 0$ Moden wird die, zuvor rotationssymmetrische Struktur mehr und mehr deformiert. Entscheidend hierbei ist aber, dass die Isovortizitätsflächen, die 'Wirbelschläuche', zunächst noch toroidal geschlossen bleiben wie in Abbildungen 4.16**(a2)**-**(a3)** zu sehen. Diese Schläuche, die durch die Isoflächen geformt werden, schnüren sich an diskreten φ Positionen zusammen. Dies bedeutet, dass die maximale Vortizität in der $r - z$ Ebene an dieser φ Position mit der Zeit abnimmt – die Wirbelstärke

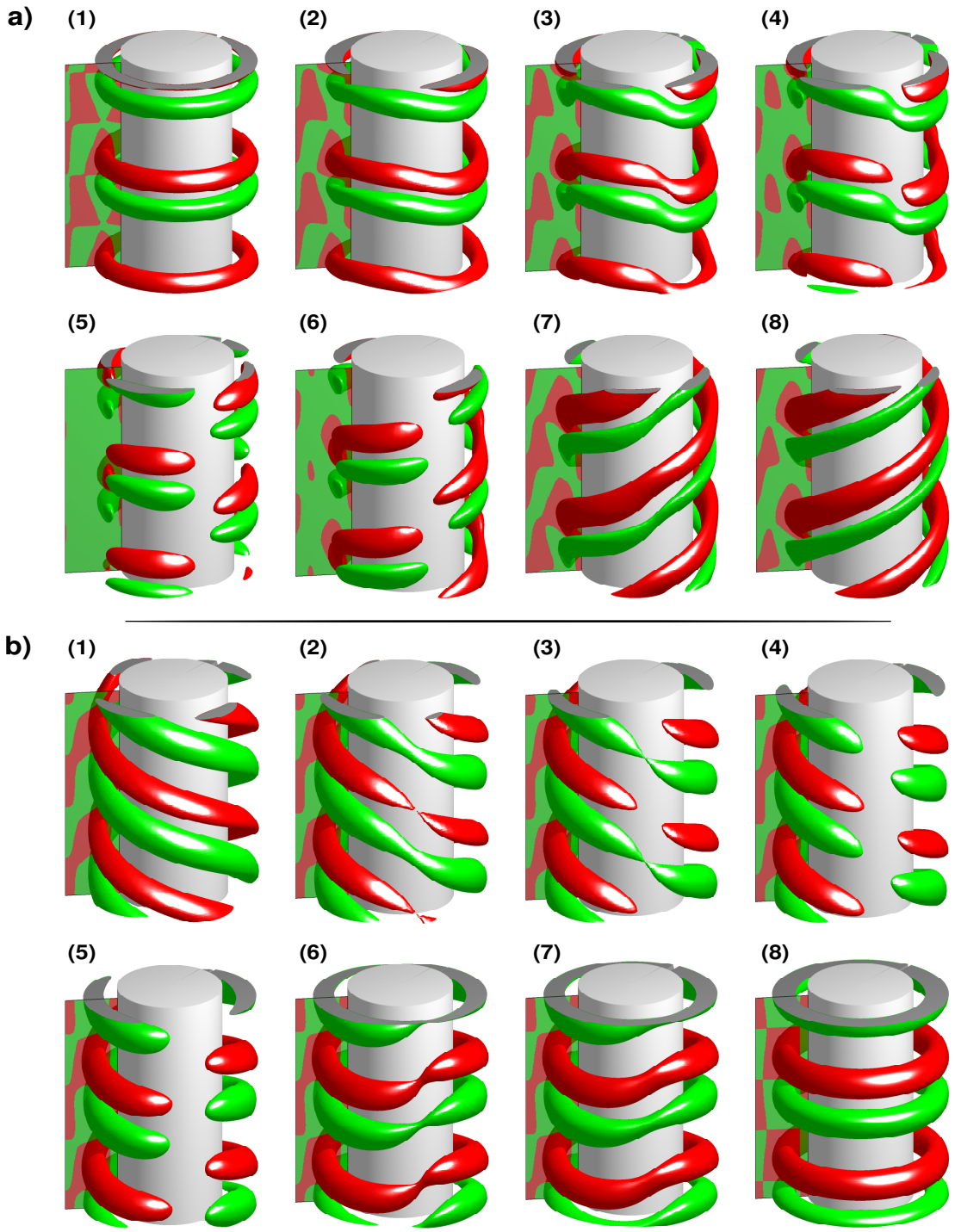


Abbildung 4.16 – Snapshots der Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 60$ zu acht verschiedenen Zeitpunkten (in Abb. 4.15 durch Pfeile markiert) der beiden Übergänge: **(a)** TVF→wTVF→SPI der Abbildung 4.15**(a)** und **(b)** SPI→wSPI→TVF der Abbildung 4.15**(b)**. Wie zuvor steht rot [grün] für positive [negative] Vortizität. Kontrollparameter sind **(a)** $R_1 = 115, R_2 = -100$ und **(b)** $R_1 = 92.2, R_2 = 0$ wobei in beiden Fällen $k = 3.927, \eta = 0.5$ gilt, analog deren aus Abbildung 4.15**(a)** und **(b)**. Um die gesamte Struktur in einem 3 dimensionalen Plot darstellen zu können wurden 4π Zylinder verwendet. Weitere Details sind in den beiden Videos 1.avi (67) und 2.avi (68) zu erkennen.

wird an dieser Stelle schwächer. Diese Einschnürungen der Wirbel, wie auch die Defekte, rotieren mit der gesamten Struktur in azimutaler Richtung. Diese Rotation ist in der Abbildungen 4.16 durch die stroboskopische Aufnahme der ausgewählten Bilder unterdrückt und somit nicht zu erkennen (siehe auch die beiden Videos 1.avi (67) und 2.avi (68)).

Schließlich sind die Isoflächen vollständig eingeschnürt und abgetrennt (Abb. 4.16**(a4)**-**(a5)**). Nach Ablösung der Enden der Schläuche in **(a6)** werden neue Verbindungen in **(a7)** aufgebaut und die Vortizität wächst wieder an, bis sich als Endzustand eine R-SPI Lösung, wie in **(a8)** zu sehen, ergibt.

In Abbildung 4.16**(b)** ist der transiente Übergang in umgekehrter Richtung von SPI → wSPI → TVF für die Parameterkombination der Abbildung 4.15**(b)** in Gebiet D dargestellt. Die zugehörigen Zeitpunkte zu denen die Snapshots aufgenommen wurden sind, wie zuvor durch Pfeile, in Abbildung 4.15**(b)** markiert. Wie im vorherigen Fall wird auch hier mit Random Noise in allen Moden gestartet. Hierbei wächst zunächst eine instabile L-SPI Struktur (Abb. 4.16**(b1)**) an, die dann durch eine anwachsende $m = 0$ Mode **(b2)** gestört wird. Wie im zuvor beschriebenen Fall werden die beiden Wirbelschläuche in φ Richtung eingeengt und abgeschnürt, allerdings hier nur an einer φ Position, bis sie sich schließlich voneinander trennen und danach gegeneinander verschieben **(b3)**-**(b5)**. Als nächstes verbinden sich die Isoflächen erneut um geschlossene Wirbelschläuche zu formen **(b6)**-**(b7)** und letztendlich in einem reinen TVF Zustand wie in **(b8)** zu enden.

Somit kann man Alles in Allem zusammenfassen, dass die paarweisen Wirbeltrennungen und Wiederverbindungen durch Erzeugung eines rotierenden Defekts an den Positionen minimaler Vortizität vollzogen wird. Beim Übergang von TVF zu SPI Lösungen tritt hierbei immer ein Defektpaar auf, welches gerade um π gegeneinander verschoben ist, während in der umgekehrten Richtung von SPI zu TVF Zuständen nur ein Defekt auftritt und die Wirbelschläuche zusammenschnürt. In beiden Übergangsszenarien rotieren diese Defekte aber in azimutaler Richtung mit der Struktur als Ganzes.

4.6 Axialer Durchfluss - Auswirkungen auf die Wavy Strukturen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Auswirkung der Veränderung diverser Kontrollparameter, wie z.B. R_1, R_2 und k, auf die verschiedenen Wavy Strukturen, wTVF und wSPI, diskutiert. All diese Parameter werden im Folgenden als fixiert angenommen und stattdessen wird eine weitere, bislang noch nicht berücksichtigte Größe, verändert. Der axiale Durchfluss, Re, (im System positiv von unten nach oben gerichtet (64)). Entscheidend hierbei ist, dass dieser, anders als alle zuvor diskutierten Kontrollparameter, einen *symmetriebrechenden Effekt* besitzt. Ein endlicher Durchfluss führt u.A. zur Aufhebung der Entartung von L- und R-SPI Lösungen, da er entweder mit der Propagationsrichtung der SPI Struktur übereinstimmt, oder aber dieser gerade entgegen wirkt (63; 64). Die Bifurkationsschwellen beider SPI Typen verschieben sich gegeneinander und stimmen *nicht* mehr überein (siehe auch Anh. B). Konkret bedeutet dies: Die Bifurkationsschwelle einer nach oben propagierende L-SPI Lösung wird durch positives Re nach unten verschoben und somit die L-SPI Struktur selbst stabilisiert. Demgegenüber destabilisiert positives Re die nach unten propagierende R-SPI Lösung, da die Bifurkationsschwelle nach oben verschoben wird.

Aufgrund dieser Eigenschaften des axialen Durchflusses lassen sich interessante Effekte bei den Wavy Strukturen erwarten. So z.B. waren alle bis zu diesem Zeitpunkt diskutierten wTVF Lösung immer vollkommen symmetrisch, insbesondere besaßen sie immer gleich große Modenanteile der L- und R-SPI Zustände (d.h. $|u_{1,1} = u_{1,-1}|$). Dies wird im

Falle endlichen Durchflusses nicht mehr so sein. Hier gilt i.A. $|u_{1,1} \neq u_{1,-1}|$. Ebenso ist zu vermuten, dass sich der Existensbereich der wSPI Lösungen in verschiedene Bereiche aufgliedert, da abhängig von Re entweder nur linksgewundene L-wSPI, rechtsgewundene R-wSPI Lösung, oder aber auch beide existieren können.

4.6.1 Bifurkationsverhalten als Funktion von Re

Wavy Taylor Wirbel (wTVF) mit Re

Abbildung 4.17 zeigt, analog zu dem vorangegangenen Abschnitt 4.3 das Bifurkationsverhalten von wTVF Strukturen, nun aber bei Variation des axialen Durchflusses Re. Bei den hier gewählten Parametern befindet sich das System bereits im Existenzbereich der wTVF Lösung (links in Abb. 4.17), so dass die Bifurkation dieser aus dem reinen TVF Zustand in der Abbildung nicht zu sehen ist (vgl. Abb. 4.3 mit $Re = 0$).

Abbildung 4.17 stellt eine Erweiterung eines aus (65) bereits bekannten Bifurkationsdiagramms, um die, im grauen Bereich F existierenden, wTVF Strukturen dar. Der Stabilitätsverlust einer reinen SPI Lösung, L-SPI [R-SPI], gegenüber der anderen SPI Lösung, R-SPI [L-SPI], bei $Re \approx 6.4[-6.4]$ wurde dort bereits diskutiert. Aus Symmetriegründen ist in der Abbildung nur der Bereich positiven Durchflusses, $Re \geqslant 0$, dargestellt. Entsprechend ergibt sich analoges Bifurkationsdiagramm bei negativem Durchfluss, $Re \leqslant 0$, durch Vertauschen der Bifurkationsäste von L- und R-SPI (63; 64) Lösungen, sowie entsprechender Anteile in der wTVF Struktur.

In Abbildung 4.17**(a)** sind wieder die dominanten Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in Spaltmitte dargestellt. Startet man im grauen Bereich F am linken Rand bei $Re = 0$, so entspricht dies gerade den bereits bekannten wTVF Lösungen aus Abbildung 4.3. Diese zeichnen sich durch ihre Symmetrie, insbesondere die identisch großen Amplituden in den Moden der beiden SPI Anteile, $(1, 1)$ der L-SPI und $(1, -1)$ der R-SPI, aus. Diese Symmetrie geht aber bei Auferlegen eines endlichen Durchflusses ($Re \neq 0$) verloren. Konkret bedeutet dies, dass die beiden Moden, $(1, 1)$ und $(1, -1)$, des wTVF Zustands im grauen Bereich F (für $Re > 0$) der Abbildung 4.17 unterschiedlich stark anwachsen bzw. abnehmen. Hieraus resultiert, dass der wTVF Zustand seine Gleitspiegelsymmetrie verliert. Die Deformationen und Modulationen der Wirbelschläuche werden mit stärker werdendem Re zunehmend anharmonischer (vgl. auch Abb. 4.21). Entscheidend ist aber die Tatsache, dass die Wirbelzentren, wie auch bei $Re = 0$, zunächst noch toroidal geschlossen bleiben. Der Symmetriebruch der wTVF Lösung zeigt sich am deutlichsten in den, sich unterschiedlich verändernden, Moden. So etwa wächst die Amplitude der $(1, 1)$ Mode mit zunehmendem Re ebenfalls an, während gleichzeitig die Amplitude der $(1, -1)$ Mode abnimmt. In diesem Fall liegt also eigentlich ein L-wTVF Zustand, d.h. ein wTVF Lösung mit den Modenamplituden $(1, 1) > (1, -1)$ vor. Entsprechend liegt bei negativen Re eine R-wTVF Struktur mit den Modenamplituden $(1, 1) < (1, -1)$ vor. Am rechten Rand des grauen Bereiches F verliert die L-wTVF Lösung ihre Stabilität und das System vollzieht einen transienten Übergang hin zu der einzig verbleibenden stabilen L-SPI Lösung. Bis zu diesem 'Sprung' wächst [fällt], im Fall $Re \geqslant 0$ die Amplitude der $(1, 1)[(1, -1)]$ Mode monoton an [ab].

Hierbei ist es auffallend, dass der graue Bereich F, in dem die wTVF Lösungen stabil existieren, gerade mit dem Bereich übereinstimmt, in dem die beiden SPI Strukturen, L-SPI und R-SPI, unter axialem Durchfluss Re parallel existieren $|Re| \lesssim 6.4$. Wenn der Durchfluss Re so stark ist, dass das System die reine R-SPI Struktur mit dominanter Mode $(1, -1)$ nicht mehr stabilisieren kann, scheint es so zu sein, dass auch der L-wTVF Zustand, der ebenfalls diese Mode mit $(1, 1) > (1, -1)$ beinhaltet, nicht länger stabil vorliegen kann.

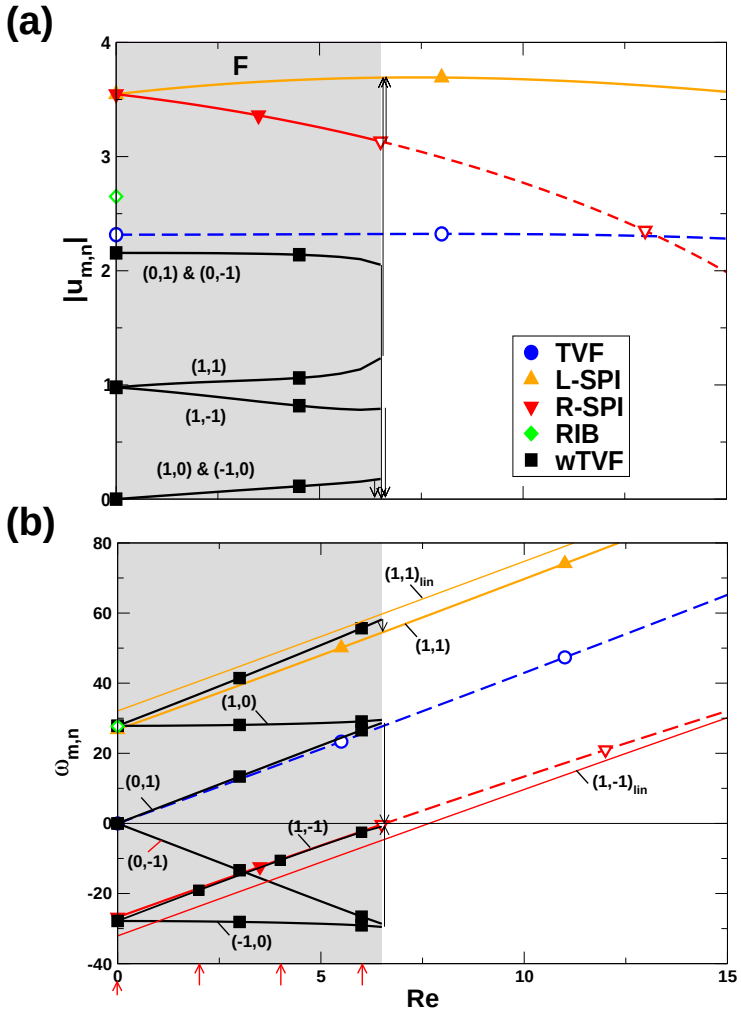


Abbildung 4.17 – Bifurkation von wTVF Strukturen (siehe auch Pfeil in Abb. 4.19) in Abhängigkeit von Re bei gegebenen Kontrollparametern: $R_1 = 120, R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$. **(a)** Amplituden dominanter Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in der Mitte des Spaltes, $r = 0.5$, (vgl. auch Bildunterschrift der Abb. 4.3 und 4.14) für TVF $(m, n) = (0, 1)$, L-SPI $(m, n) = (1, 1)$, R-SPI $(m, n) = (1, -1)$, RIB ($|u_{1,1}| = |u_{1,-1}|$) und wTVF Lösungen. Durchgezogene [gestrichelte] Linien mit gefüllten [leeren] Symbolen charakterisieren stabile [instabile] Lösungen. Anders als bei den in den vorherigen Abschnitten untersuchten symmetrischen wTVF Strukturen zeichnen sich diese wTVF Zustände bei endlichem Re gerade durch den Verlust dieser Symmetrie aus, da die Anteile der dominanten Moden von L- und R-SPI Zuständen, abhängig von Re variieren. D.h. für $Re \neq 0$ gilt: $|u_{1,1}^{wTVF}| \neq |u_{1,-1}^{wTVF}|$. **(b)** Bifurkationsdiagramme der Frequenzen $\omega_{m,n}$ mit denen die Amplituden der komplexen Moden $|u_{m,n}(r, t)|$ aus **(a)** oszillieren. Zum Vergleich sind auch noch die linearen Spiralfrequenzen (dünne Linien), d.h. der imaginäre Anteil des SPI Eigenwertes der um den CCF linearisierten NSE, mit in die Abbildung aufgenommen. Bei dieser Abbildung handelt es sich um eine Erweiterung eines aus (65) bereits bekannten Bifurkationsdiagramms, um die im grauen Bereich F existierenden wTVF Strukturen. Der Stabilitätsverlust der einen SPI Lösung gegenüber der anderen wurde dort bereits diskutiert. Aus Symmetriegründen ist in der Abbildung nur der Bereich positiven Durchflusses, $Re \geqslant 0$, dargestellt. Entsprechend ergibt sich analoges Bifurkationsdiagramm bei negativem, $Re \leqslant 0$, durch Vertauschen der Bifurkationsäste von L- und R-SPI, sowie entsprechender Anteile in der wTVF Struktur. Die roten Pfeile unterhalb des Bifurkationsdiagramms der Frequenzen markieren Re Werte, für die in Abbildung 4.21 Snapshots der Wirbelstrukturen zu sehen sind und die später genauer untersucht werden.

Re	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,-1}$	$(\omega_{1,1} - \omega_{1,-1})/2$	$\lvert(\omega_{1,1} + \omega_{1,-1})/2\rvert$
0.000	27.8311	-27.8312	27.8311	8.82e-05
0.500	30.0635	-25.6120	27.8378	2.22577
1.000	32.3115	-23.4080	27.8598	4.45173
1.500	34.5744	-21.2176	27.8960	6.67834
2.000	36.8523	-19.0421	27.9472	8.90506
2.500	39.1454	-16.8818	28.0136	11.1318
3.000	41.4539	-14.7388	28.0964	13.3576
3.500	43.7783	-12.6140	28.1962	15.5821
4.000	46.1181	-10.5117	28.3150	17.8032
4.500	48.4759	-8.4347	28.4553	20.0206
5.000	50.8491	-6.3908	28.6201	22.2291
5.500	53.2451	-4.3969	28.8211	24.4241
6.000	55.6695	-2.4930	29.0813	26.5882
6.500	58.1741	-0.8890	29.5316	28.6426

Tabelle 4.2 – Frequenzen $\omega_{m,n}$der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ des wTVF Zustands, sowie deren Kombinationen bei Variation von Re. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$ (vgl. Abb. 4.17**(b)**).

In dem symmetrischen Fall mit negativen Re zeigen die wTVF Zustände das gleiche Verhalten, wobei es sich dort um R-wSPI Strukturen, mit den Moden $(1, -1) > (1, 1)$ handelt, die ihre Stabilität schließlich verlieren und analog über einen transienten Übergang hin zur nun einzig stabil verbleibenden R-SPI Lösung gelangen.

Abbildung 4.17**(b)** gibt die zu den dominanten Moden $|u_{m,n}(r, t)|$ aus **(a)** zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ wieder. Bei $Re = 0$ (linker Rand des grauen Bereiches) besitzt der wTVF Zustand eine Frequenz, die im Wesentlichen mit den, hier noch entartet vorliegenden, SPI Frequenzen übereinstimmt. Dies gilt aber nicht allgemein und ist auf die hier verwendeten Parameter zurückzuführen (vgl. auch Kap. 5). Bei Betrachtung anderer Parameter zeigt sich, dass die Frequenzen der wTVF Lösungen im Allgemeinen *unabhängig* von denen der reinen SPI Strukturen sind, da sie sowohl ober- als auch unterhalb dieser liegen können.

Mit Zunahme von Re verhalten sich die Frequenzen der wTVF Lösungen analog der Frequenzen von SPI und TVF Lösungen, ebenfalls in Einklang mit dem Verhalten der linearen Frequenzen. Sie wachsen im Wesentlichen linear mit Re an. Dabei wächst die Frequenz $(1, 1)$ des wTVF Zustands etwas stärker, als die der reinen L-SPI Struktur. Genaue Werte der Frequenzen der wTVF Zustände mit ihren Kopplungen sind in der Tabelle 4.2 zusammengestellt.

Die roten Pfeile an der Abszisse (Abb. 4.17**(b)**) markieren verschiedene Re Werte, bei denen die wTVF Strukturen im Folgenden noch genauer untersucht werden und deren Snapshots in Abbildung 4.21 zu sehen sind.

Wavy Spiral Wirbel (wSPI) mit Re

Analog des gerade zuvor diskutierten Übergangs von TVF zu SPI Strukturen über wTVF Lösungen, der durch Re hervorgerufen wird, wird nun auch der umgekehrte Fall, der Über-

gang von SPI zu TVF Zuständen über wSPI Lösungen, ebenfalls durch Veränderung von *Re* bedingt, untersucht. Hierbei ist darauf zu achten, dass aufgrund des symmetriebrechenden Effektes von *Re nicht* immer beide wSPI Strukturen, die L-wSPI und die R-wSPI, gleichzeitig existieren müssen.

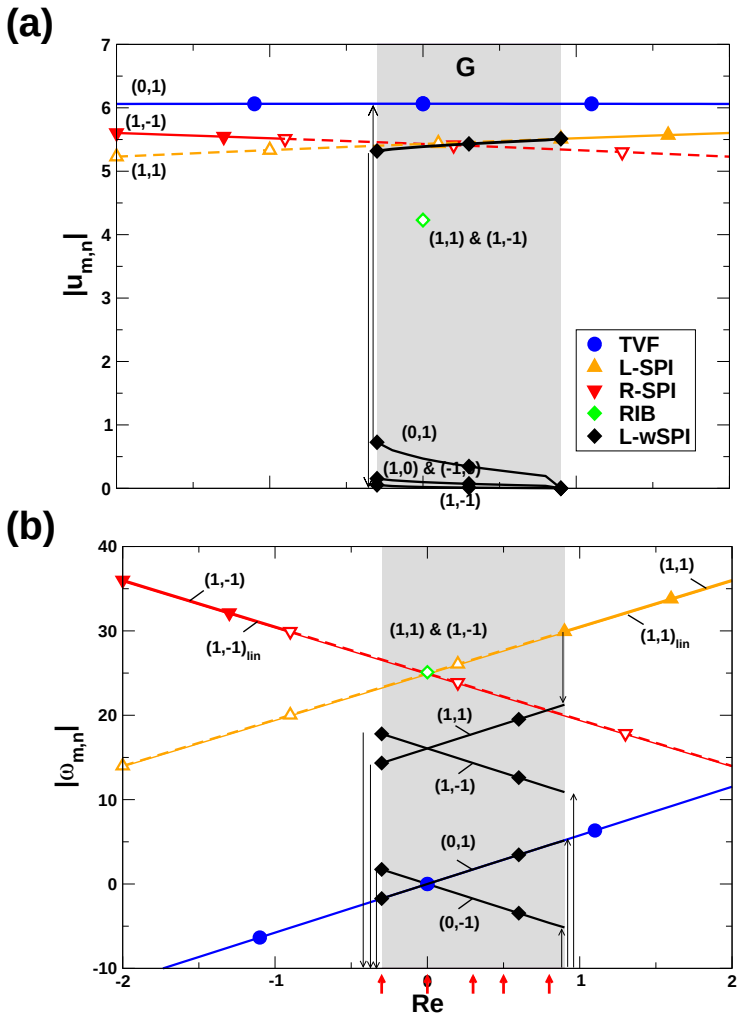


Abbildung 4.18 – Bifurkation von wSPI (hier L-wSPI) Strukturen (siehe auch Pfeil in Abb. 4.20) in Abhängigkeit von *Re* bei gegebenen Kontrollparametern: $R_1 = 115, R_2 = -50, k = 4.8, \eta = 0.5$. **(a)** Amplituden dominanter Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in der Mitte des Spaltes, $r = 0.5$, und **(b)** Bifurkationsdiagramme der verschiedenen zugehörigen Frequenzen $\omega_{m,n}$ (einschließlich linearer Frequenzen, siehe auch Bildunterschrift der Abb. 4.17). Aufgrund des Durchflusses mit seinem symmetriebrechenden Einfluss ist es hierbei wichtig die wSPI Strukturen nach L-wSPI und R-wSPI Zustanden zu unterscheiden. Diese müssen nämlich bei $Re \neq 0$ *nicht mehr beide gleichzeitig parallel (stabil) existieren.* Die roten Pfeile unterhalb des Bifurkationsdiagramms der Frequenzen markieren *Re* Werte, für die in Abbildung 4.22 Snapshots der Wirbelstrukturen zu sehen sind und die später genauer untersucht werden.

Im Folgenden wird der in Abbildung 4.18 dargestellte Fall des Übergangs von einer L-SPI Struktur hin zum TVF Zustand, der über eine stabile L-wSPI Lösung vollzogen wird diskutiert. Der symmetrische Fall von einer R-SPI über stabile R-wSPI hin zur TVF Lösung ergibt sich bei Vorzeichenumkehr von Re und vertauschen von L- und R-SPI Lösungsästen.

Startet man in Abbildung 4.18**(a)** am rechten Rand in einer stabilen L-SPI Lösung mit dominanter $(1, -1)$ Mode bei positivem Durchfluss $Re = 2$ und verringert diesen, so verliert diese Lösung bei $Re \approx 0.9$ ihre Stabilität gegenüber der sekundär bifurkierenden wSPI (hier L-wSPI) Lösung. An dieser Stelle (rechter Rand des grauen Bereiches G) werden, die für die wSPI Struktur typischen Moden, $(1, -1)$ und $(0, 1)$, endlich. Hierbei handelt es sich genau genommen um eine L-wSPI Lösung, was in sofern wichtig ist, da diese, wie zuvor erwähnt, bei endlichem Durchfluss *nicht mehr gleichzeitig* mit einer R-wSPI Lösung stabil existieren muss, wie dies bei $Re = 0$ immer der Fall ist. Mit weiter abnehmendem Re verändern sich die Amplituden der einzelnen Moden unterschiedlich. Die der $(1, 1)$ Mode wird schwächer, bzw. die der $(1, -1)$ und $(0, 1)$ Moden werden größer, bis der Durchfluss bei $Re \approx -0.3$ zu stark wird und die L-wSPI Struktur ihre Stabilität verliert. Da die L-wSPI eine nach oben wandernde Struktur ist, bläst der negative Durchfluss dieser gerade entgegen und 'zerstört' diese. Auch hierbei vollzieht sich am linken Rand des grauen Bereiches G ein transienter Übergang hin zur TVF Lösung, die in dem gesamten dargestellten Bereich der Abbildung 4.18 stabil vorliegt.

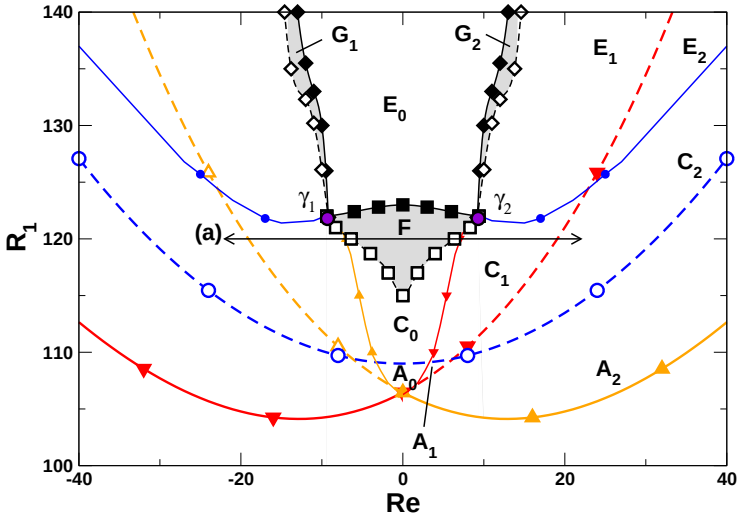
Gut zu erkennen ist der symmetriebrechende Einfluss von Re auf die wSPI Lösungen darin, dass die L-wSPI Strukturen nur im Bereich $-0.3 \lesssim Re \lesssim 0.9$ existieren. Entsprechend existieren, aus Symmetriegründen, die R-wSPI Strukturen nur im Bereich $-0.9 \lesssim Re \lesssim 0.3$. Aus dieser Tatsache resultieren drei Bereiche, in denen entweder nur die R-wSPI ($-0.9 \lesssim Re \lesssim -0.3$) Lösungen, beide wSPI Strukturen (L-wSPI und R-wSPI) parallel ($-0.3 \lesssim Re \lesssim 0.3$), oder aber nur die L-wSPI ($-0.3 \lesssim Re \lesssim 0.9$) Lösungen stabil existieren (vgl. auch Abb. 4.23). In der Nähe von $Re = 0$ und sehr moderaten Durchflüssen existieren also beide wSPI Lösungen, während das System bei etwas stärkerem Re nur eine der beiden wSPI Lösung zulässt. Dabei hängen Re Bereiche, in denen die wSPI Strukturen, beide parallel, oder aber auch nur einzeln stabil vorliegen, sehr stark von den Kontrollparametern des Systems, insbesondere R_2 ab (vgl. Abb. 4.19 und 4.20). Im Gegensatz zu dem Bereich, in dem wTVF Zustände unter Re existieren, ist der Bereich der wSPI Lösungen unter Durchfluss deutlich kleiner.

Die in Abbildung 4.18**(b)** dargestellten Frequenzen der wSPI Lösung verhalten sich analog derer ohne Re. Mit zunehmendem Re wächst auch die dominante Frequenz der $(1, 1)$ Mode der L-wSPI Struktur monoton an.

Auch die wSPI Strukturen existieren, wie bereits bei den wTVF Zuständen gesehen nur in Bereichen, in denen der entsprechend andere SPI Lösungstyp ebenfalls stabil existiert, so dass alle, für die Struktur notwendigen, Moden auch in mindestens einer weiteren stabilen Struktur vorhanden sind.

4.6.2 $R_1 - Re$ Phasendiagramm

Die beiden Abbildungen 4.19 und 4.20 zeigen Phasendiagramme mit verschiedenen stabil und instabil existierenden Strukturen in der $R_1 - Re$ Ebene, für unterschiedliche Kontrollparameter $R_2 = -100, k = 3.927$ (Abb. 4.19) und $R_2 = -50, k = 4.8$ (Abb. 4.20) und $\eta = 0.5$. In Abbildungen 4.19 liegt der Fokus dabei im Wesentlichen auf den, unter Durchfluss existierenden wTVF Zuständen (Bereich F), während es in Abbildungen 4.20 hauptsächlich um wSPI Strukturen unter Durchfluss geht (Bereich G_1). Gegenüber dem Phasendiagramm in der $R_1 - R_2$ Ebene, (Abb. 4.3) für $Re = 0$, ist deutlich zu erkennen, dass ein endlicher Durchfluss zu einer deutlich größeren Komplexität der auftretenden Strukturen führt. So sind beispielsweise in Abbildungen 4.19 neben dem grauen Bereich



$R_1 - Re$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF und wSPI Lösungen bei endlichem Durchfluss $-40 \leq Re \leq 40$ für $R_2 = -100, \eta = 0.5,\ k = 3.927$.

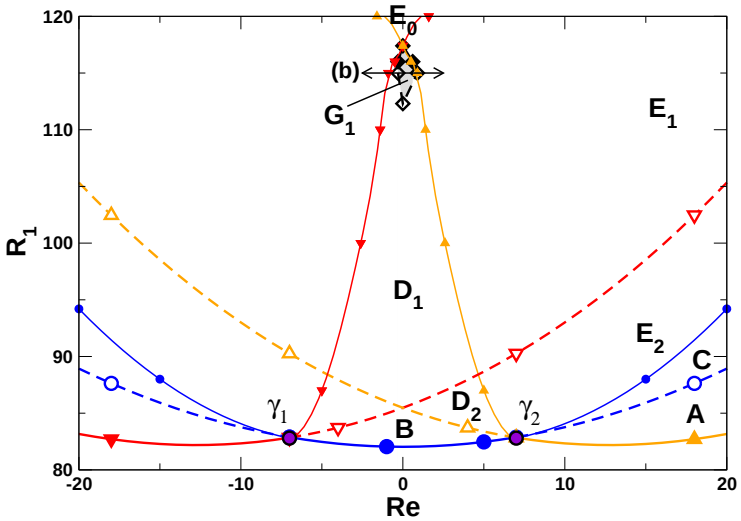
Region	A_0	A_1	A_2	C_0	C_1	C_2	E_0	E_1	E_2	F	G_1	G_2
TVF	-	-	-	i	i	i	s	s	s	i	s	s
L-SPI	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	-	s
R-SPI	s	i	-	s	i	-	s	i	-	s	s	-
wTVF	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s	-	-
L-wSPI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s
R-wSPI	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	s	-

stabil (i), instabil (i), nicht existent (-).

Abbildung 4.19 – Zur Bedeutung der Linien und Symbole siehe Abbildung 4.17. Die schwarzen durchgehenden Linie zwischen E_0 und F beschreiben die obere Bifurkationsschwelle von wTVF Lösungen(■) aus den TVF Zuständen heraus. Analog gibt die schwarze Linie zwischen E_0 und G_1 [G_2] die Bifurkationsschwelle von L-wSPI [R-wSPI] Lösung(♦) aus der reinen L-SPI [R-SPI] Struktur heraus an. Diese Wavy Lösungen sind in den jeweiligen grauen Bereichen F, G_1 und G_2 stabil und werden instabil an den schwarz gestrichelten Kurven mit offenen Symbolen (□,◊). Der horizontale Pfeil **(a)** kennzeichnet den Parameterbereich des Bifurkationsdiagramms aus Abbildung 4.17. Die beiden violetten Punkte $\gamma_{1,2}$ geben Punkte höherer Codimension an. Aus Symmetriegründen sind nur Bereiche für $Re \geq 0$ mit Buchstaben gekennzeichnet.

F stabiler wTVF Lösungen auch zwei weitere Bereiche mit wSPI Lösungen G_1 und G_2 zu erkennen, wobei in diesen jeweils nur L-wSPI (G_1) oder R-wSPI (G_2) Zustände existieren. Demgegenüber gibt es in Abbildungen 4.20 aber *keinen* Bereiche, in dem wTVF Zustände existieren. Beide Phasendiagramme mit ihren Resultaten werden nun im Einzelnen diskutiert.

Zunächst soll das Phasendiagramm in Abbildungen 4.19 betrachtet werden. Die verschiedenen stabil und instabil existierenden Strukturen, in den unterschiedlichen Gebieten $A - F$ sind in der Tabelle unter der Abbildung angegeben (Zur Bedeutung der Linien und



$R_1 - Re$ Phasendiagramm für TVF, SPI, und wSPI Lösungen bei endlichem Durchfluss $-20 \leq Re \leq 20$ für $R_2 = -50, \eta = 0.5,\ k = 4.8$.

Region	A	B	C	D_1	D_2	E_0	E_1	E_2	G_1
TVF	-	s	i	s	s	s	s	s	s
L-SPI	s	-	s	i	i	s	s	s	-
R-SPI	-	-	-	i	-	s	i	-	-
L-wSPI	-	-	-	-	-	-	-	-	s

stabil (i), instabil (i), nicht existent (-).

Abbildung 4.20 – Zur Bedeutung der unterschiedlichen Linien und Symbole siehe auch Abbildung 4.17 und 4.19. Die schwarzen durchgehenden Linien zwischen E_1 bzw. E_0 und G_1 beschreiben die Bifurkationsschwelle von L-wSPI Lösungen(♦) aus der reinen SPI Struktur heraus an. Diese Wavy Lösungen liegen im gesamten grauen Bereiche G_1 stabil vor und werden instabil an der schwarz gestrichelten Kurve mit offenen Symbolen (□,◊). Der horizontale Pfeil **(b)** kennzeichnet den Parameterbereich des Bifurkationsdiagramms aus Abbildung 4.18. Die beiden violetten Punkte $\gamma_{1,2}$ geben Punkte höherer Codimension an.

Symbole siehe auch Abb. 4.5 in Abs. 4.3.2.). Der eingezeichnete Pfeil **(a)** gibt die Parameter des in der Abbildungen 4.17**(a)** dargestellten Bifurkationsdiagramms an. Aufgrund der Symmetrie genügt es, positive Re zu betrachten. Betrachtet man den Bereich F der stabilen wTVF Lösung, so ist gut zu erkennen, dass sich dieser mit betragsmäßig wachsendem Re immer weiter zusammenschnürt, bis er schließlich bei $R_1 \approx 122, |Re| \approx 9.3$ in den beiden Punkten $\gamma_{1,2}$ vollständig verschwindet. Dieses Verschwinden fällt dabei gerade mit den Stabilitätsgrenzen der reinen SPI Lösungen zusammen (orange [rote] Kurve mit △ [▽] für die L-SPI [R-SPI] Lösung bei negativem [positivem] Re). Bei den beiden Punkten $\gamma_{1,2}$ handelt es sich um Punkte höherer Codimension, wie bereits aus der Abbildung 4.5 bekannt.

Die wTVF Strukturen können also anscheinend nur dort existieren, wo auch beide reinen SPI Lösungen stabil vorliegen, da die *beiden* dominanten Moden $(1, 1)$ und $(1, -1)$ dieser Lösung in der wTVF Struktur enthalten sind, wenngleich sich die Amplitu-

den dieser Moden mit betragsmäßig zunehmendem Re immer stärker unterscheiden (vgl. Abb. 4.17**(a)**).

Neben den wTVF Lösungen in Bereich F sind in der Abbildungen 4.19, wie bereits erwähnt, noch zwei weitere graue Bereiche zu sehen, in denen helikale wSPI Strukturen existieren. Die R-wSPI Struktur in Gebiet G_1 und L-wSPI Struktur in Gebiet G_2. Die Bereiche der wTVF und wSPI Lösungen laufen in den beiden Punkten höherer Codimension, $\gamma_{1,2}$, wie aus Abbildung 4.5 bekannt, zusammen. Die Tatsache, dass es zwei solche Punkte gibt, ist durch die Symmetrie des auferlegten Durchflusses bedingt. Demnach ist der Bereich G_1 der L-wSPI Lösungen spiegelsymmetrisch zum Bereich G_2 der R-wSPI Lösung. Bei Umkehrung des Durchflusses sind G_1 und G_2 demzufolge vertauscht.

Im Gegensatz zu Abbildungen 4.19 ist der Bereich G_1 der stabilen L-wSPI Lösungen in Abbildungen 4.20 deutlich kleiner als G_1 und G_2. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist der entsprechend Bereich der R-wSPI Struktur (G_2) hier nicht mit eingezeichnet, da sich beide Bereiche zum Teil überschneiden; er ergibt sich bei Umkehrung des Durchflusses $Re \to -Re$ und Vertauschung von L- und R-wSPI Zuständen und Strukturanteilen. Auch hier gibt der eingezeichnete Pfeil **(b)** die Parameter des Bifurkationsdiagramms der Abbildungen 4.18**(a)** an. Für die hier verwendeten Kontrollparameter ist der Bereich der L-wSPI Lösungen, verglichen mit den wTVF Lösungen aus Abbildungen 4.19, deutlich kleiner. Insbesondere ist dieser nicht mehr symmetrisch um $Re = 0$ herum angeordnet. Ein sehr drastischer Unterschied besteht auch darin, dass in diesem Parameterbereich *keine* wTVF Lösungen bei endlichem Re existieren. Diese könnten theoretisch nur unterhalb der blauen Linie beim Übergang von Gebiet E_2 nach C (für positive Re) auftreten. Da in diesem Bereich aber immer nur eine SPI Lösung, hier die L-SPI Struktur existiert, können anscheinend keine wTVF Zustände vorliegen, da diese immer Anteile beider SPI (hier auch der R-SPI) Strukturen enthalten, wie bereits aus Abbildung 4.17 bekannt ist. Das System ist also offensichtlich nicht in der Lage die notwendige $(1, -1)$ Mode nichtlinear anzuregen. Stattdessen vollzieht es einen transienten Übergang direkt von der TVF hin zur SPI Lösung (vgl. Abb. 4.23).

Insgesamt bleibt festzuhalten, dass die Phasendiagramme bei endlichem Durchfluss, $Re \neq 0$, deutlich komplizierter werden. Dies basiert auf dem bekannten symmetriebrechenden Effekt des Durchflusses, der insbesondere zur Aufspaltung des Bereiches mit wSPI Lösungen in die beiden Unterbereiche mit L-wSPI und R-wSPI Zuständen führt. Diese können dabei voneinander getrennt existieren, sich aber auch, abhängig von den sonstigen Systemparametern, überschneiden.

Strukturelle Zerlegung von wTVF und wSPI bei Variation von Re

Um den symmetriebrechenden Einfluss von Re auf die verschiedenen Wavy Strukturen zu untersuchen, bietet es sich an, wie bereits in Abschnitt 4.4.2 (für $Re = 0$) gesehen, eine Zerlegung der gesamten Struktur in die jeweiligen Modenunterräume vorzunehmen. In einen Teil, der nur Anteile des Modenunterraums der zugehörigen *reinen* Struktur, d.h. $m = 0$ für TVF und $m = 1$ [$m = -1$] für L-wSPI [R-wSPI] Lösungen enthält und in einen zweiten Anteil, den Rest, der durch alle, zu diesen Unterräumen, komplementären Moden erzeugt wird. D.h. $m \neq 0$ für wTVF und $m \neq n$ [$m \neq -n$] für die L-wSPI [R-wSPI] Zustände.

In Abbildung 4.21 sind die Isoflächen der azimutalen Vortizität der wTVF Lösung für vier verschiedene Durchflüsse $Re = 0$**(a)**, 2**(b)**, 4**(c)**, 6**(d)** aus Abbildungen 4.17**(a)** dargestellt. In der oberen Reihe **(1)** ist die vollständige Struktur ($\Omega_\varphi = \pm 90$) zu sehen, während in der unteren Reihe **(2)** nur der $m \neq 0$ Anteil ($\Omega_\varphi = \pm 10$) dargestellt ist. Für den

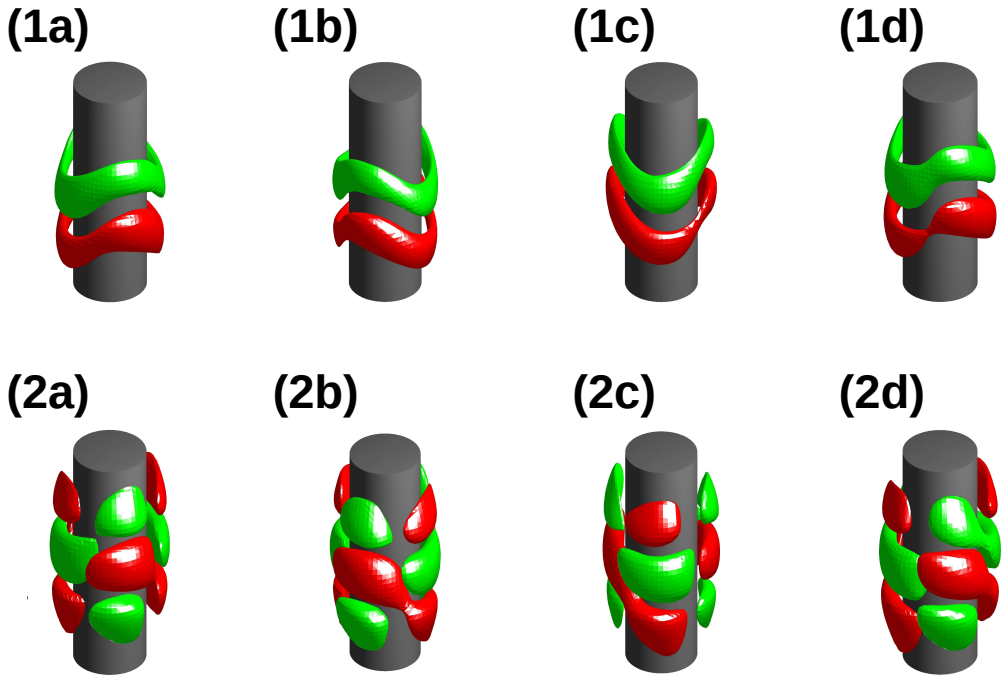


Abbildung 4.21 – Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 90$ **(1)** und ± 10 **(2)** von wTVF Lösungen bei verschiedenen $Re = 0$**(a)**, 2**(b)**, 4**(c)**, 6**(d)** und $R_1 = 120$, $R_2 = -100$, $k = 3.927, \eta = 0.5$. Die obere Reihe **(1)** zeigt die vollständige Struktur, während die untere Reihe **(2)** den Anteil an der Struktur wiedergibt, der komplementär zu dem $m = 0$ TVF Modenunterraum ist. Rot [grün] bedeutet positive [negative] Vortizität. Aus Gründen der besseren Sichtbarkeit sind in azimutaler Richtung zwei Perioden dargestellt.

Fall ohne Durchfluss **(a)**, $Re = 0$, sind die Amplituden der beiden Moden $(1, 1)$ und $(1, -1)$ im wTVF Zustand gleich groß und somit ist der $m \neq 0$ Anteil vollkommen symmetrisch, was bereits in Abbildung 4.13**(a)** zu sehen war. Zunächst sehen die Isoflächen der vollen wTVF Struktur **(1)**, wie auch die des Anteils ohne die reine TVF Lösung **(2)**, bei moderatem $Re \lesssim 4$**(a,b,c)** immer noch annähernd symmetrisch aus. Erst mit weiter zunehmendem Durchfluss $Re \approx 6$**(d)** und somit immer stärker unterschiedlichen Modenamplituden $(1, 1)$ und $(1, -1)$, wird auch der $m \neq 0$ Anteil asymmetrischer. In dem hier gezeigten Fall positiven Durchflusses wird der Anteil der $(1, 1)$ Mode am $m \neq 0$ Anteil zunehmend stärker (vgl. Abb. 4.17). Dabei werden die wTVF Strukturen verzerrt und zeigen eine deutlich stärkere Modellierung durch den L-SPI Anteil. Dies zeigt sich besonders gut in einer lokal helikalen Orientierung der Isoflächen azimutaler Vortizität des $m \neq 0$ Anteils, der ähnlich einer L-SPI Struktur gerichtet ist **(2d)**.

Analog zeigt Abbildung 4.22 Isoflächen der vollen L-wSPI Lösung **(1)** für verschiedene $Re = 0.8$**(a)**, 0.5**(b)**, 0.3**(c)**, 0**(d)**, -0.3**(e)** aus Abbildung 4.18**(a)**, sowie des $m \neq n$ Unterraums **(2)**, ohne den reinen L-SPI Anteil. Allerdings ist der Einfluss des $m \neq n$ Anteils, wie etwa in Abbildung 4.13**(b)** zu sehen war, auch bei dieser wSPI Struktur relativ gering (auch deutlich geringer als bei den wTVF Strukturen in Abbildung 4.21), so dass in den

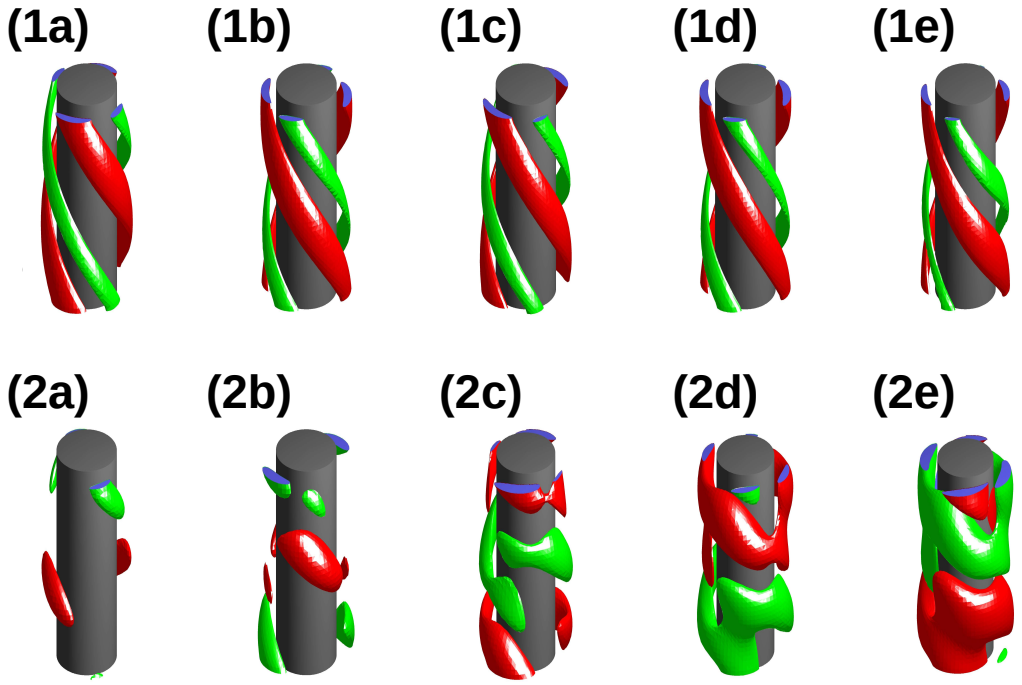


Abbildung 4.22 – Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 90$ **(1)** und ± 10 **(2)** von wSPI Lösungen bei verschiedenen Durchflüssen $Re = 0.8$**(a)**, 0.5**(b)**, 0.3**(c)**, 0.0**(d)**, -0.3**(e)** und $R_1 = 115$, $R_2 = -50$, $k = 4.8, \eta = 0.5$. Die obere Reihe **(1)** zeigt die vollständige Struktur, während die untere Reihe **(2)** den Anteil an der Struktur wiedergibt, der komplementär zu dem $m = n$ L-SPI Modenunterraum ist. Rot [grün] bedeutet positive [negative] Vortizität. Aus Gründen der besseren Sichtbarkeit sind in azimutaler Richtung zwei Perioden dargestellt.

vollen Strukturen **(1)** so gut wie keine Veränderung der Isoflächen ($\Omega_\varphi = \pm 90$) zu erkennen ist. Die Einflüsse des Durchflusses sind aber deutlich im $m \neq n$ Anteil der Strukturen **(2)** ($\Omega_\varphi = 10$) erkennbar. Gut zu erkennen ist die Zunahme des rotationssymmetrischen $m = 0$ Anteils der $(0, 1)$ Mode (vgl. Abb. 4.18**(a)**) bei Abnahme des Durchflusses. Bei $Re = -0.3$**(e)** ist dieser in den Isoflächen des $m \neq n$ Anteils deutlich zu erkennen.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die beiden Abbildungen 4.21 und 4.22 aufgrund unterschiedlicher Isowerte, nur einen qualitativen Eindruck der Deformationen in den Isoflächen der Vortizitäten als Anteile des $m \neq 0$, bzw. $m \neq n$ Modenunterraums geben können.

Stabilität

Die Abbildung 4.23 fasst die in diesem Abschnitt gemachten Aussagen bezüglich der Stabilität der verschiedenen Wavy Strukturen schematisch zusammen. Aufgrund des symmetriebrechenden Effektes des axialen Durchflusses sind verschiedene wTVF Zustände, abhängig der dominanten, in ihnen enthaltenen, SPI Moden, L-wTVF Lösungen für den Fall $(1, 1) > (1, -1)$ und R-wTVF Lösungen für den Fall $(1, 1) < (1, -1)$, zu unterschei-

den. Desweiteren führt endliches Re auch dazu, dass die wSPI Zustände entsprechend als L-wSPI und oder R-wSPI Lösungen vorliegen, die *nicht mehr gleichzeitig* stabil existieren müssen. Abbildung 4.23**(a)** zeigt, dass der Stabilitätsbereich (hellblau) von L-wTVF und

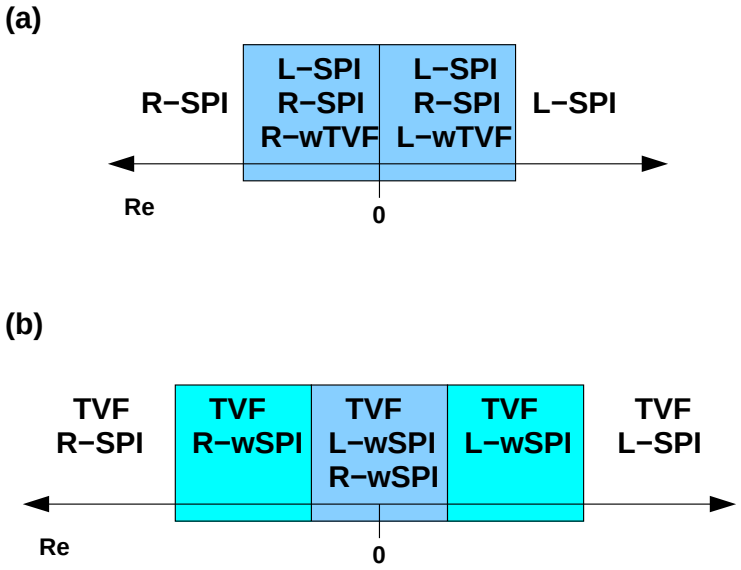


Abbildung 4.23 – Schematische Darstellung, der bei endlichem Re stabil existierenden Strukturen für pbc Bedingungen. **(a)** wTVF Lösungen existieren mit unterschiedlich starken Anteilen von L-SPI und R-SPI Moden (hellblau). **(b)** L-wSPI und R-wSPI Lösungen können nebeneinander (hellblau), oder aber auch nur einzeln (türkis) stabil vorliegen.

R-wTVF Strukturen symmetrisch um $Re = 0$ verteilt liegt. Dieser Bereich fällt gerade mit dem Stabilitätsbereich der, bei endlichem Re, unterscheidbaren Spiral Lösungen, L-SPI und R-SPI, zusammen. Dies ist dadurch erklärbar, dass in den wTVF Lösungen immer die beiden Moden, $(1, 1)$ und $(1, -1)$, was ja gerade die dominanten Moden der reinen SPI Strukturen sind, angeregt sind. Offensichtlich kann das System diese nicht nichtlinear in Bereichen anregen, in denen die reinen SPI Zustände nicht stabil existieren. Im Fall **(b)**, der wSPI Lösung spaltet sich der Existenzbereich bei endlichem Re noch weiter auf. Während im Bereich moderaten Durchflusses Re (hellblau), nahe der Null, beide Strukturen, L-wSPI und R-wSPI, stabil vorliegen, führen betragsmäßig größere Re (türkis) dazu, dass nur noch eine der beiden Lösungen stabil existiert. Stärker positives Re lässt nur L-wSPI und stärker negatives Re nur R-wSPI Lösungen zu. Insgesamt bleiben die Bereiche aber symmetrisch (bei Vertauschung von L- und R-SPI Anteilen) um $Re = 0$ verteilt.

4.7 Resumé

In diesem Kapitel wurden das Bifurkationsverhalten, die Dynamik und die strukturellen Eigenschaften von toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln (TVF), helikalen Spiral Wirbeln (SPI) und insbesondere ihrer zugehörigen modulierten Strukturen, nämlich den toroidal geschlossenen Wavy Taylor Wirbeln (wTVF) und den helikalen Wavy Spiral Wirbeln (wSPI) wie auch der Ribbon (RIB) im Taylor-Couette System (TCS) untersucht.

Im TCS, unter axial periodischen Randbedingungen (pbc), wird der Übergang zwischen TVF und SPI Lösungen mittels sekundär bifurkierender Wavy Strukturen vollzogen. Der Übergang von instabilen TVF zu stabilen SPI Lösungen verläuft über die Erzeugung stabiler wTVF Zustände. Ähnlich vermitteln stabile wSPI Zustände den Übergang von instabilen SPI Zuständen hin zu stabilen TVF Strukturen. Dabei ist der Ast der wTVF Lösung, der den TVF Lösungsast mit dem instabilen RIB Ast verbindet, bereits aus der Literatur bekannt (55). Diese Verbindung wurde hier erstmals qualitativ und quantitativ, anhand numerischer Simulationen, im Detail untersucht. Es wurden Hinweise darauf gefunden, dass die wSPI Lösung in ähnlicher Weise die SPI Lösung mit den instabilen RIB Lösungen verbindet. Da aber die RIB Lösung in beiden Übergangsszenarien instabil vorliegt, 'springt' das System in beiden Fällen auf die einzige noch stabil im System vorliegende Lösung, wenn man den jeweiligen Wavy Ast bis zu seinem Ende, nahe des RIB Zustands verfolgt.

Dieses Verhalten hat folgende Auswirkungen auf den Lösungsraum:

(i) Der Parameterbereich F [G] mit stabilen wTVF [wSPI] Lösungen trennt die Region E mit bistabilen TVF und SPI Zustände von der Region C [D] mit monostabilen SPI [TVF] Strukturen.

(ii) Stabile wTVF [wSPI] Zustände existieren bistabil mit reinen SPI [TVF] Lösungen.

Dies gilt für den kompletten, hier untersuchten $k - R_1 - R_2$ Phasenraum. In Gebiet E ist, nahe der Bifurkationsschwelle der wTVF Lösung, die Amplitude der dominanten Mode des TVF Zustands größer als diejenige der SPI Lösung. Entsprechendes gilt auch umgekehrt für die aus den SPI Zuständen bifurkierenden wSPI Strukturen. Somit lässt sich der Bereich E, abhängig der Amplitudengröße der stabil existierenden Strukturen, in zwei Teilgebiete, E_1 und E_2, aufspalten.

Startet man andererseits in der monostabilen Region C [D] mit einer instabilen TVF [SPI] Lösung, verschwindet diese und das System vollzieht einen Übergang in die einzig stabil vorliegende SPI [TVF] Lösung. Die Zeit für diesen transienten Übergang wächst dabei mit abnehmender Distanz zur Region E mit bistabil existierenden TVF und SPI Zuständen.

Die Wavy Strukturen, wTVF und wSPI, 'leben' in einem komplexeren Fourierunterraum mit mehr endlich angeregten Fouriermoden als in den reinen Strukturen, TVF und SPI, vorhanden sind. Die Topologie der Wavys stimmt aber mit der jeweiligen reinen Struktur, aus der heraus sie entstehen, überein. Es gibt aber gewisse Einschränkungen und Symmetrien: Im Fall der axial nicht propagierenden und zeitlich periodischen wTVF Lösung sind die Amplituden der $(1,1)$ und $(1,-1)$ Mode für $Re = 0$ identisch. Für die quasiperiodischen linksgewundenen SPI Lösung (L-SPI) führt die $(1,1)$ Mode zu einer azimutalen Rotation und einer axialen Wanderung der gesamten Struktur mit endlicher Frequenz $\omega_{1,1}$, die sich von der Frequenz $\omega_{0,1}$ unterscheidet, mit der eine rotationssymmetrisch modulierte Welle axial abwärts propagiert.

Die Tatsache, dass die Frequenzen der wTVF Lösungen am Onset zum Teil mit denen der reinen, voll ausgebildeten SPI Strukturen, identisch sind, ist rein zufällig und nur auf die jeweils gewählten Parameter zurückzuführen. Dies wurde durch Auferlegen eines externen Durchflusses, wie auch für endliche Randbedingungen in Kapitel 5 bestätigt.

Auch im Hinblick auf die Wellenzahlabhängigkeit verhalten sich die Wavy Strukturen ähnlich wie die reinen Strukturen. Alle hier untersuchten Strukturen liegen im drei dimensionalen $k-R_1-R_2$ Phasenraum innerhalb eines Volumens, das durch zwei, sich gegenseitig durchdringende Oberflächen erzeugt wird und sich über der $k - R_2$ Ebene erhebt. Diese beiden Oberflächen sind die Bifurkationsschwellen von TVF und SPI Lösungen. An den

Stellen, an denen sich diese beiden schneiden, laufen auch alle anderen Bifurkationsschwellen von wTVF, wSPI und RIB Zuständen, zusammen.

Weiterhin wurden die strukturellen Änderungen des Strömungsflusses während des Übergangs von instabilen TVF zu stabilen SPI Zuständen in der Region C und von instabilen SPI zu TVF Strukturen in Gebiet D untersucht. Hierzu wurden zur Visualisierung unter anderem Isoflächen der azimutalen Vortizität benutzt. Diese erlauben es im Detail zu verfolgen, wie z.B. die toroidal geschlossenen Wirbelschläuche der TVF Struktur zusammengeschnürt und durch ein rotierendes Defektpaar aufgebrochen werden, wonach sich schließlich die Schlauchenden axial bewegen und zu den helikal geschlossenen Wirbelschläuchen der SPI Lösung neu verbinden. Der entsprechende Übergang in umgekehrter Richtung von offenen SPI zu toroidal geschlossenen TVF Zuständen vollzieht sich auf ähnlicher Art und Weise. Auch hierbei kommt es zu Zusammenschnürung, Aufbrechen, Separierung und schließlich zur Wiederverbindung der Schläuche. In diesem Übergangsszenario allerdings nur an einer azimutalen φ Position.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wurde noch der Einfluss eines extern aufgeprägten Durchflusses auf die Wavy Strukturen untersucht. Hierbei zeigte sich, dass sich die symmetriebrechenden Eigenschaften von Re signifikant auf die Existenzbereiche von wTVF und wSPI Zuständen auswirken. Die wTVF Lösungen verlieren für $Re \neq 0$ ihre axiale Spiegelsymmetrie, da eine der beteiligten SPI Moden, $(1,1)$ oder $(1,-1)$, dominant wird (d.h. i.A. gilt bei $Re \neq 0$: $(1,1) \neq (1,-1)$). Demzufolge sehen insbesondere die wTVF Strukturen deutlich verzerrter aus. Topologisch gesehen bleiben die Wavy Strukturen aber identisch denen bei $Re = 0$. Die wSPI Lösungen bleiben zwar weitestgehend identisch derer ohne Durchfluss, allerdings müssen L-wSPI und R-wSPI Struktur nicht mehr gleichzeitig existieren. Es gibt Parameterbereiche, bei denen beide, L- und R-wSPI Zustände gemeinsam, oder aber nur eine der beiden Lösungen stabil existiert. Dies führte zu deutlich komplexeren Phasendiagrammen bei extern auferlegtem Durchfluss. Sowohl wTVF als auch wSPI Lösungen existieren nur in solchen Bereichen stabil, in denen auch die beiden reinen Spiral Lösungen, L- und R-SPI, parallel stabil vorliegen. Das System scheint nicht in der Lage zu sein die ebenfalls in den Wavy Strukturen vorkommenden dominanten Moden der reinen SPI Strukturen nichtlinear anzuregen. Somit fällt z.B. die Stabilitätsgrenze der wTVF Zustände bei positivem [negativem] Re gerade mit derjenigen der reinen R-SPI [L-SPI] Lösung zusammen.

Kapitel 5

Übergänge zwischen TVF und wSPI im endlichen $\Gamma = 12$ System (rbc)

5.1 Einleitung - Motivation

Nachdem im vorangegangenen Kapitel 4 die Übergänge zwischen TVF und SPI Zuständen, die über stabile Wavy Strukturen ablaufen, unter periodischen Randbedingungen (pbc) untersucht wurden, werden nun in diesem Kapitel die analogen Übergänge, unter realistischeren Randbedingungen, im endlichen System (rbc) betrachtet. Hierzu werden feste Deckel an beiden Enden des Systems angenommen. Aufgrund der endlichen Länge des Bulks ergeben sich entscheidende und bedeutende Unterschiede in den Übergangsszenarien. So kann unter anderem keine feste Wellenzahl vorgegeben werden, diese wird vielmehr von dem System selbst, abhängig der Länge und Struktur, selektiert. Insbesondere hat dies zur Folge, dass sich die Wellenzahl natürlich auch beim Übergang zwischen zwei Strukturen ändern kann. Im periodischen Fall waren die Wellenzahlen immer fixiert und somit identisch.

Weiterhin wird im endlichen System, bei dem das Fluid axial durch Deckel an den Systemenden beschränkt wird, die axiale Translationsinvarianz gebrochen. Diese axialen Beschränkungen erzeugen bei jeglichem externen Antrieb Störungen in Form axial symmetrischer Wirbel, deren Amplitude annähernd exponentiell in den Bulk hinein abnimmt. Dies sind die sogenannten Ekman Wirbel. Bei kleinen Rotationsfrequenzen des inneren Zylinders überlagern und deformieren diese den CCF Grundzustand im Bulk zu einer neuen stationären, rotationssymmetrischen Grundzustandsströmung im endlichen System mit randinduzierten Ekman Wirbeln , in der Nähe der Deckel, und CCF ähnlichem Strömungsverhalten im Innern des Bulks. Dieser komplexere Zustand wird im Folgenden als 'Basis Fluss', 'Basis Strömung', 'CCF-Ekman' oder einfach nur 'Ekman', gemäß des Kontextes, bezeichnet. Die rotationssymmetrische Ekman Mode geht dabei immer in das Fourierspektrum aller anderen Wirbel Zustände ein und hat entscheidenden Einfluss auf deren Struktur, das Bifurkationsverhalten, die Stabilität und ihre Dynamik. Dies ist bereits aus zahlreichen Publikationen (145; 42; 88; 86; 17; 18; 35; 45) hinreichend bekannt.

Systemlänge: $\Gamma = 12$

Als repräsentative Systemlänge wurde ein endliches $\Gamma = 12$ System gewählt. Dies stellt zwar noch ein relativ kurzes System dar, weitere Simulationen mit verschiedenen größeren Systemlängen, $\Gamma = 20, 22, 26$, zeigten aber alle das gleiche Verhalten wie es in diesem

Kapitel für $\Gamma = 12$ diskutiert wird. Aus diesem Grund und insbesondere der drastisch zunehmenden Rechenzeit bei Vergrößerung des Systems wurde $\Gamma = 12$ gewählt. Alle übrigen Parameter $d = r_2 - r_1, \eta = r_1/r_2 = 0.5$ sind identisch derer des periodischen Systems aus Kapitel 4.

Im Folgenden wird zunächst, wenn nicht gesondert erwähnt, die äußere Reynoldszahl bei $R_2 = -100$ fixiert gehalten. Alle mit endlichen Zylindern durchgeführten Rechnungen werden mit dem Code G1D3 durchgeführt (siehe Anh. D). Die Randbedingungen für die nicht rotierenden Deckel sind dabei wie in Abschnitt D.2.4 beschrieben im Code implementiert. Weiterhin werden auch zum Teil einzelne Vergleiche mit experimentellen Daten durchgeführt (4).

5.2 Übergänge zwischen TVF und wSPI

In diesem Abschnitt werden im ersten Teil die Bifurkation von TVF zu wSPI Strukturen über wTVF Lösungen beschrieben und im zweiten Teil der Übergang in umgekehrter Richtung von wSPI zu TVF Strukturen untersucht. Analog dem periodischen System in Kapitel 4 und (66) findet man auch für das endliche System Übergänge zwischen den beiden primär bifurkierenden Strukturen, TVF und in diesem Fall wSPI. Der größte Unterschied zwischen beiden Systemen (pbc und rbc) besteht darin, dass weder im Experiment, noch in numerischen Simulationen *reine* Spiralen im endlichen $\Gamma = 12$ System existieren. In einem *reinen* SPI Zustand ist der Fluss periodisch in φ, z und t, mit einer axialen Wellenzahl k, einer azimutalen Wellenzahl M und einer Frequenz ω. Weiterhin hängt der helikale Fluss nicht im Einzelnen von φ, z und t ab, sondern von der kombinierten Phasenvariablen, $\phi = M\varphi + kz - \omega t$, so dass alle Felder die kontinuierliche Symmetrie $f(r, \varphi, z, t) = f(r, \phi)$ (115) (vgl. auch Kap. 3) aufweisen.

Im endlichen System, mit Ekman Wirbeln nahe der nicht rotierenden Deckel, werden die reinen SPI durch wSPI Strukturen ersetzt. Diese besitzen ein deutlich komplexeres Modenspektrum, wie bereits in Kapitel 3 (siehe auch (66)) beschrieben. Dieses basiert auf der Wechselwirkung zwischen den Spiral Moden und der rotationssymmetrischen Ekman Mode ($M = 0$). In Abwesenheit von symmetriebrechenden Effekten, wie z.B. axialem Durchfluss, sind links- und rechtsgewundene SPI Zustände äquivalent zueinander (63; 64), liegen also entartet vor. Dies gilt auch für die wSPI Lösungen im endlichen System. Deshalb wird im weiteren nur wenn nötig zwischen den beiden unterschiedlich helikalen Strukturen, L- und R-wSPI, unterschieden.

Im periodischen System wurden die verschiedenen Strukturen mit fixierter Wellenzahl k durch ihre dominanten Moden (m, n) im Fourierspektrum charakterisiert. Dies ist im endlichen System nicht mehr so einfach möglich, da aufgrund der Deckel nur bestimmte Wellenzahlen k im System, abhängig dessen Länge, entstehen können, die auch immer unterschiedliche Anteile $m = 0$ und $m = \pm 1$ enthalten. Um trotzdem einen Vergleich mit dem periodischen System durchführen zu können wird eine axiale Fourieranalyse der Modenamplituden $|u_m(z, t)|$ in Spaltmitte $r = r_1 + d/2, (r = 0.5)$ durchgeführt. Danach werden die größten Anteile für $m = 0$ und $m = \pm 1$ im axialen Fourierspektrum $u_m(z, t)$ des Musters für die Wellenzahlen $k = 4.85$ und $k = 3.95$ identifiziert. In Analogie zum periodischen Fall (vgl. Gl. 3.2) wird im endlichen der Ausdruck $(m, k)_{L,R}$ zur Charakterisierung der verschiedenen Anteile der Lösung benutzt.

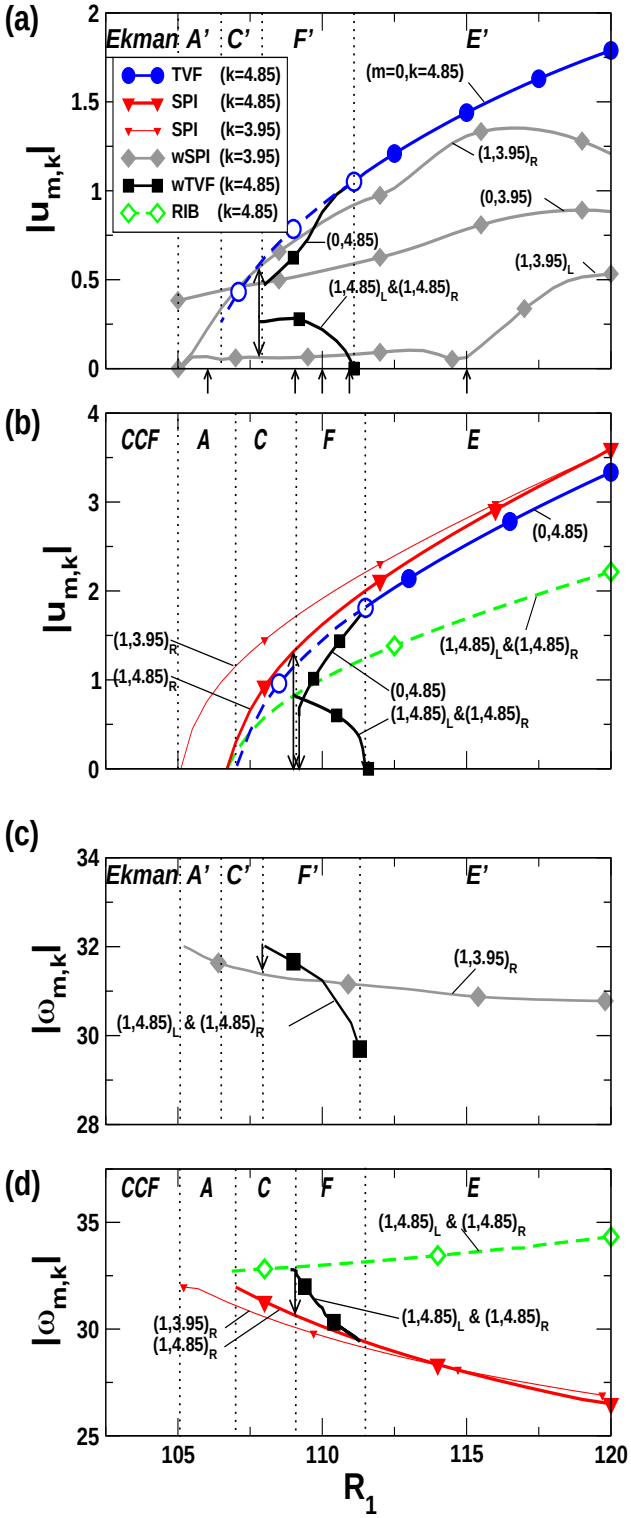


Abbildung 5.1 – Vergleich des Bifurkationsverhaltens von wTVF Lösungen für periodische (pbc) und endliche (rbc) Randbedingungen. (Abb. **(b)** und **(d)** entsprechen, bis auf geänderte Wellenzahl $k = 4.85$ der Abb. 4.3 aus Kap. 4.) Numerisch erhaltene Bifurkationsdiagramme für TVF, SPI, wTVF, wSPI und RIB Strukturen aufgetragen gegen R_1 für rbc **(a,c)** und für pbc **(b,d)**. Die zugehörigen axialen Wellenzahlen k dieser Strukturen sind in der Legende der Abbildung **(a)** zu finden. Durchgehende [gestrichelte] Linien mit gefüllten [leeren] Symbolen charakterisieren stabile [instabile] Strukturen. Dargestellt sind die Amplituden $|u_{m,k}|$ der dominanten axialen Fouriermoden des radialen Flusses u in Spaltmitte und die zugehörigen Frequenzen $|\omega_{m,k}|$ (siehe auch Text für weitere Erklärungen). Die Indizes, R und L, gehören zu links- und rechtsgewundenen Spiral Moden. Die kurzen Pfeile unterhalb der Abszisse in **(a)** geben die R_1 Werte an, deren zugehörige Snapshots in Abbildung 5.2 zu sehen sind. Die vertikalen Pfeile in der Abbildung indizieren transiente Übergänge zu den Endzuständen. Die Buchstaben ohne Striche in **(b)** und **(d)** entsprechen den Buchstaben, wie sie bereits in Kapitel 4 für die verschiedenen Gebiete mit unterschiedlichen Strukturen im periodischen System (pbc) eingeführt wurden. Analog symbolisieren Buchstaben mit Strichen in **(a)** und **(c)** solche Gebiete mit Strukturen im endlichen System (rbc). Diese sind in der unten stehenden Tabelle, mit Unterscheidung nach stabil (s), instabil (i), oder nicht existent (-), zusammengestellt. Weitere Kontrollparameter: $R_2 = -100, \eta = 0.5, \Gamma = 12$.

Region	A	A'	C	C'	F	F'	E	E'
TVF	-	-	i	i	i	i	s	s
SPI	s	-	s	-	s	-	s	-
wSPI	-	s	-	s	-	s	-	s
wTVF	-	-	-	-	s	s	-	-
RIB	i	-	i	-	i	-	i	-

5.2.1 Übergänge von TVF zu wSPI

Um das Bifurkationsverhalten der wTVF Lösungen im endlichen System verstehen zu können starten wir in Abbildung 5.1**(a)** (rechts) in Gebiet E' mit einem stabilen TVF Zustand der Wellenzahl $k = 4.85$. Bei Verminderung von R_1 verliert dieser Zustand seine Stabilität an der Grenze zwischen E' und F' und liegt danach nur noch als instabile Lösung vor. Soweit ist dieses Verhalten qualitativ identisch dem periodischen System **(b)**. Darüber hinaus sind aber auch einige Unterschiede zu erkennen:

(i) Die Stabilitätsschwellen sind leicht unterschiedlich. Im endlichen System sind diese zu etwas niedrigeren Werten hin verschoben (in der Abb. nach links).

(ii) Weiterhin geht der instabile TVF Zustand in **(a)** in den CCF-Ekman Zustand über, anstatt im CCF Grundzustand wie in **(b)**[1] zu enden. Bei weiterer Verminderung von R_1 in **(a)** hinein in Region A' ändert sich die lokale Wellenzahl des instabilen TVF Zustands im Bulk an der Grenze zwischen C' und A' von $k = 4.85$ zu $k = 3.95$ im CCF-Ekman Zustand. Die zugehörige kleine Amplitude $|u_{0,k=3.95}|$ der instabilen, rotationssymmetrischen Wirbellösung in A' und im linken Teil der Abbildung 5.1**(a)**, wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht gezeigt.

(iii) Der wichtigste und entscheidende Unterschied besteht aber darin, dass in C' und A' (für rbc) eine stabile wSPI Lösung und *nicht* wie in C und A (für pbc) eine reine SPI Struktur existiert.

In den beiden Gebieten F und F' liegt die reine TVF Lösung nur instabil gegenüber der wTVF Lösung mit der gleichen Wellenzahl (hier) $k = 4.85$ vor. Hierbei sei nochmals darauf hingewiesen, dass dies in **(b)** keineswegs verwunderlich ist, da die Wellenzahl k im periodischen System durch die Periodizitätslänge von außen fest vorgegeben wird. Im endlichen System **(a)** existieren hier mehrere verschiedene TVF Lösungen stabil parallel nebeneinander. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist in der Abbildung 5.1**(a)** nur eine dieser TVF Lösungen dargestellt. Am rechten Rand des Gebietes C in **(b)** (pbc) vollführen die wTVF Zustände einen Übergang zu der einzig stabil verbleibenden SPI Lösung mit gleicher, da fixierter Wellenzahl $k = 4.85$. Anders sieht dies im endlichen System **(a)** aus. Hier findet am rechten Rand von C' ein Übergang zu einer stabilen wSPI Lösung mit einer anderen Wellenzahl, nämlich $k = 3.95$, statt.

In **(b)** für pbc ist neben dem $k = 4.85$ SPI Lösungsast auch noch derjenige für die $k = 3.95$ SPI Lösung eingetragen, um zu zeigen, dass der Onset der $k = 3.95$ wSPI Lösung im rbc Fall **(a)** mit dem Onset der $k = 3.95$ SPI Lösung im pbc Fall **(b)** übereinstimmt. Im endlichen System **(a)** liegen die wSPI Zustände und im periodischen System **(b)** die SPI Zustände über den gesamten hier dargestellten Parameterbereich als stabile Lösungen vor.

Wie bereits im letzten Kapitel ausführlich diskutiert wurde, beinhaltet der Übergang von der instabilen wTVF Lösung in **(b)**, entlang der vertikalen Pfeile, einen instabilen, transient erscheinenden RIB Zustand. Es konnten allerdings keine hinreichenden Beweise dafür gefunden werden, dass der Übergang von wTVF hin zu wSPI Lösungen in **(a)** unter endlichen Randbedingungen auch über einen transienten RIB Zustand verläuft. Ein Indiz

[1] Die durch die Deckel im endlichen System in den Bulk permanent hineingetragenen Störungen sind die Ursache dieses anderen Grundzustands. Dieser ist in der Nähe der Deckel durch die Ekman Wirbel und in Systemmitte durch den CCF Strömungszustand dominiert.

dafür, dass dies *nicht* so ist, ist die $(0, 4.85)$ Mode, diese erscheint im wTVF Zustand, aber nicht in der RIB Struktur. Diese Mode verschwindet nicht und wird noch nicht einmal schwächer beim transienten Übergang von wTVF→wSPI an der Grenze zwischen C' und F', was sie aber im Fall einer (transienten) RIB Lösung sollte. In Bereich C' ist die $(0, 4.85)$ Mode weggelassen, da diese im Spektrum der $k = 3.95$ wSPI Lösung gegenüber den drei signifikanten $k = 3.95$ Moden vernachlässigbar ist.

Allgemein gesprochen gibt es drei Hauptaspekte beim Vergleich des endlichen Systems in Abbildung 5.1**(a)** mit dem periodischen System in **(b)**:

(i) Die wSPI Lösungen in **(a)** spielen die gleiche Rolle wie die reinen SPI Lösungen in **(b)** – dies soll auch durch die gestrichenen Buchstaben A', C', E' und F' in **(a)**, welche die unterschiedlichen Stabilitätsregionen im rbc Fall kennzeichnen, in Analogie zur pbc Situation in **(b)** (64; 66), mit ungestrichenen Buchstaben, verdeutlicht werden.

(ii) Während des Übergangs von TVF zu wSPI Zuständen über die wTVF Lösungen wird durch das endliche $\Gamma = 12$ System für die Parameter in Abbildung 5.1 **(a)** die gleiche Wellenzahl $k = 4.85$ für TVF und wTVF Strukturen selektiert, aber mit $k = 3.95$ eine *andere* für die wSPI Lösung. Dies bedeutet, dass beim Übergang zwischen toroidal geschlossenen TVF und wTVF Strukturen die Wellenzahl beibehalten wird, wohingegen sie sich beim transienten Übergang zu der helikalen Struktur der wSPI ändert. Dies konnte durch weitere Simulationen für andere TVF Zustände mit anderen Wellenzahlen als Startzustand bestätigt werden.

(iii) Die axialen Enden (Deckel) im Fall von rbc erzeugen rotationssymmetrische Ekman Wirbel, die alle hier diskutierten Strukturen modifizieren. Als eine Konsequenz sind alle Schwellen (punktierte vertikale Linien in Abb. 5.1**(a,b)**), für das Erscheinen oder die Änderung von rotierenden und toroidalen wie auch helikalen Strukturen im Bulk, zu kleineren R_1 Werten hin verschoben. Die Onsets der wTVF Lösungen hingegen, stimmen in beiden Fällen, d.h. die Linien zwischen E, F und E', F', sehr gut überein.

Frequenzen

Die Abbildungen 5.1 **(c)** und **(d)** stellen die Frequenzen $|\omega_{m,k}|$, mit denen die zugehörigen komplexen Modenamplituden $|u_{m,n}|$ in **(a)** und **(b)** oszillieren, dar. Die rotationssymmetrischen Moden $(0, k)$, welche dominant zu den Strukturen, TVF und wTVF, beitragen, sind rein reell und nicht oszillierend. Da die wTVF Strukturen in der Zeit periodisch rotierende Zustände sind, die *nicht* axial wandern, sind alle Frequenzen der einzelnen Moden entweder Null ($\omega_{0,4.85} = 0$) oder Vielfache von $\omega_{1,4.85}$. Somit ist die Dynamik der wTVF Lösung relativ einfach, während die räumliche Struktur deutlich komplexer ist (vgl. auch Abb. 5.2**(a)**).

SPI und RIB Lösungen wachsen für pbc Bedingungen **(d)** in einer primären Hopf Bifurkation mit einer gemeinsamen Frequenz aus dem CCF heraus und entwickeln sich dann unterschiedlich mit wachsendem R_1. Die RIB Frequenzen folgen dabei weitestgehend den linearen Frequenzen (gewonnen mittels Shooting Verfahren, siehe Anh. A) und wachsen linear mit diesen an, während die nichtlinearen SPI Frequenzen zunächst mit wachsendem R_1 abfallen. Der Unterschied zwischen den SPI Frequenzen für pbc **(d)** und rbc **(c)** ist eine Konsequenz des Reynolds Stress (63; 65) getriebenen, axialen Nettodurchflusses, der unter pbc Bedingungen entgegengesetzt der SPI Propagationsrichtung orientiert ist.

Im endlichen System wird dieser Nettofluss durch die starren Deckel unterdrückt, was zu einer Verschiebung der axialen Phasengeschwindigkeit und somit auch der Frequenzen (63) führt. Dieser Effekt lässt sich gut bei einem Vergleich der wSPI Frequenzen in **(c)** mit den

SPI Frequenzen in **(d)** erkennen. Zuletzt bleibt festzuhalten, dass die Frequenzen der SPI Lösung für pbc mit den beiden unterschiedlichen Wellenzahlen, $k = 3.95$ und $k = 4.85$, nahezu identisch sind.

Andererseits sind die wTVF Frequenzen aber deutlich weniger durch die unterschiedlichen Randbedingungen beeinflusst. In der Tat sind diese an den Bifurkationsschwellen E-F**(d)** und E'-F'**(c)** nahezu identisch. Der Grund hierfür ist, dass der intrinsische Nettofluss der $(1, 4.85)_L$ Mode (linksgewundendener Anteil) durch den entsprechenden, diesem gerade entgegen gerichteten Anteil der $(1, 4.85)_R$ Mode (rechtsgewundendener Anteil) mit gleichem Betrag im wTVF Zustand, kompensiert wird. Dies gilt sowohl für den pbc, als auch den rbc Fall. Weiterhin ist das Verhalten der Frequenzen von wTVF und (w)SPI Lösungen bei Variation von R_1 in Region F $[F']$ deutlich unterschiedlich.

Die Tatsache, dass die Frequenz der wTVF Lösung in Abbildung 5.1**(c)** in der Nähe des Onsets mit derjenigen, der voll entwickelten SPI Lösung übereinstimmt ist nur auf die hier gewählten Kontrollparameter zurückzuführen. In **(d)** ist ein deutlicher Unterschied von wTVF und SPI Frequenzen in der Nähe des Onsets der wTVF Struktur festzustellen. Durch weitere Simulationen konnte die Unabhängigkeit dieser Frequenzen bestätigt werden.

Raumzeitliches Verhalten

Zur Darstellung der raumzeitlichen Entwicklung der Strömungen beim Übergang zwischen den verschiedenen, hier diskutierten, Wirbel Strukturen werden zwei verschiedene Methoden benutzt. Mittels numerisch ermittelten Daten werden, wie bereits zuvor gesehen, 3D Plots von Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ erzeugt. Weiterhin werden diese mit experimentell ermittelten Ergebnissen von Pfister et al. (4) verglichen.

Abbildung 5.2**(a)** zeigt, wie sich die Isoflächen der azimutalen Vortizität beim Übergang der Strukturen von TVF (Snapshot **#5**) → wTVF **(#4, #3)** → wSPI **(#2, #1)** ändern. Die hier dargestellten Strukturen in **(a)** gehören zu den stationären – im Sinne von vollkommen *einrelaxierten* und *nicht transienten* – Zuständen, deren R_1 Werte in Abbildung 5.1**(a)** durch die kurzen Pfeile unter der Abszisse gekennzeichnet sind.

Bei Verminderung von R_1 wird der TVF Zustand **(#5)** instabil gegenüber der ebenfalls toroidal geschlossenen, aber axial modulierten wTVF Lösung **(#4)**, wobei die Wellenzahl, $k = 4.85$, beibehalten wird. In der wTVF Struktur wächst die Modulationsamplitude aus der Mitte des Bulks heraus an, da dort der, von den Rändern induzierte, Einfluss der Ekman Wirbel minimal ist. Da die Anteile der $m \neq 0$ Moden bei Verringerung von R_1 anwachsen, wird der ursprünglich rotationssymmetrische TVF Zustand zunehmend deformiert und die Wirbelschläuche werden an gewissen φ Position **(#4)** zusammengeschnürt. Dies bedeutet, dass die maximale Vortizität in der $r - z$ Ebene an diesen φ Positionen mit R_1 abnimmt – die Wirbelintensität wird dort also schwächer. Hierbei ist zu beachten, dass sowohl diese Einschnürungen, wie auch die Defekte selbst mit der gesamten Struktur wie ein starrer Körper rotieren. Dabei sind die Wirbelschläuche aber ebenfalls in axialer Richtung verzerrt. Schließlich werden die Isoflächen vollständig zusammengeschnürt und abgetrennt **(#3)**. Nach Abtrennung der Schlauchenden werden neue Verbindungen zwischen Wirbelschläuchen, auf zuvor unterschiedlichen Ebenen, hergestellt und die Vortizität wächst nun wieder an bis hin zur vollständigen Bildung einer wSPI **(#2)** Struktur mit einer kleineren Wellenzahl $k = 3.95$. Der letzte Snapshot, **(#1)**, zeigt eine Situation mit einer schwach überkritischen wSPI Lösung mit kleiner azimutaler Vortizität. In diesem Fall dominiert der Einfluss der, *immer* im System verbleibenden, Ekman Wirbel die Isovortizitätsfläche des hier gewählten Wertes $\Omega_\varphi = \pm 40$.

Ein kurzer Vergleich mit dem Experiment soll an dieser Stelle die sehr guten Übereinstimmungen zwischen Theorie und Praxis verdeutlichen. Hierzu ist in Abbildung 5.2**(b)** das

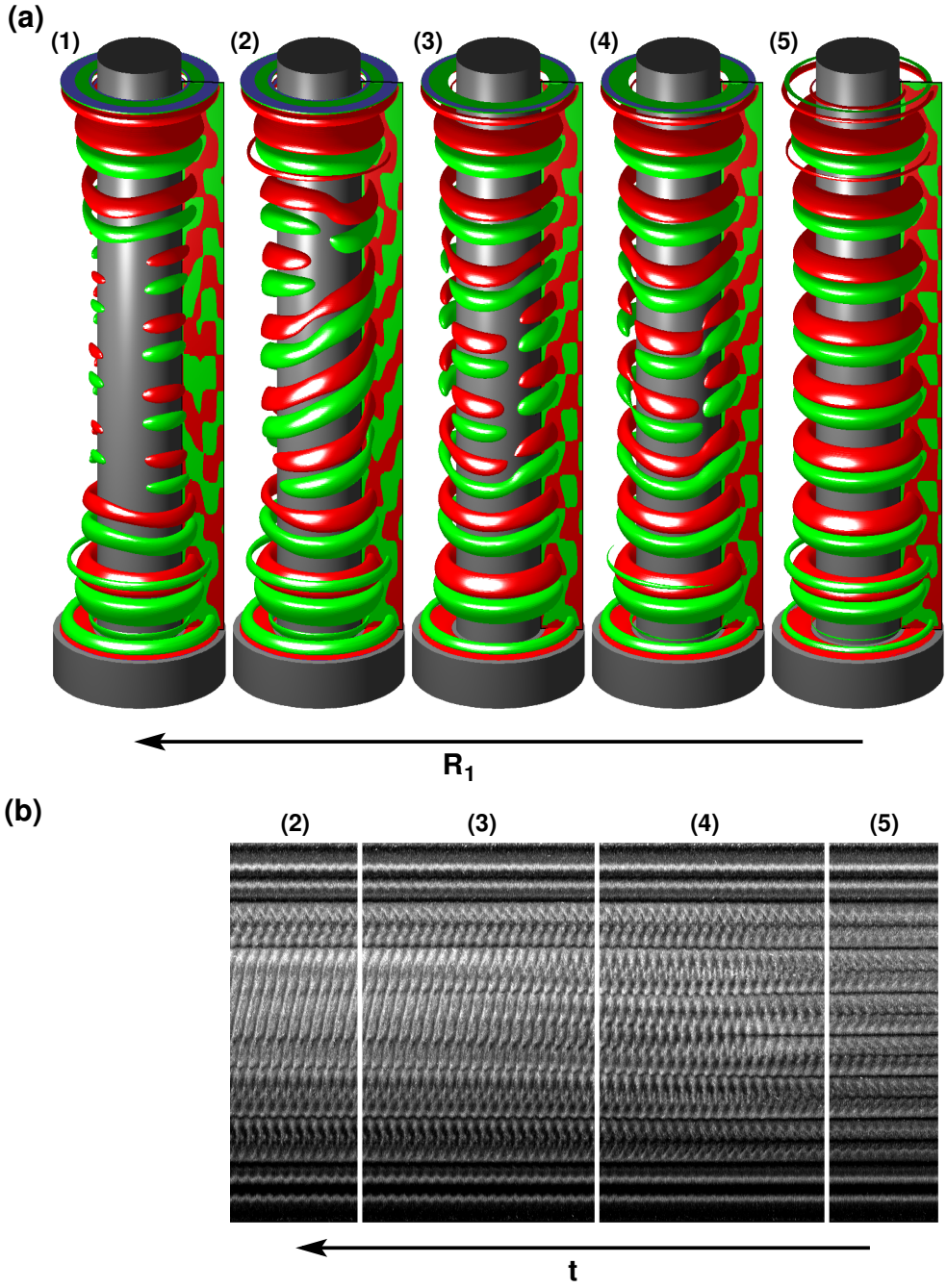


Abbildung 5.2 – Raumzeitliche Veränderungen der Wirbel Strukturen während des Übergangs von TVF → wTVF → wSPI (von rechts nach links). **(a)** Numerisch erhaltene Snapshots von Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 40$ (rot: +40, grün: -40). Zu sehen ist, wie schon früher, der ganze 2π Zylinder, um die gesamte Struktur in einem einzigen 3D Plot darzustellen. In der $r - z$ Ebene, auf der rechten Seite jedes Plots charakterisiert rot [grün] positive [negative] Vortizität. Die zugehörigen Reynoldszahlen der Snapshots, $R_1 = 106$ **(#1)**, 109 **(#2)**, 110 **(#3)**, 111 **(#4)**, 115 **(#5)**, sind durch Pfeile unter der Abbildung 5.1 markiert. Alle Snapshots in **(a)** zeigen stationäre (d.h. vollkommen einrelaxierte und *nicht* transiente) Strukturen. In **(b)** sind experimentelle Ergebnisse zum Vergleich dargestellt. Zu sehen ist die Visualisierungen des Flusses nach einem instantanen Sprung von $R_1 = 115$ auf $R_1 = 109$ (4). Die hier zu sehende Aufnahme umfasst etwa 13 Diffusionszeiten. Die Systemlänge beträgt in allen Abbildungen, Simulation **(a)** und Experiment **(b)** jeweils $\Gamma = 12$. Weitere Kontrollparameter: $R_2 = -100, \eta = 0.5$.

raumzeitliche Verhalten der Strömungen, nach einem instantanen Sprung in der Reynoldszahl von $R_1 = 115$ herunter auf 109 dargestellt (für weitere Details siehe Bildunterschrift). Der Anfangszustand in Abbildung **(#5)** ist eine TVF Lösung mit einer Wellenzahl von $k = 4.8$. Nach dem Abwärtsschritt in R_1 vollzieht diese Lösung in Abbildung **(#4)** einen Übergang zum wTVF Zustand, der sich aus der Mitte des Bulks heraus entwickelt und die gleiche axiale Wellenzahl wie der ursprüngliche TVF Zustand besitzt. Nach einer weiteren, transienten Entwicklung in Abbildung **(#3)**, die zu der zuvor beschriebenen 'Sprung' Bifurkation gehört, entsteht in dem System schließlich eine wSPI Lösung mit Wellenzahl $k = 3.95$, wie sie in Abbildung **(#2)** zu sehen ist. Die Tatsache, dass im Experiment nur ein großer R_1 Schritt gemacht wurde und somit genau genommen nur transiente Strukturen zu sehen sind, ist einer kontinuierlichen Aufnahme der einzelnen Strukturen in einer einzigen Grafik geschuldet. Die verschiedenen Zustände TVF **(#5)**, wTVF **(#4)** und wSPI **(#2)** existieren aber auch im Experiment ebenso stationär und sind topologisch identisch den hier gezeigten. D.h. in **(#5)** sieht man eine TVF Struktur, in **(#4)** die beginnende Modulation dieser TVF Lösung, d.h. eine wTVF Lösung, und schließlich in **(#2)** eine wSPI Lösung im Bulk, die oben und unten von einer Ekman Struktur begrenzt werden.

Wellenzahl Selektion

Aufgrund der, in axialer Richtung gegebenen, endlichen Randbedingungen können die toroidal geschlossenen Strukturen, TVF und wTVF, mit diskreten und verschiedenen axialen Wellenzahlen, abhängig von den Anfangsbedingungen und ebenso vom Computer induzierten rauschen, auftreten. Im Parameterbereich der Region E' in Abbildung 5.1 **(a)** konnten mindestens drei *parallel stabil* existierende TVF Zustände ermittelt werden. Diese besitzen 7, 8 oder 9 Wirbelpaare mit einer jeweiligen lokalen Wellenzahl $k = 3.83$, 4.85 und 5.81 in der Mitte des Bulks. In den Abbildungen 5.1 und 5.3, ist, aus Gründen der Übersichtlichkeit, jeweils nur der TVF Zustand mit 8 Wirbelpaaren dargestellt. Alle diese verschiedenen TVF Zustände vollziehen einen Übergang zu entsprechenden wTVF Lösung in Region F' bei einem jeweils zugehörigen R_1 Wert, *ohne* dabei jedoch ihre Wellenzahl zu verändern. Danach 'springen' schließlich alle wTVF Zustände, einschließlich einer Wellenzahländerung auf die $k = 3.95$ wSPI Lösung. In allen Simulationen wurde, bei den hier untersuchten Kontrollparametern, für beliebige TVF Lösungen als Anfangszustände mit unterschiedlichen Wellenzahlen, nach dem Übergang immer die wSPI Lösung mit $k = 3.95$ angenommen.

Die einzelnen Wellenzahlen wurden sowohl in Spaltmitte, wie auch in der Mitte des Bulks bestimmt. Ein Vergleich der Numerik mit dem Experiment zeigt, dass die experimentell ermittelten Wellenzahlen mit $k = 4.53$ für (w)TVF und $k = 4.03$ für wSPI Lösungen leicht von den numerischen Werten, $k = 4.85$ für (w)TVF und $k = 3.95$ für wSPI Zustände, abweichen. Entscheidend ist aber, dass sowohl in der numerischen Simulation, wie auch in den experimentellen Ergebnissen der *gleiche 'Sprung'* in k beim Übergang von wTVF $\rightarrow$ wSPI zu sehen ist. Endzustand in der numerischen Simulation [im Experiment] ist eine wSPI Lösung mit Wellenzahl $k = 3.95$ [$k = 4.03$]. Die kleinen Unterschiede in den Wellenzahlen sind wahrscheinlich auf die leicht unterschiedlich starken Einflüsse der Ekman Wirbel, in der Theorie und im Experiment, auf die im Bulk vorhandene Struktur zurückzuführen.

5.2.2 Übergang von wSPI zu TVF

Wie im letzten Kapitel 4 ausführlich diskutiert, existiert im periodischen System eine analoge Sequenz der Bifurkation von SPI $\rightarrow$ wSPI $\rightarrow$ TVF Lösungen. Dabei vollzieht sich der transiente Übergang von der wSPI hin zur TVF Lösung ebenfalls gemäß einer 'Sprung'

Bifurkation (56; 66). Im Fall eines endlichen Systems, mit festen Deckeln, sieht dieser Übergang jedoch gänzlich anders aus. Die wichtigsten Unterschiede hierbei sind:

(i) Zunächst einmal existieren, wie zu Beginn dieses Kapitels bereits erläutert, im endlichen System gar *keine reinen* SPI Lösungen mehr. Diese werden durch wSPI Strukturen ersetzt, die für stärker gegenrotierende Zylinder $R_2 < -80$ (links des γ Punktes höherer Codimension), in einer primären Bifurkation als stabile Lösung aus dem Grundzustand, der CCF-Ekman Struktur, herausbifurkieren. D.h., wenn überhaupt, so kann nur ein Übergang wSPI→TVF existieren.

(ii) Desweiteren existieren bei moderaten R_2 keine stabilen wSPI Lösungen unter rbc Bedingungen. Dies gilt auch insbesondere für die Bereiche, in denen die Übergänge von SPI → TVF bei pbc gefunden wurden. Da bereits die Ausgangsstruktur nicht stabil vorliegt, können so auch keine Übergänge stattfinden.

(iii) Es gibt eine andere Art von Übergang zwischen wSPI und TVF Strukturen, der oberhalb der Region E' in Abbildung 5.1**(a)** zu finden ist. Dieser Übergang zeichnet sich dadurch aus, dass er durch einen propagierenden Defekt erzeugt wird, der sich an einem Ekman Wirbel ablöst und durch den Bulk wandert. Dabei trennt dieser Defekt Gebiete von wSPI und wTVF Lösungen voneinander, wobei er die wSPI Struktur aus dem System verdrängt und die wTVF Struktur hinter sich herzieht. Nachdem er schließlich den ganzen Bulk durchwandert hat, verschwindet die Modulationsamplitude der wTVF Struktur und der TVF Zustand verbleibt als stabile Endlösung im System. Diese Art des Übergangs ist ein weiteres Beispiel für Frontpropagationen (60) im System.

Das Übergangsszenario zwischen wSPI und TVF Lösungen mittels eines propagierenden Defektes, weist einige Übereinstimmungen mit solchen Defekt Strukturen auf, wie sie in (60; 4) beschrieben werden. Dort werden Defekte beschrieben, die verschiedene Bereiche mit SPI Strukturen, unterschiedlicher Propagationsrichtung, voneinander trennen, und bei Wanderung durch das System einen Übergang von einer L-SPI zu einer R-SPI Struktur oder umgekehrt herbeiführen können. Auf ähnliche Weise trennt der Defekt in dem hier diskutierten Fall eine helikale wSPI Struktur von einer toroidal geschlossenen wTVF Lösung. Dies ist etwa vergleichbar mit dem Ekman-SPI Defekt (64) in der Nähe der beiden Deckel, bei dem auf ähnliche Art und Weise Phase generiert, bzw. vernichtet wird.

Bifurkations Szenario

In diesem Abschnitt werden nun die Bifurkationseigenschaften beim Übergang von wSPI → TVF, der im endlichen, anders als im periodischen System, durch einen Defekt erzeugt wird, diskutiert. Das zugehörige Bifurkationsdiagramm, das in Abbildung 5.3 zu sehen ist, stellt eine Erweiterung des R_1 Bereiches, des aus Abbildung 5.1**(a)** bekannten Bifurkationsverhaltens, einschließlich der zugehörigen Frequenzen **(b)**, dar. Die kurzen Pfeile unterhalb der Abszisse charakterisieren die R_1 Werte, für welche Snapshots der Isovortizitätsflächen in Abbildung 5.4**(a)** zu sehen sind und die später noch ausführlicher diskutiert werden.

Als Startzustand betrachte man eine wSPI Lösung bei kleinen R_1 (in der Abb. 5.3 links). Mit anwachsendem R_1 über die linke Grenze von Region P_1, löst sich (hier) am oberen Ekman-wSPI Defekt, der die obere (ebenso natürlich auch die untere) Ekman Struktur von der wSPI Struktur trennt, ein neuer wTVF-wSPI Defekt, der von oben nach unten durch den Bulk wandert. Dabei bildet sich hinter diesem propagierenden Defekt ein Gebiet

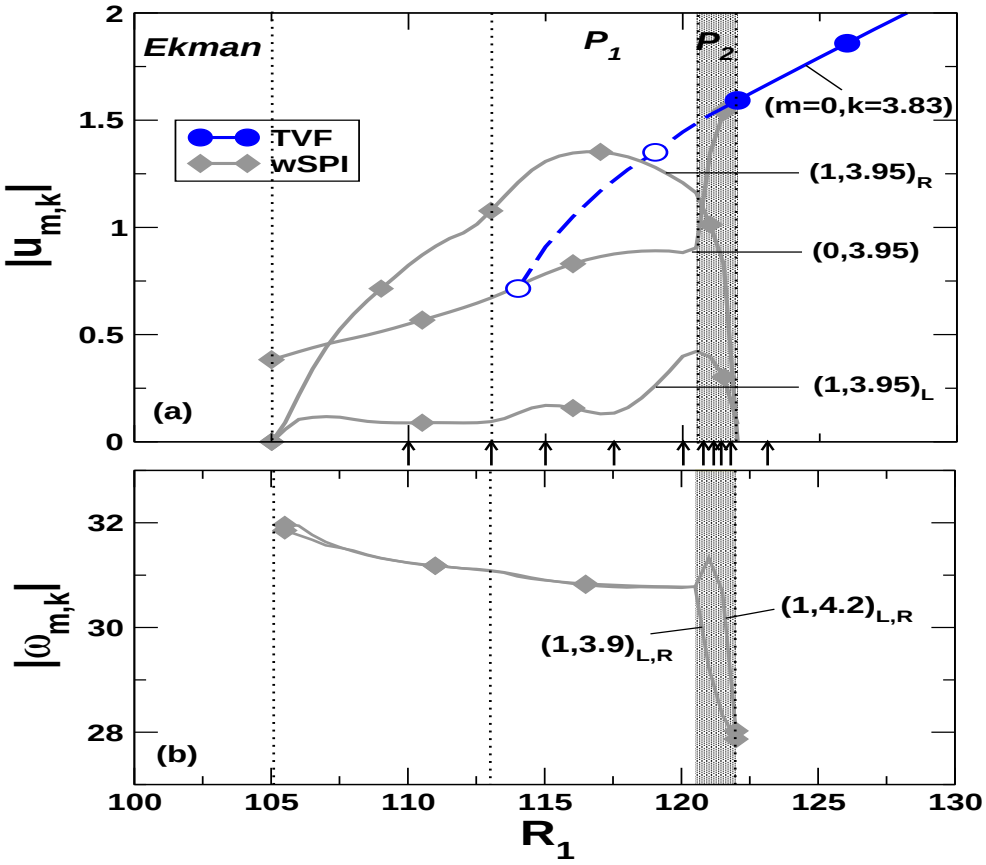


Abbildung 5.3 – Numerisch erhaltenes Bifurkationsdiagramm der Moden $|u_{m,k}|$ **(a)** und zugehöriger Frequenzen $|\omega_{m,k}|$ **(b)** für TVF und wSPI Zustände, aufgetragen gegen R_1 für rbc. Für weitere Details siehe auch Bildunterschrift der Abbildung 5.1. Die kurzen Pfeile unter der Abszisse in **(a)** identifizieren erneut R_1 Werte, bei denen Snapshots der Strukturen aufgenommen wurden und die in Abbildung 5.4 zu sehen sind. Der lange Pfeil identifiziert die Richtung des Übergangs von wSPI → TVF, wie er in Abschnitt 5.2.2 diskutiert wird. Im Bereich P_1 existiert der Defekt bereits, ist aber noch an einem Ende des Systems an einem der Ekman Wirbel fixiert und rotiert in azimutaler Richtung mit der gesamten Struktur. Der Bereich P_2 beinhaltet das Verhalten der Amplituden während des Übergangs von wSPI zu TVF Lösungen. Weitere Kontrollparameter: $R_2 = -100, \eta = 0.5, \Gamma = 12$.

mit toroidal geschlossener wTVF Lösung, zwischen dem ersten Ekman Wirbel in der Nähe des oberen Deckels und dem, nach unten wandernden, wTVF-wSPI Defekt, aus. Für den gesamten Parameterbereich P_1 in Abbildung 5.3 gilt jedoch, dass dieser Defekt bereits existiert und in azimutaler Richtung mit der Struktur rotiert, in seiner axialen Position aber noch am oberen Ekman Wirbel fixiert bleibt. In diesem Bereich ändert sich die axiale Ausdehnung des wTVF Bereiches demzufolge noch *nicht*.

Am linken Rand von P_2 beginnt dieser Defekt nun abwärts, zum unteren axialen Ende, zu wandern. Dies ist insgesamt ein transienter Zustand, der schließlich in einem reinen $k = 3.83$ TVF Zustand (mit 7 Wirbelpaaren) endet, nach der Auslöschung des Defektes

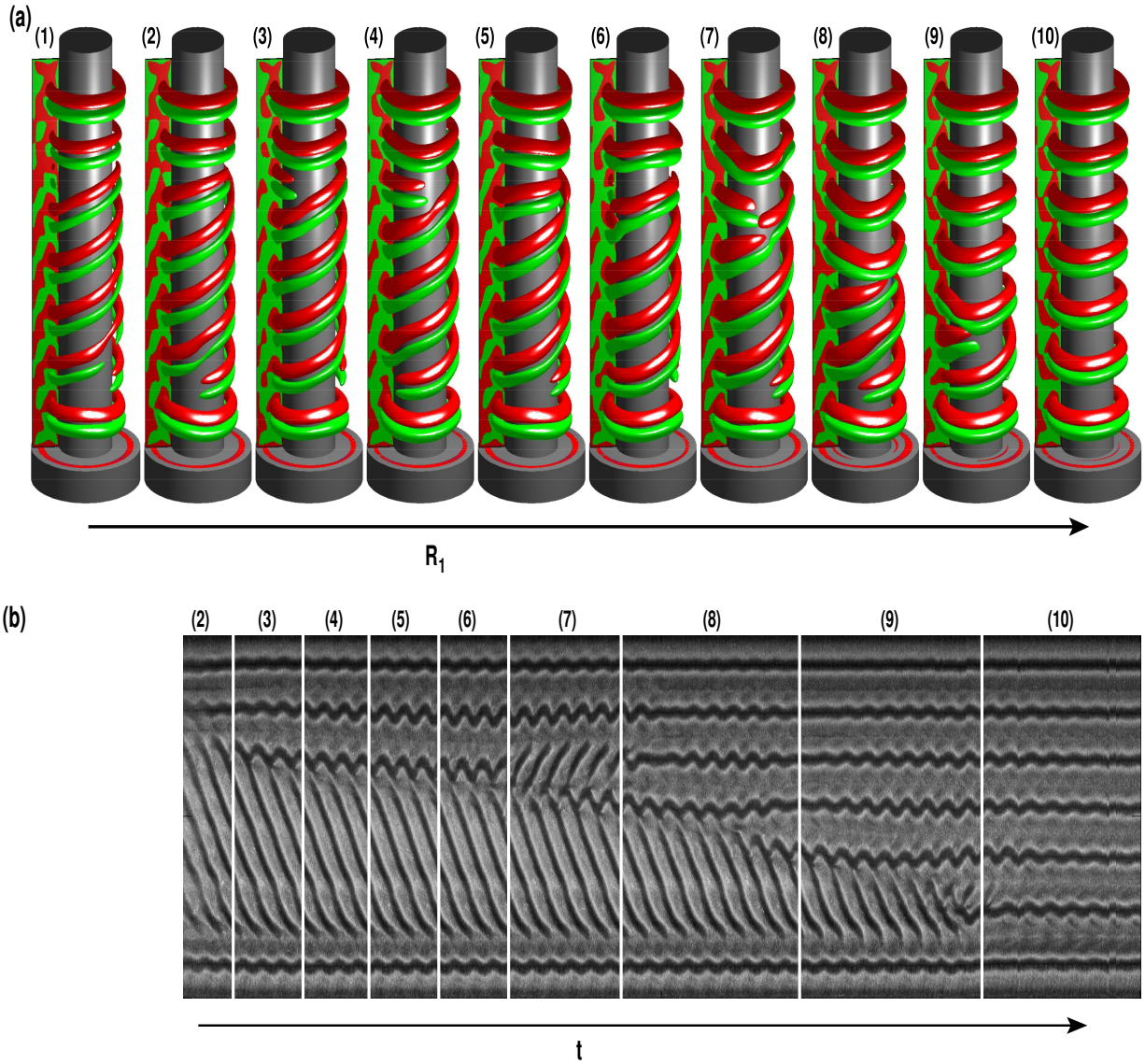


Abbildung 5.4 – Raumzeitliche Veränderungen der Wirbel Strukturen während des Übergangs von wSPI → TVF mittels eines propagierenden Defekts (von links nach rechts). Für weitere Details siehe auch den Film 3.avi. **(a)** Numerisch erhaltene Snapshots von Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 40$ (rot: +40, grün: -40). Zu sehen ist, wie in Abbildung 5.2, der ganze 2π Zylinder, um die gesamte Struktur in einem einzigen 3D Plot darzustellen. In der $r - z$ Ebene, auf der linken Seite jedes Plots charakterisiert rot [grün] positive [negative] Vortizität für eine fixierte φ Position. Die zugehörigen Reynoldszahlen der 10 Snapshots sind durch Pfeile an der Abszisse der Abbildung 5.3**(3)** markiert. Die Snapshots **(5)-(9)** in **(a)** zeigen transiente Wirbel Strukturen, mit einem nach unten wandernden Defekt, der im einzelnen im Text näher beschrieben wird. Alle anderen Snapshots in **(a)** repräsentieren stationäre, d.h. vollkommen *einrelaxierte* und *nicht transiente* Strukturen. In **(b)** sind erneut experimentelle Ergebnisse zum Vergleich dargestellt. Zu sehen ist die Visualisierungen des Flusses nach einem instantanen Sprung [2] von $R_1 = 107$ auf $R_1 = 120$ (4). Die hier zu sehende Aufnahme umfasst etwa 11 Diffusionszeiten. Die Systemlänge beträgt in allen Abbildungen, Simulation **(a)** und Experiment **(b)** jeweils $\Gamma = 12$. Weitere Kontrollparameter: $R_2 = -100, \eta = 0.5$.

am unteren Ekman-wSPI Defekt. Der graue Bereich P_2 zeigt das Verhalten der Amplituden, während des Übergangs von wSPI zu wTVF Lösungen. Diese Übergänge sind im Bereich, $120 \lesssim R_1 \lesssim 122$, bei einer Relaxationszeit von 5 Diffusionszeiten zwischen zwei R_1 Schritten mit $\Delta R_1 \simeq 1$ gefunden worden. Bei einer Verringerung der Schrittweite und einer Erhöhung der Diffusionszeit zwischen zwei R_1 Schritten wird sich der Bereich P_2, im Idealfall bis hin zu einer einzelnen Linie, zusammenziehen, der die beiden Bereiche von stationären und propagierenden Defekten trennt.

Der im System zurückbleibende Endzustand ist ein reiner TVF Zustand mit einer Wellenzahl $k = 3.83$ (mit 7 Wirbelpaaren), der sich von dem TVF Zustand aus Abbildung 5.1**(a)** mit der Wellenzahl $k = 4.85$ (mit 8 Wirbelpaaren) unterscheidet. Wie bereits erwähnt, gehören diese beiden TVF Lösungen zu einer ganzen Familie von parallel stabil existierenden TVF Zuständen, die sich in ihrer Wellenzahl und damit auch der Anzahl an Wirbelpaaren im Bulk unterscheiden (siehe hierzu auch Abs. 5.2.1).

Anders als der Übergang von SPI→TVF unter pbc Bedingung ist der Übergang wSPI → TVF, auch ohne axialen Durchfluss, symmetrieentartet. Wie in Abbildung 5.4 zu sehen, wird eine rechtsgewundene R-wSPI Lösung durch einen *abwärts* propagierenden Defekt, der einen wTVF Zustand hinter sich herzieht, im Bulk zusammengeschnürt und schließlich vollständig ausgelöscht. Andererseits wird eine linksgewundene L-wSPI Lösung analog durch einen, am unteren Ekman Wirbel entstehenden und von dort aus *aufwärts* wandernden, Defekt aus dem System verdrängt. Das Ergebnis ist aber in beiden Fällen der identische TVF Zustand (hier mit $k = 3.83$ und 7 Wirbelpaaren). Der wTVF-wSPI Defekt entsteht also immer am phasengenerierenden wSPI-Ekman Defekt.

Wie auch der Übergang TVF→wSPI via wTVF ist auch dieser Defekt Übergang im Experiment zu finden. Ein Vergleich von Theorie und Experiment ist hierzu in Abbildung 5.4**(b)**, wie schon zuvor in Abbildung 5.2**(b)**, dargestellt. Auch dort sind wieder Snapshots des raumzeitlichen Strömungsflusses während des transienten Übergangs, nach einem anfänglichen Sprung (linker Rand der Abb. 5.4**(b)**) von $R_1 = 107$ auf 120 zu sehen. In beiden Sequenzen erscheinen, sowohl die zuvor, bereits erwähnte stationäre wSPI Lösung, wie auch die, nach und nach in das wSPI Gebiet eindringende, hinter dem Defekt hergezogene wTVF Lösung, als transiente Strukturen.

Raumzeitliches Verhalten und Wellenzahl Selektion

In der Abbildung 5.4**(a)** sind 10 Snapshots der numerisch erhaltenen Isoflächen der azimutalen Vortizität für verschiedene R_1 Werte, wie in Abbildung 5.3 durch die Pfeile unter der Abszisse markiert, dargestellt. Zusammen mit dem raumzeitlichen Plot der experimentellen Daten der Abbildung 5.4**(b)** sind die raumzeitlichen strukturellen Änderungen während des Übergangs von wSPI → TVF sehr gut zu erkennen.

Startet man in dem wSPI Zustand **(#1)** der Abbildung 5.4**(a)** und erhöht R_1, so kann man erkennen, dass das zweite Wirbelpaar von oben wavyartig deformiert wird. Gleichzeitig dehnt sich der wTVF-wSPI Defekt zwischen dem oberen, zwar noch toroidal geschlossenen, nun aber axial modulierten Wirbel und der Spiral Struktur, in den Bulk hinein in axialer Richtung **(#2-#5)** aus. Sowohl die wavyartigen Deformationen, wie auch der gesamte Defekt propagieren dabei in azimutaler Richtung mit der gesamten Struktur. Die Amplitude in den Modulationen wird mit zunehmendem R_1 kontinuierlich stärker, bis sich der Defekt schließlich am oberen Rand ablöst und von oben nach unten durch den Bulk wandert **(#6)-(#9)**. Hierbei drückt er das Gebiet der wSPI Struktur nach unten und zieht gleichzeitig eine wTVF Struktur in das System hinein. Dabei schrumpft der wSPI Bereich, während gleichzeitig der wTVF Bereich anwächst.

Interessanter Weise ändert sich während dieses ganzen, doch recht komplexen, tran-

sienten Prozesses die Wellenzahl, weder in der wSPI Lösung noch in der wTVF Lösung entscheidend. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die neuen wTVF Wirbel unmittelbar hinter dem propagierenden Defekt entstehen. Vergleicht man etwa die Bilder **(#7)** und **(#8)**, so erkennt man, dass die Wirbelschläuche abgeschnürt und separiert werden und nach der vollständigen Abtrennung der Schläuche neue Verbindungen entstehen und somit ein neuer wTVF Wirbel entsteht (vgl. auch Film 3.avi). Schließlich erreicht der Defekt das untere Ende des Systems und vermischt sich mit dem unteren Ekman Wirbel **(#10)**, so dass am Ende im System eine reine TVF Struktur zurückbleibt, nachdem der wTVF Zustand wegrelaxiert ist.

Wie schon vorher sind in der Abbildung 5.4**(b)** experimentelle Ergebnisse, nun für den Defekt-Übergang von wSPI→TVF, nach einem anfänglichen Sprung (links) von $R_1 = 107$ auf 120, dargestellt. Die im Experiment gemessenen Wellenzahlen für wSPI, $k = 4.03$, und TVF, $k = 3.84$, Lösungen stimmen dabei sehr gut mit denen aus der numerischen Simulation für wSPI, $k = 3.95$, und TVF, $k = 3.83$, Zustand überein.

Als letztes soll an dieser Stelle noch ein Blick auf die Anteile der dominanten wSPI und TVF Moden bei dem transienten Übergang von wSPI zu TVF Lösungen mittels des propagierenden Defektes geworfen werden. Hierzu ist in Abbildung 5.5 ein transienter Zwischenzustand aus dem Bereich P_2 dargestellt. In **(a)** sind erneut Isovortizitätsflächen der azimutalen Vortizität ($\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 40$, rot: +40, grün: -40) der gesamten Struktur zu sehen. Weiterhin sind zugehörige Profile des radialen u Feldes **(b)** und des axialen w Feldes **(c)** in der $r - z$ Ebene für die verschiedenen Moden $m = 0$ (blau) und $m = -1$, hier aufgespalten in Real- (rot) und Imaginärteil (grün), aufgetragen. In dem $m = 0$ Anteil des w Feldes lassen sich sehr gut die beiden Ekman Wirbel in der Nähe der beiden Zylinder, sowie ihr vernachlässigbarer Einfluss in dem Bereich der noch voll ausgeprägten wSPI Struktur, unterhalb des Defektes, erkennen. Zwischen dem Defekt und dem oberen Ekman Wirbel zeigt sich das typische Profil eines wTVF Zustands in dem $m = 0$ Anteil. Umgekehrt ist in dem Bereich der wSPI Struktur der $m = -1$ Anteil dominant, wobei bei diesem Real- und Imaginärteil klassischer Weise um $\pi/2$ phasenverschoben vorliegen. Diese Anteile sind aber auch in der wTVF Lösung endlich.

Vergleich pbc und rbc Randbedingungen

Der grundlegende Unterschied zwischen pbc und rbc Randbedingungen basiert auf den, im endlichen System immer vorhandenen Ekman Wirbeln, die eine permanente, rotationssymmetrische, $m = 0$ Störung in das System hinein induzieren.

Wie in den beiden letzten Abschnitten gezeigt wurde, ist der Übergang von TVF zu wSPI über wTVF Lösungen im endlichen System im Wesentlichen analog demjenigen im periodischen System. Der einzige Unterschied besteht in der Existenz von wSPI Strukturen anstatt reiner SPI Lösungen. Anders ist dies beim Übergang in umgekehrter Richtung von SPI zu TVF über wSPI Lösungen, wie er im periodischen System gefunden wurde. Dieser existiert im endlichen so überhaupt **nicht**, da in den jeweiligen Bereichen, sowohl im Experiment, wie auch in der Numerik *keine stabilen* (w)SPI Lösungen vorliegen und somit bereits der Ausgangszustand für diesen Übergang fehlt. Stattdessen existiert aber ein anderer Übergang zwischen wSPI und TVF Strukturen, der über einen propagierenden Defekt abläuft. Dabei wandert dieser Defekt, der zwei Bereiche mit unterschiedlichen Strukturen voneinander trennt, einmal durch den Bulk hindurch.

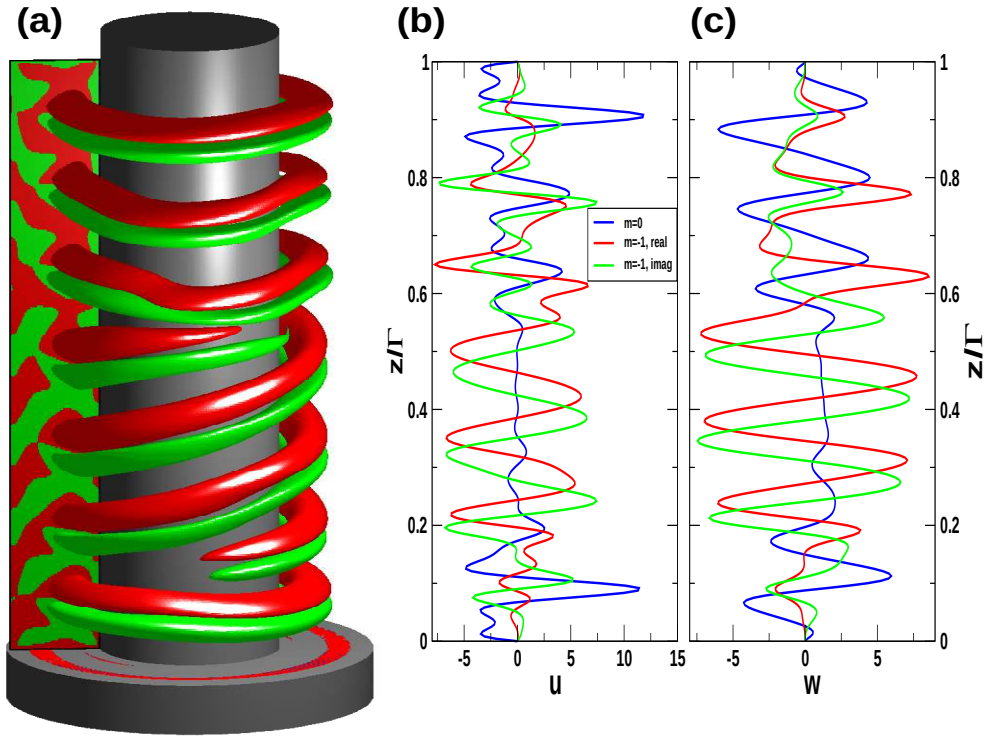


Abbildung 5.5 – **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \pm 40 = \partial_z u - \partial_r w = \pm 40$, (rot: +40, grün: -40) der Struktur im $\Gamma = 12$ System während der transienten Wanderung des Defektes von oben nach unten durch den Bulk. Bei diesem Snapshot befindet sich der Defekt im System etwa bei $Z/\Gamma \approx 0.6$. Zudem sind die zugehörigen Profile des radialen u Feldes **(b)** und des axialen w Feldes **(c)** in axialer Richtung für die verschiedenen Moden $m = 0$ (blau) und $m = -1$ (aufgespalten in Real- (rot) und Imaginärteil (grün)) dargestellt. In dem $m = 0$ Anteil des w Feldes lassen sich sehr gut die beiden Ekman Wirbel in der Nähe der beiden Zylinder, sowie ihr vernachlässigbarer Einfluss in dem Bereich der noch voll ausgeprägten wSPI (unterhalb des Defektes, $0.2 \lesssim z/\Gamma \lesssim 0.55$) Lösung erkennen. Zwischen dem Defekt und dem oberen Ekman Wirbel ($0.65 \lesssim z/\Gamma \lesssim 0.85$) zeigt sich das typische Profil eines wTVF Zustands im $m = 0$ Anteil. Umgekehrt ist in dem Bereich der wSPI der $m = -1$ Anteil dominant, wobei bei diesem Real- und Imaginärteil klassischer Weise um $\pi/2$ Phasenverschoben vorliegen. Diese sind aber auch im wTVF Zustand endlich. Kontrollparameter: $R_1 = 122, R_2 = -100, \eta = 0.5$.

5.3 Lokalisierte Defekte und Strukturen

Bisher wurden die Übergänge von TVF zu wSPI Strukturen über stationäre wTVF Lösungen und umgekehrt von wSPI zu TVF Zuständen durch einen transient propagierenden Defekt im endlichen System nur für fixierten Kontrollparameter, $R_2 = -100$, (vgl. Abb. 5.1, 5.3) betrachtet. Aufgrund der starken Einflüsse der Ekman Wirbel im endlichen System, wie bereits oben beschrieben, ist davon auszugehen, dass sich das zugehörige $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für $\Gamma = 12$ von demjenigen mit periodischen Randbedingungen, Abbildung 4.5 in Kapitel 4, unterscheidet. Diese Unterschiede sind insbesondere für die

Existenz von stabilen wSPI Strukturen bereits in früheren Arbeiten (129) zu erkennen. Anders als im pbc Fall existieren, bei moderaten R_2, keine wSPI Strukturen im endlichen System und demzufolge ist auch der Bereich mit bistabil existierenden TVF und wSPI Lösungen deutlich kleiner und zu negativen R_2 verschoben.

Ziel des nun folgenden Abschnitts ist es einen Überblick über den $R_1 - R_2$ Phasenraum zu geben und insbesondere die Unterschiede für pbc und rbc Randbedingungen zu verdeutlichen. Von besonderem Interesse ist dabei der Einfluss der Ekman Wirbel im endlichen System, da diese verschiedene neue Strukturen hervorrufen.

5.3.1 Bifurkationsverhalten

Abbildung 5.6 zeigt ein Bifurkationsdiagramm in R_1 für eine fixierte Außenzylinderrotation, $R_2 = -80$, (vgl. auch Pfeil **(a)** im Phasendiagramm der Abb. 5.7). Für diese Parameter befindet man sich in der Nähe des polykritischen Punktes γ bei dem, unter anderem die Bifurkationsschwellen der primär bifurkierenden Strukturen, wSPI und TVF, zusammenlaufen.

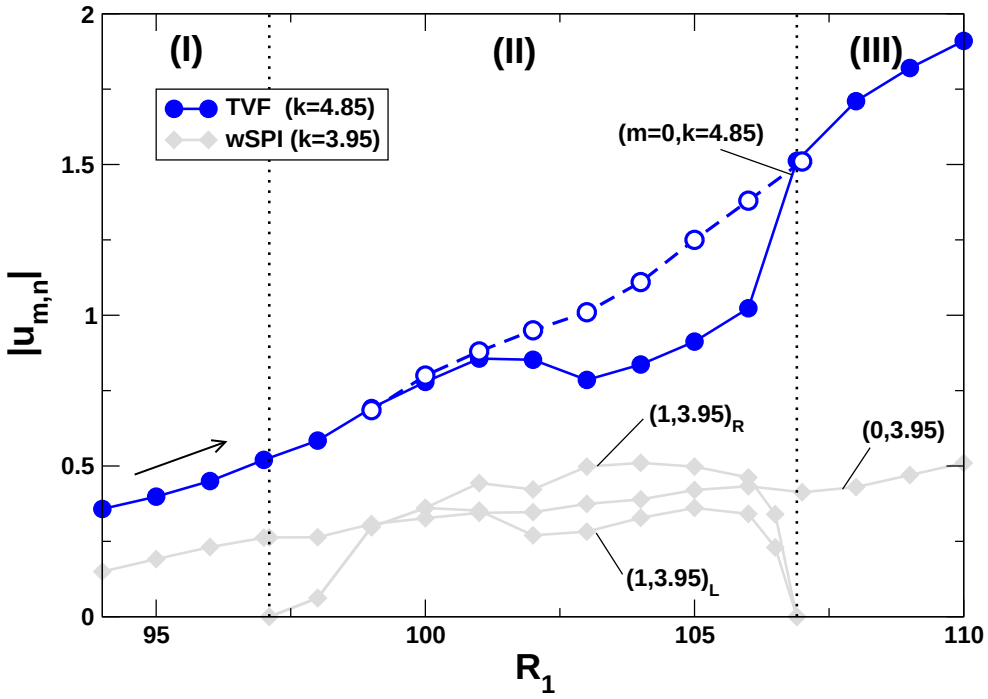


Abbildung 5.6 – Bifurkationsverhalten einer l-wSPI (lokalisierten wSPI) Lösung in Abhängigkeit von R_1 für $R_2 = -80$ (siehe auch Pfeil **(a)** in Abb. 5.7). Dargestellt sind die dominanten Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,k}|$ in der Mitte des Spaltes ($r = 0.5$) für TVF $(m, k) = (0, 4.85)$ und die l-wSPI Anteile: l-L-wSPI $(m, k) = (1, 3.95)_L$ und l-R-wSPI $(1, 3.95)_R$. Weitere Kontrollparameter: $\eta = 0.5, \Gamma = 12$.

In Abbildung 5.6 ist die Bifurkation einer lokalisierten wSPI Lösung (hier l-R1-wSPI) aus dem CCF-Ekman Grundzustand **(I)** heraus dargestellt, die für höhere R_1 Werte erneut verschwindet und ein reiner TVF Zustand **(III)** im System verbleibt. Der Pfeil in

der Abbildung symbolisiert dabei die Richtung (von links nach rechts), in der das Diagramm aufgenommen wurde. Alle anderen, parallel existierenden Lösungsäste, z.B. TVF mit anderer Wirbelanzahl und damit auch anderer Wellenzahl, sind in diesem Diagramm vernachlässigt. Wie in den früheren Abbildungen symbolisieren durchgezogene [gestrichelte] Kurven stabile [instabile] Bifurkationsäste.

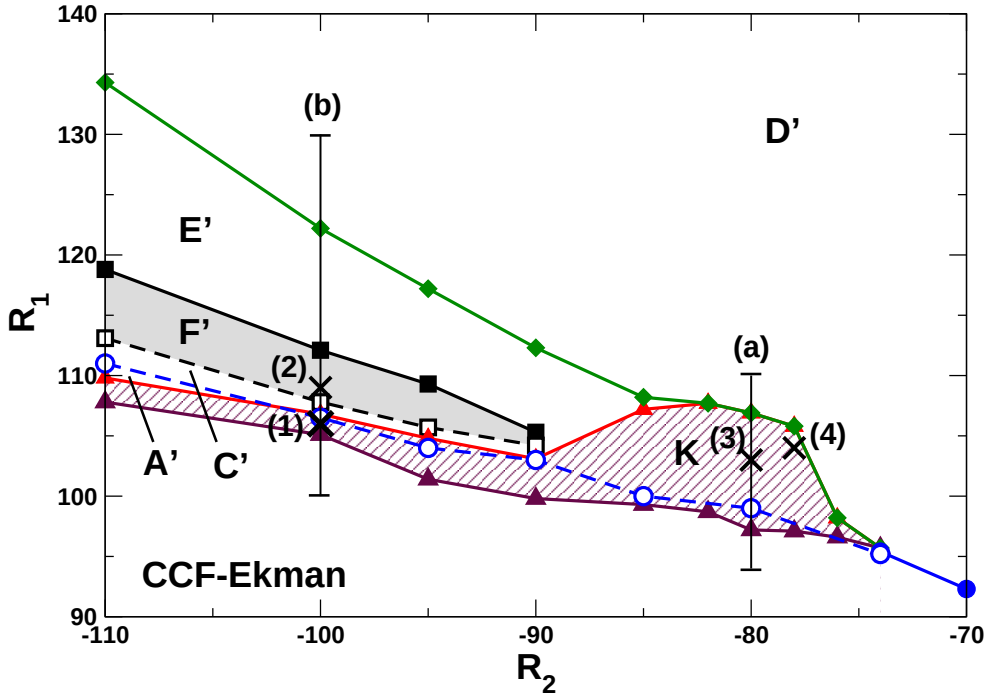
Zur Beschreibung starten wir im unterkritischen CCF-Ekman Grundzustand **(I)** in Abbildung 5.6 mit einer Wellenzahl von $k = 4.85$. Bei Erhöhung von R_1 werden die wSPI Moden bei $R_1 \approx 97.2$ wachstumsfähig. An dieser Stelle werden die beiden Moden $(1, 3.95)_L$ und $(1, 3.95)_R$ endlich und ein *lokalisierter* Defekt entsteht im Bulk **(II)**. Dabei sind die Amplituden der beiden wSPI Moden zunächst gleich groß, $97.2 \lesssim R_1 \lesssim 99.1$, bei etwas größeren Werten $R_1 \gtrsim 99.1$ **(III)** gewinnt aber (hier) die $(1, 3.95)_R$ Mode die Überhand, so dass im Bulk eine lokalisierte rechtsgewundene wSPI Lösung mit azimutaler Wellenzahl $M = 1$ (l-R1-wSPI) vorliegt (vgl. hierzu auch Abb. 5.9 unten). Diese lokalisierte wSPI Lösung verbleibt zunächst stabil im System, erst bei weiter anwachsendem R_1 verschwindet diese Lösung bei $R_1 \approx 107$ und ein reiner TVF Zustand bleibt im Bulk zurück. Dies ist ein gravierender Unterschied zum periodischen System. Im periodischen System bifurkiert für diese Kontrollparameter die SPI Lösung primär stabil aus dem CCF Grundzustand heraus und bleibt auch für höhere R_1 stabil bestehen. Dieser drastische Unterschied ist vermutlich auf die Dominanz der Ekman Wirbel im endlichen System zurückzuführen. Im periodischen System wachsen alle Strukturen entweder über das gesamte System hinweg an oder werden weggedämpft und sterben somit aus. Weder im Experiment (59; 129; 130), noch in der numerischen Simulation konnte die Existenz von stabilen wSPI Lösungen für $R_1 > 107$ im $\Gamma = 12$ System verifiziert werden.

Weiter ist zu Vermuten, dass sich der R_1 Bereich, in dem diese lokalisierten Strukturen existieren, mit zunehmender Systemlänge Γ zu größeren R_1 Werten hin aufweitet, da dann der Einfluss der Ekman Wirbel in den Bulk hinein abnimmt. Proberechnungen diesbezüglich mit einem $\Gamma = 20$ System bestätigten dies. Hierbei verschwand die lokalisierte wSPI Lösung im System erst bei größerem Kontrollparameter $R_1 \approx 110$.

5.3.2 $R_1 - R_2$ Phasendiagramm

Um zu zeigen, dass das in Abbildung 5.6 dargestellte Bifurkationsverhalten mit einem lokalisierten Defekt kein Spezialfall für die dort gewählten Parameter ist, ist in der Abbildung 5.7 der $R_1 - R_2$ Phasenraum des $\Gamma = 12$ Systems dargestellt. Der eingezeichnete Pfeile **(a)** gibt den Parameterbereich des Bifurkationsdiagramms der Abbildung 5.6 wieder und die Kreuze **(1)-(4)** zeigen die Parameter zu den Snapshots der Abbildungen 5.8 und 5.9. Die zugehörigen verschiedenen Regionen A', C', D' und E' entsprechen denjenigen der Abbildung 5.1. Zusätzlich sind hier aber noch zwei weitere Gebiete D' und K zu erkennen. In dem großen Gebiet D' existieren im endlichen System *keine* stabilen wSPI Lösungen (anders als für pbc), sondern *ausschließlich* stabile TVF Zustände. Das Gebiet K charakterisiert den Parameterbereich, für den die lokalisierten Strukturen und Defekte gefunden wurden.

Im linken Bereich des Phasendiagramms bei stärkerer Gegenrotation R_2 zeigt sich ein qualitativ identisches Verhalten zum periodischen System der Abbildung 4.5. Auch hier existiert ein Bereich F' mit stabilen wTVF als Übergangsstruktur von TVF zu wSPI Lösungen. Auch hier schnürt sich dieser Bereich in Richtung des polykritischen Punktes, γ, höherer Codimension, zusammen. Ein Unterschied zum periodischen besteht in diesem Parameterbereich nur in einem sehr schmalen Bereich K in der Nähe des Onsets der wSPI Strukturen, sowie entscheidender dem Bereich D' mit nur monostabil existierenden TVF Lösungen für große R_1.



$R_1 - R_2$ Phasendiagramm für TVF, SPI, wTVF, wSPI und lokalisierte l-wSPI Lösung.

Region	A'	C'	D'	E'	F'	K
TVF	-	i	s	s	i	i/-
wSPI	s	s	i	s	s	-
wTVF	-	-	-	-	s	-
l-wSPI	-	-	-	-	-	s

stabil (s),
instabil (i),
nicht existent (-).

Abbildung 5.7 – Die blaue Linie mit Kreisen, sowie die rote Linie mit Dreiecken kennzeichnen die Bifurkationsschwellen für TVF (●) und lokalisierten l-wSPI (▲) Lösung aus dem CCF-Ekman Grundzustand heraus. Die voll entwickelten wSPI (▲) Zustände, d.h. die über den ganzen Bulk ausgedehnten Strukturen, bifurkieren oberhalb aus den lokalisierten l-wSPI Zuständen heraus. Gefüllte [leere] Symbole geben an, ob die jeweilige Lösung stabil [instabil] an der Schwelle ist. In Region E' liegen beide Lösungen, TVF und wSPI, bistabil vor, während in Region D' *nur* TVF Zustände stabil existieren, was ein gravierender Unterschied zum periodischen System darstellt. Die schwarzen durchgehenden Linien beschreiben die oberen Bifurkationsschwellen von wTVF (■) aus den TVF Zuständen heraus (vgl. auch Phasendiagramm der Abb. 4.5 für pbc). Die grüne Kurve mit Rauten (♦) gibt die Parameter an, bei denen der zuvor diskutierte lokalisierte wTVF-wSPI Defekt (Abs.5.2.2) durch den Bulk wandert und dabei die wSPI Lösung (bei Erhöhung von R_1) aus dem System verdrängt. Oberhalb dieser Kurve existieren nur TVF Zustände stabil in Gebiet D'. Die wTVF Zustände liegen im grauen Bereich F' bistabil mit wSPI Lösungen vor und werden instabil an der schwarz gestrichelten Kurve mit offenen Symbolen (□). Der vertikale Pfeil **(a)** kennzeichnet den Parameterbereich des Bifurkationsdiagramms der Abbildung 5.6. Die vier Kreuze **(1-4)** geben die Parameter an, für die in den Abbildungen 5.8 und 5.9 die stationären Strukturen dargestellt sind. Der vertikale Pfeil **(b)** gibt die Parameter zu den Bifurkationsdiagrammen der Abbildungen 5.1 und 5.3 wieder. Dort wurde allerdings nicht weiter auf lokalisierte Strukturen und Defekte eingegangen. Weitere Kontrollparameter: $\eta = 0.5, \Gamma = 12$.

Die Unterschiede zum periodischen System werden umso stärker, je weiter man sich dem γ Punkt höherer Codimension nähert. In diesem Bereich $-90 \lesssim R_1 \lesssim -75$ ist das Gebiet K mit stabil existierenden lokalisierten Strukturen und Defekte deutlich stärker ausgedehnt (in R_1). Für Parameter $-82 \lesssim R_1 \lesssim -75$ fällt die obere Grenze dieser lokalisierten Defekt Strukturen mit der Stabilitätsgrenze der TVF Lösung zusammen. Dies entspricht dem in der Abbildung 5.6 gezeigten Bifurkationsverhalten. Nur im Bereich $-90 \lesssim R_1 \lesssim -82$ entwickeln sich bei wachsendem R_1 aus den lokalisierten Defekten voll ausgebildete wSPI Strukturen, die den gesamten Bulk ausfüllen.

Insgesamt kann man also auf jeden Fall sagen, dass das $R_1 - R_2$ Phasendiagramm für das endliche $\Gamma = 12$ System deutlich komplizierter als im periodischen System ist. Die wesentlichen Unterschiede liegen einerseits in der Nähe der Bifurkationsschwellen, da hier für rbc Bedingungen lokalisierte Strukturen und Defekte auftreten, andererseits bei höheren R_1, für die bei rbc Randbedingungen *keine* stabilen wSPI Lösungen, sondern nur stabile TVF Lösungen existieren.

5.3.3 Strukturen

Im Folgenden soll ein kurzer Überblick über die lokalisierten Strukturen und Defekte in der Region K gegeben werden, die *nur* im endlichen System auftreten. Im periodischen System würde jede Art einer solchen lokalisierten Störung entweder weggedämpft werden, oder aber sich über das gesamte System hinaus ausbreiten.

Die Abbildungen 5.8 und 5.9 zeigen vier verschiedene Strukturen und lokalisierte Defekte, deren zugehörige Parameter in der Abbildung 5.7 durch Kreuze **(1-4)** gekennzeichnet sind. Im oberen Teil der Abbildung 5.8 (**(1)** in Abb. 5.7) ist eine lokalisierte wSPI bzw. eher eine lokalisierte RIB Lösung in der Mitte des Bulks zu erkennen. Diese verbleibt für die hier gewählten sehr schwach überkritischen Werte als stabiler Zustand im System, rotiert aber als Ganzes in azimutaler Richtung. Zum Vergleich zeigt der untere Teil der Abbildung 5.8 (**(2)** in Abb. 5.7) eine über den gesamten Bulk ausgedehnte wSPI (hier: linksgewundene L-wSPI) Struktur. Diese rotiert ebenso azimutal, propagiert aber wie gewohnt ihrer Helizität entsprechend auch im Bulk aufwärts. D.h. am unter Ekman-Spiral Defekt wird Phase erzeugt, die dann am oberen Ekman-Spiral Defekt wieder vernichtet wird.

In der Abbildung 5.9 sind zwei weitere lokalisierte Strukturen aus dem Gebiet K dargestellt. Hierbei handelt es sich um Strukturen, wie sie bereits in dem Bifurkationsdiagramm der Abbildung 5.6 aufgetreten sind. Im oberen Teil der Abbildung 5.9 (**(3)** in Abb. 5.7) ist ein lokalisierter Defekt in Bulk Mitte zu erkennen, der azimutal wandert. Bei genauerer Betrachtung der einzelnen Moden zeigt sich, dass der Anteil der L-SPI Mode dominiert, was sich auch im $\varphi - z$ Plot (Mitte der oberen Abb. 5.9) erkennen lässt. Im unteren Teil der Abbildung 5.9 (**(4)** in Abb. 5.7) ist, für größeres R_1, eine deutlich ausgebildete lokalisierte R1-wSPI Struktur zu erkennen, die gemäß ihrer Chiralität bzw. Helizität nach oben propagiert. Dies geschieht allerdings nur in einem lokal begrenzten Bereich, hier im unteren Teil des Bulks. Oberhalb dessen liegt im System, aufgrund des starken Einflusses der SPI Modenanteile, ein wTVF Zustand vor. Das es sich in der unteren Abbildung 5.9 um eine lokalisierte R-wSPI Lösung handelt ist reiner Zufall. Ebenso zufällig ist die Tatsache, dass diese lokalisierte Struktur in der unteren Hälfte des Bulks angeordnet ist. Bei weiteren Simulationen entstanden sowohl lokalisierte L-wSPI und R-wSPI Zustände, die sich an beliebigen Positionen im Bulk, also auch im oberen Teil, befinden können, zumindest solange keine symmetriebrechenden Effekte vorliegen.

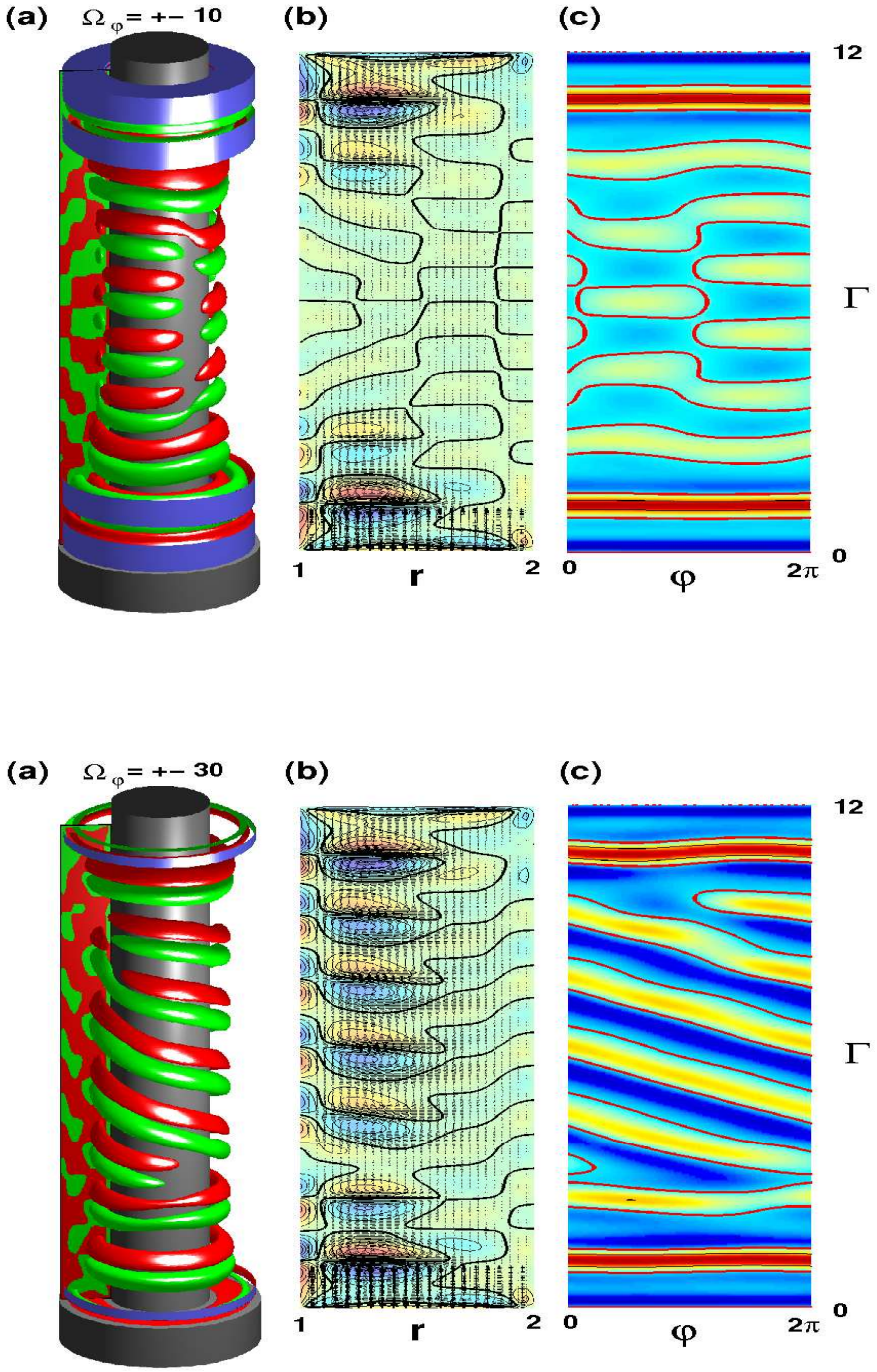


Abbildung 5.8 – Visualisierung zweier verschiedener (vgl. Kreuze **(1,2)** in Abb. 5.7) Strukturen. *Oben:* Lokalisierte wSPI bzw. RIB Lösung **(1)** bei $R_1 = 106$, $R_2 = -100$ in Bulk Mitte. *Unten:* Vollständig ausgebildete linksgewundene L-wSPI Lösung bei **(2)** $R_1 = 109$, $R_2 = -100$. In axialer Richtung ist jeweils das ganze $\Gamma = 12$ System dargestellt. **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ (rot: positiv und grün: negativ, genaue Werte in der Abb.). Die 2D rechteckige Fläche, welche die Isoflächen auf der linken Seite schneidet, stellt die Verteilung der azimutalen Vortizität in der $r - z$ Ebene dar (rot>0, grün<0). **(b)** Vektorplots der beiden Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in einer $\varphi =$ konst. Ebene mit farbkodierter azimutaler Vortizität (rot=Max, blau=Min). **(c)** $\varphi - z$ Plots der Strukturen bei $r = 0.5$ mit farbkodiertem radialem u Feld (rot=Max, blau=Min). Weiterer Kontrollparameter: $\eta = 0.5$.

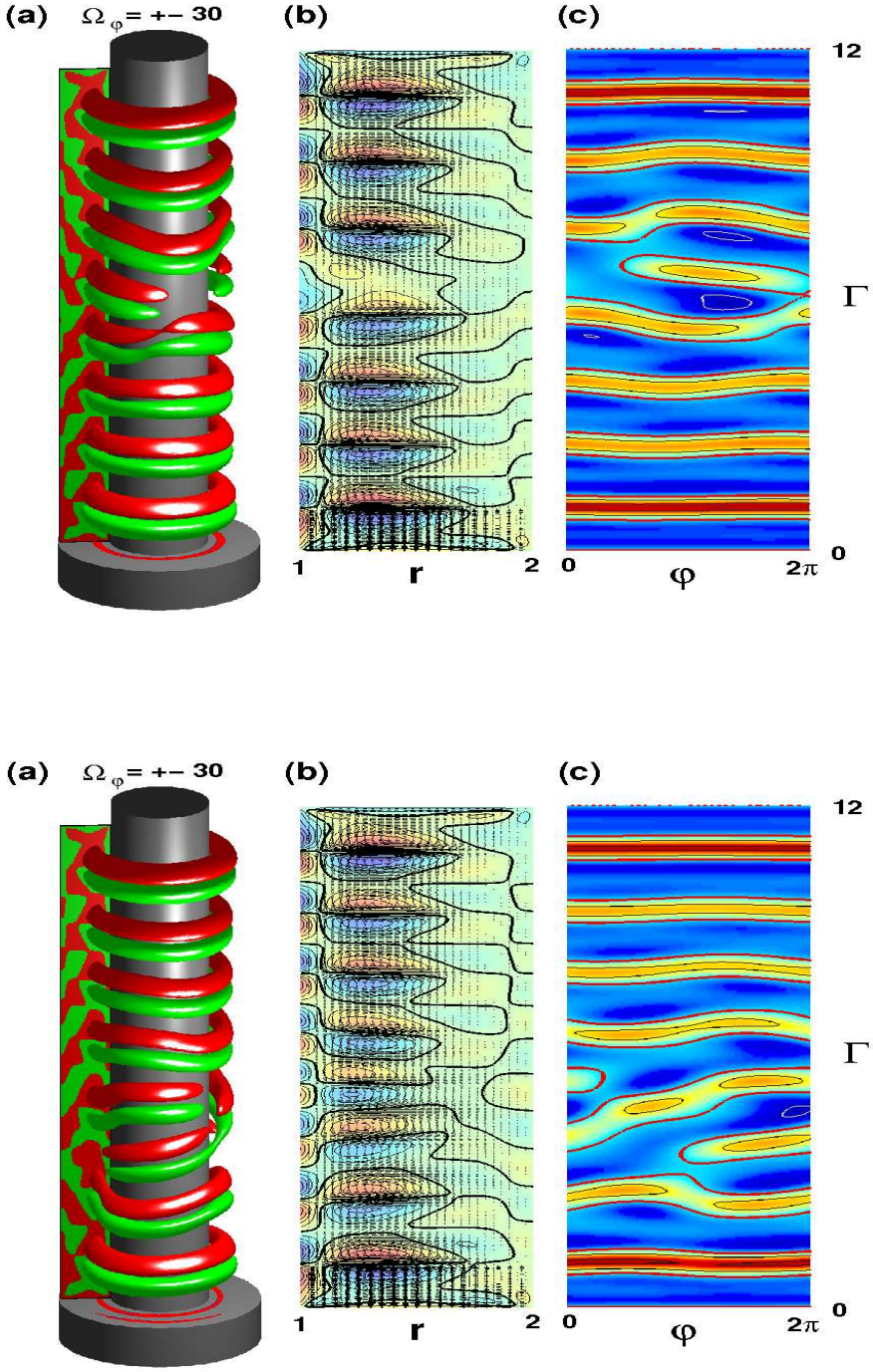


Abbildung 5.9 – Visualisierung verschiedener (vgl. Kreuze **(2,3)** in Abb. 5.7) Strukturen. *Oben:* Lokalisierter Defekt in Bulk Mitte bei **(4)** $R_1 = 103$, $R_2 = -78$; ober- und unterhalb dieser liegt eine wavyartige Struktur vor. *Unten:* Lokalisierte rechtsgewundene R-wSPI Lösung im unteren Teil des Bulks bei **(3)** $R_1 = 101$, $R_2 = -80$; oberhalb liegt eine wavyartige TVF Struktur vor. In axialer Richtung ist jeweils das ganze $\Gamma = 12$ System dargestellt. **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ (rot: positiv und grün: negativ, genaue Werte in der Abb.). Die 2D rechteckige Fläche, welche die Isoflächen auf der linken Seite schneidet, stellt die Verteilung der azimutalen Vortizität in der $r - z$ Ebene dar (rot>0, grün<0). **(b)** Vektorplots der beiden Felder $u(r, z)$ und $w(r, z)$ in einer $\varphi =$ konst. Ebene bei $r = 0.5$ mit farbkodierter azimutaler Vortizität (rot=Max, blau=Min). **(c)** $\varphi - z$ Plots der Strukturen bei $r = 0.5$ mit farbkodiertem radialem u Feld (rot=Max, blau=Min). Weiterer Kontrollparameter: $\eta = 0.5$.

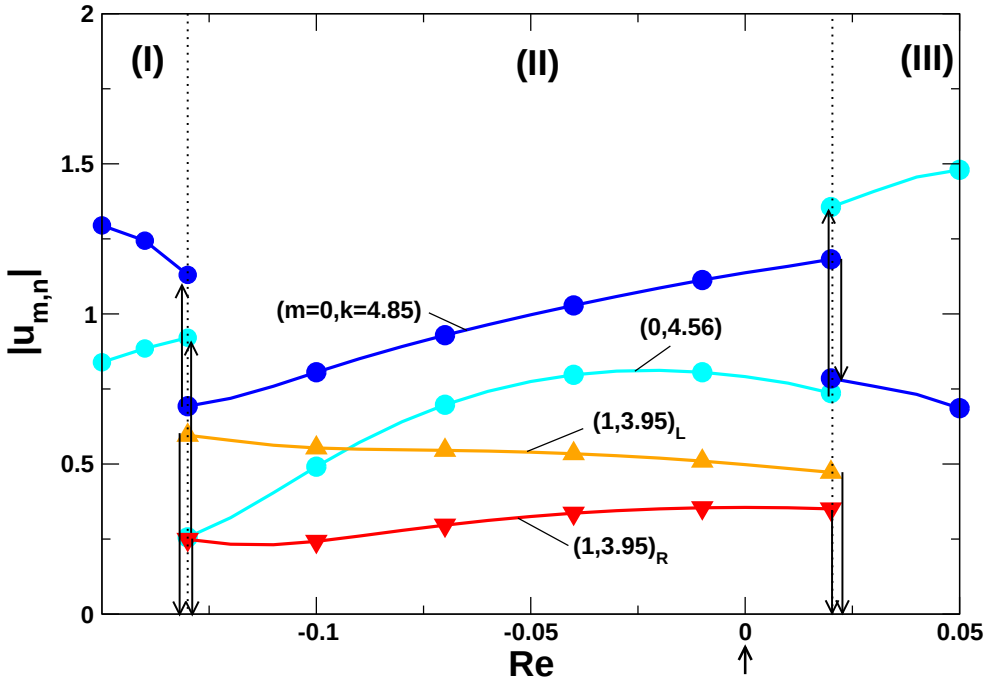


Abbildung 5.10 – Bifurkationsverhalten von lokalisierten wSPI Lösungen und Defekt Strukturen in Abhängigkeit des externen Durchflusses Re für $R_1 = 104, R_2 = -78, \eta = 0.5, \Gamma = 12$. Der Pfeil an der Abszisse bei $Re = 0$ charakterisiert die Parameter des Kreuzes **(3)** in Abbildung 5.7, bzw. der oberen Struktur in Abbildung 5.9. Dargestellt sind die Amplituden der dominanten Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,k}|$ in der Mitte des Spaltes ($r = 0.5$) für TVF **(I,III)** $(m, k) = (0, 4.85), (0, 4.56)$ und die lokalisierten l-wSPI Anteile **(II)**, l-L-wSPI $(m, k) = (1, 3.95)_L$ und l-R-wSPI $(1, 3.95)_R$. Gut zu erkennen ist die Asymmetrie von Re auf das Stabilitätsverhalten, da die transienten Übergänge hin zu TVF Lösungen *nicht* bei Betrags gleichen Re erfolgen. Außerdem nimmt das System für positives und negatives Re unterschiedliche TVF Zustände mit unterschiedlicher Wirbelanzahl und Wellenzahl k an. *Links* **(I)**: TVF Lösung mit $k = 4.85$. *Rechts* **(III)**: TVF Lösung mit $k = 4.56$. Den symmetrischen Fall einer lokalisierten l-R-wSPI Struktur mit dominantem R Anteil erhält man durch invertieren von Re und Vertauschung aller Bezeichnungen mit L und R in der Abbildung.

5.4 Axialer Durchfluss Re

Bis zu diesem Zeitpunkt wurden nur Untersuchungen im endlichen System ohne extern auferlegten axialen Durchfluss Re betrachtet. D.h. jegliche symmetriebrechenden Effekte wurden vernachlässigt. Als letztes soll auch in diesem Kapitel noch die Stabilität der gerade diskutierten lokalisierten Strukturen und Defekte gegenüber solchen Störungen mittels kleiner Durchflüsse Re betrachtet werden. Dies ist hier besonders interessant für die lokalisierten wSPI Zustände, l-wSPI, im System, da sie lokal auf einen mehr oder weniger kleinen Bereich im System beschränkt sind. Abhängig von dessen Helizität (L-SPI oder R-SPI) können diese Bereiche durch Re, aufgrund dessen symmetriebrechender Wirkung, in den ganzen Bulk ausgedehnt (z.B. durch 'Blasen' mit dem SPI Wind) werden, oder aber vollständig aus diesem eliminiert werden ('Blasen' gegen den SPI Wind).

In der Abbildung 5.10 ist das Verhalten einer lokalisierten Defekt Struktur bei Veränderung von Re dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die Asymmetrie im Bezug auf positiven und negativen Durchfluss. Für $Re = 0$ ist dies gerade die in der Abbildung 5.9 (oben) gezeigten Struktur. Bereits für $Re = 0$ ist die Amplitude der $(1, 3.95)_L$ Mode größer als die der $(1, 3.95)_R$ Mode. Dadurch wirkt sich der symmetriebrechende Einfluss von Re deutlich unterschiedlich auf die Stabilitätsbereiche für positives und negatives Re aus. Negatives Re, d.h. blasen in Propagationsrichtung einer L-wSPI Lösung lässt den Defekt (hier eine lokalisierter l-L1-wSPI Struktur) bis etwa $Re \approx -0.103$ stabil existieren, während dieser bei positiven Re (blasen in Propagationsrichtung einer R-wSPI Struktur) bereits bei $Re \approx 0.025$ instabil wird und das System in den TVF Zustand übergeht. Bei Verringerung von Re ist die zunehmend weitere Aufspaltung der Amplituden der $(1, 3.95)_L$ und $(1, 3.95)_R$ Moden deutlich zu erkennen, bevor auch dort der Defekt seine Stabilität gegenüber einer TVF Lösung verliert. In beiden Fällen dieses Stabilitätswechsels (bei positiven und negativen Re) erfolgt der Übergang mittels transienter Zwischenstrukturen.

In Abbildung 5.10 ist ebenfalls zu erkennen, dass die dominanten Moden der TVF Lösung am linken $(0, 4.85)$ und rechten Rand $(0, 4.56)$ unterschiedlich sind. Dies entspricht zwei unterschiedlichen TVF Zuständen mit unterschiedlicher Anzahl an Wirbelpaaren und demzufolge auch unterschiedlicher Wellenzahl im Bulk. Interessanter Weise besitzt die TVF Lösung bei negativen Re am linken Rand **(1)** die gleiche Wellenzahl, wie die lokalisierte wSPI Struktur, aus der diese transient hervorgeht, während sich bei positiven Re eine andere Wellenzahl im TVF Zustand einstellt.

An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass es im Bulk eine große Vielzahl verschiedener parallel stabil existierender TVF Strukturen gibt.

5.5 Resumé

In diesem Kapitel wurde das Bifurkationsverhalten für den Übergang zwischen Taylor Wirbeln (TVF) und Wavy Spiral Wirbel (wSPI) im endlichen System ($\Gamma = 12$) untersucht. Anders als im Fall periodischer Randbedingungen (Kap. 4), für den reine SPI Lösungen (u.a. auch bei ruhendem Außenzylinder) existieren, treten bei endlicher Systemlänge die helikalen Strukturen *nur* als modulierte Spiral Zustände, als wSPI Lösung auf. Die Ursache hierfür ist die, immer vorhandene Beimischung der Ekman induzierten $m = 0$ Modenkomponente im Fourierspektrum.

Im endlichen System vollzieht sich der Übergang von TVF zu wSPI über wTVF Lösungen (schematisch in Abb. 5.11 zu sehen) analog dem Übergang von TVF zu SPI über wTVF Lösungen unter periodischen Randbedingungen. Dabei kann durch die endliche Systemlänge eine diskrete Wellenzahl für die wSPI Lösung selektiert werden. Andererseits existieren verschiedene Bifurkationsäste von TVF und wTVF Lösungen, hier allerdings mit verschiedenen Wellenzahlen und somit auch unterschiedlicher Anzahl an Wirbelpaaren im Bulk *parallel* und *stabil* nebeneinander. Während beim Übergang zwischen den toroidal geschlossenen Strukturen, von TVF zu wTVF, die Wellenzahl unverändert bleibt, kann der Übergang von einer toroidal geschlossenen hin zu einer helikal offenen Struktur von einer Wellenzahländerung begleitet werden.

Der Übergang von SPI zu TVF über wSPI Lösungen, der im periodischen System bei moderaten R_2 zu finden ist, ist im endlichen System aufgrund der Abwesenheit von stabilen reinen SPI bzw. wSPI Zuständen, als notwendiger Anfangszustand, nicht vorhanden. Stattdessen vollzieht das System für stärkere Gegenrotationsraten einen anderen Übergang, der durch einen axial wandernden Defekt vollzogen wird (siehe Abb. 5.11). Dabei verdrängt dieser Defekt die wSPI Lösung aus dem System und zieht einen wTVF Zustand hinter sich

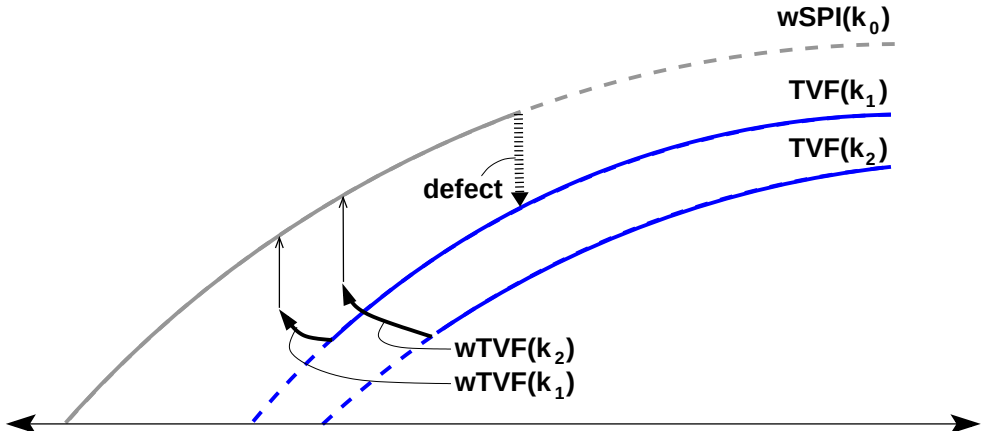


Abbildung 5.11 – Schematisches Bifurkationsdiagramm der Amplituden des Strömungsflusses. Diese Abbildung fasst die wichtigsten Ergebnisse aus den Abbildungen 5.1 und 5.3 für das endliche System (rbc) zusammen. Stabile [instabile] Lösungen sind als durchgehende [gestrichelte] Linien gezeichnet. Die TVF Lösung ist exemplarisch für zwei verschiedene mögliche Wellenzahlen, k_1 und k_2, dargestellt. Beim Übergang von TVF zu wTVF Lösungen bleiben diese erhalten. Letztendlich vollführen die wTVF (schwarze Linien mit Bezeichnung wTVF) Lösung komplexe transiente Übergänge (dünne vertikale Pfeile) zum wSPI Zustand mit einer bestimmten Wellenzahl, z.B. k_0. Der breite gestrichene Pfeil (bezeichnet mit 'defect') bezieht sich auf den Übergang von wSPI zu TVF Lösungen, der unter anderem mit einem axial durch den Bulk wandernden Defekt (genauere Beschreibung hierzu im Text) verknüpft ist. Dabei wird in dem entstehenden TVF Zustand eine Wellenzahl nahe k_0, hier k_1, im System selektiert.

in den Bulk hinein, der sich schließlich in einen reinen TVF Zustand transformiert. Somit ist alles in allem die Komplexität der raumzeitlichen Strukturen beim Übergang von TVF zu wSPI Lösungen größer für rbc als bei pbc Randbedingungen.

Ein signifikanter Einfluss der festen Deckel verhindert jeglichen intrinsischen, Reynolds Stress getriebenen, Durchfluss der axial propagierenden SPI und wSPI Lösungen. Dieses führt zu einem Unterschied in den (w)SPI Frequenzen für rbc und pbc. Andererseits sind die Frequenzen der Wavy Übergangsstrukturen, die wTVF Lösungen für die angenommenen Randbedingungen pbc und rbc praktisch identisch, da der wTVF Zustand keinen intrinsischen Nettodurchfluss enthält.

Weiterhin wurden lokalisierte Strukturen und Defekte, die nur im endlichen System aufgrund der Ekman Wirbel und der, durch diese permanent in das System induzierten Störungen auftreten, untersucht. Diese haben für ein endliches System ein deutlich komplizierteres Phasendiagramm im Vergleich zum periodischen System zur Folge. Ein deutlicher Unterschied besteht darin, abgesehen dieser neuen Defekt Strukturen, dass bei moderaten R_2 für rbc Bedingungen keine stabilen (w)SPI Lösungen wie etwa bei pbc existieren. Die verschiedenen Defekt Strukturen zeichnen sich dadurch aus, dass sie nur lokal im System auftreten, d.h. also in ihrer axialen Ausdehnung begrenzt sind und *nicht* den gesamten Bulk ausfüllen.

Als letztes wurde noch der Einfluss des symmetriebrechenden Durchflusses Re auf verschiedene lokalisierte Defekte, bzw. lokalisierte wSPI Zustände untersucht. Durch blasen mit oder gegen die Propagationsrichtung der lokalisierten wSPI Strukturen können die-

se entweder in das ganze System hinein ausgeweitet werden, oder vollständig aus diesem verdrängt werden.

Kapitel 6

Mixed Cross Spirals: Übergänge zwischen SPI Lösungen verschiedener und gleicher Helizität

6.1 Einleitung - Motivation

Wie bereits zu Beginn dieser Arbeit erwähnt existieren im Taylor-Couette System eine große Vielzahl verschiedener Strukturen mit sehr unterschiedlichen topologischen Eigenschaften. Zahlreiche dieser verschiedenen Lösungen und ihre Bifurkationsszenarien wurden bereits sowohl numerisch, als auch experimentell (40; 7; 79; 145; 85; 95; 62; 96; 64) untersucht.

Neben den einfachsten auftretenden Strukturen der Taylor Wirbel (TVF) und den symmetrieentarteten Spiral Wirbeln (SPI) (diese sind durch ihre Helizität und ihre azimutale Wellenzahl M, oder alternativ durch ihre Ganghöhe p bestimmt; siehe hierzu auch Kap. 3), existieren noch weit aus komplexere Strukturen, u.a. axial stehende Wellen, wie z.B. Ribbon (RIB) und Cross Spirals (CSPI), die bislang ebenfalls Gegenstand zahlreicher Untersuchungen (115; 116; 117; 118; 143; 31) waren. Die beiden letzteren Strukturen kann man als nichtlineare Überlagerung spiegelsymmetrischer R- und L-SPI Strukturen mit variierenden (CSPI) oder gleichen (RIB) Anteilen auffassen. Während SPI und RIB Strukturen an einer gemeinsamen Schwelle entstehen, bifurkieren CSPI Zustände sekundär aus den SPI Zuständen heraus und verbinden diese mit dem RIB Lösungsast (113; 117).

Anders als bei den sekundär bifurkierender Wavy Strukturen, beim Übergang zwischen TVF zu SPI Lösungen, die auch durch eine nichtlineare Überlagerung von R- und L-SPI Moden entstehen, besitzen die MCS Strukturen aber *keine zusätzlichen Anteil* einer rotationssymmetrischen ($M = 0$) Komponente, die nicht nichtlinear angeregt wird.

Bei den Übergängen, die nun in diesem Kapitel diskutiert werden, handelt es sich um solche zwischen Spiral Zuständen unterschiedlicher Helizität mit (i) *gleicher* bzw. (ii) *unterschiedlicher* Ganghöhe p. Solche Prozesse sind allgemein interessant für allerlei Musterbildungsprozesse, da sie den Übergang zwischen verschiedenen wandernden Wellen (hier mit entgegengesetzten Propagationsrichtungen) mit unterschiedlicher azimutaler Wellenzahl M bewerkstelligen und so bislang in der Literatur noch nicht beschrieben wurden. Hierzu wird eine neue Klasse von Lösungen definiert, sogenannte Mixed Cross Spirals (MCS), die diesen Übergang vermitteln können. Diese kann man als eine nichtlineare Überlagerung von zwei

SPI Zuständen mit unterschiedlicher Helizität und unterschiedliche Wellenzahl M (bzw. unterschiedlicher Ganghöhe p) ansehen, allerdings *ohne* einen zusätzlichen radialsymmetrischen $M = 0$ Anteil, wie dies etwa bei wTVF und wSPI Lösungen der Fall ist. Somit beinhalten solche Übergänge hauptsächlich den Fouriermodenunterraum der beiden beteiligten SPI Strukturen. MCS Strukturen stellen eine Möglichkeit dar, ein und die selbe, oder verschiedene SPI Lösungen, durch eine sekundäre Vorwärtsbifurkation, miteinander zu verbinden. Somit liegt entweder eine Art *Bypasslösung* oder *Übergangslösung* vor. Die Situation in der MCS Strukturen als Bypasslösung auftreten ist bereits in der Arbeit von Altmeyer et al. (5) im Hinblick auf Bifurkation, Stabilität und Dynamik, zu großen Teilen untersucht worden. Die MCS Strukturen stellen somit eine übergeordnete Strukturklasse vieler unterschiedlicher Lösungen im Taylor-Couette System, von CSPI, SPI, Mixed Ribbon (MRIB) und RIB Lösungen dar, die sich alle als Spezialfälle der MCS Lösung ergeben.

6.2 Theoretische Beschreibung – Grundlagen

Zur Berechnung der in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse wurde hauptsächlich der Code G2D2 und nur vereinzelt der Code G1D3, wie im Anhang D beschrieben, verwendet. Weiterhin werden ausschließlich periodische Randbedingungen (pbc) angenommen und das Radienverhältnis, $\eta = r_1/r_2 = 0.883$, sowie die Wellenzahl, $k = 3.927$, bleiben fixiert. Das Fluid wird wie in den vorangegangenen Kapiteln als isothermal und inkompressibel mit kinematischer Viskosität ν angenommen.

6.2.1 Ribbons (RIB) und Cross Spirals (CSPI)

RIB Strukturen bifurkieren zusammen mit den SPI Strukturen aus einer *gemeinsamen* Schwelle (115; 63). Dabei können RIB Zustände als eine nichtlineare Überlagerung der beiden spiegelsymmetrischen R-SPI und L-SPI Moden mit *gleichen* Amplituden $A = B$ angesehen werden. Somit sind, im Fall von L1-SPI und R1-SPI Zuständen, die entstehenden 1-RIB Lösungen durch identische Anteile der Moden $A \equiv (1, 1)$ und $B \equiv (1, -1)$ charakterisiert und einen schwächeren Anteil ihrer nichtlinearen Kombination $C \equiv (0, 2)$. Analog sind 2-RIB Zustände durch die dominanten Moden $(2, 1)$, $(2, -1)$ und $(0, 2)$ charakterisiert (zur Nomenklatur siehe Gl. (3.2)).

SPI und RIB Lösungsäste sind durch sekundär bifurkierende CSPI Zustände miteinander verbunden (115; 116). Diese werden im Allgemeinen durch die gleichen Moden A, B und C beschrieben, die im Einzelnen aber *unterschiedlich* großen Anteil an der Struktur besitzen, so z.B. ist in der Nähe des SPI Astes, eine der Moden, A oder B, signifikant größer als die andere. Genau genommen ist am Onset der CSPI Lösung eine dieser beiden Moden, A oder B, identisch Null.

Beiden Strukturen, RIB und CSPI, ist aber gemeinsam, dass sie nur als Überlagerung einer R- und einer L-SPI Struktur mit der *gleichen* azimutalen Wellenzahl M erscheinen. Dies gilt für MRIB und MCS Lösungen nicht mehr!

6.2.2 Charakterisierung von MCS Strukturen

Aufgrund der Symmetrien von SPI Lösungen (Gl. (3.4)) genügen die azimutalen und axialen Modenindizes m und n der Zerlegung in Gleichung (D.11) der Beziehung, $m = -pn$, bei diesen Strukturen. Somit leben SPI Strukturen mit Ganghöhe p in dem diagonalen Unterraum $(-pn, n)$ des (m, n) Fouriermodenraums (64), wobei $n \in \mathbb{Z}$. Andererseits existiert

der TVF Zustand mit Ganghöhe, $p = 0$, im $(0, n)$ Unterraum. RIB Zustände besitzen zwar die gleiche Ganghöhe, $p = 0$, wie TVF Zustände, leben aber in einem kombinierten Unterraum $(0, n) \oplus (\pm pn, n)$ (siehe hierzu auch Modenbilder im (m, n) Raum der verschiedenen Strukturen in Kap. 3).

Die verschiedenen, in diesem Kapitel diskutierten, Strukturen werden im Folgenden durch verschiedene Symbole wie folgt beschrieben: R-SPI mit roten Dreiecken (▼, ▽), L-SPI mit orangenen Dreiecken (▲, △), RIB mit grünen Rauten (♦, ◇), und MCS mit rot-braunen (maroon) Quadraten[1] (■, □). Wie zuvor stehen durchgehende [gestrichelte] Linien mit gefüllten [leeren] Symbolen für stabile [instabile] Lösungsäste oder Bifurkationsschwellen stabiler [instabiler] Zustände.

Alle diese Abkürzungen sind auch in der Tabelle 3.1 in Abschnitt 3.2 des Kapitel 3 zusammenfassend dargestellt.

6.3 Strukturelle Eigenschaften

MCS Strukturen können als eine Überlagerung zweier Spiralen mit unterschiedlicher Helizität und im Allgemeinen unterschiedlichen azimutalen Wellenzahlen, $M_1 \neq M_2$, aufgefasst werden, d.h. für ihre Ganghöhen $p_i, i \in \{1, 2\}$ (vgl. auch Gl. (3.9)) gilt: $\mathrm{sgn}(p_1 p_2) = -1$. In Abhängigkeit der Amplitudenverhältnisse, $|u_{M_1}|/|u_{M_2}|$, der dominanten Spiralkomponenten, findet man entweder Ribbon ähnliche Mixed Ribbon, oder offene helikale MCS Lösungen. Letztere bifurkieren dabei aus einem SPI Ast heraus und leben in einem Modenunterraum, der durch nichtlineare Überlagerung der linearen Modenunterräume entsteht (siehe etwa Gl. (3.9) und Abb. 6.4).

MCS Zustände können unterschiedliche SPI Lösungsäste verbinden und erscheinen meistens in einem ausgedehnten Parameterbereich. Allerdings müssen die beiden SPI Typen mit unterschiedlicher Helizität und azimutalen Wellenzahlen nicht unbedingt gleichzeitig existieren. Dies gilt ebenso für den Spezialfall, dass die Bifurkation im *gleichen* SPI Ast startet, indem sie auch wieder endet, so dass es sich um eine Bypasslösung handelt.

In diesem Abschnitt soll nun kurz eine Klassifikation und Beschreibung der grundlegenden Symmetrieeigenschaften von MCS und MRIB Lösungen vorgenommen werden, um diese dann mit 'klassischen' Strukturen, CSPI und RIB, zu vergleichen. Letztere kann man hierbei als eine nichtlineare Überlagerung von SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität, aber der *gleichen* azimutalen Wellenzahl M auffassen, diese wurden in der Literatur (115; 116; 117; 118), wie weiter oben erwähnt, bereits ausgiebig studiert. Ein einfacher Zugang zu den Eigenschaften von CSPI, RIB, MCS und MRIB Lösungen ist durch die lineare Überlagerung ihrer signifikanten Fouriermoden gegeben.

6.3.1 Ribbons (RIB) und Mixed Ribbons (MRIB)

Abbildung 6.1 veranschaulicht die Symmetrie von L1-SPI **(a)** Strukturen und R2-SPI **(b)** Strukturen, jeweils dargestellt durch ihre signifikante Mode. Die (grüne) $\Phi = 0$ Phasenlinie der linearen 1-RIB **(c)** Struktur kann als lineare Überlagerung der (orangen) L1-SPI **(a)** mit $p_1 = -1$ und der (roten) R1-SPI **(b)** Struktur mit $p_2 = 1$, aufgefasst werden. Analog Überlagern sich die $p_1 = -1$ und $p_2 = 2$ Strukturen zu einer (maroon) MRIB **(d)**

[1] In den vorangegangenen Kapiteln 4, 5 wurden wTVF Lösungen mit schwarzen Quadraten gekennzeichnet. Im Fall der wTVF Zustände bei Ferrofluiden 7, 8, **??**, die durch extern angelegte Magnetfelder erzeugt werden, werden blaue Quadrate zur Kennzeichnung benutzt.

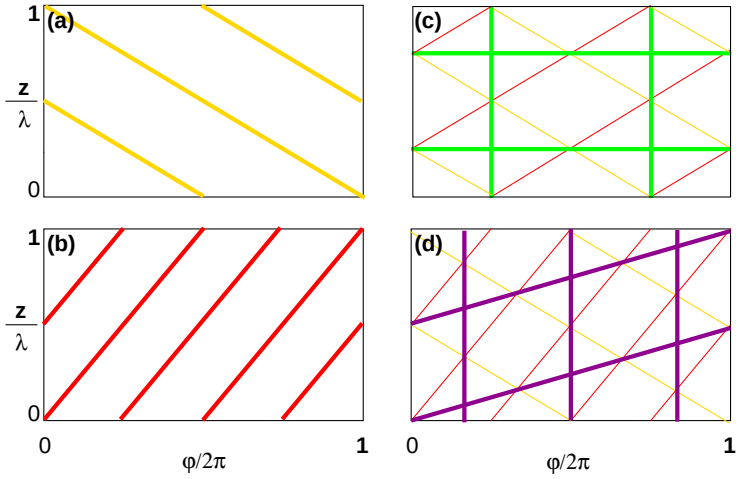


Abbildung 6.1 – Charakterisierung verschiedener Wirbel Strukturen durch Linien konstanter Phase, $\Phi = 0$, auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). **(a)** L1-SPI (orange) mit Ganghöhe $p = -1$, **(b)** R2-SPI (rot) mit $p = 2$, **(c)** 1-RIB (grün) mit $p = 0$ zusammengesetzt aus L1-SPI (orange) und R1-SPI (rot), **(d)** L1R2-MRIB (maroon) mit $p = 1/2$ zusammengesetzt aus L1-SPI (orange) und R2-SPI (rot).

Lösung. Im Gegensatz zur Abbildung 6.1**(c)** eines regulären Ribbon Musters, zeigt **(d)** ein versetztes Schachbrettmuster, das aus unterschiedlichen Steigungen der beiden Spiralkomponenten (L- und R-) herrührt.

Im Folgenden wird eine Notation verwendet, die die beiden dominanten Komponenten in einer MCS oder MRIB Lösungen wiederspiegelt. So z.B. kombinieren in der Abbildung 6.1**(d)** die L1 und die R2 Anteile zu einer L1R2-MRIB Struktur oder, im Fall ungleicher Anteile zu einer L1R2-MCS oder R2L1-MCS Lösung, abhängig davon, welche der beteiligten Modenamplituden die dominante ist.

Im Gegensatz zur 1-RIB mit vertikalen und horizontalen $\Phi = 0$ Phasenlinien **(c)**, d.h. mit Ganghöhe $p = 0$, besteht eine L1R2-MRIB Struktur **(d)** aus vertikal wie auch azimutal anwachsenden oder abnehmenden Phasenlinien, d.h. mit $p \neq 0$. Offensichtlich überlagern sich gleiche Anteile von SPI Zuständen mit unterschiedlichen Ganghöhen $\mathrm{sgn}(p_1 p_2) = -1$ zu einem MRIB Muster mit $|p_1 - p_2|$ vertikalen $\Phi = 0$ Linien und der Ganghöhe $p = (p_1 + p_2)/2$. Es ist anzumerken, dass im Allgemeinen der Wert der azimutalen Wellenzahl $M = |p|$ einer willkürlichen helikalen Struktur gerade immer gleich der Hälfte der Anzahl der Nullstellen Φ in azimutaler Richtung ist.

Betrachtet man so z.B. die Abbildung 6.1**(d)**, so erkennt man 4 Nullstellen in azimutaler Richtung φ (Schnitte der (maroonen) $\Phi = 0$ Phasenlinie mit einer horizontalen Linie, wie z.B. der Abszisse.). Mit den beiden Ganghöhen $p_1 = -1$ und $p_2 = 2$ ergibt sich $p = 1/2$, was gerade der Ganghöhe der MRIB Struktur in **(d)** entspricht.

6.3.2 Cross Spirals (CSPI) und Mixed Cross Spirals (MCS)

In Abbildung 6.1**(c)** und **(d)**, sind die dominanten Komponenten in der 1-RIB und der L1R2-MRIB Struktur mit *gleicher* Amplitude dargestellt (hieraus resultiert das auffallende Schachbrettmuster). In der vollständig entwickelten MCS Struktur (analog der CSPI) dominiert gewöhnlich eine der beiden Spiralkomponenten (majorante Komponente) die andere

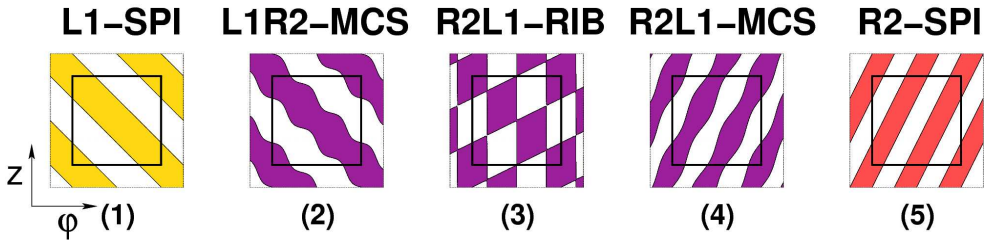


Abbildung 6.2 – Schematische Darstellung einer MCS Lösung (maroon) mit unterschiedlichen Anteilen von L1-SPI (orange) und R2-SPI (rot) Lösungen. Das Amplitudenverhältnis $\delta := |u_{\mathrm{R2}}|/|u_{\mathrm{L1}}|$ wächst innerhalb der Strukturen von links nach rechts mit $\delta = 0$ (L1-SPI, **(1)**), $\delta = 0.5$ (L1R2-MCS, **(2)**), $\delta = 1$ (L1R2-MRIB, **(3)**), $\delta = 2$ (R2L1-MCS, **(4)**) und $\delta = \infty$ (R2-SPI, **(5)**). Die farbigen [weißen] Bereiche charakterisieren radialen Outflow [Inflow] ($u > 0$ [$u < 0$]), in der Ebene der ausgerollten Zylinderoberfläche im Spalt. Die inneren Quadrate beinhalten eine azimutale Periode 2π in horizontaler Richtung und eine axiale Wellenlänge λ in vertikaler Richtung. Zur besseren Sichtbarkeit sind die Strukturen periodisch über diese Ränder (äußere Quadrate) hinweg fortgesetzt.

(minorante Komponente). Dies spiegelt sich auch in der hier verwendeten Notation wieder, so z.B. identifiziert 'R2L1-MCS' ['L1R2-MCS'] den Anteil einer dominanten, majoranten R2-SPI [L1-SPI] Struktur und einer untergeordneten, minoranten L1-SPI [R2-SPI] Struktur am Fourierspektrum der MCS Struktur. Ein Unterschied in den Amplitudenanteilen bricht die Schachbrettsymmetrie und es ergibt sich eine offene, helikale Struktur mit einer Steigung, die durch die majorante Spiralkomponente definiert wird und eine Modulation die durch den minoranten Anteil gegeben ist.

Um die Symmetrie von MCS und MRIB Strukturen besser zu veranschaulichen, zeigt die schematische Darstellung in Abbildung 6.2 eine Überlagerung von $p_1 = -1$ (L1) und $p_2 = 2$ (R2) Spiralanteilen bei Veränderung der Amplitudenverhältnisse. Startet man links in **(1)** mit einer reinen L1-SPI Lösung und erhöht den Anteil der R2 Komponente (in der Abbildung von links nach rechts), so führt dies zuerst zu einer L1R2-MCS **(2)** Lösung mit azimutaler Wellenzahl $M = 1$ und entsprechender Ganghöhe $p = -1$. Gleiche L1 und R2 Anteile in **(3)** ergeben eine L1R2-MRIB [bzw. R2L1-MRIB] Lösung (wie in Abb. 6.1**(d)**) mit $p = 1/2$. In **(4)** ist durch den dominanten R2 Anteil der R2-SPI Struktur der rechtsgewundene Charakter einer R2L1-MCS etabliert und schließlich folgt in **(5)** eine reine R2-SPI Struktur mit verschwindender L1 Komponente (siehe zum Vergleich auch Abb. 6.11, die eine echte numerische Simulation eines solchen Übergangs darstellt).

Das raumzeitliche Verhalten von MCS Lösungen stellt Aspekte der beiden Strukturen, SPI und RIB, dar, wenn auch deutlich komplexer. Für gewöhnlich rotieren alle (vertikalen und horizontalen) $\Phi = 0$ Phasenlinien in gleicher Richtung wie der Innenzylinder. Die horizontalen Phasenlinien einer RIB Struktur sind bei bestimmten $z =$ konst. Positionen gepinnt. Dies gilt aber nicht mehr länger für die MRIB Strukturen, wie z.B. in Abbildung 6.1**(d)**. Dort propagieren die $\Phi = 0$ Phasenlinien in axialer Richtung gemäß ihrer endlichen Steigung und der Rotation der vollständigen Struktur. Somit ist die axiale Propagationsrichtung der offenen, voll entwickelten MCS Struktur in Abbildung 6.2 durch die majorante Spiralkomponente (hier L1, Propagation nach oben) gekennzeichnet, während die Modulation, durch die minorante Komponente (hier R2, Propagation nach unten) gekennzeichnet ist und gerade in die entgegengesetzte Richtung propagiert (siehe auch (67)). Dies ist analog der Situation einer CSPI (115) Lösung.

Es sei nochmals deutlich darauf verwiesen, dass CSPI [RIB] Zustände einen Spezialfall

Abb.	lin. Unterraum	$\min \Omega_\varphi$	$\max \Omega_\varphi$	iso Ω_φ	iso/min	iso/max
(a1)	L3 $\oplus$ R3	-68	68	± 40	58%	58%
(a2)	L3	-35	35	± 20	56%	56%
(a3)	R3	-35	35	± 20	56%	56%
(b1)	L3 $\oplus$ R5	-173	143	± 70	40%	49%
(b2)	L3	-93	121	± 60	64%	49%
(b3)	R5	-35	64	± 33	92%	51%

Tabelle 6.1 – Isovortizitätswerte verschiedener Strukturen der Abbildung 6.3.

von MCS [MRIB] Lösungen darstellen. Weiterhin können RIB [MRIB] Strukturen als Spezialfall von CSPI [MCS] Lösungen mit gleichen Amplitudenanteilen von L-SPI und R-SPI Strukturen angesehen werden.

6.3.3 Raumzeitliche Eigenschaften

Um einen besseren Eindruck von der räumlichen Gestalt der MCS Strukturen zu erhalten, werden in der Abbildung 6.3 die Isovortizitätsflächen einer 3-RIB **(a1)** Struktur mit denen einer L3R5-MCS **(b1)** Lösung verglichen. Diese beiden Strukturen existieren bei $R_1 = 200, R_2 = 0$ unter periodischen Randbedingungen parallel nebeneinander. Der Isovortizitätswert wurde bei allen Plots so gewählt, dass er nahe der Hälfte des zugehörigen globalen Maximums der azimutalen Vortizität liegt (siehe Tab. 6.1). Die erste Spalte zeigt jeweils die vollständige Struktur. Die zweite und dritte hingegen enthalten die separaten Komponenten der jeweiligen linearen R- und L-SPI Fourierunterräume, d.h. (hier) die Moden $(3n, n)$ **(a2)** und $(-3n, n)$ **(a3)**, so wie $(3n, n)$ **(b2)** und $(-5n, n)$ **(b3)**. Die zugehörigen linearen Unterräume sind in der Abbildung 6.4 durch dicke Linien, die die linear getriebenen Moden des jeweiligen Unterraums verbinden, dargestellt. Die nichtlinear getriebenen Moden sind durch blaue Quadrate ohne Kreise gekennzeichnet, während Kreise die linear angeregten Moden charakterisieren; orange [rot] steht für den L-SPI [R-SPI] Anteil.

Offensichtlich stellen die beiden spiegelsymmetrischen links- und rechtsgewundenen Spiralkomponenten die Hauptbestandteile der totalen Vortizität der 3-RIB Lösung in Abbildung 6.3 **(a1)**-**(a3)** dar. Die nichtlinear getriebenen Moden, die außerhalb der Diagonale $(\pm 3n, n)$ im Fourierunterraum liegen, spielen nur eine sehr untergeordnete Rolle im Modenspektrum. Die Vortizitäten in den entsprechenden Komponenten in **(a2)** und **(a3)** sind im Allgemeinen etwas kleiner als diejenigen der vollen Struktur in Abbildung 6.3 **(a1)**, wie durch die maximalen Werte in Tabelle 6.1 beschrieben.

Auf der anderen Seite besteht die L3R5-MCS Lösung in Abbildung 6.3 **(b1)** aus einer stärkeren L3 in **(b2)** und einer schwächeren R5 Komponente in **(b3)**. Beide Plots der Komponenten zeigen Isoflächen für Vortizitätswerte, die bei ca. 50% des jeweiligen Maximums liegen. Allerdings unterscheiden sich die Vortizitätsmaxima in **(b2)** und **(b3)** und somit auch ihre Anteile zur vollständigen Struktur, deutlich voneinander. So dominiert der L3 Anteil die gesamte Struktur und der R5 Anteil erzeugt nur eine leichte Modulation. In diesem Fall propagiert die Struktur als Ganzes in positive azimutale und positive axiale Richtung (nach oben), gemäß der majoranten L3 Komponente, während die Modulation, entsprechend der minoranten R5 Komponente, abwärts wandert.

Es ist bemerkenswert, dass die blauen Wirbelschläuche der, gegen den Uhrzeigersinn (bei Betrachtung in positive φ Richtung), rotierenden Wirbel in **(b3)** signifikant kleiner sind als die roten, im Uhrzeigersinn rotierenden. Da im Allgemeinen die Vortizität entlang einer ausgewählten Linie *innerhalb* der Vortizitätsschläuche am größten ist, beschreiben die roten Schläuche Wirbel mit einer signifikant höheren azimutalen Vortizität $|\Omega_\varphi|$ als die

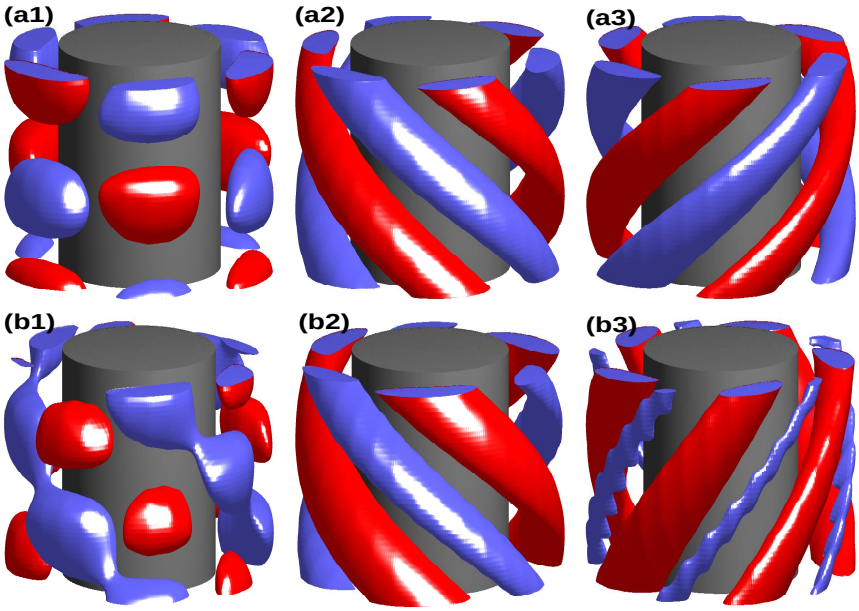


Abbildung 6.3 – Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ von numerisch berechneten **(a)** 3-RIB und **(b)** L3R5-MCS Lösungen bei $R_1 = 200$, $R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$ (siehe auch Kreuze im Phasendiagramm der Abb. 6.6**(d2)**). In axialer Richtung stellt jeder Plot eine axiale Wellenlänge $\lambda = 1.6$ dar. Die erste **(1)** Spalte zeigt die komplette Struktur. Die zweite **(2)** und dritte **(3)** Spalte geben die separaten Anteile der zugehörigen L-SPI und R-SPI Lösungen, nämlich die Unterräume $(3n, n) \widehat{=}$ L3 **(a2)**, $(-3n, n) \widehat{=}$ R3 **(a3)**, $(3n, n) \widehat{=}$ L3 **(b2)** und $(-5n, n) \widehat{=}$ R5 **(b3)**, wie in Abbildung 6.4 dargestellt, wieder. Rot [blau] entspricht positiven [negativen] Werten der Isovortizität, wie in Tabelle 6.1 aufgelistet. Zusätzlich enthält diese noch die entsprechenden Werte der Maxima und Minima der azimutalen Vortizität.

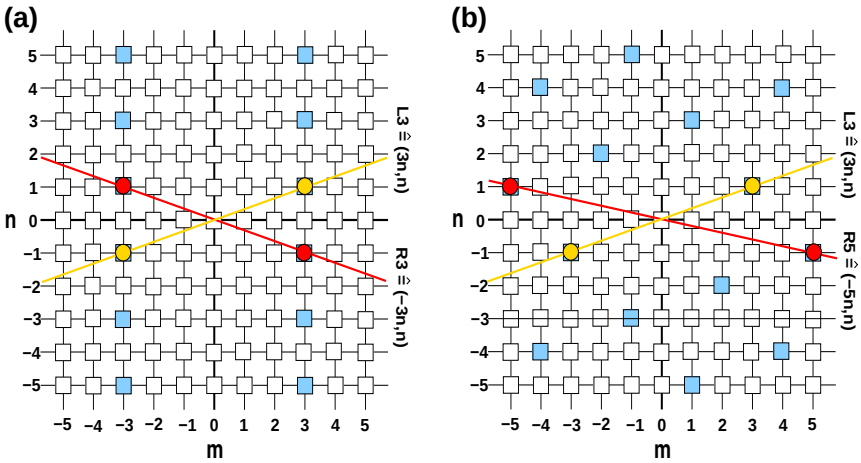


Abbildung 6.4 – Angeregte Moden (blaue Quadrate) der **(a)** 3-RIB und **(b)** L3R5-MCS Lösungen der Abbildung 6.3 im zweidimensionalen (m, n) Fouriermodenraum, aufgespannt durch azimutale und axiale Fouriermodenindizes, m und n. Blaue Quadrate mit rot oder orangenen Kreisen kennzeichnen linear getriebene Moden und entsprechende Überlagerung zu linearen Modenunterräumen sind durch die Linien dargestellt, die lineare R3-SPI $(-3n, n)$, L3-SPI $(3n, n)$ in **(a)** und lineare R5-SPI $(-5n, n)$, L3-SPI $(3n, n)$ in **(b)**. Blau Quadrate ohne Kreise symbolisieren nichtlinear getriebene Moden.

Abb.	lin. Strukturen	$\min \Omega_\varphi$	$\max \Omega_\varphi$	iso Ω_φ	iso/min	iso/max
(1)	3-RIB	-68	68	±40	58%	58%
(2)	4-RIB	-158	166	±60	38%	36%
(3)	5-RIB	-153	157	±60	39%	38%
(4)	L3R5-MCS	-173	143	±70	40%	49%
(5)	L4R5-MCS	-150	168	±75	50%	45%
(6)	L3R4-MCS	-159	174	±75	47%	43%

Tabelle 6.2 – Isovortizitätswerte verschiedener Strukturen der Abbildung 6.5**(a)**.

zu den blauen Schläuchen gehörende, z.B. $|\min \Omega_\varphi| < |\max \Omega_\varphi|$. Dies ist wahrscheinlich eine Konsequenz des nicht verschwindenden intrinsischen axialen Nettoflusses, der durch die beiden Spiralkomponenten (siehe z.B. (63)), der die beiden, im und gegen den Uhrzeigersinn, rotierenden Wirbel auf unterschiedliche Weise und Stärke beeinflusst. Im Fall von Ribbon Lösungen existiert kein axialer Nettofluss aufgrund der gleichen Anteile beider Spiral Typen und somit auch kein bemerkbarer Unterschied in den 'roten' und 'blauen' Wirbeln **(a2,a3)**, siehe auch zugehörige Werte Ω_φ in Tabelle 6.1 (RIB Strukturen stellen axial gesehen eine stehende Welle dar).

Abbildung 6.5 zeigt für moderate Kontrollparameter ($R_1 = 200, R_2 = 0$) verschiedene räumliche Eigenschaften von L3R4-MCS **(4)**, L3R5-MCS **(5)** so wie L4R5-MCS **(6)** Strukturen und vergleicht diese mit verschiedenen RIB Lösungen 3-RIB **(1)**, 4-RIB **(2)** und 5-RIB **(3)**, die alle gleichzeitig existieren. Andererseits wurden für die hier gewählten Kontrollparameter weder stabile, noch instabile CSPI Lösungen gefunden.

Abbildung 6.5**(a)** zeigt Isovortizitätsplots der azimutalen Vortizität für diese, gerade beschriebenen, sechs Strukturen mit Werten von 40% bis 60% der zugehörigen Vortizitätsmaxima (Tab. 6.2). Die entsprechenden Fouriermodenspektren sind in **(b)** zu sehen. Obwohl die Rechnungen mit $n_{\max} = m_{\max} = 15$ durchgeführt wurden, um mindestens drei signifikante Moden der linearen Fourierunterräume $(\pm 3n, n)$**(1)**, $(\pm 4n, n)$**(2)** und $(\pm 5n, n)$**(3)** zu berücksichtigen, wird hier aus Gründen der besseren Sichtbarkeit, nur ein kleiner Ausschnitt dargestellt, der nur die dominanten Moden beinhaltet.

Abbildung 6.5**(c)** zeigt grau kodierte Plots des radialen Geschwindigkeitsfeldes $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in einer $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte ($r = 0.5$), sowie die entsprechenden Linien konstanter Phase (siehe Abb. 6.1) beider Spiralkomponenten. Als letztes sind in **(d)** noch Vektorplots der radialen und axialen Geschwindigkeit $(u(r, z), w(r, z))$ in einer $r - z$ Ebene (φ =konst.), einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität dargestellt (blau=Min, rot=Max).

Alle zuvor genannten Strukturen sind stationär und rotieren als Ganzes in positiver azimutaler Richtung. Die RIB Strukturen in den Abbildungen 6.5**(c1)-(c3)** weisen die klassische Schachbrettsymmetrie einer axial *nicht* propagierenden, d.h. stehenden und nur azimutal wandernden Welle auf. Bei wachsendem M verschieben sich allerdings die Wirbelzentren leicht zum äußeren Zylinder hin, während gleichzeitig hiermit auch die maximale Vortizität in den Abbildungen 6.5**(d1)-(d3)** anwächst.

Im Gegensatz hierzu propagieren die MCS Strukturen in die axiale Richtung, die durch die majorante Komponente gegeben ist (Abb. 6.5**(b4)-(b6)**) und besitzen eine helikale Gestalt mit einer, dieser überlagerten Modulation (Abb. 6.5**(c4)-(c6)** und **(a4)-(a6)**), die in die entgegengesetzte Richtung propagiert. Die Vektorplots in **(d)** sind bei solchen φ Positionen gemacht, bei denen die Phasen aller Strukturen übereinstimmen. Offensichtlich sind die beiden Strukturen, L4R5-MCS in **(d6)** und L3R4-MCS in **(d4)**, sehr ähnlich, unterscheiden sich aber von der L3R5-MCS Struktur in **(d5)**. Dies ist wahrscheinlich ein geometrischer Effekt, der auf die größere Differenz in den Steigungen der beteiligten Struk-

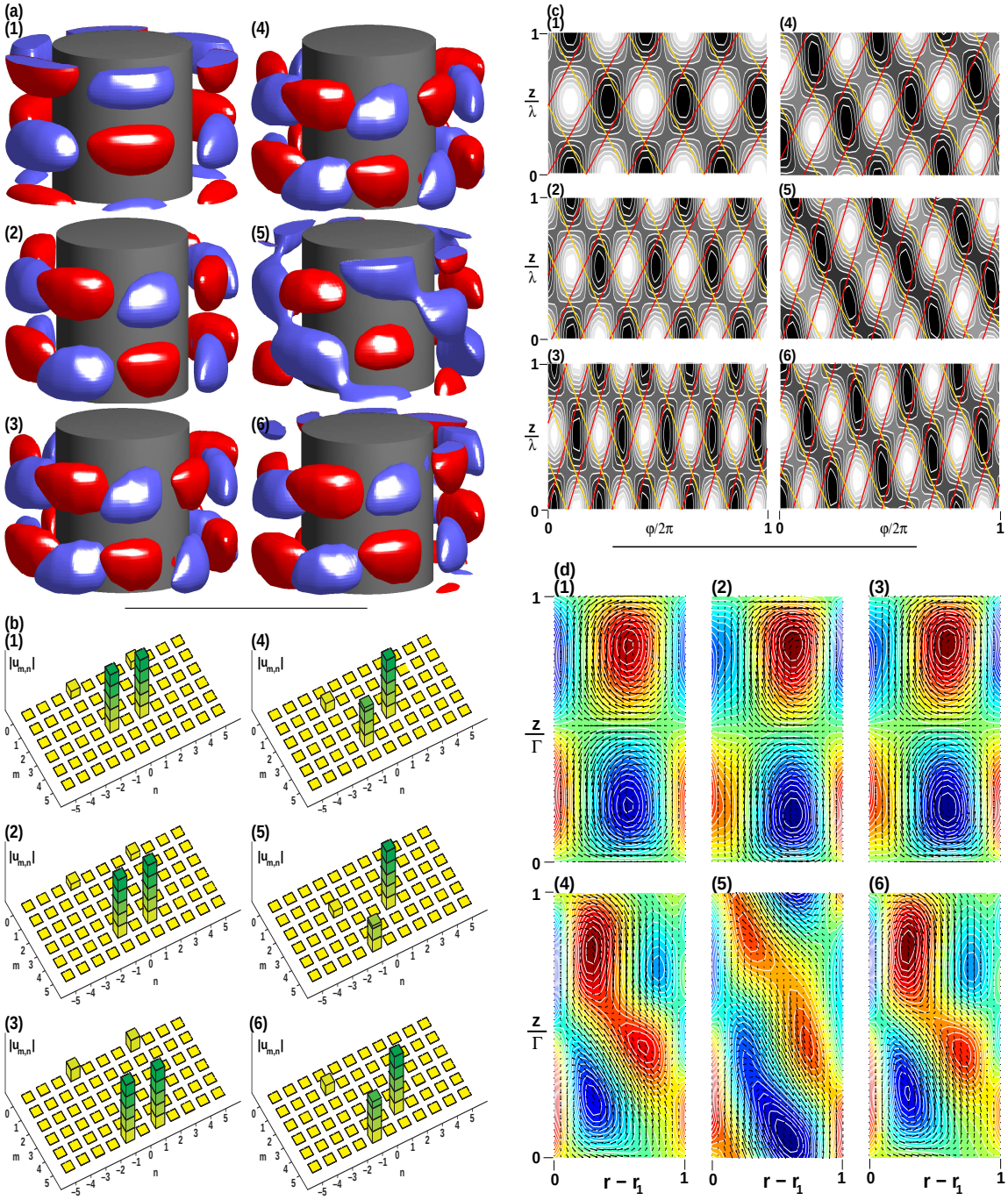


Abbildung 6.5 – Vergleich verschiedener, numerisch berechneter, voll entwickelter Strukturen: **(1)** 3-RIB, **(2)** 4-RIB und **(3)** 5-RIB mit **(4)** L3R4-MCS, **(5)** L3R5-MCS und **(6)** L4R5-MCS. **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ. Rot [blau] steht für positive [negative] Isovortizitätswerte die in Tabelle 6.2, zusammen mit den entsprechenden Minima und Maxima der azimutalen Vortizität, eingetragen sind. Jeder Plot stellt eine axiale Periodenlänge, $\lambda = 1.6$, dar. **(b)** Modenamplituden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes u für azimutale und axiale Fouriermodenindizes, m und n, in einem Ausschnitt des kompletten Fourierraums. **(c)** grau kodiertes radiales Geschwindigkeitsfeld $u(\varphi, z)$ auf einer abgerollten Zylinderoberfläche in Spaltmitte ($r = 0.5$). Schwarz [weiß] entspricht maximalem Inflow [Outflow]. Gelbe und rote Linien repräsentieren die Phasenlinien, $\Phi = 0$, der zugehörigen reinen Spiralkomponenten und sind mit eingefügt um die einzelnen Strukturanteile besser sichtbar zu machen. **(d)** Vektorplots $(u(r, z), w(r, z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich farbkodierter azimutaler Vortizität von blau (Minimum) bis rot (Maximum). Kontrollparameter für alle Plots sind: $R_1 = 200, R_2 = 0, k = 3.927, \eta = 0.883$.

turanteile, L3-SPI und R5-SPI, in **(d5)** zurückzuführen ist. Hier ist $|\Delta M| = 2$, während bei den anderen nur $|\Delta M| = 1$ gilt.

6.4 Bifurkationsverhalten und Stabilität von MCS Strukturen

6.4.1 Bifurkationsszenarien

Wie bereits weiter oben erwähnt, bifurkieren MCS Strukturen in einer sekundären, vorwärts gerichteten Bifurkation aus reinen SPI Zuständen heraus. In den meisten Fällen existieren dabei beide SPI Lösungen, mit unterschiedlichen Helizitäten und Ganghöhen p_1 und p_2, gleichzeitig, d.h. $\mathrm{sgn}(p_1 p_2) = -1$. Für den Fall eines ruhenden Außenzylinders sind in Abbildung 6.6**(a)**, **(b)** und **(c)**, abhängig von R_1 und R_2, Bifurkationsdiagramme für die quadratischen Amplituden $|u_{m,n}|^2$ der dominanten Moden und deren Frequenzen $|\omega_{m,n}|$, einiger im letzten Abschnitt diskutierten MCS Strukturen,**(1) L3R4-MCS, (2) L3R5-MCS, (3) L4R5-MCS**, dargestellt. Die beiden Kontrollparameter, R_1 und R_2, variieren dabei entlang der mit α, β und γ bezeichneten Pfeile, im Phasendiagramm der Abbildung 6.6**(d)**.

Sowohl L3-SPI und L4-SPI Zustände, als auch die zugehörigen RIB Lösungen bifurkieren primär als instabile Lösungen aus dem CCF in **(a)** heraus und können bei bestimmten Kontrollparametern stabilisiert werden. Bei weiter anwachsenden R_1 treten zusätzlich primäre Bifurkationen von R4-SPI und R5-SPI Strukturen, einschließlich der zugehörigen RIB Lösungen, ebenfalls als instabile Lösungen auf. Bei noch größeren R_1 Lösungen, in den grau markierten Bereichen, wachsen L3R4-MCS **(1)**, L3R5-MCS **(2)** und L4R5-MCS **(3)** Lösungen aus den reinen Strukturen der L3-SPI **(1)**, **(2)** und L4-SPI **(3)** heraus – diese werden (gemäß der Gl. (3.2)) durch die jeweiligen dominanten (majorante und minorante) Moden $(m, n) = (3, 1)$ und $(4, -1)$ in **(1)**, $(3, 1)$ und $(5, -1)$ in **(2)**, so wie $(4, 1)$ und $(5, -1)$ in **(3)**, beschrieben.

Aufgrund der Abwesenheit axial symmetriebrechender Effekte (wie z.B. Durchfluss) liegen links- und rechtsgewundene SPI Lösungen entartet vor, d.h. L- und R-SPI Zustände mit unterschiedlicher Helizität, aber gleicher azimutaler Wellenzahl M, bifurkieren an einer gemeinsamen Schwelle. Dies gilt ebenso für die MCS Zustände, z.B. L3R4-MCS und deren Spiegelbild, die R3L4-MCS Lösung. Im Folgenden wird deshalb immer nur eine der spiegelsymmetrischen MCS Lösungen betrachtet, und die entsprechenden SPI Typen die die dominanten MCS Komponenten darstellen. Es sei noch erwähnt, dass andere Lösungen mit $M \leq 2$ hier nicht von Interesse sind und deshalb in die Abbildungen auch nicht mit aufgenommen wurden.

Offensichtlich bifurkieren MCS Strukturen vornehmlich aus der Spiral Lösung mit der größeren Amplitude (vgl. auch Abs. 6.5.3). Am Onset stimmen die Amplituden der entsprechenden, majoranten MCS Komponente und der entsprechenden SPI Komponente überein (z.B. die $(3, 1)$ Mode in **(1)**), während die andere, minorante MCS Komponente dort bei Null startet. Weiterhin scheint es *keinen einfachen* Zusammenhang zwischen den Positionen von MCS und SPI Onsets zu geben (siehe Abb. 6.6**(a)**).

Schließlich sei noch angemerkt, dass für Kontrollparameter oberhalb von $R_1 \approx 250$, die hier diskutierten Strukturen instabil gegenüber weitaus komplexeren, zum Teil sogar turbulenten, Zuständen sind.

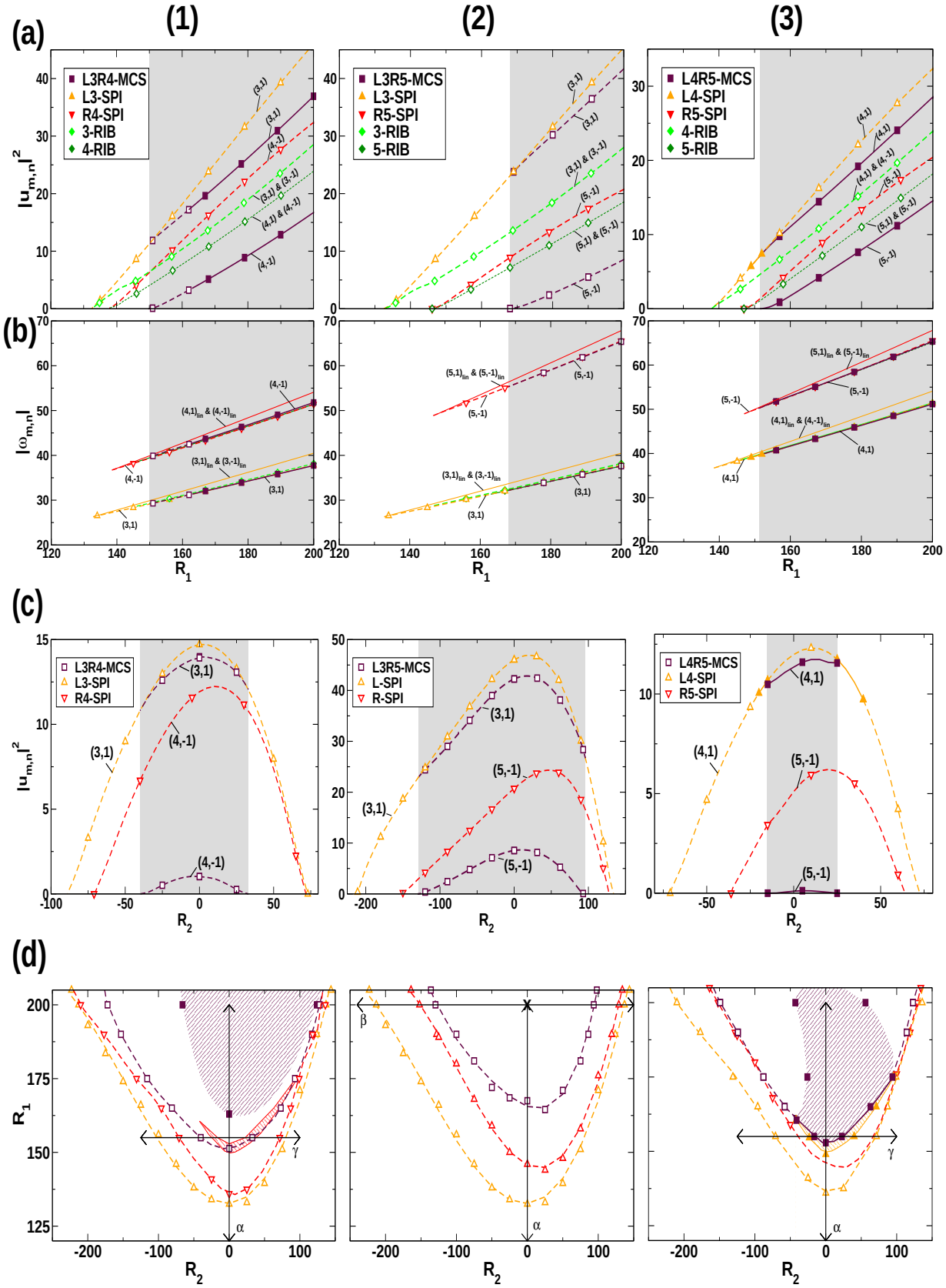


Abbildung 6.6 –

Bildlegende:
Abb. 6.6: Vergleich verschiedener numerisch berechneter MCS und SPI Lösungen: **(1)** L3R4-MCS (■, □) bifurkieren aus reinen L3-SPI (▲, △), **(2)** L3R5-MCS (■, □) bifurkieren aus reinen L3-SPI (▲, △) und **(3)** L4R5-MCS (■, □) bifurkieren aus reinen L4-SPI (▲, △) so wie R-SPI (▼, ▽), als auch RIB (◊, ◊). Durchgehende [gestrichelte] Linien bezeichnen stabile [instabile] Zustände oder ungefähr die Bifurkationsschwellen von stabilen [instabilen] Lösungen. **(a)** Bifurkationsdiagramme der radialen Geschwindigkeitsamplituden $|u_{m,n}|^2$ und **(b)** entsprechende Frequenzen $|\omega_{m,n}|$ der zugehörigen dominanten Moden (siehe Gl. (3.2)) bei R_1 Variation entlang der, mit α bezeichneten Pfeile in **(d)**. Dünne [dicke] Linien mit Symbolen repräsentieren lineare [nichtlineare] Frequenzen, die mittels Shooting Verfahren [voller numerischer Simulation] erhalten wurden. Im Fall der MCS Strukturen werden immer beide, sowohl die größte (majorante) wie auch die kleinere (minorante) Modenkomponente angegeben, wie z.B. $(3, 1)$ und $(4, -1)$ bei einer L3R4-MCS Struktur analog für die anderen MCS Lösungen. **(c)** Bifurkationsdiagramm bei R_2 Variation entlang der mit β und γ bezeichneten Pfeile in **(d)**. **(d)** $R_1 - R_2$ Phasendiagramm mit geschlossenen [offenen] Symbolen und durchgezogenen [gestrichelten] approximierten Linien, die die Bifurkationsschwellen der stabilen [instabilen] Lösungen charakterisieren. Die schraffierten Bereiche in **(1)**-**(3)** beschreiben ungefähr die Regionen stabiler MCS (maroon), stabiler R4-SPI (rot) und stabile L4-SPI (orange) Lösungen. Kontrollparameter: $k = 3.927, \eta = 0.883$.

Solch komplette MCS Lösungsäste, wie in Abbildung 6.6**(c)** zu sehen, können dadurch erhalten werden, indem man R_1 fixiert hält und R_2 variiert, wie etwa entlang der Pfeile β und γ im Phasendiagramm **(d)**. So zum Beispiel bifurkiert die L3R5-MCS Lösung in **(c2)** für $R_1 = 200$, dargestellt durch die beiden Moden $(3, 1)$ (Majorante) und $(5, -1)$ (Minorante), sekundär als instabile Lösung aus der ebenfalls instabilen L3-SPI Struktur innerhalb des grau markierten Bereiches. Dieser liegt dabei, wie bereits oben erwähnt vollständig innerhalb der Region, in der *beide* SPI Strukturen, L3-SPI und R5-SPI, gleichzeitig existieren.

Für einen kleineren Wert $R_1 = 155$ etwa bifurkieren die L3R4-MCS Strukturen in Abbildung 6.6**(c1)** und L4R5-MCS Zustände in **(c3)** analog aus der reinen L3-SPI bzw. L4-SPI Lösung heraus. Abhängig von den jeweils benutzten Kontrollparametern kann man verschiedene Arten des Stabilitätstransfers beobachten, was im Einzelnen genauer im Abschnitt 6.4.3 diskutiert wird.

6.4.2 Frequenzen

In Abbildung 6.6**(b)** werden die Frequenzen verschiedener MCS Zuständen mit denen linearer und nichtlinearer SPI Strukturen verglichen. SPI und RIB Lösungen mit $M \geq 3$ entstehen gemäß einer primären Hopf Bifurkation mit der gleichen endlichen Frequenz, die nahezu linear mit R_1 anwächst. Dies ist ein deutlicher Unterschied zu SPI und RIB Zuständen bei $\eta = 0.5$ und $M < 2$. Bei diesen findet man eine Verminderung [ein Anwachsen] der Frequenzen nahe [erst weiter entfernt] vom Onset (63). Dies hat zur Folge, dass sich bei größeren η, wie hier gewählt, SPI Frequenzen, linear und nichtlinear, nahezu identisch verhalten.

MCS Strukturen sind zeitlich periodische, rotierende und für $M_1 \neq M_2$ auch axial propagierende Zustände. Im hier dargestellten Parameterbereich stimmen die Frequenzen der beiden dominanten SPI Komponenten aller MCS Strukturen sehr gut mit den Frequenzen der entsprechenden reinen SPI Lösungen überein. Die Anteile der nichtlinear getriebenen Moden ist hierbei klein genug, so dass das raumzeitliche Verhalten der MCS Lösungen

hauptsächlich durch eine lineare Überlagerung der beiden dominanten SPI Frequenzen gegeben ist. Dies ist ein signifikanter Unterschied zu anderen sekundär bifurkierenden Strukturen, mit endlichen Frequenzen, wie etwa wSPI Lösungen (siehe z.B. (66; 4) oder auch Kap. 4 und 5).

Raumzeitliches Verhalten

Wie in dem Film 4.avi (67), exemplarisch an einer L3R5-MCS Struktur zu erkennen, so ist das raumzeitliche Verhalten durch eine axiale Propagation der Wirbel gekennzeichnet, dessen Richtung durch die majorante SPI Komponente (hier L3) gegeben ist, und einer entgegen dieser wandernden Modulation der Wirbel, die durch die minorante SPI Komponente (hier R5) bestimmt wird. Der kurze Film 5.avi veranschaulicht den Übergang von einer L3-SPI Lösung als Anfangszustand zu einer L3R5-MCS Struktur durch einen instantanen Sprung auf die verwendeten Kontrollparameter ($R_1 = 200$, $R_2 = 0$). Auf der linken Seite sind Vektorplots des Geschwindigkeitsfeldes $(u(r,z), w(r,z))$ mit farbkodierter azimutaler Vortizität dargestellt (blau=Minimum, rot=Maximum, die dicke schwarze Linien repräsentiert, $\Omega_\varphi = 0$, siehe auch Abb. 6.5**(d)**). In der Mitte ist, grau kodiert (schwarz=Inflow, weiß=Outflow mit dicken rote Linien[2] $u = 0$), das radiale Geschwindigkeitsfeld $|u(\varphi, z)|$ auf der Oberfläche eines abgerollten Zylinders in Spaltmitte ($r = 0.5$) dargestellt (siehe auch Abb. 6.5**(c)**). Die ersten 40 Frames zeigen die reine aufwärts wandernde L3-SPI Lösung. In den dann folgenden Frames (40 bis ca. 150) wächst der Einfluss des R5-SPI Anteils an der gesamten Struktur an, was sich in einem Beginn und der weiteren Verstärkung der Modulation der Isolinien in den $\varphi - z$ Plots äußert. Diese Modulation erzeugt Vergrößerungen und Abschwächungen der In- und Outflow Amplituden bei bestimmten φ Positionen, was sich durch das Auftreten neuer, geschlossener Isolinien in den Frames von 150 bis 270 zeigt.

Ab etwa Frame 270 liegt eine voll entwickelte, aufwärts wandernde L3R5-MCS Struktur (majoranter L3 Anteil) mit einer abwärts wandernden Modulation (minoranter R5 Anteil) vor.

6.4.3 Stabilität

Wie bereits in den letzten beiden Kapiteln 4 und 5 oder in (62; 63) beschrieben, bifurkieren SPI Zustände mit $p = \pm 1$, bei moderater Rotation des Außenzylinders, als instabile Lösungen aus dem CCF Grundzustand heraus und werden bei höheren R_1 Werten stabil. Dies trifft auch für SPI und ebenfalls RIB Lösungen mit $|p| > 1$ zu, besonders bei den hier untersuchten SPI Strukturen: 3-SPI, 4-SPI und 5-SPI. Innerhalb der Parameterbereiche, in denen mindestens zwei dieser Strukturen gleichzeitig existieren und der Bedingung[3] $\mathrm{sgn}(p_1 p_2) = -1$ genügen kann die zugehörige MCS Lösung sowohl als stabile, als auch als instabile Lösung aus einem, stabil oder instabilen, SPI Ast herausbifurkieren. Das Stabilitätsverhalten wird in der Abbildung 6.6 mittels durchgezogene oder gestrichelte Linien gekennzeichnet. Zwei verschiedene Szenarien wurden hierbei gefunden:

(I) Eine instabile MCS Struktur bifurkiert aus einem instabilen SPI Lösungsast heraus. Letztere Lösung ändert dabei ihre Stabilität nicht. Dies ist die Situation für die

[2] Diese geben einen guten Eindruck von der Position und der Veränderung der einzelnen Wirbel.

[3] Hierbei ist zu beachten, dass dies im Fall symmetriebrechender Effekte, wie etwa axialer Durchfluss, der die Onsets von links- und rechtsgewundenen SPI Strukturen unterschiedlich stark verschiebt, von Bedeutung wird. Somit sind die Onsets der spiegelsymmetrischen Lösungen identisch.

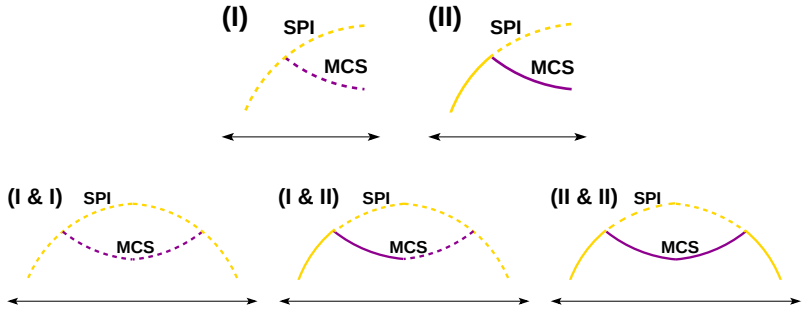


Abbildung 6.7 – Schematische Darstellung (für einen möglichen Kontrollparameter des in Abb. 6.6**(d)** dargestellten Bereiches, z.B. R_2) der Bifurkationsszenarien von MCS Lösungen aus reinen SPI Lösungen **(I)** und **(II)** und ihrer Kombinationen nahe der MCS Bifurkationsschwellen für pbc Bedingungen. Durchgehende [gestrichelte] Linien repräsentieren stabile [instabile] Lösungen.

L3R4- und die L3R5-MCS Lösung in Abbildung 6.6**(a1)** und **(a2)**, sowie für die beiden Bifurkationspunkte in **(c1)** und **(c2)**.

(II) Eine stabile MCS Struktur bifurkiert aus einer stabilen SPI Lösung, die dann selbst instabil wird, heraus. Dies ist der Fall für die L4R5-MCS Struktur in Abbildung 6.6**(a3)** und für beide Bifurkationspunkte in **(c3)** und Abbildung 6.7.

Es wurden mehrere MCS Lösungsäste gefunden, die diese beiden Bifurkationstypen und ihre drei möglichen Kombinationen, wie schematisch in Abbildung 6.7 zu sehen, aufweisen. Wie im Folgenden Abschnitt gezeigt wird, kann eine einzelne MCS Lösung ihre Stabilität, abhängig der Veränderung der Kontrollparameter, R_1 und R_2, ändern.

Obwohl in den meisten Fällen *zwei* unterschiedliche SPI Lösungen notwendig sind, damit MCS Strukturen existieren, kann anscheinend nur diejenige SPI Lösung, die auch die *majorante* SPI Komponente in der MCS darstellt, Stabilität mit der MCS Lösung austauschen. Mit anderen Worten: Das Stabilitätsverhalten der SPI Lösung, die die *minorante* Spiralkomponente der MCS Struktur darstellt, hat keine Auswirkungen darauf welches der verschiedenen Szenarien angenommen wird. Aus diesem Grund sind diese SPI Lösungsäste in Abbildung 6.7 vernachlässigt. Ebenso sei noch erwähnt, dass die betrachteten RIB Lösungen in dem hier untersuchten Parameterbereich immer nur als instabile Strukturen vorliegen.

Es sei aber nochmals ausdrücklich betont, dass beide Szenarien nur die Stabilität in der Umgebung des Bifurkationspunktes beschreiben und keinerlei Vorhersage bezüglich Stabilitätseigenschaften weit(er) entfernt dieses Bereiches machen. Vielmehr wurde entfernt von diesen Punkten ein ziemlich komplexes Stabilitätsverhalten gefunden: So z.B. bifurkiert die L4R5-MCS Struktur in Abbildung 6.6**(c3)** als eine stabile Lösung aus einer L4-SPI Struktur, die nur unterhalb des Bifurkationspunktes stabil vorliegt und oberhalb dieses ihre Stabilität verliert.

6.4.4 Phasendiagramm

Das Phasendiagramm der Abbildung 6.6**(d)** zeigt eine $R_1 - R_2$ Region, in denen es keine Überschneidungen der verschiedenen SPI Bifurkationsschwellen gibt. D.h. bei Betrachtung von z.B. links nach rechts verschwinden die Strukturen gerade in der umgekehrten Reihenfolge, wie sie zuvor aus dem CCF herausbifurkiert sind.

Der noch *interessantere* Fall, einschließlich solcher Überschneidungen wird in Abschnitt 6.5 diskutiert. Ohne Überschneidungen ist garantiert, dass jeder MCS Ast in ein und der *selben* SPI Lösung startet und endet. Dies stellt eine Bypasslösung (5) dar. Die SPI Lösungen bifurkieren aus dem CCF heraus – dargestellt durch orange und rote Dreiecke, die mittels durchgehender oder gestrichelter Linien approximiert wurden, um den Verlauf besser darzustellen. Durchgehende [gestrichelte] Linien stehen für Bifurkationsschwellen von stabilen [instabilen] Zuständen[4]. Quadrate repräsentieren sekundär (meist instabil) bifurkierende MCS Lösungen, die in den schraffierten Gebieten stabilisiert werden.

Das einfachste Verhalten zeigt die L3R5-MCS Struktur, die für das gesamte Parameterspektrum der Abbildung 6.6**(d2)** als instabile Lösung aus einer, ebenfalls instabilen, reinen L3-SPI Struktur herausbifurkiert. Im Gegensatz hierzu liegen L3R4-MCS und L4R5-MCS Strukturen teilweise stabil vor. In **(d1)** entsteht die L3R4-MCS Struktur immer aus einer instabilen L3-SPI Lösung und letztere wird im schraffierten Bereich, der eine Approximation der berechneten Datenpunkte (maroone Quadrate) ist, stabilisiert. Dieser anspruchsvolle und diffizile Mechanismus des Stabilitätstransfers beinhaltet weitere Zustände und ist Gegenstand weiterer genauerer Untersuchungen. Die L4R5-MCS Struktur in **(d3)** bifurkiert bei moderaten R_2 als eine stabile und für größere R_2 als eine instabile Lösung aus der instabilen **(i)** oder stabilen **(ii)** L4-SPI Lösung. Das Zusammenfallen von stabilen L4-SPI (orange schraffierte Region) und stabil bifurkierenden L4R5-MCS Lösungen (maroon schraffierte Region) in **(d3)** ist offensichtlich. Letztendlich zeigen **(d1)**-**(d3)** die Koexistenz von 3-, 4- und 5-SPI Zuständen und die (mindestens) vorhandene Bistabilität von L3R4- und L4R5-MCS Lösungen.

Anmerkung: Die Bifurkationsschwellen von z.B. L3-SPI und R5-SPI Strukturen schneiden sich für Werte $R_1 > 200$, was zu einer Änderung in der Bifurkationsabfolge führt. In diesem Fall kann man L3R5-MCS Zustände finden, die aus einer L3-SPI Lösung herausbifurkieren, und beim Verfolgen ihres Lösungssastes ihre Gestalt zu einer R5L3-MCS Struktur verändern, um schließlich im R5-SPI Zustand zu enden – dies wird später noch ausführlich in Abschnitt 6.5.1 diskutiert.

6.4.5 Eingrenzung des Parameterbereiches

η Abhängigkeit – Einfluss auf Moden und Frequenzen

Dieser kurze Abschnitt soll unter anderem dazu dienen die Probleme beim experimentellen Nachweis der, in diesem Kapitel diskutierten, MCS Strukturen zu verdeutlichen und etwas näher zu erläutern. Hierbei geht es insbesondere um einen Vergleich des hier verwendeten Radienverhältnisses, $\eta = 0.883$, mit dem sonst in dieser Arbeit benutzten Wert $\eta = 0.5$.

In Abbildung 6.8 ist die Abhängigkeit der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ **(a)** des radialen Geschwindigkeitsfeldes und ihrer zugehörigen Frequenzen $|\omega_{m,n}|$ **(b)** von 1-SPI und 1-RIB Lösungen vom Radienverhältnis η dargestellt. Ausgangspunkt der nun folgenden Diskussion sei hierbei $\eta = 0.883$ (rechts in Abb. 6.8). Bei Verringerung von η wächst die Amplitude der dominanten SPI Mode $(1, 1)$ (orange) kontinuierlich an, während die Amplituden der dominanten RIB Moden, $(1, 1)$ und $(1, -1)$, (grün) zunächst ebenfalls anwachsen, ihr Maximum bei $\eta \approx 0.6$ erreichen, danach aber erneut leicht abnehmen. Anders als die Moden zeigen die zugehörigen Frequenzen vollkommen analoges Verhalten für 1-SPI und 1-RIB Strukturen; sie nehmen bei beiden Strukturen mit abnehmendem η (von rechts nach links) kontinuierlich zu, wobei die SPI Frequenzen immer oberhalb der RIB Frequenzen liegen und

[4] Obwohl hier alle SPI Bifurkationsschwellen R- und L- symmetrieentartet sind, so werden diese hier gemäß der majoranten und minoranten Spiralkomponente in der MCS Struktur bezeichnet.

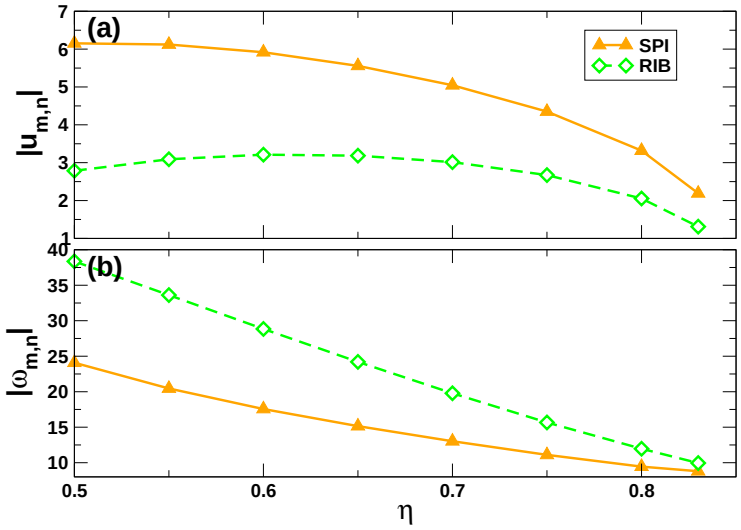


Abbildung 6.8 – Abhängigkeit der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ **(a)** und ihrer zugehörigen Frequenzen $|\omega_{m,n}|$ **(b)** von 1-SPI und 1-RIB Zuständen vom Radienverhältnis η. Weitere Kontrollparameter: $k = 3.927, R_1 = 120, R_2 = -100$.

eine größere Steigung besitzen. Hieraus resultierend vergrößert sich der Abstand zwischen den Frequenzen dieser Strukturen immer weiter.

Diese starke Zunahme in den Frequenzen ist auf die, aufgrund zunehmender Verengung des Spaltes, steigende Geschwindigkeit der Fluidzirkulation zurückzuführen. Diese ist auch verantwortlich dafür, dass sich die meisten Strukturen bei großen η finden lassen, zumindest sind sie dort im Allgemeinen sehr viel einfacher zu beobachten. Dies gilt insbesondere auch für die hier diskutierten MCS Strukturen, da diese sehr komplexe Strukturen darstellen. Insgesamt kann man festhalten: Je komplexer die Struktur, desto größer muss man η wählen, um diese zu 'finden', vorausgesetzt natürlich sie existiert dort überhaupt. Ein weiteres Problem in Hinblick auf MCS Strukturen im Experiment ist die hier als fixiert und identisch angenommene axiale Wellenzahl, $k = 3.927$, der beiden Teilstrukturen im periodischen System (siehe hierzu auch Abs. 6.6).

Wegen der eben genannten Punkte erklärt sich auch die Wahl, $\eta = 0.883$, zur Diskussion der MCS Strukturen. Bei kleinerem η wären einige Untersuchungen deutlich schwieriger, bzw. zum Teil aufgrund numerischer Probleme gar nicht möglich gewesen.

Existenzbereiche von MCS

Ein interessantes Phänomen im Bezug auf die Zusammensetzung der MCS Strukturen ist, dass bei den hier untersuchten Parametern nicht etwa beliebige Kombinationen aus verschiedenen SPI Zuständen mit azimutalen Wellenzahlen $|M|$ gefunden wurden. Ebenso muss an dieser Stelle allerdings die Frage offen bleiben, ob diese Zustände im endlichen System, in der hier gezeigten Konfiguration, überhaupt existieren. Wie etwa in der Abbildung 6.9 zu sehen bifurkieren für $R_1 = 130$, von links nach rechts, zunächst die 1-SPI (hier L1-SPI) und 1-RIB Lösung und danach die 2-SPI (hier R2-SPI) und 2-RIB Lösungen, um dann in umgekehrter Reihenfolge nacheinander wieder zu verschwinden. Allerdings zweigt an *keinem* Punkt dieser Bifurkationsäste eine L1R2-MCS (oder R2L1-MCS) Lösung, die sich theoretisch durch Kombination dieser Zustände ergeben könnte, ab. Ähnliches Verhal-

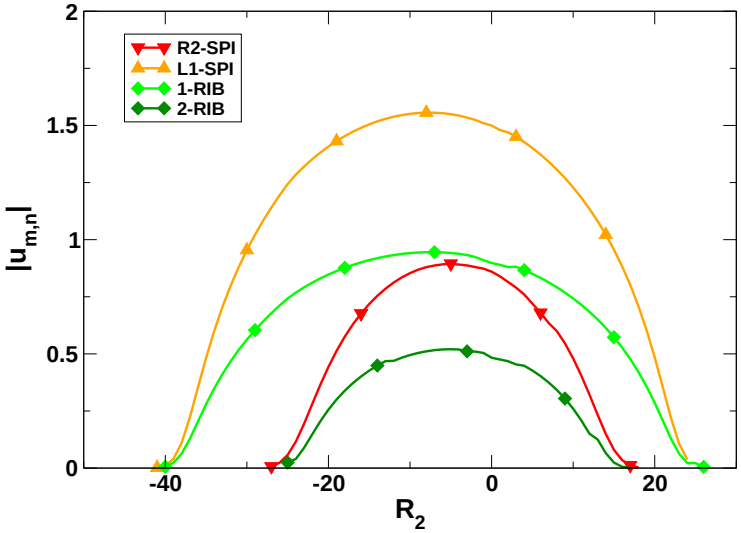


Abbildung 6.9 – Bifurkationsdiagramme von L1-SPI, R2-SPI, 1-RIB und 2-RIB Strukturen. Bei den hier gewählten Parametern kann keine MCS Struktur (L1R2-MCS oder R2L1-MCS), die theoretisch aus den Lösungen von 1-SPI und 2-SPI Zuständen kombinierbar wäre, beobachtet werden. Kontrollparameter: $R_1 = 130, k = 3.927, \eta = 0.883$.

ten wie in diesem Beispiel zeigte sich auch bei der Betrachtung anderer Bifurkationsäste mit Kombinationen von SPI Lösungen mit $|M| = 1, 2$. Hierbei ist natürlich immer vorausgesetzt, dass man sich oberhalb der Bifurkationsschwellen der betrachteten Lösungen befindet. Die Tatsache, dass MCS Strukturen aus SPI Strukturen mit Kombinationen kleiner azimutaler Wellenzahlen M hier nicht gefunden wurden, heißt aber bei der Größe des zugrunde liegenden Parameterbereiches noch lange nicht, dass diese nicht doch irgendwo existieren können. In dem hier untersuchten Parameterraum konnten allerdings keine solchen MCS Lösungen gefunden werden.

6.5 Übergänge zwischen SPI verschiedener Helizität mittels MCS Strukturen

In den letzten Abschnitten wurde der vermeintlich 'einfachere Fall' einer MCS Lösung, die aus dem *gleichen* SPI Lösungsast herausbifurkiert, in dem sie auch wieder endet, ausführlich diskutiert. Dieses Szenario stellt qualitativ eine Art *Bypass* (5) dar (vgl. auch Abb. 6.7). Nun soll der 'interessantere Fall' von MCS als Übergangslösungen zwischen zwei SPI Strukturen beliebiger, im Allgemeinen unterschiedlicher, azimutaler Wellenzahlen M und Helizität diskutiert werden. Während des Übergangs von einer L-SPI zu einer R-SPI Struktur ist es an einer Stelle zwingend notwendig, dass die beiden signifikanten SPI Modenanteile (Majorante und Minorante) in der MCS Struktur gleich große Amplituden besitzen, was bedeutet, dass hier gerade eine MRIB Lösung vorliegt.

Wie ein solcher Übergang qualitativ aussieht ist in der Abbildung 6.10 schematisch dargestellt. Während der MCS Ast in der Abbildung 6.7 nur einen Bypass darstellte, so verbindet dieser (maroone Linie) hier zwei SPI Äste (orange und rot) unterschiedlicher

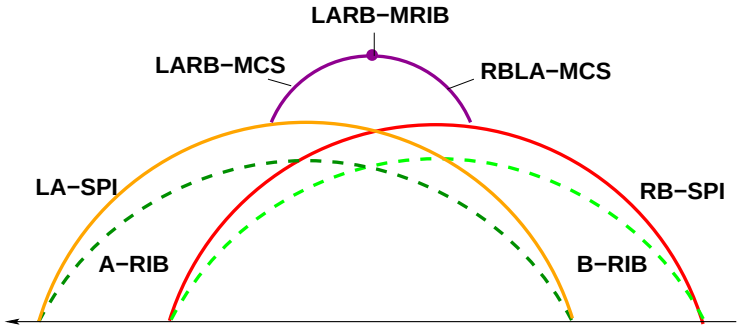


Abbildung 6.10 – Schematisches Bifurkationsdiagramm für einen geeigneten Parameter, z.B. R_2 für pbc Bedingungen. Dargestellt sind die Bifurkationsäste zweier verschiedener SPI Strukturen, LA-SPI (orange), RB-SPI (rot), wobei A≠B die zugehörigen azimutalen Wellenzahlen charakterisieren, die entsprechenden RIB Lösungen, A-RIB, B-RIB (grün), und der Bifurkationsast der MCS Struktur (LARB-MCS bzw. RBLA-MCS) abhängig der dominanten Modenamplitude. An dem Punkt des Bifurkationsastes, bei dem diese beiden Moden identisch sind, liegt eine LARB-MRIB Lösung vor. Ohne symmetriebrechende Effekte sind die Bifurkationsäste von L- und R-SPI Lösungen austauschbar.

Helizität und Wellenzahl M (in Abb. 6.10 mit A und B, wobei $A \neq B$, bezeichnet, der Fall $A = B$ entspräche einer CSPI Lösung (113; 117)), bzw. entsprechend verschiedener Ganghöhen p. Da symmetriebrechende Effekte erneut vernachlässigt werden, sind die Bifurkationsäste von L- und R-SPI Zuständen austauschbar.

6.5.1 Bifurkationsverhalten beim Übergang L-SPI↔MCS↔R-SPI

Zur Diskussion des Übergangs von L- nach R-SPI Strukturen (und umgekehrt) mittels MCS Zuständen soll hier für alle anderen stellvertretend, der Fall von L3R4-MCS, R4L3-MCS und L3R4-MRIB die als Verbindunslösung einer L3-SPI mit einer R4-SPI Struktur auftreten, wie in Abbildung 6.11 zu sehen, diskutiert werden.

Die Abbildung 6.11 zeigt das Bifurkationsverhalten verschiedener Strukturen, L3-SPI, R4-SPI, 3-RIB, 4-RIB und L3R4-MCS, für die Kontrollparameter $R_1 = 370, k = 3.927, \eta = 0.883$ für stark negative **(a)** und positive **(b)** R_2. Bei diesem R_1 Wert liegt die Situation vor, dass sich die Bifurkationsreihenfolge der 3-SPI und 4-SPI Strukturen abhängig von R_2 in **(a)** und **(b)** unterscheiden.

Im Bereich stark negativer R_2 **(a)** bifurkiert zunächst die 4-SPI gleichzeitig mit der 4-RIB Lösung aus dem CCF und später die 3-SPI einschließlich der 3–RIB Lösung, was sich bei positiven R_2 gerade umdreht (Abb. 6.11**(b)**). Dieser Wechsel in der Bifurkationsreihenfolge und damit ein Kreuzen der zugehörigen Bifurkationsschwellen, für die dominanten Modenamplituden von L3- und R4-SPI Zuständen (hier etwa bei $R_2 \approx -650$ in Abb. 6.11), ist notwendig, um eine MCS Lösung zu finden, die als Übergangsstruktur zwischen zwei unterschiedlichen SPI Strukturen fungiert (vgl. Abb. 6.10). Es sei aber besonders betont, dass in der Abbildung 6.11 keine Aussage über die Stabilität der einzelnen Lösungen getroffen wird, es werden hier lediglich Existenzaussagen gemacht.

Neben der Tatsache, dass für die Kontrollparameter der Abbildung 6.11 die Bifurkationsreihenfolge von 3-SPI und 4-SPI Zuständen in **(a)** und **(b)**, für positive und negative R_2, vertauscht ist, gibt es noch einen weiteren deutlich gravierenderen Unterschied, zum zuvor beschriebenen Verhalten, der MCS Struktur als Bypasslösung. Während dort die

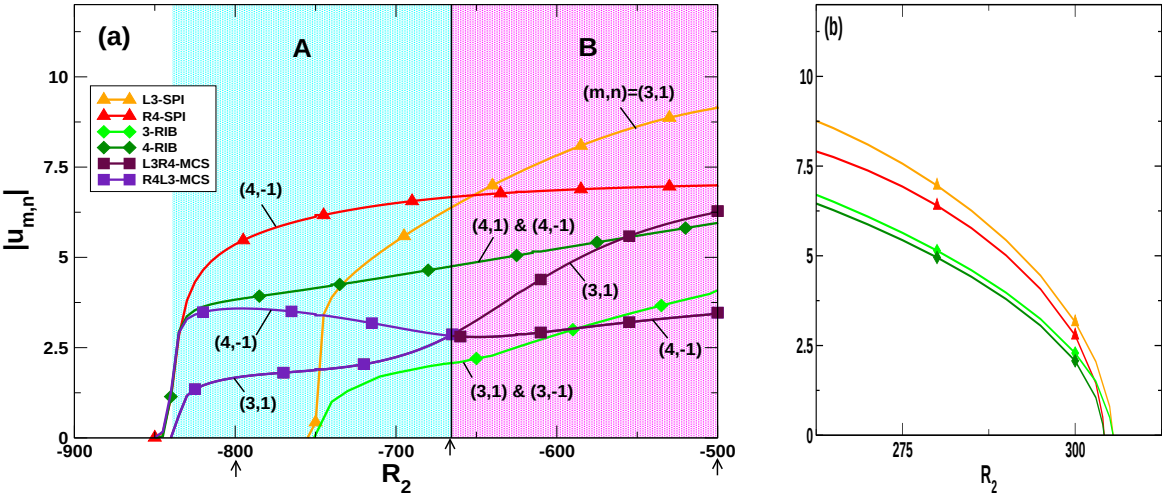


Abbildung 6.11 – Bifurkationsverhalten von L3R4-MCS und R4L3-MCS als Übergangsstrukturen zwischen zwei SPI Lösungen unterschiedlicher Helizität, L3-SPI und R4-SPI, in Abhängigkeit von R_2 bei gegebenen Kontrollparameter: $R_1 = 370, k = 3.927, \eta = 0.883$. Dargestellt sind die dominanten Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in der Mitte des Spaltes ($r = 0.5$) für verschiedene Strukturen: L3-SPI $(m,n) = (3,1)$, R4-SPI $(m,n) = (4,-1)$, 3-RIB ($|u_{3,1}| = |u_{3,-1}|$) und 4-RIB ($|u_{4,1}| = |u_{4,-1}|$), sowie die majorante $(m,n) = (3,1)[(4,-1)]$ und minorante $(m,n) = (4,-1)[(3,1)]$ SPI Modenamplitude in der L3R4-MCS (maroon in **(B)**) [R4L3-MCS (violett in **(A)**)] Struktur. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass in diesem Diagramm keine Aussage über die Stabilität der verschiedenen Strukturen gemacht wird. In **(a)** ist der Bereich stark negativer R_2 dargestellt, bei denen zunächst die 4-SPI und 'später' die 3-SPI Lösung aus dem CCF herausbifurkiert (von links nach rechts), während sich diese Bifurkationsreihenfolge für positive R_2 in **(b)** gerade umkehrt (von rechts nach links). Der Zwischenbereich zwischen den in **(a)** und **(b)** gezeigten Parametern ist hier nicht von Interesse und deshalb ausgespart, zumal es dort noch zu anderen komplexeren Strukturübergängen kommen kann. Außerdem existiert für die in **(b)** gezeigten Parameter noch keine L3R4-MCS Lösung. Diese bifurkiert erst bei Parametern in dem hier ausgesparten Zwischenbereich aus der reinen L3-SPI Struktur heraus. Da ebenfalls keine symmetriebrechenden Effekte vorliegen, lassen sich L- und R-Strukturen erneut vertauschen. Die Pfeile unterhalb des Bifurkationsdiagramms **(a)** markieren R_2 Werte, für die in Abbildung 6.12 Snapshots der Isovortizitätsflächen zu sehen sind. Die beiden in **(a)** farblich hinterlegten Bereiche A (cyan) und B (magenta) kennzeichnen die beiden vorliegenden MCS Typen, je nachdem welche Modenamplitude die dominante darstellt; eine R4L3-MCS Lösung in A und eine L3R4-MCS Lösung in B. Die schwarze Linie bei $R_2 = -666.5$ zwischen diesen charakterisiert die als Übergangsstruktur auftretende L3R4-MRIB bzw. R4L3-MRIB Struktur.

MCS Strukturen nur oberhalb *beider* Bifurkationsschwellen existierten, so existieren diese hier auch *unterhalb* einer der Schwellen der beiden beteiligten Strukturen, d.h. *zwischen* ihnen. Es handelt sich in diesem Fall also um *nichtlinear* angeregte Strukturen. Konkret bedeutet dies, dass die R4L3-MCS Lösung ($-840 \leqslant R_2 \leqslant -666.5$) in Abbildung 6.11 auch unterhalb der Bifurkationsschwelle der reinen 3-SPI ($R_2 \approx -755$) existiert.

Startet man in Abbildung 6.11**(a)** bei stark negativen R_2 Werten (links) und erhöht diese, so bifurkiert zunächst primär die 4-SPI (hier R4-SPI) Struktur zusammen mit der 4-RIB Lösung bei $R_2 \approx -850$ aus dem CCF heraus. Bei weiter wachsendem R_2 bifurkiert

nun sekundär die R4L3-MCS Lösung ($R_2 \approx -840$) aus der reinen R4-SPI Struktur heraus, wobei der $(3,1)$ Modenanteil der L3-SPI Struktur aus der Null heraus anwächst. Anders als in den vorangegangenen Abschnitten befindet sich das System hier noch *unterhalb* der Bifurkationsschwelle der reinen 3-SPI (hier L3-SPI) Lösung. Dies bedeutet, dass es sich hierbei nur um eine *nichtlineare, unterkritische* Anregung handelt. Erst bei $R_2 \approx -755$ bifurkiert auch die 3-SPI Struktur aus dem CCF heraus. Die R4L3-MCS Lösung verändert mit weiterer Verlangsamung der Gegenrotation im Bereich ($-840 \leqslant R_2 \leqslant -666.5$) ihr Aussehen dahin gehend, dass sich die signifikanten MCS Moden, die majorante $(4,-1)$ und die minorante $(3,1)$ Mode in ihren Amplituden immer weiter angleichen. In diesem Bereich liegt eine als Ganzes abwärts propagierende Struktur mit azimutaler Wellenzahl $M = 4$ mit einer, dieser überlagerten aufwärts wandernden Modulation mit $M = 3$, vor. Bei $R_2 \approx -666.5$ sind die signifikanten Moden schließlich *gleich groß* und es liegt im Wesentlichen eine R4L3-MRIB, bzw. L3R4-MRIB Lösung vor. Das es sich hierbei um keine 'perfekte' MRIB Struktur, wie sie in Abschnitt 6.3.1 theoretisch beschrieben wurden, handeln kann, liegt an den im Spektrum vorhandenen höheren harmonischen und nichtlinear angeregten Moden, deren Amplituden bei diesem R_2 Wert *nicht alle* übereinstimmen. Bei weiter anwachsendem R_2 hat sich nun der Charakter der MCS Struktur verändert. Von nun an liegt eine L3R4-MCS Struktur (d.h. Majorante $(3,1)$ und Minorante $(4,-1)$ Mode) für Werte, $-666.5 \leqslant R_2$, vor, was bedeutet, dass diese im Gegensatz zu vorher ihre Propagationsrichtung umgekehrt hat. Nun wandert die Struktur mit $M = 3$ nach oben und ihre Modulation mit $M = 4$ nach unten (siehe auch Film 6.avi). Bei weiter wachsendem R_2 bleibt der Charakter der L3R4-MCS Lösung unverändert, lediglich das Verhältnis der dominanten Modenamplituden verschiebt sich hin zum Anteil der L3-SPI Mode.

Das Bifurkationsdiagramm in **(a)** wurde (rechts) bei $R_2 = -500$ abgeschnitten, da es für weiter steigende R_2 bei den hier verwendeten Kontrollparametern (insbesondere wegen des großen Wertes $R_1 = 370$) zu sehr vielen anderen Übergängen und teilweise bereits chaotischem Verhalten kommt. In Abbildung 6.11**(b)** ist das Bifurkationsverhalten der gleichen Strukturen, 3-SPI, 3-RIB, 4-SPI und 4-RIB, bei positivem R_2 zu sehen und dient im Wesentlichen dazu die umgekehrte Bifurkationsabfolge von $M = 4$ und $M = 3$ Strukturen (hier L3-SPI und R4-SPI) im Vergleich zu stark negativen R_2 **(a)** aufzuzeigen. Hier bifurkieren (von rechts kommend) zunächst die 3-SPI Struktur zusammen mit den 3-RIB Lösung ($R_2 \approx 305.4$) und erst danach die 4-SPI und 4-RIB Lösung ($R_2 \approx 306.8$). Die Tatsache, dass der Bereich zwischen den beiden Bifurkationsschwellen hier sehr schmal ist, ist auf die übrigen Systemparameter zurückzuführen.

Wie bereits zuvor erwähnt wurde der Bereich $-500 \leqslant R_2 \leqslant 200$ zwischen **(a)** und **(b)** ausgelassen, da sich dort andere weitere komplexere Übergänge zeigten, die aber im Bezug auf die hier diskutierten MCS Lösungen nicht weiter von Interesse sind.

6.5.2 Raumzeitliches Verhalten beim transienten Übergang R4L3-MCS→R4L3-MRIB→L3R4-MCS

Um den Übergang von einer R4L3-MCS zu einer R3L4-MCS Lösung in einer einzigen numerischen Rechnung, ohne Veränderung weiterer Kontrollparameter zu sehen, kann man sich einen besonderen Effekt des Systems – die kurzzeitige Annahme transienter Zwischenzustände – zu Nutze machen (Dieses wurde ähnlich bereits in Kap. 4 beim Übergang zwischen TVF und SPI über Wavy Strukturen benutzt.).

Wie in der Abbildung 6.11 zu erkennen, liegt bei $R_2 = -550$ eine L3R4-MCS Lösung vor. D.h. eine MCS Struktur mit majoranter [minoranter] $(3,1)$ [$(4,-1)$] Mode. Startet man bei diesen Kontrollparametern allerdings mit 'Random Noise', mit genügend kleinen Rauschamplituden und genügend kleinen Rauschamplituden 10^{-6}, so wird zunächst eine

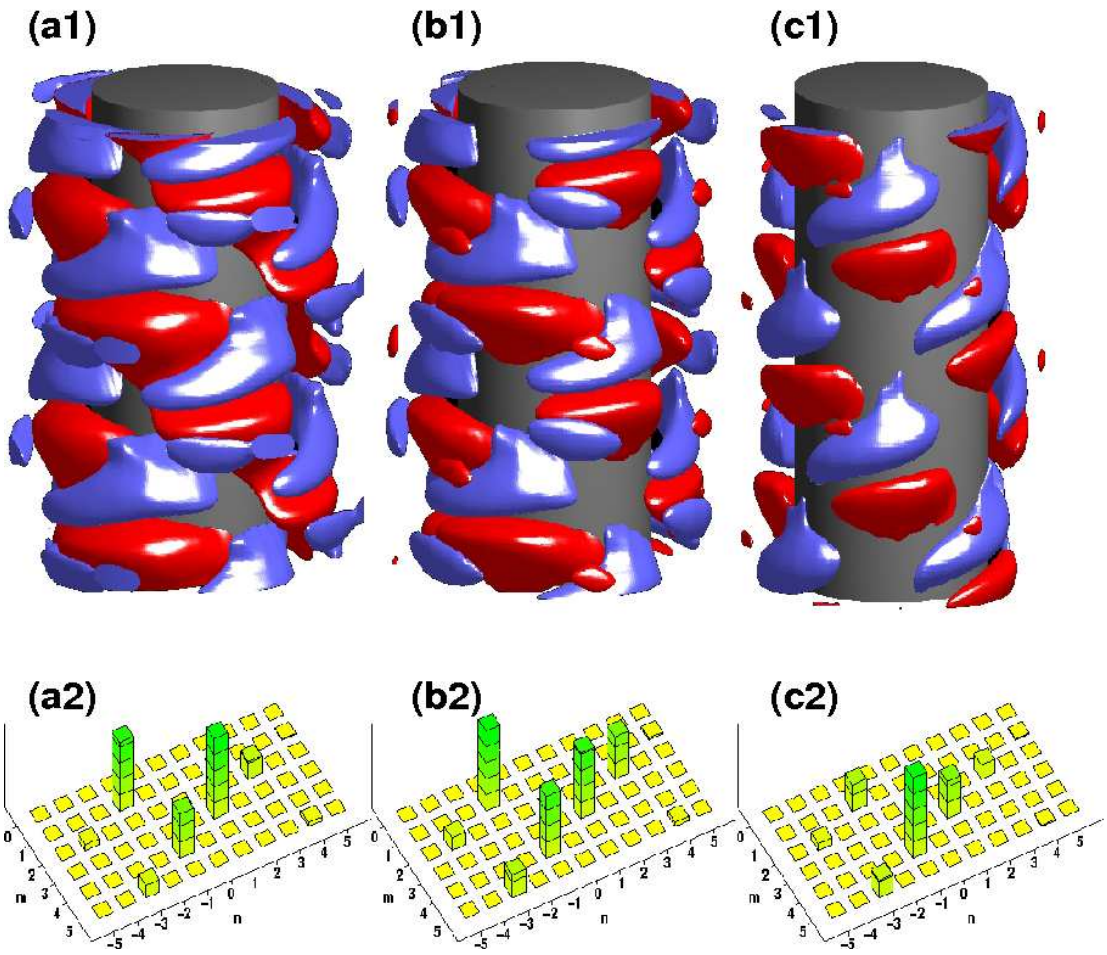


Abbildung 6.12 – **(a)** Snapshots der Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 90$ bei drei verschiedenen Kontrollparametern $R_1 = 370, k = 3.927, \eta = 0.883$ **(a)** $R_2 = -500$ (L3R4-MCS), **(b)** $R_2 = -666.5$ (L3R4-MRIB=R4L3-MRIB), **(c)** $R_2 = -800$ (R4L3-MCS) während des Übergangs von L3R4-MCS→L3R4-MRIB→R4L3-MCS Strukturen (in Abb. 6.11**(a)** durch Pfeile markiert). Wie zuvor steht rot [blau] für positive [negative] Vortizität. Um die gesamte Struktur in einem 3 dimensionalen Plot darstellen zu können wurden 4π Zylinder verwendet und in axialer Richtung zwei Wellenlängen dargestellt. Weitere Details sind auch in dem Film 6.avi zu erkennen. **(b)** Modenamplituden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes u für azimutale und axiale Fouriermodenindizes, m und n, in einem Ausschnitt des kompletten (m, n) Fourierraums.

transiente R4-SPI Lösung mit dominanter $(4, -1)$ Mode vom System erzeugt, die für ca. eine halbe Diffusionszeit (DT) im System verbleibt. Nach 0.5 Diffusionszeiten wachsen die Amplituden vieler weiterer Moden (z.B. $(3, 1), (1, 2), ...$) an (vgl. Abb. 6.13), während die dominante Mode der 4R-SPI Struktur abnimmt. Hier kommt es zur transienten Zwischenstruktur der R4L3-MCS Lösung. Nachdem kurzzeitig bei $t \approx 0.8$ DT die beiden signifikanten Moden, $(3, 1)$ und $(4, -1)$, in ihren Amplituden übereinstimmen (hier liegt eine, abgesehen von höheren harmonischen Moden, MRIB Struktur vor) gewinnt die $(3, 1)$ Modenamplitude die Oberhand und es ergibt sich eine L3R4-MCS Lösung. Diese liegt jedoch

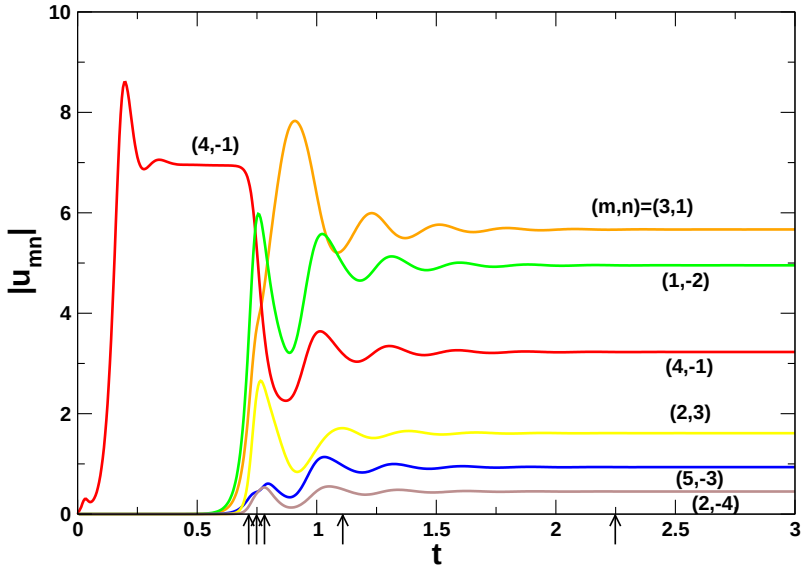


Abbildung 6.13 – Zeitliche Entwicklung der Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ während des transienten Übergangs von R4L3-MCS→R4L3-MRIB=L3R4-MRIB→L3R4-MCS Strukturen. Kontrollparameter sind: $R_1 = 370, R_2 = -550, k = 3.927, \eta = 0.883$. Als Startzustand der numerischen Rechnungen wurde 'Random Noise' 10^{-6}, angenommen. Die Pfeile an der Abszisse kennzeichnen Snapshots zu verschiedenen Zeiten, die in Abbildung 6.14 dargestellt sind. Für ein besseres Verständnis der, während dieses Übergangs auftretenden Strukturen, siehe auch den Film 4.avi.

erst nach einem 'Einschwingen' über ca. eine Diffusionsperiode (ab ca 1.5 DT in Abb. 6.13) als stationäre Lösung vor. Zur deutlicheren Veranschaulichung dieses Übergangs sei auf den Film 5.avi verwiesen, der diesen Übergang im Detail zeigt.

Zum besseren Verständnis der strukturellen Veränderungen, die beim Übergang zwischen zwei SPI Strukturen unterschiedlicher Helizität auftreten, sind in der Abbildung 6.14 verschiedene Snapshots in der **(1)**$r-z$, **(2)**$\varphi-z$ Ebene, sowie zugehörige **(3)** Isovortizitätsflächen $\Omega_\varphi = \pm 95$ von auftretenden Strukturen während des Übergangs (Abb. 6.13) von einer R4L3-MCS hin zu einer L3R4-MCS Lösung dargestellt. Die exakten zeitlichen Positionen der aufgenommenen Snapshots wurden in Abbildung 6.13 durch Pfeile unterhalb der Abszisse markiert. Da es im Wesentlichen um den Wechsel in der Helizität aufgrund der sich ändernden Modenverhältnisse geht, wurde die zunächst auftretende transiente R4-SPI Struktur, wie in der Abbildung 6.13 für $0.24 \leqslant t \leqslant 0.5$ zu erkennen, bei der Darstellung weggelassen. Die besten Erkenntnisse und Aussagen gewinnt man bei Betrachtung der in **(2)** dargestellten $\varphi - z$ Plots auf einer abgerollten Zylinderoberfläche. An diesen lässt sich die Helizität der Gesamtstruktur sehr gut anhand der roten Null Phasenlinie, $\Phi = 0$, der Grenze zwischen radialem In- (hell) und Outflow (dunkel), ablesen.

Die Abbildung 6.14 gibt nun fünf zeitlich nacheinander auftretende Strukturen während des transienten Übergangs von R4L3-MCS→L3R4-MCS Strukturen wieder. Bei dem in **(a)** dargestellten Zustand handelt es sich um eine R4L3-MCS Lösung, was sich gut anhand des durchgehenden Verlaufs der roten $u = 0$ Linie (von links unten nach rechts oben) in den $\varphi-z$ Plots **(2)** erkennen lässt. Dies bedeutet, dass die majorante $(4, -1)$ Mode die Helizität der Struktur dominiert und folglich auch bestimmt, während die minorante $(3, 1)$ Mode nur zu einer wellenförmigen (wavyartigen) Deformation der $u = 0$ Linie führt. Die Struk-

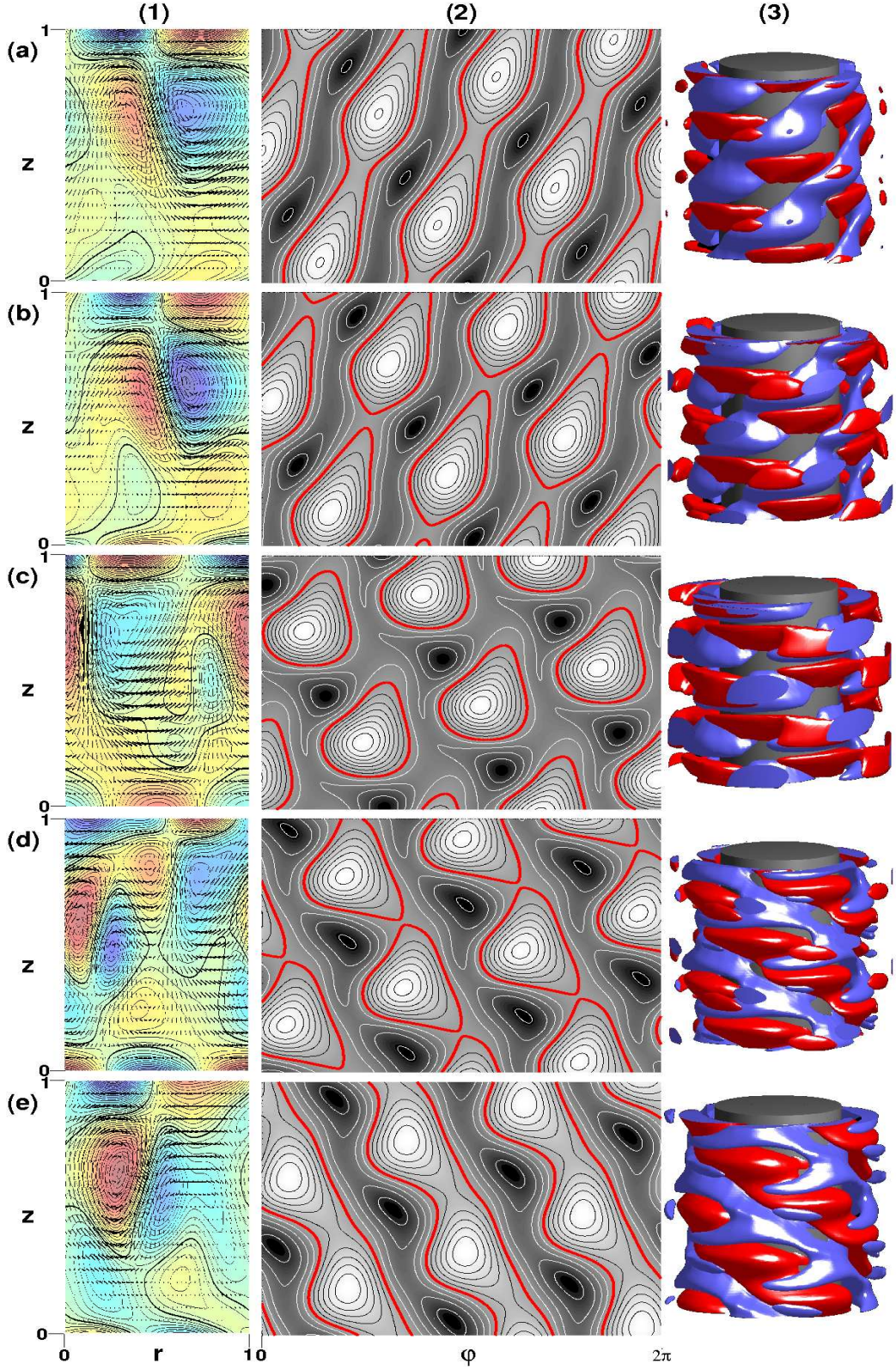


Abbildung 6.14 – **(1)** $r-z$ ($\varphi =$ konst.), **(2)** $\varphi - z$ und **(3)** Isovortizitätsplots $\Omega_\varphi = \pm 95$ während des transienten Übergangs von einer R4L3-MCS zu einer L3R4-MCS Lösung. Die zeitlichen Positionen **(a)**-**(e)** sind in Abbildung 6.13 unter der Abszisse durch Pfeile markiert. Dargestellte Strukturen sind: **(a,b)** R4L3-MCS, **(c)** R4L3-MRIB, **(d,e)** L3R4-MCS (siehe auch den Film 5.avi). Kontrollparameter: $R_1 = 370, R_2 = -550, k = 3.927, \eta = 0.883$.

tur als Ganzes wandert somit abwärts (mit $M = 4$), wohingegen die Modulation aufwärts propagiert (mit $M = 3$). Dieses Verhalten ist ebenfalls sehr gut in den blauen helikalen, rechtsgewundenen Schläuchen der Isovortizitätsflächen **(3)** zu erkennen[5], die aufgrund der minoranten Mode abwechselnd lokal zusammengeschnürt und wieder aufgeweitet sind. Die roten Schlauchstücke, die aus dem Anteil der L3-SPI Struktur herrühren spielen hierbei nur eine untergeordnete Rolle. Zum späteren Zeitpunkt **(b)** ist die rote Nulllinie in **(2)** *nicht* mehr nur helikal orientiert, sondern es liegen einzelne geschlossene Kurven vor, die aber noch eine helikale Anordnung erkennen lassen. In **(3)** ist hierbei nur ein leichtes anwachsen der roten Wirbelschläuche zu sehen. Ganz anders ist dies nun in **(c)**, da dort die Amplituden der beiden Moden, $(3, 1)$ und $(4, -1)$, identisch sind. Demzufolge weisen die geschlossenen Nulllinien in **(2)** keine besondere Orientierung auf und ebenso ist keinerlei helikale Anordnung der Struktur in **(3)** mehr erkennbar. Hier sind die Anteile der blauen und roten Wirbelschläuche nahezu identisch. Im Idealfall liegt hier eine L3R4-MRIB Struktur vor. Zum späteren Zeitpunkt **(d)** ist wieder eine deutliche helikale Orientierung, der allerdings zu diesem Zeitpunkt immer noch vorhandenen geschlossenen roten Kurven zu erkennen. Nun aber (von links oben nach rechts unten) gerade entgegen der vorherigen Windungsrichtung. Diese Windungen sind auch an den nun durchgehenden helikalen blauen Wirbelschläuchen in **(3)** zu erkennen, während die roten Anteile nun deutlich geringer ausfallen. Schließlich gelangt das System in den Endzustand **(e)** der L3R4-MCS Struktur, bei dem die roten Nulllinien in **(2)** nun durchgehend helikal von links oben nach rechts unten verlaufen. Die Anteile der roten Wirbelschläuche, die den Anteil der R4-SPI in **(3)** repräsentieren nehmen ebenfalls weiter ab.

6.5.3 L1R3-MCS gegenüber R3L1-MCS

Für alle, bis zu diesem Zeitpunkt, diskutierten MCS Strukturen gilt: Die MCS Lösungen bifurkieren sekundär aus einem reinen SPI Zustand und zwar aus der Struktur, die die größere dominante Modenamplitude besitzt (vgl. Abb. 6.6). Die Abbildung 6.15 zeigt nun eine Situation bei der dies nicht mehr, bzw. nur noch eingeschränkt gilt.

Abhängig davon, ob man sich in der Abbildung 6.15 von links oder rechts, d.h. von großen Gegenrotationszahlen R_2 zu kleinen oder umgekehrt bewegt, bifurkiert eine L3R1-MCS (von rechts) oder eine R1L3-MCS Lösung (von links) aus der entsprechenden reinen Struktur einer L3-SPI bzw. einer R1-SPI heraus.

Startet man in der Abbildung 6.15 rechts bei $R_2 = 0$ in einer reinen L3-SPI Lösung und verringert R_2, so bifurkiert bei $R_2 \approx -24$ eine L3R1-MCS Struktur aus dieser heraus, bevor diese bei $R_2 \approx -278$ wieder in den gleichen Lösungsast hineinläuft. Sie existiert also in den beiden schraffierten Bereichen B und C. Dies ist die aus Abschnitt 6.4 bekannte Situation der MCS Struktur als Bypasslösung. Ein deutlicher Unterschied dieser Lösung verglichen mit den sonstigen MCS Lösungen liegt aber in der Tatsache, dass hier die Minorante durch die höher harmonische $(2, -2)$ Mode gegeben ist und nicht etwa durch die $(1, -1)$ Mode, welche die Dominante in der R1-SPI Struktur darstellt (die $(1, -1)$ Mode ist hier aufgrund der deutlich geringeren Größe gegenüber der $(2, -2)$ Mode in der Abb. 6.15 vernachlässigt). Der R-SPI Anteil in der MCS Lösung besitzt also gerade die doppelte Wellenzahl und dementsprechend die halbe Wellenlänge.

Ein anderes Szenario zeigt sich, wenn man bei starker Gegenrotation des äußeren Zylinders, d.h. stark negativen R_2 (in der Abb. 6.15 links) startet. Hier findet man bei anwachsendem R_2 eine aus der reinen R1-SPI Struktur herausbifurkierende R1L3-MCS Lösung bei $R_2 \approx -289$, die weiter in den schraffierten Bereichen A und B existiert. Bei dieser sind

[5] Die hier deutlich erkennbare Deformation der geschlossenen, roten $u = 0$ Kurven ('Spitze' nach rechts oben) liegt in den weiteren angeregten höheren harmonischen Moden begründet.

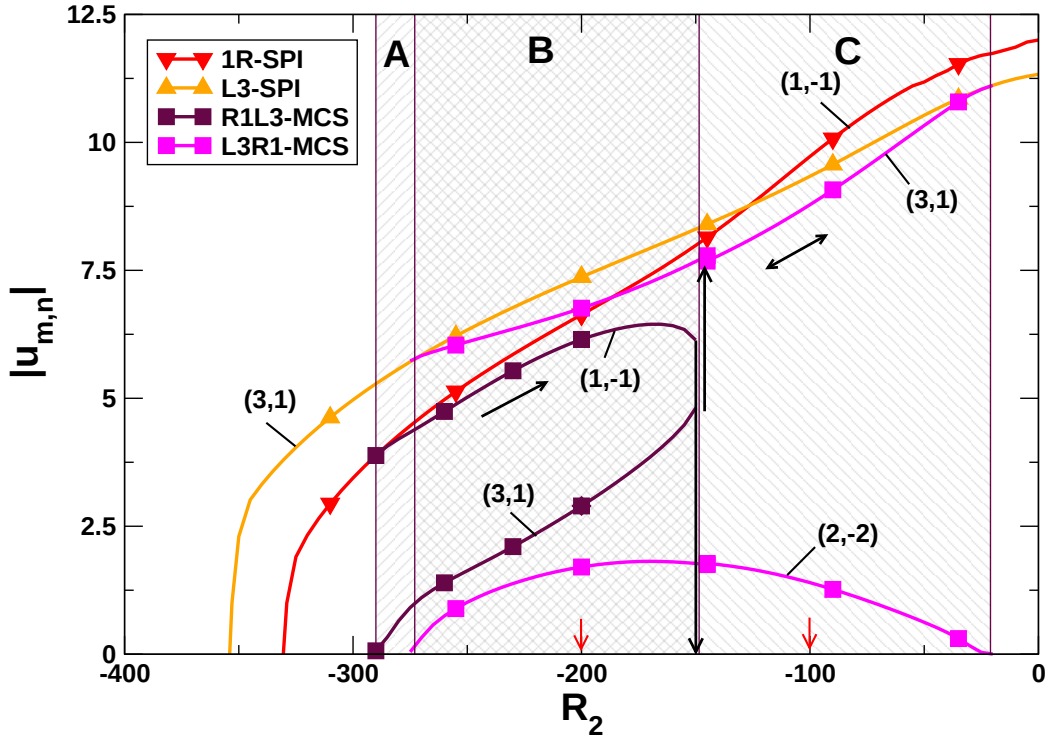


Abbildung 6.15 – Bifurkationsszenarien für L3R1-MCS und R1L3-MCS Lösungen. **(i)** Sekundäre Bifurkation einer L3R1-MCS Struktur (■) in Abhängigkeit von R_2 aus einer reinen L3-SPI Struktur heraus (von links nach rechts und umgekehrt) und wieder zurück in diese. Dies stellt den klassischen Fall der in Abschnitt 6.4 diskutierten Bypasslösung dar. **(ii)** Sekundäre Bifurkation einer R1L3-MCS Struktur (■) aus einer reinen R1-SPI Lösung heraus (*nur* von links nach rechts), die bei $R_2 \approx -148$ transient in die L3R1-MCS Lösung übergeht (durch vertikale Pfeile angedeutet). Hierbei unterscheidet sich die L3R1-MCS Lösung von allen bisherigen MCS Lösungen, da die minorante Mode, nicht wie sonst die dominante Mode $(1, -1)$ der reinen R1-SPI Struktur ist, sondern die erste höher harmonische Mode $(2, -2)$. Auch in diesem Diagramm wird keine Aussage über die Stabilität der verschiedenen Strukturen gemacht. Da ebenfalls keine symmetriebrechenden Effekte vorliegen, lassen sich L- und R-Strukturen erneut vertauschen. Die unterschiedlichen grau schraffierten Bereiche A, B und C kennzeichnen Regionen, in denen die MCS Lösungen, L3R1-MCS oder R1L3-MCS, existieren, je nachdem welche Modenamplitude die dominante darstellt; in A existiert nur die R1L3-MCS Lösung, in B existieren beide Strukturen, L3R1-MCS und R1L3-MCS, und in C nur die L3R1-MCS Lösung. Die roten Pfeile an der Abszisse kennzeichnen Kontrollparameter, für die die strukturellen Eigenschaften der beiden MCS Strukturen in Abbildung 6.16 genauer untersucht werden. Auch in dieser Abbildung werden nur Existenzaussagen gemacht und nicht weiter auf die Stabilität der einzelnen Strukturen eingegangen. Kontrollparameter sind: $R_1 = 250, k = 3.927, \eta = 0.883$.

die Minorante und Majorante, wie gewohnt, die beiden Moden, die auch die dominanten der beteiligten reinen Strukturen darstellen. Der Unterschied zu den bislang diskutierten MCS Lösung besteht nun darin, dass diese MCS Struktur eine majorante $(1, -1)$ Mode besitzt, obwohl die entsprechende Mode $(3, 1)$ der reinen L3-SPI Struktur deutlich größer als die $(1, -1)$ Mode der reinen R1-SPI Lösung ist. Bei weiterer Verringerung von R_2 be-

wegen sich die Amplituden der minoranten und majoranten Mode aufeinander zu, bevor die R1L3-MCS Lösung bei $R_2 \approx -148$ in einem transienten Übergang in die L3R1-MCS Struktur übergeht. Warum dieser Übergang zwischen den beiden MCS Zuständen, die im *gleichen* Modenraum leben, hier stattfindet konnte bislang leider nicht geklärt werden. Es ist aber interessant, dass dieser Übergang in der Nähe des R_2 Wertes stattfindet, bei dem sich die dominanten Modenamplituden der reinen Strukturen, L3-SPI und R1-SPI, gerade kreuzen, also gleich groß sind. Da es sich hier aber um vollkommen nichtlinear getriebene Strukturen handelt, scheint dieses Phänomen reiner Zufall zu sein.

Es bleibt also festzuhalten, dass in den beiden Regionen A und C jeweils nur eine der beiden MCS Strukturen, R1L3-MCS (A) oder L3R1-MCS (C), aufgebaut aus den gleichen Moden, existiert, während in B beide parallel vorliegen.

Die Abbildung 6.16 zeigt die beiden unterschiedlichen MCS Strukturen, **(a)** R1L3-MCS und **(b)** L3R1-MCS, für zwei in der Abbildung 6.15 durch Pfeile markierte Parametersätze.

Obwohl beide Strukturen im gleichen Modenunterraum 'leben', der durch die nichtlineare Überlagerung der beiden Unterräume einer L3-SPI und einer R1-SPI Struktur, wie in Abschnitt 6.2.2 diskutiert, entsteht, so unterscheiden sie sich jedoch topologisch deutlich voneinander. Die in **(1)** gezeigte Struktur stellt eine 'klassische' R1L3-MCS Lösung, wie sie bisher immer diskutiert wurde, mit majoranter $(1, -1)$ und minoranter $(3, 1)$ Mode dar. Im Fall der in **(2)** gezeigten L3R1-MCS Lösung ist die majorante Mode wie gewohnt durch die $(3, 1)$ Mode gegeben, der Unterschied besteht hier jedoch in der minoranten Mode, die hier nicht wie sonst üblich durch die $(1, -1)$ Mode, sondern durch die erste höher harmonische $(2, -2)$ Mode gegeben ist. Dieser Unterschied ist ganz deutlich in den beiden Modenspektren **(3)** zu erkennen. Im Fall der L3R1-MCS Lösung **(b3)** verschwindet die $(1, -1)$ Mode sogar fast vollständig. Physikalisch bedeutet dies eine Halbierung der Wellenlänge λ, bzw. eine Verdopplung der Wellenzahl k. In den beiden in **(1)** dargestellten Isoflächen der azimutalen Vortizität $\partial_z u - \partial_r w = \pm 110$ ist die 'Komplexität' dieser beiden MCS Strukturen zu erkennen. Obwohl die $(1, -1)$ Mode in **(3)** deutlich gegenüber der $(3, 1)$ Mode in der R1L3-MCS Lösung **(a)** dominiert, so ist die Stärke der azimutalen Vortizität bezogen auf L und R Anteil in **(1)** nahezu identisch, so dass sich nur bei sehr genauer Betrachtung eine helikale Orientierung in den blauen Wirbelschläuchen in **(a1)** erkennen lässt. Anders sieht dies im Fall der L3R1-MCS Struktur **(b)** aus. Hier ist eine deutlich helikale Anordnung der roten und blauen Wirbelschläuche in **(b1)** entsprechend dem dominanten L Anteil der Moden **(b3)** zu erkennen. In den $\varphi - z$ Plots in **(2)** sind aber beide MCS Strukturen eindeutig zu identifizieren. Die durchgehenden, von links unten nach rechts oben verlaufenden (roten) $u = 0$ Phasenlinien in **(a2)** zeigen die Dominanz des R1 Anteils, während die starke wellenförmige Modulation dieser Linie den minoranten L3 Anteil an der Gesamtstruktur wiedergibt. Analog charakterisieren die, von links oben nach rechts unten durchgehend verlaufenden roten $u = 0$ Phasenlinien in **(b2)** den dominanten L3 Anteil, der hier durch den minoranten R1 Anteil moduliert ist.

6.6 Vergleich mit dem Experiment und Ausblick

Alle in diesem Kapitel präsentierten Ergebnisse beruhen auf numerischen Simulationen der vollen NSE. Im Experiment wird es, aus verschiedenen Gründen, vermutlich sehr schwierig sein diese neuen, recht komplexen, Übergangsstrukturen, die MCS, zu finden. Die wichtigsten Punkte lassen sich diesbezüglich wie folgt zusammenfassen:

(I) Die MCS Strukturen treten nicht alleine als stabile Strukturen auf. Neben diesen existieren immer noch eine Vielzahl weitere Strukturen, wie z.B. SPI und TVF Zustände gleichzeitig parallel mit diesen. Insbesondere letztere dürften im Experiment aufgrund

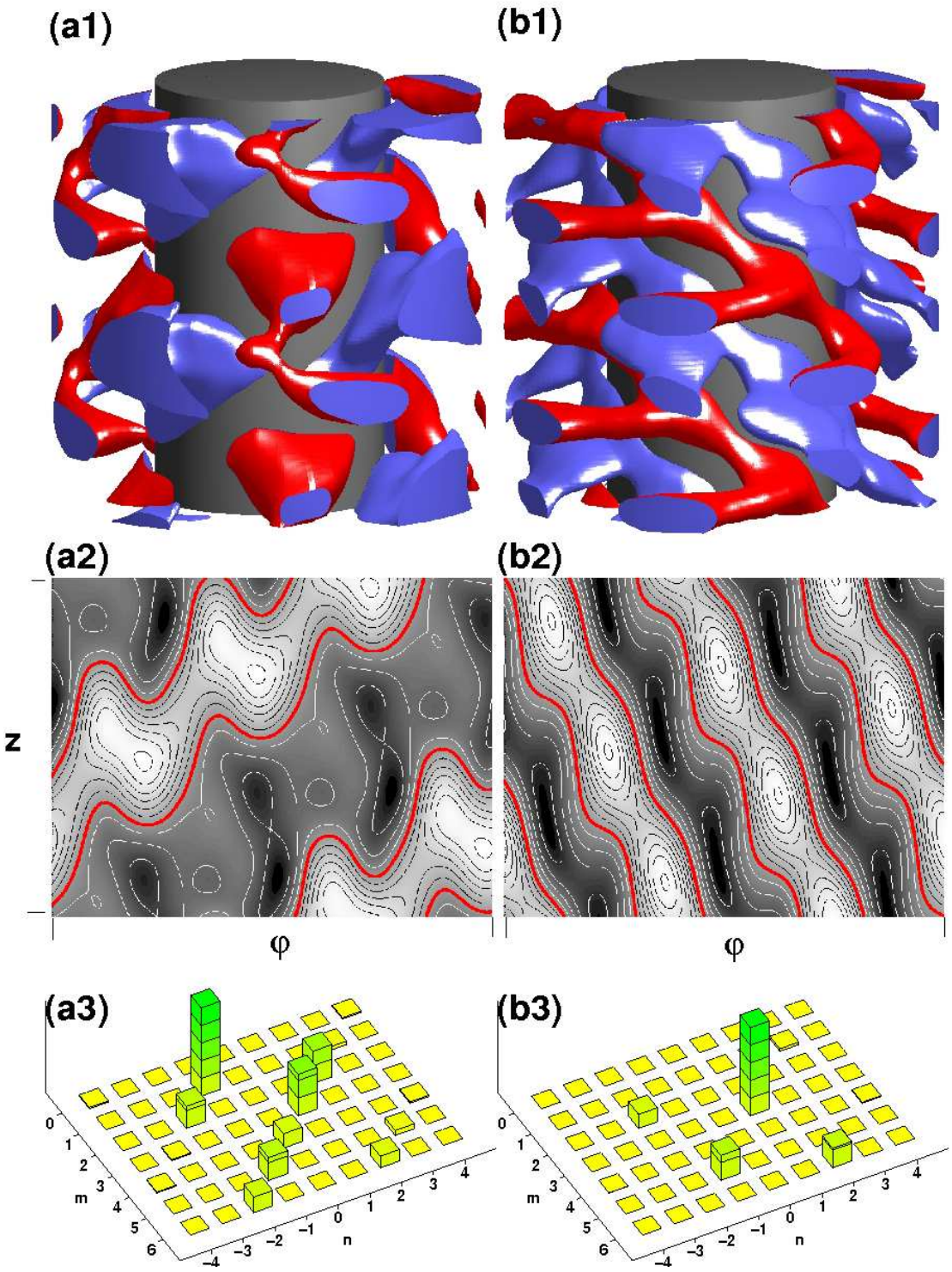


Abbildung 6.16 – Darstellung der Strukturen von **(a)** R1L3-MCS und **(b)** L3R1-MCS für Kontrollparameter $R_2 = -200$ **(a)** $R_2 = -100$ **(b)**, wie sie in Abbildung 6.15 durch Pfeile markiert sind. Dargestellt sind **(1)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 110$, **(2)** $\varphi - z$ Plots mit grau kodiertem radialem Geschwindigkeitsfeld u in Spaltmitte ($r = 0.5$) (dunkel=Outflow, hell=Inflow). Die rote Linie charakterisiert die $u = 0$ Phasenlinie. **(3)** Modenamplituden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes über dem (m, n) Modenraum. Weitere Kontrollparameter sind: $R_1 = 250, k = 3.927, \eta = 0.883$.

von Deckeln und der dort vorhandenen Ekman Wirbel eine dominante Rolle spielen und nur schwer zu unterdrücken sein.

(II) Im Experiment ist es nicht so einfach, wie in der Theorie, möglich im System nur einzelne Lösungen zuzulassen und andere auszublenden, indem man sich auf selektierte Modenunterräume beschränkt.

(III) Auch die hier als fixiert angenommene axiale Wellenzahl k (bzw. Wellenlänge λ), beider in der MCS Lösung enthaltenen Strukturen, wird bei experimentellen Untersuchungen problematisch sein. Im Experiment stehen immer *alle* Wellenzahlen zur Verfügung und somit wird das System wohl vielmehr immer zwei zueinander kommensurable Wellenzahlen selektieren, die zur vorgegebene Systemlänge passen (siehe hierzu auch Abs. 6.5.3; zum Teil gilt dies bereits auch für die Theorie).

Alles in Allem ist es also fraglich wie schnell, oder ob überhaupt solche MCS Lösungen im Experiment zu sehen sind – dies sollte den Experimentatoren doch als Ansporn dienen! Auf jeden Fall lässt sich vermuten, dass es sich dann um MCS Strukturen mit unterschiedlichen axialen Wellenzahlen, k_1 und k_2, in den beiden Teilstrukturen handelt. Weiterhin ist anzunehmen, dass k_1 und k_2 zueinander kommensurable Wellenzahlen sein müssen, um im endlichen System überhaupt gemeinsam existieren zu können.

Ebenso ist neben dem hier diskutierten Fall von MCS als Übergangsstrukturen zwischen zwei SPI Lösungen unterschiedlicher Helizität aber auch ein Übergang zwischen helikal gleich orientierten Lösungen denkbar. Es gibt keinen offensichtlichen Grund, der ein Auftreten dieser verhindern sollte. Dies ist auch ein interessanter Punkt im Hinblick auf weitere Untersuchungen, da dies zum besseren Verständnis der Entstehung von SPI Lösungen unterschiedlicher azimutaler Wellenzahl bzw. Ganghöhe, beitragen könnte.

6.7 Resumé

In diesem Kapitel wurde untersucht, wie Übergänge zwischen verschieden helikalen Spiral Wirbel (SPI) Zuständen mit gleicher axialer Wellenzahl $k = 3.927$ durch sekundär bifurkierende Mixed Cross Spiral (MCS) Lösungen vollzogen werden. Andererseits ist bereits aus der Literatur bekannt, dass SPI und Ribbon (RIB) Lösungen durch die 'klassischen' Cross Spirals (CSPI) Zustände miteinander verbunden werden.

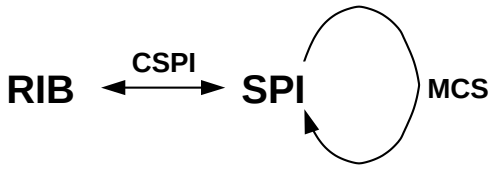
Zunächst wurde hierbei der Fall diskutiert, dass eine MCS Struktur aus einem reinen SPI Zustand herausbifurkiert und später auch wieder in der *selben* SPI Lösung endet. D.h. der Lösungsast der MCS stellt eine Art *Bypass* dar. Neben der Existenz wurde hier auch die Stabilität der verschiedenen Lösungen analysiert. Weiterhin wurde auch der Fall diskutiert, dass die MCS als echte Übergangsstrukturen zwischen zwei reinen SPI Strukturen verschiedener Helizität auftreten können. Die gleichzeitige Existenz zweier SPI Lösungen unterschiedlicher Helizität mit verschiedenen oder gleichen azimutalen Wellenzahlen scheint hierbei nicht immer notwendig. Im Fall der MCS als Bypasslösung konnten nur solche MCS Strukturen gefunden werden, die oberhalb der Bifurkationsschwellen beider reinen SPI Zustände, aus denen diese aufgebaut sind, lagen. Anders sieht dies im Fall der MCS als Übergangsstrukturen aus, hierbei müssen offensichtlich nicht mehr beide reinen SPI Lösungen existieren, die MCS Zustände können auch *unterkritisch* entstehen.

Sowohl die MCS, als auch die CSPI Strukturen können als nichtlineare Überlagerung von zwei gegenläufig wandernden Wellen mit kontinuierlich variierenden Anteilen angesehen werden. Die CSPI Zustände bestehen dabei aus zwei *spiegelsymmetrischen* SPI Strukturen, d.h gleicher azimutaler Wellenzahl M, aber unterschiedlicher Helizität, während die

MCS Lösungen im Allgemeinen aus Anteilen aufgebaut sind, die zu SPI Strukturen mit *unterschiedlicher* Wellenzahl M gehören.

Somit stellen CSPI [RIB] Zustände einen Spezialfall der MCS [MRIB] Strukturen dar. Weiterhin können RIB [MRIB] Strukturen als ein Spezialfall von CSPI [MCS] Lösungen mit gleichen Amplitudenanteilen der L-SPI und R-SPI Anteile angesehen werden. Demzufolge sind MCS Strukturen soweit bislang bekannt eine der allgemeinsten Strukturen. Sehr viele der übrigen bekannten Strukturen im Taylor-Couette System lassen sich als Spezialfälle dieser erklären und charakterisieren.

Im Gegensatz zu den CSPI Zuständen, die eine Möglichkeit des Übergangs von einem SPI Lösungsast zu einer RIB Lösung und wieder zurück zu der gleichen SPI Lösung darstellen, stellen die MCS Zustände einen *direkten* Weg eines solchen Übergangs dar, ohne Verwendung anderer primärer Bifurkationslösungen, wie etwa RIB oder MRIB Zustände. Für die MCS als Bypasslösung bedeutet dies das folgende Bifurkationsszenario:



Entsprechend besitzen die MCS als Übergangsstrukturen die allgemeine Bifurkationsabfolge:

Bisher war es leider nicht möglich den Lösungsast einer vollständig primär bifurkierenden MRIB Struktur zu verfolgen. Diese erscheinen beim Übergang zwischen zwei SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität und verschiedenen azimutalen Wellenzahlen. Aufgrund weiterer, nichtlinear angeregter, höher harmonischer Moden besitzt diese MRIB Lösung aber niemals die 'theoretisch' perfekte Schachbrettsymmetrie.

Die Frequenzen der MCS Strukturen werden durch den Anteil der majoranten SPI Komponente bestimmt, während der minorante, kleinere SPI Komponentenanteil zu einer Modulation führt, die gerade entgegen der Propagationsrichtung der gesamten MCS Struktur wandert. Im Wesentlichen sind also die raumzeitlichen Eigenschaften von stationären MCS Zuständen ähnlich derer einer reinen SPI Struktur versehen mit einer mehr oder weniger starken Modulation. Im Unterschied zu anderen modulierten Strukturen, wie z.B. Wavy Spirals, die den Übergang von SPI zu TVF Lösungen vollziehen und eine endliche $(0, 1)$ Mode in ihrem Fourierspektrum besitzen, so fehlt diese im Fall der MCS Lösung gänzlich. Hier hängen die Modulationen vielmehr von den weiteren nichtlinearen Kopplungen der reinen SPI Komponenten ab.

Für die MCS als Bypasslösung wurden zwei verschiedene Bifurkationsszenarien gefunden: Die MCS bifurkieren als stabile [instabile] Lösungen aus einem stabilen [instabilen] SPI Lösungsast heraus. Im ersten Fall verliert die SPI Lösung dabei ihre Stabilität. Dieses Verhalten ist vollkommen unabhängig vom Stabilitätsverhalten anderer Lösungen, wie z.B. der RIB oder der SPI Strukturen, welche die majorante Komponente in der MCS Struktur darstellt.

Für die MCS, die als Übergangsstrukturen zwischen zwei reinen SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität auftreten, zeigte sich, dass die MCS Lösungen auch unterkritisch, d.h. unterhalb der Bifurkationsschwellen der beiden reinen SPI (zumindest unterhalb einer dieser beiden) Zustände existieren können. Hierbei wurde nur die Existenz untersucht und nicht weiter auf die Stabilität eingegangen.

Im Allgemeinen scheint es, dass das Auftreten von MCS Lösungen, z.B. als Übergangsstrukturen zwischen reinen SPI Zuständen unterschiedlicher azimutaler Wellenzahlen M unter anderem eine Konsequenz der hier angenommenen periodischen Randbedingungen ist. Anders als im endlichen System mit festen Deckeln findet man im periodischen System verschiedene parallel stabil existierende SPI Lösungen mit unterschiedlichen Wellenzahlen M und auch verschiedene multistabil existierende MCS Strukturen. Aufgrund der Wellenzahlselektion, bzgl. der axialen Wellenzahl k, in längeren periodischen- und speziell im endlichen System aufgrund der Deckel bleibt die Frage offen, ob solche Gebiete mit multistabil vorliegenden MCS Lösungen dann überhaupt noch existieren und ob man sie dort auch finden kann. Wenn dem so ist, so werden diese MCS Lösungen aber vermutlich aus unterschiedlichen SPI Strukturen mit im Allgemeinen *verschiedenen*, zueinander kommensurablen Wellenzahlen, k_1 und k_2, aufgebaut sein.

Teil II

Ferrofluide im Taylor-Couette System

Kapitel 7

Einführung Teil II

7.1 Einleitung - Motivation

Nachdem im ersten Teil dieser Arbeit das Taylor-Couette System befüllt mit einem klassischen newtonschen Fluid mit bestimmter kinematischen Viskosität betrachtet wurde, so werden nun, im zweiten Teil dieser Arbeit, Untersuchungen an einem komplexeren Fluid – einem Ferrofluid – durchgeführt. Im Einzelnen wird eine Analyse der Auswirkungen von verschiedenen extern angelegten Magnetfeldern auf das Strömungsverhalten von Ferrofluiden im Taylor-Couette System und die daraus resultierenden Strukturen durchgeführt. Die vollen Navier-Stokes Gleichungen werden, wie in Anhang D beschrieben, durch das numerische Verfahren G1D3, einschließlich implementierter zusätzlicher Magnetfeldterme, gelöst. Wie in Teil I werden die verschiedenen Strukturen im Hinblick auf ihre Dynamik, Symmetrieeigenschaften, Bifurkationsverhalten und Stabilitätseigenschaften für unterschiedliche Magnetfelder – axial, transversal und gekreuzt – untersucht. Es zeigte sich, dass alle Magnetfelder, unabhängig ihrer Orientierung, den CCF Grundzustand stabilisieren, d.h. die Bifurkationsschwellen der verschiedenen auftretenden Strukturen zu höheren Kontrollparametern verschieben. Weiterhin konnte festgestellt werden, dass ein Feld mit endlicher Transversalkomponente die reinen Strukturen (siehe auch Kap. 3) der Taylor Wirbel und Spiral Wirbel zu Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel und Wavy Spiral Wirbel, moduliert. Anders als die klassischen Wavy Strukturen, die sekundär aus den reinen Strukturen herausbifurkieren, entstehen diese *neuen* Wavy Strukturen in einer primären Bifurkation direkt aus dem CCF heraus. Dies ist eine neue, bislang noch nicht bekannt und beobachtete primäre Bifurkation im Taylor-Couette System. Diese Wavy Zustände unterscheiden sich aber zum Teil deutlich von den klassischen Wavy Lösungen. Insbesondere gilt dies für die Wavy Taylor Wirbel Lösungen, die durch Magnetfelder erzeugt werden, da sie *phasengepinnt*, also *fixiert* und *nicht rotierende*, stationäre Strukturen darstellen.

7.2 Literatur

Das Interesse an grundlegender Forschung zum besseren Verständnis der Eigenschaften und des Verhaltens von Ferrofluiden wächst zunehmend an. Der Grund hierfür liegt in ihren zahlreichen technischen so wie medizinischen Anwendungen die für viele verschiedene Disziplinen von Bedeutung sind. Demzufolge ist auch die Zahl der hierzu publizierten Arbeiten, gerade in jüngerer Zeit, entsprechend groß. Deshalb soll an dieser Stelle nur ein kurzer Überblick über einige wesentliche Publikationen, die dieser Arbeit zugrunde liegen-

den, gegeben werden.

Als Standardwerk zur Einführung in das Arbeitsgebiet der Ferrofluide kann die Arbeit, *Ferrohydrodynamics*, von Rosensweig (127) (1985) angesehen werden. Diese behandelt ein sehr breites Spektrum, angefangen von der Herstellung von Ferrofluiden, ihren Stabilitätsanforderungen und physikalischen Eigenschaften, den Bewegungsgleichungen und Thermodynamik bis hin zu ferrohydrodynamischen Instabilitäten. Neben dieser Arbeit ist ebenfalls das Werk, *Magnetic Fluids*, von Blums et al. (21) (1997) zu nennen, das ein ähnlich weites Spektrum berücksichtigt. Einen Schwerpunkt auf die vielfältigen technischen Anwendungsmöglichkeiten legt die Arbeit von Berkovsky et al. (19) (1993).

Der Begriff der Ferrohydrodynamik wurde 1964 von Neuringer und Rosensweig (101) geprägt. Dieser umfasst die Kontinuumsbeschreibung des Strömungsverhalten magnetischer Fluide bei Anwesenheit magnetischer Felder. Die hier untersuchten Strömungsmuster von Ferrofluiden in der Taylor-Couette Geometrie stellen ein solches Anwendungsbeispiel der Ferrohydrodynamik dar.

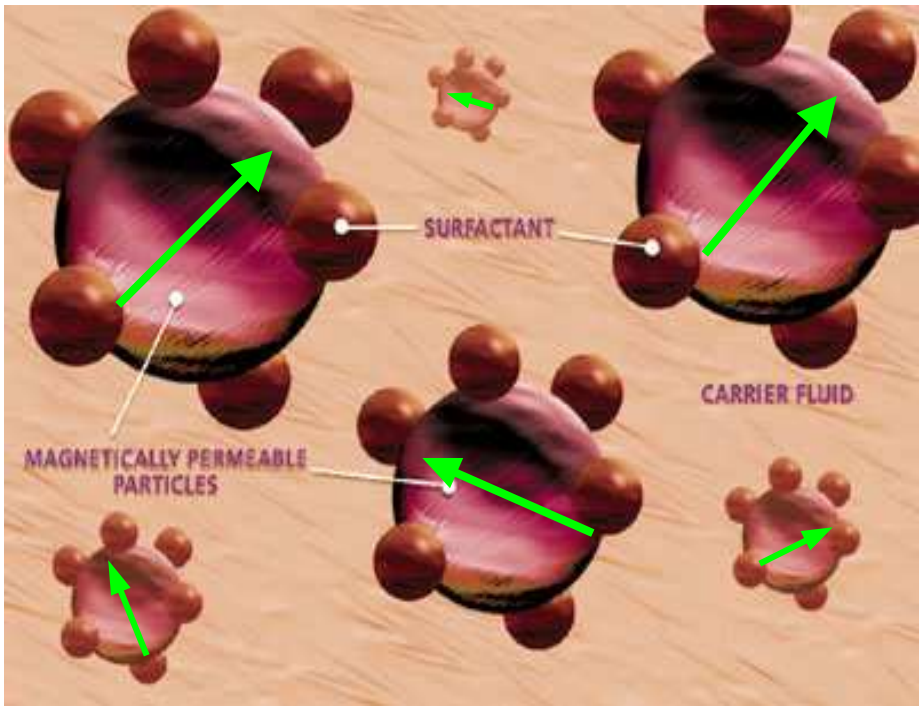


Abbildung 7.1 – Schematische Darstellung eines Ferrofluids: Magnetische Kerne (große Kugeln, magnetically permeable particles) mit Durchmessern in der Größenordnung von etwa 10nm, umgeben von Polymerhüllen (kleine Kugeln, surfactant) von etwa 2nm Dicke in einem Trägerfluid (Hintergrund, carrier fluid). Die Kerne besitzen ein permanentes magnetisches Moment (grüne Pfeile) proportional zu ihrem Volumen. Ohne ein extern angelegtes Magnetfeld sind diese statistisch verteilt.

Eine der faszinierendsten Eigenschaften von Ferrofluiden ist der Einfluss eines extern angelegten Magnetfeldes auf den makroskopischen Fluss im System und umgekehrt (127; 19; 20; 21; 108; 84). Ein sehr bekannter Effekt dieser Interaktion ist die Abhängigkeit der *Rotationsviskosität* eines Ferrofluids in einem Magnetfeld, der besser als *Magnetoviskoser Effekt*

(126; 98; 57; 132) bekannt ist. Insbesondere quantitative Untersuchungen dieses Magnetoviskosen Effektes sind bei technischen Anwendungen von Interesse. Eine Möglichkeit die Rotationsviskosität zu quantifizieren ist die Bestimmung der kritischen Winkelgeschwindigkeit im Taylor-Couette System (69; 6; 105; 124). Von einem mehr theoretischen Standpunkt aus gesehen ist die Frage interessant, wie weit der Einfluss einer zusätzlich aufaddierten Kraft, wie etwa die eines Magnetfeldes, Auswirkungen auf das Bifurkationsverhalten und die Strukturbildung besitzt.

In der Literatur sind zahlreiche theoretische Arbeiten zu finden, die sich mit dem Einfluss rotationssymmetrischer Felder, z.B. axial, azimutal oder radial, auf den Strömungsfluss eines Ferrofluids im Taylor-Couette System (152; 103; 139; 104; 27; 135; 136; 84) befassen. Experimentell untersuchten Odenbach und Müller (106) die 'Off-Equilibrium' Magnetisierung eines Ferrofluids im Taylor-Couette System für ein homogen transversales Magnetfeld.

In diesem Teil der Arbeit werden nun die Ergebnisse numerischer Simulationen für verschiedene homogene Magnetfelder präsentiert. Dabei liegt der Fokus auf rein axialen Feldern, rein transversalen Feldern und diversen Überlagerungen dieser beiden.

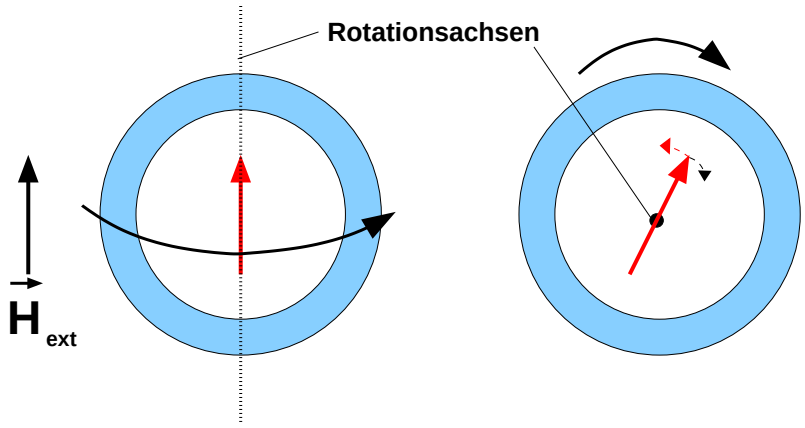


Abbildung 7.2 – Schematische Darstellung zur Erklärung der Rotationsviskosität: Lokale Unterschiede im Strömungsfeld führen zur Drehung der magnetischen Partikel (blau). Diese Rotation (schwarzer Pfeil) bleibt durch ein extern angelegtes Magnetfeld $\mathbf{H}_{ext}$ parallel zur Rotationsachse (*links:* vertikal gepunktete Linie) unbeeinflusst. Liegt die Rotationsachse jedoch senkrecht zum Feld (*rechts:* dicker schwarzer Punkt), so wird das magnetische Moment (roter Pfeil) aus der Feldrichtung herausgedreht. Das daraus resultierende magnetische Drehmoment behindert die Drehung des Partikels und damit auch die Strömung der Trägerflüssigkeit. Makroskopisch äußert sich dieser Effekt in einer erhöhten Viskosität.

Transversale Magnetfelder sind deshalb so Interessant, da sie die Rotationssymmetrie brechen. Zudem besitzen diese Felder den Vorteil, dass auch im Experiment solch homogene Magnetfeldgeometrien (106) relativ einfach zu realisieren sind. Diese Tatsache erlaubt es, die hier gefundenen theoretischen Resultate mit Experimenten zu vergleichen. Andererseits verursacht der Bruch der Rotationssymmetrie durch eine transversale Feldkomponente zahlreiche neue, nichtlinear getriebene Effekte, die mit den Einflüssen axialer Felder verglichen werden. Letztere führen hauptsächlich zur Stabilisierung des CCF Grundzustandes (84).

Weitere Untersuchungen von Altmeyer et al. (3) zeigten, dass zusätzlich zu dieser Stabilisierung, eine transversale Magneteldkomponente zur 'Modulation' der reinen Strukturen wie Taylor Wirbel (TVF) und Spiral Wirbel (SPI) führt und stattdessen sogenannte Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel (wTVF) bzw. Wavy Spiral Wirbel (wSPI) entstehen, die sich aber wesentlich von den klassischen Wavy Strukturen (56; 55; 54; 66) ohne Magnetfeld unterscheiden. So weit bekannt, scheint dies das erste Mal zu sein, dass primär vorwärts bifurkierende Wavy Strukturen im TCS für pbc Randbedingungen gefunden wurden. Außerdem wurden stationäre, phasengepinnte wTVF Zustände *ohne* eine azimutale Rotation entdeckt. Unterschiede und Übereinstimmungen dieser durch ein Magnetfeld erzeugten Wavy Strukturen mit denen ohne Magnetfeld werden anhand der Fourierspektren, wie auch ihrer Frequenzen, veranschaulicht und diskutiert.

7.3 Gliederung und Ziele – Teil II – Durchgeführte Untersuchungen

Nach den Untersuchungen an einem klassischen Fluid, in Teil I dieser Arbeit, wird nun, in Teil II, ein komplexes Ferrofluid im System betrachtet. Hierbei geht es um die Auswirkungen von verschiedenen extern angelegten Magnetfeldern, die daraus resultierende Ausrichtung der Ferrofluidpartikel und deren Auswirkungen auf das Strömungsverhalten und die entstehenden Strukturen im Bulk. Das Ferrofluid wird hierbei als einkomponentiges, paramagnetisches Fluid angesehen, dessen Magnetisierung im Wesentlichen durch die Gleichgewichtsmagnetisierung beschrieben wird. Die Kopplungen des Magnetfeldes in die Impulsbilanz erfolgt hierbei über die Kelvinkraftdichte:

Teil II ist wie folgt aufgebaut:

Das **Kapitel 8** dient der Bereitstellung von theoretischen Grundlagen. Hierin wird zunächst noch einmal kurz der Aufbau (siehe auch Kap. 1) des Systems im Hinblick auf die hier untersuchten Magnetfelder und insbesondere deren Orientierung beschrieben. Weiter folgen theoretische Untersuchungen, bei denen u.a. die Feldgleichungen, mit den in Gegenwart eines Magnetfeldes vorhandenen zusätzlichen magnetischen Termen in den erweiterten Navier-Stokes Gleichungen beschrieben werden. Hierbei werden zunächst die, durch ein extern angelegtes Magnetfeld, neu erzeugten Kopplungen in den nichtlinearen Gleichungen diskutiert, sowie die hieraus resultierenden Strukturen kurz zusammengefasst und insbesondere im Hinblick auf ihre topologischen Eigenschaften untersucht und im einzelnen genauer klassifiziert (vgl. auch Kap. 3).

Das **Kapitel 9** präsentiert dann die numerisch erhaltenen Ergebnisse für Ferrofluide im Taylor-Couette System. Die verschiedenen Untersuchungen, sowohl für den Fall der vollen nichtlinearen Rechnung mit axial-, transversal- und gekoppelten Felder, wie auch solche der linearen Stabilitätsanalyse mit axialem Feld ergaben eine Stabilisierung des CCF Grundzustands für beliebig angelegte Magnetfelder. Ein Schwerpunkt lag hierbei sowohl auf den Bifurkationseigenschaften, der Stabilität und der raumzeitlichen Dynamik der induzierten Strömungsflüsse. Hierzu wurden besonders die Unterschiede in den Strömungsmustern mit und ohne Magnetfeld verglichen.

Es zeigte sich, dass im Fall einer endlichen Transversalfeldkomponente keine reinen Strukturen, weder Taylor Wirbel noch Spiral Wirbel, mehr existieren. Diese werden durch modulierte Strukturen, Wavy Taylor Wirbel (wTVF) und Wavy Spiral Wirbel (wSPI) ersetzt, die sich allerdings von den klassischen Wavy Strukturen, wie sie bereits in Teil I diskutiert wurden, deutlich unterscheiden. Insbesondere die durch ein Magnetfeld erzeugten

Wavy Taylor Wirbel weisen signifikante Unterschiede auf. Hierbei handelt es sich, anders als bei den klassisch rotierenden Wavy Taylor Wirbeln um stationäre, nicht rotierende und phasenfixierte Strukturen.

Überhaupt stellen diese Wavy Strukturen eine neue Art von Lösungen dar, da es sich, anders als bei den klassischen, um primär aus dem CCF herausbifurkierende Strukturen handelt. Zuletzt wird noch kurz auf Übergänge zwischen wTVF und wSPI Zuständen eingegangen, wie sie bereits ähnlich in Kapitel 4 und 5 im klassischen Taylor-Couette System ausführlich untersucht wurden. Dies zeigte, dass die Änderung extern angelegter Magnetfelder qualitativ ähnliche Auswirkungen auf das System mit seinen Strukturen besitzt, wie eine Veränderung der inneren-, bzw. äußeren Reynoldszahl, oder auch eines extern aufgeprägten axialen Durchflusses.

Kapitel 8

Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Strömungsverhaltens von Ferrofluiden im Taylor-Couette System

8.1 Grundlagen – System und theoretische Beschreibung

In diesem Teil der Arbeit wird das Taylor-Couette System, befüllt mit einem komplexeren Fluid untersucht. Hierzu ist der Spalt zwischen den beiden Zylindern mit einem, als inkompressibel und isothermal angenommenen Ferrofluid befüllt und das System als Ganzes befindet sich in einem homogenen Magnetfeld,

$$\mathbf{H} = H_x\,\mathbf{e}_x + H_z\,\mathbf{e}_z, \tag{8.1}$$

mit einer axialen Komponente H_z und einer transversalen Komponente H_x, wie in der Abbildung 8.1 schematisch dargestellt. Alle sonstigen Systemparameter bleiben identisch mit denen im ersten Teil dieser Arbeit.

Zur numerischen Lösung wird das Feld,

$$\mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_r + v\,\mathbf{e}_\varphi + w\,\mathbf{e}_z, \tag{8.2}$$

analog Teil I in einen radialen u, einen azimutalen v und einen axialen w Anteil zerlegt.

Im Folgenden werden nun zunächst die theoretischen Grundlagen, wie die Magnetisierungsgleichungen für Ferrofluide und deren Einfluss auf die Navier-Stokes Gleichungen und die sich daraus ergebenden Modenkopplungen beschrieben. Ausgehend hiervon werden die numerisch erhaltenen Resultate, wie z.B. das veränderte Bifurkationsverhalten, der Einfluss (Verschiebung) auf die Onsets verschiedener Strukturen und die besondere Art der hier vorliegenden Wavy Strukturen diskutiert.

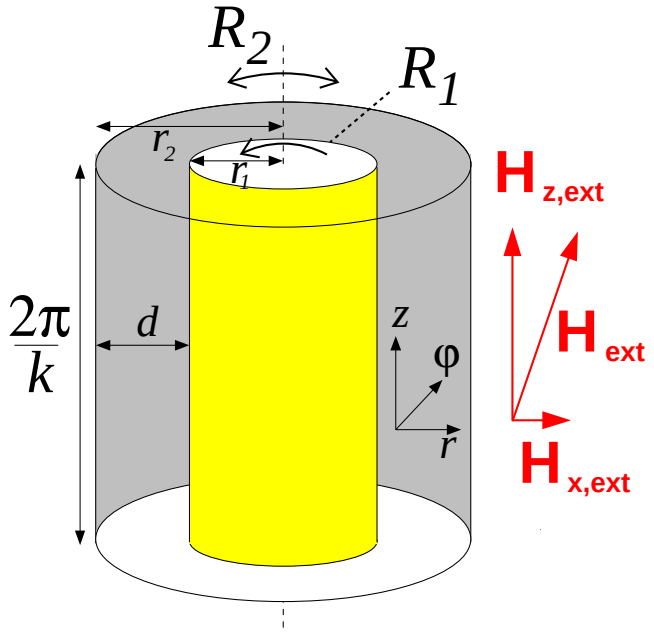


Abbildung 8.1 – Schematische Darstellung des Taylor-Couette System in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{H}_{ext}$. Dabei ist $\mathbf{H}_{ext}$ axial-, radial- oder aus beiden zusammengesetzt überlagert orientiert.

8.1.1 Magnetisierungsgleichungen

In der Literatur ist eine große Anzahl verschiedener Modelle zu finden, die die Magnetisierungsdynamik in Ferrofluiden zu beschreiben versuchen. Die meisten dieser Modelle benutzen die Relaxation der Magnetisierung $\mathbf{M}$ hinein in die Gleichgewichtsmagnetisierung,

$$\mathbf{M}_{\text{eq}} = M_{\text{eq}}(H)\mathbf{H}/H, \tag{8.3}$$

oder aber die Relaxation eines effektiven Feldes

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = M_{\text{eq}}^{-1}(M)\mathbf{M}/M, \tag{8.4}$$

in das magnetische Feld $\mathbf{H}$, beides mit einer Relaxationszeit (127; 19; 132; 97; 47; 48; 134; 133; 100). Im stationären Fall besitzen diese Relaxationsgleichungen die allgemeine Form (81)

$$(\mathbf{\Omega} + \kappa\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M} = \gamma_\tau \left(\mathbf{M} - \gamma_\chi \mathbf{H}\right), \tag{8.5}$$

wobei $\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ die lokale Vortizität beschreibt. Die Koeffizienten κ, γ_τ und γ_χ, die sich von Modell zu Modell unterscheiden, sind Funktionen von H, M und einigen weiteren Materialeigenschaften des Ferrofluides. Diese können, abhängig des verwendeten Ferrofluids, deutlich variieren!

Ein Modell, dass die Tatsache beschreibt, dass echte Ferrofluide einzelne Partikel mit unterschiedlichen Größen enthalten, beschreibt das Ferrofluid als eine Mischung von ideal monodispersen und paramagnetischen Fluiden (82; 80). Die hieraus resultierende (Gesamt-) Magnetisierung ist durch $\mathbf{M} = \sum \mathbf{M}_j$ gegeben, wobei $\mathbf{M}_j$ die zugehörige Magnetisierung des Partikels mit dem Durchmesser D_j beschreibt. Für jede einzelne Teilmagnetisierung

$\mathbf{M}_j$ wird angenommen, dass sie einer einfachen Debye Relaxations Dynamik genügt, die durch

$$d_t\mathbf{M}_j = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{M}_j - \frac{1}{\tau_j}(\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_j^{\mathrm{eq}}), \tag{8.6}$$

beschrieben wird. Darin stehen $\mathbf{M}_j^{\mathrm{eq}}$ für die Gleichgewichts Teilmagnetisierung und τ_j für die effektive Relaxationszeit der verschiedenen Partikelarten.

Für die hier durchgeführten numerischen Simulationen wird eine ähnliche Betrachtung analog dem Modell von Niklas et al. (103; 104) benutzt. Hierzu wird eine stationäre Magnetisierung nahe der Gleichgewichtsmagnetisierung mit kleinen Abweichungen $|\mathbf{M}-\mathbf{M}^{\mathrm{eq}}|$ und kleinen Relaxationszeiten $\Omega\gamma_\tau^{-1} \ll 1$ bzw. $\Omega\tau_j \ll 1$ angenommen. In diesem Fall können die beiden Gleichungen (8.5) und (8.6) vereinfacht werden zu

$$\mathbf{M} - \mathbf{M}^{eq} = c_N \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}, \tag{8.7}$$

mit

$$c_N = \frac{\gamma_\chi}{\gamma_\tau + \kappa\gamma_\chi H^2}, \quad \text{bzw.} \quad c_N = \sum_j \chi_j \tau_j. \tag{8.8}$$

8.1.2 Erweiterte Navier-Stokes Gleichungen

Für den Fall eines inkompressiblen Ferrofluids mit der kinematischen Viskosität ν lassen sich die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes Gleichungen, einschließlich der magnetischen Terme, wie folgt schreiben:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} \tag{8.9}$$

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla^2\mathbf{u} - \nabla p + 2(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H} + \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}). \tag{8.10}$$

Die Skalierungen der Länge mit der Spaltbreite $d = r_2 - r_1$, der Zeit mittels der Impulsdiffusionszeit d^2/ν, der Geschwindigkeiten mit ν/d und des Drucks mit $\rho\nu^2/d^2$, bleiben hierbei unverändert zum klassischen TCS mit newtonschem Fluid aus Teils I dieser Arbeit. Im Fall von Ferrofluiden im Bulk kommen nun zusätzlich noch die Skalierungen des Magnetfeldes $\mathbf{H}$ und der Magnetisierung $\mathbf{M}$ durch $\sqrt{2\rho/\mu_0}\,\nu/d$ (135) hinzu. Mittels der Gleichungen (8.7) kann die Magnetisierung in den Gleichungen (8.10) eliminiert werden, so dass gilt:

$$\begin{aligned}(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \nabla^2\mathbf{u} - \nabla p_M + (\nabla c_N) \times (\mathbf{F} \times \mathbf{H}) \\ &\quad + c_N[\mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{F})],\end{aligned} \tag{8.11}$$

mit $\mathbf{F} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}$. Hierbei beinhaltet p_M den Druck p, wie auch alle magnetischen Terme, die sich als Gradient schreiben lassen.

In einem ersten Lösungsansatz wird angenommen, dass das *interne* Magnetfeld identisch dem *externen*, von außen auferlegten, Magnetfeld $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{ext}}$ (siehe auch Gl. (8.1)) ist[1]. Somit kann Gl. (8.11) vereinfacht werden zu

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \left(1 + s_N^2\right)\nabla^2\mathbf{u} - \nabla p_M - \mathbf{s}_N \times \nabla[(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{s}_N]. \tag{8.12}$$

[1] Das dies nur in erster Näherung gilt wurde bereits in der Arbeit von Leschhorn (83) verdeutlicht.

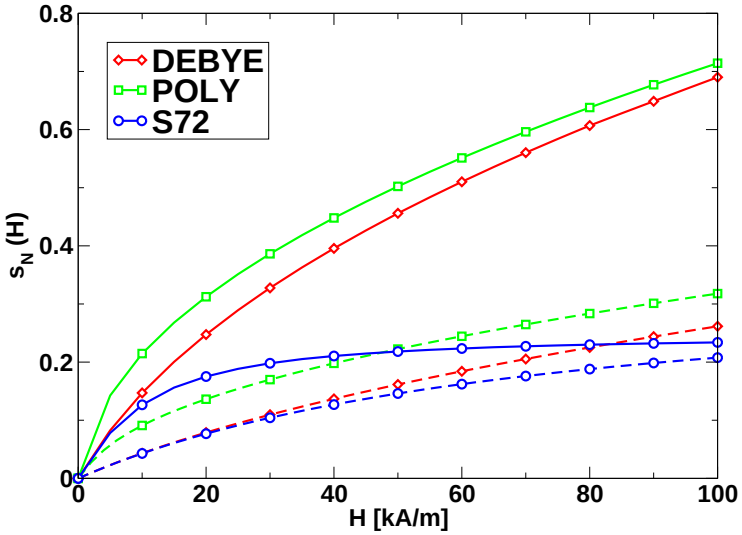


Abbildung 8.2 – Variation des absoluten Wertes $\mathbf{s}_N(H)$ (vgl. Gl. (8.8),(8.13)) bei Variation eines extern angelegten Magnetfeldes. Die verschiedenen Kurven gehören zu den unterschiedlichen Modellen DEBYE, POLY und S72 (84). Dargestellt sind Kurven des kommerziellen Ferrofluids APG933 (durchgezogene Linien) und eines Ferrofluids, das in zahlreichen Experimenten verwendet wird (124) (gestrichelt).

In dieser Näherung gehen das Magnetfeld und alle magnetischen Eigenschaften des Ferrofluids nur durch *einen einzigen* magnetischen Parameter,

$$\mathbf{s}_N = s_x \mathbf{e}_x + s_z \mathbf{e}_z = \sqrt{\frac{c_N}{2}}\,\mathbf{H}, \tag{8.13}$$

in die Geschwindigkeitsfelder ein. s_x [s_z] stellt den transversalen [axialen] Feldparameter dar.

In Abbildung 8.2 ist die Abhängigkeit dieses Parameters, s_N, vom angelegten Magnetfeld, sowie der Einfluss auf das benutzte Magnetisierungsmodell dargestellt. Hierzu ist der absolute Wert $|\mathbf{s}_N(H)|$ berechnet für ein einfaches Debye Modell ($\gamma_\chi = \chi$, $\gamma_\tau = \tau^{-1}$, $\kappa = 0$) (84), das polydisperse Debye Modell (8.6), und ein weiteres Modell, das von Shliomis et al. (132) eingeführt wurde ($\gamma_\chi = \chi$, $\gamma_\tau = \tau^{-1}$, $\kappa = \mu_0/(6\Phi\nu\rho)$) gegenüber extern angelegten Magnetfeldern aufgetragen – diese werden im Folgenden einfach kurz mit DEBYE, POLY und S72 (84) bezeichnet. Weiter wurden die Materialparameter des kommerziellen Ferrofluids APG933 und eines Ferrofluids, das in zahlreichen Experimenten Verwendung findet (124), benutzt.

Die NSE (8.12), die durch zusätzliche Magnetfeldterme, in der hier benutzten (Niklas) Näherung, erweitert wurden, werden mit dem numerischen Verfahren G1D3 gelöst, das ausführlich, einschließlich dieser Magnetfeldterme, in Anhang D und in (62; 64) beschrieben wird.

8.2 Klassifikation der untersuchten Strukturen

Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die verschiedenen, überkritisch auftretenden Zustände gegeben, die in diesem Kapitel eingehender untersucht werden. Es werden sowohl toroidal geschlossene, wie auch helikale Strukturen untersucht. Reine Strukturen, wie Taylor Wirbel (●) und Spiral Wirbel (L- und R-) (▲, ▼) und weiter noch Modulationen dieser, sogenannte Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel (■) und Wavy Spiral Wirbel (♦) werden analysiert[2]. Zur besseren Übersicht werden diese nachstehend immer durch ihre zugehörigen Symbole dargestellt. Die Wavy Strukturen sind topologisch identisch den reinen Zuständen, sie unterscheiden sich aber, wie der Name bereits wiedergibt, in einer wellenartigen Deformation die von zusätzlichen und neuen angeregten Moden im Fourierspektrum herrührt. Diese Anregung, insbesondere welche Moden im Einzelnen durch welche Felder stimuliert werden, wird in Abschnitt 8.3 ausführlich diskutiert.

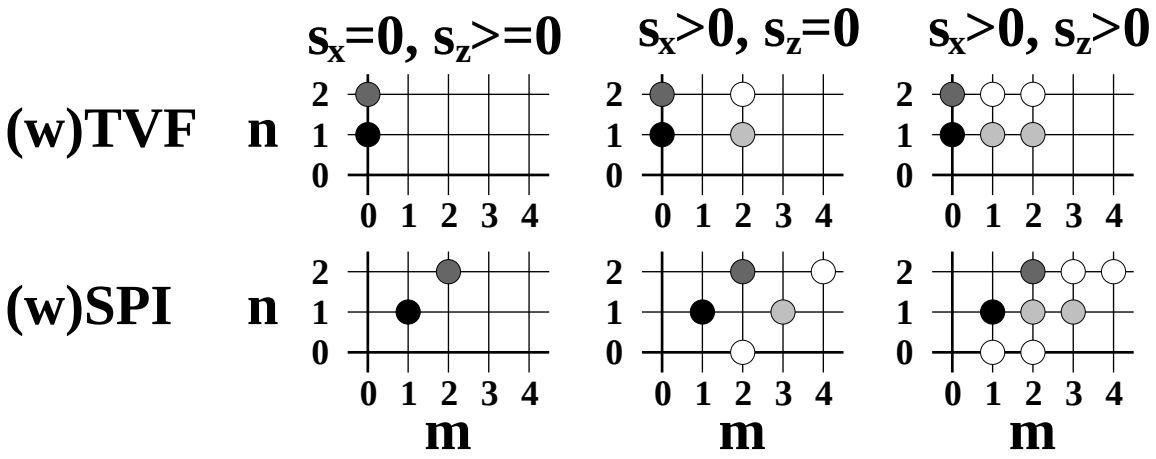


Abbildung 8.3 – Schematische Darstellung der Anregung verschiedener Moden in Anwesenheit unterschiedlicher, extern angelegter, Magnetfelder. Hierin repräsentiert m den zugehörigen azimutalen und n den axialen Modenindex in der Entwicklung der Gleichung (3.2). *Linke Spalte:* $(s_x = 0, s_z \geqslant 0)$ Moden ohne angelegtes Feld oder in einem rein axialen Magnetfeld. *Mittlere Spalte:* $(s_x > 0, s_z = 0)$ Rein transversales Magnetfeld; Modenanregung $m = n \pm 2$. *Rechte Spalte:* $(s_x > 0, s_z > 0)$ Überlagerung von axialem und transversalem Magnetfeld; Modenanregung $m = n \pm 1, 2$. Unterschiedlich starke Anregungen sind durch die verschiedenen Kreise wie folgt charakterisiert: Schwarz > dunkel grau > hell grau > weiß. Für weitere Details siehe Text und für numerische Rechnungen siehe auch Abbildung 9.6.

Insbesondere die, durch das Magnetfeld erzeugten, wTVF Zustände unterscheiden sich signifikant von den klassischen wTVF Lösungen ohne ein extern angelegtes Magnetfeld, wie sie etwa im Kapitel 4 und in der Literatur (56; 55; 54; 66) zu finden sind. Die durch Magnetfelder hervorgerufenen wTVF Zustände sind *nicht rotierende, stationäre* Strukturen mit einer *gepinnten Phase*, ganz anders als die klassischen wTVF Strukturen, die azimutal rotieren. Das angelegte Magnetfeld schnürt die Wirbel an konstanten, d.h. diskreten φ Positionen zusammen und weitet sie an anderen auf (siehe hierzu auch Abs. 9.4 und 9.5).

[2]Alle diese Abkürzungen, einschließlich der zugehörigen Symbole sind ausführlich in der Tab. 3.1 in Kap. 3 zusammengestellt.

8.3 Modenkopplung – angeregte Moden im Magnetfeld

Die zusätzlichen magnetischen Terme in den erweiterten NSE (8.12) rufen eine Vielzahl neuer Phänomene hervor. In der Tat werden insbesondere durch Magnetfelder mit einer transversalen Komponente zusätzliche Moden im Fourierspektrum angeregt. In Abbildung 8.3 ist eine schematische Darstellung dieser unterschiedlichen angeregten Moden durch verschiedene externe **H** Felder zu sehen.

Ein rein axiales Feld $s_x = 0, s_z > 0$ (*links*) regt keine weiteren zusätzlichen Moden an. Somit enthalten TVF Lösungen nur $m = 0, n \neq 0$ Moden. Ebenso enthält eine L1-SPI, eine linksgewundene SPI Lösung mit azimutaler Wellenzahl $M = 1$, nur Moden auf der Diagonalen mit $m = n$. Somit ändert sich das Modenspektrum von TVF und SPI Zuständen qualitativ *nicht*, wenn ein rein axiales Feld anlegt wird. Lediglich das Verhältnis der angeregten Moden im Hinblick auf die zugehörige Amplitudenstärke ändert sich.

Für Parameter $s_x > 0, s_z = 0$ (*Mitte*) werden durch das Magnetfeld höhere m Moden angeregt (siehe auch Gl. (D.21)-(D.23) in Anh. D, Abs. D.2.1). Für wTVF Zustände sind dies $m = \pm 2$ und bei wSPI Lösungen liegen diese auf der zweiten Nebendiagonalen $m = n \pm 2$, so dass die entstehenden Strukturen, wTVF und wSPI, sind. Somit existieren die reinen TVF und SPI Strukturen bei Anwesenheit eines transversalen Magnetfeldes *nicht mehr*.

Wenn das angelegte Magnetfeld sowohl eine transversale als auch eine axiale Komponente besitzt, $s_x > 0, s_z > 0$ (*rechts*), so erscheinen zusätzlich zum Fall $s_x = 0, s_z > 0$ auch noch $m = \pm 1$ Moden in den Fourierspektren der wTVF Lösungen. Ebenso sind in den wSPI Strukturen zusätzliche Moden auf der ersten Nebendiagonalen $m = n \pm 1$, wie in der rechten Spalte in Abbildung 8.3 zu sehen, angeregt. Die Stärke der magnetisch angeregten Moden ist von dem angelegten Magnetfeld abhängig. Diese sind im Einzelnen in der Abbildung 8.3 durch unterschiedliche Kreise (zur Erklärung siehe Bildunterschrift) gekennzeichnet. Weiterhin können die zusätzlich angeregten Moden auch andere nichtlineare Modenkopplungen hervorrufen. Somit wird das gesamte Modenspektrum sehr komplex. Für konkrete numerische Rechnungen siehe z.B. Abbildung 9.6. Das Bifurkationsverhalten und die verschiedenen Strukturen dieser Lösungen werden im Folgenden im Einzelnen genauer diskutiert.

8.4 Resumé

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen zur Beschreibung des Strömungsverhaltens eines Ferrofluids im Taylor-Couette System bereitgestellt. Es wurden die, zur numerischen Simulation notwendigen, Magnetisierungsgleichungen eingeführt und die somit erweiterten Navier-Stokes Gleichungen vorgestellt. Hierbei wurde ein Ansatz analog dem Modell von Niklas et al. (103; 104) benutzt, bei dem eine stationäre Magnetisierung nahe der Gleichgewichtsmagnetisierung, bei genügend kleinen Relaxationszeiten, angenommen wird.

Abhängig von der Orientierung des angelegten Feldes, ist die raumzeitliche Struktur der TVF und SPI Zustände im Allgemeinen verändert, da zusätzliche Moden, die sich aus der axialen und azimutalen Fourierzerlegung ergeben, mit endlichen Amplituden existieren. Im Fall eines rein axialen Magnetfeldes werden die Wirbel Strukturen der TVF und SPI Lösungen, wie auch ihre Modenspektren, *nicht* verändert. Besitzt das angelegte Magnetfeld allerdings eine endliche Transversalkomponente, so werden zusätzliche Moden angeregt und die reinen Strukturen existieren nicht mehr länger. Diese werden durch Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel und Wavy Spiral Wirbel, ersetzt, die sich aber von

den klassischen Wavy Strukturen unterscheiden. Die verschiedenen, durch Magnetfelder modifizierten, Strukturen wurden im Einzelnen näher untersucht und klassifiziert.

Kapitel 9

Auftretende Strömungsmuster von Ferrofluiden im Taylor-Couette System bei extern angelegten homogenen Magnetfeldern

Nachdem im vorangegangenen Kapitel 8 die theoretischen Grundlagen, wie etwa die Magnetisierungsgleichungen, vorgestellt wurden, so sollen in diesem Kapitel nun die Ergebnisse der numerischen Simulationen diskutiert werden. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf dem Bifurkationsverhalten der Strukturen für unterschiedliche, extern angelegte, Magnetfelder und insbesondere dem Einsatzpunkt, dem Onset dieser Bifurkationen. Weiterhin wird noch die Auswirkung verschiedener Magnetfelder auf die raumzeitlichen Strömungsmuster und deren Topologie untersucht.

9.1 Bifurkationsverhalten

Wie bereits zuvor erwähnt wurde, so werden die Onsets, die Einsatzpunkte der verschiedenen Wirbelstrukturen, gleichgültig ob es sich hierbei um toroidal geschlossene oder helikal offene Strukturen handelt, durch *alle*, hier diskutierten, extern angelegten Magnetfelder nach oben verschoben und somit der CCF Grundzustand stabilisiert. Aber zunächst soll ein Blick auf das Bifurkationsverhalten der verschiedenen Strukturen, mit den, aufgrund der unterschiedlich orientierten Magnetfelder, zusätzlich angeregten Moden, wie in Abschnitt 8.3 erklärt, geworfen werden.

In der Abbildung 9.1 sind die verschiedenen vorwärts bifurkierenden Äste der TVF und wTVF Lösung, bei unterschiedlich angelegten **H** Feldern zu sehen. Ebenso zeigt Abbildung 9.2 die analogen Bifurkationsdiagramme für SPI und wSPI Lösungen. Zum besseren Vergleich der einzelnen Bifurkationsäste wird hier als Kontrollparameter der relative Abstand,

$$\mu = \frac{R_1}{R_{1,bif}(s_x, s_z)} - 1, \tag{9.1}$$

in R_1 zur Bifurkationsschwelle $R_{1,bif}(s_x, s_z)$ der Strukturen mit dem zugehörigen Magnetfeld (s_x, s_z) gewählt.

Um die einzelnen Strukturen zu charakterisieren wird als erstes die dominante, dies entspricht der Mode mit der größten Amplitude, wie auch die erste höher harmonische Mode der zugehörigen Struktur benutzt. So z.B. die $(0,1)$ und $(0,2)$ Moden beim TVF Zustand. Zusätzlich wird zum Vergleich ebenfalls die größte, durch das Feld angeregte Mode (vgl. Abb. 8.3) der Wavy Struktur (siehe Abb. 8.3), mit aufgenommen (z.B. für TVF Zustände die $(2,1)$ Mode). Die Symbole in den Abbildungen 9.1 und 9.2, wie auch in allen weiteren Abbildungen sind nur zur besseren Verdeutlichung der einzelnen Strukturen eingetragen. Die zugehörigen numerischen Simulationen sind für sehr viel mehr Parameterwerte durchgeführt worden, als nur für die, in den Abbildungen, eingetragenen Symbole. Diese dienen nur der besseren Sichtbarmachung der verschiedenen Linien bzw. Strukturen.

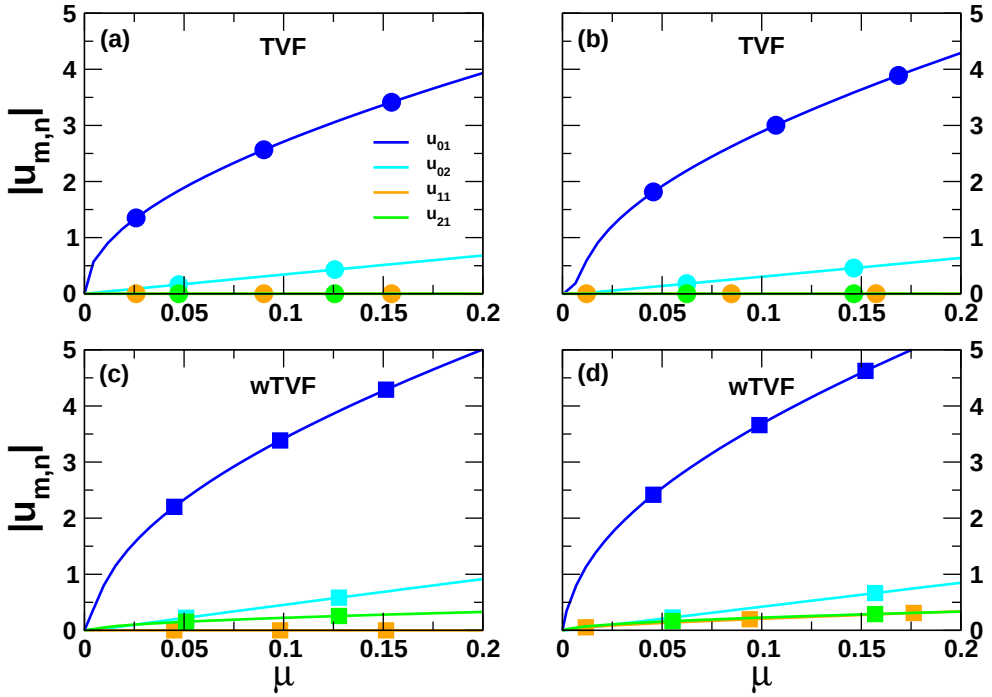


Abbildung 9.1 – Bifurkationdiagramme für TVF (●) **(a,b)** und wTVF (■) **(c,d)** Lösungen in unterschiedlichen Magnetfeldern: **(a)** $s_x = 0 = s_z$, **(b)** $s_x = 0, s_z = 0.6$, **(c)** $s_x = 0.6, s_z = 0$, **(d)** $s_x = 0.6, s_z = 0.6$. Dargestellt sind die Amplituden der Moden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte ($r = 0.5$), aufgetragen gegen den relativen Abstand μ (vgl. Gl. (9.1)) vom Onset der zugehörigen Wirbelstruktur. Weitere Parameter sind $\eta = 0.5$, $k = 3.927$, $R_2 = 0$. Im Fall einer endlichen Transversalfeldkomponente des angelegten Magnetfeldes in **(c)** und **(d)** werden zusätzliche neue Moden, wie in Abbildung 8.3 schematisch dargestellt, angeregt. Die Symbole in dieser Abbildung und in Abbildung 9.2, wie auch allen weiteren Abbildungen sind nur zur besseren Verdeutlichung der einzelnen Strukturen eingetragen. Die zugehörigen numerischen Simulationen sind für sehr viel mehr Parameter durchgeführt worden.

9.1.1 Axiales Feld

Ein rein axial orientiertes **H** Feld ($s_x = 0, s_z \neq 0$) hat keine qualitativen Auswirkungen auf die Topologie der Strukturen von TVF und SPI (siehe auch Abb. 9.6). Beide Wirbelstrukturen bleiben unverändert gegenüber denjenigen ohne Magnetfeld, da keine weiteren Moden durch ein rein axiales Feld angeregt werden, entsprechend der ersten Spalte in Abbildung 8.3. Der einzige, aber dennoch sehr wichtige Effekt ist die Verschiebung der Onsets zu höheren R_1 Werten (84), also eine Stabilisierung des CCF Grundzustands. So ist beispielsweise der Onset der Bifurkationsschwellen von TVF Struktur um ca. 24% für die Parameter der Abbildung 9.1**(b)** nach oben verschoben und die SPI Bifurkationsschwelle verschiebt sich in R_1 um ca. 15% für die Parameter der Abbildung 9.2**(b)** (siehe hierzu auch Abs. 9.3.2). Ebenso wachsen die Frequenzen der SPI in einem axialen Feld an, was in Abschnitt 9.6 noch genauer untersucht wird.

9.1.2 Transversales Feld

Auf der anderen Seite hat ein **H** Feld mit endlicher Transversalkomponente einen signifikanten Einfluss auf TVF und SPI Strukturen. Ein solches Magnetfeld verschiebt nicht nur deren Onsets, wie dies auch in einem axialen Feld geschieht, sondern noch bedeutsamer, es *verändert* die Strukturen selbst. Im Fall von TVF Zuständen führt ein transversales Feld zur Anregung von azimutalen Modenindizes $m = \pm 2$, wie im unteren, mittleren Teil der Abbildung 8.3 zu sehen ist. Die Veränderung der Mode $|u_{2,1}|$ mit dem relativen Kontrollparameter μ ist in der Abbildung 9.1**(c)** mit aufgenommen. Im Fall einer 'echten' L1-SPI Lösungen generiert das transversale Feld zusätzliche Moden mit den Indizes $m = n \pm 2$, wie z.B. im untern mittleren Teil der Abbildung 8.3 dargestellt. Die Moden $|u_{3,1}|$ sind in der Abbildung 9.2**(c)** zu sehen. Hierbei sei darauf hingewiesen, dass auch die $(1, -1)$ Mode endlich existiert, was einer 'kleinen' Beimischung eines R1-SPI Anteils entspricht.

Somit existieren in Magnetfeldern, die eine endliche Transversalkomponente besitzen, die reinen TVF und SPI Strukturen *nicht* mehr. Diese, unter pbc Bedingungen, primär bifurkierenden Lösungen, wTVF und wSPI, haben aber nichts mit den in Kapitel 5, unter rbc Bedingungen, diskutierten Strukturen, wTVF und wSPI, gemeinsam. Dort war die Ursache der wavyartigen Modulation eine permanente $M = 0$ Modenkunde aufgrund der Ekman Wirbel, während hier ein externes Magnetfeld diese modulierten Strukturen erzeugt. Stattdessen bifurkieren Wavy Wirbel hier als primäre Strukturen vorwärts aus dem CCF Grundzustand heraus; nämlich Wavy Taylor Wirbel Zustände in Abbildung 9.1**(c)** und **(d)** oder Wavy Spiral Wirbel Zustände in Abbildung 9.2**(c)** und **(d)**.

Die stabilisierende Wirkung auf den CCF Zustand ist hierbei bei einem transversalen Magnetfeld etwas geringer als bei einem axialen Magnetfeld mit gleicher Stärke. Die Verschiebung der Onsets nach oben von wTVF [wSPI] Zuständen im Transversalfeld ist mit ca. 21% [13%] kleiner, als die entsprechende Verschiebung der Bifurkationsschwellen von TVF [SPI] Strukturen im Axialfeld.

9.1.3 Überlagerte und kombinierte Felder - schräges Feld

Im Vergleich mit den Fällen rein axialer ($s_x = 0, s_z \neq 0$) oder rein transversaler ($s_x \neq 0, s_z = 0$) Felder wird der Onset von wTVF und wSPI Lösungen in einem **H** Feld, das schräg zu den Zylindern orientiert ist ($s_x \neq 0 \neq s_z$) zu noch größeren R_1 Werten verschoben. Weiterhin werden durch solch eine Überlagerung von axialem und transversalem Feld auch noch zusätzliche Moden mit höheren Modenindizes und weitere Kombinationen, wie in der Abbildung 8.3 gesehen, angeregt.

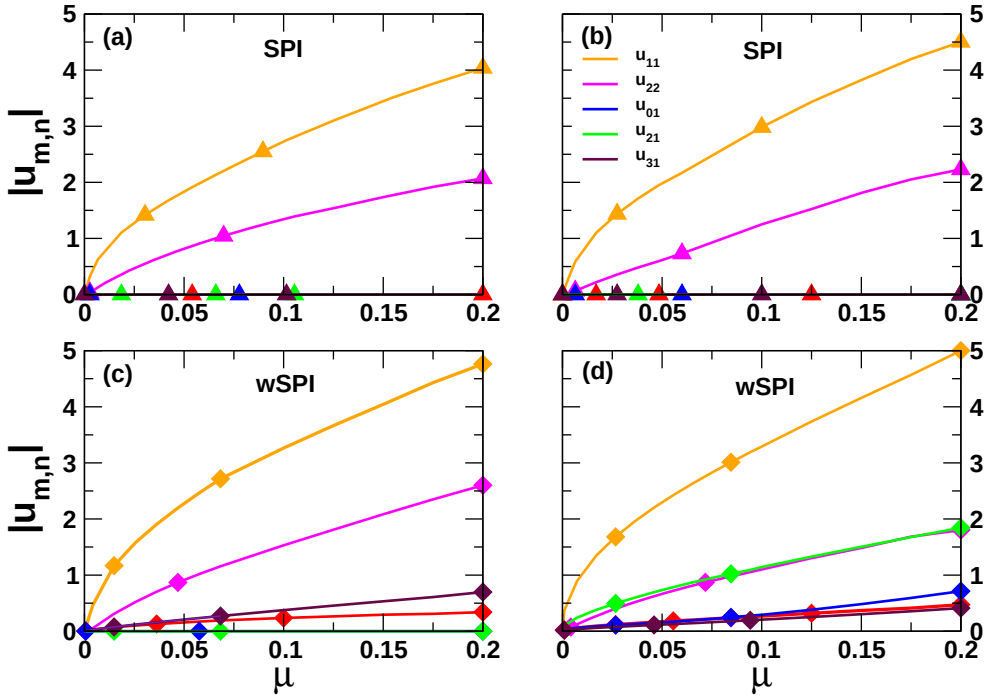


Abbildung 9.2 – Bifurkationdiagramme für SPI (▲) **(a,b)** und wSPI (♦) **(c,d)** Lösungen in unterschiedlichen Magnetfeldern: **(a)** $s_x = 0 = s_z$, **(b)** $s_x = 0, s_z = 0.6$, **(c)** $s_x = 0.6, s_z = 0$, **(d)** $s_x = 0.6, s_z = 0.6$. Dargestellt sind die Amplituden der dominanten Moden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte ($r = 0.5$), aufgetragen gegen den relativen Abstand μ (vgl. Gl. (9.1)) vom Onset der zugehörigen Wirbelstruktur. Weitere Parameter sind $\eta = 0.5$, $k = 3.927$, $R_2 = -150$. Im Fall einer endlichen Transversalfeldkomponente in **(c)** und **(d)** werden zusätzliche neue Moden, wie in Abbildung 8.3 schematisch skizziert, angeregt.

Vergleicht man die Veränderung $|u_{m,1}|$ der Modenamplituden für $m \in \{0, 1\}$ beim gleichen relativen Abstand μ (vgl. Gl. (9.1)) vom zugehörigen Onset der unterschiedlich orientierten **H** Felder der Abbildung 9.1, so findet man den folgenden Zusammenhang für die toroidal geschlossenen TVF und wTVF Lösungen:

$$|u_{m,1}(s_x = c = s_z)| \geqslant |u_{m,1}(s_x = c, s_z = 0)| \geqslant |u_{m,1}(s_x = 0, s_z = c)| \geqslant |u_{m,1}(s_x = 0 = s_z)|.$$

mit $c = \text{konst.} \in [0, 1]$.

Zusammenfassend kann man zu den wichtigsten Resultaten der Bifurkationsdiagramme in den Abbildungen 9.1 und 9.2 sagen: Im Fall einer endlichen Transversalfeldkomponente, $s_x \neq 0$, **(c),(d)**, existieren keine reinen TVF und SPI Lösungen mehr. Sowohl (w)TVF, als auch (w)SPI Strukturen bifurkieren in Magnetfeldern in einer klassischen Wurzelbifurkation in den führenden (dominanten) Amplituden. Die Steigung ihrer Quadrate ist dabei linear bzgl. R_1 und wächst ebenfalls mit Zunahme der Stärke des angelegten Magnetfeldes (vgl. auch Abb. 9.3) an.

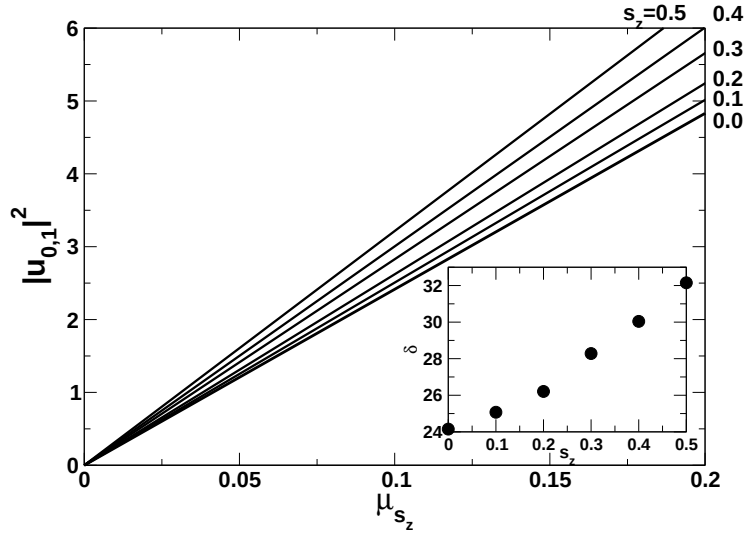


Abbildung 9.3 – Darstellung der quadratischen Modenamplituden $|u_{0,1}|^2$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes des TVF Zustands in Spaltmitte ($r = 0.5$) gegen den relativen Abstand μ, der Reynoldszahl R_1, vom zugehörigen Onset in den verschiedenen axialen Magnetfeldern $0 \leqslant s_z \leqslant 0.5, \Delta s_z = 0.1$. Der Bildausschnitt (rechts unten) zeigt die Steigungen δ der Amplitudenquadrate $|u_{0,1}|^2$ gegen s_z. Weitere Kontrollparameters sind: $R_2 = -50$, $k = 3.1415, \eta = 0.5$. SPI Lösungen zeigen qualitativ vollkommen identisches Verhalten wie die hier dargestellten TVF Lösungen.

9.1.4 Steigungen der TVF Bifurkationsäste in axialen Feldern

In diesem Abschnitt wird das Phänomen der anwachsenden Steigungen (vgl. auch Abb. 9.1 und 9.2) in den dominanten Moden mit zunehmendem Magnetfeld, im Detail für ein axiales **H** Feld diskutiert. In Abbildung 9.3 ist dieser Effekt für Parameter, $0 \leqslant s_z \leqslant 0.5$, für Quadrate der Amplituden $|u_{0,1}|^2$ der dominanten Mode des TVF Zustands für $k = 3.1415, R_2 = -50$ aufgetragen. Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass bei dieser Feldkonfiguration (rein axial) der reine Zustand, hier TVF, unverändert bleibt. Gleiches gilt natürlich auch für den SPI Zustand). Um einen besseren Vergleich zu haben ist die Amplitude $|u_{0,1}|^2$ gegen den relativen Abstand μ der Reynoldszahl R_1 des Onsets mit dem zugehörigen Feld aufgetragen. Ein Anwachsen des Feldparameters s_z ruft ebenfalls ein Anwachsen der Steigungen $\delta = \partial|{u_{0,1}}^2|/\partial\mu$ hervor. Diese verschiedenen Steigungen sind in dem Bildausschnitt der Abbildung 9.3 gegen s_z dargestellt. Wie zu erkennen, wachsen die Steigungen im Wesentlichen linear mit dem Feldparameter s_z. Die Zunahme der Steigungen der dominanten Moden im Fall von SPI Lösungen $(1, \pm 1)$ ist vollkommen analog der in Abbildung 9.3 gezeigten Situation für TVF Lösungen. Dieses Phänomen, des Anwachsens der Steigungen δ, ist ebenfalls bereits in Experimenten beobachtet worden (107).

9.1.5 Bifurkationsäste im transversalen Feld

Nachdem im letzten Abschnitt nur rein axiale **H** Felder betrachtet wurden, sollen nun die Auswirkungen transversaler Magnetfelder auf die Bifurkationsäste der verschiedenen Strukturen im Detail untersucht werden. Zu diesem Zweck sind in der Abbildung 9.4 die reduzierten Moden $|u_{m,1}(s_x;\mu)/u_{m,1}(s_x = 0;\mu)|$ gegen den Kontrollparameter s_x^2 bei jeweils

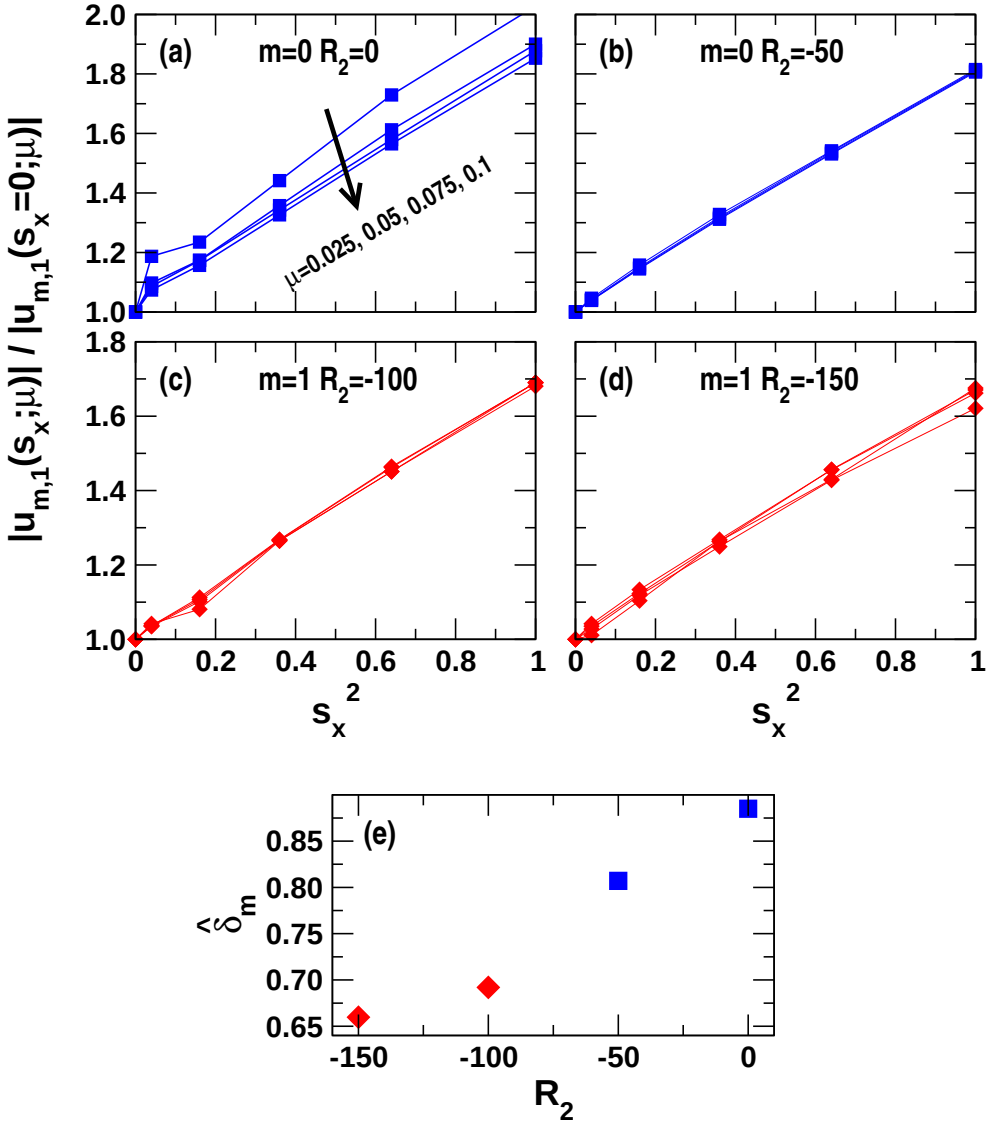


Abbildung 9.4 – Einfluss eines transversalen Feldes ($s_x \neq 0, z_z = 0$) auf das nichtlineare Bifurkationsverhalten von wTVF und wSPI Lösungen. In **(a)**-**(d)** sind die reduzierten Modenamplituden $|u_{m,1}(s_x;\mu)/u_{m,1}(s_x = 0;\mu)|$ gegen den Kontrollparameter s_x^2 für verschiedene überkritische Werte μ =0.025, 0.05, 0.075, 0.1 und R_2, wie indiziert, aufgetragen. (■, $m = 0$) charakterisieren wTVF Zustände und entsprechend (♦, $m = 1$) wSPI Strukturen. Weitere Parameter sind $k = 3.1415$ und $\eta = 0.5$. In **(e)** sind die Steigungen $\widehat{\delta}_m$ der Kurven **(a)**-**(d)** gemeinsam gegen R_2 aufgetragen.

gleichem überkritischem Wert μ aufgetragen. Hierbei sind in **(a)** und **(b)** wTVF ($m = 0$) Zustände zu sehen, während **(c)** und **(d)** wSPI ($m = 1$) Strukturen zeigen. Sowohl für die wTVF als auch die wSPI Lösungen und für alle μ Werte zwischen 0.025 und 0.1, wie in Abbildung 9.4 zu sehen, zeigen diese Verhältnisse annähernd das gleiche Verhalten. Weiterhin wachsen diese praktisch alle linear in s_x^2. Die Steigungen $\widehat{\delta}_m = \partial|u_{m,1}(s_x;\mu)/u_{m,1}(s_x = 0;\mu)|/\partial s_x^2$ der Kurven in **(a-d)** sind in **(e)** gegen den entsprechenden Wert R_2 aufgetragen. Hierbei verkleinern sich die Steigungen $\widehat{\delta}_m$ mit zunehmend negativeren R_2 Werten.

Die Tatsache, dass $\widehat{\delta}_{m=0} > \widehat{\delta}_{m=1}$ gilt, impliziert, dass die reduzierten wTVF Amplituden stärker im transversalen Feld anwachsen, als die der wSPI Struktur. In diesem Sinne ist der Einfluss eines transversalen **H** Feldes auf das *nichtlineare* Bifurkationsverhalten von wTVF Zuständen stärker als bei wSPI Strukturen. Andererseits werden die *linearen* Bifurkationsschwellen von helikalen wSPI Lösungen stärker durch ein transversales Magnetfeld verschoben, als diejenigen von toroidal geschlossenen wTVF Lösungen. (Siehe hierzu auch die Abs. 9.3.1 und 9.3.2.)

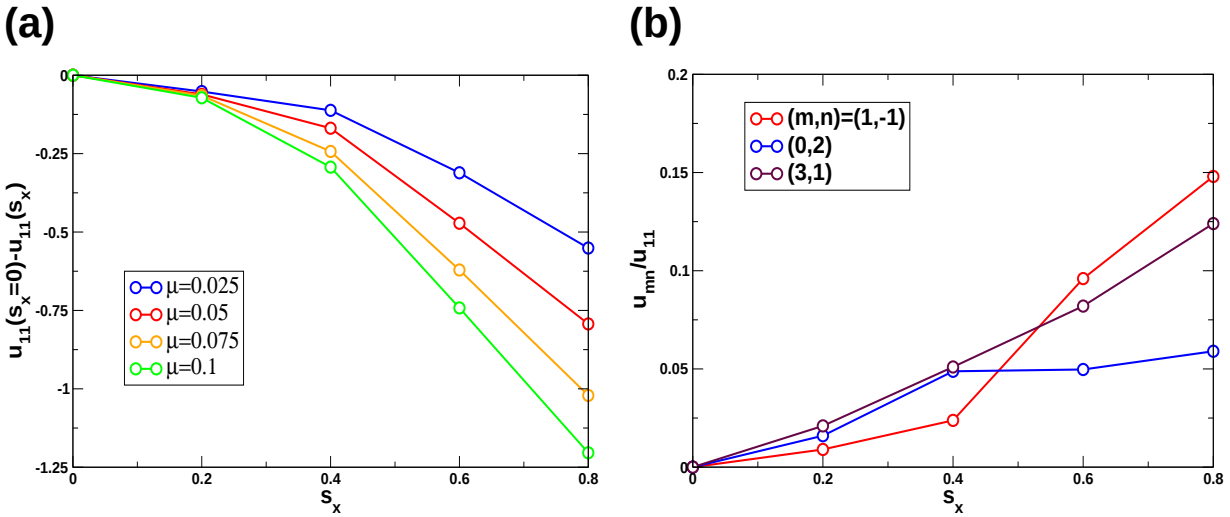


Abbildung 9.5 – Darstellung der Veränderung der Modenzusammensetzung einer (w)SPI Lösung bei Variation des transversalen Feldparameters s_x ($s_z = 0$). Wie in Abschnitt 8.3 gesehen führt $s_x \neq 0$ zur Anregung weiterer Moden im Fourierspektrum der Wirbelstrukturen, so dass keine reinen Strukturen mehr existieren. **(a)** Differenz $u_{1,1}(s_x = 0) - u_{1,1}(s_x)$ der Amplituden der dominanten (größten) Mode, $(1,1)$, der wSPI Lösung bei verschiedenen überkritischen Werten μ in Abhängigkeit von s_x. **(b)** Verhältnis der Amplituden $u_{m,n}/u_{1,1}$ einiger durch s_x zusätzlich angeregter Moden, bezogen auf die Amplitude der dominanten wSPI Mode $(1,1)$. Kontrollparameter: $k = 3.927, R_2 = 0, \eta = 0.5$

Weitere Untersuchungen der TVF Bifurkationsäste im transversalen Feld ergaben ein qualitativ identisches Verhalten zu diesem in axialen Feldern gefundenen Lösungszuständen. Die Steigungen der Modenamplituden $|u_{0,1}|^2$ wachsen ebenfalls linear mit Variation des Kontrollparameters, s_x, vollkommen analog der Situation bei Veränderung des Parameters, s_z, in Abbildung 9.3.

9.1.6 Modenzusammensetzung von (w)SPI im transversalen Feld

Bislang wurde immer die Bifurkation der verschiedenen Strukturen, bei fest vorgegebenem Feldparameter s_x bzw. s_z, in Abhängigkeit der inneren Reynoldszahl R_1 (bzw. der relativen Abstände zu den Onsets μ) untersucht. Um einen besseren Eindruck, der durch transversales **H** Feld zusätzlich angeregten Moden und deren Auswirkungen auf die Topologie der gesamten Struktur zu bekommen, wird an dieser Stelle eine wSPI Struktur bei fixiertem R_1 und Variation von s_x genauer untersucht.

In Abbildung 9.5 sind die Veränderungen der dominanten Modenamplituden, $(1,1)$, für die Differenz $u_{1,1}(s_x = 0) - u_{1,1}(s_x)$ **(a)** einer wSPI Lösung für verschiedene überkritische Werte $\mu = 0.0025, 0.05, 0.075, 0.1$ dargestellt. Analog sind die relativen Verhältnisse $u_{m,n}/u_{1,1}$ **(b)** einiger zusätzlich angeregten Moden[1] bei Variation von s_x aufgetragen. Das Verhalten bei wachsendem s_x **(a)** ist bei allen Werten μ qualitativ identisch. Mit größeren Werten s_x wird die Differenz $\Delta(s_x) := u_{1,1}(s_x = 0) - u_{1,1}(s_x)$ **(a)** ebenfalls größer, was in Einklang mit der Stabilisierung des CCF Grundzustands – dem Verschieben der Bifurkationsschwellen der Wirbelstrukturen zu größeren R_1 Werten – steht. Dies spiegelt sich auch in dem stärkeren Abfallen der Kurven mit Zunahme von s_x, für größere μ Werte wieder. Es gilt: $\Delta(s_x = 0.025) > \Delta(0.05) > \Delta(0.075) > \Delta(0.1)$.

Interessanter noch als die Differenzen der dominanten Modenamplituden ist aber das Verhältnis eben dieser dominanten Modenamplitude bzgl. der weiteren im Spektrum angeregten Moden. In **(b)** ist dieses Verhältnis $u_{m,n}/u_{1,1}$ für verschiedene ausgewählte Moden des Fourierspektrums dargestellt. Insbesondere wird hierbei mit der $(3,1)$ Mode auf die Kopplung der $m = n \pm 2$ Moden (vgl. Abs. 8.3, Abb. 8.3) für $s_x \neq 0$ eingegangen. Allgemein lässt sich erkennen, dass die Anteile der, durch das Magnetfeld, angeregten Moden, mit wachsendem s_x zunehmend größer werden. Alle dargestellten Kurven wachsen natürlich bei $s_x = 0$ aus der Null heraus, da dort nur die reine SPI Struktur vorliegt und die sonstigen Moden $|u_{m,n}|$, die nicht zu diesem Unterraum gehören, alle identisch Null sind. Während bei Magnetfeldern mit $s_x < 0.5$ die $(3,1)$ Mode **(b)** der zweiten Nebendiagonalen in der wSPI Lösung neben der dominanten $(1,1)$ Mode die bestimmende Mode bleibt, so ändert sich dies für Feldparameter $s_x > 0,5$. Für solche Felder ist der wSPI Anteil der, entsprechend anders orientierten, wSPI Lösung (hier R-wSPI mit $(1,-1)$ Mode) die nächste dominante Mode, wie in Abbildung 9.5**(b)** zu sehen.

9.2 Wirbelstrukturen und Modenzusammensetzungen

Nachdem im Abschnitt 9.1 die Auswirkungen verschieden orientierter Magnetfelder auf das Bifurkationsverhalten von TVF und SPI Lösungen untersucht wurden, so werden nun die strukturellen Veränderungen der Wirbelstrukturen und die diese begleitenden Änderungen in der Modenzusammensetzung diskutiert. Somit werden im nun Folgenden die Strukturen zu den Bifurkationen von TVF und wTVF Lösungen, wie in Abbildung 9.1 gezeigt, bei unterschiedlich orientierten Feldern genauer diskutiert. Analog werden natürlich ebenso die Auswirkungen auf SPI und wSPI Lösungen, der Abbildung 9.2 untersucht.

In der Abbildung 9.6 werden die verschiedenen Wirbelstrukturen mit den Buchstaben **(a)**-**(d)** identifiziert, entsprechend der unterschiedlichen **H** Felder der Abbildungen 9.1 und 9.2. Somit zeigen **(1a)** und **(3a)** in Abbildung 9.6 reine TVF und SPI Lösungen *ohne* extern angelegtes Feld, während **(1b)** und **(3b)** die gleichen reinen Strukturen in einem *rein axialen* Feld zeigen. In **(1c)** und **(3c)** sind nun wTVF und wSPI Lösungen in einem

[1] Dies sind gerade die entsprechend der Modenkopplungen in den Gleichungen (vgl. Abs. 8.3) zusätzlich dominant mit angeregten Moden.

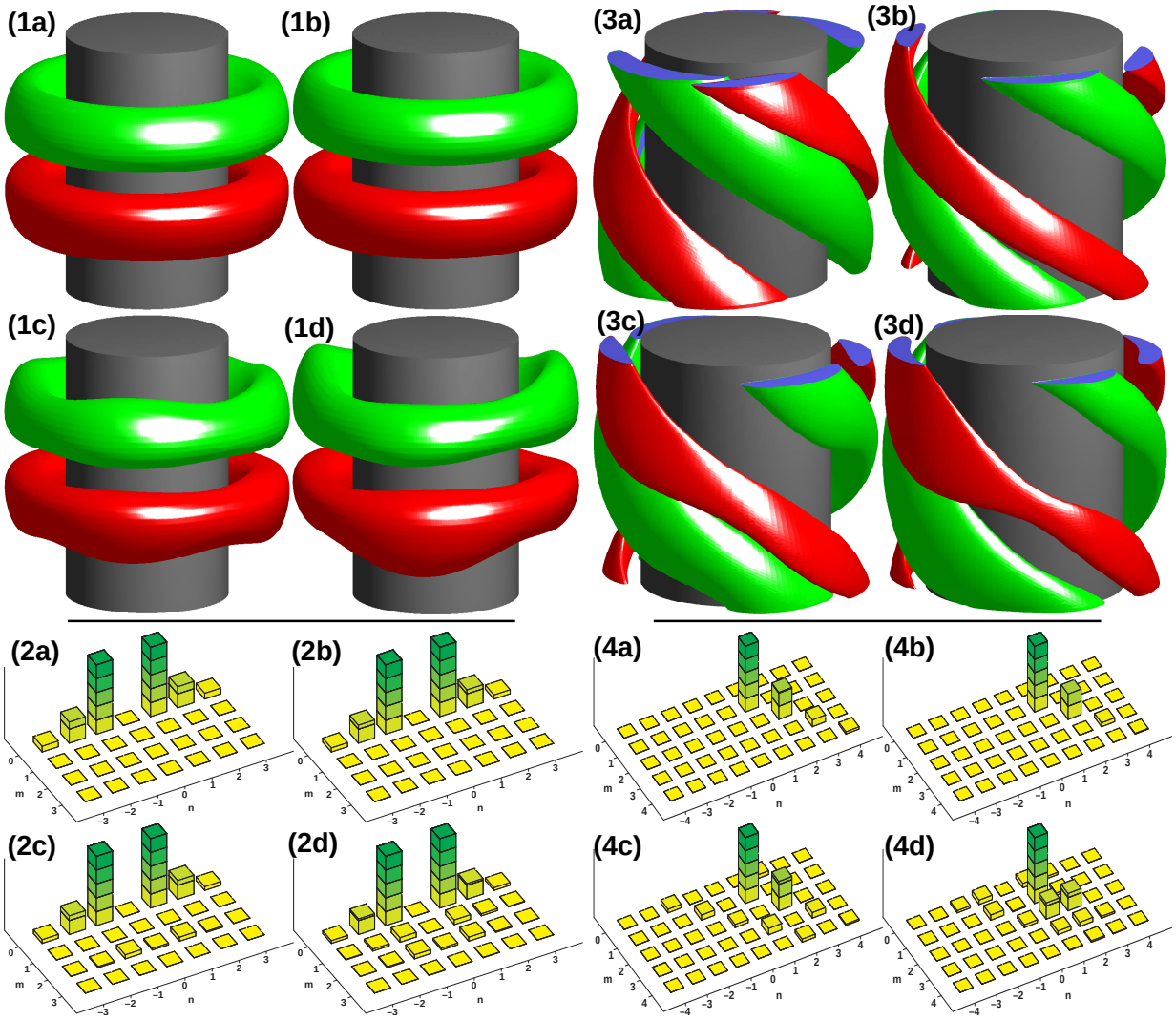


Abbildung 9.6 – Einfluss von verschieden orientierten Magnetfeldern auf die unterschiedlichen Wirbelstrukturen **(1, 3)** und auf das Modenspektrum **(2, 4)**. In **(1, 3)** sind Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ für Werte ± 90 **(1)** und ± 70 **(3)** gezeigt. Zur besseren Sichtbarkeit sind die 3D Strukturen in einem 4π Zylinder mit einer axialen Ausdehnung von einer Wellenlänge dargestellt. Rot [grün] repräsentiert positive [negative] Vortizität. In **(2, 4)** sind die Modenamplituden $|u_{m,n}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte ($r = 0.5$) der zugehörenden Strukturen in **(1, 3)** über der $m - n$ Ebene dargestellt. Das magnetische Feld in **(a)** ist Null (klassischer Fall). In **(b)** ist es rein axial orientiert ($s_x = 0, s_z = 0.6$), rein transversal in **(c)** ($s_x = 0.6, s_z = 0$) und schräg (axial und transversal überlagert) in **(d)** ($s_x = 0.6 = s_z$). Somit sind in **(a, b)** in **(1, 2)** reine TVF Strukturen zu sehen und **(c, d)** in **(1, 2)** zeigen wTVF Lösungen, während **(a, b)** in **(3, 4)** reine SPI Zustände, und **(c, d)** in **(3, 4)** entsprechend wSPI Lösungen zeigen. Die Wirbelstrukturen und die magnetischen Feldparameter in **(a)** - **(d)** entsprechen denen der Abbildungen 9.1 und 9.2. Kontrollparameter sind $R_1 = 150, R_2 = 0$ in **(1, 2)** und $R_1 = 160, R_2 = -150$ in **(3, 4)** und weiter noch $k = 3.927, \eta = 0.5$. Die Entstehung eines wTVF Zustands aus einem reinen TVF Zustands durch Einschalten und Verstärkung eines transversalen Magnetfeldes sowie eines axial und transversal überlagerten Magnetfeldes ist in den beiden Filmen 7.avi und 8.avi zu sehen.

rein transversalen Feld dargestellt und schließlich sind ähnliche Strukturen in **(1d)** und **(3d)** in einem schrägen, axial- und transversal überlagertem Feld zu sehen.

9.2.1 Axiales Feld

Ein rein axiales Magnetfeld **(b)** ändert weder die räumliche Struktur von TVF und SPI, noch das Modenspektrum im (m, n) Modenraum (vgl. auch Abb. 9.6**(a)** und **(b)**). Der TVF Zustand besteht immer noch aus toroidal geschlossenen, rotationssymmetrischen Wirbelschläuchen, mit einem Modenspektrum, das ausschließlich aus $m = 0$ Moden besteht. Auch die helikal orientierten, offenen Wirbelschläuche der (hier) linksgewundenen Spiralen (L-SPI), wie in Abbildung 9.6**(3a)** zu sehen, werden durch ein rein axiales **H** Feld nicht verändert. Dies gilt natürlich auch für die spiegelsymmetrischen Zustände rechtsgewundener Spiralen (R-SPI). Die Frequenzen von L- und R-SPI Lösungen sind identisch und dies bleibt auch im Fall eines axialen Magnetfeldes so. Somit bricht ein rein axiales Feld die kontinuierliche Symmetrie $f(r, \varphi, z, t) = f(r, \phi)$ des SPI Feldes *nicht* und L- und R-SPI Lösungen bleiben weiterhin symmetrieentartet (wie z.B. (115)). Diese Symmetrieentartung bleibt auch für rein transversale, wie auch beliebig überlagerter Felder erhalten.

9.2.2 Transversale und überlagerte Felder

Wie bereits weiter oben erläutert existieren die reinen Strukturen, TVF und SPI, in Anwesenheit eines Magnetfeldes mit endlicher Transversalkomponente, $s_x \neq 0$, *nicht mehr*, wie in Abbildung 9.6**(c)** und **(d)** zu sehen ist. Die Isovortizitätsflächen werden wellenförmig deformiert und zusätzliche Moden, wie in Abschnitt 8.3 beschrieben und in Abbildung 8.3 schematisch dargestellt, werden angeregt. So generiert ein transversales **H** Feld **(c)** in der wTVF Lösung zusätzliche $m = \pm 2$ Moden, neben den $m = 0$ TVF Moden, und in wSPI Strukturen (hier L1-wSPI) existieren weitere $m = n \pm 2$ Moden auf der zweiten Nebendiagonalen, zusätzlich zu den $m = n$ SPI Moden auf der Diagonalen. Ein schräges Feld **(d)** führt neben den bereits erwähnten zusätzlich angeregten Moden auch noch zur weiteren Anregung von Moden mit, $m = \pm 1$, bei wTVF Lösungen und, $m = n \pm 1$, in wSPI Lösungen (vgl. Abb. 8.3).

Die raumzeitlichen Eigenschaften der wTVF Lösungen, wie sie in Abbildung 9.6 für transversale und überlagerte Magnetfelder zu sehen sind unterscheiden sich zum Teil sehr deutlich von denen der klassischen wTVF Strukturen. Bei Letzteren sind die Wirbelschläuche wellenartig in axialer Richtung nach oben und unten verbogen. Entscheidend ist aber, dass diese deformierte Struktur als Ganzes in azimutaler Richtung rotiert, während sie axial nur um eine Mittellage herum periodisch schwingt (siehe Abs. 9.5).

Ein Magnetfeld mit endlicher Transversalkomponente, andererseits, deformiert toroidal geschlossene Wirbel auf eine andere Art und Weise. In der Abbildung 9.6(**1c**,**1d**) ist zu erkennen, dass die Schläuche der Isoflächen der azimutalen Vortizität für gewisse φ Positionen nahezu unverändert bleiben im Vergleich zu denen des reinen TVF Zustands **(1a**,**1b)**. An anderen φ Positionen hingegen ist die Deformation deutlich stärker, so dass die Schläuche insgesamt abwechselnd aufgeweitet (groß) und zusammengeschnürt (klein) sind. Diese Deformationen in der Ausdehnung der Wirbel(schläuche) liegen dabei *lokalisiert* vor und viel entscheidender noch rotieren diese *nicht*, im Gegensatz zu den Deformationen der klassischen wTVF Strukturen. Es handelt sich hier also um stationäre, zeitlich konstante und Phasen fixierte Zustände (vgl. auch Abs. 9.4).

Verglichen mit den wTVF Zuständen zeigen die Wirbel der wSPI Strukturen keine so signifikanten topologischen Unterschiede zu denjenigen ohne extern auferlegtes Magnetfeld. Bei diesen sieht die wellenförmige Deformation sehr ähnlich aus. Sowohl die wSPI als auch

die SPI Strukturen rotieren bereits ohne ein angelegtes Feld und dies bleibt auch so in Gegenwart eines **H** Feldes. Der Einfluss der, durch die magnetischen Terme induzierten Störungen, ist im Vergleich zu der sowieso zugrundeliegenden Rotation relativ gering, so dass er in den Strukturen fast nicht zu erkennen ist. Weitere Details hierzu, insbesondere auch quantitative Ergebnisse werden im Abschnitt 9.4 diskutiert.

9.2.3 Strukturelle Zerlegung

Um den Einfluss der, durch die magnetischen Zusatzterme in den NSE, zusätzlich vorhandenen Fouriermoden besser verstehen zu können, werden in diesem Abschnitt die geometrischen Eigenschaften der Wavy Strukturen weiter untersucht, indem die zugrunde liegenden hydrodynamischen Felder in ihre einzelnen Bestandteile zerlegt werden. Von Interesse ist hierbei insbesondere der Anteil des Modenunterraums, der übrig bleibt, wenn man den entsprechenden Unterraum der reinen Struktur abgezogen hat. (So z.B. bei den wTVF [L1-wSPI] Lösungen der Anteil für den gilt $m \neq 0$ [$m \neq n$]).

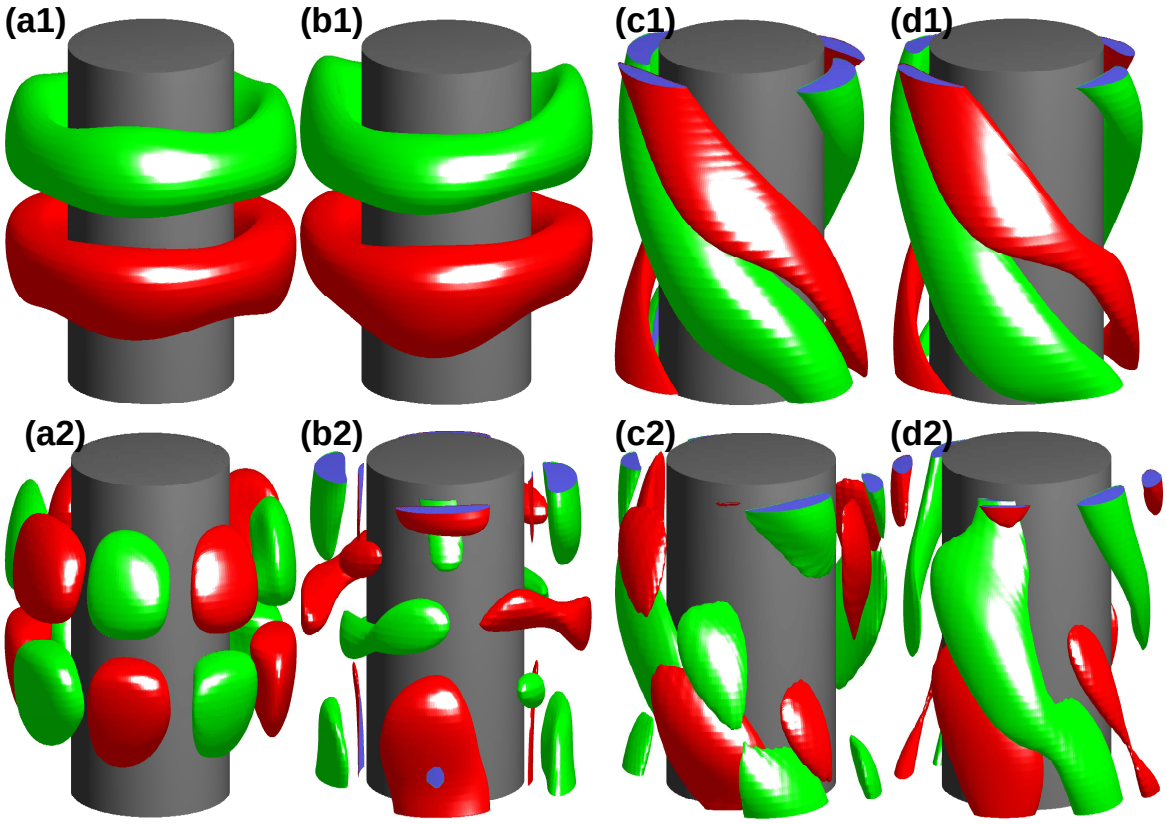
In Abbildung 9.7 ist sowohl die vollständige Struktur **(1)**, wie auch der Anteil der durch streichen der entsprechenden Moden der reinen Struktur übrig bleibt **(2)**, dargestellt. Hierzu sind wieder Isovortizitätsflächen zur Visualisierung benutzt worden. Die zugehörigen Werte der azimutalen Vortizität, $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ sind: ± 90 **(a1**,**b1**,**c1**,**d1)**, ± 10 **(a2**,**c2**,**d2)** und ± 5 **(b2)**. Bereits hieraus erkennt man, dass der Anteil des Unterraums der *reinen* Struktur **(1)**, für die hier gewählten Parameter, deutlich dominiert. Während im Fall der wSPI Lösung **(c2**,**d2)** die reduzierten Unterräume qualitativ sehr ähnlich aussehen, so ist gerade bei den (w)TVF Zuständen **(a2**,**b2)** ein deutlicher Unterschied feststellbar. Während die Reststruktur **(a2)** im rein axialen Feld einer RIB artigen Lösung gleicht, so ist sie für den Fall der gekoppelten schrägen Felder **(b2)** deutlich verändert und komplexer. Dieses Verhalten ist qualitativ annähernd auch bei den wSPI Lösungen **(c2**,**d2)** zu erkennen, bei weitem jedoch nicht so stark, da dieser Effekt bei den, ohnehin schon rotierenden, SPI Strukturen so gut wie nicht ins Gewicht fällt.

Die Zerlegung der Abbildung 9.7, kann aber aufgrund der verschiedenen Isowerte, nur einen qualitativen Eindruck der Deformationen in den Isoflächen der Vortizitäten als Anteile des $m \neq 0$ und $m \neq n$ Modenunterraums geben (vgl. unterschiedliche Isovortizitätswerte). Bei anderern Kontrollparametern könnten die Effekte deutlich anders, stärker oder aber auch schwächer ausfallen.

9.3 Auswirkungen verschiedener Magnetfelder auf die Bifurkationsschwellen

9.3.1 Überschneidung der SPI und TVF Bifurkationsschwellen

Von besonderem Interesse in der $R_1 - R_2$ Phasenebene ist der Punkt höherer Codimension, γ, bei dem sich die Bifurkationsschwellen der primär bifurkierenden Wirbellösungen, d.h. dort wo die Strukturen aus dem CCF Grundzustand heraus entstehen, kreuzen. Im Fall, ohne oder eines rein axialen, **H** Feldes sind dies die klassischen TVF und SPI Lösungen, bei gekreuzten und rein transversalen Feldern allerdings wTVF und wSPI Zustände. An besagtem Punkt, γ, ändert sich die Reihenfolge, in der die Wirbelstrukturen bei zunehmendem R_1 erscheinen und mit ihr ebenfalls die Stabilität dieser nichtlinearen Lösungen am Onset. So etwa bifurkiert für moderate R_2 (rechts des γ Punkts in Abb. 9.8) die TVF Lösung als erstes aus dem CCF und ist auch stabil am Onset, während die SPI Lösung erst später,



	wTVF	wSPI
$s_x > 0, s_z = 0$	**(a)**	**(c)**
$s_x > 0, s_z > 0$	**(b)**	**(d)**

Abbildung 9.7 – Zerlegung verschiedener (w)TVF und (w)SPI Lösungen in ihre dominanten Modenunterräume für verschiedene Magnetfeldkombinationen (siehe Tabelle). Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ (siehe Text) von wTVF **(a1,b1)** und wSPI **(c1,d1)** Zuständen bei $R_1 = 100$, $R_2 = 0$, $k = 3.927$, $\eta = 0.5$. Die obere Reihe **(1)** zeigt die entsprechende vollständige Struktur. Die untere Reihe **(2)** gibt den Anteil in der Struktur wieder, der **(a2,b2)** durch Herausnehmen des $m = 0$ TVF Modenunterraum, bzw. in **(c2,d2)** des $m = n$ L1-SPI Modenunterraum herrührt. Rot [grün] bedeutet positive [negative] Vortizität. Die Tabelle unterhalb der Abbildung gibt die zugehörigen Parameter der angelegten Magnetfelder wieder.

bei größeren R_1 herausbifurkiert und an dieser Schwelle auch nur instabil vorliegt. Sowohl die Bifurkationsabfolge, wie auch die Stabilität wird zwischen diesen beiden Lösungen vertauscht (links des γ Punkts in Abb 9.8), sobald R_2 genügend negativ geworden ist. Dies gilt ebenso für wTVF und wSPI Strukturen wie sie in rein transversalen oder gekreuzten Feldern existieren.

In Abbildung 9.8 ist der Einfluss verschiedener axialer **H** Felder ($0 \leqslant s_z \leqslant 1.0, \Delta s_z = 0.2$) auf die Bifurkationsschwellen, sowie die Lage des γ Punktes dargestellt. Hierbei handelt es sichum Resultate einer linearen Analyse mittels Shooting Verfahren (84). Blaue [rote]

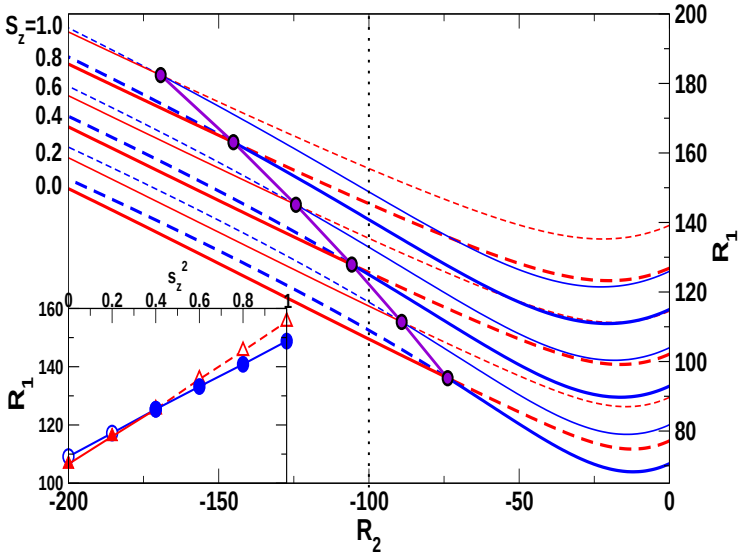


Abbildung 9.8 – Einfluss eines rein axialen Magnetfeldes ($s_x = 0$) auf die Lage der Bifurkationsschwellen in der $R_1 - R_2$ Ebene, von TVF und SPI Lösungen aus dem CCF heraus. Entsprechende Feldparameter $s_z = 0, .., 1, \Delta s_z = 0.2$ sind oben links eingetragen. Weitere Kontrollparameter sind: $k = 3.1415, \eta = 0.5$. Blaue [rote] Linien stehen für die TVF [SPI] Lösung, während durchgezogene [gestrichelte] Linien eine stabile [instabile] Wirbellösung am Bifurkationspunkt charakterisieren. Die Linie, die die Kreuzungspunkte der Bifurkationsschwellen von TVF und SPI Zuständen miteinander verbindet, zeigt, wie der Punkt, γ, höherer Codimension durch das Magnetfeld zu stärkerer Gegenrotation (nach links) verschoben wird. An diesem Punkt ändert sich sowohl die Reihenfolge der bifurkierenden Strukturen, wie auch die Stabilität dieser. Die senkrechte, gepunktete Line entspricht den Parametern der inneren Abbildung für fixiertes $R_2 = -100$. Dort sind die Schwellen als Funktion des Magnetfeldkontrollparameters s_z aufgetragen. Für den Fall rein transversaler und gekreuzter Felder ergibt sich ein qualitativ identisches Verhalten.

Kurven repräsentieren die marginalen Stabilitätsschwellen des CCF gegenüber der TVF [SPI] Lösung. Durchgezogene [gestrichelte] Linien deuten an, ob die jeweils bifurkierende Lösung stabil [instabil] vorliegt.

Ein anwachsender Kontrollparameter, s_z, stabilisiert den CCF Grundzustand sowohl gegenüber der TVF, als auch der SPI Lösung, was sich in der Aufwärtsverschiebung der zugehörigen Stabilitätsschwellen in Abbildung 9.8 zeigt. Lediglich die Stärke dieser Stabilisierung ist bei den TVF und SPI Lösungen unterschiedlich. So ist dieser Stabilisierungseffekt i.A. für SPI Zustände stärker als für TVF Lösungen, was zur Folge hat, dass der γ Punkt zu negativeren R_2 hin wandert, d.h. nach links in Abbildung 9.8. Mit wachsendem Feldparameter s_z wächst somit auch die R_2 Region der primär bifurkierenden TVF Lösung. Ein weiterer Unterschied liegt in der Größe der Verschiebung bei rein axialen oder rein transversalen **H** Feldern. Im Fall rein transversaler Magnetfelder ist der Stabilisierungseffekt merklich stärker. An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese linearen Ergebnisse mittels numerischer Simulationen der vollen nichtlinearen NSE überprüft wurden, und diese qualitativ die gleichen Ergebnisse erbrachten. Auch für die Fälle rein transversaler und gekreuzter Felder ergibt sich ein qualitativ identisches Verhalten wie in Abbildung 9.8 bei

axialem Feld, lediglich die absoluten Werte sind unterschiedlich. Aus diesem Grund werden diese Ergebnisse hier nicht gesondert gezeigt.

Im Bildausschnitt der Abbildung 9.8 (links unten) sind die Bifurkationsschwellen für fixiertes $R_2 = -100$ gegen s_z^2 dargestellt. Zu sehen ist der Wechsel in der Reihenfolge der Bifurkationen, sowie in der Stabilität der Lösungen. Für kleine bis moderate Feldparameter, $0 \leqslant s_z \leqslant 0.37$ liegen TVF Zustände primär bifurkierend und stabil vor, während SPI Strukturen sekundär und instabil bifurkieren. Bei stärkeren Feldern, $s_z > 0.37$, vertauschen beide Strukturen gerade ihre Stabilität und Bifurkationsreihenfolge.

Zusammenfassend kann man hierzu sagen: Für fixierte Werte R_2 verschiebt ein axiales Magnetfeld die Onsets der helikalen SPI Strukturen stärker, als diejenigen der toroidal geschlossenen TVF Zustände. Dieses Verhalten wurde analog bei allen weiteren Parameterkombinationen und Magnetfeldkombinationen – axial, transversal und überlagert (gekreuzt) – gefunden, bei denen (w)TVF und (w)SPI Lösungen untersucht wurden.

9.3.2 Stabilisierung des CCF Grundzustands

In der Abbildung 9.8 wurde bereits die Verschiebung des γ Punkts höherer Codimension und die Stabilisierung des CCF Grundzustands in einem rein axialen Feld, resultierend aus den Ergebnissen einer linearen Analyse (Shooting) für feste Wellenzahl $k = \pi$ diskutiert. In der Abbildung 9.9**(a)** sind nun die Bifurkationsschwellen der Wirbelstrukturen in rein transversalen Feldern ($s_x \neq 0, s_z = 0$) dargestellt, während **(b)** entsprechende Schwellen für rein axiale Felder ($s_x = 0, s_z \neq 0$) zeigt. All dies sind nun aber Resultate aus numerischen, nichtlinearen Rechnungen mit den vollen Feldgleichungen für $k = 3.927$ und verschiedenen R_2. Die Aufwärtsverschiebung der Bifurkationspunkte $R_{1,bif}$ ist in **(a)** und **(b)** deutlich zu erkennen. D.h. die Stabilisierung des CCF wächst *linear* mit den Kontrollparametern s_x^2 bzw. s_z^2, zumindest in der hier benutzten Niklas Näherung. Dies gilt für alle Bifurkationsschwellen von TVF, SPI, wTVF und wSPI Lösungen gleichermaßen. Die Steigungen der Kurven (Geraden) in **(a)** und **(b)** unterscheiden sich jedoch und hängen vom jeweiligen R_2 ab (Die genauen Werte sind in der Bildunterschrift zu finden).

Alle Daten der Abbildung 9.9**(a)** und **(b)**, die Veränderung von $R_{1,bif}$ mit R_2 und s_i ($i = x$ oder z) lassen sich gemäß folgender Formel schreiben:

$$R_{1,bif}(R_2, s_i) = R_{1,bif}(R_2 = 0, s_i) + \Delta(R_2)s_i^2. \tag{9.2}$$

Abbildung 9.9**(c)** und **(d)** zeigen wie die Steigungen Δ, die sich aus der Auftragung von $R_{1,bif}$ gegen s_i^2 in **(a)** and **(b)** ergeben, bei Veränderung von R_2 variieren. Man kann erkennen, dass Δ in beiden Feldkombinationen bei $R_2 = 0$ am größten ist. Dies bedeutet, dass der stabilisierende Effekt des CCF Grundzustands mit wachsendem s_i bei $R_2 = 0$ am stärksten ist.

Im Ganzen, hier betrachteten Parameterbereich, $-150 \leqslant R_2 \leqslant 50$, hat ein reines Transversalfeld einen schwächeren Einfluss auf die Onsets aller Strukturen, als ein rein axiales Magnetfeld, da gilt: $\Delta(R_2, s_x) < \Delta(R_2, s_z)$ (für $s_x = s_z$, d.h. gleich große Feldparameter, vgl. Ordinaten in **(c,d)**). Während ein rein axiales **H** Feld die Onsets stärker verschiebt, als ein rein transversales Feld, so besitzt das letztere doch einen stärkeren Einfluss auf die nichtlinearen, raumzeitlichen Eigenschaften der bifurkirenden Wirbelstrukturen (siehe Abs. 9.2 und 9.4).

Entscheidend ist aber die Tatsache, dass weder axiale, noch transversale oder aber beliebige Kombinationen dieser einen symmetriebrechenden Effekt im System hervorrufen. Konkret heißt dies, dass die Onsets von L- und R-SPI Strukturen, die Bifurkationsschwellen für beliebige Magnetfelder *identisch* sind.

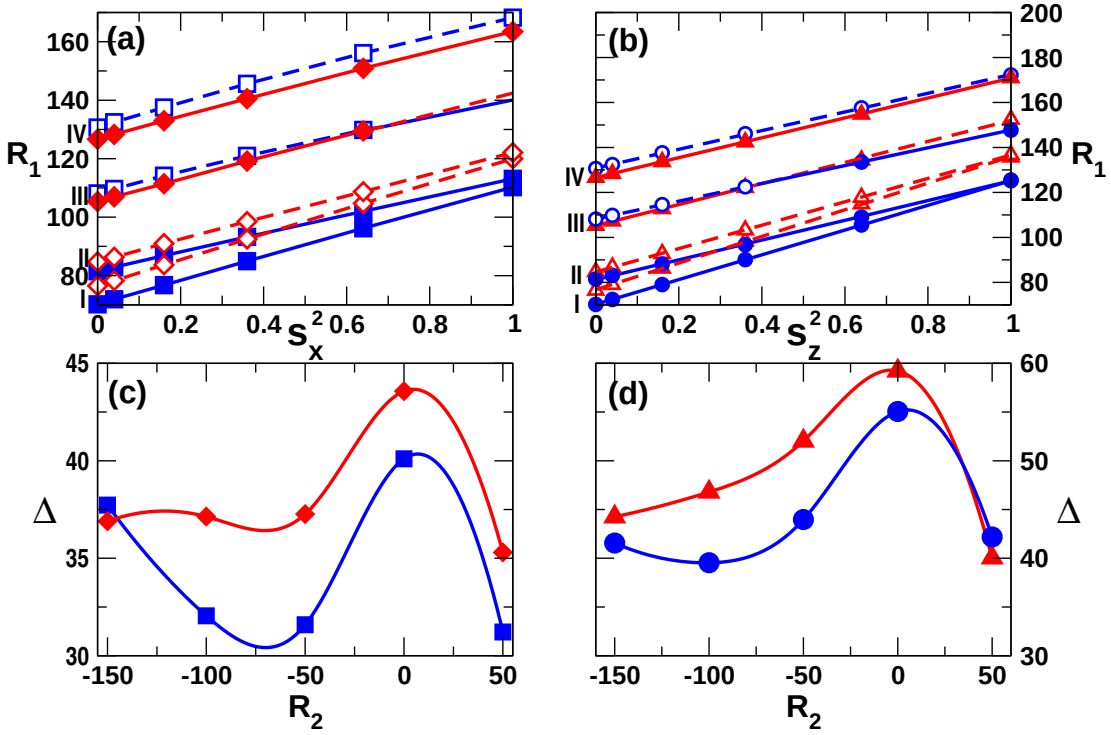


Abbildung 9.9 – Stabilisierung des CCF Grundzustands durch rein transversale und rein axiale Magnetfelder. **(a)** Bifurkationsschwellen, $R_{1,bif}$, der Wirbelstrukturen gegen s_x^2 in transversalem Magnetfeld für $R_2 = 0$**(I)**, -50**(II)**, -100**(III)** und -150**(IV)**. **(b)** Analoge Darstellung der Bifurkationsschwellen, $R_{1,bif}$, für axiales Magnetfeld gegen s_z^2 für gleiche R_2 Werte wie in **(a)**. Die Steigungen, $\Delta(R_2)$, (vgl. Gl. (9.2)) der Kurven in **(a)** und **(b)** sind in **(c)** und **(d)** gegen R_2 für die bifurkierenden Strukturen ungeachtet ihrer Stabilität dargestellt. Durchgezogene [gestrichelte] Linien in **(a,b)** mit vollen [leeren] Symbolen repräsentieren stabil [instabil] bifurkierende Wirbelstrukturen: TVF(●), SPI (▲), wTVF (■) und wSPI (♦). Alle diese Resultate wurden durch nichtlinear Rechnungen mit $k = 3.927$ und $\eta = 0.5$ erhalten.

9.4 Wavy Taylor Wirbel im Magnetfeld

Nichtrotierende, phasenfixierte wTVF im Magnetfeld

Die allgemeinen topologischen Strukturen der verschiedenen Wirbellösungen wurden bereits ausführlich in Abschnitt 9.2 diskutiert. An dieser Stelle liegt der Fokus auf der Dynamik der Deformationen von TVF zu wTVF Strukturen durch ein transversales oder gekreuztes Magnetfeld.

Die klassischen wTVF Lösungen (56; 55; 54; 66) entstehen durch Deformationen der TVF Zustände in der Art und Weise, dass die Wirbelschläuche in axialer Richtung wellenförmig (wavyartig) deformiert werden und damit als Ganzes in z Richtung auf- und abwärts gezogen werden. Zudem *rotiert* diese deformierte Struktur mit einer charakteristischen Frequenz in azimutaler Richtung (vgl. auch Film 11.avi).

Ein Magnetfeld mit endlicher Transversalkomponente deformiert die toroidal geschlos-

senen Wirbel auf eine ganz *andere* Art und Weise, wie etwa in den Abbildung 9.6**(1c)** und **(1d)** in Abschnitt 9.2.2 gesehen. Die Schläuche der Isoflächen der azimutalen Vortizität bleiben an gewissen φ Positionen nahezu unverändert im Vergleich zu den Schläuchen des reinen TVF Zustands. An anderen lokalisierten φ Positionen hingegen sind sie aufgeweitet und vergrößert und bei wiederum anderen stark zusammengezogen. Dieses Muster von Variationen der Schlauchdicke ist azimutal *gepinnt* und rotiert *nicht* (vgl. auch Filme 9.avi und 10.avi) – d.h. die durch das **H** Feld erzeugte wTVF Struktur ist stationär und nicht rotierend, wie der rotationssymmetrische TVF Zustand. Somit existiert bei diesen Strukturen auch *keine* charakteristische Frequenz. Ebenso zeigen transversale und überlagerte Felder gleiches Verhalten, wie in den Abbildung 9.6**(1c)** und **(1d)** zu erkennen. In beiden Fällen beobachtet man stationäre Wavy Taylor Wirbel Strukturen. Der einzige Unterschied besteht in der Stärke und der Ausprägung der Deformation, die sich von denen durch rein axiales Feld hervorgerufenen unterscheiden (vgl. Modenanregung und Abb. 9.9**(c,d)**). Gekreuzte Felder führen im Allgemeinen zu stärkeren Deformationen (siehe hierzu auch Abb. 9.6).

9.5 Vergleich: Wavy Strukturen mit und ohne Magnetfeld

Um die, durch ein Magnetfeld erzeugten Wavy Strukturen von den klassischen Wavy Zuständen besser unterscheiden zu können, wird in diesem Abschnitt ein konkreter Vergleich, qualitativ und quantitativ, zwischen diesen vorgenommen. Neben der Tatsache, dass es sich bei den, durch ein Magnetfeld erzeugten, wTVF Lösungen, anders als bei den klassischen, um stationäre und nichtrotierende Strukturen handelt (vgl. Abschnitt 9.4), so unterscheiden sich diese auch deutlich in ihrer Form von den bisher in der Literatur bekannten und diskutierten Wavy Zuständen (vgl. auch Kap. 4, 5).

Die Unterschiede lassen sich hierbei am besten bei Betrachtung der, in Abbildung 9.10 dargestellten, $\varphi - z$ Plots des radialen Geschwindigkeitsfeldes u in Spaltmitte ($r = 0.5$, Farbkodierung: dunkel=Outflow, hell=Inflow) erkennen. Diese zeigen verschiedene Wavy Strukturen bei unterschiedlich angelegten Magnetfeldern. **(1)** Toroidal geschlossene wTVF Zustände, **(2)** helikal offene wSPI Strukturen. Zum Vergleich stellt **(a)** jeweils eine klassische Wavy Struktur (wTVF **(1)** und wSPI **(2)** ohne Magnetfeld) dar, während **(b)** eine durch rein axiales und **(c)** durch gekreuzte Magnetfelder erzeugte Wavy Strukturen zeigen.

Am deutlichsten wird der Unterschied der einzelnen Strukturen, bei Betrachtung der toroidal geschlossenen wTVF Lösungen. Während die klassischen wTVF Zustände **(1a)** in axialer Richtung dahingehend deformiert sind, dass sie abwechselnd periodisch nach oben und unten (d.h. in z Richtung) verzerrt sind (somit beschreiben die roten, $u = 0$, Niveaulinien eine wellenförmige Bewegung, bleiben dabei allerdings parallel zueinander) und als Ganzes in φ Richtung rotieren, verhalten sich die wTVF Strukturen **(1b,1c)**, die durch ein Magnetfeld erzeugt werden ganz anders. Bei ihnen findet die Verzerrung lokalisiert statt, d.h. an bestimmten fixierten φ Positionen werden die Wirbel dieser wTVF Zustände zusammengeschnürt, wohin gegen sie an anderen fixierten φ Positionen aufgeweitet und gedehnt werden. In **(1b)** zeigt sich dieses Verhalten darin, dass sich die roten, $u = 0$, Niveaulinien teilweise aufeinander zubewegen, bzw. voneinander entfernen, sie liegen also, anders als bei den klassischen wTVF Lösungen, *nicht* mehr parallel vor. Wie bereits in Abschnitt 9.4 diskutiert, sind diese zudem in ihrer Phase gepinnt. Auch im Fall gekreuzter Felder, wie in **(1c)** zu sehen, bleibt dieses Verhalten gut erkennbar. Hinzu kommt hierbei allerdings noch eine leichte wellenförmige Modulation des Musters als Ganzes, dass dem der klassischen wTVF Lösung ähnelt. Dies rührt von den, durch die gekoppelten Felder,

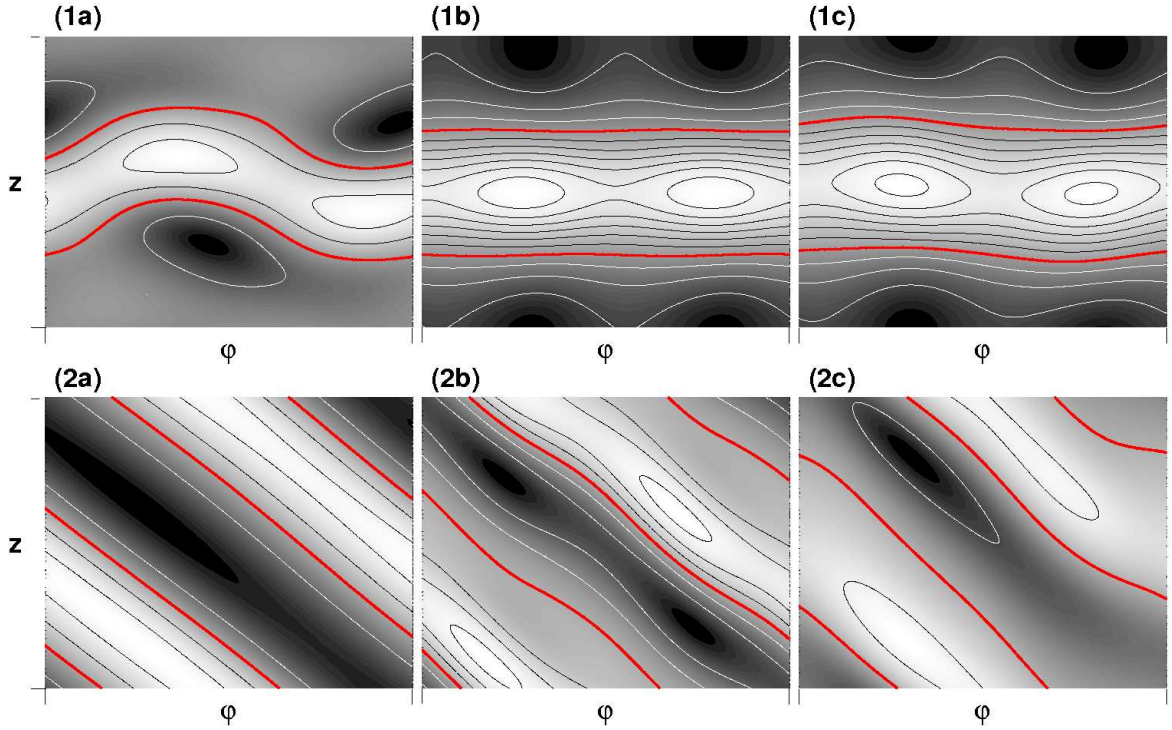


Abbildung 9.10 – Vergleich zwischen klassischen Wavys **(a)** und den, durch ein Magnetfeld erzeugten, Wavy Strukturen **(b,c)**, (w)TVF **(1)** und (w)SPI **(2)**. Dargestellt sind $\varphi - z$ Plots des radialen Geschwindigkeitsfeldes u in Spaltmitte ($r = 0.5$, Farbkodierung: Dunkel=Outflow, hell=Inflow). Die rote Linie markiert die Null Niveaulinie, für die gilt: $u = 0$. Kontrollparameter: $k = 3.927, \eta = 0.5$; **(1)** $R_1 = 90, R_2 = 0$; **(2)** $R_1 = 160, R_2 = -150$ und weiter **(b)** $s_x = 0.6$, $s_z = 0.0$; **(c)** $s_x = 0.6$, $s_z = 0.6$. Gut zu erkennen sind die unterschiedlichen Verformungen in den Wavy Strukturen, insbesondere bei den wTVF Zuständen **(1)**. Der $\varphi - z$ Plot in **(1a)** zeigt die typische, klassische wellenförmige Wavy Struktur (rote $u = 0$ Isolinien verlaufen hier so gut wie parallel), während in **(1b,1c)** eine periodische Aufweitung und Zusammenziehen zu erkennen ist. Gleiches Verhalten gilt auch bei den wSPI Zuständen **(2b,2c)**, allerdings mit schwächerer Ausprägung. Die beiden Filme 9.avi und 10.avi zeigen dieses Verhalten bei einmaliger Umwanderung des Zylinders in azimutaler Richtung für wTVF Lösungen in rein transversalen und gekreuzten Magnetfeldern. Zum Vergleich zeigt der Film 11.avi einen klassischen wTVF Zustand, wie er in Kapitel 4 diskutiert wurde, ohne extern angelegtes Magnetfeld.

neu auftretenden Moden ($m = n \pm 1$, siehe Abs. 8.3) her. Wie in **(1b)** handelt es sich aber auch in **(1c)** immer noch um eine stationäre und nicht rotierende Strukturen.

Die Unterschiede der, durch ein Magnetfeld generierten, wSPI Lösungen **(1c,1d)** im Vergleich zu den klassischen wSPI **(2a)** Zuständen ist absolut analog dem gerade diskutierten Fall der wTVF Lösungen **(1)**. Aufgrund der bereits vorliegenden Rotation und demzufolge auch einer endlichen Frequenz der reinen SPI Strukturen und der wSPI Zustände ohne angelegtes Magnetfeld ist dieser Effekt aber schwächer ausgeprägt und deshalb in den $\varphi - z$ Plots nicht so deutlich zu erkennen. Entscheidend ist aber, dass im Fall endlichen Magnetfeldes **(2b,2c)** die roten $u = 0$ Niveaulinien nicht mehr nur parallel wellenförmig

deformiert sind, sondern teilweise aufeinander zu- bzw. voneinander weglaufen, analog bei wTVF Lösungen im Magnetfeld.

9.6 Frequenzen von SPI und wSPI Strukturen

Die nichtrotierenden, Phasen gepinnten wTVF Lösungen werden durch ein magnetisches Feld aus den rotationssymmetrischen, stationären TVF Zuständen erzeugt. Nun ist es interessant, wie ein Magnetfeld eine Struktur beeinflusst, die bereits bei $\mathbf{H} = 0$ eine endliche Frequenz besitzt. In diesem Abschnitt wird deshalb untersucht, wie die Spiralfrequenzen $\omega_{m,n}$ und die damit verbundenen axialen Rotationsgeschwindigkeiten, durch verschiedene Magnetfelder geändert werden.

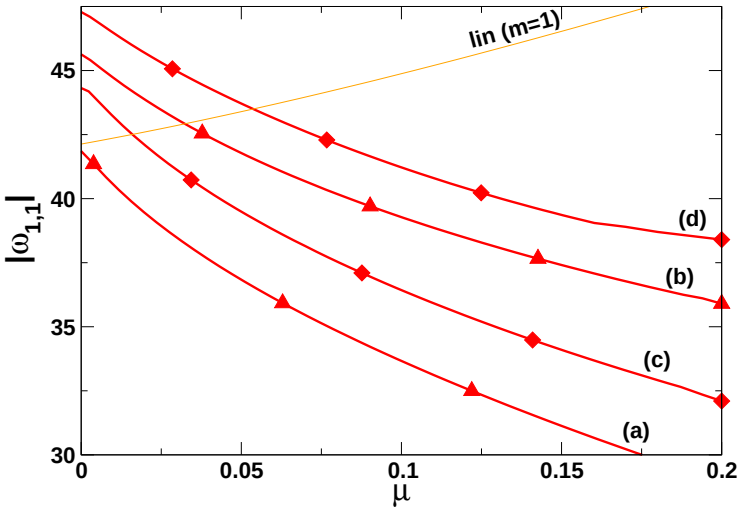


Abbildung 9.11 – Bifurkationsdiagramm der Frequenzen $|\omega_{1,1}|$, von (w)SPI Zuständen, mit denen die komplexen Modenamplituden $|u_{1,1}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte ($r = 0.5$) oszillieren, aufgetragen gegen den reduzierten Abstand, μ (vgl. Gl. (9.1)) in R_1, von der jeweiligen Bifurkationsschwelle. Die zugehörigen Bifurkationsdiagramme der Moden $|u_{1,1}|$ sind in Abbildung 9.2 zu sehen. Linien mit Dreiecken (▲) [Rauten, (♦)] charakterisieren SPI [wSPI] Lösungen. Die dünnen Linien zeigen die linearen Spiralfrequenzen ($m = 1$) ohne Magnetfeld $\mathbf{H} = 0$, d.h., den Imaginäranteil des SPI Eigenwertes der um den CCF linearisierten NSE. **(a)** $s_x = 0.0$, $s_z = 0.0$; **(b)** $s_x = 0.0$, $s_z = 0.6$; **(c)** $s_x = 0.6$, $s_z = 0.0$; **(d)** $s_x = 0.6$, $s_z = 0.6$. Weitere Kontrollparameter sind: $k = 3.927, R_2 = -150, \eta = 0.5$.

In der Abbildung 9.11 sind die Frequenzen $|\omega_{1,1}|$ der komplexen Modenamplituden $|u_{1,1}|$ des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte gegen die reduzierten Abstände μ (vgl. Gl. (9.1)) in R_1 von der zugehörigen Bifurkationsschwelle aufgetragen. Die zugehörigen Bifurkationsdiagramme der Moden $|u_{1,1}|$ entsprechender SPI und wSPI Lösungen sind in Abbildung 9.2 zu sehen. Anhand Abbildung 9.11 lassen sich drei wichtige Resultate festhalten:

(1) Ein erstes ganz offensichtliches Resultat ist, dass die Frequenzen durch jede Art von Magnetfeld, gleich dessen Orientierung, anwachsen.

(2) Zweitens bleibt festzustellen, dass die Frequenzen von SPI und wSPI Zuständen stärker durch ein axiales, als durch ein gleich großes transversales Magnetfeld, analog der Bifurkationsschwellen, verschoben werden.

(3) Und drittens bleibt das Bifurkationsverhalten von SPI und wSPI Lösungen bei Variation von μ qualitativ praktisch unverändert. In allen Fällen werden die Frequenzen mit wachsendem μ zunächst kleiner, für größere μ wachsen sie dann aber, analog den klassischen SPI Lösungen, wieder an. Dieses Verhalten der Frequenzen, der nichtlinearen SPI und wSPI Strukturen steht im Gegensatz zu den linearen Frequenzen der SPI Zustände, die aus dem Imaginärteil des komplexen Eigenwerts der linearen SPI Störungen des CCF, der mit wachsendem μ linear (orange Linie) anwächst, berechnet werden.

9.7 Übergänge von wTVF zu wSPI im Magnetfeld

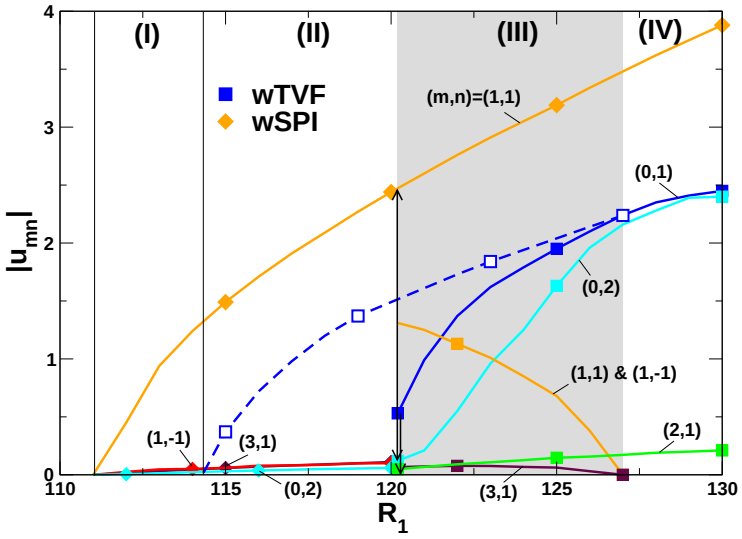
Nachdem sich der erste Teil dieser Arbeit sehr lang und ausführlich mit Übergängen zwischen den beiden primär bifurkierenden Strukturen, TVF und SPI, welche über Wavy Strukturen ablaufen, befasst hat, sollen diese Übergänge nun auch noch kurz qualitativ für Ferrofluide, unter dem Einfluss externer Magnetfelder, untersucht werden. Auch hierbei sind die transversalen Felder erneut von größerem Interesse, da in diesem, wie oben diskutiert, *keine reinen* Strukturen mehr existieren. Somit sollte auch das zugehörige Modenspektrum, der auch ohne **H** Feld bereits 'komplexen' wTVF Strukturen nochmals komplizierter bzw. vielfältiger sein. Insbesondere steht hierbei das Bifurkationsverhalten bei Variation der beiden Magnetfeldparameter, s_x und s_z, im Vordergrund. Es zeigte sich, dass auch diese jeweils seperat in der Lage sind einen Übergang von (w)TVF zu (w)SPI Zuständen hervorzurufen.

9.7.1 Bifurkation in R_1

Zunächst starten wir mit einem Bifurkationsdiagramm in R_1, analog der Abbildung 4.3 aus Kapitel 4, wo der Übergang von reinen TVF über wTVF Zustände zu reinen SPI Lösungen diskutiert wurde. In Abbildung 9.12 ist hierzu ein analoges Bifurkationsdiagramm, bei sonst identischen Parametern ($R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$), zu sehen, mit dem einzigen Unterschied, dass in diesem Fall ein endliches Transversalfeld mit $s_x = 0.4 (s_z = 0)$, vorliegt. Hieraus resultiert auch eine, wie bereits in Abschnitt 9.3.2 diskutiert, Verschiebung der Onsets. Qualitativ ist dieses, in der Abbildung 9.12 dargestellte Bifurkationsverhalten vollkommen identisch mit dem der Abbildung 4.3. Ein Unterschied besteht allerdings darin, dass bereits Ausgangs- und Endstruktur als eine Wavy Struktur vorliegen.

Startet man in der Abbildung 9.12 rechts in Gebiet **(IV)**, so liegt ein, durch endliches transversales Magnetfeld hervorgerufener, wTVF (■) Zustand vor. Dieser ist im Wesentlichen, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, durch die dominante Modenamplitude $(0, 1)$ charakterisiert. Zusätzlich sind wie zuvor aber noch die erste höher harmonische Mode $(0, 2)$, sowie die größte, durch das Magnetfeld angeworfene, Mode $(2, 1)$ mit eingetragen. Interessanterweise liegt hier ein Fall vor, bei dem die Amplitude der ersten höher harmonischen Mode $(0, 2)$ in etwa gleich groß der Amplitude der dominanten Mode $(0, 1)$ ist. Dies war bei gleichen Kontrollparametern ohne Magnetfeld *nicht* der Fall.

Vermindert man nun R_1, so wird die zunächst stabil vorliegende wTVF Lösung bei $R_1 \approx 127$ gegenüber einer anderen wTVF Struktur **(III)**, analog dem System ohne **H** Feld, instabil. Dabei wachsen die Moden, $(1, 1)$ und $(1, -1)$, mit identischen Amplituden



Bifurkationen verschiedener Wirbelstrukturen beim Übergang wTVF→wTVF→wSPI in einem rein transversalen Feld, $s_x = 0.4, s_z = 0.0$, in Abhängigkeit von R_1 bei $R_2 = -100, k = 3.927, \eta = 0.5$ (vgl. auch Abb. 4.3 in Kap. 4).

Gebiet	I	II	III	IV
wTVF	-	i	s	s
wSPI	s	s	s	s

stabil (s) ,
instabil (i) ,
nicht existent (-) .

Abbildung 9.12 – Durchgezogene [gestrichelte] Linien mit gefüllten [leeren] Symbolen charakterisieren stabile [instabile] Lösungen. Dargestellt sind die Amplituden der dominanten, sowie der ersten höher harmonischen Moden des radialen Geschwindigkeitsfeldes $|u_{m,n}|$ in der Mitte des Spaltes (r=0.5) für die Strukturen: wTVF $(m,n) = (0,1)$ und L-wSPI $(m,n) = (1,1)$. Weiter Modenindizes sind in der Abbildung eingetragen. Anders als im periodischen System (pbc) ohne **H** Feld ist die Wavy Lösung des wTVF nicht nur dadurch ausgezeichnet, dass bei ihr $u_{0,1} \neq 0$ und $u_{1,\pm 1} \neq 0$, während für die reinen Strukturen gilt: $u_{0,1}^{SPI} = 0 = u_{1,\pm 1}^{TVF}$. Durch das Magnetfeld existieren die reinen Lösungen sowieso schon nicht mehr und eine Vielzahl weiterer Moden ist im Fourierspektrum angeregt (siehe auch Abs. 8.3), so dass auch in **(IV)** ein wTVF Zustand vorliegt. Bei den wTVF Lösungen **(III)** die den Übergang zwischen wTVF **(IV)** und wSPI Zuständen **(I,II)**, im Fall endlichen Transversalfeldes vermitteln ist vielmehr die absolute Größe der einzelnen angeregten Moden entscheidend. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist in den Bereichen **(II,III,IV)** auch darauf verzichtet worden alle verschiedenen Moden, der parallel existierenden, Lösungen einzutragen. D.h. abgesehen von der dominanten wSPI Mode, $(1,1)$, und der wTVF Mode, $(0,1)$, die komplett eingetragen sind, zeigt das Bifurkationsdiagramm nur solche Moden, wie sie bei Start in einer wTVF Lösung **(II)** (rechts in **(IV)**) und Verminderung von R_1 (nach links) auftreten.

aus Null heraus an, bis schließlich auch dieser wTVF Zustand bei $R_1 \approx 120.2$ seine Stabilität verliert und eine der beiden Modenamplituden (hier für eine R-wSPI, $(1,-1)$) auf

Null zurückfällt und die andere auf den endlichen Wert der einzig stabil im System verbleibenden wSPI Lösung (hier: L-wSPI mit dominanter $(1,1)$) anwächst **(II,I)**. Wie im Fall ohne Magnetfeld handelt es sich auch hierbei um einen transienten Übergang (durch Pfeile in Abb. 9.12 angedeutet). Neben den beiden, die wSPI Lösungen charakterisierenden Moden $(1,\pm 1)$, werden noch eine Vielzahl weiterer Moden am Bifurkationspunkt der wTVF Lösung bei $R_1 \approx 127$ angeworfen. Dies ist auf die nichlinearen Kopplungen, der durch das Magnetfeld hervorgerufenen großen Modenanzahl, zurückzuführen. Diese sind hier aber nur von untergeordnetem Interesse und werden deshalb nicht alle im Einzelnen aufgeführt. Lediglich die Moden, die auch in der wSPI Struktur existieren sind in Abbildung 9.12 mit aufgenommen. Desweiteren wurde, aus Gründen der Übersichtlichkeit, in den Bereichen **(II,III,IV)** auch darauf verzichtet alle verschiedenen Moden der parallel existierenden Lösungen einzutragen. D.h. abgesehen von der dominanten wSPI Mode $(1,1)$ und der wTVF Mode $(0,1)$, die komplett eingetragen sind, zeigt das Bifurkationsdiagramm nur solche Moden, wie sie bei Start in einer wTVF Lösung (**(IV)**, rechts) und Verminderung von R_1 (nach links) auftreten.

Nach dem Sprung (an der Grenze von **(III)** nach **(II)**) verbleibt in dem System eine wSPI Lösung (hier: L-wSPI), die auch hier über den gesamten Parameterbereich **(I)-(IV)** stabil vorliegt. Analog dem klassischen System gibt es auch hier eine Aufteilung in mono- und bistabile Bereiche der verschiedenen Lösungszustände. Im Bereich **(I)** existieren nur monostabile wSPI Strukturen, in **(II)** gibt es neben den stabilen wTVF noch instabile wSPI Zustände, während in **(III)** Bistabilität zwischen wSPI und wTVF Lösungen vorliegt, die auch in **(IV)** erhalten bleibt! Man beachte, dass sich die wTVF Strukturen in Region **(III)** von den übrigen wTVF Lösungen drastisch unterscheiden, da es sich hierbei um rotierende Strukturen handelt, wohingegen die stabilen wTVF in **(IV)** stationäre, nicht rotierende Zustände repräsentieren. Hierbei handelt es sich um die, zuvor diskutierten, *nur* durch ein Magnetfeld erzeugten wTVF Zustände.

9.7.2 Bifurkation in s_x und s_z

Interessanter als, das soeben diskutierte, Bifurkationsverhalten in R_1 ist die Abhängigkeit des Übergangs zwischen (w)TVF und (w)SPI Zuständen von den Magnetfeldparametern s_x und s_z. Hierzu sind in Abbildung 9.13 die Bifurkationsdiagramme der Amplituden dominanter Moden $|u_{m,n}|$ **(1)**, des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte sowie deren zugehörige Frequenzen **(2)** bei Veränderung der Magnetfeldparameter, s_x und s_z, dargestellt.

Betrachtet man zunächst rein axiale Felder **(2)** ($s_x = 0$, d.h. die Strukturen, TVF und SPI, selbst bleiben unverändert), wie in der Abbildung 9.13**(b)** zu sehen, so verhält sich der Übergang von TVF zu SPI Lösungen, bei Variation von s_x analog demjenigen bei Änderung des externen Durchflusses Re der Abbildung 4.17. Die wSPI **(a)** bzw. SPI **(b)** Zustände liegen im gesamten dargestellten Parameterbereich als stabile Lösung vor. Zunächst bleibt die Amplitude der $(0,1)$ Mode des wTVF Zustands dominant, bis schließlich die beiden Modenamplituden $(1,\pm 1)$ auf größere Werte anwachsen ($s_z \approx 0.3$) und das System schließlich einen transienten Übergang zur SPI Lösung ($s_z \approx 0.46$) vollzieht. Die zugehörigen Frequenzen der wTVF Lösung verhalten sich wie die Frequenzen der reinen SPI Struktur, allerdings bei etwas kleineren absoluten Werten – sie verlaufen weitestgehend parallel. In beiden Fällen verringern sich diese mit Zunahme von s_z.

Qualitativ ist auch das Bifurkationsverhalten beim Übergang von wTVF zu wSPI Strukturen über wTVF Lösungen in einem Magnetfeld mit endlicher Transversalkomponente **(1)**($s_x \neq 0$), identisch demjenigen des axialen Feldes, bzw. bei Auferlegen von Durch-

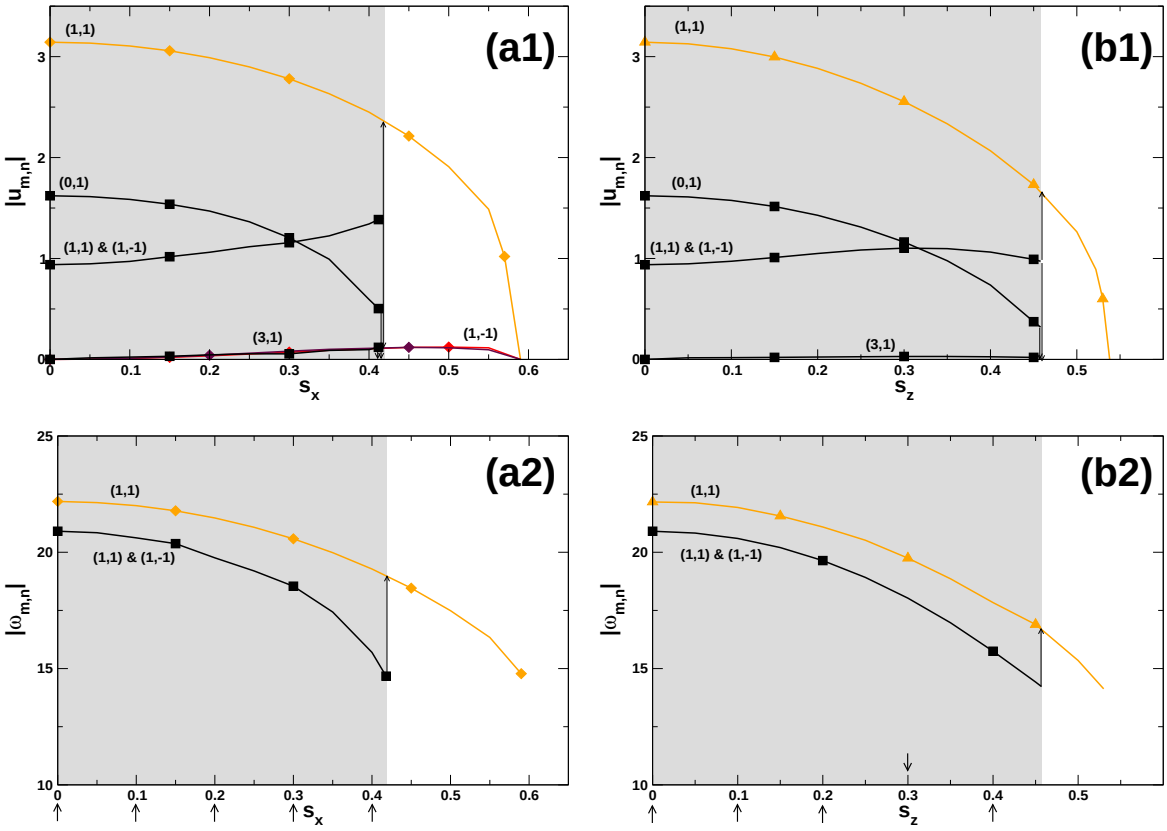


Abbildung 9.13 – Bifurkationsdiagramme der Amplituden dominanter Moden $|u_{m,n}|$ **(1)** des radialen Geschwindigkeitsfeldes in Spaltmitte ($r = 0.5$), sowie deren zugehörigen Frequenzen $|\omega_{m,n}|$ **(2)** aufgetragen gegen die Magnetfeldparameter s_x **(a)** und s_z **(b)** beim Übergang (w)TVF→wTVF→(w)SPI. Orange Kurven mit Dreiecken (▲)[(♦)] stehen für die dominante SPI Mode, schwarze Quadrate (■) für die wTVF Lösung. Die genauen Modenindizes (m, n) sind in der Abbildung eingetragen. Die Pfeile unterhalb der Abszisse der Frequenzen kennzeichnen Positionen für die in Abbildung 9.14 das zugehörige Modenspektrum dargestellt ist. Weitere Kontrollparameter sind: $k = 3.927, R_2 = -100, R_1 = 120, \eta = 0.5$, **(a)** $s_z = 0$, **(b)** $s_x = 0$.

fluss. Der einzige Unterschied besteht in der Existenz der durch **H** zusätzlich angeregten Moden im Fourierspektrum, wie bereits in Abbildung 9.13 gesehen. Auch die Frequenzen zeigen ein ähnliches Verhalten, wenn gleich sie auch nicht ganz so parallel, insbesondere bei Annäherung des transienten Übergangs, wie im Fall mit s_z **(2)** als Kontrollparameter, verlaufen.

Ein gravierender Unterschied zu dem Bifurkationsverhalten der wTVF Strukturen bei *Re* Variation besteht aber darin, dass weder ein transversales noch ein axiales oder aber beliebig kombinierte Felder eine symmetriebrechende Wirkung auf das System besitzen. Konkret heißt dies, dass die Amplituden der beiden Moden, $(1, 1)$ und $(1, -1)$, in der wTVF Struktur bis hin zum transienten Übergang *identisch* sind (dies gilt für endliches *Re*, wie z.B. in Abb. 4.17 bereits gesehen, *nicht*!).

Die Abbildung 9.14 zeigt das Modenspektrum von wTVF Strukturen für verschiede-

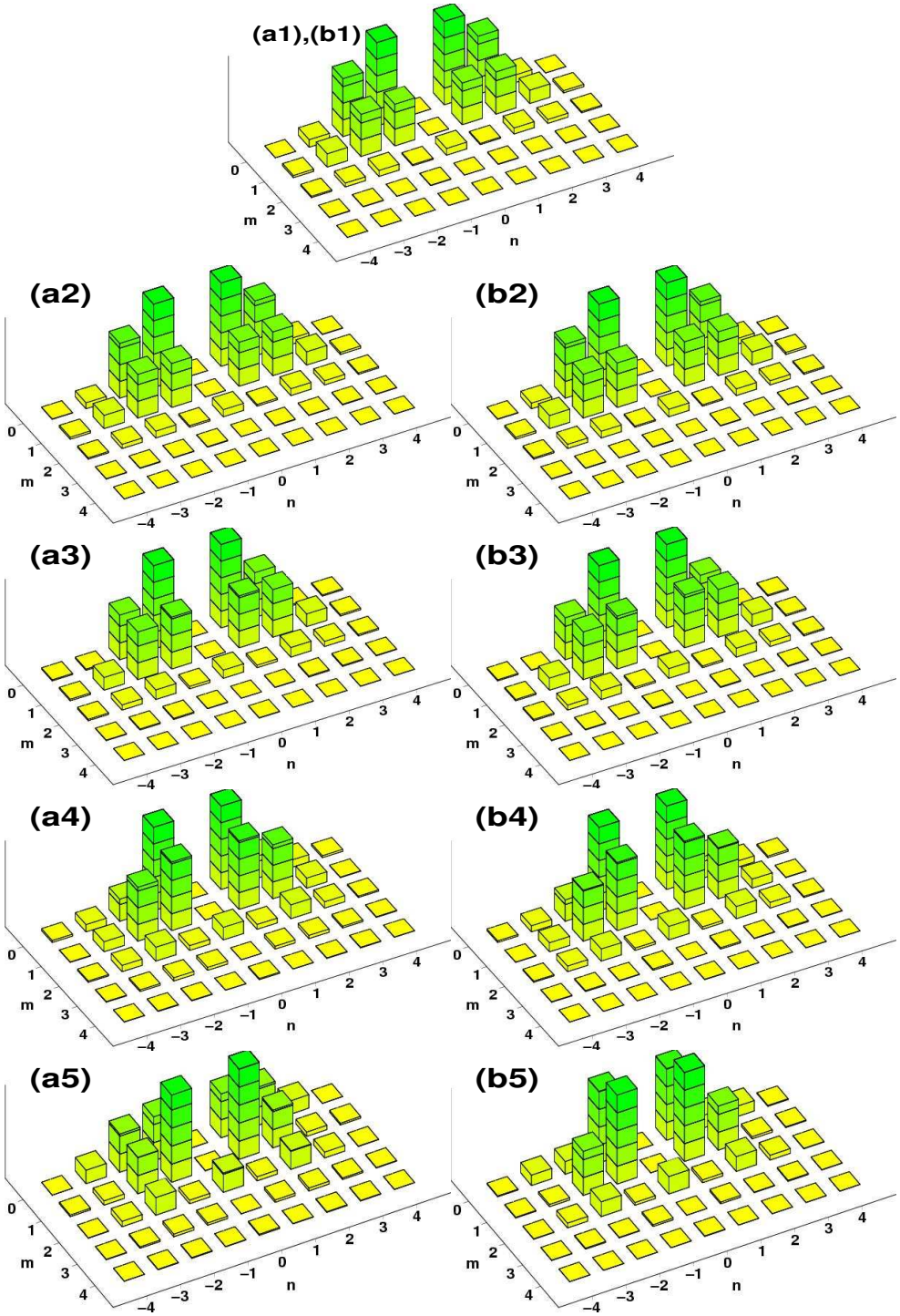


Abbildung 9.14 – Modenspektren verschiedener Wavy Strukturen, während des in Abbildung 9.13 dargestellten Übergangs (zugehörigen Positionen sind dort durch Pfeile unterhalb der Abszisse der Frequenzen **(a2,b2)** gekennzeichnet). Für rein transversales Feld **(a)** $s_x \neq 0, s_z = 0$ und rein axiales Feld **(b)** $s_x = 0, s_z \neq 0$. **(1)** klassischer wTVF Zustand ohne Magnetfeld: **(2)** $s_i = 0.1$, **(3)** $s_i = 0.2$, **(4)** $s_i = 0.3$, **(5)** $s_i = 0.4$ mit $i \in \{x, z\}$. Weitere Kontrollparameter sind: $k = 3.927, R_2 = -100, R_1 = 120, \eta = 0.5$.

ne, durch Pfeile in Abbildung 9.13 markierte, Parameter. In **(a)** [**(b)**] sind die entsprechende wTVF Srukturen bei Variation eines rein transversalen [axialen] Magnetfeldes für $s_x = 0,1...0,4$ [$s_z = 0,1...0,4$] **(2,3,4,5)** dargestellt. **(1)** zeigt den klassischen wTVF Zustand ohne Magnetfeld. Beide Typen von Magnetfeldern **(a,b)** zeigen qualitativ gleiches Verhalten bei Erhöhung des entsprechenden Feldparameters $s_i, i \in \{x, z\}$. Der Anteil der $m = 0$ Moden im Spektrum nimmt kontinuierlich ab, während die $m \neq 0$ Moden, insbesondere die $|m| = 1$ Anteile weiter anwachsen. Wie in **(4a,5a)** zu erkennen sind in transversaler Magnetfeldkonfiguration, aufgrund der vorhandenen Kopplungen auch noch $m = 3$ Moden erkennbar stärker angeregt als im axialen Feld **(b4,b5)**.

9.8 Strömungsmuster von Ferrofluiden im endlichen System ($\Gamma = 10$)

Zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch kurz die Strömungsmuster von Ferrofluiden unter dem Einfluss externer Magnetfelder im endlichen System betrachtet werden. Die genauen unterschiede von pbc und rbc Randbedingungen sind bereits ausführlich in Kap. 5 diskutiert worden. Exemplarisch wurde hierzu ein $\Gamma = 10$ System gewählt. Die nun folgenden Resultate sind erst der Anfang und ebenso Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen mit dem Ziel die in der Simulation gefundenen Wavy Strukturen auch in experimentellen Untersuchungen zu beobachten und qualitativ, wie auch quantitativ zu analysieren.

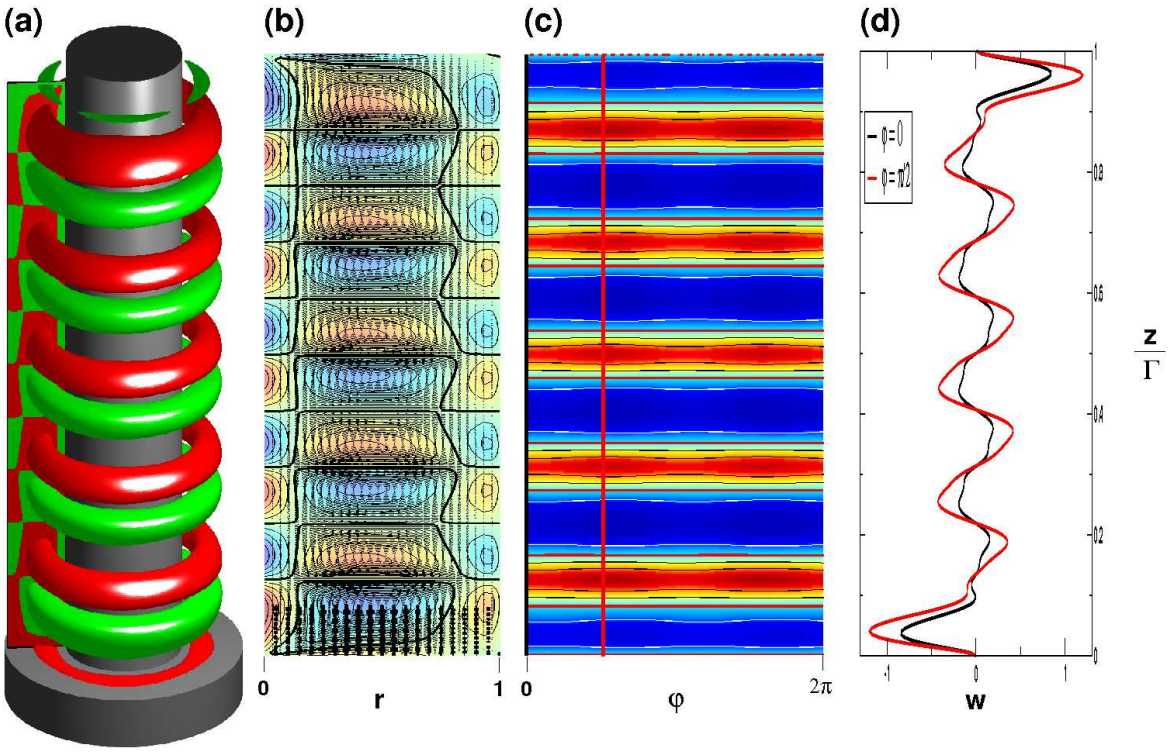


Abbildung 9.15 – Visualisierung des Strömungsmusters eines Ferrofluids im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem rein transversalen Magnetfeld. **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 35$ (rot: positiv und grün: negativ), **(b)** Vektorplots der beiden Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in einer $\varphi =$ konst. Ebene mit farbkodierter azimutaler Vortizität (rot=Max, blau=Min). **(c)** $\varphi - z$ Plots der Strukturen bei $r = 0.5$ mit farbkodiertem radialem u Feld (rot=Max, blau=Min). **(d)** Axiales w Feld an zwei verschiedenen Positionen, $\varphi = 0, \pi/2$, wie in **(c)** durch die schwarze und rote Linie markiert. Kontrollparameter: $k = 2.78, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.0, \eta = 0.5$.

In den beiden Abbildung 9.15 und 9.17 sind durch ein rein transversales ($s_x \neq 0, s_z = 0$), so wie durch ein gekreuztes ($s_x \neq 0, s_z \neq 0$) Magnetfeld, erzeugte wTVF Zustände in einem endlichen System mit $\Gamma = 10$ dargestellt. In **(a)** sind hierbei erneut Isoflächen der azimutalen Vortizität ($\Omega_\varphi = \pm 35$)und in **(b)** Vektorplots der beiden Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in einer $\varphi =$ kons. Ebene mit farbkodierter azimutaler Vortizität (rot=Max, blau=Min)

dargestellt. **(c)** zeigt $\varphi - z$ Plots der Strukturen bei $r = 0.5$ mit farbkodiertem radialem u Feld (rot=Max, blau=Min) und in **(d)** ist das axiale w Feld an zwei verschiedenen Positionen $\varphi = 0, \pi/2$, wie in **(c)** durch die schwarze und rote Linie markiert, dargestellt. In beiden Fällen handelt es sich um wTVF Strukturen mit drei Wirbelpaaren im Bulk, und einer Wellenzahl von $k \approx 2.78$(Abb. 9.16), bzw. $k \approx 2.85$(Abb. 9.18) im Bulk. Zudem ist in beiden Fällen jeweils ein Ekman Wirbel Paar am oberen und eines am unteren Deckel vorhanden. Der kleine Unterschied in den Wellenzahlen rührt von der leicht unterschiedlichen Ausdehnung ebene dieser, an den Rändern vorliegenden Ekman Wirbel, her. In beiden Fällen ist gut zu erkennen, dass auch diese Ekman Wirbel durch die angelegten Felder deutlich deformiert werden.

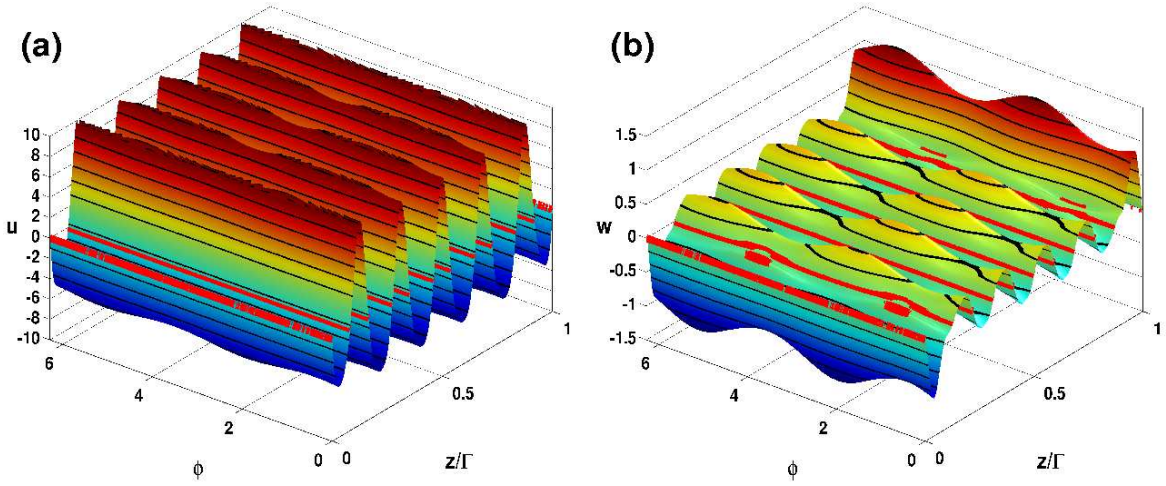


Abbildung 9.16 – Visualisierung der Strömung eines Ferrofluids für **(a)** u und **(b)** w Feld des wTVF Zustands im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem rein transversalen Magnetfeld. Kontrollparameter: $k = 2.78, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.0, \eta = 0.5$.

Betrachtet man die in **(c)** dargestellten $\varphi - z$ Plots der Strukturen mit farbkodiertem radialem u Feld, so erkennt man in Analogie zum periodischen System, dass ein rein transversales Feld (Abb. 9.15) die Wirbel nur in azimutaler Richtung periodisch zusammenschnürt und aufweitet, aber nicht axial verschiebt. Dies ist auch im w Feld der Struktur **(d)** gut zu erkennen, in dem die Amplituden bei den beiden φ Positionen deutlich unterschiedlich sind, die axiale Position der Minima und Maxima aber übereinstimmen. Ebenso erkennt man in Abbildung 9.15**(c)** die in gekreuzten Feldern vorhandene zusätzliche axiale Verschiebung der Wirbel, wie sie im periodischen bereits diskutiert wurde. Diese ist auch in **(d)** für die Verschiebung der axialen Positionen der Minima und Maxima des w Feldes ablesbar.

Um einen besseren Eindruck der Variation der Struktur zu erhalten, sind in den beiden Abbildungen 9.16 und 9.18 die beiden Felder u **(a)** und w **(b)** über der $\varphi - z$ Ebene in Spaltmitte dargestellt.

Alles in allem kann man sagen, dass sich die Wavy Taylor Wirbel im endlichen $\Gamma = 10$ System für beliebige Magnetfeldkonfigurationen genau so verhalten, wie es zuvor im periodischen System diskutiert wurde. Dies stimmt auch mit ersten experimentellen Ergebnissen von Odenbach et al. (107) überein. Neben den Wirbeln im Inneren des Bulks erfahren auch die, an den Rändern vorliegenden, Ekman Wirbel eine Modulation durch extern angelegte Magnetfelder.

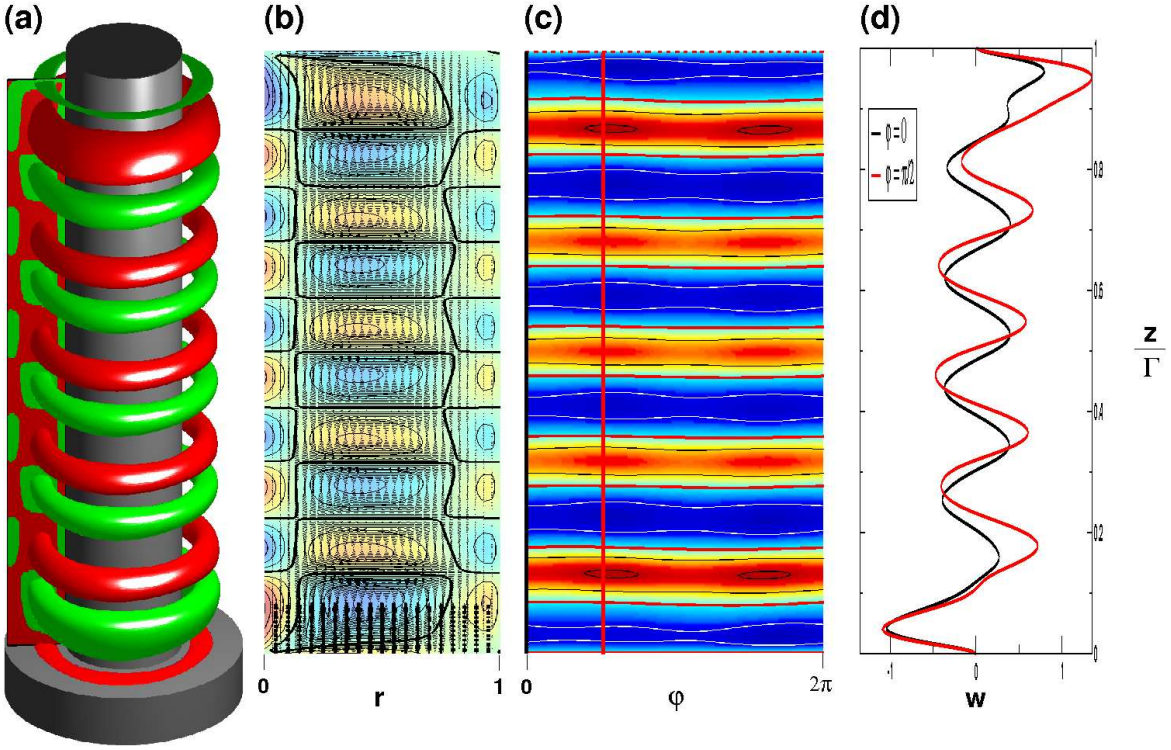


Abbildung 9.17 – Visualisierung des Strömungsmusters eines Ferrofluids im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem axial- und transversal überlagerten Magnetfeld. **(a)** Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w = \pm 35$ (rot: positiv und grün: negativ), **(b)** Vektorplots der beiden Felder $u(r,z)$ und $w(r,z)$ in einer $\varphi =$ konst. Ebene mit farbkodierter azimutaler Vortizität (rot=Max, blau=Min). **(c)** $\varphi - z$ Plots der Strukturen bei $r = 0.5$ mit farbkodiertem radialem u Feld (rot=Max, blau=Min). **(d)** Axiales w Feld an zwei verschiedenen Positionen, $\varphi = 0, \pi/2$, wie in **(c)** durch die schwarze und rote Linie markiert. Kontrollparameter: $k = 2.85, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.4, \eta = 0.5$.

9.9 Resumé

In diesem Kapitel wurde der Einfluss verschiedener Magnetfeldkonfigurationen – axial, transversal und Kopplungen dieser beiden – auf das Strömungsverhalten eines Ferrofluids im Taylor-Couette System erforscht. Insbesondere sind hierbei das Bifurkationsverhalten und die raumzeitlichen Eigenschaften von Taylor Wirbeln, Wavy Taylor Wirbeln, Spiral Wirbeln und von Wavy Spiral Wirbeln untersucht worden.

Wie im vorangegangenen Kapitel diskutiert, werden abhängig von der Orientierung des angelegten Feldes, die raumzeitlichen Strukturen von TVF und SPI Lösungen im Allgemeinen verändert, da zusätzliche Moden, die sich aus der axialen und azimutalen Fourierzerlegung ergeben, mit endlichen Amplituden existieren. In einem reinen Axialfeld bleiben die Symmetrieeigenschaften der Strukturen unverändert. Lediglich die Amplituden und die Frequenzen werden modifiziert; sie wachsen im Allgemeinen an.

Allen Magnetfeldkonfigurationen ist gemeinsam, dass sie den CCF Grundzustand stabilisieren: Die Bifurkationsschwellen der Wirbelstrukturen werden zu größeren Werten, der inneren Reynoldszahl R_1, hin verschoben. Die Verschiebung ist dabei linear in den beiden

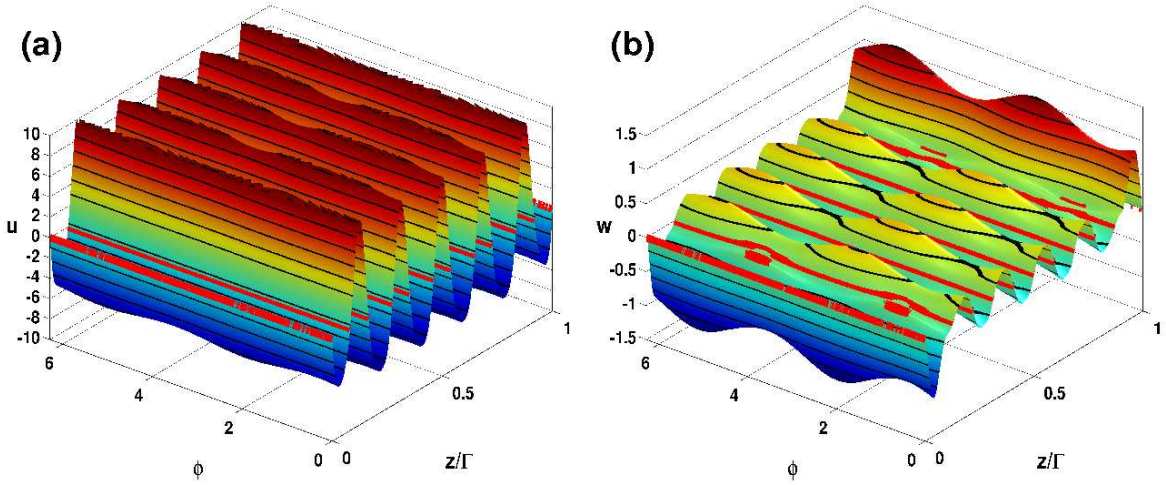


Abbildung 9.18 – Visualisierung der Strömung eines Ferrofluids für **(a)** u und **(b)** w Feld des wTVF Zustands im endlichen $\Gamma = 10$ System in einem axial- und transversal überlagerten Magnetfeld. Kontrollparameter: $k = 2.85, R_2 = 0, R_1 = 90, s_x = 0.4, s_z = 0.4, \eta = 0.5$.

Feldparametern, s_x^2 und s_z^2. Zumindest in der hier benutzten Niklas Näherung für axial und transversale Felder. In einem rein axialen ist der stabilisierende Effekt stärker als in einem rein transversalen Magnetfeld. Weiterhin werden die Onsets der helikalen SPI und wSPI Strukturen durch Magnetfelder stärker verschoben, als die der toroidal geschlossenen TVF und wTVF Strukturen. Auch die nichtlinearen SPI und wSPI Frequenzen steigen analog, mit zunehmendem Magnetfeld, an. Auch hierbei ist die Verschiebung im Fall axialer Felder größer als bei gleich starken transversalen Magnetfeldern. Qualitativ bleiben sie aber alle unverändert. Mit wachsender relativer Distanz μ zum Onset nehmen sie alle auf die gleiche Art und Weise zunächst ab, bevor sie erneut anwachsen.

Wenn das Magnetfeld eine endliche Transversalkomponente besitzt, so existieren die reinen TVF und SPI Strukturen *nicht mehr* länger. Stattdessen sind die Wirbelstrukturen, die nun primär in einer Vorwärtsbifurkation aus dem CCF Grundzustand herauswachsen, wellenartig (wavyartig) deformiert. Es handelt sich hierbei um *Wavy Strukturen*, nämlich wTVF und wSPI. Sowohl die raumzeitlichen Eigenschaften, wie auch das Bifurkationsverhalten dieser Wavy Strukturen wurden für verschiedenste Magnetfeldkonfigurationen untersucht. Soweit bekannt ist, ist dies bislang weder in der Theorie, noch in Experimenten geschehen, so dass die hier durchgeführten Untersuchungen dieser Wavy Strukturen auch Grundlage und Ansporn für weitere, insbesondere experimentelle Arbeiten, sein sollten.

Grundsätzlich bleibt die Topologie der einzelnen Strukturen durch die verschiedenen Felder erhalten, dies bedeutet: Toroidal geschlossenen Strukturen (TVF) bleiben weiterhin toroidal geschlossen (wTVF), während helikale Strukturen (SPI) ebenso ihre offene Konfiguration (wSPI) beibehalten.

Insbesondere die durch ein transversales oder durch ein schräges, als Überlagerung von axialem und transversalem, Magnetfeld hervorgerufenen Wavy Taylor Wirbel unterscheiden sich ganz wesentlich von den klassischen wTVF Strukturen, welche ohne Magnetfeld bei relativ hohen R_1 (31; 145) sekundär aus den TVF Zuständen herausbifurkieren. Ein Magnetfeld hingegen ist in der Lage wTVF Lösungen, die *primär* direkt aus dem CCF herausbifurkieren, zu erzeugen. Weiterhin sind die Struktur und Dynamik dieser wTVF

Lösungen deutlich unterschiedlich. (i) Die Wirbelschläuche sind in φ Richtung periodisch aufgeweitet und zusammengeschnürt, während bei den klassischen wTVF Lösungen die Wirbel als Ganzes wellenförmig in axialer Richtung nach oben und unten verbogen sind. (ii) Das durch ein Magnetfeld erzeugte Muster ist in der *Phase fixiert* (gepinnt), d.h. es ist *stationär* und *nichtrotierend*, wie der rotationssymmetrische TVF Zustände, während die klassischen wTVF Strukturen alle als Ganzes mit konstanter Frequenz rotieren. D.h. das Muster wandert als Ganzes in azimutaler Richtung. Ähnlich wie in Kapitel 4 diskutiert können Übergänge zwischen (w)TVF und (w)SPI Lösungen auch durch Veränderung eines von außen angelegten Magnetfeldes hervorgerufen werden.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Übergänge zwischen TVF und (w)SPI Zuständen

Periodische Randbedingungen (pbc)

Unter der Annahme periodischer Randbedingungen lässt sich ein Übergang zwischen den toroidal geschlossenen Taylor Wirbeln (TVF) und den helikalen Spiral Wirbeln (SPI) finden. Dieser Übergang vollzieht sich über modulierte, deformierte Strukturen, die sekundär aus diesen reinen Strukturen herausbifurkieren. Dabei treten, je nach dem zugrundeliegenden Anfangszustand, unterschiedliche Wavy Strukturen auf, nämlich die toroidal geschlossenen Wavy Taylor Wirbel (wTVF) und die helikalen Wavy Spiral Wirbel (wSPI). Diese stabil vorliegenden Wavy Lösungen nähern sich dem Ribbon (RIB) Lösungsast an, der in beiden Übergangsszenarien immer instabil vorliegt und als nichtlineare Überlagerung zweier SPI Zustände unterschiedlicher Helizität, eine stehende Welle darstellt. An dieser Stelle geht das System in eine neue, die einzige noch stabil im System vorliegende Lösung über.

Für die hier untersuchten Parameterbereiche treten wTVF [wSPI] Zustände immer bistabil mit den reinen SPI [TVF] Zuständen auf und flankieren das Gebiet in dem TVF und SPI Strukturen bistabil existieren. Für Parameter nahe des Bistabilitätsbereichs der reinen Strukturen kann das System temporär eine eigentlich instabile Lösung annehmen, wobei die Verweildauer in diesem transienten Zustand von der Nähe dieses Bistabilitätsbereichs abhängt; je näher, desto kürzer.

Im Raum der azimutalen und axialen Fouriermoden (m, n), leben die Wavy Strukturen, wTVF und wSPI, in einem komplexeren Fourierunterraum als die reinen Strukturen, TVF und SPI. Topologisch sind wTVF [wSPI] Lösungen identisch mit den reinen TVF [SPI] Lösungen. Allen Wavy Strukturen ist gemeinsam, dass ihre zugehörigen Unterräume von drei charakteristischen Moden aufgespannt werden, nämlich $(1, 1)$, $(1, -1)$ und $(0, 1)$, während SPI $(1, 1)$ und TVF $(0, 1)$ Lösungen durch nur eine Mode charakterisiert werden können. Im Fall der axial nicht propagierenden und zeitlich periodischen wTVF Lösung sind die Amplituden der $(1, 1)$ und $(1, -1)$ Moden für $Re = 0$ identisch. In der wTVF Lösung kommt es zur Beimischung endlicher $m = 0$ Moden im Spektrum, die zu einer Rotation der toroidal geschlossenen Struktur führen, wobei die Frequenz $\omega_{0,1}$ aber immer verschwindet. Auf der anderen Seite führen die helikalen, aber modulierten wSPI Lösungen

sowohl eine Rotation, als auch eine Translation aus und es treten unterschiedliche Frequenzen $\omega_{1,1}$, $\omega_{1,-1}$ und $\omega_{0,1}$ auf.

Beim Übergang von TVF→SPI Zuständen werden die toroidal geschlossenen Wirbelschläuche der TVF Struktur lokal zusammengeschnürt und schließlich aufgebrochen. Danach bewegen sich die Schlauchenden axial und benachbarte Wirbel verbinden sich schließlich neu zu den helikal geschlossenen Wirbelschläuchen der SPI Struktur. Entsprechend vollzieht sich der Übergang von helikal offenen SPI Zuständen zu toroidal geschlossenen TVF Zuständen.

Von außen auferlegter axialer Durchfluss bricht die Spiegelsymmetrie des Systems. Dies wirkt sich signifikant auf die Existenzbereiche von wTVF und wSPI Lösungen aus. Z.B. verlieren die wTVF Lösungen ihre axiale Gleitspiegelsymmetrie, da eine der beteiligten Moden, $(1,1)$ oder $(1,-1)$, dominant wird. Andererseits verändern die wSPI Strukturen ihr Aussehen kaum, jedoch tritt nun ein Unterschied in den Stabilitätsbereichen der beiden helikalen Strukturen der L-wSPI und R-wSPI Zustände auf. So findet man Parameterbereiche mit bistabilen L- und R-wSPI Lösungen, aber auch solche mit monostabilen L- und R-wSPI Lösungen.

Die Übergänge zwischen toroidal geschlossenen TVF Zuständen und helikalen SPI Strukturen verlaufen in beiden Richtungen qualitativ identisch über stabile Wavy Lösungen. Aus der Ausgangsstruktur des TVF [SPI] Zustands bifurkiert sekundär die, zu dieser zugehörige, modulierte wTVF [wSPI] Lösung welche sich dem RIB Lösungsast annähert. Da die RIB Lösung hier aber immer instabil vorliegt, 'springt' das System auf die einzige noch stabil im System vorliegende SPI [TVF] Lösung.

Endliche Randbedingungen (rbc) - $\Gamma = 12$ System

Ähnlich wie axialer Durchfluss Re haben auch die Deckel im endlichen System einen signifikanten Einfluss auf die unterschiedlichen Strukturen und deren Bifurkationsverhalten im System. Dennoch lassen sich im endlichen System ähnliche Übergänge, wie unter periodischen Randbedingungen finden. Prinzipiell besteht jedoch ein signifikanter Unterschied bei der helikalen SPI Lösung. Anders als im Fall periodischer Randbedingungen treten bei endlicher Systemlänge durch den stets vorhandenen Anteil der Ekman induzierten $m = 0$ Moden, keine *reinen* SPI Lösungen, sondern streng genommen *nur* wSPI Zustände auf. Demzufolge lassen sich hier nur die Übergänge von TVF zu wSPI über wTVF Lösungen und die umgekehrte Richtung von wSPI zu TVF Zuständen untersuchen.

Der Übergang von TVF zu wSPI Zuständen im endlichen System vollzieht sich analog dem Übergang unter periodischen Randbedingungen über wTVF Lösungen. Wobei jedoch durch die endliche Systemlänge eine diskrete Wellenzahl für die wSPI Lösung selektiert werden kann. Darüber hinaus existieren sowohl für stabile TVF und wTVF Zustände *verschiedene* Bifurkationsäste mit unterschiedlichen Wellenzahlen parallel nebeneinander. Während beim Übergang zwischen den toroidal geschlossenen Strukturen von TVF zu wTVF die Wellenzahl immer unverändert bleibt, kann der Übergang von einer toroidal geschlossenen zu einer helikal offenen Struktur von einer Wellenzahländerung begleitet sein.

Der Übergang von SPI zu TVF über wSPI Lösungen, der im periodischen System bei moderaten R_2 zu finden ist, ist im endlichen System, aufgrund der Abwesenheit von stabilen reinen SPI bzw. wSPI Zuständen, nicht vorhanden. Stattdessen findet man im System

für stärkere Gegenrotationsraten einen anderen Übergang, der durch einen axial wandernden Defekt vollzogen wird. Diese wTVF-wSPI Defekt zieht einen wTVF Zustand hinter sich in den Bulk hinein und verdrängt dadurch die wSPI Struktur aus dem System. Nachdem der Defekt vollständig verschwunden ist, nimmt die Modulation des wTVF Zustands zunehmend ab, bis schließlich eine reine TVF Lösung im System verbleibt.

Aufgrund der Tatsache, dass die festen Deckel jeglichen intrinsischen, Reynolds Stress getriebenen Durchfluss der wSPI Strukturen unterdrücken, ist es nicht verwunderlich, dass sich die Frequenzen der (w)SPI Lösungen für rbc und pbc unterscheiden. Andererseits stimmen die Frequenzen der wTVF Lösungen für pbc und rbc sehr gut überein, da der wTVF Zustand keinen intrinsischen Netto Durchfluss enthält.

Der signifikante Einfluss der Deckel auf die verschiedenen Strukturen und deren Existenzbereiche spiegelt sich unter anderem in einem deutlich komplexeren Phasendiagramm in der $R_1 - R_2$ Ebene wieder, in der z.B. auch lokalisierte Strukturen zu finden sind.

Mixed Cross Spirals

Übergänge zwischen SPI verschiedener und gleicher Helizität

Eine vollkommen andere Art des Übergangs lässt sich zwischen zwei SPI Lösungen unterschiedlicher Helizität und Wellenzahl M finden. Dies ist von grundlegendem Interesse, da es sich hierbei um die Fragestellung handelt, wie zwei wandernde Wellen (SPI) ineinander übergehen. Diese Übergänge werden im periodischen System durch sekundär bifurkierende Mixed Cross Spiral (MCS) Lösungen vollzogen. Ein anderes Übergangsszenario, das bereits in der Literatur bekannt ist, stellt eine Verbindung der SPI Zustände mit RIB Lösungen über sogenannte Cross Spiral (CSPI) Lösungen dar. Diese CSPI Strukturen lassen sich dabei als Spezialfälle der MCS Lösungen auffassen.

Prinzipiell lassen sich zwei unterschiedliche Bifurkationsszenarien der MCS Lösungen unterscheiden. Zum einen können MCS Strukturen aus einem reinen SPI Zustand herausbifurkieren und später auch wieder in der *selben* SPI Lösung enden. In diesem Fall stellt der Lösungsast der MCS Strukturen eine Art 'Bypass' dar. Andererseits können MCS Zustände als echte Übergangsstrukturen zwischen zwei reinen SPI Zuständen unterschiedlicher Helizität auftreten.

Sowohl die MCS Zustände, als auch die CSPI Strukturen können als nichtlineare Überlagerung von zwei gegenläufig wandernden Wellen mit kontinuierlich variierenden Anteilen angesehen werden. Die CSPI Strukturen bestehen dabei aus zwei *spiegelsymmetrischen* SPI Zuständen, d.h Strukturen mit gleicher azimutaler Wellenzahl M aber unterschiedlicher Helizität, während die MCS Lösungen im Allgemeinen aus Anteilen aufgebaut sind, die zu SPI Strukturen mit *unterschiedlicher* Wellenzahl M gehören.

Folglich stellen CSPI [RIB] Lösungen einen Spezialfall der MCS [MRIB] Lösungen dar. Weiterhin können RIB [MRIB] Zustände als Spezialfall von CSPI [MCS] Zuständen mit gleichen Amplitudenanteilen der L-SPI und R-SPI Strukturen angesehen werden. Demzufolge sind MCS Strukturen, soweit bislang bekannt, eine der allgemeinsten Strukturen. Sehr viele der übrigen bekannten Strukturen im Taylor-Couette System lassen sich als Spe-

zialfälle dieser erklären und charakterisieren.

Im Gegensatz zu den CSPI Zuständen, die eine Möglichkeit des Übergangs von einer SPI Lösung zu einer RIB Lösung und wieder zurück zu der gleichen SPI Lösung darstellen, stellen die MCS Lösungen einen *direkten* Weg eines solchen Übergangs dar, ohne Verwendung anderer primärer Bifurkationslösungen, wie etwa RIB oder MRIB Zustände.

MCS Strukturen lassen sich in erster Näherung als eine lineare Superposition zweier reiner SPI Lösungen auffassen. Zur Charakterisierung der MCS Lösungen werden die dominanten Moden der beiden SPI Anteile (L und R) herangezogen. Hierbei stellt der SPI Anteil mit der größeren [kleineren] Modenamplitude die majorante [minorante] Komponente in der MCS Lösung dar. Für im Allgemeinen unterschiedliche Wellenzahlen, M_1 und M_2, ergibt sich eine Nomenklatur LM_1RM_2-MCS, wobei der zuerst genannte SPI Anteil (hier L für linksgewundene) mit M_1 den majoranten Anteil wiedergibt. Entsprechend gibt der zweite Anteil (hier R für rechtsgewunden) mit M_2 den minoranten Anteil wieder. Solange keine symmetriebrechende Effekte vorliegen sind LM_1RM_2-MCS und RM_1LM_2-MCS spiegelsymmetrische Zustände.

Die Frequenzen der MCS Strukturen werden im Wesentlichen durch die majorante SPI Komponente bestimmt, während die minorante SPI Komponente zu einer Modulation führt, die gerade entgegen der Propagationsrichtung der gesamten MCS Struktur wandert. Somit sind die raumzeitlichen Eigenschaften von stationären MCS Lösungen ähnlich derer einer reinen SPI Struktur, versehen mit einer mehr oder weniger starken Modulation.

Für MCS Strukturen, die als Bypasslösungen auftreten, findet man zwei verschiedene Bifurkationsszenarien: (1.) [(2.)] Die MCS Zustände bifurkieren als stabile [instabile] Lösungen aus einer stabilen [instabilen] SPI Lösung heraus. Im ersten Fall verliert die SPI Lösung dabei ihre Stabilität. Dieses Verhalten ist vollkommen unabhängig von dem Stabilitätsverhalten anderer Lösungen, wie z.B. RIB oder der SPI Struktur, welche die majorante Komponente in der MCS Lösung darstellt.

Die MCS Strukturen können auch unterkritisch auftreten, d.h. unterhalb der Bifurkationsschwellen der beiden reinen SPI Zustände, aus denen die Struktur zusammengesetzt ist.

Prinzipiell sollten die hier, unter periodischen Randbedingungen, untersuchten MCS Strukturen auch im endlichen System existieren. Während im periodischen System die axiale Wellenzahl fest vorgegeben wird, können im endlichen System nicht beliebige Wellenzahlen angenommen werden und es kommt durch die Deckel zu einer Selektion von solchen Wellenzahlen k die zur vorgegebenen Systemlänge passen. Eine weitere Einschränkung ist die Tatsache, dass viele der, im periodischen System, stabil vorliegenden SPI Lösungen im endlichen System, wenn überhaupt nur instabil zu finden sind.

Der Nachweis von MCS Lösungen unter endlichen Randbedingungen bleibt an dieser Stelle noch offen. Wenn diese auch dort existieren, so werden sie aber vermutlich aus unterschiedlichen SPI Strukturen mit im Allgemeinen *verschiedenen*, zueinander kommensurablen axialen Wellenzahlen, k_1 und k_2, aufgebaut sein.

Komplexe Ferrofluide im Taylor-Couette System

Theoretische Grundlagen

Um das Strömungsverhalten eines Ferrofluids im Taylor-Couette System beschreiben zu können müssen Magnetisierungsgleichungen eingeführt werden und erweiterte Navier-Stokes Gleichungen gelöst werden. Hierbei wird ein Ansatz analog dem Modell von Niklas et al. (103; 104) benutzt, bei dem eine stationäre Magnetisierung nahe dem Gleichgewicht, bei genügend kleinen Relaxationszeiten, angenommen wird.

Abhängig von der Orientierung des angelegten Feldes, ist die raumzeitliche Struktur der TVF und SPI Zustände im Allgemeinen verändert, da zusätzliche Moden, die sich aus der axialen und azimutalen Fourierzerlegung ergeben, mit endlichen Amplituden existieren. Im Fall eines rein axialen Magnetfeldes werden die reinen Wirbel Strukturen, TVF und SPI, wie auch ihre Modenspektren, *nicht* verändert. Besitzt das angelegte Magnetfeld allerdings eine endliche Transversalkomponente, so werden zusätzliche Moden angeregt und die reinen Strukturen sind nicht mehr länger existent. Diese werden durch Wavy Strukturen, Wavy Taylor Wirbel und Wavy Spiral Wirbel ersetzt.

Auftretende Strömungsmuster von Ferrofluiden bei extern angelegten homogenen Magnetfeldern

Verschiedene Magnetfeldkonfigurationen – axial, transversal und Kopplungen dieser beiden – haben signifikanten Einfluss auf das Strömungsverhalten eines Ferrofluids im Taylor-Couette System. Diese Magnetfelder können sowohl das Bifurkationsverhalten, wie auch die raumzeitlichen Eigenschaften der verschiedenen Lösungen beeinflussen.

Alle in dieser Arbeit betrachteten Magnetfeldkonfigurationen führen zu einer Stabilisierung des CCF Grundzustands, d.h. die Bifurkationsschwellen der primär bifurkierenden Wirbel Strukturen werden zu größeren Werten der inneren Reynoldszahl R_1 verschoben. Unter Verwendung der Niklas Näherung zur Implementierung der Gleichungen ergibt sich diese Verschiebung linear in den beiden Feldparametern, s_x^2 und s_z^2, wobei der stabilisierende Effekt in einem rein axialen Feld stärker als in einem rein transversalen Feld ist. Weiterhin werden die Onsets der helikalen SPI und wSPI Strukturen durch die Felder stärker verschoben, als die der toroidal geschlossenen TVF und wTVF Zustände. Ebenso steigen die nichtlinearen SPI und wSPI Frequenzen mit zunehmendem Magnetfeld an, wobei auch hierbei die Verschiebung im Fall axialer Felder größer als bei transversalen ist. Qualitativ bleibt der Verlauf der Frequenzen bei Variation von R_1 unverändert. Mit wachsender relativer Distanz μ zum Onset nehmen alle Frequenzen auf die gleiche Art und Weise zunächst ab, bevor sie erneut anwachsen.

Besitzt das angelegte Magnetfeld eine endliche Transversalkomponente, so existieren die reinen TVF und SPI Lösungen *nicht* mehr. Diese werden ersetzt durch *Wavy Strukturen*, die nun an deren Stelle als primäre Lösung aus dem CCF Grundzustand heraus bifurkieren. Dies wurde so bis heute, weder in der Theorie, noch in Experimenten beobachtet. Grundsätzlich bleibt die Topologie der einzelnen Strukturen durch die verschiedenen Magnetfelder erhalten, dies bedeutet: Toroidal geschlossene Strukturen bleiben weiterhin toroidal geschlossen, während helikale Strukturen ebenso ihre offene Konfiguration beibehalten.

Die, durch Magnetfelder mit endlicher Transversalkomponente, hervorgerufenen Wavy Strukturen unterscheiden sich jedoch ganz wesentlich von den klassischen Wavys, die ohne Magnetfeld (31; 145; 66) *sekundär* aus den reinen TVF und SPI Zuständen bifurkieren. Magnetfelder sind in der Lage wTVF und wSPI Lösungen zu erzeugen, die *primär*, direkt aus dem CCF Grundzustand, herausbifurkieren. Zudem unterscheiden sich beide, unterschiedlich erzeugten, Wavy Arten in ihrer Struktur und Dynamik voneinander. Die Wirbelschläuche, der durch Magnetfelder generierten wTVF Zuständen sind in azimutaler φ Richtung periodisch aufgeweitet und zusammengeschnürt, während bei den klassischen wTVF Strukturen die Wirbel als Ganzes wellenförmig in axialer Richtung nach oben und unten verbogen sind. Weiterhin ist das durch ein Magnetfeld erzeugte Muster der wTVF Strukturen in der Phase *fixiert*, d.h. es ist *stationär* und *nicht rotierend*, wie der rotationssymmetrische TVF Zustand, während die klassischen wTVF Strukturen alle als Ganzes mit konstanter Frequenz rotieren, d.h. das Muster wandert als Ganzes in azimutaler Richtung. Ähnliches gilt auch für die, durch Magnetfelder hervorgerufenen, Modulationen der SPI hin zu wSPI Lösungen, wobei in diesem Fall bereits die reinen SPI Strukturen, was sich auf die wSPI Lösungen überträgt.

Anhang A

Lineare Stabilitätsanalyse

A.1 Mathematisches Vorgehen

Im Folgenden soll die Stabilität des Grundzustands gegenüber primär bifurkiernden Strukturen überprüft werden. Für hinreichend kleine Reynoldszahlen, R_1 und R_2, ist dieser gegenüber kleinen Störungen stabil. Dabei bedeutet *stabil* definitionsgemäß, dass beliebige, aber kleine Störungen der Lösung zeitlich nicht anwachsen und somit aussterben (79). Ohne jegliche Art von Störung verharrt das System, selbst bei überkritischen Kontrollparametern, im stabilen Grundzustand. Erst unter der Voraussetzung, dass beides vorliegt, eine kleine Störung *und* überkritische Kontrollparameter, kann das System in einen neuen Zustand übergehen.

Dieser Übergang der Kontrollparameter vom unter- zum überkritischen Bereich bedingt somit eine wesentliche Änderung der zeitlichen Dynamik der 'Störamplituden'. Unterhalb des kritischen Wertes eines Kontrollparameters werden alle Störungen weggedämpft und sterben somit zeitlich aus. Oberhalb dieses kritischen Wertes treten Störungen mit bestimmten Wellenzahlen k zu entsprechenden Moden m auf, deren Amplituden exponentiell anwachsen. Dabei gilt, dass die Anzahl dieser wachstumsfähigen Wellenzahlen mit Vergrößerung der Kontrollparameter anwächst.

Die *marginale* Stabilitätskurve stellt die Grenze zwischen unter- und überkritischem Bereich in Abhängigkeit der Wellenzahl dar. Sie markiert, für verschiedene Wellenzahlen k, den Wert des Kontrollparameters, bei dem die Wachstumsrate, γ, gerade Null beträgt.

A.2 Herleitung der Gleichungen

Zur expliziten Stabilitätsuntersuchung werden den Feldern der jeweiligen Lösungen Störungen aufaddiert[1]:

$$\mathbf{u}(r,z,t) = \mathbf{u}_G(r,z,t) + \hat{\mathbf{u}}(r,z,t), \quad p = p_G + \hat{p}(r,z,t). \tag{A.1}$$

Die Aussage über die Stabilität erfolgt nun über die zeitliche Entwicklung der Störfelder $\hat{\mathbf{u}}$ und $\hat{p}$. Stabilität der Lösung liegt genau dann vor, wenn beliebige Störungen weggedämpft

[1] Der Index G charakterisiert hier den Grundzustand und ˆ bezeichnet die 'Störfelder'.

werden, ansonsten ist die Lösung instabil. Um die Dynamik der Störung zu untersuchen, wird diese inklusive des Grundzustands in die Grundgleichungen eingesetzt. Die Felder $\mathbf{u}_G$ und p_G heben sich hierbei heraus, da diese ja bereits Lösungen der Gleichungen darstellen: Diese Grundgleichungen einschließlich der Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten lauten nach (1.8):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + R_1\frac{v^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - R_1\frac{uv}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \qquad \text{(A.2)} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1(\mathbf{u}\cdot\nabla)w - \frac{\partial p}{\partial z}, \\
0 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial}{\partial z}w. \qquad \text{(A.3)}
\end{aligned}$$

Setzt man nun in diese Gleichungen die Felder inklusive kleiner Störungen (A.1) ein, ergeben sich sowohl Terme, die bereits alleine die Navier-Stokes Gleichungen des Grundzustands erfüllen, sowie Ableitungen der gleichen, was zur Elimination dieser Beiträge in den Gleichungen führt.

Die so resultierenden Gleichungen beschreiben nun die temporäre Entwicklung einer, in das System von Außen eingebrachten, Störung $\hat{\mathbf{u}}$. Im Folgenden werden diese, der Einfachheit halber, nur noch mit $\mathbf{u}$ bezeichnet. Es ist jedoch wichtig zu wissen, dass es sich auch fortwährend immer noch um die Störfelder $\hat{\mathbf{u}}$ handelt.

Da bei der linearen Stabilitätsanalyse nur kleine Störungen $\mathbf{u}$ des Grundzustands $\mathbf{u_G}$ betrachtet werden, können Terme, die aus dem nichtlinearen Summanden $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ resultieren oder quadratische Terme in den Störungen vernachlässigt werden. Somit ergeben sich die linearisierten Gleichungen der Störfelder inklusive der Randbedingungen zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla^2 u - R_1(\mathbf{u_G}\cdot\nabla)u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + R1\frac{2v_G v}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla^2 v - R_1[(\mathbf{u}\cdot\nabla)v_G + (\mathbf{u_G}\cdot\nabla)v] - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \qquad \text{(A.4)} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= \nabla^2 w - R_1[(\mathbf{u}\cdot\nabla)w_G + (\mathbf{u_G}\cdot\nabla)w] - \frac{\partial p}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}v + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r}, \\
& \mathbf{u}(r = \frac{\eta}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}(r = \frac{1}{1-\eta}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(A.5)} \\
& \mathbf{u}(z) = \mathbf{u}(z+L), \qquad p(z) = p(z+L).
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Randbedingungen der Störung (A.5) so gewählt, dass der Grundzustand plus Störung immer noch die *no-slip* Randbedingungen erfüllt und in axialer Richtung periodische Randbedingungen gegeben sind.

Das komplette Gleichungssystem (A.4) stellt ein *Randwertproblem* eines linearen partiellen Differentialgleichungssystems zweiter Ordnung dar, das sich in allgemeiner Form,

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}\mathbf{x}, \qquad \text{(A.6)}$$

schreiben lässt, wobei

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Für dieses in der Zeit t *autonome* Gleichungssystem (A.4, A.5) bietet sich eine komponentenweise Lösung in Form eines Produktansatzes mit Separation der Zeitabhängigkeit an:

$$\mathbf{u}(r,\varphi,z,t) \;=\; \hat{\mathbf{u}}(r,\varphi,z)e^{\sigma t}, \quad \text{bzw.} \quad p(r,\varphi,z,t) = \hat{p}(r,\varphi,z)e^{\sigma t}, \tag{A.8}$$

wobei $\sigma = \gamma + i\omega$ der zeitliche Eigenwert des Systems ist. Dieser Ansatz bedeutet, dass eine Störung für unterkritische Kontrollparameter mit $\gamma < 0$ weggedämpft wird (der Grundzustand ist stabil), und entsprechend bei überkritischen Kontrollparametern $\gamma > 0$ exponentiell anwächst (der Grundzustand ist instabil). Das temporäre Verhalten einer Störung wird nach (A.8) durch die *Wachstumsrate* γ sowie die *Frequenz* ω beschrieben. Gilt gerade $\gamma = 0$, so ist das System marginal stabil. Das Gleichungssystem A.6 vereinfacht sich somit zu:

$$\sigma\underline{\underline{\mathbf{E}}}\mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}\mathbf{x}. \tag{A.9}$$

Unter weiterer Ausnutzung der Systemsymmetrien, wie etwa der Tatsache, dass das System in φ Richtung 2π periodisch ist, d.h.

$$\mathbf{u}(r,\varphi,z,t) = \mathbf{u}(r,\varphi+2\pi,z,t) \tag{A.10}$$

und der Annahme axial periodischer Randbedingungen

$$\mathbf{u}(r,\varphi,z,t) = \mathbf{u}(r,\varphi,z+\lambda,t), \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \tag{A.11}$$

bietet es sich an die Lösung in φ und z nach diskreten Fouriermoden zu entwickeln.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}(r,\varphi,z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n,m} \begin{pmatrix} \hat{u}(r) \\ \hat{v}(r) \\ \hat{w}(r) \\ \hat{p}(r) \end{pmatrix} e^{i(nkz+m\varphi)+\sigma t} + c.c.\ . \tag{A.12}$$

Dieser Lösungsansatz (A.12) ist nun in der Lage, mit den entsprechenden Vorfaktoren, jede beliebige 'Störfunktion' darzustellen. Dabei stellen die $c_{n,m}$ die Fourierkoeffizienten dar während die komplette r Abhängigkeit in die *Eigenmoden* $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$ gewandert ist. Es sei noch auf die hierbei wichtigen konjugiert komplexen Funktionen (*c.c.*) hingewiesen, die mit hinzuaddiert werden müssen, da es sich um physikalisch reelle Felder handelt. Mit Hilfe dieses Entwicklungsansatzes (A.12) lassen sich durch Einsetzen des selbigen in die Gleichungen (A.4, A.5) die darin enthaltenen Differentialoperatoren teilweise wie folgt auswerten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \;\rightarrow\; \sigma,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi} &\rightarrow im, \\
\frac{\partial}{\partial z} &\rightarrow ink, \\
\nabla^2 &\rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2} - n^2k^2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2k^2, \\
\mathbf{u}\cdot\nabla &\rightarrow u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw, \\
\mathbf{u}_G\cdot\nabla &\rightarrow \frac{imv_G}{r} + inkw_G.
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

Somit wird durch den Lösungsansatz (A.12) das System *partieller Differentialgleichungen* (A.4) in ein System *gewöhnlicher Differentialgleichungen* umgewandelt. Dieses muss für jeden Summanden in der Fourierreihe, also jedes Paar (m, n) bzgl. r gelöst werden. Insgesamt ergibt sich somit ein sechsdimensionaler Parameterraum der von $(\eta, R_1, R_2, Re, m, k)$ aufgespannt wird, wobei das System für jedes fixierte 6 Tupel neu gelöst werden muss.

$$
\begin{aligned}
\sigma u &= \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right]u - R_1\left(\frac{imv_G}{r} + inkw_G\right)u \\
&\quad -\frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}imv + 2R_1\frac{v_Gv}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\
\sigma v &= \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right]v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}imu - \frac{1}{r}imp \\
&\quad -R_1\left[\left(u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw\right)v_G + \left(\frac{imv_G}{r} + inkw_G\right)v\right], \\
\sigma w &= \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right]w \\
&\quad -R_1\left[\left(u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{imv}{r} + inkw\right)w_G + \left(\frac{imv_G}{r} + inkw_G\right)w\right] - inkp, \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}imv + inkz + \frac{u}{r}.
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \sigma u &= \left(-\frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right)u + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}u + \frac{1}{r}u - p\right) \\
&\quad -R_1\left(\frac{imv_G}{r} + inkw_G\right)u - \frac{2}{r^2}imv + 2R_1\frac{v_Gv}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\
\sigma v &= \left(-\frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right)v + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}v + \frac{1}{r}v\right) \\
&\quad +\frac{im}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}u + \frac{1}{r}u - p\right) - 2\left(R_1A - \frac{im}{r}\right)u \\
&\quad -R_1\left(\frac{im}{r}v_G + ikw_G\right)v - \frac{mk}{r}w,
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma w &= \left(-\frac{m^2}{r^2} - n^2k^2\right) w + \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial}{\partial r} w \\
&\quad + ik\left(\frac{\partial}{\partial r}u + \frac{1}{r}u - p\right) - R_1\left(\frac{im}{r}v_G + 2inkw_G\right) w - R_1\frac{\partial}{\partial r}w_G u, \\
0 &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}imv + inkz + \frac{u}{r}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (A.15) enthalten noch Ableitungen zweiter Ordnung, die auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung reduziert werden müssen. Zudem soll noch der Druck p aus den Gleichungen eliminiert werden. Die gängigste Methode, dies zu erreichen liegt in der zweifachen Rotationsbildung, wie sie häufig in der Literatur (76) zu finden ist. Hier wird aber anstelle dieses Verfahrens eine Substitution benutzt, wie sie schon in früheren Arbeiten, wie z.B. bei (122; 112) verwendet wurde.

$$
\begin{aligned}
X &:= \frac{\partial}{\partial r}u + \frac{1}{r}u - p, \\
Y &:= \frac{\partial}{\partial r}v + \frac{1}{r}v, \\
Z &:= \frac{\partial}{\partial r}w.
\end{aligned}
$$

Mittels der Kontinuitätsgleichung ergibt sich somit der Druck p zu:

$$
p = -X - ikw - \frac{1}{r}imv. \tag{A.16}
$$

Zum besseren Verständnis der Substitution wurden bereits in den Gleichungen (A.15) die Terme in entsprechender Form aufgeschrieben. Das so erhaltene *Eigenwertproblem* lautet:

$$
\sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* \mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^* \mathbf{x}, \tag{A.17}
$$

$$
\text{mit} \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} u(r) \\ v(r) \\ w(r) \\ X(r) \\ Y(r) \\ Z(r) \end{pmatrix} \tag{A.18}
$$

und

$$
\underline{\underline{\mathbf{L}}}^* = \begin{pmatrix}
\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & \frac{im}{r} & ik & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & -1 \\
-\frac{m^2}{r^2} - n^2k^2 & -2(\frac{im}{r^2} - R_1\frac{v_G}{r}) & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\
-R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & & & & & \\
2(\frac{im}{r^2} - R_1 A) & -\frac{2m^2}{r^2} - n^2k^2 & -\frac{mk}{r} & \frac{im}{r} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\
 & -R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & & & & \\
-R_1\frac{\partial}{\partial r}w_G & -\frac{mk}{r} & -\frac{m^2}{r^2} - 2n^2k^2 & ink & 0 & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \\
 & & -R_1(\frac{im}{r}v_G + inkw_G) & & &
\end{pmatrix}. \tag{A.19}
$$

Im Folgenden kann man sich auf die Fälle für $n = 1$ beschränken, da die höheren Harmonischen der Störung e^{nkz} für die lineare Stabilitätsanalyse keine Rolle spielen. Um nun die linearen *Eigenmoden* u, v, w, X, Y, Z mittels *Runge Kutta Verfahren* aus dem Eigenwertproblem (A.17) bestimmen zu können, wird dieses wie folgt umgeschrieben (für $n = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**}\mathbf{x}. \tag{A.20}$$

Dieses gewöhnliche Differentialgleichungssystem beschreibt das temporäre Verhalten einer Störung bei vorgegebenen m und nk, mit

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{im}{r} & -ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sigma + \frac{m^2}{r^2} + k^2 & 2(\frac{im}{r^2} - R_1\frac{v_G}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +R_1(\frac{im}{r}v_G + ikw_G) & & & & & \\ -2(\frac{im}{r^2} - R_1 A) & \sigma + \frac{2m^2}{r^2} + k^2 & \frac{mk}{r} & -\frac{im}{r} & 0 & 0 \\ & +R_1(\frac{im}{r}v_G + ikw_G) & & & & \\ R_1\frac{\partial}{\partial r}w_G & \frac{mk}{r} & \sigma + \frac{m^2}{r^2} + 2k^2 & -ik & 0 & -\frac{1}{r} \\ & & +R_1(\frac{im}{r}v_G + ikw_G) & & & \end{pmatrix}, \tag{A.21}$$

bzw. mit der Substitution $\alpha := \sigma + \frac{m^2}{r^2} + k^2 + R_1(\frac{im}{r}v_G + ikw_G)$:

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{im}{r} & -ik & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 2(\frac{im}{r^2} - R_1\frac{v_G}{r}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2(\frac{im}{r^2} - R_1 A) & \alpha + \frac{m^2}{r^2} & \frac{mk}{r} & -\frac{im}{r} & 0 & 0 \\ R_1\frac{\partial}{\partial r}w_G & \frac{mk}{r} & \alpha + k^2 & -ik & 0 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}. \tag{A.22}$$

Bei den beiden, in (A.21) und (A.22), auftretenden Geschwindigkeitsprofilen v_G und w_G handelt es sich um die Geschwindigkeiten des Grundzustands in azimutaler- bzw. axialer Richtung. Die Lösung dieser wurde bereits in (1.14),(1.19) explizit ermittelt, und soll deshalb hier nur der Vollständigkeit halber angegeben werden:
$v_G := v_{CCF}(r)$ wird gelöst durch: $v_{CCF}(r) = Ar + \frac{B}{r}$ [2] und $w_G := w_{APF}(r)$ mittels $w_{APF}(r) = Re^{\frac{r^2 + C\ln(r) + D}{E}}$. Die Randbedingungen bleiben unverändert wie aus (A.5) bereits bekannt.

$$\mathbf{u}\left(r = \frac{\eta}{1-\eta}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{A.23}$$

$$\mathbf{u}\left(r = \frac{1}{1-\eta}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

Zur Bestimmung der linearen Eigenmoden $u(r), v(r), w(r), X(r), Y(r), Z(r)$ ist es nun notwendig das sechsdimensionale Differentialgleichungssystem (A.20) aufzuintegrieren. Dies

[2] Es ist auch gerade diese Integrationskonstante A, die in der Matrix (A.22) zu finden ist.

geschieht hier unter Zuhilfenahme eines vierstufigen Runge Kutta Verfahrens. Dies ist ein allgemeines Verfahren zur numerischen Lösung von *Anfangswertproblemen (AWP)*, deren Anfangsbedingungen festgelegt sind. Im hier vorliegenden Fall handelt es sich jedoch um ein *Randwertproblem (RWP)*, dessen sechs Randbedingungen nur auf einem Teil des Randes festgelegt sind.
Das Problem besteht darin, dass für die einzelnen Eigenmoden $u(r), v(r), w(r)$ jeweils eine Randbedingung am inneren und für die jeweilige Eigenmode eine zweite am äußeren Zylinder zu erfüllen ist. Aufgrund der vorliegenden *no-slip* Randbedingungen (A.23, A.24) müssen die Geschwindigkeitseigenmoden $u(r), v(r), w(r)$ auf beiden Rändern also bei $r = \frac{\eta}{1-\eta}$ und $r = \frac{1}{1-\eta}$ verschwinden.
Zur Lösung des Randwertproblems wird ein *Shooting Verfahren* verwendet. Das Prinzip dieses Verfahrens beruht darauf, die Randbedingungen am inneren Zylinder durch geeignete Startvektoren zu erfüllen und die DGL (A.20) für verschiedene linear unabhängige Startvektoren aufzuintegrieren. Die hieraus erhaltenen Geschwindigkeitseigenmoden werden dann so linear kombiniert, dass sie die Randbedingungen am äußeren Zylinder erfüllen. Explizit bedeutet dies, dass drei linear unabhängige, komplexwertige Startvektoren, wie z.B.

$$\mathbf{X}_1|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (1;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (1;0) \\ (0;0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3|_{r=r_1} = \begin{pmatrix} (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (0;0) \\ (1;0) \end{pmatrix}, \tag{A.25}$$

$$\text{mit der Notation} \quad (x;y) := x + iy, \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R} \tag{A.26}$$

benötigt werden.

Diese Wahl genügt der Bedingung (A.23). Um aber auch noch (A.24) zu erfüllen, müssen die durch das Runge Kutta Verfahren aufintegrierten Moden am äußeren Rand nun so kombiniert werden, dass sie zusammen Null ergeben. Man erhält das folgende System, das es zu lösen gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\Bigg|_{r=r_2}}_{\underline{\underline{\mathbf{A}}}} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{A.27}$$

Dieses besitzt genau dann eine *nicht triviale* Lösung, wenn die Determinante der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ verschwindet mit $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(R_1, R_2, Re, m, \eta, k)$.

$$det\, \underline{\underline{\mathbf{A}}} = 0. \tag{A.28}$$

Dies ist die *Lösbarkeitsbedingung* obigen Gleichungssystems. Zur Nullstellenberechnung wurde das *Newton Raphson Verfahren* verwendet. Der gewonnene Lösungsvektor $(a_1, a_2, a_3)^T$ ist, aufgrund der Linearität von (A.20) und der verschwindenden Determinante (A.28), nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, d.h. auch $c(a_1, a_2, a_3)^T$, mit $c \in \mathbb{C}$, ist eine

Lösung. Äquivalent dazu kann auch eines der a_i frei gewählt werden. Aus dem verbleibenden 2×2 System sind die beiden anderen a_i's durch Invertierung bestimmbar, so dass der Vektor

$$\mathbf{X}(r) = a_1\mathbf{X}_1(r) + a_2\mathbf{X}_2(r) + a_3\mathbf{X}_3(r) \tag{A.29}$$

eine lineare Eigenmode des Systems darstellt, da er alle Randbedingungen erfüllt.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die temporäre Entwicklung der Eigenmoden (also der Störungen) durch den i.A. komplexen Eigenwert σ bestimmt wird. Dabei besitzen Real- und Imaginärteil von $\sigma = \gamma - i\omega$ unterschiedliche Bedeutungen:

$$Re[\sigma] = \gamma : \text{Wachstumsrate}, \quad Im[\sigma] = -\omega : \text{Frequenz der Störung}$$

Entscheidend, ob eine Störung mit der Zeit wieder verschwindet oder gemäß des Ansatzes (A.12) exponentiell anwächst, ist hierbei der Realteil γ. Somit kann das System, abhängig von γ in drei Bereiche unterteilt werden: Für $\gamma < 0$ ist das System *unterkritisch* und entsprechend für $\gamma > 0$ *überkritisch*. Für $\gamma = 0$ bezeichnet man das System als *marginal stabil*.
Die Determinante der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ hängt von insgesamt acht reellen Parametern ab, den sechs reellen Parametern R_1, R_2, Re, m, η, k sowie dem komplexen Eigenwert σ. Es werden immer sechs dieser Parameter fixiert, um die Lösbarkeitsbedingung (A.28) zu erfüllen und die zwei verbleibenden Größen mittels eines Nullstellenfinders (hier: Newton Raphson Verfahren) bestimmt.
Die beiden grundlegenden Aufgabenstellungen sehen also wie folgt aus:

1. Ermittlung der marginalen Stabilitätsgrenze (d.h. $Re[\sigma] = \gamma = 0$):

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}(R_1, \omega)|_{R_2, Re, k, m, \eta, \gamma=0} = 0. \tag{A.30}$$

2. Berechnung der komplexen Eigenwerte σ:

$$\det \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\sigma = (\gamma, \omega))|_{R_1, R_2, Re, k, m, \eta} = 0. \tag{A.31}$$

Anhang B

Ausgedehnte und lokalisierte $M = 2$ Spiralen mit axialem Durchfluss — instabile Inseln und bikritische Zustände

In diesem Kapitel werden numerische Ergebnisse, ausschließlich gewonnen aus den linearisierten Navier-Stokes Gleichungen (siehe Anh. A), für unendlich ausgedehnte, sowie lokalisierte lineare Spiral Strukturen, insbesondere solche mit azimutaler Strukturwellenzahl $M = 2$ und periodischen Randbedingungen, präsentiert. Da im Fall der linearen Analyse nur eine einzelne bestimmte Mode betrachtet wird, stimmt die Strukturwellenzahl M folglich immer mit der kritischen azimutalen Mode m überein. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel nicht weiter zwischen diesen beiden unterschieden und beide Begriffe parallel benutzt.

Prinzipiell ist die lineare Analyse der verschiedensten Strukturen im Taylor-Couette System schon lange sehr detailliert bekannt und deshalb auch in zahlreichen Arbeiten (7; 113) zu finden. Interessanterweise zeigen, im Fall der azimutalen Wellenzahl $|m| = 2$, die Eigenwertoberflächen ein signifikant komplexeres Muster, als dies bei $m = 0$ oder $|m| = 1$ der Fall ist. Hierbei ist eine *neue* Art der Bikritikalität entdeckt worden, da *zwei verschiedene* axiale Wellenzahlen *gleichzeitig* instabil werden. Weiterhin werden noch konvektive und absolute Stabilitätsschwellen untersucht, bei denen sich *isolierte Inseln* mit 'Instabilität' zeigen. Neben der Lösung der linearisierten NSE mittels Shooting Verfahren (Anh. A) wird ebenfalls eine schwach nichtlineare Analyse, mittels Ginzburg Landau Näherung (33; 112; 113), durchgeführt.

B.1 Motivation

Für alle im Folgenden durchgeführten Untersuchungen werden axial periodische Randbedingungen zugrunde gelegt. In diesem Fall besteht der axial und azimutal homogene Grundzustand aus einer Überlagerung des Circular Couette Flow und dem Annular Poisseule Flow (vgl. Abs. 1.4.2, Gl. (1.24), insofern dem System kein extern auferlegter axialer Durchfluss (62; 33) aufgeprägt wird.

Bei genügend starken Rotationsgeschwindigkeiten des Außenzylinders entstehen Spiral

Wirbel mit azimutaler Wellenzahl $m \neq 0$ aus dem Grundzustand heraus in einer symmetriebrechenden Hopf Bifurkation als Ergebnis einer linearen Instabilität (54; 56; 79; 31). Gerade solche primären Bifurkationen zu periodischen Strukturen waren Gegenstand einer großen Anzahl verschiedener linearer Stabilitätsanalysen des Grundzustands (39; 146; 102; 1; 41; 42; 79; 51; 99; 13; 13). Trotz dieser sehr zahlreichen verschiedenen linearen Analysen gibt es immer noch interessante Fragen und neue, außergewöhnliche auftretende Phänomene im linearisierten TCS.

Konkret werden in diesem Kapitel sowohl unendlich ausgedehnte, wie auch lokalisierte lineare Störungen mit azimutaler Wellenzahl $|m| = 2$ für einen ausgedehnten Parameterbereich des Durchflusses sowie innerer und äußerer Zylinderrotationsgeschwindigkeiten untersucht. Hierzu werden ausschließlich die im vorherigen Kapitel (Anh. A) beschriebenen linearisierten Navier-Stokes Gleichungen (LNSE) (A.20) benutzt. Im Wesentlichen werden die Schwellen von absoluter und konvektiver Instabilität durch eine Sattelpunktsanalyse der komplexen Dispersionsrelation, gewonnen aus den LNSE für komplexe axiale Wellenzahlen (13; 14; 144) berechnet. Diese Ergebnisse werden mit Vorhersagen der klassischen Ginzburg Landau Näherung (GLE)(33; 123) für $|m| = 2$ und reellen axialen Wellenzahlen verglichen.

Im Gegensatz zu früheren Publikationen, wie z.B. (114; 31; 56; 39; 146; 102; 51; 79; 99) bei Untersuchungen von $m = 0$ und $m \pm 1$ Störungen, zeigen diejenigen mit azimutaler Wellenzahl $|m| = 2$ *neues*, sehr außergewöhnliches und bislang noch nicht beschriebenes Verhalten, nämlich unterschiedliche Arten von *Inseln*:

(i) — im Fall unendlich ausgedehnter Strukturen —
Isolierte Inseln mit linear wachstumsfähigen $M = 2$ Lösungen, die von einem instabilen Gebiet umgeben sind, in dem alle $M = 2$ Störungen aussterben.

(ii) — im Fall lokalisierter Störungen —
Isolierte Inseln von absoluter Instabilität, oder sogar die vollständige Abwesenheit absoluter Instabilität bei gewissen Kontrollparametern.

Diese Effekte sind eine Konsequenz von signifikant komplexeren Eigenwertoberflächen, sowie dem Erscheinen von zwei, oder noch mehreren, Sattelpunkten auf der komplexen Eigenwertoberfläche, wobei sich diese bei Variation verschiedener Kontrollparameter relativ zueinander bewegen. Dies beinhaltet die Existenz bikritischer Punkte die dazu führen, dass das System *zwei* kritische Wellenzahlen für sonst gleiche Kontrollparameter besitzt. Obwohl dieses Phänomen zum Teil bereits gesehen wurde, wie etwa bei Tagg et al., die die Existenz von mehr als einem Sattelpunkt feststellten (144), so lieferten deren betrachtete Parameter aber keine der oben angesprochenen 'Inseln'. Sie beschränkten sich auf die Berechnung der absoluten und konvektiven Instabilitäten für verschiedene azimutale Wellenzahlen und Radienverhältnisse, ohne externen Durchfluss zu betrachten.

Zunächst werden nun die marginalen und kritischen Schwellen für den Fall unendlich ausgedehnter Zustände berechnet und die hierbei vorliegende *Bikritikalität* bei $|m| = 2$ diskutiert. Danach werden lokalisierte Zustände, sogenannte Wellenpakete, untersucht und insbesondere auf die konvektiven und absoluten Stabilitätsschwellen, sowie das Frontverhalten eingegangen.

B.2 System

Wie bereits zuvor erwähnt befasst sich dieses Kapitel ausschließlich mit der linearen Analyse von Wirbelstörungen im axial periodischen Taylor-Couette System einschließlich axial

auferlegten Durchflusses. Letzterer wird dabei durch folgenden Ausdruck bestimmt (vgl. auch Kap. 1, Abs. 1.4.2):

$$Re = \frac{d}{\nu}\langle w \rangle. \tag{B.1}$$

Hierin beschreibt die über die Spaltbreite gemittelte mittlere axiale Geschwindigkeit $\langle w \rangle$ den totalen Durchfluss.

Weiterhin werden die relativen Kontrollparameter

$$\mu = \frac{R_1}{R_{1,c}(Re)} - 1, \quad \epsilon = \frac{R_1}{R_{1,c}(Re=0)} - 1, \tag{B.2}$$

welche den relativen Abstand der inneren Reynoldszahl R_1 vom kritischen Onset $R_{1,c}$ bzw. $R_{1,c}(Re = 0)$, in Abwesenheit von Re angibt, benutzt (analog Gl. (9.1)). Somit beschreiben,

$$\mu_c = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon_c(Re) = \frac{R_{1,c}(Re)}{R_{1,c}(Re=0)} - 1, \tag{B.3}$$

die kritische Schwelle, die Onsets einzelner Wirbel Strukturen. Der Zusammenhang zwischen μ und ϵ ergibt sich zu:

$$\mu = \frac{\epsilon - \epsilon_c(Re)}{1 + \epsilon_c(Re)}. \tag{B.4}$$

Die hier betrachteten linearisierten Navier-Stokes Gleichungen (LNSE) (vgl. Anh. B) lauten:

$$\partial_t \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{u} - R_1(\mathbf{u}_\mathrm{g} \cdot \nabla)\mathbf{u} - R_1(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_\mathrm{g} - \nabla p. \tag{B.5}$$

Diese werden gemäß dem in Anhang A vorgestellten numerischen Verfahren gelöst.

B.3 Axial unendlich ausgedehnte Wirbel Strukturen

In diesem Abschnitt werden Störungen des Grundzustands in der Form axial unendlich ausgedehnter, periodischer Wirbel Strukturen mit reeller axialer Wellenzahl k und azimutalen Wellenzahlen $M = 0, 1, 2$ betrachtet. Die kritischen Moden sind dabei $n = \pm 1, m = M = 0$ für die rotationssymmetrischen Taylor Wirbel (TVF) Zustände und $n = \pm 1, m = nM$ für links gewundene Spiral Wirbel Lösungen (LM-SPI) mit azimutaler Wellenzahl $M = 1$ oder 2 und entsprechend $n = \pm 1, m = -nM$ für rechtsgewundene Spiral Wirbel (RM-SPI) Zustände. In Abbildung B.1 sind diese Strukturen, TVF, L1-SPI und L2-SPI, schematisch mit Hilfe von Isoflächen der azimutalen Vortizität Ω_φ dargestellt.

B.3.1 Axialer Durchfluss

Zunächst werden, wie in Abbildung B.2 zu sehen, die marginalen Stabilitätskurven des Grundzustands gegenüber Wirbelstörungen mit azimutalen Wellenzahlen $M = 0, 1, 2$ und fixiertem Außenzylinder $R_2 = 0$ betrachtet. Diese Stabilitätskurven sind die Bifurkationsschwellen von TVF, 1-SPI und 2-SPI Lösungen. Ein endlicher axialer Durchfluss, $Re \neq 0$, hebt die Symmetrieentartung von L-SPI und R-SPI Strukturen auf, wie z.B. im Detail in (114; 62) beschrieben. Weiterhin und zusätzlich hierzu besteht die zugehörige Kurve der L2-SPI Lösung bei $Re = -6$ aus zwei separaten Teilen, die zwei disjunkte (graue) Gebiete mit positiven Wachstumsraten ($\gamma > 0$) für L2-SPI Moden charakterisieren.

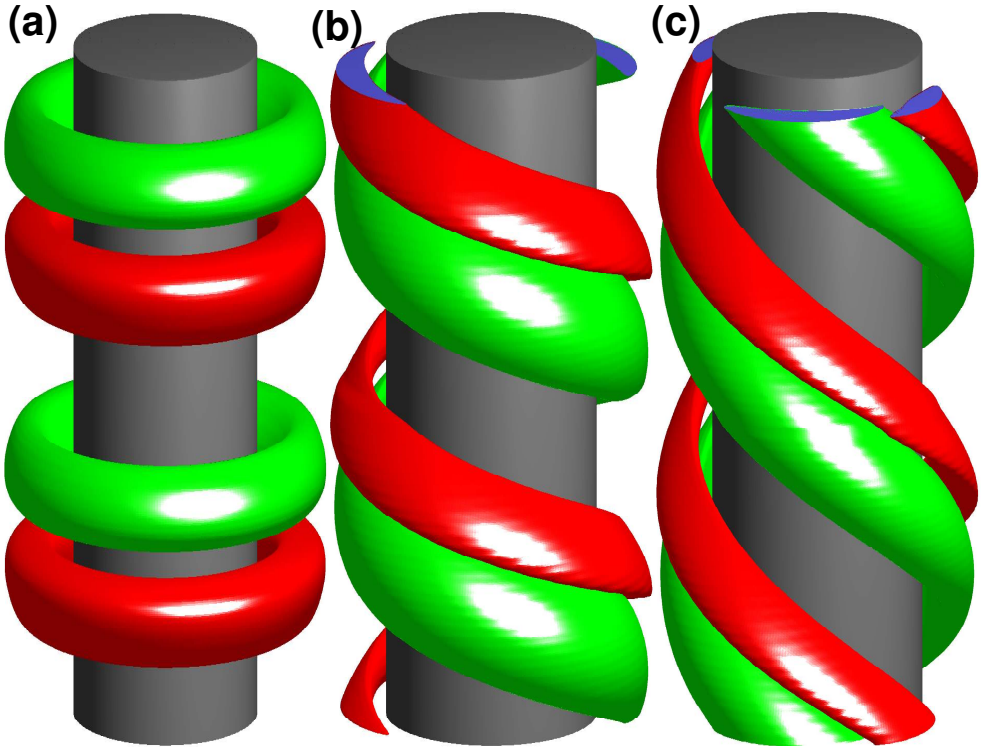


Abbildung B.1 – Isoflächen der azimutalen Vortizität $\Omega_\varphi = \partial_z u - \partial_r w$ für TVF **(a)**, L1-SPI **(b)** und L2-SPI **(c)** Lösungen in der Nähe der jeweiligen Onsets, $\epsilon = 0.02$, $\eta = 0.5$, $k = 3.927$. Da $Re = 0$ sind die R-SPI Strukturen gerade die axialen Spiegelbilder der entsprechenden L-SPI Strukturen. In axialer Richtung sind zwei Perioden dargestellt.

Um den Ursprung der zwei *getrennten* marginalen Stabilitätskurven, die zu den L2-SPI Störungen gehören, zu erklären, stellt die Abbildung B.3 die Oberflächen der linearen Wachstumsraten $\gamma(k, R_1)$ von TVF, L1-SPI und L2-SPI Moden über der $k - R_1$ Ebene für die Parameter $R_2 = 0, Re = -6, \eta = 0.5$ dar. Den marginalen Stabilitätsschwellen entsprechen die $\gamma = 0$ Isolinien dieser 'Gebirgslandschaft' (rote Kurven in Abb. B.3). Im Gegensatz zu den monoton variierenden Oberflächen bei TVF und L1-SPI Moden in **(a)** und **(b)** besitzt die Gebirgslandschaft der L2-SPI Mode in Abbildung B.3**(c)** einen Sattel und einen kleinen 'Hügel', wobei ein Teil dieses oberhalb, $\gamma = 0$, liegt.

Die Gestalt dieser Gebirgslandschaft für L2-SPI Moden ist nahezu unabhängig von Re und R_2 (siehe später). Eine Variation von Re hat eine einfache Verschiebung des gesamten Berges zu niedrigeren oder höheren γ Werten zur Folge (d.h. in der Abb. B.3 nach oben oder unten). Somit verschwindet die 'Insel' in Abbildung B.2**(b)** bei genügend stark negativen Re, wenn die Spitze des Hügels unter $\gamma = 0$ zu liegen kommt. Auf der anderen Seite verbindet sich die Insel mit der hauptsächlichen (grauen) instabilen Region der Abbildung B.2**(b)**, wenn bei genügend schwach negativen Re der Sattel über die $\gamma = 0$ Ebene gehoben wird.

Dies ist in der Abbildung B.4 dargestellt. Dort sind die marginalen Stabilitätsoberflächen, $\gamma = 0$, für L2-SPI Moden im $k - R_1 - Re$ Parameterraum bei $R_2 = 0$ **(a1)** und im $k - R_1 - R_2$ Raum bei $Re = -6$ **(b1)** zu sehen. Die jeweiligen marginalen Kurven sind

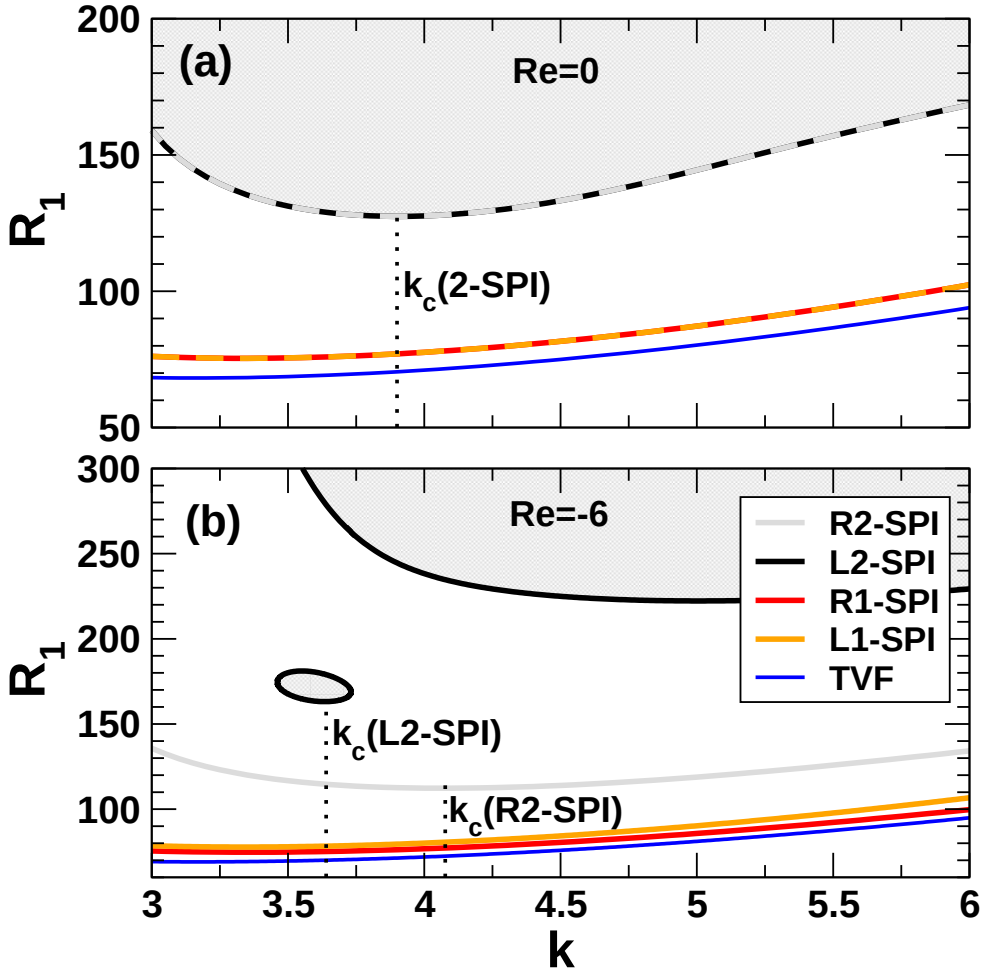


Abbildung B.2 – Marginale Stabilitätsschwellen des Grundzustands gegenüber Wirbelstörungen bei $R_2 = 0, \eta = 0.5$ mit azimutalen Wellenzahlen $M = 0, 1, 2$ für $Re = 0$ **(a)** und $Re = -6$ **(b)**. Im Fall der Letzteren **(b)** existiert eine isolierte Insel von Instabilität gegenüber L2-SPI Strukturen. Die senkrechten, gepunkteten Linien charakterisieren die kritischen Wellenzahlen der 2-SPI Lösung, wie indiziert.

in der $k - R_1$ Ebene in schwarz gezeichnet, in **(a2)** für variierte Werte Re bei $R_2 = 0$ und in **(a2)** für verschiedene R_2 bei $Re = -6$. Die dicken roten Linien in **(a1)** bei $Re = -6$, sowie in **(b1)** bei $R_2 = 0$ gehören zu den entsprechenden dicken schwarzen Linien in **(a2)** und **(b2)**. Die durchgehenden roten Linien in **(a2)** und **(b2)** zeigen die Variation der kritischen Punkte $(k_c, R_{1,c})$ mit Re bzw. R_2. Der Sprung der kritischen Punkte ist durch die gepunkteten roten Linien angedeutet.

Zunächst soll der Fall betrachtet werden, wie sich die Gestalt der marginalen Schwellen der L2-SPI Lösung im Parameterraum für fixierten Außenzylinder, $R_2 = 0$, bei Variation von Re verändert. Bei Verminderung von Re von Null zu stärker negativen Werten hin, d.h. einer vertikalen Aufwärtsbewegung in Abbildung B.4**(a1)** entsteht der Sattel bei $Re \approx -5.1$. Bei dieser Isolinie ist der Teil des Berges in **(a1)**, der aus der Ebene herausragt von

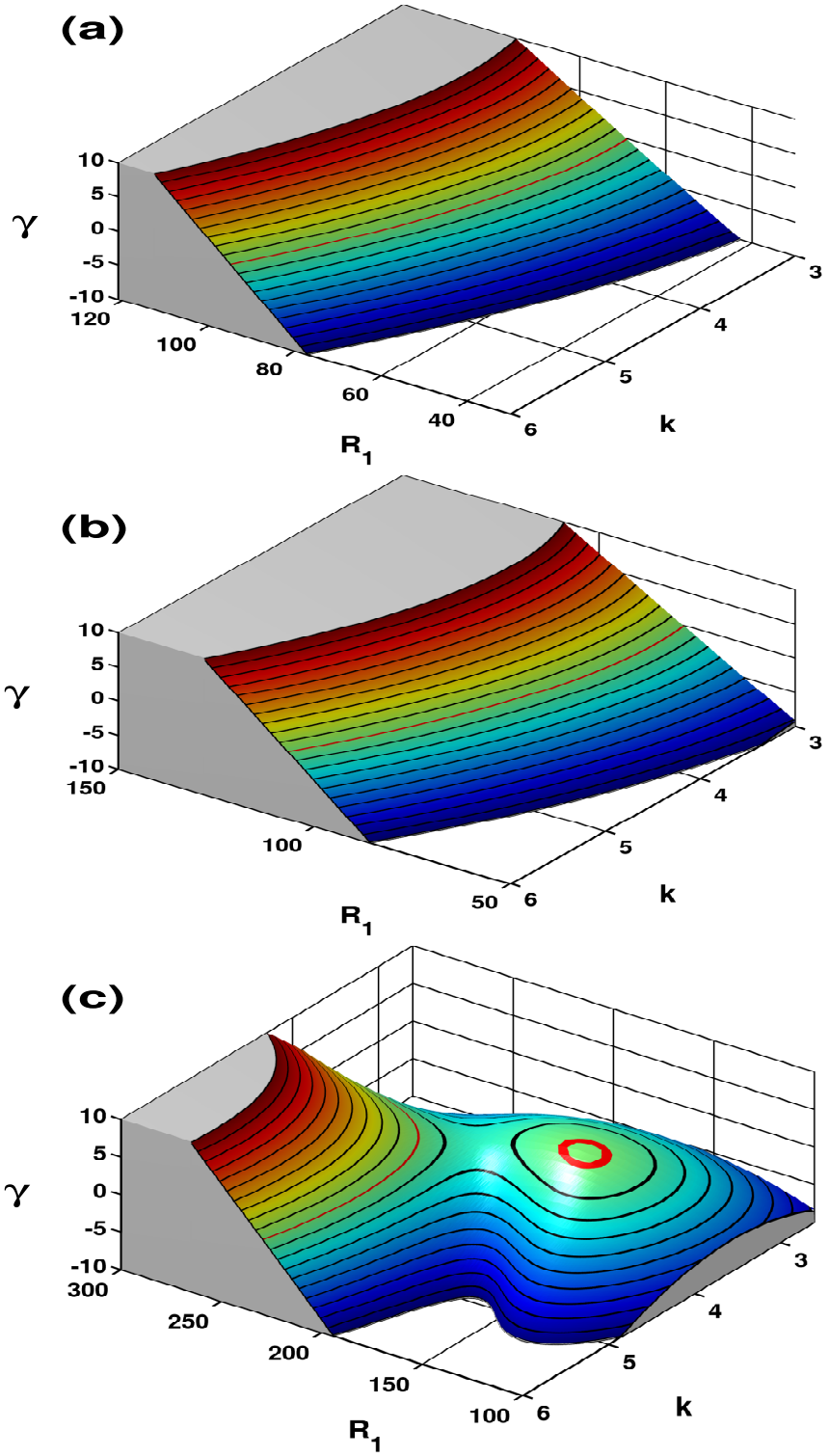


Abbildung B.3 – Oberflächen des linearen Wachstumsparameters $\gamma(k, R_1)$ über der $k - R_1$ Ebene für TVF **(a)**, L1-SPI **(b)** und L2-SPI **(c)** Lösungen. In allen Fällen gilt $R_2 = 0, Re = -6, \eta = 0.5$ wie in Abbildung B.2**(b)**. Die $\gamma = 0$ Isolinie (rote Linie) identifiziert die marginale Kurve. Die charakteristische Gestalt der γ Oberfläche der L2-SPI Lösung führt dazu, dass die zugehörige marginale Kurve in zwei separate Teile aufgespalten ist, wie z.B. in Abbildung B.2**(b)**.

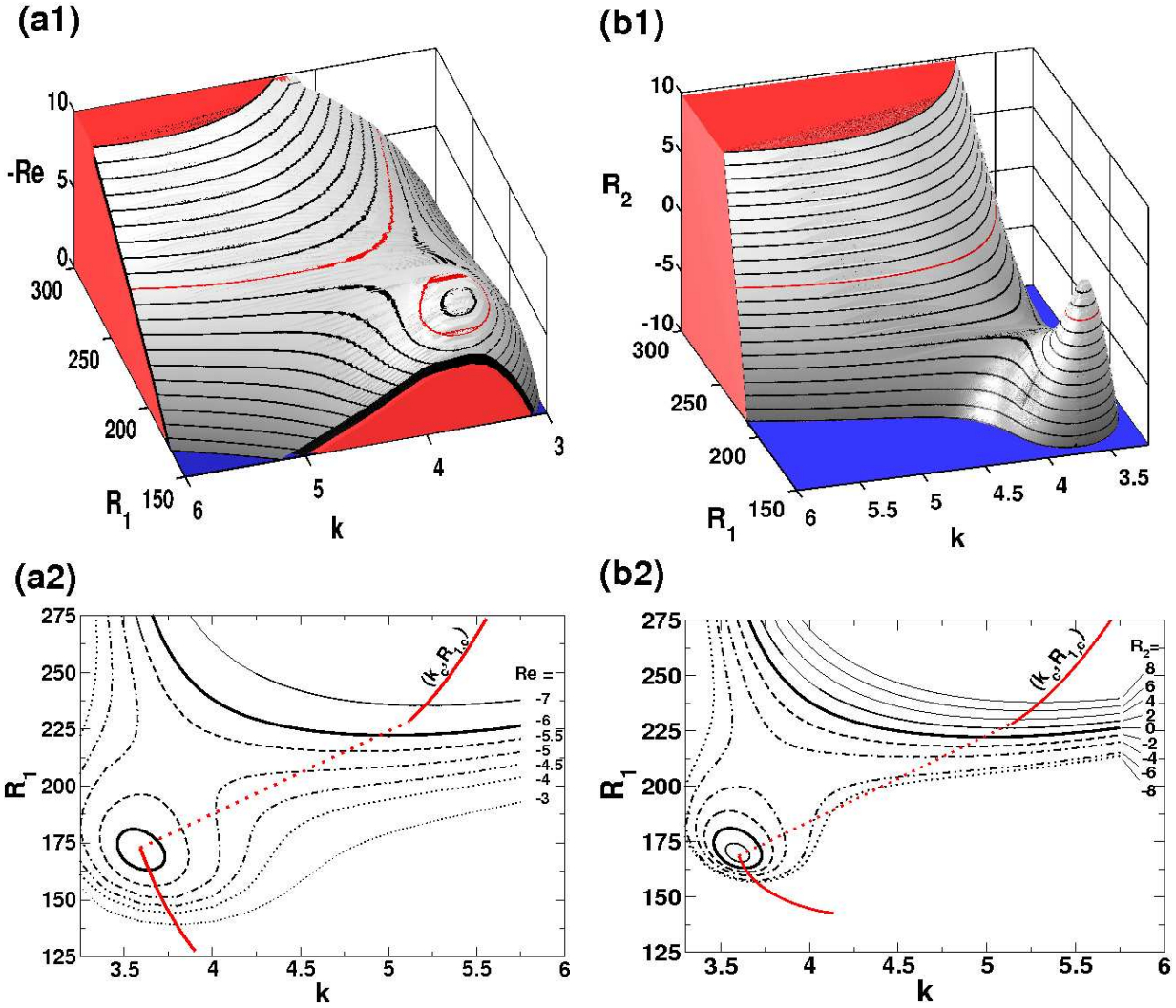


Abbildung B.4 – Marginale Stabilitätsoberflächen, $\gamma = 0$, der L2-SPI Moden im $k - R_1 - Re$ Parameterraum bei $R_2 = 0$ **(a1)** und im $k - R_1 - R_2$ Raum bei $Re = -6$ **(b1)**. Die Oberflächen teilen die Parameterräume in einen $\gamma < 0$ (blau) und einen $\gamma > 0$ (rot) Anteil. Die $\gamma = 0$ Isolinien, d.h. also die marginalen Kurven, sind in der $k - R_1$ Ebene in schwarz dargestellt, in **(a2)** für verschiedene Re bei $R_2 = 0$ und in **(b2)** für verschiedene R_2 bei $Re = -6$ für $\eta = 0.5$. Die dicke rote Linie in **(a1)** bei $Re = -6$ und in **(b1)** bei $R_2 = 0$ entsprechen den zugehörigen dicken schwarzen Linien in **(a2)** und **(b2)**. Die durchgezogenen roten Kurven in **(a2)** und **(b2)** zeigen die Variation des kritischen Punktes $(k_c, R_{1,c})$ mit Re, bzw. R_2. Der Sprung der kritischen Punkte ist durch die gepunktete rote Linie angedeutet.

dem Hauptteil getrennt. Somit trennt sich die nach unten ausgebeulte marginale Kurve in **(a2)** bei $Re \approx -5.1$ ab und formt eine 'Insel' im linken unteren Teil in **(a2)**. Eine weitere Verminderung von Re zu noch stärker negativeren Werten, d.h., eine weitere vertikale Aufwärtsbewegung in **(a1)** erreicht man die Spitze des Hügels bei $Re \approx -6.4$ und die Insel in **(a2)** schnürt sich weiter, bis hin zu einem einzelnen Punkt, zusammen um dann

schließlich zu verschwinden.

Wenn man den Durchfluss fixiert, etwa bei $Re = -6$ und stattdessen die äußere Reynoldszahl R_2 variiert, wie in Abbildung B.4**(b)** zu sehen, so findet man die gleichen strukturellen Änderungen in den Lagen der marginalen Kurven der L2-SPI Lösung, im Parameterraum, wie bei Variation von Re in Abbildung B.4**(a)**. Dies bedeutet, dass Veränderungen des Durchflusses Re oder der Rotationsrate des äußeren Zylinders R_2 den gleichen Effekt auf die Bifurkationsschwellen der L2-SPI Zustände besitzen.

Diese Übereinstimmung im Verhalten unter Veränderung von Re oder R_2 überträgt sich auch auf die kritischen Werte $k_c, R_{1,c}$ und ω_c der L2-SPI Lösung was in der Abbildung B.5 durch die dicken schwarzen Linien zu erkennen ist. Zu beachten sind hierbei insbesondere die Sprünge (punktierte vertikale Linien) wenn die Inselbereiche in den Abbildungen B.4**(a)** und B.5**(a)** bei $Re \approx -6.4$, oder in den Abbildungen B.4**(b)** und B.5**(b)** bei $R_2 = 2.3$ verschwinden. Die schraffierten Bereiche in Abbildung B.5 markieren die Parameterintervalle, **(a)** $-6.4 \lesssim Re \lesssim -5.1$ und **(b)** $-5.2 \lesssim R_2 \lesssim 2.3$, in denen die marginalen Kurven eine *'Instabilitäts-Insel'*, umgeben von Stabilität, aufweisen, und somit abgetrennt von dem 'Hauptteil' der instabilen Region in der $k - R_1$ Ebene in Abbildung B.4 vorliegen (siehe auch Abb. B.2).

Die kritischen Eigenschaften der anderen Wirbel Moden mit $M = 0, 1, 2$ sind ebenfalls der Vollständigkeit mit in der Abbildung B.5 aufgenommen. Ohne Durchfluss liegen L- und R-SPI Lösungen symmetrieentartet vor, so dass auch ihre kritischen Werte, k_c und $R_{1,c}$, identisch sind und sich ihre Frequenzen ω_c nur im Vorzeichen unterscheiden. Diese Entartung wird durch axialen Durchfluss aufgehoben (114; 63), d.h. die Onsets von aufwärts [abwärts] propagierenden SPI Lösungen werden zu größeren [kleineren] R_1 Werten hin verschoben. Somit liegen im Re Bereich der Abbildung B.5 die Bifurkationsschwellen von L1- und L2-SPI Lösungen oberhalb derer von R1- und R2-SPI Lösungen.

Die kritischen axialen Wellenzahlen in der Abbildung B.5**(1)** für L2-SPI Zustände verhalten sich signifikant anders als diejenigen von R2-SPI, oder L1- und R1-SPI Zuständen. Der Unterschied zwischen $k_c(L2)$ und $k_c(R2)$ für stärkeren Durchfluss ist entscheidend und größer als der zwischen $k_c(L1)$ und $k_c(R1)$. Dies gilt ebenso auch für die kritischen Reynoldszahlen $R_{1,c}$ in **(2)** und die kritischen Frequenzen ω_c in **(3)**.

Weiterhin wachsen alle Wellenzahlen, außer die L2 Wellenzahl, mit zunehmendem $|Re|$ an. Dies bedeutet, dass das System, für den Fall der aufwärts wandernden L2-SPI Lösung, diejenige Wellenzahl selektiert, die mit dem axialen 'Kopf Wind' anwächst und bei $Re \approx -6.4$ auf die signifikant kürzere Wellenlänge springt. In diesem Bereich ist die kritische Wellenzahl $k_c(L2)$ der L2-SPI Mode größer als $k_c(R2)$. Dies ist gerade invers zur Situation der kritischen 1-SPI Moden.

B.3.2 Gegenrotierende Zylinder

Allgemein gesprochen bewegt sich die γ Oberfläche der Abbildung B.3**(c)** ebenfalls als Ganzes, wenn R_2, bei fixiertem Re, variiert wird, sehr ähnlich der zuvor diskutierten Situation bei fixiertem Re und Veränderung von R_2. In der Tat findet man hier ebenfalls ein Intervall von R_2 Werten innerhalb dessen die Sättel in Abbildung B.3**(c)** unterhalb der $\gamma = 0$ Ebene liegen, während ein Teil des Hügels oberhalb dieser Ebene liegt, so dass die $\gamma = 0$ Isolinie aus zwei separaten Kurven in der $k - R_1$ Ebene besteht. Für $Re = -6$ ergibt sich die gleiche Situation mit einer instabilen Insel in der $k - R_1$ Ebene, die durch die marginale Kurve eingeschlossen ist, für $-5.2 \lesssim R_2 \lesssim 2.3$. Somit muss man lediglich Re oder R_2 variieren um die $\gamma = 0$ Ebene in den Bereich zwischen dem Sattel und der Spitze des Hügels zu bekommen.

An dieser Stelle sei nochmals besonders darauf hingewiesen, dass das 'Entstehungssze-

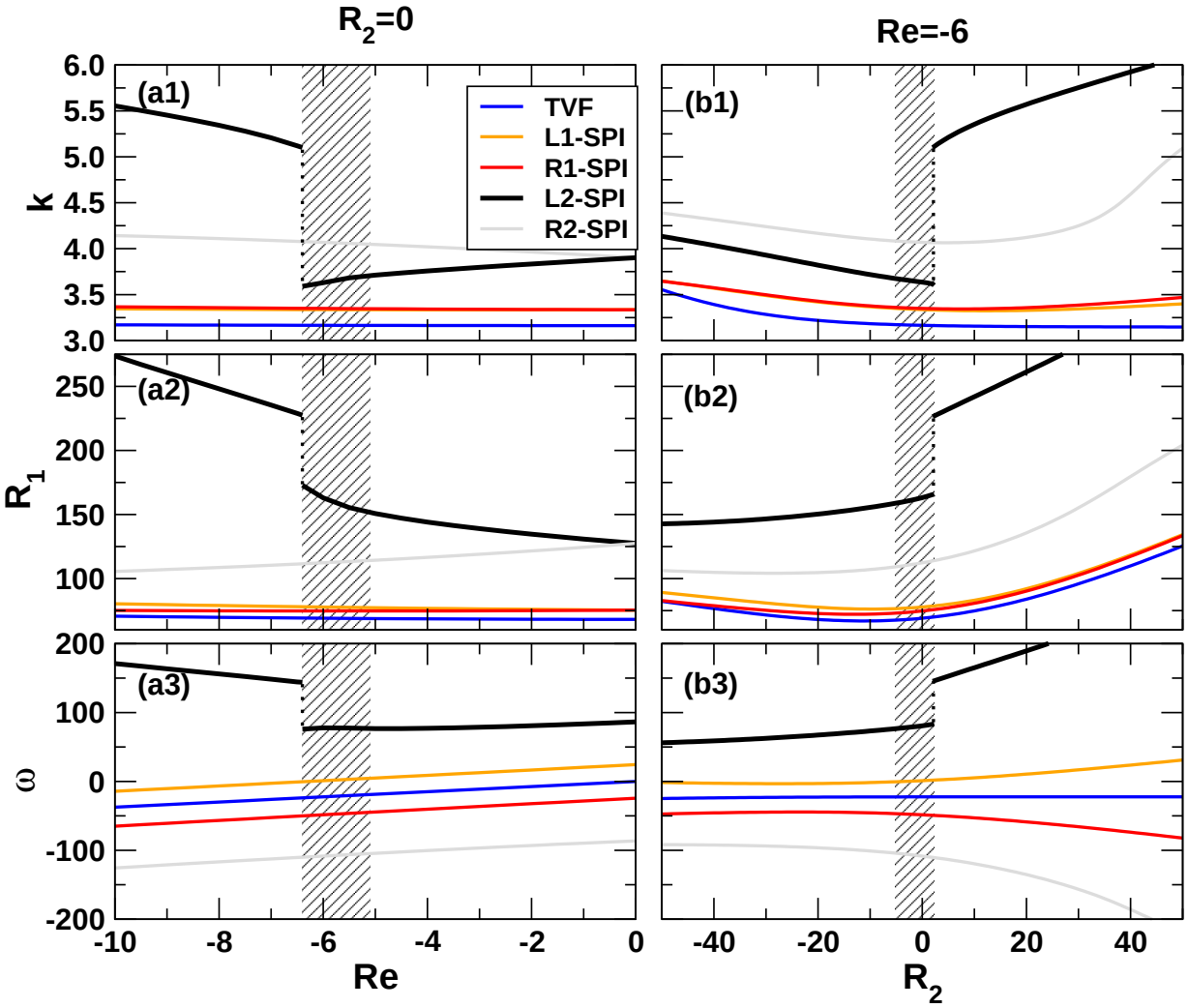


Abbildung B.5 – Kritische axiale Wellenzahl k_c **(1)**, kritische Reynoldszahl $R_{1,c}$ **(2)** und kritische Frequenz ω_c **(3)** für TVF, 1-SPI und 2-SPI Zustände aufgetragen gegen den axialen Durchfluss Re **(a)** und die äußere Reynoldszahl R_2 **(b)**. Die gestreiften Gebiete markieren die Intervalle, in denen die marginale Kurve der L2-SPI Lösung in zwei separate Bereiche aufgespalten ist, **(a)** $-6.4 \lesssim Re \lesssim -5.1$ und **(b)** $-5.2 \lesssim R_2 \lesssim 2.3$, und somit eine isolierte 'Insel'(schraffierte Bereiche) der Instabilität gegenüber L2-SPI Moden existiert. Sobald die Insel verschwindet vollführen die kritischen Werte einen Sprung, der durch die vertikal gestrichelten Linien angedeutet ist.

nario' der γ Landschaft für L2-SPI Störungen, wie oben beschrieben, mit der Ausbildung von marginalen L2 Kurven nur dann auftritt, wenn der Durchfluss genügend stark ist, nämlich $Re \lesssim -0.1$. Im Fall $Re \gtrsim -0.1$ konnten *keine* R_2 Werte gefunden werden, bei denen isolierte Inseln für L2 Wachstum in der $k - R_1$ Ebene existieren.

Als repräsentatives Beispiel wurde in Abbildung B.5**(b)** der fixierte axiale Durchfluss $Re = -6$ gewählt, der innerhalb des zuvor beschriebenen Re Intervalls liegt. Zu sehen sind die kritischen Werte, axiale Wellenzahl k_c, Reynoldszahl $R_{1,c}$ und Frequenz ω_c, aufgetragen gegen R_2 für TVF, 1-SPI und 2-SPI Zustände. Die schraffierten Gebiete markieren erneut

die Intervalle, in denen die marginale Kurve der L2-SPI Lösung in zwei separate Teile aufgespalten ist und somit eine isolierte Instabilitäts-Insel für L2-SPI Moden in der $k - R_1$ Ebene existiert.

Während die kritischen Parameterwerte von TVF, L1-SPI, R1-SPI und R2-SPI Moden als Funktion von R_2 das *glatte 'klassische'* Verhalten aufweisen, so zeigt die kritische Kurve der L2-SPI Mode bei $R_2 \approx 2.3$ einen Sprung, analog der Situation in Abbildung B.5**(a)**, die gerade zuvor diskutiert wurde. In beiden Fällen (Abb. B.5**(a,b)**) tritt der Sprung auf, wenn die Insel in der marginalen Stabilitätskurve in der $k - R_1$ Ebene (vgl. Abb. B.1 und B.3) verschwindet. Das schraffierte R_2 Intervall in Abbildung B.5**(b)** beinhaltet die R_2 Werte, die zwischen dem Sattel und dem lokalen Maximum an der Spitze des Hügels der Abbildung B.4**(b1)**, die die zugehörige $\gamma = 0$ Isooberfläche im $k - R_1 - R_2$ Raum darstellt, liegen.

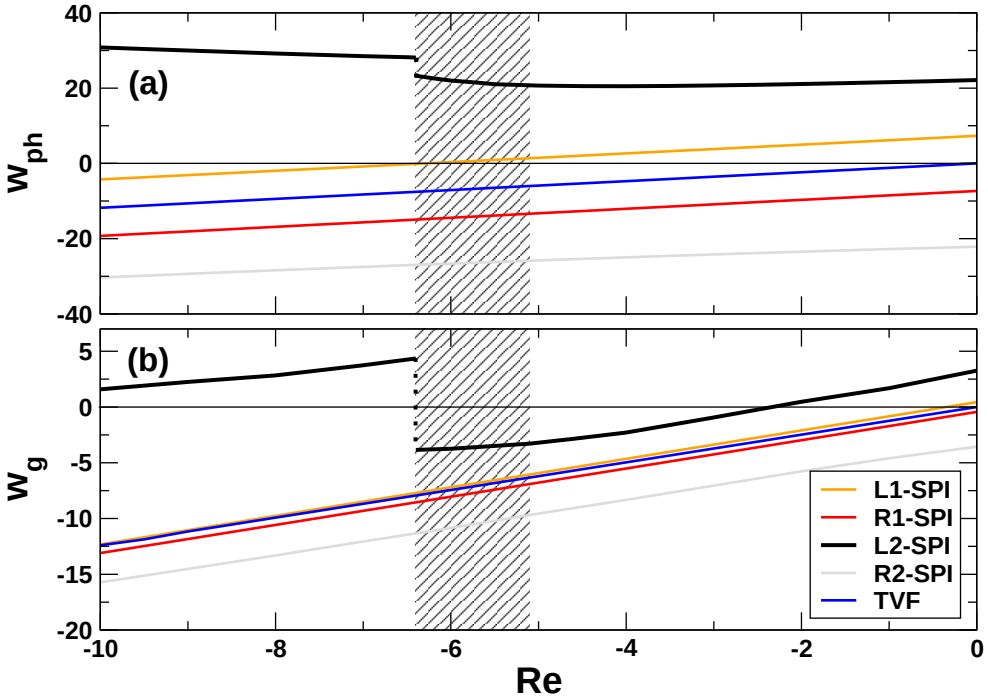


Abbildung B.6 – Kritische axiale Phasengeschwindigkeit, $w_{ph} = \omega_c/k_c$ **(a)**, und Gruppengeschwindigkeit, $w_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}\big|_c$ **(b)**, von TVF und SPI Lösungen aufgetragen gegen Re für $R_2 = 0, \eta = 0.5$. Die schraffierten Gebiete spiegeln das Erscheinen von isolierten Inseln marginaler Stabilität in der $R_1 - Re$ Ebene wieder, wie z.B. in Abbildung B.5**(a)** dargestellt.

Als letztes sollen in diesem Abschnitt die unterschiedlichen Geschwindigkeiten untersucht werden, die im Bulk auftreten können.

Abbildung B.6**(a)** zeigt die kritische axiale Phasengeschwindigkeit, $w_{ph} = \omega_c/k_c$, von unendlich ausgedehnten Wirbel Strukturen, die sich aus den, in Abbildung B.5**(a)** gezeigten, kritischen Eigenschaften ergeben. Bei Verringerung des Durchflusses, d.h. mit zunehmender Negativität von Re (von rechts nach links in Abb. B.6) nehmen die kritischen Phasengeschwindigkeiten von TVF, L1-SPI, R1-SPI und R2-SPI Zuständen kontinuierlich weiter ab, während diejenige der L2-SPI Lösung zunächst abnimmt, dann aber anwächst. Dies ist sehr eigenartig, da im Falle der axial aufwärts wandernden L-SPI Lösung, der nach

unten gerichtete Durchfluss die Intensität des 'Kopfwinds' vergrößert, wenn Re stärker negativ wird. Trotzdem bleibt die Phasengeschwindigkeit der L2-SPI Mode, mit wachsender Amplitude, aufwärts gerichtet. Weiterhin zeigt w_{ph} der L2-SPI Lösung einen Sprung nach oben, wenn die isolierte Instabilitäts-Insel in der $k-R_1$ Ebene bei $Re \approx -6.4$ verschwindet.

In der Abbildung B.6**(b)** sind die zugehörigen Gruppengeschwindigkeiten, $w_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big|_c$, der verschiedenen Zustände dargestellt. In allen Fällen verringern sich diese kontinuierlich, wenn der abwärts gerichtete Durchfluss stärker wird. Allerdings vollzieht die Gruppengeschwindigkeit der L2-SPI Störungen bei $Re \approx -6.4$ einen Sprung hin zu einem positiven Wert, wenn die kritische Wellenzahl, wie in Abbildung B.5**(a1)** zu sehen, auf einen signifikant größeren Wert springt. Danach bewegt sich das Zentrum eines Wellenpaketes, aufgebaut aus L2-SPI Moden nahe der kritischen Werte, aufwärts, d.h. *entgegengesetzt* dem Durchfluss.

Bevor nun lokalisierte Strukturen betrachtet werden, sei das zum Teil sehr außergewöhnliche, in den letzten Abschnitten diskutierte, Verhalten von ausgedehnten L2-SPI Zuständen wie folgt zusammengefasst: Die gefundenen isolierten Inseln wachstumsfähiger $m = 2$ Moden sind auf eine, abhängig der Kontrollparameter, topologisch deutlich kompliziertere Oberfläche des Wachstumsparameter, $\gamma(R_1, k)$, zurückzuführen.

B.4 Lokalisierte Strukturen - Wellenpakete

Nachdem bis zu diesem Zeitpunkt nur unendlich ausgedehnte Zustände betrachtet wurden, wird im nun folgenden Teil das raumzeitliche Verhalten von axial lokalisierten Strukturen, bestehend aus linear überlagerten Wellenpaketen von TVF und SPI Moden, sowie deren Front Eigenschaften untersucht. Diese Analyse stellt die Frage nach der Kenntnis des zeitlich komplexen Eigenwertes, $\sigma(Q) = \gamma(Q) - i\omega(Q)$, der Wirbelmoden,

$$\mathbf{u} \propto e^{i(Qz+m\varphi)+\sigma t}, \tag{B.6}$$

mit azimutaler Wellenzahl m. Dieser Eigenwert der LNSE (B.5) muss mit dem obigen Modenansatz als Funktion der komplexen axialen Wellenzahl, $Q = k - iK$, berechnet werden. Darin ist k, wie zuvor, die reelle axiale Wellenzahl und K bezeichnet die axial räumliche Wachstumsrate des Feldes $\mathbf{u}$. Einsetzen des Ansatzes (B.6) in die LNSE (B.5) erlaubt es die Eigenwerte $\sigma(Q)$ zu berechnen, z.B. mit Hilfe eines Shooting Verfahrens wie im vorangegangenen Anhang A beschrieben.

Zum Vergleich der Ergebnisse bzgl. der Dispersionsrelation $\sigma(Q)$ der LNSE wird außerdem eine approximierte Dispersionsrelation $\sigma_{GLE}(Q)$ der linearen Wirbel Moden, die sich aus der linearen Ginzburg Landau Gleichung (GLE) (33)

$$\tau_0(\partial_t + w_{\mathrm{g}}\partial_z)A = [(1 + ic_0)\mu + (1 + ic_1)\xi_0^2\partial_z^2]A \tag{B.7}$$

ergibt, unter der Annahme von sich axial und zeitlich nur langsam verändernde Amplituden, $A(z,t)$, einer kritischen Wirbelmode $\propto e^{i(k_c z+m\varphi-\omega_c t)}$, benutzt. Somit erhält man die Dispersionsrelation (114):

$$\sigma_{GLE}(Q) \;=\; -i\omega_c - i(Q-k_c)w_g + (1+ic_0)\frac{\mu}{\tau_0} - (1+ic_1)\frac{{\xi_0}^2}{\tau_0}(Q-k_c)^2. \tag{B.8}$$

Dabei werden die linearen Ginzburg Landau Koeffizienten w_{g}, τ_0, ξ_0, c_0 und c_1, die in die Dispersionsrelation (B.8) eingehen, an den kritischen Stellen $\gamma_c = 0, Q = k_c$ (114) berechnet. Diese hängen ebenfalls von m, R_2 und Re ab.

B.4.1 Konvektive und absolute Instabilität

Der Übergang vom konvektiv instabilen hin zum absolut instabilen Bereich des Grundzustandsflusses, gegenüber Wachstum von Störungen, mit bestimmter azimutaler Wellenzahl m und axialer Wellenzahl k ist im Laborsystem von der Umkehrung der Propagationsrichtung einer der beiden Fronten eines Wellenpaketes begleitet. D.h. im *konvektiv instabilen* Bereich bewegen sich beide Frontgeschwindigkeiten und die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes in die *gleiche* Richtung, während sich im *absolut instabilen* Bereich die Fronten gerade *entgegengesetzt* bewegen, so dass die *Vorzeichen* in den Frontgeschwindigkeiten *verschieden* sind (siehe auch Abs. B.4.2 weiter unten). An der Grenze zwischen diesen beiden Bereichen ist exakt eine der beiden Fronten im Laborsystem fixiert ($v_s = 0$[1]).

Um nun diese Grenze zu finden, die im Folgenden durch den Index 'c-a' (convectiv-absolut) gekennzeichnet wird, wird eine Sattelpunktsanalyse für $\sigma(Q)$ sowie für $\sigma_{GLE}(Q)$ durchgeführt. Die notwendigen Sattelpunktsbedingungen für nicht wachsende und nicht wandernde Fronten im Laborsystem (33; 114; 70) lauten:

$$\mathrm{Re}\,[\sigma(Q)|_{Q_s,\mu_s}] = 0, \qquad \left.\frac{d\sigma(Q)}{dQ}\right|_{Q_s,\mu_s} = 0, \tag{B.9}$$

für einen Sattel mit $\sigma(Q)$, der bei $Q_s = Q_{c-a}$ liegt mit $\mu_s = \mu_{c-a}$ (70). Die Lösung der Gleichung (B.9) bei fixiertem m, Re und R_2 ergibt demzufolge die gesuchte Schwelle μ_{c-a}, d.h. $R_{1,c-a}$ und $k_{c-a}, K_{c-a}, \omega_{c-a}$.

Somit kann man zwischen drei verschiedenen Bereichen unterscheiden (vgl. auch Abb. B.7):

(i) Im absolut stabilen Bereich wird jede Art von Störung weggedämpft.

(ii) Im konvektiv instabilen Bereich existieren axial periodische, d.h. unendlich ausgedehnte Störungen mit Wellenzahlen außerhalb eines Bandes endlicher Breite, die zusammen mit dem überlagerten Wellenpaket anwachsen können. Allerdings bewegen sich beide Fronten des Wellenpaketes in die gleiche Richtung, so dass das Paket als Ganzes aus dem System herausgeblasen wird, obgleich die Amplituden kontinuierlich anwachsen.

(iii) Im absolut instabilen Parameterbereich wächst das Paket immer weiter an, während sich die beiden Fronten in unterschiedliche Richtung bewegen.

Um nun das Stabilitätsverhalten zu bestimmen, müssen alle Sattelpunkte untersucht werden, die der Gleichung (B.9) genügen – hier konkret nur für $m = 2$. Diese Sättel sind durch Trajektorien im $k-K-R_1$ Raum repräsentiert, die alle auf der Stabilitätsoberfläche $R_{1,\mathrm{stab}}(k, K)$ mit Störungen der Form $\exp[i(Qz + m\varphi) + \gamma t] = \exp[(K + ik)z + im\varphi + \gamma t]$ für $m = 2$ starten.

Zunächst werden nun nur die Sattelkurven betrachtet, die aus dem kritischen Punkt $(k_c, K = 0, R_{1,c})$, einer unendlich ausgedehnten Störung, heraus entstehen. In diesem Punkt erscheint *immer* ein Sattelpunktpaar und nahe dem kritischen Punkt besitzen diese beiden Sättel ein unterschiedliches Vorzeichen in K, was den jeweiligen Fronttyp '+' oder '-' (siehe auch Abs. B.4.2 und (114)) charakterisiert. Unter Vernachlässigung weiterer Sättel ist es somit möglich Parameterbereiche zu finden, in denen wachsendes R_1 das System vom konvektiv instabilen in den absolut instabilen und dann später bei weiter wachsendem R_1 erneut zurück in den konvektiv instabilen Bereich treibt.

[1] Der Index s indiziert den Sattel, der alle Bedingungen der Sattelpunktsanalyse in Gl. (B.9) erfüllt.

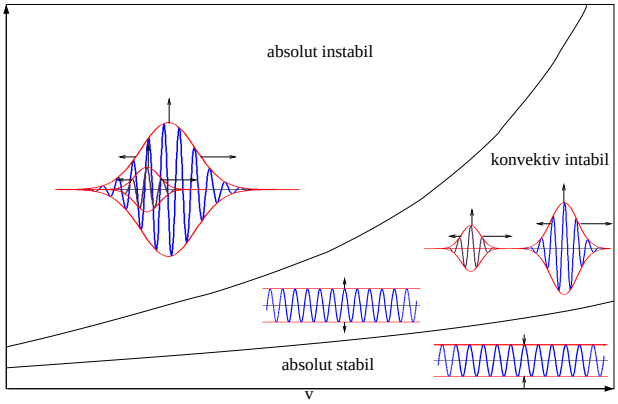


Abbildung B.7 – Schematische Darstellung des zeitlichen Verlaufs lokalisierter bzw. unendlich ausgedehnter Störungen mit den daraus resultierenden Stabilitätsbereichen; grüne Pfeile symbolisieren das Wachstumsverhalten der Amplituden; schwarze Pfeile stehen für die Frontgeschwindigkeiten, $v_{\pm}$, im Fall von lokalisierten Wellenpaketen; Geschwindigkeit v von links nach rechts. Bereiche: **(a)** absolut stabil, **(b)** konvektiv instabil, **(c)** absolut instabil.

Nach dieser Entdeckung werden danach folgend weitere Sattelpunkte mit berücksichtigt, die irgendwo im $k - K - R_1$ Raum auftreten können, auch für $K \neq 0$. Diese haben ebenfalls Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Wellenpaketes, da sie im Allgemeinen das System daran hindern vom absolut instabilen zurück in den konvektiv instabilen Bereich zu gelangen.

Entwicklung von Sattelpunkten aus dem kritischen Punkt heraus

Zunächst wird nun nur das Sattelpunktpaar betrachtet, welches im kritischen Punkt $(k_c, K = 0, R_{1,c})$ startet. Die Abbildung B.8**(a)-(c)** stellt die Re Abhängigkeit der unterschiedlich ermittelten kritischen Schwellen ϵ_c (Gl. (B.3)) und die konvektiv absoluten Schwellen,

$$\epsilon_{c-a}(Re) := \frac{R_{1,c-a}(Re)}{R_{1,c}(Re = 0)} - 1, \tag{B.10}$$

für $m = 2$ Störungen bei drei verschiedenen R_2 Werten dar. Die Bifurkationsschwellen, ϵ_c (schwarze Linie), von axial unendlich ausgedehnten 2-SPI Zuständen und die Schwelle, ϵ_{c-a} (blaue durchgehende Linie), zwischen dem konvektiven und dem absolut instabilen Bereich sind aus der Dispersionsrelation der LNSE (B.5) mittels Shooting Verfahren und Gleichung (B.9) berechnet worden. Die gestrichelte blaue Linie, ϵ_{c-a}(GLE), hingegen repräsentiert die aus der GLE Näherung mit Gleichung (B.8) bestimmte absolut konvektive Schwelle.

Die blaue Oberfläche (gewonnen aus den LNSE) in Abbildung B.8**(d)**, mit der Gestalt eines Horns, umschließt den absolut instabilen Bereich von $m = 2$ Störungen – die blauen Bereiche in Abbildung B.8**(b)** und **(c)** zeigen Querschnitte des Horns bei $R_2 = 0$ bzw. $R_2 = -50$. Innerhalb des Horns dehnen sich anfangs kleine lokalisierte $m = 2$ Wellenpakete axial in *beiden* Richtungen aus. Außerhalb des Horns, in der konvektiv instabilen Region, oberhalb der gekrümmten ϵ_c Oberfläche (grau), besitzen $m = 2$ Wellenpakete eine positive Wachstumsrate und werden advektiv aus dem System herausgeblasen.

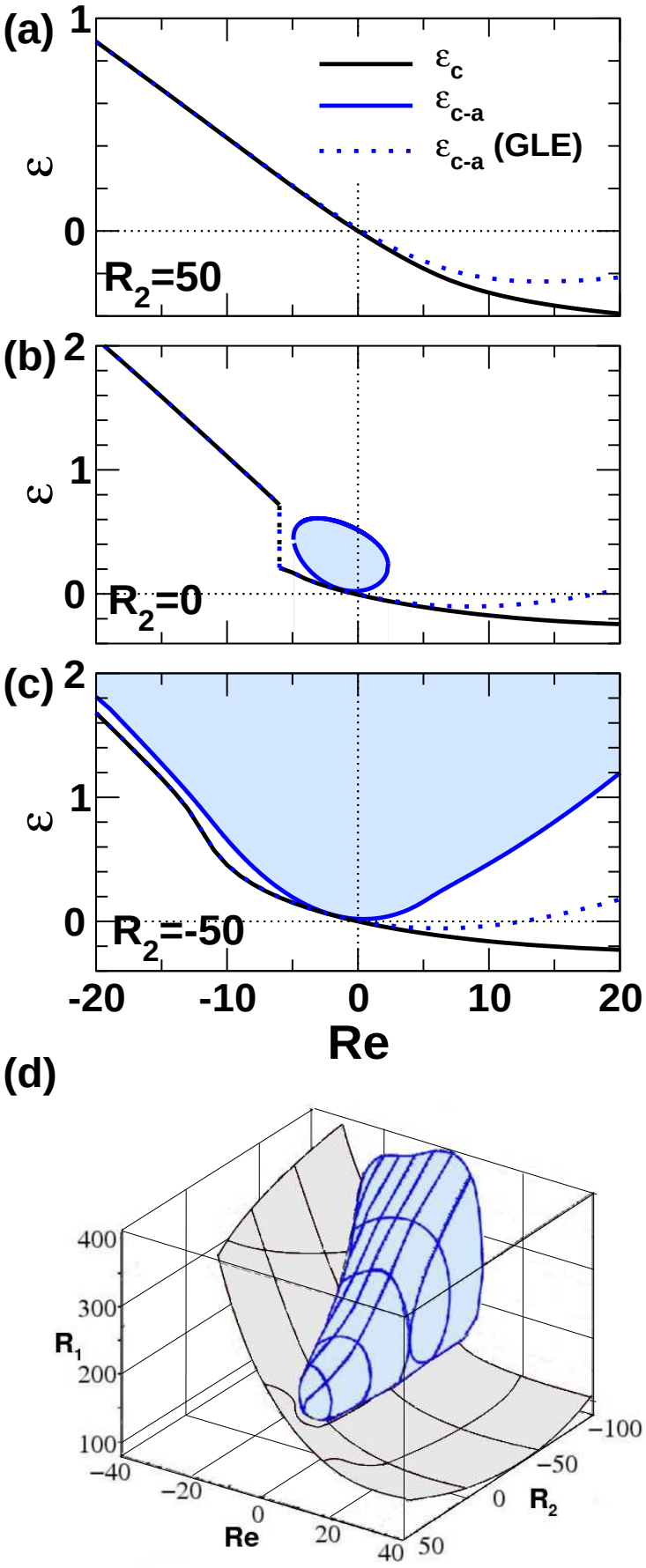


Abbildung B.8 – Instabile Regionen des CCF gegenüber L2-SPI Störungen. Schwarze Linien, ϵ_c, in **(a-c)** und die graue Oberfläche $R_{1,c}$ in **(d)** zeigen die kritischen Schwellen für das Wachstum von axial periodischen, unendlich ausgedehnten, $m = 2$ Störungen. Für Reynoldszahlen oberhalb dieser Schwellen ist das System zumindest konvektiv instabil. Innerhalb der blauen Parameterbereiche ist es absolut instabil. Die konvektiv absolute Schwelle, ϵ_{c-a}, ist in **(b-c)** durch blaue Linien und in **(d)** durch die blau Oberfläche in der Gestalt eines 'Horns' gegeben. Nur für solche Parameter (R_1, R_2, Re) bei $\eta = 0.5$ innerhalb des Horns ist das System absolut instabil, gemäß der LNSE. Die gestrichelten blauen Linien repräsentieren Ergebnisse der GLE Näherung, ϵ_{c-a}(GLE). Für weitere Beschreibung sei hier auf den Text verwiesen. Es sei nochmals besonders darauf hingewiesen, dass es sich bei all diesen Resultaten um Rechnungen handelt, bei denen sich die entsprechenden Sattelpunkte aus dem ausgedehnten Zustand der $m = 2$ Störungen heraus entwickeln. Andere Sättel können zu einem vollkommen anderen Verhalten führen, wie etwa in den Abbildungen B.11, B.12, B.14 zu sehen.

Es ist in der Tat etwas ungewöhnlich, dass die Domäne absoluter Instabilität, d.h. das blaue Horn, bei größeren R_1 nach oben, durch einen, diesen umgebenden, Bereich konvektiver Instabilität, abgeschlossen ist. Weiterhin ist die absolut instabile Region bei genügend großen R_2 (links unten in Abb. B.8**(d)**) vollkommen abgeschnitten. So z.B. erscheint in **(a)** für $R_2 = 50$, gemäß den LNSE, überhaupt kein Bereich absoluter Instabilität. Die GLE Näherung andererseits liefert dort sehr wohl ein Gebiet absoluter Instabilität. Alles in Allem versagt die GLE Näherung bei der Reproduktion der Horn Struktur der absolut instabilen Domäne der Abbildung B.8**(d)** vollständig und im Allgemeinen bei der eigenartigen Beschränktheit der blauen Bereiche bei stärker negativeren Re im Bereich konvektiver Instabilität. Der Sprung von ϵ_{c-a}(GLE) in **(b)** bei $Re \approx -6.4$ spiegelt den Sprung des Minimums der marginalen Stabilitätskurve wieder, d.h. in ϵ_c, der im Detail in den letzten Abschnitten diskutiert wurde. Dieses Verhalten in ϵ_{c-a}(GLE) ist zu erwarten gewesen, da die GLE Näherung zur Berechnung der absolut konvektiven Schwelle von einer Entwicklung der Dispersionsrelation um den kritischen Wert ϵ_c, k_c, der ja gerade dort einen Sprung vollzieht, ausgeht. Als ein *'Beiwerk'* sei an dieser Stelle noch angemerkt, das die Spitze des Horns in **(d)** sehr nahe den Parametern liegt, bei denen ϵ_c zum ersten Mal einen Sprung, als Konsequenz des Verschwindens der Insel, wie in Abbildung B.4 für wachsendes R_2 und negativer werdendes Re diskutiert, zeigt.

Um die Ursache dieser lokalisierten Inseln (Abb. B.4) mit absolut instabilem Verhalten zu verstehen ist es notwendig einen Blick auf die, zu diesen Sattelpunkten gehörenden, Frontlösungen zu werfen. Fronten und Stabilitätsschwellen sind unmittelbar miteinander verknüpft. In Abbildung B.9 sind die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten für die beiden, aus dem unendlich ausgedehnten $M = 2$ Zustand, entstehenden Sattelpunkte **I,II**, bei Kontrollparametern $Re = 0, R_2 = 0, \eta = 0.5$ dargestellt (vgl. auch roten Pfeil in Abb. B.10). Oberhalb der kritischen Schwelle $R_{1,c} = 127.53$ von $M = 2$ Störungen bewegen sich beide Fronten in Bereich **A** zunächst in die gleiche (hier positive) Richtung, $v_{s,I}, v_{s,II} \geqslant 0$. An der absolut konvektiven Stabilitätsschwelle $R^1_{1,c-a} = 134.82$ ändert sich das Vorzeichen der (hier) +Front **I**, während das der -Front **II** unverändert bleibt, so dass in Bereich **B** beide Fronten in unterschiedliche Richtung propagieren, das System ist absolut instabil. Da die +Front bei $R^2_{1,c-a} = 189.93$ ihr Vorzeichen aber erneut ändert und somit beide Fronten wieder in gleiche (positive) Richtung wandern **C**, ist das System formal wieder im konvektiv instabilen Bereich.

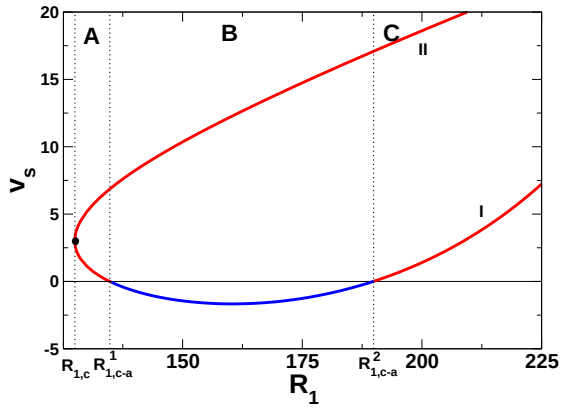


Abbildung B.9 – Zusammenhang zwischen Fronten und Stabilitätsschwellen. Dargestellt sind die Frontgeschwindigkeiten v_s zu den beiden, aus dem unendlich ausgedehnten $M = 2$ Zustand entstehenden Sattelpunkten **I,II**. In den Bereichen **A,C** ist das System konvektiv stabil, während es in **B** absolut instabil ist. Kontrollparameter sind: $R_2 = 0, Re = 0, \eta = 0.5$ und in Abbildung B.10 durch den roten Pfeil markiert.

Zusammenfassend kann man sagen: Die in der Abbildung B.8**(d)** dargestellte Horn Struktur des blauen absolut instabilen Bereiches impliziert, dass lokalisierte L2-SPI Störun-

gen, die aus dem ausgedehnten Zustand herauswachsen, aus dem System herausgeblasen werden, wenn eine, oder mehrere, der folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) Re ist genügend stark,

(ii) R_1 ist entsprechend groß,

(iii) R_2 ist groß genug.

Die blauen Inseln in Abbildung B.8**(b)-(c)** und das blau Horn in **(d)** charakterisieren Regionen von absoluter Instabilität gegenüber dem Wachstum lokalisierter Wellenpakete von L2-SPI Störungen aus dem ausgedehnten Zustand heraus. Diese blauen Gebiete sind von einem Bereich konvektiver Instabilität umgeben. Diese Inseln sind dabei von denen, im Abschnitt B.3 diskutierten, Instabilitäts-Inseln, die Gebiete mit linear positivem Wachstumsparameter, $\gamma(k) > 0$, für axial periodische (unendlich ausgedehnte) L2-SPI Störungen mit reeller axialer Wellenzahl k darstellen, zu unterscheiden. Jene Inseln sind vollkommen von einem Gebiet mit $\gamma(k) < 0$ umgeben.

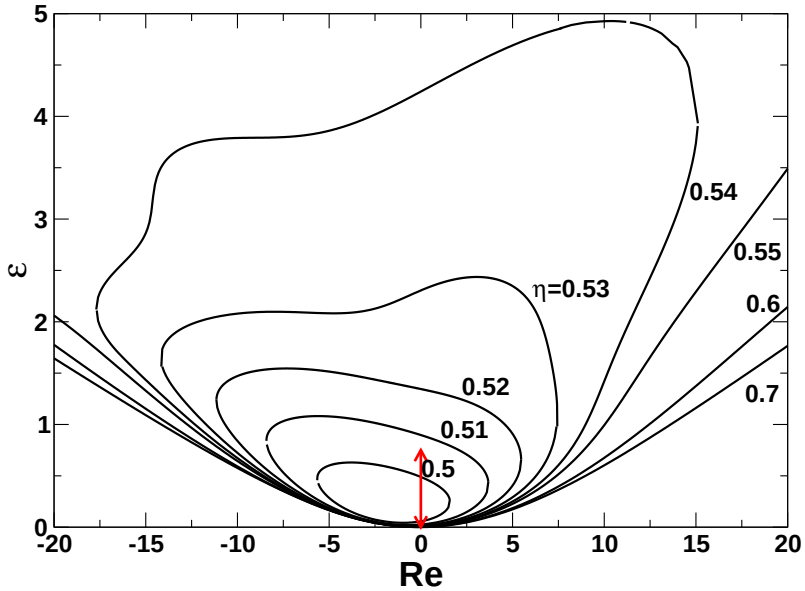


Abbildung B.10 – Abhängigkeit der Schwellen, $\epsilon_{c-a}(Re)$, der absolut instabilen Gebiete vom Radienverhältnis η für $m = 2$, $R_2 = 0$. Wie in Abbildung B.8 sind auch dies alles Resultate von Sattelpunkten, die sich aus dem ausgedehnten Zustand, aus dem kritischen Punkt, heraus entwickeln. Der rote Pfeil charakterisiert Parameter der Abbildung B.9, bei denen die zugehörigen Frontlösungen dargestellt sind.

Es sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese beiden Phänomene *unterschiedliche* Ursachen besitzen. Die $\gamma(k) > 0$ Inseln treten dann auf, wenn die $\gamma(k) = 0$ Ebene zwischen der Spitze des Hügels und dem Sattel der $\gamma(k)$ Oberfläche, über der $k - R_1$ Ebene, wie z.B. in Abbildung B.3, zu liegen kommt. Im Fall der Inseln, umschlossen von den *absolute konvektiven* Stabilitätsschwellen, allerdings, kreuzt ein Sattel mit $\sigma(Q)$ notwendigerweise die $\gamma = 0$ Ebene um die Gleichung (B.9) zu erfüllen. Für L2-SPI Zustände, weist die $\gamma(Q)$ Oberfläche zwei oder mehrere Sättel (siehe weiter unten) bei gewissen R_1, Re

und R_2 auf, die sich alle relativ zueinander bewegen, wenn die Kontrollparameter verändert werden. D.h. für geschickt (richtig) gewählte Parameterkombinationen kreuzen beide Sättel nacheinander die $\gamma = 0$ Ebene, z.B. bei Variation von R_1. Somit erscheinen zwei verschiedene Schwellen, $R_{1,c-a}$ (vgl. Abb. B.11). Eine dieser beiden Schwellen markiert den Übergang vom konvektiven zum absolut instabilen Bereich, während die andere den Übergang in umgekehrter Richtung vom absolut instabilen zurück in den Bereich konvektiver Instabilität aufzeigt.

Als letztes sei noch erwähnt, dass sich die absolut instabilen Regionen auch bei Änderung der System Geometrie η verändern, wie etwa in Abbildung B.10 dargestellt. Größere Radienverhältnisse η führen zu einer Aufweitung des Gebietes absoluter Instabilität, während kleinere dazu führen, dass sich dieses zusammenzieht.

Weitere Sattelpunkte

Bislang wurden immer nur die beiden Sättel betrachtet, die am kritischen Punkt aus dem unendlich ausgedehnten 2-SPI Zustand heraus entstehen und entsprechend zwei verschiedene Fronten, + und –Front charakterisieren. Die Abbildung B.11 zeigt eine solche Situation, bei der, zusätzlich zu den beiden Sätteln **I** und **II**, die sich aus dem kritischen Punkt $(k_c, K = 0, R_{1,c})$ heraus entwickeln, ein weiterer Sattel **III**, der irgendwo sonst im $k-K-R_1$ Raum auf der Stabilitätsoberfläche $R_{1,\text{stab}}(k, K)$ startet. Die zugehörigen Stabilitätsschwellen $(k_{\text{stab}}, K_{\text{stab}}, R_{1,\text{stab}})$, können für $K_{\text{stab}} \neq 0$ auch *unterhalb* von $R_{1,\text{stab}}(k, K = 0)$ (vgl. Abb. B.11**(a,b)**) liegen. D.h. die Projektionen in die reelle $K = 0$ Ebene **(a)** liegt unterhalb der (schwarzen) marginalen Kurve. In der Tat wurden eine Vielzahl weiterer solcher Sattelpunkte im Parameterraum gefunden, allerdings wird hier nur der Sattel **III** stellvertretend für alle übrigen diskutiert. Im (kritischen) Startpunkt beschreiben beide Sättel **I** und **II** ausgedehnte L2-SPI Zustände, da dort $K = 0$ gilt. Nahe des Onsets wird die Wellenzahl Q komplex und die zugehörigen Wachstumsparameter, γ_s, und Frontgeschwindigkeiten, v_s, werden positiv (Abb. B.11**(c,d)**), d.h. die zugehörigen + und –Fronten propagieren in die *gleiche* Richtung (hier gegen $+\infty$) und das System befindet sich im konvektiv instabilen Bereich (vgl. Abs. B.4.1). Im Fall des Sattels **III** muss nur der Teil der Kurve $k_s, K_s, R_{1,s}$ betrachtet werden, welcher der Beziehung $R_{1,s} \geqslant R_{1,\text{stab}}(k_s, K = 0)$ genügt (d.h. in Projektion oberhalb der marginalen Kurve liegt.).

Für leicht höhere Werte $R_1 \approx 135$ ändert die Frontgeschwindigkeit des Sattels **I**, der eine +Front charakterisiert, ihr Vorzeichen, d.h. beide zusammengehörige Fronten bewegen sich nun in *unterschiedliche, entgegengesetzte* Richtungen (absolut instabiler Bereich). Schließlich wechselt die +Front bei noch größeren $R_1 \approx 189$ erneut ihre Propagationsrichtung und, bei Vernachlässigung von Sattel **III** kehrt das System zurück in den konvektiv instabilen Bereich. Dies ist exakt die Situation, wie sie bereits in den beiden Abbildungen B.8 und B.10 diskutiert wurde. Aber in diesem Szenario zeigt auch Sattel **III** einen Vorzeichenwechsel in der Frontgeschwindigkeit und die zugehörige -Front wandert danach in Richtung $-\infty$. Somit *verbleibt* das System, bei Berücksichtigung aller Sättel, im absolut instabilen Bereich . Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass mindestens immer zwei Sättel, nicht notwendigerweise diejenigen, die im kritischen Punkt starten, wie gerade zuvor diskutiert, gefunden wurden, die zu entgegengesetzt propagierenden '+' und '-' Frontlösungen gehören. D.h. unter Berücksichtigung *aller* Sattelpunkte kehrt das System für keine der getesteten Parameterkombinationen aus dem absolut instabilen in den konvektiv instabilen Bereich, bei wachsendem R_1, zurück. Andererseits konnten aber auch Sattelpunktkurven $(k_s, K_s, R_{1,s})$ gefunden werden, die immer unterhalb der marginalen Kurve $R_{1,stab}(k_s, K = 0)$ liegen, d.h. für die komplette zugehörige Kurve gilt $R_{1,s} < R_{1,stab}(k_s, K = 0)$ und somit haben diese keinen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten.

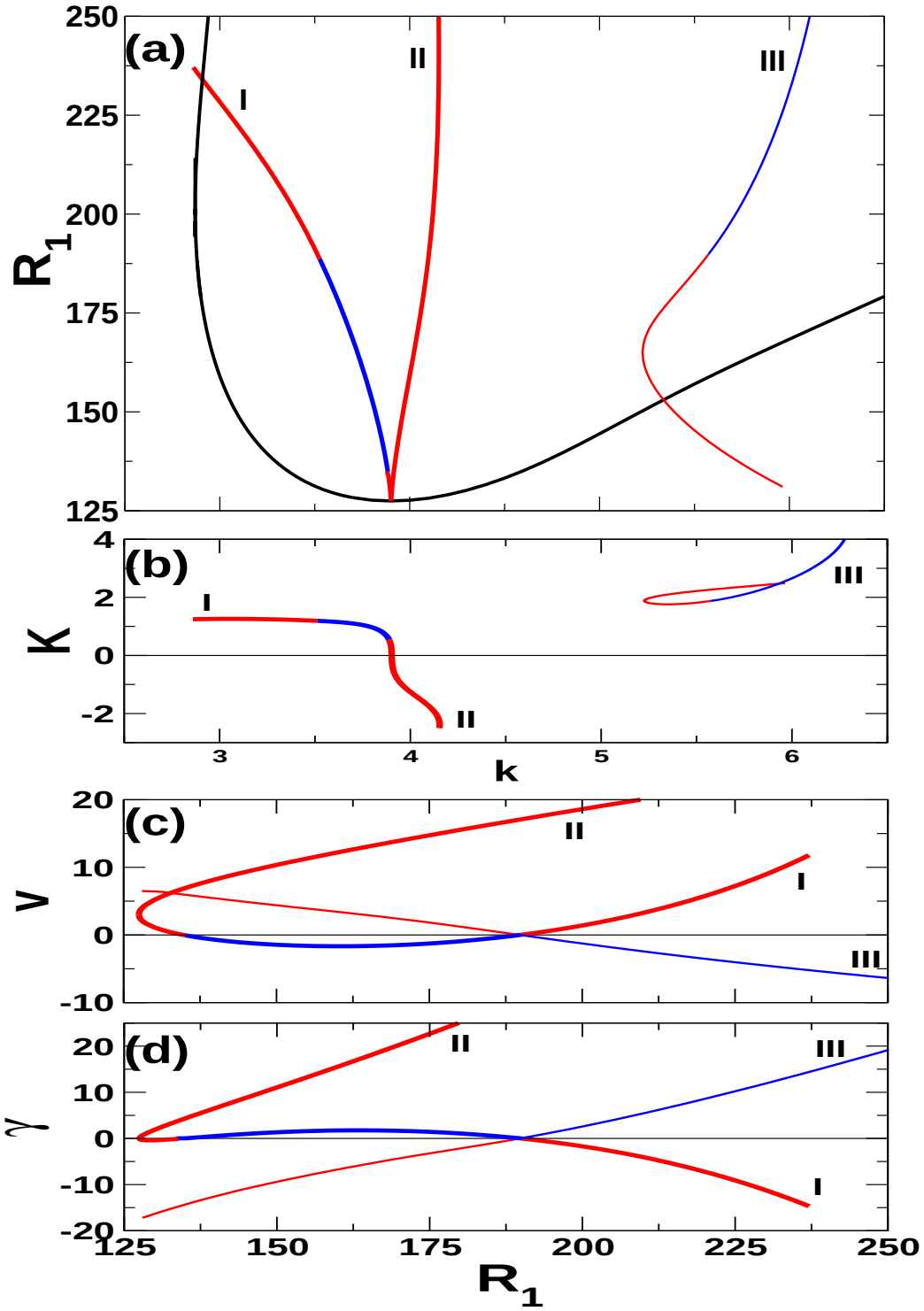


Abbildung B.11 – **(a,b)** Projektionen der Trajektorien von drei komplexen Sattelpunkte Q_s (indiziert durch **I,II** und **III**) im $k - K - R_1$ Raum in die $k - R_1$ **(a)** und in die $k - K$ Ebene **(b)**. Die schwarze Kurve in **(a)** stellt die marginale Stabilitätskurve für ausgedehnte $m = 2$ Störungen dar. In **(c)** sind die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten v_s und in **(d)** der zeitliche Wachstumsparameter γ_s der jeweiligen Sättel aufgetragen. Dicke Linien gehören dabei zu dem Sattelpunktpaar, das sich aus dem kritischen Punkt $k_c, K = 0, R_{1,c}$ heraus entwickelt und die dünne Linie repräsentiert einen zusätzlichen Sattel[2], der irgendwo sonst im Parameterraum startet. Rote [blaue] Liniensegmente indizieren positives [negatives] v_s. Das Vorzeichen von K korrespondiert mit einer +Front oder einer –Front. Bei diesen Parametern startet der Sattel **III** irgendwo im $k - K - R_1$ Raum, wandert bei Änderung der Kontrollparameter aber in Projektion über die marginale Kurve und wird somit wichtig für die Stabilität des Systems. Weitere Kontrollparameter sind: $R_2 = 0, Re = 0, \eta = 0.5$.

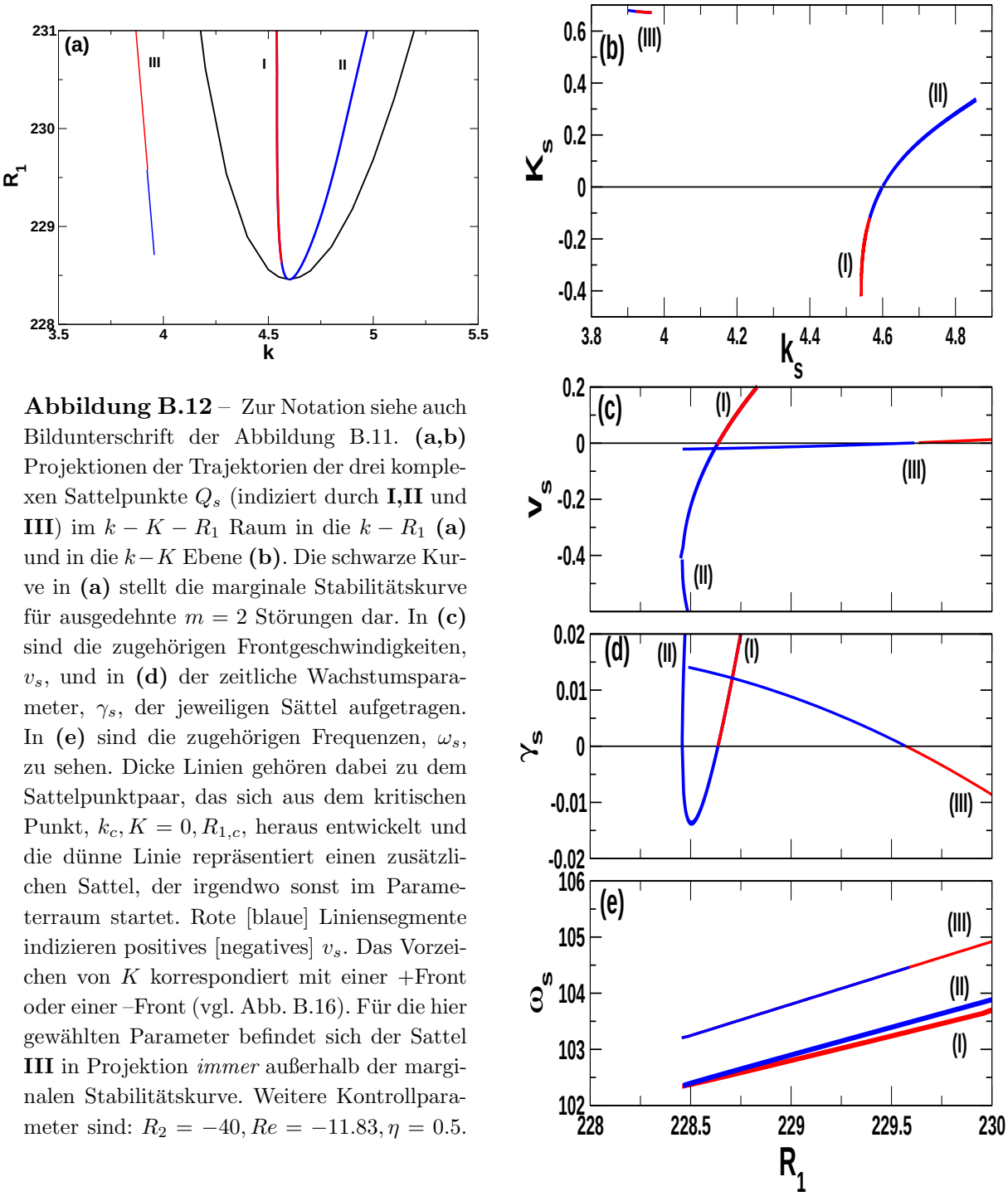


Abbildung B.12 – Zur Notation siehe auch Bildunterschrift der Abbildung B.11. **(a,b)** Projektionen der Trajektorien der drei komplexen Sattelpunkte Q_s (indiziert durch **I,II** und **III**) im $k - K - R_1$ Raum in die $k - R_1$ **(a)** und in die $k - K$ Ebene **(b)**. Die schwarze Kurve in **(a)** stellt die marginale Stabilitätskurve für ausgedehnte $m = 2$ Störungen dar. In **(c)** sind die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten, v_s, und in **(d)** der zeitliche Wachstumsparameter, γ_s, der jeweiligen Sättel aufgetragen. In **(e)** sind die zugehörigen Frequenzen, ω_s, zu sehen. Dicke Linien gehören dabei zu dem Sattelpunktpaar, das sich aus dem kritischen Punkt, $k_c, K = 0, R_{1,c}$, heraus entwickelt und die dünne Linie repräsentiert einen zusätzlichen Sattel, der irgendwo sonst im Parameterraum startet. Rote [blaue] Liniensegmente indizieren positives [negatives] v_s. Das Vorzeichen von K korrespondiert mit einer +Front oder einer –Front (vgl. Abb. B.16). Für die hier gewählten Parameter befindet sich der Sattel **III** in Projektion *immer* außerhalb der marginalen Stabilitätskurve. Weitere Kontrollparameter sind: $R_2 = -40, Re = -11.83, \eta = 0.5$.

In der Abbildung B.12 sind drei verschiedene Sattelpunkte ähnlich derer in Abbildung B.11 für andere Kontrollparameter dargestellt. In diesem Fall liegt allerdings eine etwas andere Situation vor, da sich der dritte Sattel **III** im hier betrachteten R_1 Bereich **(a)** *immer außerhalb* der marginalen Stabilitätskurve (Projektion auf die $R_1 - k$ Ebene) befindet, während die beiden Sattelpunkte, die aus dem kritischen Punkt entstehen sich

immer innerhalb dieses Bereiches befinden.

Somit hat der Sattel **III** in dem hier vorliegenden Fall *keinen* Einfluss auf das Verhalten gegenüber lokalisierten $m = 2$ Störungen, da die beiden Sättel die aus dem kritischen Punkt entstehen hier das 'klassische' Verhalten zur Folge haben, D.h. sie Beschreiben das Verhalten von stabil über konvektiv instabil hin zu absolut instabilem Verhalten. Für die Situation in Abbildung B.12 für $R_1 > R_{1,c-a} = 228.63$. D.h. die zugehörigen + und − Fronten propagieren in *unterschiedliche* Richtungen (gegen $\pm\infty$) und das System befindet sich im absolut instabilen Bereich. Erst bei deutlich größeren R_1, außerhalb des hier dargestellten Parameterbereiche, besitzt der Sattel **II** einen weiteren Nulldurchgang, so dass oberhalb dieses die beiden Fronten zu **I** und **II** erneut in die gleiche Richtung wandern.

Um die Topologie der komplexen Eigenwertoberfläche über der $k-K$ Ebene besser verstehen zu können, ist in der Abbildung B.13**(a,b)** diese Fläche für zwei verschiedene Parametersätze dargestellt. Diese entsprechen gerade den zu der Abbildung B.12**(a)** gehörenden Kontrollparametern, bei denen die dort eingetragenen Sattelpunkte**I,III** einen Nulldurchgang der Frontgeschwindigkeiten repräsentieren; eine der Fronten also ihre Richtung umkehrt. Wie bereits zuvor beschrieben, ist die Frontlösung, die durch den Sattelpunkt **III** beschrieben wird, für das Stabilitätsverhalten irrelevant, da die Projektion der Bahnkurve immer außerhalb der marginalen Stabilitätskurve liegt. Die Tatsache, dass dieser Sattel hier trotzdem zur Beschreibung der Topologie verwendet wird, liegt einfach daran, dass er mit dem Wert $_{1,c-a} = 229.65$ **III** sehr dicht an demjenigen des Wertes $R_{1,c-a} = 228.63$ von Sattelpunkt **I** liegt. Aus diesem Grund lassen sich beide sehr gut in einem einzigen Bild, bei dem die zugehörigen Frontgeschwindigkeiten ihre Richtung ändern, darstellen.

In **(a)** und **(b)** sind jeweils die beiden γ Oberflächen für exakt diese beiden Werte, $R_{1,c-a}$, dargestellt. Die roten Linien kennzeichnen die $\gamma = 0$ Isolinie. Für den in **(a)** gewählten R_1 Wert durchstößt der rechte Sattel die $\gamma = 0$ Ebene (erste Schwelle $R_{1,c-a}$), während bei der zweiten Schwelle, $R_{1,c-a}$, der linke Sattel die $\gamma = 0$ Ebene durchstößt. Die roten Isolinien in **(a)** und **(b)** sowie die für andere R_1 beschreiben zusammen eine $\gamma = 0$ Isooberfläche im $k-K-R_1$ Raum, welche diesen in einen $\gamma < 0$ (blau markiert) und einen weiteren $\gamma > 0$ (rot markiert) Unterraum, wie in **(c)** dargestellt, aufteilt. Die beiden Sättel dieser Isooberfläche entsprechen gerade den beiden verschiedenen Schwellenwerten, $R_{1,c-a}$.

Auch die Abbildung B.14 zeigt, wie die beiden vorherigen Abbildungen, drei Sattelpunkte (zwei, die aus dem kritischen Punkt **I,II**, dem unendlich ausgedehnten Zustand heraus entstehen und einen weiteren Sattel **III**, der ebenfalls wieder irgendwo im Parameterraum startet) des $k-K-R_1$ Raums in Projektion in die $k-R_1$ **(a)** bzw. in die $k-K$ Ebene **(b)**. Anders als zuvor sind hier die Sättel und marginalen Kurven für die beiden verschiedenen azimutalen Wellenzahlen $m = 2, -2$, bei endlichem Durchfluss, $Re = -2$, zusammen dargestellt, wodurch die Symmetrieentartung der SPI Strukturen aufgehoben wird. In der Abbildung B.14 zeigt sich dies insbesondere in der Aufspaltung der marginalen (schwarzen) Kurven. Rote [blaue] Kurven bedeuten positives [negatives] Vorzeichen in der Frontgeschwindigkeit der beiden Frontlösungen, die durch das jeweilige Vorzeichen von K charakterisiert werden; durchgezogene [gestrichelte] Linien charakterisieren die Zugehörigkeit der Sättel **I,II,II** zu $m = 2$ (mit **a** indiziert) [$m = -2$ (mit **b** indiziert)].

Im Wesentlichen zeigen die Sättel für $m = 2$ und $m = -2$ identisches Verhalten in den beiden, in Abbildung B.14**(a,b)**, dargestellten Projektionen. Im Fall von $m = -2$ liegt der kritische Wert, k_c, aufgrund der insgesamt niedriger liegenden marginalen Kurve bei einem etwas größeren Wert verglichen mit $m = 2$. Ein deutlicher Unterschied ist aber bei Betrachtung der beiden Sättel **Ia** und **Ib** zu erkennen. Während im Fall $m = 2$ die zum Sattel **Ia** gehörende Frontgeschwindigkeit der +Front einen Vorzeichenwechsel von + (rot) nach - (blau) besitzt, so bleibt das Vorzeichen der durch **Ib** charakterisierten Front unverändert negativ (blau). Dies zeigt sehr gut den erheblichen Einfluss, den ein extern aufgeprägter axialer Durchfluss, auf das System besitzt. Dieser kann, abhängig dessen

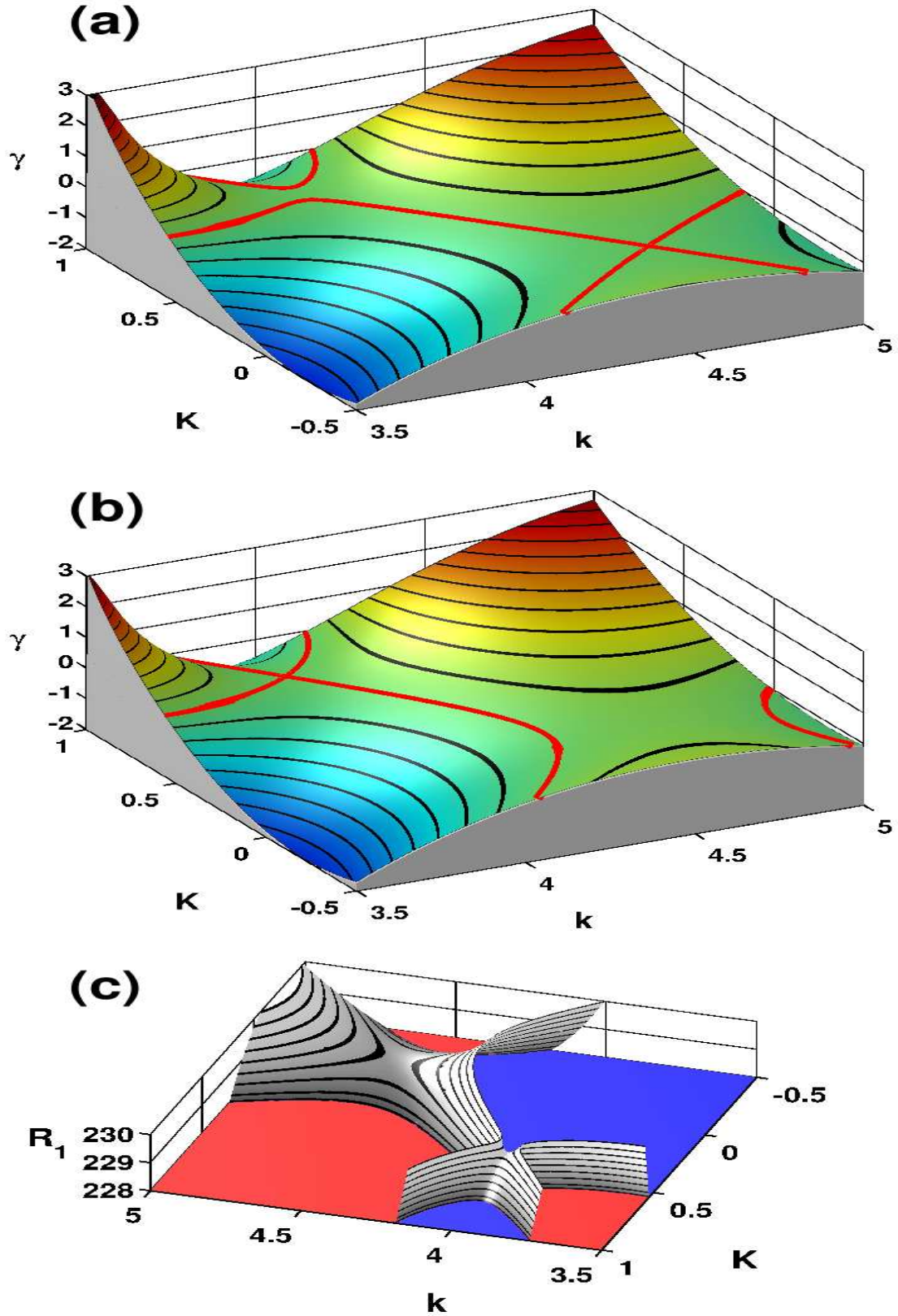


Abbildung B.13 – $\gamma(Q)$ Oberfläche in Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ von $m = 2$ Störungen. Die rote Linie entspricht $\gamma = 0$. Hierbei sind die R_1 gerade so gewählt worden, dass der jeweils zugehörige Sattel gerade die $\gamma = 0$ Ebene durchstößt, d.h. $R_{1,c-a} = 228.63$ **(a)** und $R_{1,c-a} = 229.65$ **(b)**. Die anderen Parameter sind jeweils fixiert bei $m = 2$, $Re = -11.83, R_2 = -40, \eta = 0.5$. Für alle möglichen R_1 repräsentieren die roten Linien eine $\gamma = 0$ Oberfläche im $k-K-R_1$ Raum **(c)**. Innerhalb des rot [blau] markierten Unterraumes gilt $\gamma > 0$ [$\gamma < 0$].

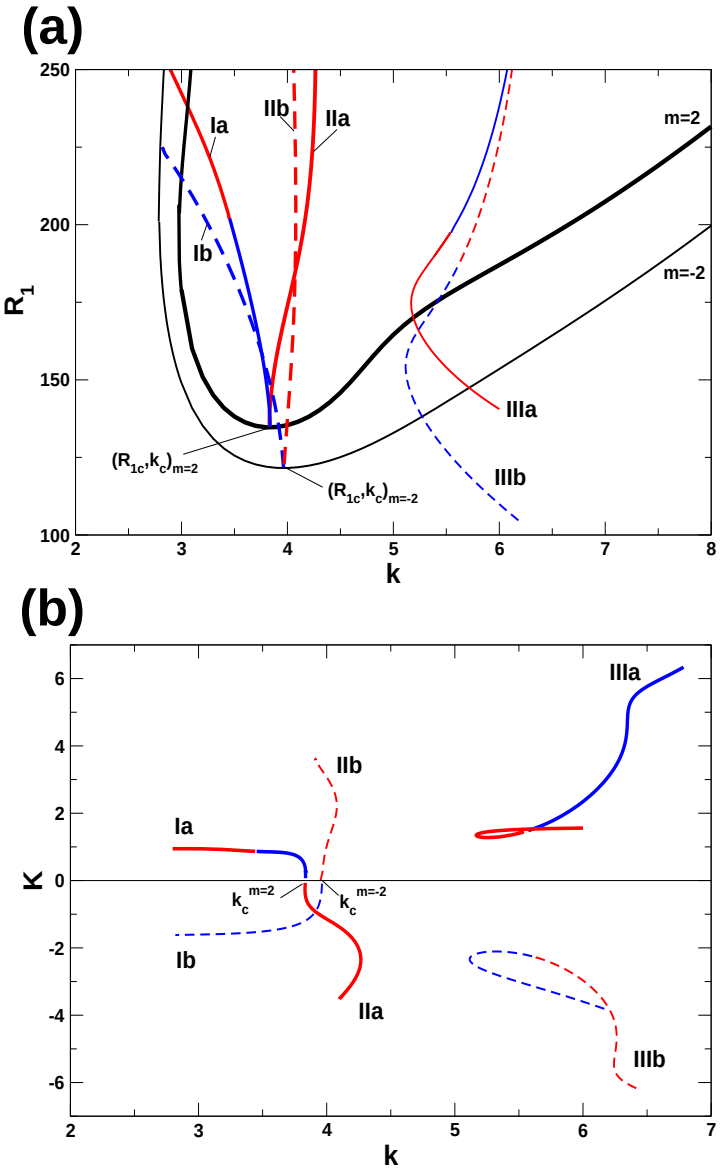


Abbildung B.14 – Siehe auch Bildunterschrift der Abb. B.11. Projektionen der Trajektorien der zwei komplexen Sattelpunkte, Q_s, die aus dem kritischen Punkt herauswachsen (dicke Linien) und ein weiterer Sättel (dünne Linien), für $m = 2$ (durchgezogene Linien) und $m = -2$ (gestrichelte Linien) im $k - K - R_1$ Raum in die $k - R_1$ Ebene **(a)** und in die $k - K$ Ebene **(b)**, analog der Abbildung B.11. Die dicke [dünne] schwarze Kurve in **(a)** stellt die marginale Stabilitätskurve für ausgedehnte $m = 2$ [$m = -2$] Störungen dar. Aufgrund des endlichen Durchflusses sind die Stabilitätsschwellen der spiegelsymmetrischen L2-SPI und R2-SPI Lösungen aufgespalten und somit verschieden. Rote [blaue] Liniensegmente indizieren positive [negative] Frontgeschwindigkeiten, v_s. Das Vorzeichen von K korrespondiert mit einer +Front oder einer –Front. Weitere Kontrollparameter sind: $R_2 = 0, Re = -2, \eta = 0.5$.

Richtung, das Verhalten der einzelnen Strukturen maßgeblich verändern.

Die Abbildung B.15 stellt die $\gamma(Q)$ Oberfläche in Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ über der $K - k$ Ebene dar. Hierbei wurde der Kontrollparameter R_1 allerdings gerade so gewählt, dass in keinem der beiden Sättel dieser Oberfläche die Bedingung, $\gamma = 0$ (rote Kurve), erfüllt ist, somit liegt diese zwischen den beiden Abbildungen B.13**(a)** und **(b)**. Anders als bei diesen sind aber zusätzlich die parametrisierten Bahnkurven (Bahnparameter R_1) der drei (zwei aus dem kritischen heraus, vorne rechts und ein weiterer im Raum, hinten links) Sattelpunkte mit eingetragen. Diese sollen einen Eindruck davon vermitteln, wie sich die $\gamma(k, K)$ Isofläche mit ihren zugehörigen Sätteln bei Variation von R_1 verhält. Auffallend ist, dass sich die Bahnkurven für zunehmende R_1, der beiden aus dem kritischen Punkt (unendlich ausgedehnten Zustand von $m = 2$ Störungen) heraus entstehenden Sättel (vorne rechts) nach oben bewegen, während sich die Bahnkurve des dritten Sattels (hinten links) nach unten bewegt. Dies spiegelt die in der

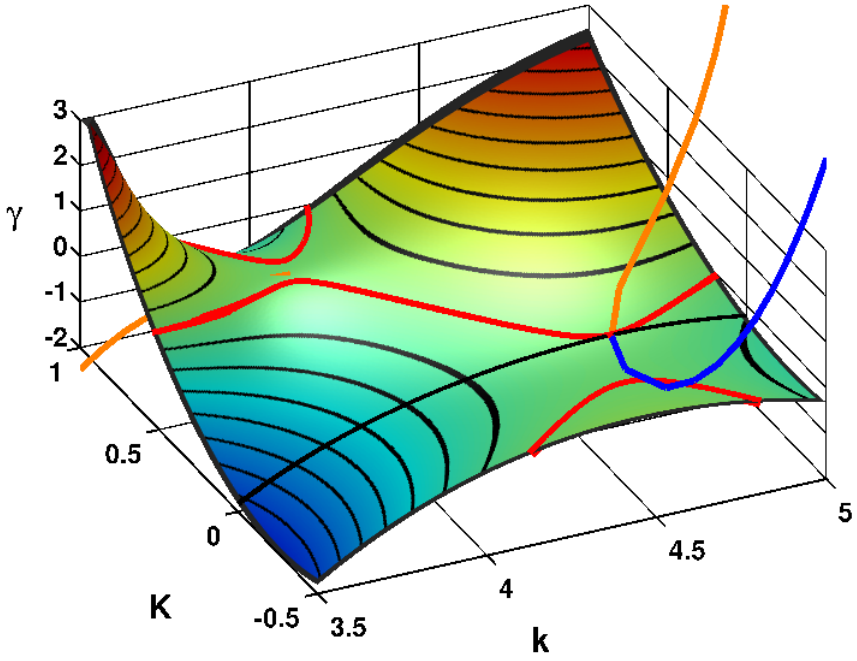


Abbildung B.15 – $\gamma(Q)$ Oberfläche in Abhängigkeit der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ (vgl. Abb. B.13**(a,b)**). Die rote Linie entspricht $\gamma = 0$. Zusätzlich sind die Kurven der drei Sattelpunkte Q_s (blau und orange mit Bahnparameter R_1) der Abbildung B.12 über dieser Fläche mit eingetragen. Während sich die beiden Sättel, die aus dem unendlich ausgedehnten Zustand heraus entstehen (vorne rechts), nach oben bewegen, so verläuft die Kurve des dritten Sattel (hinten links) in umgekehrter Richtung (mit zunehmendem R_1), nach unten. Die zugehörigen Parameter sind: $m = 2$, $R_{1,c-a} = 228.7$, $Re = -11.83$, $R_2 = -40$, $\eta = 0.5$.

Abbildung B.13**(c)** gezeigte Situation der $\gamma = 0$ Isoflächen wieder. Für das hier gewählte R_1 bedeutet dies: Die Wachstumsparameter aller Sättel sind positiv. Verglichen mit Abbildung B.13**(c)** liegen diese also in dem rot markierten Unterraum mit $\gamma > 0$.

B.4.2 Fronten

Im letzten Abschnitt wurde jeweils eine der beiden Frontgeschwindigkeiten w_{S} fixiert gehalten um die zugehörige Schwelle $\mu_{\text{c-a}}$ zu berechnen. In diesem Abschnitt soll nun die Frontgeschwindigkeiten, gewonnen aus den beiden unterschiedlichen Modellen (B.9) und (B.8), in Abhängigkeit von μ betrachtet werden. Dabei wird nun μ zur Berechnung fixiert gehalten. Die hierzu notwendige Sattelpunktbedingung ergibt sich dann im mitbewegten Bezugsystem ($\Sigma = \sigma + iQ\omega$): (Hierbei beschränke ich mich darauf Ergebnisse der Sattelpunktsanalyse zu präsentieren, die aus dem ausgedehnten Zustand für $m = 2$ Störungen entstehen.)

$$\mathrm{Re}[\Sigma(Q)]|_{Q_{\mathrm{S}},w_{\mathrm{S}}} = 0, \tag{B.11}$$

$$\left.\frac{d\Sigma(Q)}{dQ}\right|_{Q_S,w_S} = 0.$$

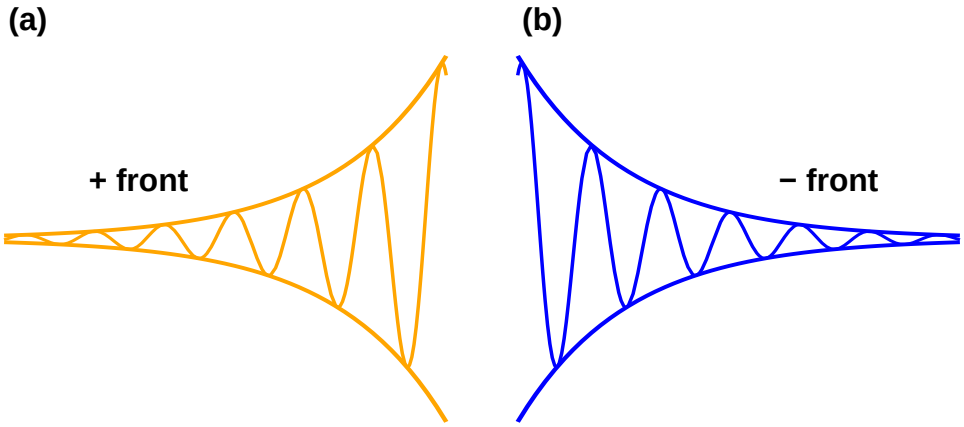


Abbildung B.16 – Schematische Darstellung der beiden unterschiedlichen Fronttypen: +Front (e^{iKz}) **(a)** und –Front (e^{-iKz}) **(b)**.

Wie bereits oben erwähnt sind die Frontpropagationen und die absolut konvektiven Stabilitätsschwellen miteinander korreliert. Bei $\mu_{\text{c-a}}$ verschwindet genau eine der beiden Frontgeschwindigkeiten im Laborsystem – dies wurde numerisch und experimentell bereits untersucht für $m = 0$ von (137; 24) und für $m = \pm 1$ von (114). Im Folgenden werden beide Fronten gemäß der Abbildung B.16 als +Front**(a)** oder –Front**(b)** unterschieden.

In Abbildung B.17 sind einige der Eigenschaften der –Front (blau) sowie der +Front (orange) als Funktion von μ für beide Modelle (B.11) (LNSE, durchgehende Linien) und (B.8) (GLE, gestrichelte Linien) mit azimutaler Wellenzahl $m = 2$ und fixierten axialen Durchfluss Reynoldszahlen $Re = 1, 5, 10, 15$ bei $R_2 = 0, \eta = 0.5$, dargestellt. Die gezeigten Fronteigenschaften sind, die Wellenzahl, aufgespalten in den Realteil k_S und den Imaginärteil K_S, des komplexen Sattelpunktes Q_S, die Frontgeschwindigkeit w_S und die zugehörigen Frequenzen ω_S. Bei $\mu = 0$ fallen die jeweiligen Eigenschaften von –Fronten und +Fronten zusammen, d.h. die Wellenpakete sind nur oberhalb der kritischen Schwelle ($\mu > 0$) wachstumsfähig.

Abbildung B.17 enthüllt deutlich die Diskrepanz zwischen beiden Modellen. Die GLE hat offensichtlich Schwierigkeiten das Frontverhalten von Strukturen mit azimutaler Wellenzahl $m = \pm 2$ zu beschreiben. Alle Eigenschaften der GLE unterscheiden sich dramatisch von denjenigen, die aus der LNSE erhalten wurden. Solch ein Unterschied wurde bereits zum Teil in früheren Arbeiten bei TVF und 1-SPI Lösungen (114) für einige der Eigenschaften, wie z.B. die Frequenzen ω_S, oder dem reellen Teil der Wellenzahl k_S, für größere μ, festgestellt. Im hier vorliegenden Fall $m = \pm 2$ sind aber alle Eigenschaften betroffen und der Unterschied erscheint sogar für sehr kleine μ. Im Allgemeinen sagt die GLE schnellere Frontgeschwindigkeiten voraus, als die LNSE.

Weiterhin kann die GLE einige sehr wichtige Eigenschaften gar nicht beschreiben. In Abbildung B.17 sind ebenfalls die Schwellen zwischen konvektiver und absoluter Instabilität für beide Modelle mit eingetragen, $\mu = \mu_{\text{c-a}}^{\text{GLE}}$ (graue Kreise) und $\mu = \mu_{\text{c-a}}^{\text{LNSE}}$ (schwarze Kreise). Dort ändern die Frontgeschwindigkeit w_S (eine der beiden Fronten hat an dieser Stelle einen Nulldurchgang) und die zugehörige zeitliche Wachstumsrate, γ_S, ihr Vorzeichen. Aber

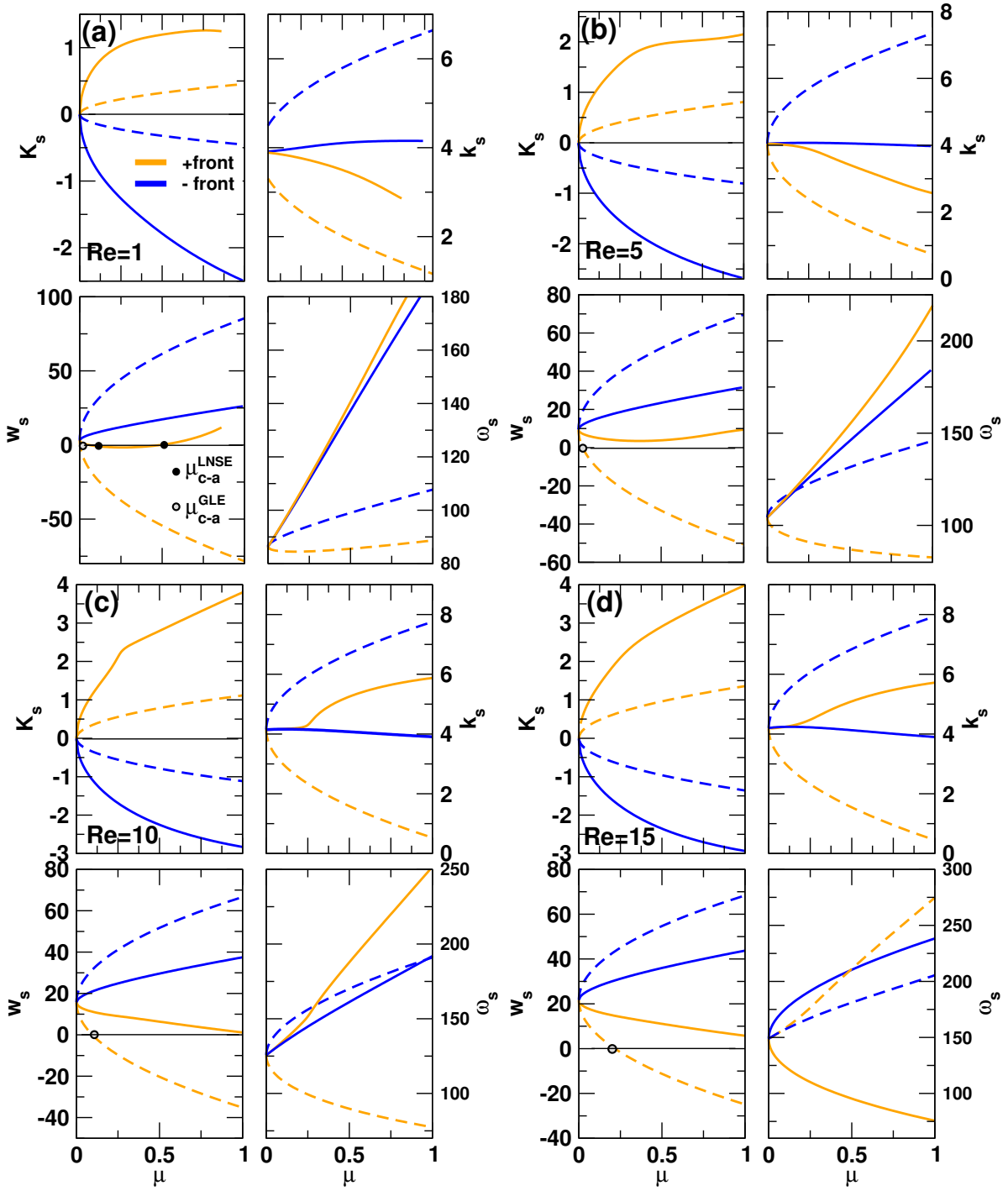


Abbildung B.17 – Frontgeschwindigkeiten w_S, axialer Wachstumsparameter K_S, axiale Wellenzahl k_S und Frequenzen ω_S für +Fronten (orange) und für –Fronten (blau) von lokalisierten $m = 2$ Wellenpaketen als eine Funktion von μ erhalten aus dem Ginzburg Landau Modell (GLE) (gestrichelte Linien) sowie aus den linearisierten Navier-Stokes Gleichungen (LNSE) (durchgezogene Linien) bei $R_2 = 0, \eta = 0.5$ und verschiedenen Durchflüssen $Re = 1, 5, 10, 15$. Die entsprechenden überkritischen Werte μ_{c-a}^{GLN} (graue Kreise) und μ_{c-a}^{LNSE} (schwarze Kreise) der beiden Modelle sind ebenfalls mit eingetragen.

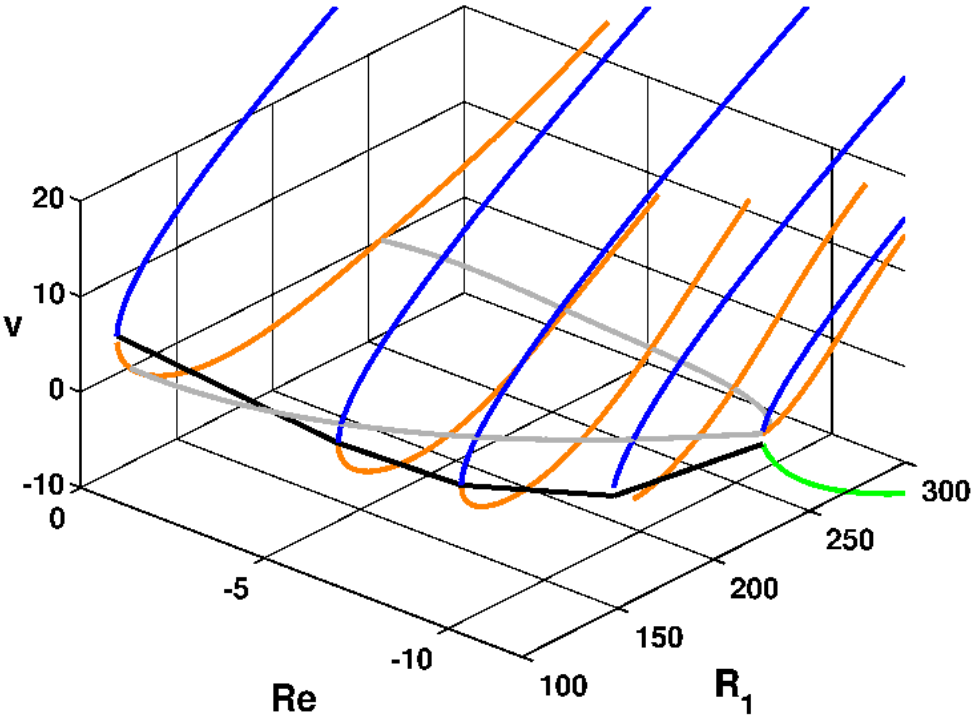


Abbildung B.18 – Zusammenhang der Frontpropagationen, w_s, und der verschiedenen Stabilitätsschwellen $\mu_c(Re) = 0, \mu_{c-a}(Re) = 0$ in Abhängigkeit von R_1 bei Variation von Re. Aufgetragen sind die Frontgeschwindigkeiten berechnet aus den beiden, aus dem kritischen Punkt entstehenden, Sattelpunkten für die +Front (orange) und die –Front (blau). Die schwarze Kurve stellt die kritische Schwelle, ($\mu_c(Re) = 0$), und die graue Kurve die konvektiv instabile Schwelle, ($\mu_{c-a}(Re) = 0$), dar. Bei $Re = -12$ ist einmal exemplarisch die Frontgeschwindigkeit eines weiteren Sattels (grün) mit eingetragen. (vgl. hierzu auch Abb. B.11). Dieser Sattel ist wichtig zur Beschreibung des 'korrekten' physikalischen Verhaltens, so dass das System im absolut instabilen Zustand verbleibt, während bei ausschließlicher Betrachtung der aus dem kritischen Punkt entstehenden Sättel das System in dem konvektiv instabilen Zustand zurückkehrt und in diesem verbleibt. Kontrollparameter: $k = 3.927, R_2 = 0, \eta = 0.5$.

nur das LNSE Modell reproduziert eine zweite Nullstelle in der Frontgeschwindigkeit, d.h. eine zweite Schwelle $\mu^2_{\text{c-a}} > \mu^1_{\text{c-a}}$. Die beiden Nullstellen der Frontgeschwindigkeit hängen mit den separierten Inseln der Stabilitätsdiagramme des letzten Abschnitts zusammen.

Es ist weiterhin sehr interessant, dass für $Re = 5$ **(b)**, überhaupt kein $\mu^{\text{NSE}}_{\text{c-a}}$ existiert, da die +Front die Nullachse *überhaupt nicht* kreuzt und somit dort kein Vorzeichenwechsel in w_{S} vorliegt. Mit anderen Worten gesprochen: Das GLE Modell sagt ein absolut instabiles Gebiet voraus, während das LNSE Modell dieses nicht tut (vgl. hierzu auch Abb. B.8**(d)**).

B.5 Resumé

In diesem Kapitel wurde der Einfluss von axialem Durchfluss auf das raumzeitliche Wachstumsverhalten von axial unendlich ausgedehnten, sowie lokalisierten Wirbel Strukturen in Form von Wellenpaketen durch numerisches lösen der linearisierten Navier-Stokes Gleichungen für Störungen mit azimutaler Wellenzahl $m = \pm 2$ in einem weiten Bereich der Parameter Re, R_1, R_2 und η untersucht.

Im ersten Teil wurden zunächst die marginalen und kritischen Bifurkationsschwellen von axial unendlich ausgedehnten Strukturen berechnet. Im Fall dieser ist ein neues, unerwartetes und bislang unbekanntes Phänomen aufgetreten: Bei gewissen Kontrollparameterkombinationen wird die marginale Schwelle nicht mehr, wie gewohnt, durch eine einzelne Kurve, wie bei Strukturen mit niedrigen azimutalen Wellenzahlen $|m| \leq 1$, beschrieben. Stattdessen ist die marginale Kurve in *zwei separate* Teilkurven aufgespalten, wodurch sich eine *isolierte 'Insel'* ergibt, innerhalb derer Lösungen mit azimutaler Wellenzahl $m = 2$ linear wachstumsfähig sind. Außerhalb dieser Inseln werden diese Störungen weggedämpft. Dieses Verhalten ist ein Resultat einer sehr viel komplizierteren Eigenwertoberfläche $\gamma(R_1, k)$, verglichen mit derjenigen von $|m| \leq 1$ Störungen. Eine weitere Konsequenz hieraus sind Sprünge in den Kurven der kritischen Werte.

Der zweite Teil befasste sich mit lokalisierten Wellenpaketen aus linear überlagerten $m = \pm 2$ Störungen. Zu diesem Zweck wurden die Schwellen $R_{1,\text{c-a}}(R_2, Re, \eta)$ zwischen absoluter und konvektiver Instabilität unter Ausnutzung einer Sattelpunktsanalyse für $\sigma(Q)$ berechnet. Hierzu wurde einerseits die komplexe Dispersionsrelation für $\sigma(Q)$ unter Ausnutzung der linearisierten Navier-Stokes Gleichungen über der Ebene der komplexen Wellenzahl $Q = k - iK$ bestimmt und andererseits, entlang der reellen k Achse die Ginzburg Landau Näherung (GLE) verwendet, um einen qualitativen, wie auch quantitativen Vergleich der Resultate der linearen Analyse durchführen zu können.

Zunächst wurden die Untersuchungen beschränkt auf die 'klassischen' Sattelpunkte, die aus dem unendlich ausgedehnten Zustand heraus anwachsen, d.h. aus dem kritischen Punkt für $m = 2$ Störungen, was zu einem ungewöhnlichen Verhalten führen kann. Analog zu den Resultaten in den kritischen und marginalen Schwellen, $R_{1,\text{c}}(R_2, Re, \eta)$, existiert für den konvektiv instabilen Bereich ein signifikanter Unterschied in der Stabilitätstopologie von $m = 2$ Störungen, nämlich *'Inseln'* absoluter Instabilität. Mit anderen Worten gesprochen heißt dies: Es ist somit möglich das System von einem stabilen durch einen konvektiv instabilen hinein in einen absolut instabilen Bereich und aus diesem erneut zurück in einen Bereich konvektiver Instabilität zu treiben, nur durch Änderung eines Kontrollparameters, z.B. R_1. Ebenso konnten andere Parameterkombinationen gefunden werden, bei denen überhaupt kein absolut instabiler Bereich mehr existiert.

Allerdings konnten über die zwei, aus dem kritischen Punkt heraus entstehenden, Sattelpunkte hinaus eine große Vielzahl weiterer Sattelpunkte im $k - K - R_1$ Raum gefunden werden. In Abhängigkeit der jeweiligen Kontrollparameter können diese entscheidend werden, da sie Frontlösungen charakterisieren, die in unterschiedliche Richtungen propagieren, und so dass System im absolut instabilen Bereich verbleibt, wie zu erwarten im absolut instabilen Zustand und kehrt *nicht* in den Bereich konvektiver Instabilität zurück.

Zuletzt wurden noch Ergebnisse der linear untersuchten Fronteigenschaften von $m = 2$ Mustern, beschränkt auf die, aus dem ausgedehnten Zustand heraus entstehenden, Sattelpunkte dargestellt. Die Resultate in den Fronten spiegeln das zuvor diskutierte Verhalten, bezüglich der verschiedenen Stabilitätsschwellen, wieder. Hierbei konnte insbesondere ein gravierender Unterschied in den Ergebnissen der verschiedenen verwendeten Modelle, GLE und LNSE, festgestellt werden.

Alles zusammenfassend kann man folgendes festhalten: Es wurden verschiedene Arten bzw. Typen von *'Inseln'* gefunden:

(I) Der erste Typ von Insel definiert ein Gebiet, indem ausgedehnte $m = 2$ Störungen linear wachstumsfähig sind, d.h. $\gamma > 0$, und welches von einem Bereich mit $\gamma < 0$ umschlossen ist.

(II) Der zweite Typ definiert einen Bereich, indem die Grundzustandsströmung absolut instabil gegenüber lokalisierten $m = 2$ Störungen ist, das wiederum von einem Bereich mit konvektiver Instabilität umgeben ist.

Dieses ungewöhnliche Stabilitätsverhalten **(II)** basiert aber auf der Tatsache, dass bei dieser Betrachtung nur die Sattelpunkte berücksichtigt wurden, die sich aus dem unendlich ausgedehnten Zustand heraus entwickeln. Unter Berücksichtigung aller Sättel im $k-K-R_1$ Raum, die verschiedene Frontlösungen charakterisieren, verbleibt das System im Zustand der absoluten Instabilität, nachdem es diesen einmal erreicht hat. r

Anhang C

Visualisierungsmethoden - Vortizität

Das Auffinden einer geeignete Kenngröße zur Charakterisierung und insbesondere zur Visualisierung eines Strömungszustands stellt ein allgemeines Problem dar. Dabei sollte diese Kenngröße sowohl möglichst einfach zugängig sein, gleichzeitig aber auch die Topologie der Struktur bestmöglich wiedergeben. Dies ist insbesondere im Bezug auf Wirbel Strukturen, wie sie im hier diskutierten Taylor-Couette System auftreten von entscheidender Bedeutung. Dabei ist man an einer Kenngröße interessiert, die die einzelnen Wirbel einschließlich ihrer Rotationsrichtung und ihrer Intensität beschreibt.

Eine Möglichkeit einer solchen Kenngröße stellt die *Vortizität* dar. Im Allgemeinen kann jedem Vektorfeld eine Vortizität zugeordnet werden. Häufig erhält man damit eine physikalisch interpretierbare Größe. Die Vortizität, oder auch Wirbelstärke genannt, ist eine zentrale Größe in der Strömungsmechanik und ist ein Maß für die lokale Scherung in einer Strömung. Hierbei handelt es sich um ein sogenanntes (Pseudo-) Vektorfeld. Sie ist definiert als die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{\Omega} := \nabla \times \mathbf{u}. \tag{C.1}$$

Bzw. nach Übergang in, an die vorliegende Systemgeometrie angepasste, Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{\Omega} := \nabla \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_\varphi w - \partial_z v \\ \partial_z u - \partial_r w \\ (\frac{1}{r} + \partial_r)v - \frac{1}{r}\partial_\varphi u \end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

Azimutale Vortizität als geeignetes Maß zur Visualisierung der verschiedenen Strömungsstrukturen

Zur Visualisierung der unterschiedlichen, in dieser Arbeit, diskutierten Strukturen erwies sich insbesondere die φ Komponente, also die azimutale Vortizität,

$$\Omega_\varphi = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_\varphi = \partial_z u - \partial_r w, \tag{C.3}$$

als am geeignetsten. Diese repräsentiert in den meisten Fällen am besten die Geometrie der komplexen Wirbel Strukturen durch Oberflächenplots von Isowerten. Die so gewonnenen Wirbelschläuche zeigen die Topologie der Wirbel, insbesondere auch den Verlauf der Wirbelzentren auf und beinhalten somit die wichtigsten, der hier diskutierten Eigenschaften,

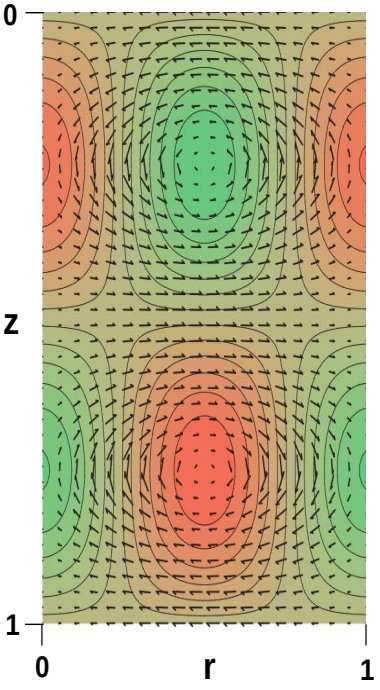


Abbildung C.1 – Schematische Darstellung von Vektorplots $(u(r,z), w(r,z))$ und azimutaler Vortizität Ω_φ eines TVF Zustands zur Verdeutlichung der Aussagekraft der azimutalen Vortizität als geeignete Kenngröße zur Visualisierung des Strömungsflusses. Rot [grün] kennzeichnen positive [negative] Werte der Vortizität. Weiterhin charakterisiert eine positive [negative] Vortizität ein Rotation der Wirbel in mathematisch negativer [positiver] Richtung (vgl. Pfeile der Vektorplots) bei Betrachtung in positive φ Richtung des Koordinatensystems (hier in die Bildebene hinein).

wie z.B. Symmetrien, Gangunterschied, Komplexität, usw... Weiterhin kann die azimutale Vortizität Ω_φ anhand von absoluten Zahlenwerten auch eine Aussage über die Stärke der Wirbel machen und vermittelt dadurch einen guten Eindruck der Wirbeldeformationen.

In diesem Kapitel soll nun ein Eindruck verschiedener, zur Beschreibung der Wirbel Strukturen, möglicher Kenngrößen gegeben werden. Hierbei werden die Vorteile der azimutalen Vortizität Ω_φ als solche Kenngröße aufgezeigt. Da die Wirbelachse meist in azimutaler Richtung orientiert ist, so wird in in der Literatur oft das azimutale Geschwindigkeitsfeld v bzw. eine sich hieraus ergebene kombinierte Kenngröße (vgl. Abb. C.2, C.3) als Maß zur Beschreibung herangezogen.

In den beiden Abbildungen C.2 und C.3 sind verschiedene solcher Kenngrößen zur Visualisierung der Strömungsmuster für die beiden klassischen Strömungszustände, TVF und SPI, dargestellt. Zu sehen sind jeweils Vektorplots $(u(r,z), w(r,z))$ der radialen und axialen Geschwindigkeitskomponente in einer $\varphi =$ konst. Ebene einschließlich der jeweiligen farbkodierten Kenngröße von blau (Minimum) bis rot (Maximum). Als Kenngrößen werden das azimutale Geschwindigkeitsfeld v mit **(a)** und ohne **(b)** das unterliegende CCF Profil in verschiedenen Kombinationen v**(1a)**, vr**(2a)**, v/r**(3a)** und $v - v_{CCF}$**(1b)**, $(v - v_{CCF})r$**(2b)**, $(v - v_{CCF})/r$**(3b)**, so wie $\sqrt{u^2 + w^2}$**(4)**, Ω_φ**(5)** betrachtet. In axialer Richtung ist jeweils eine Periodizitätslänge λ dargestellt.

Betrachtet man die unterschiedlichen Kenngrößen zur Charakterisierung des TVF Zustands in Abbildung C.2, so ist leicht zu erkennen, dass die beiden Kenngrößen $\sqrt{u^2 + w^2}$**(4)** und Ω_φ**(5)** die Vektorplots $(u(r,z), w(r,z))$ am besten reproduziert, wobei $\sqrt{u^2 + w^2}$ die beiden sich entgegengesetzt rotierenden Wirbel nicht unterscheidet (gleiche blaue Farbe) und zusätzlich noch zwischen den beiden Wirbeln einen nicht vorhandenen (rote Farbe) Wirbel suggeriert.

Die azimutale Vortizität Ω_φ**(5)** hingegen charakterisiert die beiden Wirbel recht gut

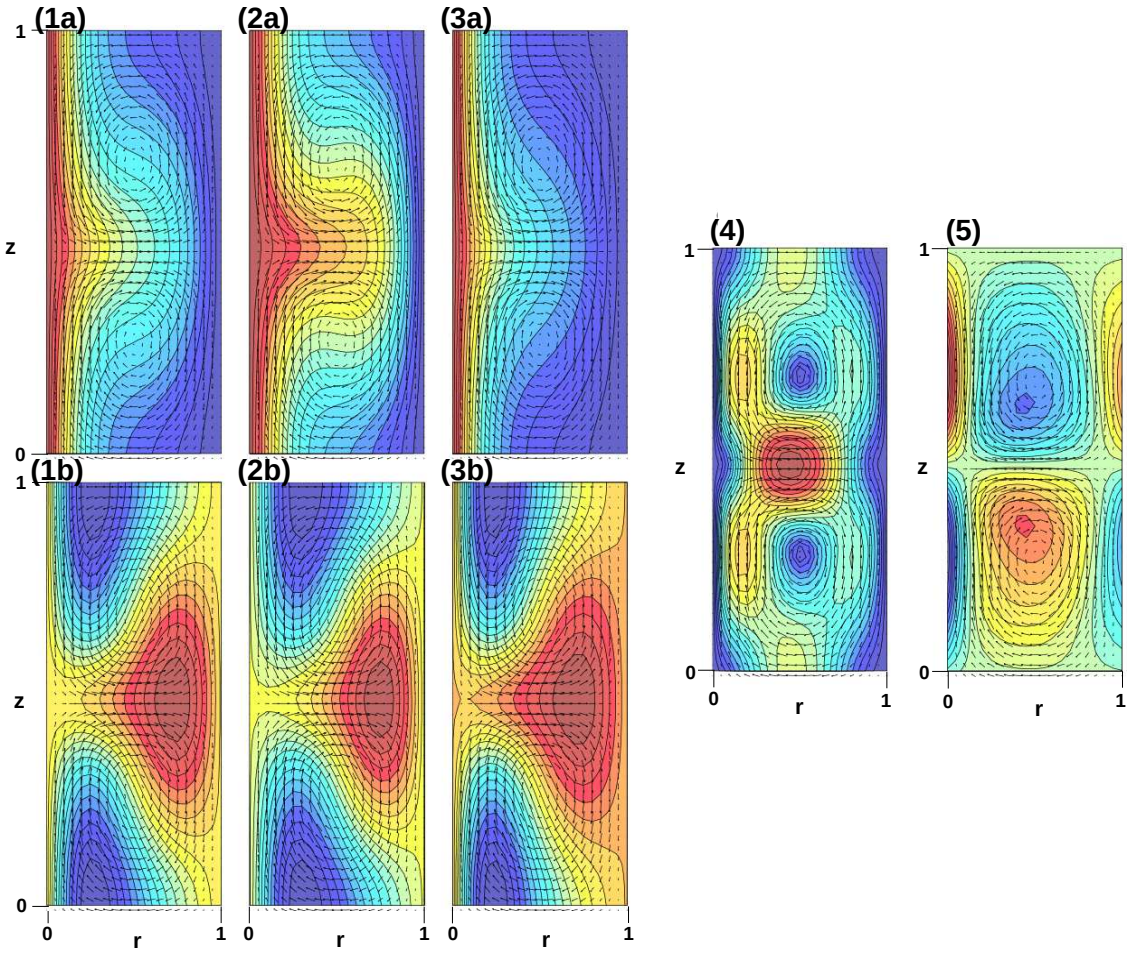


Abbildung C.2 – Vergleich verschiedener farbkodierter Kenngrößen mit CCF **(a)** Strömungsprofil: **(1a)** v, **(2a)** vr, **(3a)** v/r und die um den CCF reduzierten Felder **(b)**: **(1b)** $v - v_{CCF}$, **(2b)** $(v - v_{CCF})r$, **(3b)** $(v - v_{CCF})/r$ und **(4)** $\sqrt{u^2 + w^2}$, **(5)** Ω_φ zur Visualisierung eines TVF Zustands. Kontrollparameter: $R_1 = 120, R_2 = 0, \eta = 0.5, k = 3.927$.

und gewährleistet zusätzlich durch ein unterschiedliches Vorzeichen, abhängig der Rotationsrichtung, auch die Unterscheidung der beiden Wirbel. Rot [blau] bedeutet hierbei eine Rotation des Wirbels in mathematisch negativer [positiver] Richtung, bei Umlaufen des Zylinders in positiver φ Richtung, d.h. in die Bildebene der Abbildung hinein. Es lässt sich aber auch erkennen, dass die Minima und Maxima der azimutalen Vortizität nicht exakt mit den Wirbelzentren zusammenfallen. Die übrigen dargestellten Kenngrößen, die in verschiedener Art und Weise mit dem azimutalen Geschwindigkeitsfeld v korreliert sind, lassen keinerlei bzw. nur sehr wenig Rückschlüsse auf die Wirbel, die Wirbelzentren und somit auch auf die Topologie der Struktur zu und sind folglich nicht wirklich zur Charakterisierung geeignet. Am ehesten lassen sich hier noch die Kenngrößen mit Abzug des unterliegenden CCF Strömungsprofils (in Abb. C.2 unten links) verwenden, da diese zumindest die Trennlinie zwischen den beiden gegenläufig rotierenden Wirbeln erkennen lassen.

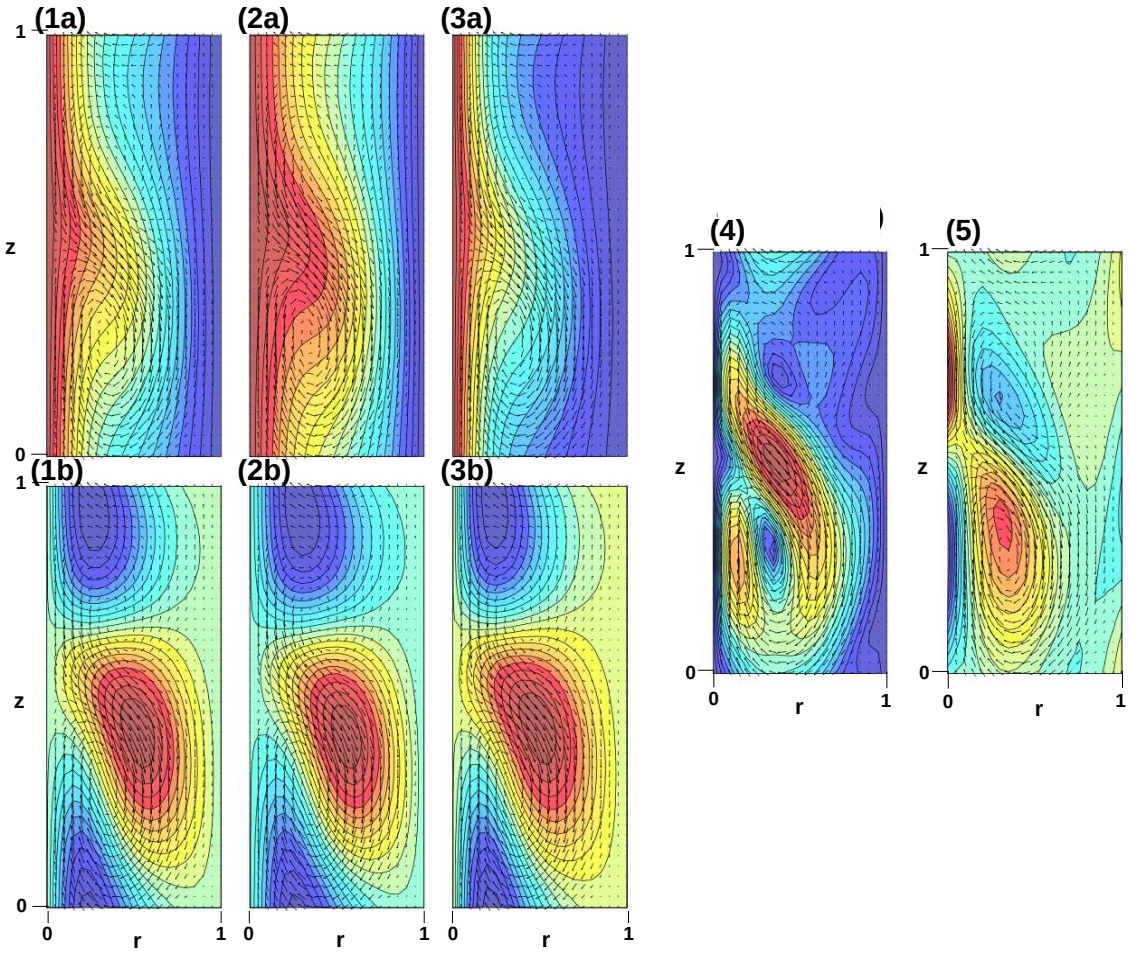


Abbildung C.3 – Vergleich verschiedener farbkodierter Kenngrößen mit CCF **(a)** Strömungsprofil: **(1a)** v, **(2a)** vr, **(3a)** v/r und die um den CCF reduzierten Felder **(b)**: **(1b)** $v - v_{CCF}$, **(2b)** $(v - v_{CCF})r$, **(3b)** $(v - v_{CCF})/r$ und **(4)** $\sqrt{u^2 + w^2}$, **(5)** Ω_φ zur Visualisierung eines SPI Zustands. Kontrollparameter: $R_1 = 130, R_2 = -100, \eta = 0.5, k = 3.927$.

In Abbildung C.3 sind die gleichen Kenngrößen im Fall eines L1-SPI Zustands dargestellt. Auch in diesem Fall lassen nur die beiden Kenngrößen $\sqrt{u^2 + w^2}$**(4)** und Ω_φ**(5)** Rückschlüsse auf die Topologie der Struktur zu, mit den gleichen Vor- und Nachteilen wie bereits in Abbildung C.2 gesehen. Auch hierbei stimmen die Minima und Maxima nicht exakt mit den Wirbelzentren überein, geben aber dennoch den besten Eindruck vom Aufbau der Struktur wieder.

Um einen vollständigeren Überblick über die einzelnen Felder u, v, w und deren Aussagekraft als mögliche Kenngröße, insbesondere im Vergleich zur azimutalen Vortizität Ω_φ zu geben, sind diese für verschiedene komplexere Strukturen, 2-RIB**(a)**, 1-RIB**(b)**,L3R4-MCS**(c)** und L3R5-MCS**(d)**, in der Abbildung C.4 in $r - z$ Plots in einer φ =konst. Ebene dargestellt. Auch hierin ist gut zu erkennen, dass die azimutalen Vortizität Ω_φ die unter-

schiedlichen Wirbel Zustände im Hinblick auf deren Topologie am besten beschreibt, auch bei den hier dargestellten komplexen Strukturen, RIB und MCS. Die Vor- und Nachteile des azimutalen Feldes v wurden bereits zu genüge in den Abbildungen C.2 und C.3 diskutiert. Die beiden Felder u und w als Kenngröße lassen zwar in der farbkodierten Darstellung Wirbel erkennen, allerdings fallen diese nicht mit dem Vektorfeld $(u(r,z), w(r,z))$ der echten Wirbel überein. Zur Charakterisierung der Topologie sind die einzelnen Felder u, v, w also nur sehr bedingt, bzw. nicht geeignet.

Alles in allem lässt sich festhalten, dass für die in dieser Arbeit untersuchten Strömungszustände die azimutale Vortizität ein adäquates Maß zur Beschreibung der topologischen Eigenschaften darstellt.

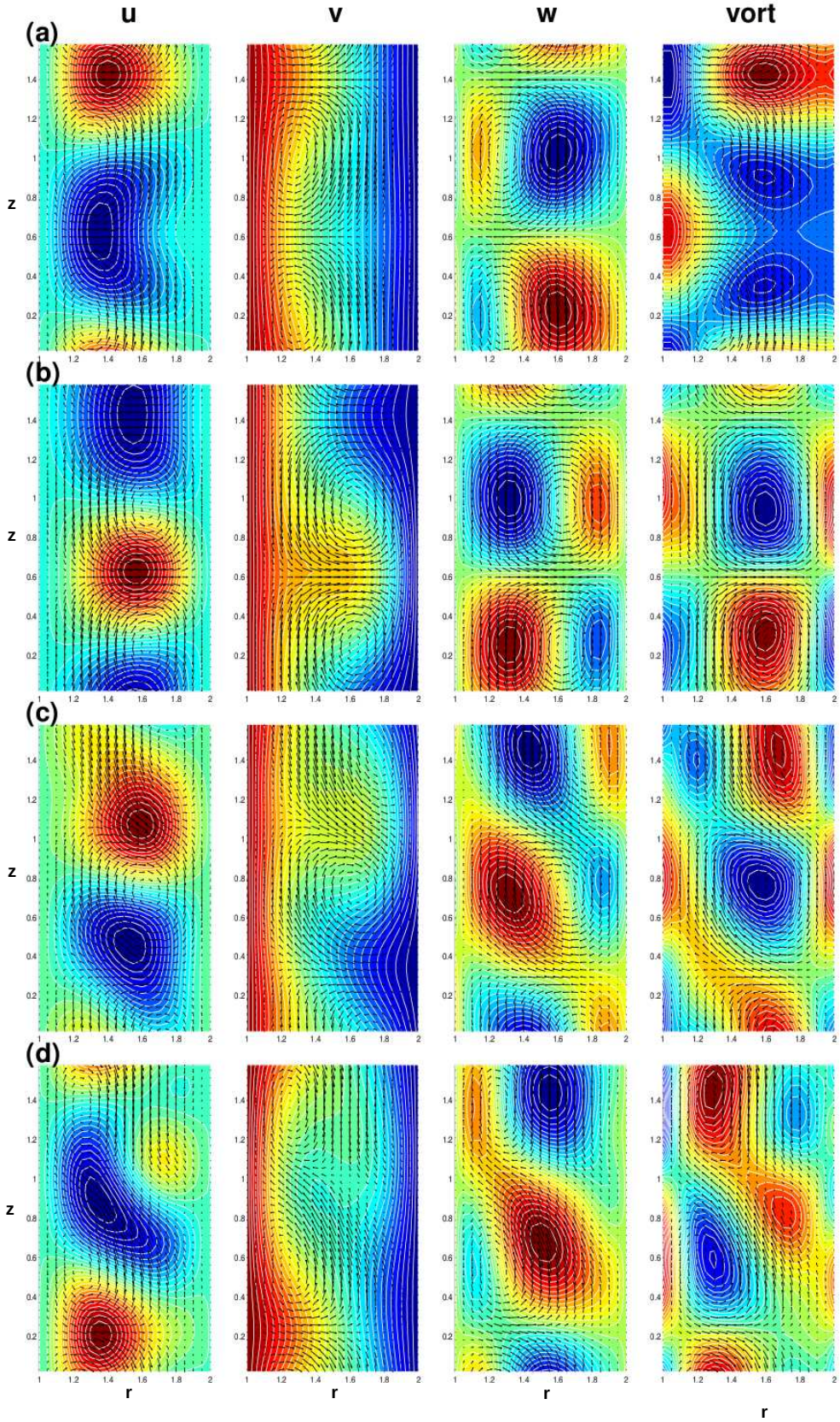


Abbildung C.4 – Vergleich verschiedener Kenngrößen u, v, w, Ω_φ zu unterschiedlichen komplexeren Wirbel Strukturen in $r - z$ Plots in einer φ =konst. Ebene: **(a)** 2-RIB: $R_1 = 220, R_2 = -400$, **(b)** 1-RIB: $R_1 = 120, R_2 = -100$, **(c)** L3R4-MCS: $R_1 = 200, R_2 = 0$, **(d)** L3R5-MCS: $R_1 = 200, R_2 = -130$. Kontrollparameter: $\eta = 0.5, k = 3.927$.

Anhang D

Numerische Lösungsverfahren

Die in diesem Kapitel vorgestellten beiden numerischen Verfahren **G2D2** und **G1D3** dienen der Simulation der vollen Navier-Stokes Gleichungen. Die in Teil I dieser Arbeit (Kap. 4 - 6) berechneten Strukturen, Bifurkations- und Phasendiagramme wurden mit den beiden numerischen Verfahren durchgeführt, während für die Rechnungen in Teil II der Arbeit (Kap. 7 - 9) ausschließlich G1D3 verwendet wurde. Im Folgenden werden beide Codes vorgestellt und insbesondere der neue Code G2D2 ausführlicher getestet.

Das Verfahren G1D3 beruht weitestgehend auf einem ursprünglich von Harlow und Welch (58) entwickelten Code zur Vollsimulation inkompressibler und viskoser Strömungsprobleme. Diese ursprünglich als *Marker und Cell Verfahren* (MAC) bezeichnete Methode beruht im Wesentlichen auf einer Diskretisierung der kontinuierlichen Funktionen in der $r - z$ Ebene. In dieser Arbeit ist es mit einem *Galerkin Verfahren* in azimutaler Richtung φ verkoppelt. Hierauf ist auch die Bezeichnung **G1D3** zurückzuführen:

G1: Galerkin in *einer* Dimension (φ),

D3: Finite Differenzen in *drei* Dimensionen (r, z, t).

Zusätzlich sind bei diesem Verfahren noch entsprechende Terme zur Realisierung von Ferrofluiden mit im Code implementiert (siehe auch Abs. D.2.1). Die Grundlagen der Konzepte dieses Codes wurden bereits in verschiedenen Arbeiten erläutert (16; 61; 65; 113; 83).

Auch beim Verfahren **G2D2** wird eine Kombination aus Galerkin und Finiten Differenzen genutzt, hierbei allerdings in der Kombination:

G2: Galerkin Entwicklung in *zwei* Dimensionen (φ, z),

D2: Finite Differenzen in *zwei* Dimensionen (r, t).

Dieser zweifachen Entwicklung nach Fouriermoden erlaubt die gezielte Einwirkung auf einzelne Moden und somit auf die Strukturen selbst. Dies stellt einen großen Vorteil gegenüber G1D3 dar, da sich unter anderem auch instabile Lösungen komplexer Strukturen relativ einfach untersuchen lassen (Abs. D.1.6).

D.1 G2D2

D.1.1 Darstellung der Gleichungen

Entscheidend bei der Herleitung der Gleichungen ist die Gewährleistung der Impulserhaltung in den zu implementierenden diskretisierten Gleichungen.

Ausgangspunkt bei der Herleitung der Gleichungen ist hier die Erhaltung des Impulses im Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(r, \varphi, z; t)$ einer Flüssigkeitsströmung. Hierbei muss die zeitliche Änderung des Impulses innerhalb eines beliebig zusammenhängenden Teilvolumens V einem Impulsstrom durch die Oberfläche dieses Teilvolumens entsprechen.

$$\partial_t \int_V \rho\, \mathbf{u}\, dV = -\oint_{\partial V} \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}\, d\mathbf{F}, \tag{D.1}$$

wobei $\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}$ den Tensor der Impulsstromdichte darstellt. Formt man nun das Oberflächenintegral auf der rechten Seite dieser Gleichung mittels des Gauß'schen Satzes in ein Volumenintegral um, so können beide Integrale zusammengefasst werden. Da das entstehende Volumenintegral für jedes beliebige Teilvolumen verschwinden muss, muss bereits der Integrand verschwinden, womit die allgemeine Darstellung der Impulsbilanz wie folgt lautet:

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Pi}}} = 0. \tag{D.2}$$

Mit

$$\underline{\underline{\mathbf{\Pi}}}_{\alpha,\beta} = \rho u_\alpha\, u_\beta - \sigma_{\alpha\beta} \tag{D.3}$$

erhält man

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{u} : \mathbf{u}) + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}, \tag{D.4}$$

wobei der Spannungstensor[1] (76) wie folgt lautet:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} + \eta \left[\nabla_\beta u_\alpha + \nabla \alpha_\beta - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \delta_{\alpha\beta}(\nabla \cdot \mathbf{u}). \tag{D.5}$$

Nun wird die Divergenz des Spannungstensors (dissipativer Term) mittels der folgenden Identität ersetzt[2].

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}) &= \nabla_\beta \sigma_{\alpha\beta} \\
&= -\nabla \delta_{\alpha\beta} p + \eta \left[\nabla_\beta \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\beta \nabla \alpha_\beta - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\nabla_\beta(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \delta_{\alpha\beta} \nabla_\beta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
&= -\nabla_\alpha p + \eta \left[\nabla^2 u_\alpha + \nabla_\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{2}{3}\nabla_\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \nabla_\alpha(\nabla \cdot \mathbf{u}) \\
&= \left\{ -\nabla p + \eta \left[\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\}_\alpha \\
&= \left\{ -\nabla p + \eta \left[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right\}_\alpha .
\end{aligned}$$

[1] u_α bezeichnet die Komponente α eines kartesischen Feldes. η und ζ sind Zähigkeitskoeffizienten.

[2] Weiterhin wird noch die Identität $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$ verwendet.

Mit der Divergenz des *Dyadisches Produkts* (advektiver Term)

$$[\nabla \cdot (\mathbf{u} : \mathbf{u})]_\alpha = \nabla_\beta (u_\alpha u_\beta) = u_\alpha (\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\alpha = [\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]_\alpha \tag{D.6}$$

erhält man die allgemeine Darstellung[3]:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \mathbf{u}) = & \overbrace{\eta \left[-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \frac{4}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \zeta \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u})}^{\text{dissipativer Term}} \\ & \underbrace{-\rho \left[\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) \right]}_{\text{advektiver Term}} - \nabla p. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt $\rho = konst.$, und damit für die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, so dass sich (D.7) unter Vernachlässigung aller Terme mit $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$ der linear dissipative Ausdruck

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{\eta}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \frac{1}{\rho} \nabla p \tag{D.8}$$

und in entdimensionalisierter Form (siehe Kap. 1, Abs. 1.4) als

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla p \tag{D.9}$$

schreiben lässt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Terme $\nabla \cdot \mathbf{u}$ im advektiven Anteil *nicht* weggelassen werden können (65)! Dies hat folgenden Hintergrund: Während die Divergenz im dissipativen Term als $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ auftritt ist sie im advektiven Term durch $\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ gegeben. Analytisch macht dies keinen Unterschied, da beide Terme verschwinden. In der diskretisierten Form unterscheiden sie sich jedoch bzgl. ihrer Impulserhaltungseigenschaft. Da die diskretisierte Form von $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ in kartesischen Koordinaten impulserhaltend ist, kann diese ohne Einfluss auf das verwendete numerischen Verfahren zu nehmen entfallen. Anders verhält sich dies, zumindest in Zylinderkoordinaten, bei der diskretisierten Form von $\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$. Hierbei wird die Impulserhaltung nicht erfüllt und muss zur Kompensation des ebenfalls nicht impulserhaltenden Terms $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ mitgenommen werden. Beide Terme zusammen ergeben somit das impulserhaltende *Dyadische Produkt*.

Unter Ausnutzung der Symmetrie erhält man nach Übergang in Zylinderkoordinaten aus Gleichung (D.9) die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_t u \quad = \quad & \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 u + \partial_z^2 u - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi v - \frac{1}{r} \partial_\varphi \partial_r v - \partial_z \partial_r w \\ & - \frac{1}{r} \partial_r (ruu) - \frac{1}{r} \partial_\varphi (vu) - \partial_z (wu) + \frac{v^2}{r} - \partial_r p, \end{aligned}$$

[3] unter Ausnutzung der Identität: $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}^2) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$.

$$
\begin{aligned}
\partial_t v &= \partial_r \left[\frac{1}{r}\partial_r(rv)\right] - \partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi u\right) - \frac{1}{r}\partial_z\partial_\varphi w + \partial_z^2 v \\
&\quad -\frac{1}{r}\partial_r(ruv) - \frac{1}{r}\partial_\varphi(vv) - \partial_z(wv) - \frac{uv}{r} - \frac{1}{r}\partial_\varphi p, \\
\partial_t w &= \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r w) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 w - \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_z u) - \frac{1}{r}\partial_\varphi\partial_z v \\
&\quad -\frac{1}{r}\partial_r(ruw) - \frac{1}{r}\partial_\varphi(vw) - \partial_z(ww) - \partial_z p.
\end{aligned}
\tag{D.10}
$$

In dieser Darstellung ist die Impulserhaltung der advektiven Terme explizit gewährleistet. Mehrfachableitungen so wie Ableitungen von Produkten wurden so zusammengefasst, dass möglichst keine höheren Ableitungen nach einer Variablen oder Produkte von Feldern mit differenzierten Feldern in einem Summanden auftreten. Dies hat zweierlei Vorteile: Einerseits ergibt sich hieraus eine Stabilisierung des Codes und zum anderen hat dies eine Verringerung der notwendigen Gitterpunkte außerhalb des Spaltvolumens zur Folge.

D.1.2 Entwicklung der Felder in azimutaler und axialer Richtung

Aufgrund der Zylindersymmetrie sind alle Felder in azimutaler φ Richtung 2π periodisch. Hieraus resultierend bietet sich eine Entwicklung nach harmonischen Funktionen (sog. m Moden) an. In dem hier verwendeten Code wird ebenfalls eine analoge Entwicklung nach harmonischen Funktionen (sog. n Moden) in axialer Richtung durchgeführt. Die allgemeinen Entwicklungsansätze lauten in diesem Fall:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(r,\varphi,z;t) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_{m,n}(r,z;t)\, e^{i(m\varphi+nkz)}, \\
p(r,\varphi,z;t) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} p_{m,n}(r,z;t)\, e^{i(m\varphi+nkz)}.
\end{aligned}
\tag{D.11}
$$

Durch Projektion der Felder[4] f, g mittels $< e^{im_0\varphi}|f(r,\varphi,z;t)|e^{-in_0kz} >= f_{m_0,n_0}(r;t)$ kann die Mode $f_{m_0,n_0}(r;t)$ wieder reproduziert werden.

$$
\begin{aligned}
& < e^{im_0\varphi}|f(r,\varphi,z;t)|e^{-in_0kz} > \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Gamma} f(r,\varphi,z;t)\cdot e^{-i(m_0\varphi+n_0kz)}\, d\varphi dz \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Gamma}\left(\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} f_{m,n}(r;t)\cdot e^{i[(m-m_0)\varphi+(n-n_0)kz]}\right) d\varphi dz \\
&= f_{m_0,n_0}(r;t).
\end{aligned}
$$

[4] f, g stehen stellvertretend für u, v, w und p.

Die Kopplung von m und n Moden der nichtlinearen Terme $f \cdot g$ ergibt sich hierbei wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& < e^{im_0\varphi}|f(r,\varphi,z;t)\cdot g(r,\varphi,z;t)|e^{-in_0kz} > \\
= \; & \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Gamma} f(r,\varphi,z;t)\cdot g(r,\varphi,z;t)\cdot e^{-i(m_0\varphi+n_0kz)}\,d\varphi dz \\
= \; & \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Gamma}\cdot\left(\sum_{m_1,n_1=-\infty}^{\infty} f_{m_1,n_1}(r;t)\cdot e^{i(m_1\varphi+n_1kz)}\right) \\
& \qquad \left(\sum_{m_2,n_2=-\infty}^{\infty} g_{m_2,n_2}(r;t)\cdot e^{i(m_2\varphi+n_2kz)}\right)\cdot e^{-i(m_0\varphi+n_0kz)}\,d\varphi dz \\
= \; & \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\Gamma}\sum_{m_1,n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2,n_2=-\infty}^{\infty} f_{m_1,n_1}(r;t)\cdot g_{m_2,n_2}(r;t) \\
& \qquad \cdot e^{i[(m_1+m_2-m_0)\varphi+(n_1+n_2-n_0)kz]}\,d\varphi dz \\
= \; & \sum_{m_1+m_2=m_0}\;\sum_{n_1+n_2=n_0} f_{m_1,n_1}(r;t)\cdot g_{m_2,n_2}(r;t) \\
=: \; & \mathbf{S}_{m_0,n_0}(f,g).
\end{aligned}
$$

Lässt man nun m_1 und m_2 wie auch n_1 und n_2 in den endlichen Intervallen $-m_{max}$ bis m_{max}, bzw. $-n_{max}$ bis n_{max} laufen so ergibt sich eine endliche Summe von Produkten der Amplituden f_{m_1,n_1} und g_{m_2,n_2}. In der Praxis ist hierbei die Wahl von m_{max} und n_{max} von der jeweils zu untersuchenden Struktur abhängig. Einige Beispiele hierzu finden sich in Abschnitt D.1.7.

Aufgrund der Orthogonalität der harmonischen Funktionen lassen sich nun die Anteile von m und n Moden separat berechnen. Hierbei Entfallen die Ableitungen in φ und z Richtung gemäß

$$\partial_\varphi \to im, \qquad \partial_z \to ink.$$

Projiziert man nun die NSE (D.10) auf den Unterraum der m ten und n ten Mode, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\partial_t\hat{u}_{m,n} &= -\frac{m^2}{r^2}\hat{u}_{m,n} - n^2k^2\hat{u}_{m,n} - i\frac{m}{r^2}\hat{v}_{m,n} - i\frac{m}{r}\partial_r\hat{v}_{m,n} - ink\partial_r\hat{w}_{m,n} \\
&\quad -\partial_r\hat{p}_{m,n} - \frac{1}{r}\partial_r\left(r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{u}}_{m,n}\right) - i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{u}}_{m,n} - ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{u}}_{m,n} + \frac{1}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{v}}_{m,n}, \\
\partial_t\hat{v}_{m,n} &= -\partial_r\left(i\frac{m}{r}\hat{u}_{m,n}\right) + \partial_r\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\hat{v}_{m,n})\right] - n^2k^2\hat{v}_{m,n} + \frac{m}{r}nk\hat{w}_{m,n} \\
&\quad -i\frac{m}{r}\hat{p}_{m,n} - \frac{1}{r}\partial_r\left(r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{v}}_{m,n}\right) - i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{v}}_{m,n} - ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{v}}_{m,n} - \frac{1}{r}\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{v}}_{m,n},
\end{aligned}
\tag{D.12}
$$

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{w}_{m,n} &= -ink\frac{1}{r}\partial_r(r\hat{u}_{m,n}) + nk\frac{m}{r}\hat{v}_{m,n} - \frac{m^2}{r^2}\hat{w}_{m,n} + \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\hat{w}_{m,n}) \\ &\quad -ink\hat{p}_{m,n} - \frac{1}{r}\partial_r\left(r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{w}}_{m,n}\right) - i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{w}}_{m,n} - ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{w}}_{m,n}.\end{aligned}$$

D.1.3 Diskretisierung

Um die NSE (D.12) numerisch lösen zu können muss man die Felder (u, v, w, p) in radialer Richtung r und der Zeit t diskretisieren. Hierzu werden die kontinuierlichen NSE (D.12) für jeden (m, n) Unterraum auf einem diskreten Gitter beschrieben. Dazu werden die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen, die die Felder beschreiben, durch algebraische Gleichungen angenähert, welche die Felder an diskreten Punkten, den sogenannten Stützstellen beschreiben. Mathematisch wird bei diesem Vorgehen die Differentiation in den partiellen Differentialgleichung durch den Differenzenquotienten ersetzt. Durch Grenzwertbildung gehen diese algebraischen Gleichungen bei infinitisemalem Abstand somit wieder in die partiellen Differentialgleichungen über. Aus numerischen wie auch Stabilitätsgründen erwies es sich als sinnvoll versetzte Gitter[5] zur Berechnung der Felder u, v, w, p in radialer Richtung zu verwenden (siehe Abb. D.1). Durch den Versatz der beiden verwendeten Gitter um $\Delta r/2$ lassen sich häufig Ableitung eines bestimmten Feldes auf dem Gitter eines anderen Feldes sehr einfach realisieren.

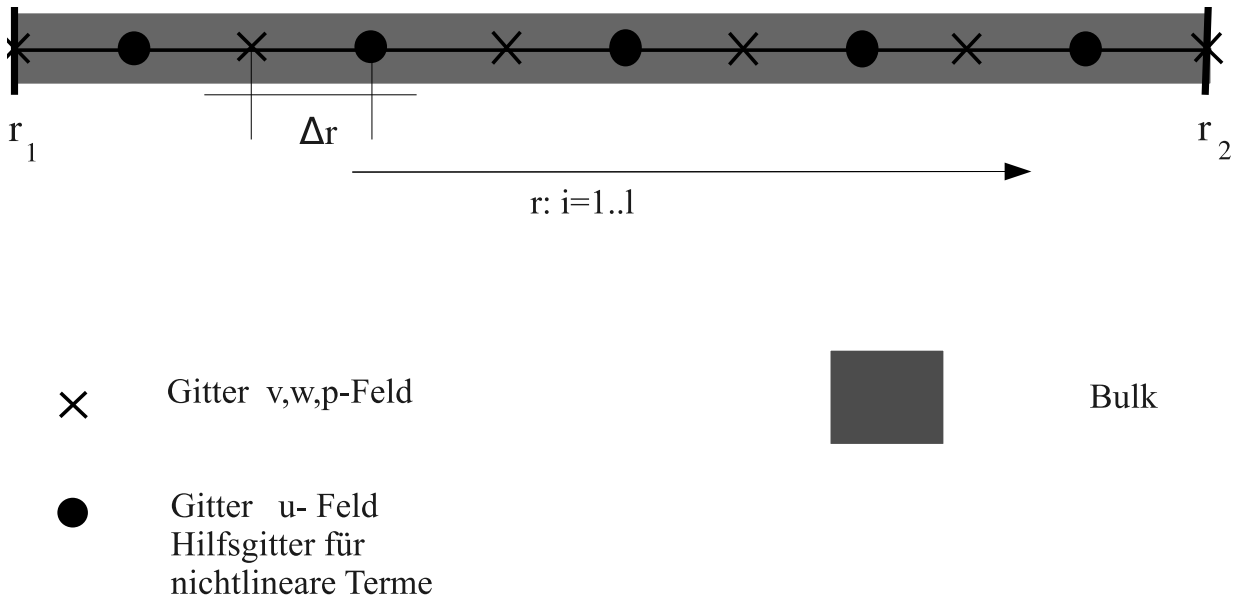


Abbildung D.1 – Radiales Gitter, auf dem die verschiedenen Geschwindigkeitsfelder u, v, w sowie die nichtlinearen Terme (NL) im Fall des numerischen Codes G2D2 berechnet werden. Radialkoordinaten der u und NL Gitterpunkte sind $ru_i = r_1 + (i-1)\Delta r$ und liegen zusammen auf einem Gitter, während v, w und p Felder gemeinsam auf den versetzten Gitterpunkten $rv_i = r_1 + (i - \frac{3}{2})\Delta r$ liegen.

[5]Eine genauere Beschreibung der Vor- und Nachteile versetzter Gitter ist in (65) zu finden.

Zur Diskretisierung der Gleichungen (D.12) wird ein *Forward Time Centered Space* (FTCS) Algorithmus (50) verwendet. Hierbei werden die auftretenden räumlichen Ableitungen auf den beiden benachbarten Gitterpunkten berechnet[6].

$$\partial_r f(r) \approx \frac{f(r+\Delta r/2) - f(r-\Delta r/2)}{\Delta r}. \tag{D.13}$$

Die zeitliche Ableitung ergibt sich durch den Differenzenquotienten zweier aufeinander folgender Zeitpunkte t und $t+\Delta t$:

$$\partial_t f(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{D.14}$$

Dies geschieht separat für jeden der m und n Modenunterräume. Felder verschiedener m und n Modenunterräumen werden dabei aber durch die nichtlinearen Terme miteinander kombiniert.

Für benötigte Felder an Stellen, an denen sich kein Gitterpunkt dieses Feldes befindet, wird eine lineare Interpolation durchgeführt.

$$f(r) \approx \frac{f(r+\Delta r/2) - f(r-\Delta r/2)}{2}. \tag{D.15}$$

Da die Radiuskoordinate r explizit in die NSE (D.12) eingeht, definieren wir für die versetzten Gitter der (u, v, w, p) Felder ebenfalls versetzte r Gitter (ru, rv, rw). Für v, w und p Feld sind die r Gitter identisch (siehe Abb. D.1).

$$\boxed{\begin{array}{lll} ru_i = r_1 + (i-1)\Delta r, & rup_i = ru_i + \frac{\Delta r}{2}, & rum_i = ru_i - \frac{\Delta r}{2} \\ rv_i = r_1 + (i-\frac{3}{2})\Delta r, & rvp_i = rv_i + \frac{\Delta r}{2}, & rvm_i = rv_i - \frac{\Delta r}{2} \\ rw_i = r_1 + (i-\frac{3}{2})\Delta r, & rwp_i = rw_i + \frac{\Delta r}{2}, & rwm_i = rw_i - \frac{\Delta r}{2} \end{array}}$$

Die vollständige diskretisierte Form der NSE (D.12) ist in Anhang E zu finden.

Wie fein die räumliche und zeitliche Diskretisierung zu wählen ist, hängt u.a. von der zu untersuchenden Struktur und insbesondere von deren Frequenz ab (siehe auch Beispiele in Abs. D.1.7).

D.1.4 Druckiteration - Poisson Gleichung

Die Navier-Stokes Gleichungen (D.10), bzw. (D.12)

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla \cdot (\mathbf{u} : \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \nabla p, \tag{D.16}$$

liefern drei Gleichungen für die drei Komponenten u, v, w des Geschwindigkeitsfeldes. Divergenzbildung liefert:

$$\partial_t (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u} : \mathbf{u})] - \nabla^2 p. \tag{D.17}$$

[6] Δr [Δt] steht für die räumliche [zeitliche] Diskretisierungslänge.

Aufgrund der Divergenzfreiheit verschwindet die linke Seite $\partial_t(\nabla \cdot \mathbf{u})$ analytisch und man erhält folgende zu erfüllende *Poisson Gleichung*.

$$\nabla^2 p = -\nabla \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{u} : \mathbf{u})]. \tag{D.18}$$

Mittels den Gleichungen (D.16) und (D.18) lassen sich nun Druck und Geschwindigkeitsfelder für beliebige Randbedingungen berechnen.

Um den Druck nun iterativ zu bestimmen führen wir eine neue und künstliche Zeitskala τ ein. Während der Druck p_τ mit $p_{\tau=0} = p(t)$ relaxiert wird $\mathbf{u}_\tau$ mit $\mathbf{u}_{\tau=0} := \mathbf{u}(t + \Delta t)$ so lange angepasst, bis Gleichung (D.18) erfüllt ist. Somit gilt:

$$\partial_\tau p_\tau = -\beta \left\{ -\nabla \cdot [\nabla(\mathbf{u} : \mathbf{u})] - \nabla^2 p_\tau \right\} = -\beta \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right),$$

mit $\beta := \Delta\tau$ ergibt sich die diskretisierte Form:

$$\Delta p = -\beta(\nabla \mathbf{u}).$$

Die Relaxationskonstante β ist die einzig verbleibende abhängige Größe bei der Relaxation. Iterativ ergeben sich somit der Druck und die Geschwindigkeitsfelder gemäß:

$$\begin{aligned} p_{m,n+1} &= p_{m,n} + \Delta p_{m,n} = p_{m,n} - \beta(\nabla \cdot u_{m,n}) \\ \mathbf{u}_{m,n+1} &= \mathbf{u}_{m,n} - \Delta t(\Delta p_{m,n}). \end{aligned}$$

Die Grenzwerte

$$p(t + \Delta t) = \lim_{n\to\infty} p_{m,n}, \quad \text{und} \quad \mathbf{u}(t + \Delta t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{m,n}$$

erfüllen dann die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$ wie auch die Poisson Gleichung (D.18) (vgl. z.B. (65; 16; 28; 29)).

In der nachfolgenden Tabelle D.1.4 ist das vollständige Iterationsverfahren noch einmal kurz zusammengefasst:

Iterationsverfahren:

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} p_{m,0} &:= p(t) \\ \mathbf{u}_{m,0} &:= \mathbf{u}(t) + \delta t \left\{ \nabla^2 \mathbf{u}(t) - \nabla \cdot [\mathbf{u}(t) : \mathbf{u}(t)] \right\} \end{aligned}$$

Iterationsschritte:

$$\begin{aligned} dp_{m,n} &:= -\beta(\nabla \cdot \mathbf{u}_{m,n}) \\ p_{m,n+1} &:= p_{m,n} + dp_{m,n} \\ \hat{u}_{m,n+1} &:= \hat{u}_{m,n} - \Delta t(\nabla dp)_{m,n} \end{aligned}$$

Lösungen:

$$\begin{aligned} p(t + \Delta t) &= \lim_{n\to\infty} p_{m,n} \\ \mathbf{u}(t + \Delta t) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_{m,n} \end{aligned}$$

Mit $\beta := \frac{\Delta\tau}{\delta t}$ und $0 < \beta < 1$.

Für diese Arbeit gilt: $\beta \leq 0.45$ Die diskretisierte Form der Poisson Gleichung ist in Anhang E, Abschnitt E.2 zu finden.

D.1.5 Randbedingungen

Nach jedem Iterationsschritt werden die Felder $u_{m,n}$, $v_{m,n}$, $w_{m,n}$ und $p_{m,n}$ den gewählten Randbedingungen entsprechend modifiziert. An beiden Zylinderwänden werden jeweils no-slip, d.h. inhomogene Dirichlet- bzw. homogene Neumann Randbedingungen angenommen; an den Deckeln liegen periodische Randbedingungen.

$$\begin{aligned} u_{1,0,0} &\leftarrow 0 \\ v_{1,0,0} &\leftarrow 2v(r_1) - v_{2,0,0} \\ w_{1,0,0} &\leftarrow -w_{2,0,0} \\ u_{l-1,0,0} &\leftarrow 0 \\ u_{l,0,0} &\leftarrow -u_{l-2,0,0} \\ v_{l,0,0} &\leftarrow 2v(r_2) - v_{l-1,0,0} \\ w_{l,0,0} &\leftarrow -w_{l-1,0,0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{1,m,n} &\leftarrow 0 \\ v_{1,m,n} &\leftarrow -v_{2,m,n} \\ w_{1,m,n} &\leftarrow -w_{2,m,n} \\ u_{l-1,m,n} &\leftarrow 0 \\ u_{l,m,n} &\leftarrow -u_{l-2,m,n} \\ v_{l,m,n} &\leftarrow -v_{l-1,m,n} \\ w_{l,m,n} &\leftarrow -w_{l-1,m,n} \end{aligned}$$

Implementierung von no-slip Randbedingungen an den Zylinderwänden mit den Rotationsgeschwindigkeiten $v(r_1)$ und $v(r_2)$ am inneren bzw. äußeren Zylinder. $f_{l,m,n}$ gibt hierbei das Feld and der radialen Position l zur azimutalen Mode m und axialen Mode n wieder.

Gitterpunkte der verschiedenen Felder liegen entweder direkt auf dem Rand oder um $\Delta r/2$ dazu verschoben. Randwerte können somit entweder direkt zugewiesen oder müssen interpoliert werden. Die Ränder unterliegen $m = 0$ Randbedingungen, d.h. Inhomogenitäten treten nur innerhalb der $m = 0$ Welt auf. Alle höheren Moden gehorchen homogenen Randbedingungen.

Wie die Geschwindigkeitsfelder, so müssen auch der Druck und die Druckkorrektur verschiedene Randbedingungen erfüllen.

$$\begin{aligned} dp_1 &\leftarrow dp_2 \\ dp_l &\leftarrow dp_{l-1} \\ p_{1,m,n} &\leftarrow p_{2,m,n} \\ p_{l,m,n} &\leftarrow p_{l-1,m,n} \end{aligned}$$

Externer Durchfluss

Um dem System externen Durchfluss aufzuerlegen wird ein dem Durchfluss entsprechender axialer Druckgradient verwendet.

Zur Überprüfung wurden mehrere Kontrollrechnung für unterkritische Kontrollparameter ($R_2 = 0, R_1 = 40, k = 3.927, \eta = 0.5$) bei festem Durchfluss (z.B.: $Re = -2$) durchgeführt und mit dem analytischen Poiseuille Profil (Gl. (1.17)) sowie dem numerischen Code G1D3 (D.2) verglichen. Alle Profile stimmten im Rahmen der durch die radiale Diskretisierung vorgegebenen Genauigkeit hervorragend miteinander überein.

D.1.6 Stabilisierung instabiler Strukturen

Zur Stabilisierung instabiler Strukturen werden verschiedene Methoden verwendet, die weitere Zwangsbedingungen darstellen. Dies kann durch das 'Ausschalten' bzw. 'Unterdrücken' einzelner Moden, oder das Erzwingen von zusätzlichen Symmetrien erreicht werden. Dies ist aufgrund des Aufbaus des Codes (Galerkin in zwei Dimensionen) relativ simpel, da verschiedene Moden separat und einzeln angesprochen werden können.

Im Folgenden werden kurz die Stabilisierungsmechanismen für unterschiedliche Strukturen vorgestellt. Hierbei empfiehlt sich zum besseren Verständnis der einzelnen Mechanismen eine nochmalige Betrachtung der Modenbesetzung der verschiedenen Strukturen aus Kapitel 3.

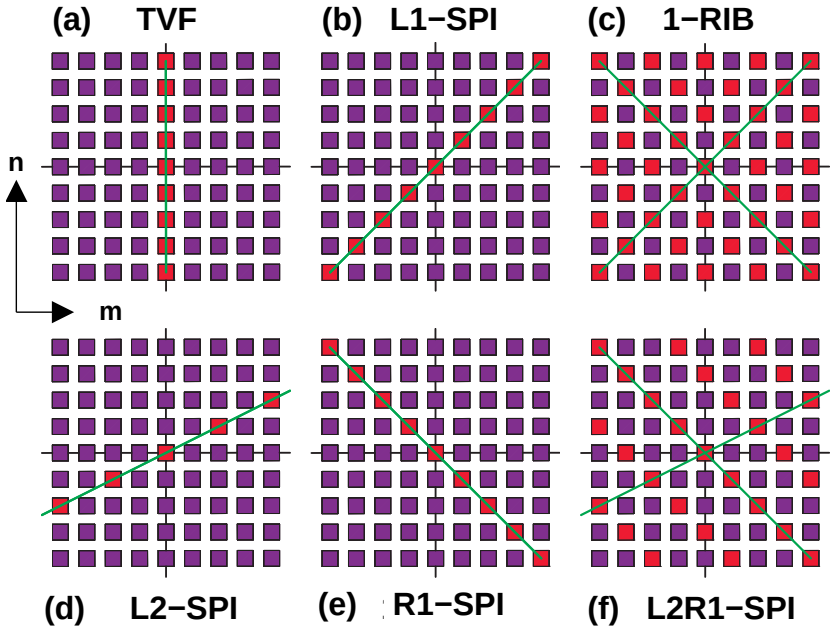


Abbildung D.2 – Unterräume verschiedener Strukturen im (m, n) Modenraum. **(a)** TVF, **(b)** L1-SPI, **(c)** 1-RIB, **(d)** L2-SPI, **(e)** R1-SPI, **(f)** L2R1-MCS. Hier: $m_{max} = 4 = n_{max}$. Rote [blaue] Quadrate symbolisieren [nicht] angeregte Moden inklusive nichtlinearer Kopplungen. Die grüne Linie gibt den linearen Unterraum (ohne nichtlineare Kopplungen)der verschiedenen Strukturen wieder.

Stabilisierung des TVF

Um den rotationssymmetrischen TVF Zustand ($M = 0$) gegenüber anderen Strukturen mit azimutalen Wellenzahlen $m \neq 0$ zu stabilisieren wird *'einfach'* der Raum der zugelassenen Moden eingeschränkt. Konkret bedeutet dies, dass in der Entwicklung (D.11) $m_{max} = 0$ gesetzt wird. Somit kann jegliche azimutale Abhängigkeit der Felder ausgeschlossen werden (vgl. Abb. D.2**(a)**, grüne Line). D.h. in diesem Fall werden alle Moden, die nicht auf der grünen Linie mit $m = 0$ liegen vernachlässigt.

Stabilisierung der SPI

Wie in Kapitel 3 gesehen existieren verschiedene Strukturen in unterschiedlichen Unterräumen. So z.B. existiert eine L1-SPI Lösung im (m, n) Modenraum nur auf der Diagonalen in dem Unterraum mit $m = n$ (siehe Abb. D.2**(b)**, grüne Linie). Um nun eine bestimmte Struktur zu stabilisieren werden alle Moden, die nicht im Modenunterraum dieser Struktur enthalten sind, nach jedem Iterationsschritt auf Null gesetzt. Somit können beliebige Strukturen, wenn existent, bei vorgegebenem Modenunterraum stabilisiert werden. (Für den Fall einer L1-SPI Struktur bedeutet dies, dass alle Moden mit $m \neq n$ nach jedem Iterationsschritt auf Null gesetzt werden.)

Stabilisierung der RIB

Ebenso wie SPI und TVF leben auch die RIB Lösungen in festen Modenunterräumen. Wie in Kapitel 3 diskutiert, handelt es sich hierbei um eine nichtlineare Überlagerung von zwei SPI mit gleicher azimutaler Wellenzahl und identischen Amplituden, aber unterschiedlicher Chiralität bzw. Helizität, zu einer stehenden Welle in axialer Richtung. Anders als einfache SPI Lösungen müssen RIB Zustände die Inversionssymmetrie $z \to -z$ erfüllen. Diese wird numerisch dadurch erreicht, dass alle Felder $\mathbf{u}_{m,n}$ des zulässigen Modenunterraums, nach jedem Iterationsschritt auf die entsprechenden Felder $\mathbf{u}_{m,-n}$ kopiert werden. Die Felder werden also bei $n = 0$ gespiegelt (siehe auch Abb. D.2**(a)**).

Stabilisierung der MCS und CSPI

Die Stabilisierung von MCS Strukturen verläuft analog den vorhergehenden Methoden. Auch in diesem Fall wird nur der Modenunterraum der jeweiligen Struktur zugelassen. Für den Fall einer L2R1-MCS Lösung, wie in Abbildung D.2**(f)** bedeutet dies, dass alle Moden, die nicht zum Unterraum der L2-SPI, bzw. der R1-SPI Lösung (grüne Linien) oder den daraus resultierenden nichtlinearen Kopplungen (rote Quadrate) gehören, nach jedem Iterationsschritt auf Null gesetzt werden. Dies allein ist aber unter Umständen noch nicht ausreichend, um eine MCS Lösung zu erzeugen. Es besteht immer noch die Möglichkeit, dass eine reine L2-SPI oder R1-SPI Struktur entsteht, da beide entsprechende Unterräume zulässig sind. Dies kann z.B. durch Minimierung der Modenanzahl m_{max} und n_{max} ausgeschlossen werden. Es bedarf dann aber einer separaten und genaueren Stabilitätsbetrachtung dieser Strukturen.

Im Grunde handelt es sich bei den CSPI Strukturen um den Spezialfall von MCS Lösungen, die aus zwei reinen SPI Strukturen mit gleicher Wellenzahl, aber unterschiedlicher Helizität aufgebaut sind. Der Stabilisierungsmechanismus ist demnach vollkommen analog, dem hier für MCS Strukturen beschriebenen. Weiterhin besitzen RIB, als Spezialfall von CSP Lösungen, noch gleich große Amplituden in den entgegengesetzt propagierenden SPI Lösungsanteilen.

D.1.7 Überprüfung des Codes

Im Folgenden wird der Code G2D2 auf 'Herz und Nieren' getestet. Hierzu werden die Ergebnisse sowohl mit denen des Codes G1D3, den marginalen Stabilitätsgrenzen mittel Shooting Verfahren (siehe auch Anh. A), sowie einer schwach nichtlinearen Analyse mittels Amplitudengleichung verglichen. Desweiteren wird der Einfluss der Feinheit der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung auf die berechneten Ergebnisse untersucht, mit dem Ziel ein vernünftiges Verhältnis von Rechenzeit und Genauigkeit zu erhalten.

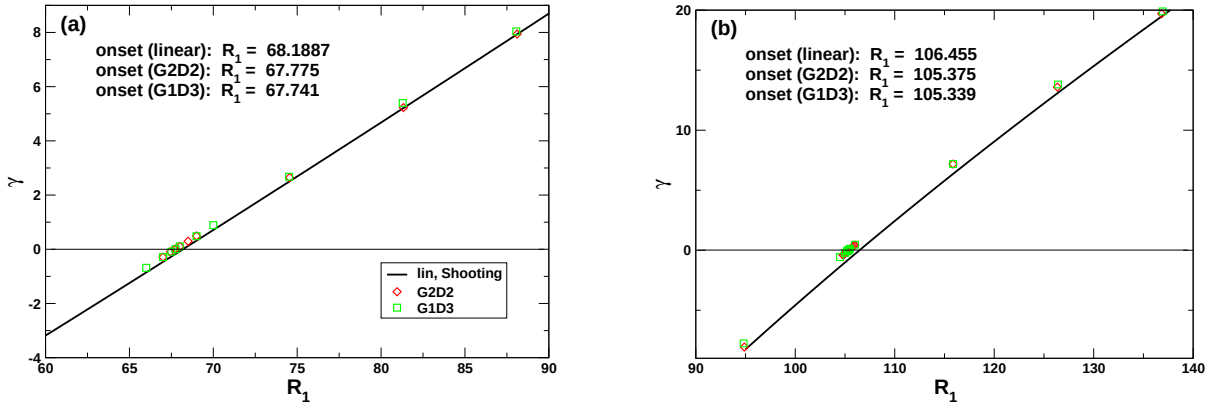


Abbildung D.3 – Vergleich der Wachstumsparameter γ für TVF **(a)** und SPI **(b)** Lösungen in Abhängigkeit der inneren Reynoldszahl R_1 für verschiedene numerische Verfahren: G2D2(◊), G1D3(□) und Shooting(-). Kontrollparameter: $\eta = 0.5$, **(a)** $k = 3.1415, R_2 = 0$, **(b)** $k = 3.927, R_2 = -100$.

Überprüfung der Wachstumskoeffizienten
- Vergleich mit der Linearen Stabilitätsanalyse
- Einfluss der Diskretisierung

Abbildung D.3 zeigt exemplarisch einen Vergleich der Wachstumsparameter γ gewonnen aus den beiden numerischen Verfahren G2D2 (D.1), G1D3 (D.2), sowie Wachstumsparameter aus der linearen Analyse mittels Shooting Verfahren (Anh. A) in Abhängigkeit der inneren Reynoldszahl R_1. Beiden numerischen Verfahren G2D2 und G1D3 ist gemein, dass sie im Gegensatz zur linearen Analyse leicht größere Wachstumsparameter γ liefern, ansonsten aber sehr gut mit den linear berechneten Werten übereinstimmen.

Zusätzlich sind in Abbildung D.3 noch die Werte der Bifurkationsschwellen $R_{1,onset}$ der verschiedenen Verfahren eingetragen. Hierbei liegen die Onsets, die die Codes G2D2 und G2D3 liefern, jeweils leicht unterhalb der linear ermittelten marginalen Stabilitätsschwelle. Im Fall von G2D2 liegen diese noch minimal näher an diesen. Durch zahlreiche weitere Rechnungen konnte der Fehler, für alle betrachteten Strukturen, TVF oder SPI, RIB etc. und Wellenzahlen k in der Genauigkeit, bezogen auf die marginalen Stabilitätsgrenze ($\gamma = 0$) mit weniger als 2% abgeschätzt werden. Dies stimmt auch mit der Genauigkeit des älteren Codes G1D3 (65; 113) überein.

Für verschiedene Wellenzahlen k und Durchflüsse Re wurde eine genauere Untersuchung der Abweichung der Onsets von TVF und SPI Lösungen der Verfahren G2D2 und G1D3 mit den kritischen Onsets aus der linearen Stabilitätsanalyse vorgenommen. Desweiteren wurde noch eine schwach nichtlineare Analyse mittels Amplitudengleichung (AG) (123; 2) als Referenz herangezogen und die relativen Abweichungen bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle D.1 zusammengefasst.

Vergleich mit Shooting Verfahren

Im Folgenden wird der Code G2D2 mit Ergebnissen der linearen Analyse (vgl. Anh. A) verglichen, die mittels des Shooting Verfahrens gewonnen wurden.

In Abbildung D.4 werden Bifurkationsschwellen von TVF (blau) und SPI (orange) Lösungen, erhalten aus der linearen Analyse mittels Shooting Verfahren (durchgehende

$Re = 5:$ TVF ($\eta = 0.5, R_2 = 0$)								
k	ϵ	$R_{1,lin}$	$R_{1,G2D2}$	ϵ_{G2D2} 10^{-2}	$R_{1,G1D3}$	ϵ_{G1D3} 10^{-2}	$R_{1,AG}$	ϵ_{AG} 10^{-3}
3.1415	0.05	72.25608	74.11740	2.57600	74.07960	2.52319	72.25356	0.34637
	0.1	75.69682	77.64680	2.57601	77.60720	2.52322	75.69420	0.34632
3.927	0.05	74.78835	74.34105	5.98088	74.13525	-0.87326	75.17475	5.16658
	0.1	78.34970	77.88110	5.98089	77.66550	-0.87327	78.75450	5.16659
4.833	0.05	82.91558	82.50523	4.94901	82.08585	-1.00069	83.27720	4.36136
	0.1	86.86394	86.43393	4.94902	85.99470	-1.00072	87.29320	4.94179
$Re = 10:$ TVF ($\eta = 0.5, R_2 = 0$)								
3.927	0.05	76.67616	76.16914	6.61186	75.23042	1.88549	74.20689	3.22412
	0.1	80.32733	79.79623	6.61178	78.81285	1.88553	77.74045	3.22041

Tabelle D.1 – Vergleich überkritischer Reynoldszahlen von TVF Zuständen, bei verschiedenen Wellenzahlen k bei $\epsilon = 0.05$ und $\epsilon = 0.1$, für die beiden numerischen Verfahren G2D2, G1D3 sowie der AG mit Ergebnissen der linearen Analyse (Shooting Verfahren). Hier: $\epsilon_x := 1 - \frac{R_{1,x}}{R_{1,lin}}$ wobei $x :=$ G2D2, G1D3, AG. Kontrollparameter: $R_2 = 0, \eta = 0.5$.

	$E(\delta k)$	$\sigma(\delta k)$	$E(\delta R_2)$	$\sigma(\delta R_2)$
TVF	0.034	0.039	0.09	0.20
SPI	0.053	0.050	0.15	0.29

Tabelle D.2 – Gemittelte Werte $E(\cdot)$ und Standardabweichung $\sigma(\cdot)$ der relativen Fehler $\delta k = |k_{\mathrm{G2D2}}/k_{\mathrm{lin}}| - 1$ und $\delta R_2 = |R_{2,\mathrm{G2D2}}/R_{2,\mathrm{lin}}| - 1$ in k und R_2 bezogen auf die Bifurkationsschwellen in Abbildung D.4.

Linien) aus den linearisierten NSE, mit den Ergebnissen des nichtlinearen Codes G2D2 (Symbole) verglichen. Als repräsentative Kontrollparameter wurden hier $R_1 = 115, \eta = 0.5$ gewählt.

Die numerischen Fehler des Codes G2D2 relativ zu den Resultaten des Shooting Verfahrens liegen in der gleichen Größenordnung wie die des Codes G1D3 (65; 113). In Tabelle D.2 sind die gemittelten relativen Fehler $E(\delta k)$ und ihre Standardabweichung $\sigma(\delta k)$ für beide numerischen Methoden angegeben.

Vergleich mit Amplitudengleichung 3. Ordnung

Als weitere Möglichkeit den Code zu überprüfen wurde ein Vergleich mit einer schwach nichtlinearen Analyse mittels Amplitudengleichung durchgeführt. Hierzu wurde eine komplexe Ginzburg Landau Gleichung (123; 2; 112) der Form

$$\tau_0(\partial_t + v_g\partial_z)A(z,t) = [\mu(1+i_{c_0}) + \xi_0^2(1+ic_1){\partial_z}^2 - \gamma(1+i_{c_2})|A|^2]A(z,t)$$

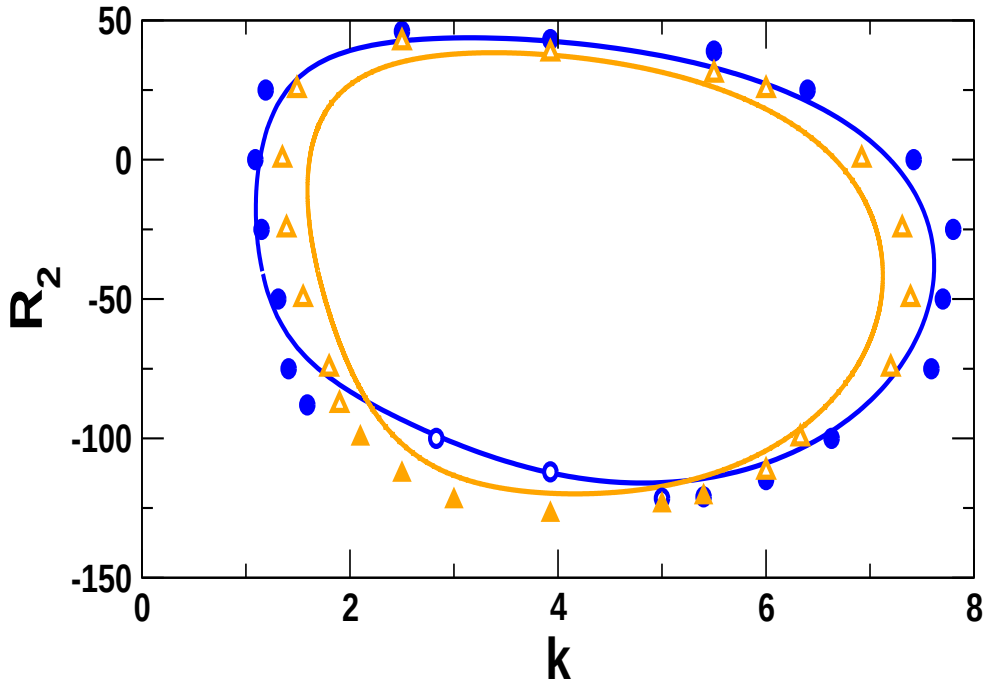


Abbildung D.4 – Vergleich der Bifurkationsschwellen in der $k - R_2$ Ebene bei $R_1 = 115, \eta = 0.5$ erhalten mittels G2D2 (Symbole) gegenüber Störungen der linearen Stabilitätsschwellen des CCF gegenüber TVF (blaue Kurve) und SPI (orange Kurve) Lösungen. Offene [geschlossene] Symbole bedeuten eine Bifurkation in eine instabile [stabile] Lösung.

verwendet. Die benötigten Koeffizienten wurden wie in (123) beschrieben ermittelt. Von besonderem Interesse sind hierbei die Frequenzen $\Omega(k - k_c)$ dieser schwach nichtlinearen Analyse, die sich mittels des Ansatzes

$$A(z,t) = F(k - k_c)e^{i[(k-k_c)z - \Omega(k-k_c)t]}$$

ergeben. Diese sind nachfolgend in der Tabelle D.3 zusammen mit den Frequenzen, ermittelt durch die beiden numerischen Codes G2D2 und G2D3 für verschiedene Strukturen und Kontrollparameter, wie Wellenzahlen und Durchflüsse dargestellt. Desweiteren wurden auch hier die relativen Fehler für die unterschiedlichen überkritischen Werte ermittelt.

Beide numerische Verfahren zeigen in den Frequenzen eine sehr gute Übereinstimmung mit denen der linearen Analyse, bzw. der schwach nichtlinearen Analyse. Die relative Abweichung ϵ von den Werten der linearen Analyse liegt für beide Codes G2D2 und G1D3 bei ca. 1%. Es zeigt sich sogar, dass der neue Code G2D2 gegenüber G1D3 in etwa um den Faktor vier bessere Werte liefert.

$Re = 5:$ TVF ($\eta = 0.5, R_2 = 0$)								
k	ϵ	$\omega_{1,lin}$	$\omega_{1,G2D2}$	ϵ_{G2D2} 10^{-3}	$\omega_{1,G2D3}$	ϵ_{G1D3} 10^{-3}	$\omega_{1,AG}$	ϵ_{AG} 10^{-3}
3.1415	0.05	18.4894	18.5423	2.8066	18.4215	-3.6735	18.4895	0.3856
	0.1	18.4464	18.4434	-1.7192	18.3766	-3.7902	18.4377	-0.4766
3.927	0.05	23.4612	23.4961	1.4883	23.3380	-5.2513	23.4924	1.3302
	0.1	23.4193	23.4587	1.6825	23.3093	-4.6993	23.4407	0.9125
4.833	0.05	29.3712	29.4082	1.1253	29.1211	-8.6476	29.9626	1.3713
	0.1	29.3445	29.3891	1.5201	29.1032	-8.2226	29.9109	2.9794
$Re = 10:$								
3.927	0.05	46.8824	46.9579	1.6098	46.6797	-4.3241	46.9493	1.4278
	0.1	46.8109	46.8819	1.5178	46.6096	-4.2998	46.8544	0.7372

$Re = 5:$ SPI ($\eta = 0.5, R_2 = -100$)								
k	ϵ	$\omega_{1,lin}$	$\omega_{1,G2D2}$	ϵ_{G2D2} 10^{-3}	$\omega_{1,G1D3}$	ϵ_{G1D3} 10^{-2}	$\omega_{1,AG}$	ϵ_{AG} 10^{-3}
3.1415	0.05	32.8789	32.5542	-0.9875	31.2467	-4.9641	32.9012	0.678

Tabelle D.3 – Frequenzen für TVF und SPI Lösungen bei Durchfluss $Re = 5, 10$ und verschiedener Wellenzahl k für überkritische Werten $\epsilon = 0.05$ und $\epsilon = 0.1$ bei $\eta = 0.5$, TVF: $R_2 = 0$, SPI: $R_2 = -100$. Hier: $\epsilon_x := 1 - \omega_{1,x}/\omega_{1,lin}$ mit $x :=$ G2D2, G1D3, AG.

Zeitliche Diskretisierung

Zur zeitlichen Diskretisierung erwies sich eine modifizierte Neumann'sche Bedingung

$$\Delta t = \frac{\beta}{\frac{1}{\Delta r^2} + m_{max}^2 + n_{max}^2}$$

mit $\beta \approx 0.2$ als hinreichend exakt. Zur genaueren Herleitung hierzu siehe (113).

Radiale Diskretisierung

Ausschlaggebend für die räumliche Diskretisierung in r ist die Verteilung der zu untersuchenden Struktur in dieser Richtung (siehe auch Kap. 3). Bei Strukturen, die relativ gleichmäßig zwischen den beiden Zylinderwänden verteilt sind, genügt die Berechnung mit einem groben Gitter. Handelt es sich jedoch um Strukturen, die hauptsächlich am inneren Zylinder leben, so erfordert dies, bei Beibehaltung äquidistanter Gitterpunkte, eine feinere Diskretisierung.
Während Taylor Wirbel mehr oder weniger, unabhängig von R_2, gleichmäßig über den Spalt verteilt sind, so zeigen Strukturen, wie z.B. RIB, SPI, wSPI und MCS eine dominierende Existenz in der ersten Hälfte des Spaltes, hin zum inneren Zylinder (vgl. auch $r - z$ Plots für TVF, SPI, RIB, wTVF, wSPI Lösungen in Kap. 3). Allgemein kann festgehalten

werden, dass ein stark gegenrotierender Zylinder ein 'Stauchen' der Strukturen am inneren Zylinder zur Folge hat. Für den Einzelfall muss jeweils ein Vergleich der Resultate mit verschiedenen Diskretisierungen durchgeführt werden.

Anzahl berücksichtigter Moden m_{max} und n_{max}

Ähnlich wie die radiale Diskretisierung ist auch die Wahl der maximal berücksichtigten Modenanzahl m_{max} und n_{max} von der jeweils zu untersuchenden Struktur abhängig. (An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass es der Code erlaubt mit beliebigen, auch unterschiedlicher Anzahl azimutaler (m_{max}) und axialer (n_{max}) Moden zu rechnen.) So z.B. benötigt der rotationssymmetrische TVF Zustand in azimutaler Richtung nur die 0te Mode.

(a) TVF ($\eta = 0.5, R_1 = -80, R_2 = 0$)								
$m_{max}/$ n_{max}	1	2	3	4	5	6	8	10
u_{01}	3.58756	3.330240	3.335620	3.335440	3.335440	3.335440	3.335440	3.335440
u_{02}	–	0.491490	0.485442	0.485569	0.485567	0.485567	0.485567	0.485567
(a) L1-SPI ($\eta = 0.5, R_1 = 115, R_2 = -100$)								
$m_{max}/$ n_{max}	1	2	3	4	5	6	8	10
u_{11}	3.24003	2.797850	2.779220	2.777210	2.776940	2.776730	2.776270	2.775810
u_{22}	–	0.990073	1.003850	1.004400	1.004280	1.004120	1.003800	1.003470

Tabelle D.4 – Fouriermoden des u Feldes eines stationären TVF Zustands sowie einer L1-SPI Lösung in Spaltmitte für unterschiedliche m_{max} und n_{max}. Die obere Zahl innerhalb jeden Feldes gibt den Wert der dominanten Mode (TVF: $u_{0,1}$, L1-SPI: $u_{1,1}$) an, während die untere Zahl entsprechenden Wert der ersten höher harmonischen Mode (TVF: $u_{0,2}$, SPI: $u_{2,2}$) wiedergibt. Kontrollparameter: $\eta = 0.5$, $\Delta r = 0.05$, $k = 3.927$, $\Gamma = 1.6$, **(a)** $R_1 = 115$, $R_2 = -100$, **(b)** $R_1 = 115$, $R_2 = -100$.

Um die Anzahl der benötigten Moden und die daraus resultierende Genauigkeit abschätzen zu können, sind in Tabelle D.4 die Werte signifikanter Moden von TVF **(a)** und L1-SPI **(b)** Lösung für verschiedene Modenanzahl m_{max} und n_{max} zusammengefasst. Dabei ist jeweils die dominante, sowie die erste höher harmonische Mode des radialen Geschwindigkeitsfeldes u in Zylindermitte ($r = 0.5$) angegeben. Die relative Abweichung in den dominanten Moden $\delta u_{1,1} = 1 - u_{1,1}(m_{max} = 4 = n_{max})/u_{1,1}(m_{max} = 10 = n_{max})$ im Fall von SPI für $m_{max} = 4 = n_{max}$ und $m_{max} = 10 = n_{max}$ liegt bereits bei unter 0.1%. Deshalb wurde für die meisten in dieser Arbeit berechneten Strukturen $m_{max} = 4 = n_{max}$ gewählt. Eine Ausnahme stellen hierbei die MCS Strukturen dar, da diese i.A. aus SPI Zuständen mit größeren azimutalen Wellenzahlen M aufgebaut sind. So z.B. ist es bei einer L3R5-MCS notwendig mindestens mit $m_{max} = 10 = n_{max}$ zu rechnen, um zumindest die erste höhere harmonische Mode des Anteils der R5-SPI Lösung zu berücksichtigen. Im Falle solch komplexer Strukturen ist eine genauere Analyse der notwendigen Modenanzahl vorzunehmen. Die genau Modenanzahl mit der im jeweiligen Fall gerechnet wurde, ist an den entsprechenden Stellen in der Arbeit angegeben.

Vorteile des Codes - Rechnen in Unterräumen

Der Aufbau des Codes G2D2 bringt einige entscheidende Vorteile mit sich. Durch die Entwicklung nach harmonischen Funktionen in zwei Dimensionen, in azimutaler und axialer Richtung, ist es möglich gezielt auf einzelne Moden (m, n) einzuwirken. Somit können z.B. gezielt instabile Strukturen untersucht werden. Hierzu werden, wie bereits weiter oben ausführlich beschrieben, nur die jeweiligen Moden (m, n) zugelassen die zu dem Lösungsunterraum der entsprechenden Struktur gehören, die übrigen Moden werden nach jedem Iterationsschritt auf Null gedrückt. Hieraus resultiert ein weiterer Vorteil, der in der Minimierung der benötigten Rechenzeit verglichen mit dem Code G1D3 liegt.

D.2 G1D3 mit Niklas Näherung

Die Niklas'schen Bewegungsgleichungen (103) für ein Ferrofluid im homogenen Magnetfeld unterscheiden sich von den NSE ohne Magnetfeld nur durch einige vom Geschwindigkeitsfeld unabhängige Zusatzterme. Hierzu werden die Terme analog der Arbeit von Leschhorn (83) in den Code G1D3 eingebunden.

Wie der zuvor vorgestellte Code G2D2 handelt es sich auch hierbei um ein numerisches Verfahren, bestehend aus einer Kombination von Galerkinverfahren und Finiten Differenzen. Hierbei werden die Felder aber nur in azimutaler Richtung (G1) nach Fouriermoden entwickelt und Finite Differenzen in der Zeit, sowie in radialer und axialer Richtung (D3) benutzt[7].

Die Entwicklung der Felder in azimutaler Richtung ergibt sich hierbei gemäß:

$$f(\mathbf{r},t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r,z,t)e^{im\varphi}, \quad f \in (u,v,w,p). \tag{D.19}$$

Einsetzen dieses Ansatzes in die erweiterten Navier-Stokes Gleichungen in Niklas Näherung 8.11 liefert unendlich viele Gleichungen in den Moden, die sowohl durch die nichtlinearen Terme, wie auch die magnetischen Zusatzterme miteinander verkoppelt sind. Zur Simulation ist aber eine endliche Zahl von Moden notwendig:

$$f_m = 0, \text{ für } |m| > m_{max}. \tag{D.20}$$

In dieser Arbeit wurde in azimutaler Richtung mindesten $m_{max} = 8$ gewählt. Zur späteren Auswertung der Daten wird noch eine Zerlegung nach n Moden in axialer Richtung durchgeführt.

D.2.1 Modenentwicklung in Niklas Näherung

Aus obigem Ansatz (D.19) ergibt sich folgende Darstellung der Bewegungsgleichung in Niklas Näherung bezogen auf die $m$te Mode:

[7] In früheren Arbeiten wurde dieses Verfahren unter der Bezeichnung MAC (Marker and Cell) verwendet (61; 65; 113).

$$
\begin{aligned}
\partial_t \hat{u}_m &= -\frac{1}{r}\partial_r (ru^2)_m - i\frac{m}{r}(uv)_m - \partial_z (uw)_m + \frac{1}{r}(v^2)_m - \partial_r \hat{p}_m \qquad \text{(D.21)}\\
&+(1+s_x^2)\left(-\frac{m^2}{r^2}\hat{u}_m - i\frac{m}{r}\partial_r \hat{v}_m - i\frac{m}{r^2}\hat{v}_m\right) + \left(1+s_z^2+\frac{1}{2}s_x^2\right)\left(\partial_z^2 \hat{u}_m - \partial_r \partial_z \hat{w}_m\right)\\
&+\frac{1}{4}s_x^2\left\{\left[\partial_z^2 \hat{u}_{m-2} + i\partial_z^2 \hat{v}_{m-2} - \left(\partial_r + \frac{2-m}{r}\right)\partial_z \hat{w}_{m-2}\right]\right.\\
&+ \qquad \left.\left[\partial_z^2 \hat{u}_{m+2} - i\partial_z^2 \hat{v}_{m+2} - \left(\partial_r + \frac{2+m}{r}\right)\partial_z \hat{w}_{m+2}\right]\right\}\\
&+\frac{1}{2}s_x s_z\left\{\left[\frac{1-2m}{r}\partial_z \hat{u}_{m-1} - i\left(\partial_r + \frac{1+m}{r}\right)\partial_z \hat{v}_{m-1} + \left(\frac{m}{r}\partial_r - \frac{m(m-1)}{r^2}\right)\hat{w}_{m-1}\right]\right.\\
&+ \qquad \left.\left[\frac{1+2m}{r}\partial_z \hat{u}_{m+1} + i\left(\partial_r + \frac{1-m}{r}\right)\partial_z \hat{v}_{m+1} - \left(\frac{m}{r}\partial_r + \frac{m(m+1)}{r^2}\right)\hat{w}_{m+1}\right]\right\},\\
\partial_t \hat{v}_m &= -\frac{1}{r}\partial_r (ruv)_m - i\frac{m}{r}(v^2)_m - \partial_z (vw)_m - \frac{1}{r}(uv)_m - i\frac{m}{r}\hat{p}_m \qquad \text{(D.22)}\\
&+(1+s_x^2)\left\{\partial_r\left[\frac{1}{r}\partial_r (r\hat{v}_m)\right] - \partial_r\left(i\frac{m}{r}\hat{u}_m\right)\right\} + \left(1+s_z^2+\frac{1}{2}s_x^2\right)\left(\partial_z^2 \hat{v}_m - i\frac{m}{r}\partial_z \hat{w}_m\right)\\
&+i\frac{1}{4}s_x^2\left\{\left[\partial_z^2 \hat{u}_{m-2} + i\partial_z^2 \hat{v}_{m-2} - \left(\partial_r + \frac{2-m}{r}\right)\partial_z \hat{w}_{m-2}\right]\right.\\
&- \qquad \left.\left[\partial_z^2 \hat{u}_{m+2} - i\partial_z^2 \hat{v}_{m+2} - \left(\partial_r + \frac{2+m}{r}\right)\partial_z \hat{w}_{m+2}\right]\right\}\\
&+i\frac{1}{2}s_x s_z\left\{\left[\left(\partial_r - \frac{1-m}{r}\right)\partial_z \hat{u}_{m-1} + i\left(2\partial_r + \frac{1}{r}\right)\partial_z \hat{v}_{m-1} - \partial_r\left(\partial_r + \frac{1-m}{r}\right)\hat{w}_{m-1}\right]\right.\\
&+ \qquad \left.\left[\left(\partial_r - \frac{1+m}{r}\right)\partial_z \hat{u}_{m+1} - i\left(2\partial_r + \frac{1}{r}\right)\partial_z \hat{v}_{m+1} - \partial_r\left(\partial_r + \frac{1+m}{r}\right)\hat{w}_{m+1}\right]\right\},\\
\partial_t \hat{w}_m &= -\frac{1}{r}\partial_r (ruw)_m - i\frac{m}{r}(vw)_m - \partial_z (w^2)_m - \partial_z \hat{p}_m \qquad \text{(D.23)}\\
&+\left(1+s_z^2+\frac{1}{2}s_x^2\right)\left[\partial_r\left(r\partial_r \hat{w}_m\right) - \frac{m^2}{r^2}\hat{w}_m - i\frac{m}{r}\partial_z \hat{v}_m - \frac{1}{r}\partial_r (r\partial_z \hat{u}_m)\right]\\
&+\frac{1}{4}s_x^2\left\{\left[\left(\partial_r - \frac{1-m}{r}\right)\left(-\partial_z \hat{u}_{m-2} - i\partial_z \hat{v}_{m-2}\right)\right]\right.\\
&+ \qquad \left[\left(\partial_r + \frac{3-2m}{r}\right)\partial_r \hat{w}_{m-2} + (m-2)\frac{1}{r^2}\hat{w}_{m-2}\right]\\
&+ \qquad \left[\left(\partial_r - \frac{1+m}{r}\right)\left(-\partial_z \hat{u}_{m+2} + i\partial_z \hat{v}_{m-2}\right)\right]\\
&+ \qquad \left.\left[\left(\partial_r + \frac{3-2m}{r}\right)\partial_r \hat{w}_{m-2} + (m-2)\frac{1}{r^2}\hat{w}_{m-2}\right]\right\}\\
&+\frac{1}{2}s_x s_z\left\{\left[-\left(\partial_r + \frac{1-m}{r}\right)\left(\frac{1-m}{r}\hat{u}_{m-1}\right) + i\left(\partial_r + \frac{1-m}{r}\right)\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\hat{v}_{m-1}\right]\right.
\end{aligned}
$$

$$+ \qquad \left[-\left(\partial_r + \frac{1+m}{r}\right)\left(\frac{1+m}{r}\hat{u}_{m+1}\right) - i\left(\partial_r + \frac{1+m}{r}\right)\left(\partial_r + \frac{1}{r}\right)\hat{v}_{m+1}\right]\Bigg\}.$$

Für den Fall, dass kein externes Magnetfeld anliegt, also $s_x = 0 = s_z$ gilt, ergibt sich der alte Code (65; 113)

D.2.2 Diskretisierung

Die Gleichungen (D.21)-(D.23) für die azimutalen Moden werden, analog des zuvor vorgestellten Codes G2D2, mittels eines FTCS Algorithmus diskretisiert. An dieser Stelle sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich im Falle dieses Codes G1D3, Finite Differenzen in radialer *und* axialer Richtung verwendet werden (siehe Abb. D.5). Hierbei werden die auftretenden räumlichen Ableitungen auf den beiden benachbarten Gitterpunkten berechnet[8]

$$\partial_x f(x) \approx \frac{f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)}{\Delta x}. \tag{D.24}$$

Die zeitliche Ableitung ergibt sich durch den Differenzenquotienten zweier aufeinander folgender Zeitpunkte t und $t+\Delta t$ lautet analog dem zuvor diskutierten Code G2D2:

$$\partial_t f(t) \approx \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \tag{D.25}$$

Dies geschieht separat für jeden m Modenunterraum. Felder verschiedener m Modenunterräume werden aber durch die nichtlinearen Terme miteinander kombiniert.

Für benötigte Felder an Stellen, an denen sich kein Gitterpunkt dieses Feldes befindet, wird eine lineare Interpolation durchgeführt.

$$f(x) \approx \frac{f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)}{2}. \tag{D.26}$$

Da die Radiuskoordinate r explizit in die NSE (D.21)-(D.23) eingeht, definieren wir für die versetzten Gitter (vgl. Abschnitt D.1.3) der (u, v, w, p) Felder ebenfalls versetzte r Gitter (ru, rv, rw). Für v und p Feld sind die r Gitter identisch (siehe Abb. D.5). Weiterhin wird zur besseren Darstellung bestimmter Ableitungen ein weiteres o Gitter (ro) eingeführt:

$$\boxed{\begin{array}{lll} ro_1 = r_1 + (i-1)\Delta r, & rop_i = ro_i + \frac{\Delta r}{2}, & rom_i = ro_i - \frac{\Delta r}{2} \\ ru_1 = r_1 + (i-1)\Delta r, & rup_i = ru_i + \frac{\Delta r}{2}, & rum_i = ru_i - \frac{\Delta r}{2} \\ rv_1 = r_1 + (i-\frac{3}{2})\Delta r, & rvp_i = rv_i + \frac{\Delta r}{2}, & rvm_i = rv_i - \frac{\Delta r}{2} \\ rw_1 = r_1 + (i-\frac{3}{2})\Delta r, & rwp_i = rw_i + \frac{\Delta r}{2}, & rwm_i = rw_i - \frac{\Delta r}{2} \end{array}}$$

[8] x steht für die Raumkoordinaten r und z, Δx [Δt] für die räumliche [zeitliche] Diskretisierungslänge.

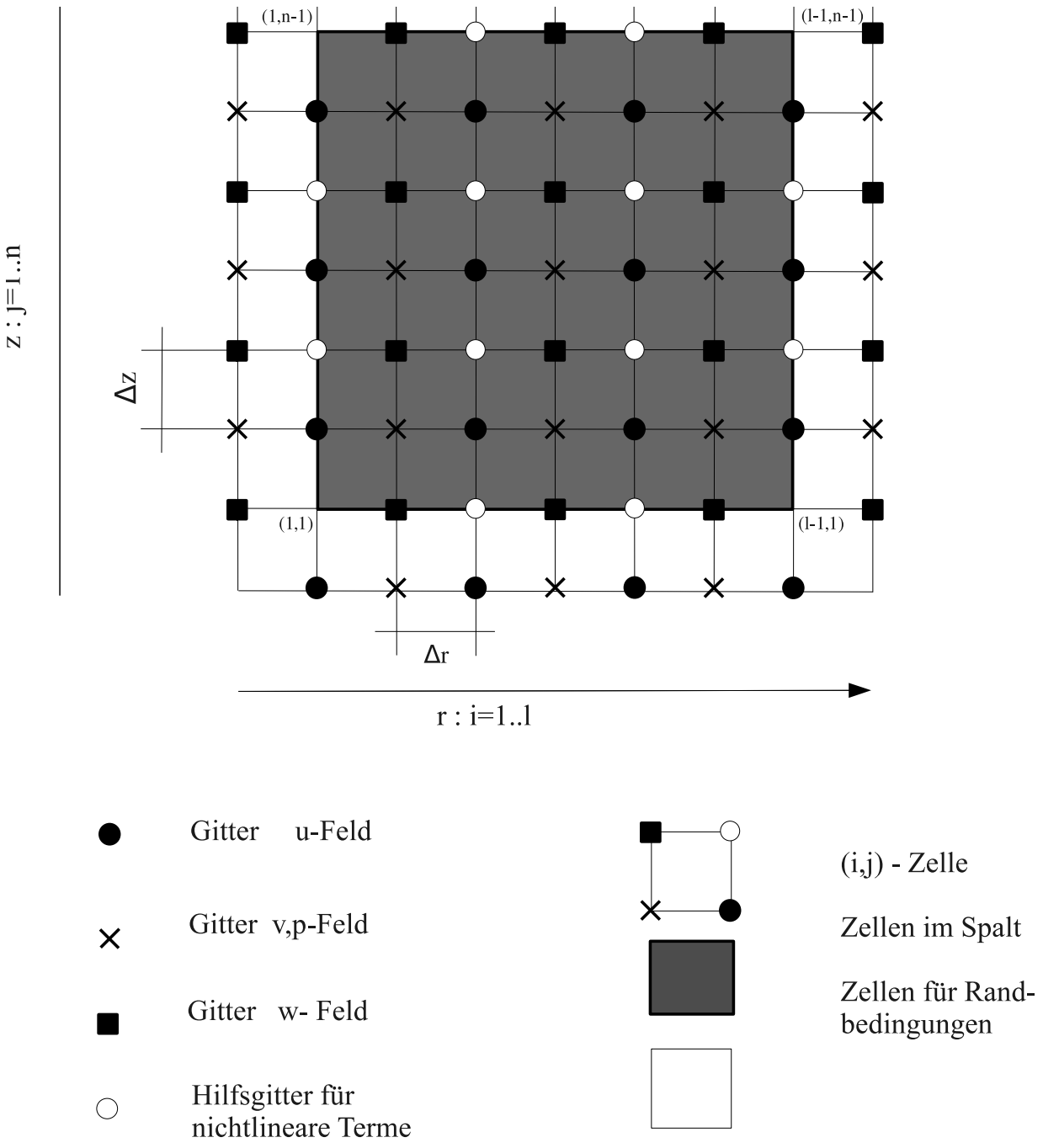


Abbildung D.5 – Verwendetes Gitter in der $r-z$ Ebene für den Code G1D3. Die unterschiedlichen Felder werden auf zueinander versetzten Gittern realisiert (122; 23; 53; 61; 65; 113; 83) wodurch sich die diskretisierten Ableitungen in r und z Richtung vereinfachen. Nichtlineare Terme werden mittels eines Hilfsgitters (NL) berechnet. Die Einzelzelle besitzt die Maße $\frac{\Delta r}{2} \times \frac{\Delta z}{2}$, Gitterpunkte werden mit i und j indiziert.

Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$\begin{array}{ll} u_{i,j,m} := \hat{u}_m(ru_i, zu_j, t), & un_{i,j,m} := \hat{u}_m(ru_i, zu_j, t+\Delta t) \\ v_{i,j,m} := \hat{v}_m(rv_i, zu_j, t), & vn_{i,j,m} := \hat{v}_m(rv_i, zu_j, t+\Delta t) \\ w_{i,j,m} := \hat{w}_m(rv_i, zw_j, t), & wn_{i,j,m} := \hat{w}_m(rv_i, zw_j, t+\Delta t) \\ p_{i,j,m} := \hat{p}_m(rv_i, zw_j, t), & pn_{i,j,m} := \hat{p}_m(rv_i, zu_j, t+\Delta t) \end{array}$$

lässt sich das neue Geschwindigkeitsfeld im Bulk zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus Druck und vorherigen Geschwindigkeitsfeldern zur Zeit t wie folgt berechnen:

$$\mathbf{un}_{i,j,m} = \mathbf{u}_{i,j,m} + \Delta t \Delta \mathbf{u}_{i,j,m}. \tag{D.27}$$

Die Zeitlichen Ableitungen $\Delta \mathbf{u}_{i,j,m}$ folgen hierbei aus den Bewegungsgleichungen (D.21)-(D.23):

$$\begin{aligned} \Delta u_{i,j,m} &= u6 + u7 + u8 + u9 + u10 \\ &+ \left(1 + s_x^2\right)(u1 + u3 + u4) + \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(u2 + u5) \\ &+ \frac{1}{4}s_x^2(uxx_+ + uxx_-) \\ &+ \frac{1}{2}s_x s_z(uxz_+ + uxz_-), \end{aligned} \tag{D.28}$$

$$\begin{aligned} \Delta v_{i,j,m} &= v6 + v7 + v8 + v9 + v10 \\ &+ \left(1 + s_x^2\right)(v1 + v3) + \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(v4 + v5) \\ &+ \frac{1}{4}s_x^2(vxx_+ + vxx_-) \\ &+ \frac{1}{2}s_x s_z(vxz_+ + vxz_-), \end{aligned} \tag{D.29}$$

$$\begin{aligned} \Delta w_{i,j,m} &= w6 + w7 + w8 + w9 \\ &+ \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(w1 + w2 + w3 + w4) \\ &+ \frac{1}{4}s_x^2(wxx_+ + wxx_-) \\ &+ \frac{1}{2}s_x s_z(wxz_+ + wxz_-). \end{aligned} \tag{D.30}$$

Die vollständige Form der diskretisierten NSE mit allen Termen ist im Einzelnen in Anhang E.3 zu finden.

D.2.3 Druckiteration - Poisson Gleichung

Bislang fehlen bei der Berechnung noch der neue Druck $p(t+\Delta t)$, sowie die Sicherstellung, dass $u(t+\Delta t)$ der Kontinuitätsgleichung genügt. Um dies zu erhalten geht man erneut von der Bewegungsgleichung

$$\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{f}(\nabla, \mathbf{u}) - \nabla p \tag{D.31}$$

aus. Durch Divergenzbildung erhält man eine *Poisson Gleichung* für den Druck:

$$\partial_t(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{f}(\nabla, \mathbf{u}) - \nabla^2 p \tag{D.32}$$

$$\Longleftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{f}(\nabla, \mathbf{u}) = \nabla^2 p. \tag{D.33}$$

Druck und Geschwindigkeit werden nun solange sukzessive iteriert, bis beide Seiten im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit verschwinden.[9]

D.2.4 Randbedingungen

Als letztes bleibt noch zu klären, wie die Randbedingungen, die nach jedem Zeitschritt und nach jedem Iterationsschritt für die Druckiteration neu eingestellt werden, in die jeweiligen Felder eingehen. Hierbei kann es nötig sein entsprechende Felder zu interpolieren, falls diese nicht auf dem Rand liegen. Die Gitter (siehe Abb. D.5) wurden so gewählt, dass auf den Rändern immer nur ein Geschwindigkeitsfeld vertreten ist und in den Ecken überhaupt kein Gitterpunkt eines dieser Felder liegt. Dies hat den Vorteil, dass keiner der Gitterpunkte zwei Randbedingungen gleichzeitig erfüllen muss, wie es in den Ecken der Fall wäre.

Für den inneren und äußeren Zylinder wurden no-slip Randbedingungen angenommen, d.h. Fluid und rotierender Zylinder besitzen dort die gleiche Geschwindigkeit; die Flüssigkeit haftet an den Zylinderwänden (siehe auch Diskussion in Kap. 1).

In axialer Richtung werden unter anderem (i) periodische Randbedingungen, die für den Grenzfall unendlich langer Zylinder geeignet sind, angelegt. In diesem Fall ist man nur an periodischen Lösungsstrukturen interessiert.

$$\forall j = 1 \dots l$$

$$\begin{aligned}
u_{1,j,0} &\leftarrow 0 \\
v_{1,j,0} &\leftarrow 2v(r_1) - v_{2,j,0} \\
w_{1,j,0} &\leftarrow -w_{2,j,0} \\
u_{l-1,j,0} &\leftarrow 0 \\
u_{l,j,0} &\leftarrow -u_{l-2,j,0} \\
v_{l,j,0} &\leftarrow 2v(r_2) - v_{l-1,j,0} \\
w_{l,j,0} &\leftarrow -w_{l-1,j,0}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
u_{1,j,m} &\leftarrow 0 \\
v_{1,j,m} &\leftarrow -v_{2,j,m} \\
w_{1,j,m} &\leftarrow -w_{2,j,m} \\
u_{l-1,j,m} &\leftarrow 0 \\
u_{l,j,m} &\leftarrow -u_{l-2,j,m} \\
v_{l,j,m} &\leftarrow -v_{l-1,j,m} \\
w_{l,j,m} &\leftarrow -w_{l-1,j,m}
\end{aligned}$$

$f_{l,j,n}$ gibt hierbei das Feld and der radialen Position l, der axialen Position j zur azimutalen Fourier Mode m wieder.

Um andererseits (ii) endliche Systeme zu simulieren wurden ebenfalls no-slip Bedingungen an den Deckeln gewählt. Hierbei ergibt sich die Wertzuweisung und Implementation analog zu den Zylinderwänden.

[9] Das exakte Vorgehen hierzu ist in (65; 113) zu finden.

$$
\begin{aligned}
u_{i,1,m} &\leftarrow -u_{i,2,m} \\
u_{i,n,m} &\leftarrow -u_{i,n-1,m} \\
v_{i,1,m} &\leftarrow -v_{i,2,m} \\
v_{i,n,m} &\leftarrow -v_{i,n-1,m} \\
w_{i,1,m} &\leftarrow 0 \\
w_{i,n-1,m} &\leftarrow 0 \\
w_{i,n,m} &\leftarrow 0
\end{aligned}
$$

Anhang E

Diskretisierte Form der Gleichungen

In diesem Anhang wird die diskretisierte Form der NSE für die beiden verwendeten numerischen Verfahren G2D2 und G1D3 vorgestellt. s

E.1 Diskretisierte Form der NSE - G2D2

Die in Anhang D hergeleitete Form der NSE (D.12) lautet:

$$
\begin{aligned}
\partial_t \hat{u}_m &= \underbrace{-\frac{m^2}{r^2}\hat{u}_m}_{u1} \underbrace{-n^2k^2\hat{u}_m}_{u2} \underbrace{-i\frac{m}{r^2}\hat{v}_m}_{u3} \underbrace{-i\frac{m}{r}\partial_r\hat{v}_m}_{u4} \underbrace{-ink\partial_r\hat{w}_m}_{u5} \\
&\quad \underbrace{-\partial_r\hat{p}_m}_{u6} \underbrace{-\frac{1}{r}\partial_r r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{u}}_{mn}}_{u7} \underbrace{-i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{u}}_{mn}}_{u8} \underbrace{-ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{u}}_{mn}}_{u9} \underbrace{+\frac{1}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{v}}_{mn}}_{u10} \\
\partial_t \hat{v}_m &= \underbrace{-\partial_r\left(i\frac{m}{r}\hat{u}_m\right)}_{v1} \underbrace{+\partial_r\left[\frac{1}{r}\partial_r\left(r\hat{v}_m\right]\right)}_{v2} \underbrace{-n^2k^2\hat{v}_m}_{v3} \underbrace{+\frac{mnk}{r}\hat{w}_m}_{v4} \\
&\quad \underbrace{-i\frac{m}{r}\hat{p}_m}_{v6} \underbrace{-\frac{1}{r}\partial_r r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{v}}_{mn}}_{v7} \underbrace{-i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{v}}_{mn}}_{v8} \underbrace{-ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{v}}_{mn}}_{v9} \underbrace{-\frac{1}{r}\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{v}}_{mn}}_{v10} \\
\partial_t \hat{w}_m &= \underbrace{-i\frac{nk}{r}\partial_r\left(r\hat{u}_m\right)}_{w1} \underbrace{+\frac{mnk}{r}\hat{v}_m}_{w2} \underbrace{-\frac{m^2}{r^2}\hat{w}_m}_{w3} \underbrace{+\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r\hat{w}_m\right)}_{w4} \\
&\quad \underbrace{-ink\hat{p}_m}_{w6} \underbrace{-\frac{1}{r}\partial_r r\mathcal{S}^{\hat{u}\hat{w}}_{mn}}_{w7} \underbrace{-i\frac{m}{r}\mathcal{S}^{\hat{v}\hat{w}}_{mn}}_{w8} \underbrace{-ink\mathcal{S}^{\hat{w}\hat{w}}_{mn}}_{w9}.
\end{aligned}
\tag{E.1}
$$

Hierin bezeichnen

$$
\mathcal{S}^{\hat{x}\hat{y}}_{mn} := \sum_{m_1+m_2=m, n_1+n_2=n} \hat{x}_{m_1n_1} \cdot \hat{y}_{m_2n_2} \tag{E.2}
$$

die durch die Nichtlinearitäten entstehenden Summen.

Die diskretisierte Form der Terme aus Gl. (E.1) lautet:

E.1.1 Lineare Terme

E.1.2 Nichtlineare Terme

Nachdem die einzelnen Summanden aus Gleichung (E.1) bestimmt sind kann nun der Zeitschritt durchgeführt werden. Die Änderungen dtu, dtv, dtw der zugehörigen Felder u, v, w und die neuen Felder un, vn, wn ergeben sich dann aus einem einfachen Euler Schritt wie folgt:

$$\begin{aligned}
dt\, u_{i,m,n} &= (u1 + u2 + u3 + u4 + u5 + u6 + u7 + u8 + u9 + u10)|_{i,m,n} \\
dt\, v_{i,m,n} &= (v1 + v2 + v3 + v4 + v5 + v6 + v7 + v8 + v9 + v10)|_{i,m,n} \\
dt\, w_{i,m,n} &= (w1 + w2 + w3 + w4 + w5 + w6 + w7 + w8 + w9 + w10)|_{i,m,n} \\
\\
un_{i,m,n} &= u_{i,m,n} + dt\, u_{i,m,n} \\
vn_{i,m,n} &= v_{i,m,n} + dt\, v_{i,m,n} \\
wn_{i,m,n} &= w_{i,m,n} + dt\, w_{i,m,n}
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Mittels der so berechneten neuen Felder (E.4) wird nun der Druck unter der Nebenbedingung der verschwindenden Divergenz in einer diskreten Poisson Gleichung iteriert.

E.2 Diskretisierte Form der Poisson Gleichung

Im Folgenden bedeuten div die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{u}$ und dp die durch das Verfahren erzeugte Druckänderung.
Bei der Iteration werden nacheinander die folgenden drei Schritte durchgeführt.

Iterationsverfahren

1. Divergenzberechnung auf dem v Gitter:

$$div_{i,m,n} = \frac{rvp_i un_{i,m,n} - rvm_i un_{i-1,m,n}}{rv_i \Delta r} + im\frac{vn_{i,m,n}}{rv_i} + inkwn_{i,m,n}$$

2. Berechnung des neuen Drucks:

$$\begin{aligned} dp_{i,m,n} &= -\beta div_{i,m,n} \\ p_{i,m,n} &= p_{i,m,n} + dp_{i,m,n} \end{aligned} \tag{E.5}$$

3. Anpassung der Geschwindigkeitsfelder:

$$\begin{aligned} un_{i,m,n} &= un_{i,m,n} - \Delta t\,\frac{dp_{i+1,m,n} - dp_{i,m,n}}{\Delta r} \\ vn_{i,m,n} &= vn_{i,m,n} - \Delta t\, im\frac{dp_{i,m,n}}{rv_i} \\ wn_{i,m,n} &= wn_{i,m,n} - \Delta t\, ink\frac{dp_{i,m,n}}{rw_i} \end{aligned}$$

Diese drei Schritte werden nun solange hintereinander durchgeführt, bis die mittels Gleichung (E.5) berechnete Druckkorrektur im ganzen Spalt unterhalb eines fest vorgegebenen Wertes liegt. Resultierend hieraus sind die Felder un, vn, wn des entsprechenden Zeitschritts. Für alle mit diesem numerischen Verfahren durchgeführten Berechnungen dieser Arbeit, lag der Schwellenwert bei 0.04.

$$
\begin{aligned}
u1_{i,m,n} &:= -\frac{m^2}{ru_i^2}u_{i,m,n} \\
u2_{i,m,n} &:= -n^2k^2u_{i,m,n} \\
u3_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{2ru_i^2}\left(v_{i,m,n}+v_{i+1,m,n}\right) \\
u4_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{ru_i}\,\frac{v_{i+1,m,n}-v_{i,,m,n}}{\Delta r} \\
u5_{i,m,n} &:= -ink\frac{w_{i+1,m,n}-w_{i,m,n}}{\Delta r} \\
u6_{i,m,n} &:= -\frac{p_{i+1,m,n}-p_{i,m,n}}{\Delta r} \\
u7_{i,m,n} &:= -\frac{1}{ru_i}\,\frac{rup_i\mathcal{S}^{uu,v}_{i+1,m,n}-rum_i\mathcal{S}^{uu,v}_{i,m,n}}{\Delta r} \\
u8_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{ru_{m,n}}\mathcal{S}^{uv,u}_{i,m,n} \\
u9_{i,m,n} &:= -ink\mathcal{S}^{uw,o}_{i,m,n} \\
u10_{i,m,n} &:= \frac{1}{ru_i}\mathcal{S}^{vv,u}_{i,m,n} \\
v1_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{\Delta r}\left(\frac{u_{i,m,n}}{rvp_i}-\frac{u_{i-1,m,n}}{rvm_i}\right) \\
v2_{i,m,n} &:= \frac{1}{\Delta r^2}\left(\frac{rv_{i+1}v_{i+1,m,n}-rv_iv_{i,m,n}}{rvp_i}-\frac{rv_iv_{i,m,n}-rv_{i-1}v_{i-1,m,n}}{rvm_i}\right) \\
v3_{i,m,n} &:= -n^2k^2v_{i,j,m,n} \\
v4_{i,m,n} &:= -\frac{mnk}{rv_i}w_{i,m,n} \\
v5_{i,m,n} &:= 0 \\
v6_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{rv_i}p_{i,m,n} \\
v7_{i,m,n} &:= -\frac{1}{rv_i}\,\frac{rvp_i\mathcal{S}^{uv,u}_{i,m,n}-rvm_i\mathcal{S}^{uv,u}_{i-1,m,n}}{\Delta r} \\
v8_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{rv_i}\mathcal{S}^{vv,v}_{i,m,n} \\
v9_{i,m,n} &:= -ink\mathcal{S}^{vw,w}_{i,m,n} \\
v10_{i,m,n} &:= -\frac{1}{rv_i}\mathcal{S}^{uv,v}_{i,m,n}
\end{aligned}
$$

Tabelle E.1 – Diskretisierung der linearen Terme der NSE für G2D2.

$$
\begin{aligned}
w1_{i,m,n} &:= -i\frac{nk}{rw_i\,\Delta r}\Big(rwp_i u_{i,m,n} - rwm_i u_{i-1,m,n}\Big)\\
w2_{i,m,n} &:= \frac{mnk}{rw_i} v_{i,j,m,n}\\
w3_{i,m,n} &:= -\frac{m^2}{rw_i^2} w_{i,m,n}\\
w4_{i,m,n} &:= \frac{1}{rw_i\,\Delta r^2}\Big[rwp_i\left(w_{i+1,m,n} - w_{i,m,n}\right) - rwm_i\left(w_{i,m,n} - w_{i-1,m,n}\right)\Big]\\
w5_{i,m,n} &:= 0\\
w6_{i,m,n} &:= -inkp_{i,j,m,n}\\
w7_{i,m,n} &:= -\frac{rwp_i\mathcal{S}^{uw,o}_{i,m,n} - rwm_i\mathcal{S}^{uw,o}_{i-1,m,n}}{rw_i\,\Delta r}\\
w8_{i,m,n} &:= -i\frac{m}{rw_i}\mathcal{S}^{vw,w}_{i,m,n}\\
w9_{i,m,n} &:= -ink\mathcal{S}^{ww,v}_{i,j,m,n}\\
w10_{i,m,n} &:= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{uu,v}_{i,m,n} &= \tfrac{1}{4}\sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m}\left(u_{i-1,m_1,n_1} + u_{i,m_1,n_1}\right) \cdot \left(u_{i-1,m_2,n_2} + u_{i,m_2,n_2}\right)\\
\mathcal{S}^{vv,u}_{i,m,n} &= \tfrac{1}{4}\sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m}\left(v_{i,m_1,n_1} + v_{i+1,m_1,n_1}\right) \cdot \left(v_{i,m_2,n_2} + v_{i+1,m_2,n_2}\right)\\
\mathcal{S}^{vv,v}_{i,m,n} &= \sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m} v_{i,m_1,n_1} \cdot v_{i,m_2,n_2}\\
\mathcal{S}^{ww,v}_{i,m,n} &= \sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m} w_{i,m_1,n_1} \cdot w_{i,m_2,n_2}\\
\mathcal{S}^{uv,u}_{i,m,n} &= \tfrac{1}{2}\sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m} u_{i,m_1,n_1} \cdot \left(v_{i,m_2,n_2} + v_{i+1,m_2,n_2}\right)\\
\mathcal{S}^{uv,v}_{i,m,n} &= \tfrac{1}{2}\sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m}\left(u_{i,m_1,n_1} + u_{i-1,m_1,n_1}\right) \cdot v_{i,m_2,n_2}\\
\mathcal{S}^{vw,w}_{i,m,n} &= \sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m} v_{i,m_1,n_1} \cdot w_{i,m_2,n_2}\\
\mathcal{S}^{uw,o}_{i,m,n} &= \tfrac{1}{2}\sum_{m_1+m_2=m,n_1+n_2=m} u_{i,m_1,n_1} \cdot \left(w_{i,m_2,n_2} + w_{i+1,m_2,n_2}\right)
\end{aligned}
\tag{E.3}
$$

Tabelle E.2 – Diskretisierung der nichtlinearen Terme der NSE für G2D2.

E.3 Diskretisierte Form der NSE - G1D3

Ausgangspunkt ist hierbei das Gleichungssystem (D.21)-(D.23):

$$\begin{aligned}
\Delta u_{i,j,m} &= u6 + u7 + u8 + u9 + u10 \\
&+ \left(1 + s_x^2\right)(u1 + u3 + u4) + \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(u2 + u5) \\
&+ \frac{1}{4}s_x^2(uxx_+ + uxx_-) \\
&+ \frac{1}{2}s_x s_z(uxz_+ + uxz_-),
\end{aligned} \tag{E.6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta v_{i,j,m} &= v6 + v7 + v8 + v9 + v10 \\
&+ \left(1 + s_x^2\right)(v1 + v3) + \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(v4 + v5) \\
&+ \frac{1}{4}s_x^2(vxx_+ + vxx_-) \\
&+ \frac{1}{2}s_x s_z(vxz_+ + vxz_-),
\end{aligned} \tag{E.7}$$

$$\begin{aligned}
\Delta w_{i,j,m} &= w6 + w7 + w8 + w9 \\
&+ \left(1 + s_z^2 + \frac{1}{2}s_x^2\right)(w1 + w2 + w3 + w4) \\
&+ \frac{1}{4}s_x^2(wxx_+ + wxx_-) \\
&+ \frac{1}{2}s_x s_z(wxz_+ + wxz_-).
\end{aligned} \tag{E.8}$$

Die Abkürzungen für die diskretisierten linearen wie auch nichtlinearen Terme sind in den nachfolgenden Tabellen E.3.1-E.3.2 zusammengefasst.

E.3.1 Lineare Terme

$$
\begin{aligned}
-\frac{m^2}{r^2}\hat{u}_m &= : \quad u1 = -\frac{m^2}{ru_i^2}u_{i,j,m} \\
\partial_z^2\hat{u}_m &= : \quad u2 = \frac{u_{i,j+1,m} - 2u_{i,j,m} + u_{i,j-1,m}}{\Delta z^2} \\
-i\frac{m}{r}\partial_r\hat{v}_m &= : \quad u3 = -i\frac{m}{ru_i}\frac{v_{i+1,j,m} - v_{i,j,m}}{\Delta r} \\
-i\frac{m}{r^2}\hat{v}_m &= : \quad u4 = -i\frac{m}{2ru_i^2}(v_{i,j,m} + v_{1+1,j,m}) \\
-\partial_r\partial_z\hat{w}_m &= : \quad u5 = -\frac{w_{i+1,j,m} - w_{i,j,m} - w_{i+1,j-1,m} + w_{i,j-1,m}}{\Delta r\Delta z} \\
-\partial_r\hat{p}_M &= : \quad u6 = -\frac{p_{i+1,j,m} - p_{1,j,m}}{\Delta r} \\
-\partial_r\left(i\frac{m}{r}\hat{u}_m\right) &= : \quad v1 = -i\frac{m}{\Delta r}\left(\frac{u_{i,j,m}}{ru_i} - \frac{u_{i-1,j,m}}{ru_{i-1}}\right) \\
\partial_r\left[\frac{1}{r}\partial_r(r\hat{v}_m)\right] &= : \quad v3 = \frac{1}{\Delta r^2}\left(\frac{rv_{i+1}v_{i+1,j,m} - rv_iv_{i,j,m}}{ru_i} - \frac{rv_iv_{i,j,m} - rv_{i-1}v_{i-1,j,m}}{ru_{i-1}}\right) \\
\partial_z^2\hat{v}_m &= : \quad v4 = \frac{v_{i,j+1,m} - 2v_{i,j,m} + v_{i,j-1,m}}{\Delta z^2} \\
-i\frac{m}{r}\partial_z\hat{w}_m &= : \quad v5 = -i\frac{m}{rv_i}\frac{w_{i,j,m} - w_{i,j-1,m}}{\Delta z} \\
-i\frac{m}{r}\hat{p}_M &= : \quad v6 = -i\frac{m}{rv_i}p_{i,j,m} \\
-\frac{1}{r}\partial_r r(\partial_z\hat{u}_m) &= : \quad w1 = -\frac{1}{rv_i}\frac{ru_i(u_{i,j+1,m} - u_{i,j,m}) - ru_{i-1}(u_{i-1,j+1,m} - u_{i-1,j,m})}{\Delta r\Delta z} \\
-i\frac{m}{r}\partial_z\hat{v}_m &= : \quad w2 = -i\frac{m}{rv_i}\frac{v_{i,j+1,m} - v_{i,j,m}}{\Delta z} \\
\frac{1}{r}\partial_r r(\partial_r\hat{w}_m) &= : \quad w3 = \frac{1}{rv_i}\frac{ru_i(w_{i+1,j,m} - w_{i,j,m}) - ru_{i-1}(w_{i,j,m} - w_{i-1,j,m})}{\Delta r^2} \\
-\frac{m^2}{r^2}\hat{w}_m &= : \quad w4 = -\frac{m^2}{rv_i^2}w_{i,j,m} \\
-\partial_z\hat{p}_M &= : \quad w6 = -\frac{p_{i,j+1,m} - p_{1,j,m}}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

Tabelle E.3 – Diskretisierung der linearen Terme der NSE für G1D3.

E.3.2 Nichtlineare Terme

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{r}\partial_r(ru^2)_m \quad &: \quad u7 = \quad -\frac{1}{ru_i}\frac{rv_{i+1}S^{uu,v}_{i+1,j,m} - rv_i S^{uu,v}_{i,j,m}}{\Delta r} \\
-i\frac{m}{r}(uv)_m \quad &: \quad u8 = \quad -i\frac{m}{ru_i}S^{uv,u}_{i,j,m} \\
-\partial_z(uw)_m \quad &: \quad u9 = \quad -\frac{S^{uw,o}_{i,j,m} - S^{uw,o}_{i,j-1,m}}{\Delta z} \\
\frac{1}{r}(v^2)_m \quad &: \quad u10 = \quad \frac{1}{ru_i}S^{uv,u}_{i,j,m} \\
-\frac{1}{r}\partial_r(ruv)_m \quad &: \quad v7 = \quad -\frac{1}{ru_i}\frac{rv_i S^{uv,u}_{i,j,m} - S^{uv,v}_{i,j-1,m}}{\Delta r} \\
-i\frac{m}{r}(v^2)_m \quad &: \quad v8 = \quad -i\frac{m}{rv_i}S^{vv,v}_{i,j,m} \\
-\partial_z(vw)_m \quad &: \quad v9 = \quad -\frac{S^{vw,w}_{i,j,m} - S^{vw,w}_{i,j-1,m}}{\Delta z} \\
-\frac{1}{r}(vm)_m \quad &: \quad v10 = \quad -\frac{1}{rv_i}S^{uv,v}_{i,j,m} \\
-\frac{1}{r}\partial_r(ruw)_m \quad &: \quad w7 = \quad -\frac{1}{rv_i}\frac{ru_i S^{uw,o}_{i,j,m} - ru_{i-1}S^{uw,o}_{i-1,j,m}}{\Delta r} \\
-i\frac{m}{r}(vw)_m \quad &: \quad w8 = \quad -i\frac{m}{rv_i}S^{vw,w}_{i,j,m} \\
-\partial_z(w^2)_m \quad &: \quad w9 = \quad -\frac{S^{ww,v}_{i,j+1,m} - S^{ww,v}_{i,j,m}}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

mit den Abkürzungen: $(m = m_1 + m_2,\ m_1, m_2 \leq m_{max})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^{uu,v}_{i,j,m} &= \frac{1}{4} \sum_{m_1+m_2=m} (u_{i-1,j,m_1} + u_{i,j,m_1}) \cdot (u_{i-1,j,m_2} + u_{i,j,m_2}) \\
\mathcal{S}^{vv,u}_{i,j,m} &= \frac{1}{4} \sum_{m_1+m_2=m} (v_{i,j,m_1} + v_{i+1,j,m_1}) \cdot (v_{i,j,m_2} + v_{i+1,j,m_2}) \\
\mathcal{S}^{vv,v}_{i,j,m} &= \sum_{m_1+m_2=m} v_{i,j,m_1} \cdot v_{i,j,m_2} \\
\mathcal{S}^{ww,v}_{i,j,m} &= \frac{1}{4} \sum_{m_1+m_2=m} (w_{i,j,m_1} + w_{i,j-1,m_1}) \cdot (w_{i,j,m_2} + v_{i,j-1,m_2}) \\
\mathcal{S}^{vu,u}_{i,j,m} &= \frac{1}{2} \sum_{m_1+m_2=m} u_{i,j,m_1} \cdot (v_{i,j,m_2} + v_{i+1,j,m_2}) \\
\mathcal{S}^{vu,v}_{i,j,m} &= \frac{1}{2} \sum_{m_1+m_2=m} (u_{i-1,j,m_1} + u_{i,j,m_1}) \cdot v_{i,j,m_2} \\
\mathcal{S}^{vw,w}_{i,j,m} &= \frac{1}{2} \sum_{m_1+m_2=m} (v_{i,j,m_1} + v_{i,j+1,m_1}) \cdot w_{i,j,m_2} \\
\mathcal{S}^{uw,o}_{i,j,m} &= \frac{1}{4} \sum_{m_1+m_2=m} (u_{i,j,m_1} + u_{i,j+1,m_1}) \cdot (w_{i,j,m_2} + w_{i+1,j,m_2})
\end{aligned}
$$

Tabelle E.4 – Diskretisierung der nichtlinearen Terme der NSE für G1D3.

$$
\begin{aligned}
uxx_{\pm} &= \chi^{u,\pm}_{i,j,m} \mp i\tfrac{1}{2}(\chi^{v,\pm}_{i+1,j,m} + \chi^{v,\pm}_{i,j,m}) - \chi^{wu,\pm}_{i,j,m} - \tfrac{2\pm m}{2ru_i}(\chi^{wv,\pm}_{i+1,j,m}) + \chi^{wv,\pm}_{i,j,m} \\
vxx_{\pm} &= \mp i\tfrac{1}{2}(\chi^{u,\pm}_{i-1,j,m} + \chi^{u,\pm}_{i,j,m}) - \chi^{v,\pm}_{i,j,m} - i\tfrac{1}{2}(\chi^{wu,\pm}_{i-1,j,m}) + \chi^{wu,\pm}_{i,j,m} + \tfrac{2\pm m}{2rv_i}\chi^{wv,\pm}_{i,j,m} \\
wxx_{\pm} &= -\chi^{w1,\pm}_{i,j,m} - \chi^{w2,\pm}_{i,j,m} \pm i\chi^{w3,\pm}_{i,j,m} \pm \chi^{w4,\pm}_{i,j,m} + \chi^{w5,\pm}_{i,j,m} + \chi^{w6,\pm}_{i,j,m} + \chi^{w7,\pm}_{i,j,m}
\end{aligned}
$$

mit den Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
\partial_z^2 \hat{u}_{m\pm2} &: \quad \chi^{u,\pm}_{i,j,m} = \frac{u_{i,j+1,m\pm2} - 2u_{i,j,m\pm2} + u_{i,j-1,m\pm2}}{\Delta z^2} \\
\partial_z^2 \hat{v}_{m\pm2} &: \quad \chi^{v,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i,j+1,m\pm2} - 2v_{i,j,m\pm2} + v_{i,j-1,m\pm2}}{\Delta z^2} \\
\partial_r\partial_z \hat{w}_{m\pm2} &: \quad \chi^{u,\pm}_{i,j,m} = \frac{w_{i+1,j,m\pm2} - w_{i,j,m\pm2} - w_{i+1,j-1,m\pm2} + w_{i,j-1,m\pm2}}{\Delta r\Delta z} \\
\partial_z \hat{w}_{m\pm2} &: \quad \chi^{wu,\pm}_{i,j,m} = \frac{w_{i,j,m\pm2} - w_{i,j-1,m\pm2}}{\Delta z} \\
\partial_r\partial_z \hat{u}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w1,\pm}_{i,j,m} = \frac{u_{i,j+1,m\pm2} - u_{i,j,m\pm2} - u_{i-1,j+1,m\pm2} + u_{i-1,j,m\pm2}}{\Delta r\Delta z} \\
\frac{1\pm m}{r}\partial_z \hat{u}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w2,\pm}_{i,j,m} = \frac{1\pm m}{rv_i}\frac{u_{i,j+1,m\pm2} - u_{i,j,m\pm2} - u_{i-1,j+1,m\pm2} + u_{i-1,j,m\pm2}}{2\Delta z} \\
\partial_r\partial_z \hat{v}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w3,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i+1,j+1,m\pm2} - v_{i+1,j,m\pm2} - v_{i-1,j+1,m\pm2} + v_{i-1,j,m\pm2}}{2\Delta r\Delta z} \\
\frac{1\pm m}{r}\partial_z \hat{v}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w4,\pm}_{i,j,m} = \frac{1\pm m}{rv_i}\frac{v_{i,j+1,m\pm2} - v_{i,j,m\pm2}}{\Delta z} \\
\partial_r^2 \hat{w}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w5,\pm}_{i,j,m} = \frac{w_{i+1,j,m\pm2} - 2w_{i,j,m\pm2} + w_{i-1,j,m\pm2}}{\Delta r^2} \\
\frac{3\pm 2m}{r}\partial_r \hat{w}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w6,\pm}_{i,j,m} = \frac{3\pm 2m}{rv_i}\frac{w_{i+1,j,m\pm2} - v_{i-1,j,m\pm2}}{2\Delta r} \\
\frac{(w\pm 2)m}{r^2}\hat{w}_{m\pm2} &: \quad \chi^{w7,\pm}_{i,j,m} = \frac{(m\pm 2)m}{rv_i^2} w_{i,j,m\pm2}
\end{aligned}
$$

Tabelle E.5 – Diskretisierung der $m \pm 2$ Zusatzterme bei transversalem Magnetfeld für G1D3.

$$
\begin{aligned}
uxz_\pm &= \frac{1\pm 2m}{ru_i} Z^{u,\pm}_{i,j,m} \pm i Z^{vr,\pm}_{i,j,m} \pm i \frac{1\mp m}{ru_i}\frac{1}{2}(Z^{v,\pm}_{i,j,m} - Z^{v,\pm}_{i+1,j,m} \mp Z^{vw1,\pm}_{i,j,m} - m(m\pm 1) Z^{uw2,\pm}_{i,j,m} \\
vxz_\pm &= \pm i Z^{ur,\pm}_{i,j,m} \mp i \frac{1\pm m}{rv_i}\frac{1}{2}(Z^{u,\pm}_{i-1,j,m} - Z^{u,\pm}_{i,j,m}) + Z^{vr,\pm}_{i-1,j,m} + Z^{vr,\pm}_{i,j,m} \\
&\quad + \frac{1}{rv_i} Z^{v,\pm}_{i,j,m} \mp i Z^{vw1,\pm}_{i,j,m} \mp i(1\pm m) Z^{vw2,\pm}_{i,j,m} \\
wxz_\pm &= -(1\pm m) Z^{w1,\pm}_{i,j,m} - (1\pm m)^2 Z^{w2,\pm}_{i,j,m} \mp i Z^{w3,\pm}_{i,j,m} \mp i(2\pm m) Z^{w4,\pm}_{i,j,m} - im Z^{w5,\pm}_{i,j,m}
\end{aligned}
$$

mit den Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
\partial_z \hat{u}_{m\pm1} &: \quad Z^{u,\pm}_{i,j,m} = \frac{u_{i,j+1,m\pm1} - u_{i,j-1,m\pm1}}{2\Delta z} \\
\partial_r\partial_z \hat{u}_{m\pm1} &: \quad Z^{ur,\pm}_{i,j,m} = \frac{u_{i,j+1,m\pm1} - u_{i,j-1,m\pm1} - u_{i-1,j+1,m\pm1} + u_{i-1,j-1,m\pm1}}{2\Delta r\Delta} \\
\partial_r\partial_z \hat{v}_{m\pm1} &: \quad Z^{vr,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i+1,j+1,m\pm1} - v_{i+1,j-1,m\pm1} - v_{i,j+1,m\pm1} + v_{i,j-1,m\pm1}}{2\Delta r\Delta z} \\
\partial_z \hat{v}_{m\pm1} &: \quad Z^{v,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i,j+1,m\pm1} - v_{i,j-1,m\pm1}}{2\Delta z} \\
\frac{m}{r}\partial_r \hat{w}_{m\pm1} &: \quad Z^{uw1,\pm}_{i,j,m} = \frac{m}{ru_i}\frac{w_{i+1,j,m\pm1} - w_{i,j,m\pm1} - w_{i+1,j-1,m\pm1} - w_{i,j-1,m\pm1}}{2\Delta r} \\
\frac{1}{r^2}\hat{w}_{m\pm1} &: \quad Z^{uw2,\pm}_{i,j,m} = \frac{w_{i+1,j,m\pm1} + w_{i,j,m\pm1} + w_{i+1,j-1,m\pm1} + w_{i,j-1,m\pm1}}{4ru_i^2} \\
\partial_r^2 \hat{w}_{m\pm1} &: \quad Z^{vw1,\pm}_{i,j,m} = \frac{1}{2\Delta r^2}\big(w_{i+1,j,m\pm1} - 2w_{i,j,m\pm} + w_{i-1,j,m\pm1} \\
&\qquad + w_{i+1,j-1,m\pm1} - 2w_{i,j-1,m\pm1} + w_{i-1,j-1,m\pm1}\big) \\
\partial_r\left(\frac{1}{r}\hat{w}_{m\pm1}\right) &: \quad Z^{vw2,\pm}_{i,j,m} = \frac{1}{4\Delta r}\left(\frac{w_{i+1,j,m\pm1} + w_{i+1,j-1,m\pm1}}{rv_{i+1}} - \frac{w_{i-1,j,m\pm1} + w_{i-1,j-1,m\pm1}}{rv_{i-1}}\right) \\
\partial_r\left(\frac{1}{r}\hat{u}_{m\pm1}\right) &: \quad Z^{w1,\pm}_{i,j,m} = \frac{1}{2\Delta r^2}\left(\frac{u_{i,j+1,m\pm1}}{ru_i} - \frac{u_{i-1,j-1,m\pm1}}{ru_{i-1}} + \frac{u_{i,j,m\pm1}}{ru_i} - \frac{u_{i-1,j,m\pm1}}{ru_{i-1}}\right) \\
\frac{1}{r^2}\hat{u}_{m\pm1} &: \quad Z^{w2,\pm}_{i,j,m} = \frac{u_{i,j,m\pm1} + u_{i-1,j,m\pm1} + u_{i,j+1,m\pm1} + u_{i-1,j+1,m\pm1}}{4rv_i^2} \\
\partial_r^2 \hat{v}_{m\pm1} &: \quad Z^{w3,\pm}_{i,j,m} = \frac{1}{2\Delta r^2}\big(v_{i+1,j+1,m\pm1} - 2v_{i,j+1,m\pm} + v_{i-1,j+1,m\pm1} \\
&\qquad + v_{i+1,j,m\pm1} - 2v_{i,j,m\pm1} + v_{i-1,j,m\pm1}\big) \\
\frac{1}{r}\partial_r \hat{v}_{m\pm1} &: \quad Z^{w4,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i+1,j+1,m\pm1} - v_{i-1,j+1,m\pm1} + v_{i+1,j,m\pm1} - v_{i-1,j,m\pm1}}{4\Delta r\, rv_i} \\
\frac{1}{r^2}\hat{v}_{m\pm1} &: \quad Z^{w5,\pm}_{i,j,m} = \frac{v_{i,j+1,m\pm1} + vu_{i,j,m\pm1}}{2rv_i^2}
\end{aligned}
$$

Tabelle E.6 – Diskretisierung der $m\pm1$ Zusatzterme bei Kopplung von transversalem und axialem Magnetfeld für G1D3.

Literaturverzeichnis

[1] G. Ahlers, D. S. Cannell and M. A. Dominguez-Lerma. *Possible mechanism for transitions in wavy taylor-vortex flow.* Phys. Rev. A, **27(2)** 1225–1227 (1983).

[2] S. Altmeyer. *Lineare Analyse von Spiralwirbel-Strukturen im Taylor-Couette System.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2007). unpublished.

[3] S. Altmeyer, Ch. Hoffmann, A. Leschhorn and M. Lücke. *Influence of homogeneous magnetic fields on the flow of a ferrofluid in the taylor-couette system.* Phys. Rev. E, **82** 016321 (2010).

[4] S. Altmeyer, Ch. Hoffmann, M. Heise, J. Abshagen, A. Pinter, M. Lücke and G. Pfister. *End wall effects on the transitions between taylor vortices and spiral vortices.* Phys. Rev. E, **81** 066313 (2010).

[5] S. Altmeyer and Ch. Hoffmann. *Secondary bifurcation of mixed-cross-spirals connecting travelling wave solutions.* New J. Phys., **12** 113035 (2010).

[6] O. Ambacher, S. Odenbach and K. Stierstadt. *Rotational viscosity in ferrofluids.* Z. Phys. B, **86** 29 (1992).

[7] C. D. Andereck, S. S. Liu and H. L. Swinney. *Flow regimes in a circular couette system with independently rotating cylinders.* J. Fluid Mech., **164** 155–183 (1986).

[8] C. D. Andereck and F. Hayot. *A guide to literature related to the Taylor-Couette problem, in Orderd and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow.* Plenum, New York (1992).

[9] J. Antonijoan, F. Marqués and J. Sanche. *Non-linear spirals in the taylor-couette problem.* Phys. Fluids, **10** 829 (1998).

[10] J. Antonijoan and J. Sanchez. *Transition from taylor vortex flow in a co-rotating taylor-couette system.* Phys. Fluids, **12(12)** 3147–3159 (2000).

[11] J. Antonijoan and J. Sanchez. *On stable taylor vortices above the transition to wavy vortices.* Phys. Fluids, **14(5)** 1661–1665 (2002).

[12] K. L. Babcock, G. Ahlers and D. S. Cannell. *Noise-sustained structure in taylor-couette flow with through flow.* Phys. Rev. Lett., **67(24)** 3388–3391 (1991).

[13] K. L. Babcock, D. S. Cannell and G. Ahlers. *Stability and noise in taylor-couette flow with through flow.* Physica D **61** 40 (1992).

[14] K. L. Babcock, G. Ahlers and D. S. Cannell. *Noise amplification in open taylor-couette flow.* Phys. Rev. E, **50(5)** 3670–3692 (1994).

[15] K. L. Babcock, G. Ahlers and D. S. Cannell. *Noise amplification in open taylor-couette flow.* Phys. Rev. E, **50(5)** 3670 (1994).

[16] W. Barten. *Ein numerisches Verfahren zur Berechnung der achsensymmetrischen Taylor-Couette Strömung inkompressibler Flüssigkeiten.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (1986). unpublished.

[17] T. B. Benjamin. *Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid - i. theory.* Proc. R. Soc. Lond. A, **359** 27–43 (1978).

[18] T. B. Benjamin. *Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid - ii. experiments.* Proc. R. Soc. Lond. A, **359** 1–26 (1978).

[19] B. M. Berkovsky, V. F. Medvedev and M. S. Krakov. *Magnetic fluids: Engineering applications.* Oxford University Press, Oxford (1993).

[20] B. M. Berkovsky and V. Bashtovoy. *Magnetic fluids and applications handbook.* Begell house, inc., New York (1996).

[21] E. Blums, A. Cebers and M. M. Maiorov. *Magnetic Fluids.* Walter de Gruyter, Berlin (1997).

[22] H. R. Brand. *Phase dynamics for spiraling taylor vortices.* Phys. Rev. A, **31** 3454 (1985).

[23] P. Büchel. *Taylor-Couette System mit axialem Durchfluss.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (1992). unpublished.

[24] P. Büchel, M. Lücke, D. Roth and R. Schmitz. *Pattern selection in the absolutely unstable regime as a nonlinear eigenvalue problem: Taylor vortices in axial flow.* Phys. Rev. E, **53(5)** 4764–4777 (1996).

[25] P. Büchel and M. Lücke. *Localized perturbations in binary fluid convection with and without through flow.* Phys. Rev. E, **63 1** 016307 (2001).

[26] P. Chakraborty, S. Balachandar and R. Adrian. *Reversing and non-reversing modulated taylor-couette flow.* J. Fluid Mech., **535** 189 (2005).

[27] M. H. Chang, C. K. Chen and H. C. Weng. *Stability of ferrofluid flow between concentric rotating cylinders with an axial magnetic field.* Int. J. Eng. Sci., **41** 103 (2003).

[28] A. J. Chorin. *A numerical method for solving incompressible viscous flow problems.* J. Comp. Phys., **2** 12 (1967).

[29] A. J. Chorin. *Numerical solution of the navier-stokes equations.* Math. Comp., **22** 746 (1968).

[30] P. Chossat and G. Iooss. *Primary and secondary bifurcations in the couette-taylor problem.* Japan J. Appl. Math., **2** 37–68 (1984).

[31] P. Chossat and G. Iooss. *The Couette–Taylor problem.* Springer, Berlin (1994).

[32] M. C. Cross. *Structure of nonlinear travalling waves in finite geometries.* Phys. Rev. A, **38** 3593 (1987).

[33] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. *Pattern formation outside of equilibrium.* Rev. Mod. Phys., **65** 851 (1993).

[34] O. Czarny, E. Serre, P. Bontoux and R. M. Lueptow. *Identification of complex flows in taylor-couette couter-rotating cavities.* C. R. Acad. SCi. Paris, t. 329, Série **II b** 727 (2001).

[35] O. Czarny, E. Serre, P. Bontoux, and R. M. Lueptow. *Spiral and wavy vortex flows in short counter-rotating taylorcouette cells.* Theoret. Comp. Fluid Dyn., **16** 5–15 (2002).

[36] Y. Demay and G. Iooss. *Calcul des solutions bifurquées pour le problème de couette-taylor avec les deux cylindres en rotation.* Journal de Mécanique théorique et appliquée, Numéro spéciale, p. 193–216 (1984).

[37] R. J. Deissler. *Thermally sustained structure in convectively unstable systems.* Phys. Rev. E, **49** 1 (1994).

[38] R. C. DiPrima and R. N. Grannik. *Non-linear Investigation of the stability of flow between Counter-rotating Cylinders, in Instability of Continous Systems*, p. 55. Springer, Berlin (1971).

[39] R. C. DiPrima and A. Pridor. *The stability of viscous flow between rotating concentric cylinders with axial flow.* Proc. R. Soc. London Ser. A, **366** 555 (1979).

[40] R. C. DiPrima and H. L. Swinney. *Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders.* editors H. L. Swinney and J. G. Gollub, In *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, number 45 in Topics in Applied Physics. Springer, Berlin (1985).

[41] M. A. Dominguez-Lerma. *Stability Boundary and Wavenumber Selection for Taylor Vortex Flow.* Dissertation, University of California, California (1986).

[42] M. A. Dominguez-Lerma, D. S. Cannel and G. Ahlers. *Eckhaus boundary and wavenumber selection in rotating couette-taylor flow.* Phys. Rev. A, **34** (1986).

[43] W. S. Edwards. *Linear Spirals in the finite Couette-Taylor problem, in Instabilita and Transition, Vol. II.* Springer, Berlin (1990).

[44] W. S. Edwards. *New Stability Analyses for the Couette-Taylor Problem.* Dissertation, University of Texas, Austin (1991).

[45] W. S. Edwards, S. R. Beane and S. Varma. *Onset of wavy vortices in the finite-length couette-taylor problem.* Phys. Fluids, **3** (1991).

[46] A. Esser and S. Grossmann. *Analytic expression for taylor-couette stability boundary.* Phys. Fluids, **8** 1814 (1996).

[47] B. U. Felderhof and H. J. Kroh. *Hydrodynamics of magnetic and dielectric fluids in interaction with the electromagnetic field.* J. Chem. Phys., **110** 7403 (1999).

[48] B. U. Felderhof. *Magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids.* Phys. Rev. E, **62** 3848 (2000).

[49] P. R. Fenstermacher, H. L. Swinney and J. P. Gollub. *Dynamical instabilities and the transition to chaotic taylor vortex flow.* J. Fluid Mech., **94** 103–128 (1979).

[50] C. A. J. Fletcher. *Comptational Technics for Fluid Dynamics.* Springer, Berlin (1988).

[51] Th. Gebhardt and S. Grossmann. *The taylor-couette eigenvalue problem with independently rotating cylinders.* Z. Phys., **B 90** 475 (1993).

[52] R. Graham and J. A. Domaradzki. *Local amplitude equation of taylor vortices and its boundary-condition.* Phys. Rev. A, **26** 1572 (1982).

[53] M. Griebel, T. Dornseifer and T. Neunhoeffer. *Numerische Simulation in der Strömungsmechanik.* Vieweg, Wiesbaden (1995).

[54] M. Golubitsky and I. Stewart. *Symmetry and stability in taylor-couette flow.* SIAM Journal of Mathematical Analysis, **17** 249 (1986).

[55] M. Golubitsky and W. F. Langford. *Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders.* Physica D, **32(3)** 362–392 (1988).

[56] M. Golubitsky, I. Stewart and D. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory II.* Springer, New York (1988).

[57] W. F. Hall and S. N. Busenberg. *Viscosity of magnetic suspensions.* J. Chem. Phys., **51** 137 (1969).

[58] F. H. Harlow and J. E. Welch. *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.* J. Fluid Mech., **20** 95 (1965).

[59] M. Heise. *Experimentelle untersuchungen am taylor-couette-system mit axialem durchfluss.* Diplomarbeit, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, November (2003).

[60] M. Heise, Ch. Hoffmann, J. Abshagen, A. Pinter, G. Pfister and M. Lücke. *Stabilization of domain walls between traveling waves by nonlinear mode coupling.* Phys. Rev. Lett., **100** 064501 (2008).

[61] Ch. Hoffmann. *Stationäre und zeitabhängige Strömungsmuster im Taylor-Couette-System – Taylor-Wirbel, Spiralen und modulierte Strukturen.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (1998). unpublished.

[62] Ch. Hoffmann and M. Lücke. *Spiral vortices and Taylor vortices in the annulus between counter-rotating cylinders*, p. 55–66. Springer Verlag, Berlin (2000).

[63] Ch. Hoffmann, M. Lücke and A. Pinter. *Spiral vortices and taylor vortices in the annulus between rotating cylinders and the effect of an axial flow.* Phys. Rev. E, **69(5)** 056309 (2004).

[64] Ch. Hoffmann, M. Lücke and A. Pinter. *Spiral vortices traveling between two rotating defects in the taylor-couette system.* Phys. Rev. E, **72(5)** 056311 (2005).

[65] Ch. Hoffmann. *Struktur, Dynamik und Bifurkationsverhalten von Spiralwirbeln im Taylor – Couette System mit und ohne Durchfluss.* Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2005).

[66] Ch. Hoffmann, S. Altmeyer, A. Pinter and M. Lücke. *Transitions between taylor vortices and spirals via wavy taylor vortices and wavy spirals.* New J. Phys., **11** 053002 (2009).

[67] Ch. Hoffmann and S. Altmeyer. Movie: Transition from TVF to SPI with transient wTVF; isosurface of azimuthal vorticity $\omega = \pm 60$; h264/mpeg4, 4.2mb. `http://host_to_movie/movie1.mpg`, (2009).

[68] Ch. Hoffmann and S. Altmeyer. Movie: Transition from SPI to TVF with transient wSPI; isosurface of azimuthal vorticity $\omega = \pm 60$; h264/mpeg4, 1.1mb. `http://host_to_movie/movie2.mpg` (2009).

[69] M. Holderied, L. Schwab K. and Stierstadt. *Rotational viscosity of ferrofluids and the taylor instability in a magnetic field.* Z. Phys. B: Condens. Matter, **70** 431 (1988).

[70] P. Huerre and P. A. Monkewitz. *Local and global instabilities in spatially developing flows.* Annual Review of Fluid Mechanics, **22** 473 (1990).

[71] G. Iooss. *Secondary bifurcations of taylor vortices into wavy inflow or outflow boundaries.* J. Fluid Mech., **173** 273–288 (1986).

[72] C. A. Jones. *Nonlinear taylor vortices and their stability.* J. Fluid Mech., **102** 249–261 (1981).

[73] C. A. Jones. *The transition to wavy taylor vortices.* J. Fluid Mech., **157** 135–162 (1984).

[74] E. Knobloch and R. Pierce. *Spiral vortices in finite cylinders, in Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow*, volume B 297, p. 83–90. Nato ASI Series, Plenum, New York (1992).

[75] E. R. Krueger, A. Gross and R. C. DiPrima. *On the relative importance of taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders.* J. Fluid Mech., **24** 521 (1966).

[76] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik,* **Bd. VI** *Hydrodynamik.* Akademie-Verlag, Berlin (1991).

[77] J. Langenberg, G. Pfister and J. Abshagen. *Standing waves in flow between finite counterrotating cylinders.* Phys. Rev. E, **68(5)** 056308 (2003).

[78] J. Langenberg, G. Pfister and J. Abshagen. *The effect of physical boundaries on oscillatory bifurcation in counterrotating taylor–couette flow.* Phys. Fluids, **16(8)** 2757–2762 (2004).

[79] W. F. Langford, R. Tagg, E. J. Koestlich, H. L. Swinney and M. Golubitzky. *Primary instabilities and bicriticality in flow between counter-rotating cylinders.* Phys. Fluids, **31(4)** 776–785 (1988).

[80] A. Leschhorn, J. P. Embs and M. Lücke. *Magnetization of rotating ferrofluids: the effect of polydispersity.* J. Phys.:Condens. Matter, **18** 2633–2642 (2006).

[81] A. Leschhorn and M. Lücke. *Magnetization of rotating ferrofluids: predictions of different theoretical models.* Z. Phys. Chem., **220** 219–224 (2006).

[82] A. Leschhorn and M. Lücke. *Periodically forced ferrofluid pendulum: effect of polydispersity.* Z. Phys. Chem., **220** 89–96 (2006).

[83] A. Leschhorn. *Magnetorotationseffekte von Ferrofluiden in homogenen Magnetfeldern: Magnetisierung rotierender Zylinder, Torsionspendeldynamik und Wirbel im Taylor-Couette System.* Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2008).

[84] A. Leschhorn, M. Lücke, Ch. Hoffmann and S. Altmeyer. *Stability of circular couette flow of a ferrofluid in an axial magnetic field: Influence of polydispersity.* Phys. Rev. E, **79** 036308 (2009).

[85] J. M. Lopez and F. Marqués. *Taylor-couette flow with axial oscillations of the inner cylinder: Floquet analysis of the base flow.* J. Fluid Mech., **348** 153–175 (1997).

[86] J. M. Lopez, F. Marqués and J. Shen. *Endwall effects in a periodically forced centrifugally unstable flow.* Fluid Dyn. Res., **27** 91–108 (2000).

[87] J. M. Lopez and F. Marqués. *Small aspect ratio taylor-couette flow: Onset of a very-low-frequency three-torus state.* Phys. Rev. E (Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics), **68(3)** 036302 (2003).

[88] A. Lorenzen, G. Pfister and T. Mullin. *End effects on the transition to time-dependent motion in the taylor experiment.* Phys. Fluids, **26** (1983).

[89] M. Lücke, M. Mihelcic and K. Wingerath. *Propagation of taylor vortex fronts into unstable cicular couette flow.* Phys. Rev. Lett., **52** 625 (1984).

[90] M. Lücke, M. Mihelcic and K. Wingerath. *Front propagation and pattern formation of taylor vorices growing into unstable cicular couette flow.* Phys. Rev. A, **31** 396 (1985).

[91] M. Lücke and D. Roth. *Structure and dynamics of taylor vortex flow and the effect of subcritical driving ramps.* Z. Phys. B - Condensed Matter, **78** 147 (1990).

[92] M. Lücke and A. Szprynger. *Noise sustained pattern growth: bulk versus boundary effects.* Phys. Rev. E, **55** 5509 (1997).

[93] P. S. Marcus. *Simulation of taylor-couette flow. part 2. numerical results for wavy-vortex flow with one travelling wave.* J. Fluid Mech., **146** 65 – 113 (1984).

[94] A. K. Majumdar and D. B. Spalding. *Numerical computation of taylor vortices.* J. Fluid Mech., **81** 259 (1977).

[95] F. Marqués and and J. M. Lopez. *Spacial and temporal resonances in a periodically forced hydrodynamic system.* Physica D, **136** 340–352 (2000).

[96] F. Marqués and and J. M. Lopez. *Modulated taylor-couette flow: Onset of spiral modes.* Theo. Comp. Fluid Dyn., **16** 59–69 (2002).

[97] M. A. Martsenyuk, Y. L. Raikher and M. I. Shliomis. *On the kinetics of magnetization of ferromagnetic particle suspensions.* Sov. Phys. JETP, **38** 413 (1974).

[98] J. P. McTague. *Magnetoviscosity of magnetic colloids.* J. Chem. Phys., **51** 133 (1969).

[99] A. Meseguer and F. Marqués. *On the competition between centrifugal and shear instability in spiral poisseulle flow.* J. Fluid Mech., **455** 129 (2002).

[100] H. W. Müller and M. Liu. *Structure of ferrofluid dynamics.* Phys. Rev. E, **64** 061405 (2001).

[101] J. L. Neuringer and R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics.* Phys. Fluids, **7** 1927 (1964).

[102] B. S. Ng and E. R. Turner. *On the linear stability of spiral flow between rotating cylinders.* Proc. R. Soc. London Ser. A, **382** 83 (1982).

[103] M. Niklas. *Influence of magnetic fields on taylor vortex formation in magnetic fluids.* Z. Phys. B, **68** 493 (1987).

[104] M. Niklas, H. Müller-Krumbhaar and M. Lücke. *Taylor–vortex flow of ferrofluids in the presence of general magnetic fields.* J. Magn. Magn. Mater., **81** 29 (1989).

[105] S. Odenbach and H. Gilly. *Taylor vortex flow of magnetic fluids under the influence of an azimuthal magnetic field.* J. Magn. Magn. Mater., **152** 123 (1996).

[106] S. Odenbach and H. W. Müller. *Stationary off-equilibrium magnetization in ferrofluids under rotational and elongational flow.* Phys. Rev. Lett., **89** 037202 (2002).

[107] S. Odenbach and M. Reindl. Persönliche Mitteilung.

[108] S. Odenbach. *Magnetoviscous Effects in Ferrofluids*, vol. **71** of *Lecture Notes in Physics.* Springer, Berlin (2002).

[109] K. Park. *Unusual transition sequence in taylor wavy vortex flow.* Phys. Rev. A, **29(6)** 3458–3460 (1984).

[110] R. Peyret and T. D. Taylor. *Comptational Methods for Fluid Flow.* Springer, New York (1983).

[111] G. Pfister and I. Rehberg. *Space-dependent order parameter in circular couette flow transitions.* Phys. Lett. A, **83(1)** 19–22 (1981).

[112] A. Pinter. *Spiralwirbel im Taylor-Couette System.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2001). unpublished.

[113] A. Pinter. *Wettbewerb zwischen links– und rechtshändigen Spiralwirbeln und ihren Kombinationen mit unterschiedlichen und gleichen Amplituden.* Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2006).

[114] A. Pinter, M. Lücke and Ch. Hoffmann. *Spiral and taylor vortex fronts and pulses in axial through-flow.* Phys. Rev. E, **67(2)** 1–15 (2003).

[115] A. Pinter, M. Lücke and Ch. Hoffmann. *Competition between traveling fluid waves of left and right spiral vortices and their different amplitude combinations.* Phys. Rev. Lett., **96** 044506 (2006).

[116] A. Pinter, M. Lücke and Ch. Hoffmann. *Controlling the stability transfer between oppositely traveling waves a waves by inversion-symmetry-breaking perturbations.* Phys. Rev. E, **76** 015301 (2007).

[117] A. Pinter, M. Lücke and Ch. Hoffmann. *Wave-number dependence of the transitions between traveling and standing vortex waves and their mixed states in the taylor-couette system.* Phys. Rev. E, **78** 017303 (2008).

[118] A. Pinter, M. Lücke and Ch. Hoffmann. *Bifurcation of standing waves into a pair of oppositely traveling waves with oscillating amplitudes caused by a three-mode interaction.* Phys. Rev. E, **78** 015304 (2008).

[119] R. Raffai and P. Laure. *The influence of an axial mean flow on the couette-taylor problem.* Eur. J. Mech. B/Fluids, **12** 277 (1993).

[120] D. Rand. *Dynamics and symmetry. predictions for modulated waves in rotating fluids.* Proc. R. Soc. Lond. A, **382** 83–102 (1982).

[121] S. L. Rani, D. L. Cotrell and A. J. Pearlstein. *The complete linear stability boundary for spiral poiseulle flow. 12th International Couette-Taylor Workshop, Evanston IL USA* (2001).

[122] A. Recktenwald. *Berechnung der linearen und nichtlinearen Koeffizienten der komplexen Amplitudengleichung für das Taylor-Couette System mit Durchfluss* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (1992). unpublished.

[123] A. Recktenwald, M. Lücke and H. W. Müller. *Taylor vortex formation in axial through-flow: Linear and weakly nonlinear analysis.* Phys. Rev. E, **48(6)** 4444 (1993).

[124] M. Reindl, A. Leschhorn, M. Lücke and S. Odenbach. *Flow control of magnetic fluids exposed to magnetic fields.* **149** 012109 (2009).

[125] P. J. Roache. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics.* Hermoser Publishers, Albuquerque (1998).

[126] R. E. Rosensweig, R. Kaiser and G. Miskolczy. *Magnetoviscosity of magnetic fluid in a magnetic field.* J. Colloid Interface Sci., **29** 680 (1969).

[127] R. E. Rosensweig. *Ferrohydrodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge (1985).

[128] W. v. Saarloos. *Front propagation into unstable states.* Physics Reports, **386** 29 (2003).

[129] A. Schulz. *Verzweigungen und Strukturen in der Strömung zwischen unabhängig rotierenden Zylindern.* Dissertation, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Universität Kiel (2000).

[130] A. Schulz and G. Pfister. *Bifurcation and structure of flow between counter-rotating cylinders*, p.s 37–53. Springer, Berlin (2000).

[131] A. Schulz and G. Pfister. *Bifurcation and structure of flow between counterrotating cylinders.* editors C. Egbers and G. Pfister *Lecture Notes in Physics* volume **549**, p. 37-53. Springer, Berlin (2000).

[132] M. I. Shliomis. *Effective viscosity of magnetic suspensions.* Sov. Phys. JETP, **34** 1291 (1972).

[133] M. I. Shliomis. *Comment on "magnetoviscosity and relaxation in ferrofluids".* Phys. Rev. E, **64** 063501 (2001).

[134] M. I. Shliomis. *Ferrohydrodynamics: Testing a third magnetization equation.* Phys. Rev. E, **64** 060501 (2001).

[135] J. Singh and R. Bajaj. *Couette flow in ferrofluids with magnetic field.* J. Magn. Magn. Mater., **294** 53 (2005).

[136] J. Singh and R. Bajaj. *Stability of nonaxisymmetric ferrofluid flow in rotating cylinders with magnetic field.* Int. J. Math. Mathe. Sci., 3727 (2005).

[137] H.A. Snyder. *Stability of rotating couette flow: I: Asymmetric waveforms.* Phys. Fluids, **11(4)** 728–734 (1968).

[138] R. M. Spache and H. B. Keller. *Computations of the axisymmetric flow between rotating cylinders.* J. Comp. Phys., **35** 100 (1980).

[139] P. J. Stiles, M. Kagan and J. B. Hubbard. *On the couette–taylor instability in ferrohydrodynamics.* J. Colloid Interf. Sci., **120** 430 (1987).

[140] J. B. Swift, K. L. Babcock and P. C. Hohenberg. *Effects of thermal noise in taylor-couette flow with co-rotation and axial through-flow.* Physica A, **204** 625 (1994).

[141] A. Szprynger and M. Lücke. *Noise sensitivity of sub- and supercritically bifurcating patterns with group velocities close to the convective-absolute instability.* Phys. Rev. E, **67** 046301, 1–8 (2003).

[142] R. Tagg, D. Hirst and H. L. Swinney. Experiments cited in (55) (as '[1988]' on p. 508), unpublished.

[143] R. Tagg, W. S. Edwards, H. L. Swinney and P. S. Marcus. *Nonlinear standing waves in couette-taylor flow.* Phys. Rev. A, **39(7)** 3734–3737 (1989).

[144] R. Tagg, W. S. Edwards and H. L. Swinney. *Convective versus absolute instability in flow between counter rotating cylinders.* Phys. Rev. Lett., **42** 831 (1990).

[145] R. Tagg. *The couette-taylor problem.* Nonlinear Science Today, **4(3)** 1–25 (1994).

[146] D. I. Takeuchi and D. F. Jankowski. *A numerical and experimental investigation of the stability of spiral poiseulle flow.* J. Fluid Mech., **102** 101–126 (1981).

[147] G. I. Taylor. *Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinder.* Proceedings of the Royal Society London, **223** 289–343 (1923).

[148] A. Tsamaret and V. Steinberg *Noise modulated-propagating pattern in a convectively unstable system.* Phys. Rev. Lett., **67(24)** 3392–3395 (1991).

[149] A. Tsamaret ans V. Steinberg. *Absolute and convective instabilities and noise-sustained structures in the couette-taylor system with an axial flow.* Phys. Rev. E, **49(2)** 1291–1308 (1994).

[150] A. Tsamaret and V. Steinberg. *Competing states in a taylor-couette system with an axial flow.* Phys. Rev. E, **49(5)** 4077–4086 (1994).

[151] J.A. Viecelli. *A computing method for incompressible flows bounded by moving walls.* J. Comp. Phys., **8** 119–143 (1971).

[152] A. N. Vislovich, V. A. Novikov and A. K. Sinitsyn. *Influence of a magnetic field on the taylor instability in magnetic fluids.* J. Appl. Mech. Tech.Phys., **27** 72 (1986).

[153] S. Zaleski, P. Tabeling and P. Lallemand. *Flow structures and wave-number selection in spiraling vortex flows.* Phys. Rev. A, **32** 655 (1985).

Index

A

advektiver Term
→ Navier-Stokes Gleichungen 249
vgl. Gl. (D.6), (D.7) 249
Amplituden
CSPI 124
RIB 124
wSPI 59
wTVF 59
Amplitudengleichungen *59*
gekoppelte, siehe (31) 59
Kontrolle 259
Übergang TVF↔SPI, vgl. Gl. (4.1) 59
analytisch 249
Anfangswertproblem 211
APF
allg. Lösung 15, 210
Aufbau
im Magnetfeld, vgl. Abb. 8.1 162
vgl. Abb. 1.1 9
ausgedehnte Strukturen *215*
autonom
→ Differentialgleichung 207

B

Basis Fluss
→ Ekman Wirbel 99
Bifurkation
'Jump ', siehe (56) 58
(w)SPI im **H** Feld 172
(w)TVF im **H** Feld 170
primär → Strukturen 58
sekundär → Strukturen 58
vgl. Abb. 4.3 62
Bifurkationsverhalten
für pbc theoretisch von wTVF und wSPI, vgl. Abb. 4.2 61
für rbc theoretisch von wTVF, vgl. Abb. 5.11 120
mit Durchfluss für pbc 84
mit Durchfluss für rbc 119
schematisch MCS 139
Bikritikalität *213*, 214
bikritisch
→ Bikritikalität 214
Bistabilität
→ Übergänge 58

C

CCF
allg. Lösung 14, 210
Chiralität 257
Codimension 66

D

DEBYE
→ Magnetisierungsmodelle, vgl. Abb. 8.2 164
→ Relaxationsgleichung, vgl. Gl. (8.6) . 163
Defekt
Ekman-wSPI 107
wTVF-wSPI 108
Determinante 211
Differentialgleichungen
gewöhnliche 208
partielle 208, 252
zweiter Ordnung 206
Differentialoperatoren 13, 207
Differenzenquotient
→ Diskretisierung 252
räumlich, vgl. Gl. (D.13) 253
zeitlich, vgl. Gl. (D.14) 253
Diskretisierung G1D3 . . . . . *266*

verwendetes Gitter, vgl. Abb. (D.5) ... 267
Diskretisierung G2D2 ... *252*
radial ... 261
verwendetes Gitter, vgl. Abb. (D.1) ... 252
zeitlich ... 261
Dispersionsrelation
vgl. Gl. (B.8) ... 223
komplexe ... 214
dissipativer Term
→ Navier-Stokes Gleichungen ... 248
linearer ... 249
vgl. Gl. (D.6),(D.7) ... 248
Divergenzfreiheit
→ Druck ... 5
Dreimodenmodell ... *59*
→ Kopplungsschema ... 60
wTVF und wSPI → Amplitudengleichungen ... 59
Druck
Iterationsverfahren, vgl. Tab. D.1.4 ... 254
Relaxationsansatz ... 254
Druckgradient
→ Durchfluss ... 255
Durchfluss ... *215*
Auswirkungen auf Wavy Strukturen ... 84
Netto ... 103
Reynoldszahl ... 15
Dyadisches Produkt ... 249
→ Impulserhaltung ... 249
Dynamik
von Störungen ... 206

E

Eigenmoden ... 210
lineare ... 207
Eigenwert
Oberflächen ... 214
zeitlicher ... 207
Eigenwertgleichung
der linearisierten NSE, vgl. Gl. (A.20) . 210
Eigenwertproblem
lineares ... 209
Ekman Wirbel ... 10, 99
→ endliche Randbedingungen ... 99
Entdimensionalisierung ... 12
Entwicklung
→ Amplitudengleichung, vgl. Dreimodenmodell, Gl. (4.2) ... 59
→ Galerkin Verfahren ... 250
nach Fouriermoden ... 207, 264
zeitlich von Störungen ... 206
Existenz
von Lösungen ... 58

F

Fehler ... *258*
zu experimentellen Bifurkarkationsschwellen, vgl. Abb. 5.1 ... 101
in Bifurkationsschwellen ... 259
in Diskretisierung, radial ... 261
in Diskretisierung, zeitlich ... 261
Vergleich verschiedener Verfahren ... 261
Ferrofluide ... *155*
schematisch, vgl. Abb. 7.1,7.2 ... 156
Fouriermoden
vgl. Gl (3.2) ... 30
Frequenz
$Im[\sigma]$, → Eigenwert ... 207
vgl. Gl. (A.30) ... 212
MCS ... 133
Wavys, pbc ... 78
Wavys, rbc ... 103
Fronten ... *235*
→ lokalisierte Strukturen ... 235
Typen: ±, vgl. Abb. B.16 ... 236
FTCS
→ Diskretisierung ... 253

G

G1D3
→ Numerische Lösungsverfahren ... 264
G2D2
→ Numerische Lösungsverfahren ... 248
Galerkinverfahren
→ Numerische Lösungsverfahren ... 247
Modenkopplung, vgl. Abb. D.2 ... 256
Ganghöhe ... 132
vgl. Gl. (3.9) ... 35
Bsp. SPI ... 35

MCS, MRIB vgl. Abb. 6.1 126
Ginzburg Landau Näherung *259*
lineare, vgl. Gl. (B.7) 223
Gitter
versetzte, vgl. Abb. D.1, D.5 252
GLE
→ Ginzburg Landau Näherung 213
Gleichgewichtsmagnetisierung
→ Ferrofluide 158
Gleitspiegelsymmetrie
→ wTVF 42
Grundgleichungen *11*
Impulsbilanz 11
Massenbilanz 11
Grundzustand *13*
gesamt 16
Reine Rotation, CCF, vgl. Abb. 1.2 13
Reiner Durchfluss, APF, vgl. Abb. 1.3 . . 14

H

harmonischen Funktionen *251*
→ Entwicklung 250
helikal
→ Topologie, Strukturen, SPI, MCS 25
Helizität 123, 132, 257
Hopfbifurkation 58
Horn
→ Instabilität, vgl. Abb. B.8 225

I

imaginär
→ Amplitudengleichungen 59
→ Eigenwert 207
Impulsbilanz
vgl. Gl. (D.2) 248
Impulserhaltung
→ Diskretisierung . . . . . 248f.
Impulsstrom
vgl. Gl. (D.1) 248
Impulsstromdichte
vgl. Gl. (D.1),(D.3) 248
Inseln *213*
absoluter Instabilität, → Wellenpaket . 214
marginaler Stabilität, → Wachstumsrate214
instabil
→ Stabilität 206
Instabilität 224
absolute 214
ferrohydrodynamische 156
konvektive 214
lineare 214
Interpolation
→ Diskretisierung, vgl. Gl. (D.15) 253
intrinsisch
→ Durchfluss 130
Isotropiegruppen
siehe (55) 61
Iteration
→ Druck 253

K

Kelvinkraft
→ Ferrofluide 158
→ Impulsbilanz 158
Klassifikation
→ Dreimodenmodell, Kopplung 73
→ Topologie, vgl. Abb. 4.11 73
Kontinuitätsgleichung *11*
in Zylinderkoordinaten, Gl. (1.9) 13
Kontrollparameter 212
Koordinatensystem
→ Aufbau 9
→ Dreimodenmodell 60
Kopplung
→ Lösungsverfahren 251
lineare 73
Kopplungsschema
→ Dreimodenmodell, vgl. Abb. 4.1 60
kritische Werte
→ Stabilitätsanalyse 205
kritischer Punkt
→ Instabilität, Fronten 224
Kritischer Punkt
bi∼, poly∼ 68

L

Linien konstanter Phase
MCS, vgl. Abb. (6.2) 127

vgl. Gl. (3.4) 31
Wavys, vgl. Abb. (4.11) 74
wTVF, vgl. Abb. (3.18) 52
linksgewunden
→ SPI, MCS 132
Lösbarkeitsbedingung 211
Lösungsverfahren
Galerkin, Entwicklungsansatz, vgl. Gl. (D.11) 250
Newton Raphson Verfahren 211
Produktansatz 207
Runge Kutta Verfahren 210
Shooting Verfahren 211
lokalisierte Strukturen *223*
Defekte 112
Wellenpakete 235

M

M=2 SPI
lineare 213
MAC
siehe (58) 247
Magnetfeld
axial, radial, schräges, vgl. Abb. 8.1 . . . 157
extern 163
homogenes 161
intern 163
magnetisches Moment
→ Ferrofluide 156
Magnetisierungsgleichung *162*
effektive, vgl. Gl. (8.4) 162
Gleichgewicht, vgl. Gl. (8.3) 162
Magnetisierungsmodelle *164*
Magnetoviskoser Effekt
→ Ferrofluide 156
Majorante
→ Nomenklatur 127
Minorante
→ Nomenklatur 127
Moden
dominante bei MCS 127
dominante bei Wavys 60
Modenentwicklung
in Niklas Näherung, vgl. Gl. (D.21)-(D.23) 264
Modenkopplung
nichtlinearer Terme 251
Modulation
→ MCS 130

N

Navier-Stokes Gleichungen *11*, 250
diskretisierte Form
G2D2, vgl. Gl. (E.1) 271
G1D3, vgl. Gl. (E.6)-(E.8) 276
entdimensionalisiert 12
erweiterte, vgl. Gl. (8.11) 163
in azimutalen Moden 251
in Zylinderkoordinaten 13
in Zylinderkoordinaten mit dyadischem Produkt 250
lineare 13, 215
lineare in Zylinderkoordinaten, vgl. Gl. (A.4) 206
mit dyadischem Produkt 249
Niklas Näherung 163
Nettofluss
siehe (63)→ Durchfluss 130
Neumann
→ Diskretisierung, zeitlich 261
Newton Raphson Verfahren
→ Lösungsverfahren 211
nichtlineare Analyse
schwache → GLE 213
Nichtlinearität
→ Navier-Stokes Gleichungen 206, 272
Summanden, vgl. Gl. (E.2),(E.3) 272
Niklas
→ Relaxationsgleichung, vgl. Gl. (8.7) . 163
magnetische Parameter 164
Nomenklatur
MCS und MRIB 127
Strukturen im Magnetfeld 165
NSE
→ Navier-Stokes Gleichungen 11
numerisch 249
Numerische Lösungsverfahren *247*
G1D3 264
G2D2 248

O

Off-Equilibrium
siehe (106) 157
Onset
→ Bifurkation 258
Orthogonalität
→ harmonischen Funktionen 251
Oszillation
→ Frequenz 78

P

paramagnetisch
→ Ferrofluide 158
Parameterbereiche *25*
Teil I, siehe Abb. 3.1 26
Teil I, siehe Abb. 3.2 27
Teil II, siehe Abb. 3.3 28
PBC 30
→ Randbedingungen 10
Phase
vgl. Gl. (3.8) 35
gekoppelte 60
kombinierte von SPI, vgl. Gl. (3.4) . . 31, 36
kombinierte, MCS 35
Phasengeschwindigkeit
vgl. Abb. B.6 222
von SPI 36
Phasenlinie
Bsp. vgl. Abb. 6.1 126
zur Charakterisierung 38
Poisson Gleichung *268*
→ Diskretisierung 253
vgl. Gl. (D.18) 254
vgl. Gl. (D.33) 269
diskretisierte Form G2D2, vgl. Gl. (E.5) 272
für Druckfeld 253
POLY
→ Magnetisierungsmodelle, vgl. Abb. 8.2 164
Projektion
→ Lösungsverfahren 250
Propagation
→ Fronten 229
→ Strukturen 229
Phase 229

R

Randbedingungen
periodische - **p**eriodic **b**oundary **c**ondition (PBC) 10
Dirichlet 255
endliche - **r**igid **b**oundary **c**ondition (RBC) 11
in Zylinderkoordinaten 13
Neumann 255
Randbedingungen G1D3 . . . . . *269*
rbc an Deckeln, Box D.34 270
Randbedingungen G2D2 . . . . . *255*
pbc an Deckeln, Box D.1.5 255
Random Noise
→ numerische Lösungsverfahren 142
Randwertproblem 206, 211
Rauschen
→ numerische Lösungsverfahren 142
RBC 30
→ Randbedingungen 11
rechtsgewunden
→ SPI 132
reell
→ Amplitudengleichungen 59
→ Eigenwert 207
relativer Abstand
→ Kontrollparameter 215
Relaxationsgleichung *162*
Debye 163
Niklas 163
stationär 162
Relaxationskonstante 254
Reynolds Stress
→ Durchfluss 103
siehe (63; 65) 103
Reynoldszahl 12
Rotationsviskosität
→ Ferrofluide, Abb. 7.2 156
Runge Kutta Verfahren
Lösungsverfahren 210

S

S72
→ Magnetisierungsmodelle, vgl. Abb. 8.2 164

Sattelpunktsanalyse 214
aus krit. Punkt 225
beliebige Sattelpunkte 229
Frontlösung 236
vgl. Gl. (B.9) 224
Schießverfahren
→ Lösungsverfahren 211
Shooting Verfahren
→ Lösungsverfahren 211
Spannungstensor
vgl. Gl. (D.5) 248
Spiegelbilder
siehe SPI, RIB, MCS,→ Symmetrie 35
Sprung
in krit. Werten → Inseln, vgl. Abb. B.5221
stabil
→ Stabilität 205
mono∼, bi∼, poly∼ → Strukturen 66
Stabilisierung 256
instabiler Strukturen, siehe Abs. D.1.6 256
Stabilität
konvektiv stabil 225
marginal stabil 205
Wavys bei Re → Durchfluss 94
Stabilitätsanalyse
lineare 205
stationär 49
→ Relaxationsgleichung, vgl. Gl. (8.5) . 162
Störungen
lineare 214
zur Lösung des Grundzustands, vgl. GL. (A.1) 205
Strukturen *25*
vgl. Tab. 3.1 30
CSPI, vgl. Abb. 3.11 38
lokalisierte → Wellenpaket 214
MCS, vgl. Abb. 3.8 36
MCS, vgl. Abb. 3.7 36
MRIB, vgl. Abb. 3.11 36
RIB, vgl. Abb. 3.9, 3.11 38
SPI, vgl. Abb. 3.5 31
TVF, vgl. Abb. 3.4 30
unendlich ausgedehnte 214
wSPI in FF, vgl. Abb. 3.19, 3.20 52
wSPI, vgl. Abb. 3.15 44
wTVF in FF, vgl. Abb. 3.16, 3.17 49
wTVF, vgl. Abb. 3.13 44
WVF, vgl. Abb. 3.12 42
Substitution
→ Lösungsverfahren, vgl. Gl. (A.16) . . 209
von Differentialoperatoren, vgl. Gl. (A.13) 208
Symmetrie
axial 132
Gleitspiegel∼
→ Wavys 65
Inversions∼ 257
MCS und MRIB 125
RIB, vgl. Gl. (3.12) 38
SPI, vgl. Gl. (3.11) 36
Spiegel∼ 257
wTVF, vgl. Gl. (3.14) 42
System 9
Aufbau, vgl. Abb. 1.1 9

T

TCS
Taylor-Couette System → System 9
Topologie
→ Strukturen, Kap. 3 25
→ Vortizität 241
toroidal
→ Topologie, Strukturen 25

U

Übergänge *57*, *99*, *123*
bzgl. der Stabilität 224
stationäre 62
transiente 80
TVF↔SPI, pbc 57
TVF↔wSPI, rbc 99
zwischen SPI, → MCS 139
überkritisch
→ Stabilität 212
unterkritisch
→ Stabilität 212

V

Vortizität *241*
vgl. Gl. (C.1),(C.2) 241
azimutale∼, vgl. Gl. (C.3) 241

W

Wachstumsparameter *258*
lineare 59
TVF und SPI 258
Wachstumsrate
$Re[\sigma]$, → Eigenwert 207
vgl. Gl. (A.30) 212
Wavy Strukturen
pbc 57
rbc 99
Wellen
stehende → RIB 42
wandernde → MCS, MRIB 123
wandernde → SPI 31
Wellenpaket
→ lokalisierte Strukturen 214
Wellenzahl
axiale 11
azimutale → SPI, MCS 5, 31, 58
komplexe 223
kritische 214
Weltlinien
→ Linien konstanter Phase 74, 127

Z

Zwangsbedingungen
→ Modenkopplung 80
Druckgradient 255
Durchfluss 255
Stabilisierung 256