

Wissensbasierte Automatisierung und  
kontinuumsmechanische Erweiterung der  
Ultraschall-Eigenstressanalyse zur  
Beschreibung des Spannungszustands im  
gesamten Bauteil

Dissertation

zur Erlangung des Grades  
des Doktors der Ingenieurwissenschaften  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät III  
Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften  
der Universität des Saarlandes

von

Dipl.-Ing. Frank Längler

Saarbrücken 2007

Tag des Kolloquiums: 17.12.2007  
Dekan: Prof. Dr. U. Müller  
Berichterstatter: Prof. Dr. W. Arnold  
Prof. Dr.-Ing. P. Steinmann  
Akademischer Mitarbeiter: Dr.-Ing. W. Ripplinger

## **Kurzfassung**

Ultraschallverfahren werden zur experimentellen Bestimmung von Eigenspannungen in technischen Bauteilen eingesetzt. Die Auswertung der Messdaten in den grundlegenden Zusammenhängen setzt jedoch spezifische Fachkenntnisse voraus, um übereinstimmende Ergebnisse mit den etablierten Verfahren zu erhalten. Ziel dieser Arbeit ist es, eine vereinfachte Nutzung der grundlegenden Auswertebeziehungen durch den Einsatz von Softwaremodulen zu ermöglichen. Ziel ist es auch, aus Ergebnissen an einer begrenzten Anzahl von Messpositionen eine bauteilabdeckende Aussage über den Spannungszustand treffen zu können.

Die im Rahmen dieser Arbeit erzielte Verbesserung ist die Entwicklung einer wissensbasierten Softwareroutine zur Unterstützung einer automatisierten Spannungsanalyse, die auch von Nichtexperten durchgeführt werden kann. Die menügeführte Vorgehensweise zur Auswertung der Messdaten beinhaltet Anleitungen zur Berücksichtigung von Materialeinflüssen und gewährleistet durch die gleichartige Durchführung objektive Ergebnisse. Auf Basis der an den Messpositionen bestimmten Spannungen werden darüber hinaus Rekonstruktionsmethoden angewandt, um geschlossene Spannungsprofile im Bauteil zu erzeugen. Die interpolierten und approximierten Spannungsprofile werden in der spannungsanalytischen Anwendung gegeneinander bewertet.

## **Abstract**

Ultrasonic methods provide the feasibility of experimental residual stress determination in technical components. Specific background knowledge is necessary to evaluate the basic equations using measuring data in this way that the results are equal to the results of the established methods. It is the purpose of this work to enable a simplified use of the basic evaluation equations by applying software modules. It is also purpose to give information about the stress state in the whole component based on a limited number of results at the measuring points.

The further development of this work is making available a knowledge-based software package to assist an automated ultrasonic residual stress analysis. By processing measuring data the menu-driven procedure includes instructions to separate material influences. Furthermore, the procedure ensures objective results due to the uniform handling. Based on the evaluated stresses at the measuring points reconstruction methods are used to generate continuous stress states in the component. The interpolated and approximated stress states are evaluated against each other by stress detection application.

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand im Wesentlichen in den Jahren 2001 bis 2005 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter / Doktorand am Fraunhofer Institut Zerstoerungsfreie Prüfverfahren.

Herrn Professor Dr. W. Arnold danke ich für die konstruktive Unterstützung und Betreuung der Arbeit.

Herrn Prof. Dipl.-Ing. P. Steinmann danke ich für das entgegengebrachte Interesse und die dezidierte Durchsicht sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. S. Diebels für die Übernahme des Vorsitzes im Promotionsausschuss.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. E. Schneider, der mich durch viele Gespräche und Anregungen latent gefördert und damit maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Ebenso möchte ich mich auch bei allen Kollegen und Mitarbeitern des Instituts für das kollegiale Verhältnis und die stets angenehme Zusammenarbeit bedanken.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern und meiner Freundin Christiane einen ganz besonderen herzlichen Dank erweisen, die mich während dieser Arbeit mit viel Geduld und Engagement unterstützt haben; Ihnen sei diese Arbeit gewidmet.

Saarbrücken, im Dezember 2007

Frank Längler

## Inhaltsverzeichnis

<b>VERZEICHNIS RELEVANTER SYMBOLE .....</b>	<b>III</b>
<b>1 EINLEITUNG.....</b>	<b>1</b>
1.1 EINFÜHRUNG.....	1
1.2 STAND DER TECHNIK.....	4
1.3 ZIELE UND GLIEDERUNG DER ARBEIT .....	7
1.4 NEU ERZIELTE VERBESSERUNGEN .....	8
<b>2 GRUNDLAGEN DER AKUSTOELASTIZITÄT .....</b>	<b>10</b>
2.1 KONTINUUMSMECHANISCHE FORMULIERUNG .....	10
2.2 AKUSTO-ELASTISCHE KONSTITUTIVGLEICHUNGEN .....	12
<b>3 EIGENSPANNUNGSANALYSE MITTELS ULTRASCHALLVERFAHREN.....</b>	<b>15</b>
3.1 KONSTITUTIVGLEICHUNGEN .....	15
3.2 EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG DER ELASTISCHEN KONSTANTEN .....	18
3.3 FEHLERRECHNUNG.....	20
3.4 EINFLUSS DER TEXTUR .....	22
3.4.1 Bestimmung texturabhängiger Schallgeschwindigkeiten .....	22
3.5 ZUSAMMENFASSUNG .....	24
3.6 MESSTECHNIK .....	26
<b>4 SOFTWARE-APPLIKATION DER ULTRASCHALL-EIGENSPANNUNGSANALYSE .....</b>	<b>29</b>
4.1 KONSTITUTIVER RAHMEN .....	29
4.2 CHARAKTERISTIK DER SOFTWAREROUTINE ALS EXPERTENSYSTEM .....	30
4.3 SOFTWAREROUTINE USRSA IN DER GESAMTDARSTELLUNG .....	31
4.4 ABGRENZUNG DER ANALYSESEKTIONEN .....	35
4.4.1 TIME-OF-FLIGHT.....	35
4.4.2 FLIGHT-PATH-LENGTH .....	39
4.4.3 ULTRASONIC VELOCITY .....	40
4.4.4 WEIGHTING QUOTIENT.....	41
4.4.5 TEXTURE IDENTIFICATION .....	46
4.4.6 RESIDUAL STRESS .....	49
4.5 KORREKTUR VON GEFÜGEZUSTANDSEINFLÜSSEN.....	49
<b>5 KONSTRUKTION GESCHLOSSENER SPANNUNGSPROFILE.....</b>	<b>51</b>
5.1 STATISCHER IST-SPANNUNGSZUSTAND .....	52
5.2 KONSTRUKTIONSBLAUF.....	53
5.3 STRUKTURDISKRETISIERUNG .....	55
5.3.1 DELAUNAY-Triangulierung.....	56

---

5.3.2	Orthogonale Viereckvernetzung.....	58
5.3.3	Elementdefinition.....	59
5.4	REKONSTRUKTIONSMETHODEN.....	62
5.4.1	Lineare Interpolation.....	63
5.4.2	Radiale Basisfunktionen.....	64
5.4.3	NATURAL NEIGHBOR Interpolation.....	68
5.4.4	Membranmodell.....	73
5.4.5	Polynom- und Splinerekonstruktion.....	79
5.5	METHODENABGLEICH.....	81
<b>6</b>	<b>ANWENDUNGSBEISPIELE.....</b>	<b>87</b>
6.1	WARMGEWALZTE ALUMINIUMPLATTE.....	87
6.1.1	Bewertung der Rekonstruktionsmethoden.....	88
6.2	GESCHWEIBTE STAHLPLATTE.....	93
6.3	GEHÄRTETES STIRNRAD.....	95
<b>7</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG.....</b>	<b>99</b>
	<b>ANHANG.....</b>	<b>103</b>
	TEIL A.....	103
	TEIL B.....	108
	TEIL C.....	111
	<b>LITERATURVERZEICHNIS.....</b>	<b>116</b>

## Verzeichnis relevanter Symbole

### Tensoralgebra

$\mathbf{A}^T, \mathbf{A}^{-1}$	transponierter und inverser Tensor
$\mathbf{A}\mathbf{b}$	einfache Überschiebung zwischen Tensor und Vektor
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt zweier Tensoren
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	Vektorprodukt zweier Tensoren
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Dyadisches Produkt zweier Tensoren

### Operatoren

$\nabla(\dots)$	NABLA-Operator ( $\nabla(\dots) = \frac{\partial(\dots)_j}{\partial x_i} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ )
$\text{grad} = \nabla(\dots)$	Gradientenbildung
$\text{div} = \nabla \cdot (\dots)$	Divergenzbildung
$\Delta = \nabla \cdot \nabla$	LAPLACE-Operator
$\det(\dots)$	Determinante
$\text{diag}(\dots)$	Diagonale
$\ \dots\ $	Norm
$\text{rg}(\dots)$	Rang
$\text{cond}(\dots)$	Kondition
$\text{conv}(\dots)$	konvexe Hülle
$\text{dim}(\dots)$	Dimension
$\text{span}\{\dots\}$	von $\{\dots\}$ aufgespannter Vektorraum
$\text{supp}(\dots)$	Träger
$\mathbf{I}_k(\dots)$	Invariante
$ \Delta \dots $	absoluter Fehler

**Akustoelastizität, Eigenspannungsanalyse**

$\mathbb{R}^d$	d-dimensionaler Vektorraum der reellen Zahlen
$\mathcal{P}_1$	linearer Polynomraum
$\mathcal{B}$	Konfiguration eines materiellen Körpers
$\xi_i, X_i, x_i$	kartesische Ortskoordinaten der NATURAL-, INITIAL- und FINAL-Konfiguration
$\mathbf{i}_i$ ( $i=1,2,3$ )	Basisvektoren des orthonormierten Koordinatensystems
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Symbol
$\Phi$	Potenzial der spezifischen Verzerrungsenergie
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{E}$	LAGRANGE-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	linearer EULER-Verzerrungstensor
$E_i, \varepsilon_i$	LAGRANGE-, EULER-Hauptdehnungskomponente
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\sigma_i$	CAUCHY-Hauptspannungskomponente
$\mathbf{n}$	Flächen-/Richtungsnormaleneinheitsvektor
$\rho$	Dichte eines Körpers
$\mathcal{C}_{ijkl}, \mathcal{C}_{ijklmn}$	Tensor der elastischen Konstanten zweiter bzw. dritter Ordnung
$\lambda, \mu$	LAMÉ-Konstanten (SOEC)
$\nu$	Querkontraktionszahl
$l, m, n$	MURNAGHAN-Konstanten (TOEC)
$v_{ij}$	Schallwellengeschwindigkeit: $i$ Ausbreitungs-, $j$ Polarisationsrichtung
$t_{ij}$	Schallwellenlaufzeit
$v_L, v_T$	Longitudinal-, Transversalwellengeschwindigkeit
$c_{11}, c_{12}, c_{44}$	Elastische Konstanten des kubischen Einkristalls
$C_4^{11}, C_4^{12}, C_4^{13}$	Expansionskoeffizienten 4. Ordnung der Orientierungsverteilungsfunktion
$S$	spannungsakustische Konstante
$A, \dots, K$	Spannungs-Wichtungsfaktoren
$AEC_{ij}$	akusto-elastische Konstante: $i$ Ausbreitungs-, $j$ Polarisationsrichtung

**Konstruktion Spannungsprofile**

$\Omega, \partial\Omega$	Lösungsgebiet, zugehöriger Rand
$X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$	Punktmenge der Stützstellen/Messpositionen
$\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$	Stützwerte/-spannungen assoziiert mit den Stützstellen
$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$	Punkt-/Knotenmenge
$\phi(\dots)$	Ansatz-/Basisfunktion
$\{\phi_k\}, \{\mathbf{x}_k\}$	nodale Basis, Elementknoten
$\mathcal{F}_{X,\phi}$	datenabhängiger linearer Funktionenraum bzgl. $X$ und $\phi$
$\mathcal{P}_k$	Vektorraum der stückweise stetigen Polynome vom totalen Grad $k$
$C^k$	$k$ -mal stetig differenzierbarer Funktionenraum
$\mathcal{T}(\dots)$	Triangulierung
$\{T_1, \dots, T_E\}$	Menge von Dreieckselementen
$\mathcal{V}(\dots)$	VORONOI-Diagramm
$\{V_1, \dots, V_E\}$	Menge von VORONOI-Zellen
$\mathcal{K}(\dots)$	Viereckvernetzung
$\{K_1, \dots, K_E\}$	Menge von Viereckselementen
$(s, t)$	lokale Zellkoordinaten im Viereckelement
$dx_i^{(-,+)}$	Kantenlängen im Viereckelement
$A$	Flächeninhalt
$r$	Umkreisradius
<b>cc, cci</b>	Umkreismitelpunkte
$D_i^{(-,+)}$	Differenzenquotienten
$\mathbf{A}_{X,\phi}$	Koeffizienten-/Systemmatrix bzgl. $X$ und $\phi$
$\mathbf{B}_{\mathcal{K}}$	Regularisierungsmatrix bzgl. $\mathcal{K}$
$\alpha_i, \beta_i, d_i$	Expansionskoeffizienten
$c, \varepsilon$	Form-, Glättungsparameter (MULTIQUADRIC)
$\gamma$	Regularisierungs-/Glättungsparameter (Membranmodell)

# 1 Einleitung

## 1.1 Einführung

Mechanische und/oder thermische Behandlungen eines metallischen Halbzeugs oder Bauteils durch Herstellungs-, Bearbeitungs- und Fügeverfahren verursachen Eigenspannungen als unmittelbare Folge von örtlichen Inhomogenitäten der elastischen und plastischen Verformungen, Gefügeumwandlungen, thermischer Schrumpfung oder strukturellen Gitterbaufehlern. Der Begriff Eigenspannung ist als Größe in Form einer vergleichenden Spannung vorhandener Verzerungszustände zu verstehen. Eigenspannungen sind innere mechanische Spannungen, die in einem als abgeschlossenes System betrachteten Festkörper ohne Einwirkung äußerer Kräfte und Momente vorliegen.

Eigenspannungen stellen als Vorbeanspruchung vielfach eine Fehlerquelle bei der Einschätzung des Materialverhaltens in der Fertigung und im praktischen Einsatz dar. Die Eigenspannungen überlagern sich additiv den Lastspannungen. Damit eröffnen sich die Möglichkeiten der Zustandsoptimierung sowie der Verbesserung des mechanischen Verhaltens. In anderen Fällen müssen Eigenspannungen an Bauteilen abgebaut werden, um beispielsweise die mechanische Bearbeitung zu verbessern oder die Funktionalität während der geplanten Lebensdauer zu gewährleisten. In allen Anwendungen aber ist die möglichst genaue quantitative Analyse des Spannungszustands vorausgesetzt.

Eine vorteilhafte Nutzung der Eigenspannungen ist das Ergebnis von randschicht- bzw. oberflächenverfestigenden Behandlungen. Durch beispielsweise Strahlen, Festwalzen oder Härten entstehen Druckeigenspannungen in oberflächennahen Zonen, die die Anrissbildung reduzieren und die Schwingfestigkeit verbessern können. Auch werden gezielte Vorspannungen in druckführenden Komponenten oder kritisch mehraxial belasteten Bauteilzonen eingestellt, um den Bereich der ertragbaren bzw. tolerierbaren Lastspannungsspitzen zu erweitern.

Zum Abbau oder zur Homogenisierung des Eigenspannungszustands wird oftmals das Abkühlen aus der Formgebungshitze sorgfältig kontrolliert oder eine zusätzliche spezielle Wärmebehandlung durchgeführt.

Zur experimentellen Analyse von Eigenspannungen wird generell der Verformungszustand nach Betrag und Richtung gemessen und mit Hilfe elastischer Konstanten berechnet. Dazu sind eine Vielzahl von Verfahren und Verfahrensvarianten entwickelt worden. Eine mögliche Differenzierung der Messmethoden für den unmittelbaren Einsatz an der technischen Komponente ist die Trennung von zerstörungsfreien und teilzerstörenden Prüfverfahren. Bei letzteren führen gezielte Eingriffe in den Eigenspannungszustand zu Relaxationseffekten, die vermessen und ausgewertet

werden. Das Bohrloch- und Ringkernverfahren sind die bekanntesten etablierten teilzerstörenden Verfahren.

Auch alle optischen Verfahren, mechanisch oder thermisch gekoppelt, setzen eine Formänderung voraus.

Die am weitesten entwickelten und am häufigsten genutzten zerstörungsfreien Prüfverfahren an kristallinen Materialien sind Röntgendiffraktionsverfahren. Diese Verfahren basieren auf der Ermittlung von Gitterdehnungen unter Ausnutzung der Beugung an Gitterebenen. Das  $\sin^2\psi$ -Verfahren, das die röntgenographische Spannungsanalyse in der Werkstofftechnik etabliert hat, ist ein Verfahren zur Analyse von zweiaxialen Eigenspannungszuständen an der Bauteiloberfläche. Die Anwendung der  $\sin^2\psi$ -Methode ist an gewisse Annahmen bezüglich des oberflächenparallelen Spannungszustands gebunden. In erster Linie betrifft das die elastische Isotropie, die Gradientenfreiheit über der Strahlungseindringtiefe und die nur geringfügige akzeptierbare plastische Verformung. Darüber hinaus sind Erweiterungen des  $\sin^2\psi$ -Verfahrens entwickelt worden, beispielsweise von [HARTMANN 1994] zur Bestimmung von Gradienten. Für die quantitative Spannungsanalyse ist die explizite Kenntnis des Gitterabstands im unverspannten bzw. spannungsfreien Zustand nicht erforderlich. Dieser kann mit hinreichender Genauigkeit durch lineare Regression aus mehreren Messungen abgeschätzt werden. Der Vorteil der Röntgendiffraktionsverfahren liegt darin, dass diese seit langem etabliert und zwischenzeitlich vollständig automatisiert sind. Mobile Apparaturen stehen auch für die Nutzung außerhalb des Labors zur Verfügung. Die notwendigen elastischen Materialkennwerte sind einfach zu ermitteln. Nachteilig sind der Justieraufwand und die Messzeit pro Messpunkt sowie die zu beachtenden Strahlenschutzmaßnahmen. Nachteilig ist zuweilen auch die Beschränkung auf die Analyse oberflächennaher Schichten von wenigen  $\mu\text{m}$  bis wenigen 10  $\mu\text{m}$  Dicke.

Die Neutronenbeugung erlaubt ebenfalls die zerstörungsfreie Prüfung. Das Streuverhalten der Neutronenstrahlen ist unterschiedlich im Vergleich zu den Röntgenstrahlen: Röntgenstrahlen werden an elektrischen Feldern des Atomkerns gestreut, Neutronenstrahlen an den magnetischen Momenten der Atome. Neutronenstrahlen ermöglichen die Untersuchung größerer Volumeneinheiten von einigen  $\text{cm}^3$ . Zur genauen Analyse ist allerdings die Kenntnis des Gitterabstands im unverformten Zustand notwendig. Der Vorteil: Durch Vermessen mehrerer Ebenen können mehraxiale Spannungszustände bestimmt und die Trennung von Textureinflüssen erreicht werden. Nachteilig sind die lokale Bindung an die stationäre Neutronenquelle, die erforderlichen Strahlenschutzmaßnahmen, die hohen Kosten und der erhebliche Zeitaufwand pro Messung.

Die zerstörungsfreien magnetischen Prüfverfahren sind vergleichsweise neue Verfahren. Ein-

schränkend ist allerdings die Anwendung an ausschließlich ferromagnetischen Materialien, die außerdem magnetostruktiv aktiv sein müssen. Ferromagnetische Materialien weisen eine Domänenstruktur auf, also Bezirke unterschiedlicher Magnetisierungsrichtungen, und sind durch ein nichtlineares Verhalten der magnetischen Induktion in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke gekennzeichnet. Die einzelnen Domänen, die so genannten WEISS-Bezirke gleicher Magnetisierungsrichtung werden durch Blochwände voneinander getrennt. Zur magnetischen Spannungsanalyse werden die durch den Verzerrungszustand verursachten Behinderungen der Blochwandbewegungen beim zyklischen Ummagnetisieren des Prüfbereichs durch ein angelegtes externes Magnetfeld ausgenutzt. Zeitgleich werden mehrere Messgrößen mit unterschiedlichem Informationsgehalt aufgenommen. Die Kombination aus den herangezogenen Messgrößen, die signifikante Änderungen zeigen, wird anhand von Kalibrierdaten in einer Kalibrierfunktion zusammengefasst. Vorteilhaft neben der breiten Erfahrungsbasis, der Verfügbarkeit von Handgeräten sowie der Vielzahl an die Prüfaufgabe angepasster Sensoren, ist auch die hohe Messrate (1-10 Hz) und die damit mögliche schnelle orts- und/oder zeitabhängigen Messdatenaufnahme. Die Verfahren zeichnen sich ferner durch eine hohe laterale- ( $\approx 100 \mu\text{m}$ ) und Tiefenauflösung von etwa  $10 \mu\text{m}$  bis ca. 3 mm aus.

Die zerstörungsfreien Ultraschallverfahren sind ebenfalls relativ neue Verfahren. Diese basieren auf dem akusto-elastischen Effekt, der den Einfluss von Verzerrungs- bzw. Spannungszuständen auf die Schallgeschwindigkeiten beschreibt. Durch Verwendung mehrerer Wellenarten, deren Geschwindigkeiten unterschiedlich stark vom gleichen Spannungszustand beeinflusst werden und die sich über das gleiche Bauteilvolumen ausbreiten, lassen sich Auswertbeziehungen angeben, in denen die Laufzeiten der Ultraschallwellen als einzige Messgröße eingehen und den Messeffekt auch bei Anwendungen außerhalb des Labors nutzbar machen. Der Vorteil ist eine schnelle, bis zu 200 Messungen pro Sekunde, orts- oder zeitabhängige Datenerfassung zur Analyse von ein-, zwei-axialen oberflächennahen Spannungszuständen bis zu einer Tiefe von ungefähr 6 mm, sowie von ein-, zwei- und drei-axialen Volumenspannungen. Der von Sensorgröße und Schallweg festgelegte darstellbare Volumenbereich begrenzt die Anwendung auf die Bestimmung von Makroelastizitäten. Der akusto-elastische Messeffekt lässt sich analytisch beschreiben. Das Verfahren besitzt ein Alleinstellungsmerkmal durch die Möglichkeit der schnellen Spannungsanalyse im gesamten Bauteil. Nachteilig sind die aufgrund des kleinen Messeffekts zu fordernde Genauigkeit und Sorgfalt bei der experimentellen Messdatenerfassung sowie die Berücksichtigung von anderen, sich überlagernden Einflüssen auf das Messergebnis.

Diesem für die Nutzung des Verfahrens nachteiligen Stand durch wissenschaftliche Unterstützungsmodule bei der menügeführten Messdatenaufnahme und Auswertung in einer Software-routine soweit zu verbessern, dass auch Nichtexperten das Verfahren zur Bestimmung des Eigenspannungszustands in technischen Bauteilen nutzen können, ist ein erklärtes Ziel dieser

Arbeit.

Darüber hinaus ist eine Methodik zu entwickeln, die gestützt auf den an den Messpositionen bekannten Spannungswerten ein geschlossenes Spannungsprofil im Bauteil abbildet.

Die Ultraschallverfahren und deren bisherige Nutzung können wie folgt charakterisiert werden:

- Die Grundlagen sind verstanden; es gibt analytische Lösungen zum Einfluss von ein-, zwei- und dreiaxialen Spannungszuständen, zum Einfluss der Textur, zum Einfluss der Bauteiltemperatur auf die Schallgeschwindigkeit aller Wellenarten.
- Die Einflüsse der wichtigsten Gefügeparameter auf die Kenngrößen des elastischen Materialverhaltens sind aus Versuchen bekannt.
- Es existiert eine Messtechnik zur automatisierten Messung von Schallwellenlaufzeiten.
- Die bisher nicht geführte Auswertung der gemessenen Laufzeit als Funktion des Ortes oder der Zeit setzt zur Spannungsberechnung Expertenwissen voraus.

Die in der vorliegenden Arbeit zu erzielenden Verbesserungen des Stands der Ultraschallspannungsanalyse sind:

- Implementierung unterschiedlicher Analyseprozeduren in einer wissensbasierten und menügeführten Softwareroutine, die aus gemessenen Laufzeiten verschiedener Wellenarten Spannungsberechnungen ermöglicht.
- Bereitstellung einer logischen und fehlerfrei zu bedienenden Anwendersoftware mit anforderungsgerechtem Design zur eigenständigen Durchführung der Eigenspannungsanalyse mittels Ultraschallverfahren.
- Berechnung eines geschlossenen Spannungsprofils auf Grundlage diskreter Spannungswerte.
- Ausgleich geometrieabhängiger, von der Sensorik nicht zugänglicher Messstellen.
- Weiterverwendung des geschlossenen Spannungsprofils als Eingangsgröße für bruchmechanische Bewertungen, Lebensdaueranalysen oder Simulationen.
- Kontinuierliche Darstellung des ebenfalls technisch relevanten Bauteildicken- und Geschwindigkeitsprofile.
- Ermöglichung schnellerer Messzyklen durch eine geringere Anzahl benötigter Messpositionen.

## 1.2 Stand der Technik

Einen Überblick der zerstörungsfreien Prüfverfahren zur Ermittlung von Eigenspannungen in technischen Bauteilen geben [PEITER 1992] und [HAUK 1997]. Ultraschallverfahren sind vergleichsweise neue Verfahren, die die nichtlineare Akustoelastizität ausnutzen und durch die Verbesserung der Messtechnik erst seit ca. 30 Jahren relevante technische Anwendung finden.

Mit Anwendung der nichtlinearen Akustoelastizität auf die Ultraschallausbreitung [HUGHES & KELLY 1953] unter Verwendung der Elastizitätstheorie finiter Deformationen [MURNAGHAN 1951] wird eine weitere Möglichkeit aufgezeigt, Verzerrungen bzw. Spannungen in metallischen Materialien zu bestimmen. Unabhängig davon liefern [GOLDBERG 1961] und [TOUPIN & BERNSTEIN 1961] die gleichen Ergebnisse wie [HUGHES & KELLY 1953]. Grundlage der Ultraschallspannungsanalyse ist die Auswertung von Ausbreitungsgeschwindigkeiten elastischer Wellen. Der Verzerrungs- bzw. Spannungszustand eines Festkörpers verändert die Ausbreitungsgeschwindigkeiten von elastischen Wellen. Dieser akusto-elastische Effekt kann mit Hilfe der elastischen Konstanten zweiter und dritter Ordnung beschrieben werden. Durch Nutzung mehrerer Wellenarten oder durch Nutzung einer Wellenart mit konstant gehaltenem Abstand zwischen Sender und Empfänger reduziert sich die Messaufgabe auf das experimentelle Bestimmen der Laufzeit von Ultraschallwellen. Zur Ausnutzung des kleinen akusto-elastischen Effekts in der Größenordnung  $10^{-3}$  ist es notwendig, die Laufzeit mit einer Auflösung von 1 in  $10^4$  oder in einer absoluten Auflösung im ns-Bereich messtechnisch zu erfassen.

Da die Schallgeschwindigkeit von der Dichte und den elastischen Materialkennwerten abhängig ist, sind alle entlang einer Prozesskette auftretenden Einflüsse, die diese beiden materialspezifischen Eigenschaften verändern können, bei der Spannungsanalyse zu berücksichtigen. Zur Spannungsanalyse ist die Trennung dieser Einflüsse notwendige Voraussetzung. Das gilt insbesondere für die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit, die den spannungsfreien Bauteilzustand beschreibt. Unter den Gefügeständen sind im Hinblick auf die Spannungsanalyse im Wesentlichen der Einfluss von lokalen Veränderungen der Härte, Martensitgehalt, Grobkornbildung oder lokal begrenzte plastische Verformung aufgrund vorangegangener inhomogener mechanischer und/oder thermischer Einflüsse zu korrigieren. Die Textur, also die nicht statistische Verteilung der Orientierungen der Kristallite in einem vielkristallinen Werkstoff, im Wesentlichen eine Folge der Formgebung von Bauteilen, lässt sich in vielen Fällen hinreichend genau beschreiben, oder wie auch später gezeigt wird, durch zusätzliche Messungen von dem Einfluss der Spannungen separieren. Die Bauteiltemperatur verändert das elastische Verhalten in bekannter linearer Art und lässt sich aufgrund eines für viele Stähle bestätigten Temperaturkoeffizienten von etwa 1,1 ‰ Laufzeitänderung pro 10 K Temperaturunterschied korrigieren.

Zusammenfassende Darstellungen über Grundlagen und Umsetzungen zur praktischen Anwendung der Ultraschallspannungsanalyse in Stählen und Aluminiumlegierungen geben unter anderem [PAO ET AL. 1984], [ALLEN ET AL. 1984] [THOMPSON ET AL. 1996], [BRAY & STANLEY 1997] oder auch [SCHNEIDER 2000].

Aufgrund der Verfügbarkeit anderer Prüfverfahren hat das Ultraschallverfahren bisher keine breite Anwendung gefunden. Gründe dafür sind der kleine Messeffekt und die Tatsache, dass im

Unterschied zu den Röntgen- und teilzerstörenden Verfahren die Ultraschallverfahren zur quantitativen Spannungsanalyse nicht nur die Kenntnis der elastischen Konstanten zweiter Ordnung, Elastizitäts-, Schubmodul und/oder Querkontraktionszahl, sondern auch die Kenntnis der elastischen Konstanten dritter Ordnung notwendig ist. Weiterhin sind in vielen Fragestellungen des Maschinenbaus hoch orts- und/oder tiefenaufgelöste Spannungswerte zur Beurteilung von oberflächenverbessernden Behandlungen oder zur bruchmechanischen Bewertung von Bauteilen oder Bauteilabschnitten von Interesse. Die Ultraschallverfahren liefern immer einen Mittelwert über den Spannungszustand oder über die Spannungskomponente im durchschallten Volumenbereich von einigen  $\text{cm}^3$ .

Die zerstörungsfreie Spannungsanalyse als Werkzeug in der Qualitätssicherung technischer Bauteile erfordert gerätetechnische Lösungen, die in automatisierten Anwendungen einsetzbar sind. Diesbezüglich werden gemäß des zu analysierenden Spannungszustands die Ultraschallverfahren in folgenden Applikationen erfolgreich angewandt:

- Einaxialer Spannungszustand: Es gibt automatisierte Lösungen zur Bestimmung von Spannungen in neuen Eisenbahnschienen sowie zur Bestimmung von Vorspannkräften in Schrauben und Bolzen.
- Zweiachiale Volumenspannungen: Es existieren automatisierte Geräte zur Bestimmung der Spannungen in Eisenbahnrädern.
- Zweiachiale Oberflächenspannungszustände: Es gibt halbautomatisierte Systeme zur Charakterisierung oberflächennaher Spannungen an Wellen, Läufern, Zylindern und in- sowie um Schweißnähte in Blechen.
- Zwei-, dreiachiale Volumenspannungen: Es gibt halbautomatisierte Systeme zur Messung der Ultraschall-Laufzeiten; die Auswertung erfolgt manuell.

Der Vollständigkeit halber sind exemplarisch nachfolgend konkrete Gerätelösungen aufgeführt: Das erste handelsübliche, halbautomatische Ultraschallgerät wird von [BROKOWSKI & DEPUTAT 1985] gebaut und ist zur Bestimmung von Spannungen in Eisenbahnschienen optimiert, worauf auch das später eingeführte DEBBIE-System [DEBRO 1995] für den Einsatz vor Ort an Eisenbahnrädern basiert. Bezüglich der Spannungszustände in dünnen Blechen stellen [FUKUOKA ET AL. 1993] eine auf der Ultraschall-Resonanzmethode aufbauende gerätetechnische Umsetzung vor. Eine zur Spannungsanalyse vollständig automatisierte zeit- und ortskontinuierliche Laufzeitmessung erlaubt das von [HERZER & SCHNEIDER 1989] am Markt eingeführte AUSTRA-Gerät.

Häufigste Anwendung automatisierter Ultraschallverfahren war lange Zeit die Ermittlung von Spannungen in Eisenbahnrädern. Das UER-System von [SCHNEIDER ET AL. 1994] kann zur vollautomatisierten Analyse der Spannungsprofile entlang der Höhe des Radkranzes eingesetzt werden. Die batteriebetriebene Entwicklungsstufe UER-T [SCHNEIDER & HERZER 1998] ist an die

Randbedingungen des Einsatzes am stehenden Zug angepasst. Der entwickelte UES-Typ [SCHNEIDER 1998] ist für die Anwendung an neuen Schienen nach dem Rollrichten sowie für die Detektion der Längsspannungen im Gleis während der Verkehrsbelastung geeignet.

### 1.3 Ziele und Gliederung der Arbeit

Dieser Arbeit liegen insbesondere zwei Intentionen zugrunde:

1) Die den akusto-elastischen Effekt ausnutzenden Verfahren der Ultraschall-Eigenstressanalyse sind in einer Softwareroutine praxisrelevant zu erweitern und wissenschaftlich umzusetzen. Dabei sind zu berücksichtigen:

- Eine menügeführte Vorgehensweise, die eine logische Abfolge inhaltlich gegeneinander abgegrenzter Module und Sequenzen beinhaltet. Ausgehend von gemessenen Laufzeiten werden quantitative Spannungswerte ausgegeben.
- Die Separierung der Gefüge- bzw. Textureinflüsse auf die Ultraschallwellengeschwindigkeiten.
- Die Auswertung einaxialer Zugversuche zur Berechnung der akusto-elastischen Konstanten, der elastischen Konstanten dritter Ordnung und der in die Auswertbeziehungen eingehenden Wichtungsfaktoren.

2) Auf Grundlage der mit den Ultraschallverfahren bestimmten Spannungswerte an den einzelnen Messpositionen ist ein geschlossenes Spannungsprofil im technischen Bauteil zu erzeugen.

- Sowohl komplette Bauteile als auch Bauteilabschnitte sind abzubilden.
- Die modellierte Geometrie ist durch Vernetzungsalgorithmen in Finite Elemente zu diskretisieren. Strukturdiskretisierung und Elementdefinition sind wesentliche Bestandteile der Darstellung.
- Herleitung und numerisch stabile Implementierung einer geeigneten Rekonstruktionsmethode, die den Anforderungen der vorliegenden Problemstellung genügt.
- Die rekonstruierten Spannungszustände sind zu bewerten.

Daraus ergibt sich folgende Gliederung der vorliegenden Arbeit:

- Grundlagen der Akustoelastizitätstheorie und Eigenstressanalyse mittels Ultraschallverfahren

Der vollständigen Darstellung halber werden die Grundlagen der Ultraschall-Eigenstressanalyse in metallischen Materialien erläutert.

- Umsetzung der Ultraschall-Eigenstressanalyse in einer Softwareroutine

Im nächsten Schritt wird die Implementierung der Ultraschallverfahren zur geführten Eigenstressanalyse in einer wissensbasierten Softwareroutine dargestellt. Dabei sind die einzelnen Module gegeneinander abgegrenzt und umgesetzte sequentielle Vorgehensweisen aufgezeigt.

- Rekonstruktion eines Spannungsprofils, das den im Bauteil vorliegenden statischen Spannungszustand abbildet. Ausgangspunkt sind bekannte Spannungen an diskreten Positionen.

Vor dem spannungsanalytischen Hintergrund sind relevante Rekonstruktionsmethoden herzuleiten und/oder zu identifizieren, numerisch umzusetzen und in konkreter Anwendung gegeneinander zu bewerten.

- Die Anwendung der Ultraschall-Eigenstressanalyse wird unter Einbeziehung der entwickelten Softwareroutine und rekonstruierter Spannungsflächen an technischen Bauteilen aufgezeigt.

- Zusammenfassende Darstellung der erzielten Verbesserungen

#### **1.4 Neu erzielte Verbesserungen**

Der vorher skizzierte Stand zur Anwendung der Ultraschall-Eigenstressanalyse ist durch die vorliegende Arbeit um folgende Verbesserungen erweitert:

- Neu ist die wissensbasierte und menügeführte Softwareroutine ULTRASONIC RESIDUAL STRESS ANALYSIS (USRSA), die aus experimentell gemessenen Ultraschallwellenlaufzeiten die korrespondierende Spannungsberechnung automatisiert durchführt.

- Neu ist das direkte automatische Einlesen und Weiterverarbeiten experimentell ermittelter Messdaten.

- Neu ist die Schnittstelle zur Übergabe der berechneten Variablen für weiterführende Betrachtungen.

- Neu sind diskrete Module, die bekannte und publizierte Einflüsse auf die Ultraschallwellenausbreitung menügeführt separieren und damit eine reproduzierbare Spannungsanalyse vereinfachen:

- Auswertung einaxialer Zugversuche zur Bestimmung materialspezifischer elastischer Materialkennwerte.
- Bestimmung von Schallwellengeschwindigkeiten, die den spannungsfreien Zustand charakterisieren.

- Trennung von örtlichen Einflüssen unterschiedlicher Gefügestände in gemessenen Schallwellenlaufzeiten durch Korrektur mit der Härte.
- Neu im Rahmen der Ultraschall-Eigenstressanalyse ist, dass geschlossene Spannungsprofile den statischen Bauteilzustand abbilden. Grundlage sind diskrete, an den Messpositionen ermittelte Eigenstressungen.
- Neu ist die Herleitung inklusive numerischer Umsetzung der als Membranmodell bezeichneten Rekonstruktionsmethode. Im mechanisch übertragenen Sinn wird die Rekonstruktionsfläche näherungsweise durch eine Membran im Zwischenraum der Stützwerte unter Beachtung der Mess- und Spannungssituation abgebildet. Das Ergebnis sind approximierten Flächen bezüglich der eingehenden Stützwerte.
- Neu ist der direkte Vergleich mehrerer Rekonstruktionsmethoden zur Erzeugung stetiger Flächen in der spannungsanalytischen Anwendung. Dazu sind publizierte Methoden bezüglich der Anforderungen umgesetzt, um numerisch stabile Ergebnisse zu erzeugen.
- Neu ist die Erkenntnis, dass die Rekonstruktionsmethoden Interpolation mit radialen Basisfunktionen, NATURAL NEIGHBOR Interpolation und Approximation durch das Membranmodell prinzipiell für Anwendungen innerhalb der Ultraschall-Eigenstressanalyse geeignet sind.

## 2 Grundlagen der Akustoelastizität

Die Grundlagen beschränken sich auf die elastische Wellenausbreitung in metallischen Festkörpern. Elastische Wellen in deformierbaren Medien, auch als akustische- oder Schallwellen bezeichnet, sind sowohl zeitlich als auch örtlich periodische Bewegungen, wobei sich Phasenzustand, Impuls und Schwingungsenergie der Welle im Raume ausbreiten. Dabei führen die an der Wellenbewegung beteiligten einzelnen Teilchen nur eine periodische Schwingung durch mechanische Kopplung um eine Ruhelage aus, so dass kein Massentransport stattfindet. Umfangreiche Ausführungen über die akustische Wellenausbreitung in Festkörpern sind [MUSGRAVE 1970], [WASLEY 1973], [DIEULESAINT & ROYER 1980], [AULD 1990] zu entnehmen.

Der akusto-elastische Effekt beschreibt den Einfluss von Verzerrungen auf die Schallgeschwindigkeit unter Zuhilfenahme der elastischen Konstanten zweiter und dritter Ordnung. Der kontinuumsmechanische Ansatz überlagert die Verzerrungen einer sich ausbreitenden Schallwelle mit den im Festkörper vorhandenen Verzerrungen.

In diesem Kapitel wird zunächst auf die kontinuumsmechanische Darstellung eingegangen. Dabei wird insbesondere auf die Notwendigkeit der nichtlinearen Elastizität als theoretische Grundlage der Akustoelastizität hingewiesen. Dem schließt sich die Darstellung der akusto-elastischen Konstitutivgleichungen an, die das an Voraussetzungen geknüpfte Ausbreiten der Schallwellen mathematisch beschreiben.

### 2.1 Kontinuumsmechanische Formulierung

**Festkörperkonfigurationen.** In der Überlagerung der infinitesimalen Verzerrung einer Schallwelle mit einem im Festkörper vorhandenen Verzerrungszustand, lassen sich hinsichtlich des unverzerrten Festkörpers energetisch drei unterschiedliche Konfigurationen bzw. Deformationszustände (siehe Bild 2.1) gegeneinander abgrenzen. Die natürliche Grundkonfiguration (NATURAL-Konfiguration) ist durch einen verzerrungs- bzw. spannungsfreien Festkörperzustand gekennzeichnet. In der Referenzkonfiguration (INITIAL-Konfiguration) ist der Körper durch innere Verzerrungen statisch (vor-) deformiert. Eine additiv überlagerte Wellenbewegung deformiert den Körper weiter in die Momentankonfiguration (FINAL-Konfiguration).

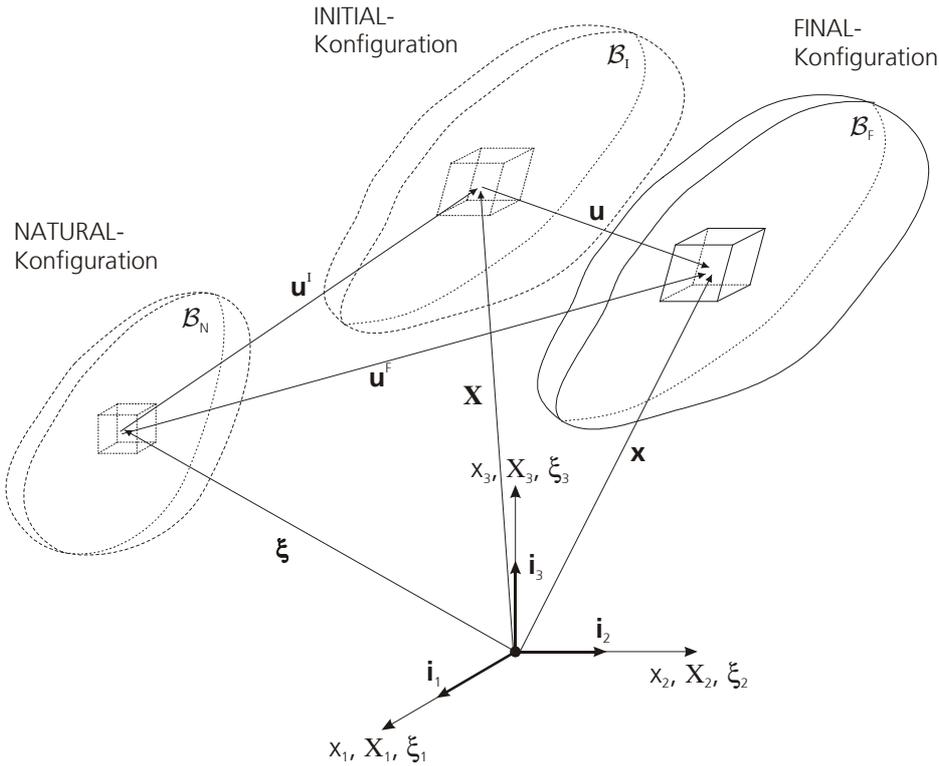


Bild 2.1: Festkörperkonfigurationen der Akustoelastizitätstheorie.

**Nichtlineare Elastizität.** Die quantitative Beschreibung der Änderungen von Schallwellenlaufzeiten bzw. -geschwindigkeiten als Funktion der im Festkörper auftretenden Verzerrungen sowie dessen elastischen Materialkonstanten erfordert die nichtlineare Elastizität als theoretische Grundlage. Die Akustoelastizitätstheorie berücksichtigt dabei Verzerrungseffekte höherer Ordnung bei der Schallwellenausbreitung.

Der akusto-elastischen Wellenausbreitung in deformierbaren Festkörpern liegen thermodynamisch reversible adiabate bzw. isotherme Zustandsänderungen zugrunde. Demnach entfällt infolge einer konstanten Entropie bzw. Temperatur deren Einfluss in der Verzerrungsenergiedarstellung [DIEULESAINT & ROYER 1980]. Ohne mechanische Dissipation wird das elastische Materialverhalten allein durch die Verzerrungen charakterisiert. Diese alleinige Abhängigkeit erlaubt für elastische Deformationen eine TAYLOR-Reihenentwicklung der Verzerrungsenergie  $\Phi$  in den LAGRANGE-Verzerrungskomponenten  $E_{ij}$  um ein gegebenes Ausgangsniveau  $\Phi(0)$ .

$$\begin{aligned} \Phi(E_{ij}) = \Phi(0) &+ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E_{ij}} \right) E_{ij} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right) E_{ij} E_{kl} \\ &+ \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl} \partial E_{mn}} \right) E_{ij} E_{kl} E_{mn} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Der lineare Term repräsentiert einen konstanten Verzerrungszustand, der bereits im Festkörper

vorhanden ist. Der quadratische Term

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (2.2)$$

beinhaltet die elastischen Konstanten zweiter Ordnung (SOEC). Im kubischen Term

$$C_{ijklmn} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial E_{ij} \partial E_{kl} \partial E_{mn}} \quad (2.3)$$

sind die elastischen Konstanten dritter Ordnung (TOEC) enthalten.

## 2.2 Akusto-elastische Konstitutivgleichungen

Die Beschreibung der Akustoelastizität basiert auf den theoretischen Grundlagen von [HUGHES & KELLY 1953] sowie [TOUPIN & BERNSTEIN 1961], siehe Anhang Teil A. In einem elastischen Festkörper können sich längs einer Kristallrichtung drei verschiedene, voneinander unabhängige Wellenarten – zwei Transversalwellen und eine Longitudinalwelle – mit spezifischen Wellengeschwindigkeiten ausbreiten, deren Schwingungsrichtungen jeweils senkrecht aufeinander stehen [TOUPIN & BERNSTEIN 1961], [MUSGRAVE 1970]. Allerdings liegen nur für spezielle Ausbreitungsrichtungen, wie die Symmetrieachsen anisotroper Festkörper oder die Hauptrichtungen vorhandener Verzerrungs- bzw. Spannungszustände, reine Wellenmoden vor. D.h. die Teilchen der reinen Longitudinal- oder Transversalwellen schwingen alle in einer Ebene parallel- oder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Für einen in der INITIAL-Konfiguration vorliegenden Hauptverzerrungszustand mit den LAGRANGE-Hauptdehnungen  $E_i^I, E_j^I, E_k^I$ , in dem die Hauptdehnungsrichtungen mit den kartesischen Koordinatenachsen  $(i, j, k)$  zusammenfallen, führt die Lösung der Bewegungs- bzw. Wellengleichung auf die nachfolgenden Gleichungen (2.4) der akustischen Phasengeschwindigkeiten reiner Longitudinal- ( $v_{ii}$ ) und Transversalwellen ( $v_{ij}, v_{ik}$ ):

$$\begin{aligned} \rho_0 v_{ii}^2 &= \lambda + 2\mu + \left[ (2l + \lambda)(E_i^I + E_j^I + E_k^I) + (4m + 4\lambda + 10\mu)E_i^I \right] \\ \rho_0 v_{ij}^2 &= \mu + \left[ (\lambda + m)(E_i^I + E_j^I + E_k^I) + 4\mu E_i^I + 2\mu E_j^I - \frac{1}{2}n E_k^I \right] \\ \rho_0 v_{ik}^2 &= \mu + \left[ (\lambda + m)(E_i^I + E_j^I + E_k^I) + 4\mu E_i^I + 2\mu E_k^I - \frac{1}{2}n E_j^I \right], \end{aligned} \quad (2.4)$$

$(i, j, k) = (1, 2, 3) = (I, II, III)$  .

Zu diesem Ergebnis gelangen sowohl [HUGHES & KELLY 1953] als auch [TOUPIN & BERNSTEIN 1961] bei gleichen Randbedingungen. Darin enthalten sind die beiden LAMÉ-Konstanten zweiter Ordnung  $\lambda, \mu$  und die drei MURNAGHAN-Konstanten dritter Ordnung  $l, m, n$  [MURNAGHAN 1951]. (In der Literatur verwendete elastische Konstanten dritter Ordnung sind im Anhang Teil A zusammengefasst.) Die jeweiligen Wellenmoden sind orthogonal zueinander polarisiert. Der erste

Index kennzeichnet die Ausbreitungs-, der zweite die Schwingungsrichtung.

**Transformation dreiaxialer Spannungszustand.** In der isotropen NATURAL-Konfiguration sind Spannungs- und Verzerrungstensor koaxial, d.h. die Achsen der Hauptspannungs- und Hauptverzerrungsrichtungen fallen zusammen [LEIPHOLZ 1967]. Erst unter dem Einfluss eines tensoriellen Spannungsfelds zeigt ein anfänglich isotroper Festkörper Anisotropie. Zur Formulierung des Gleichungssystems (2.4) in Abhängigkeit der Hauptspannungen werden die LAGRANGE-Hauptdehnungen  $E_i^I$  durch die infinitesimalen linearisierten EULER-Hauptdehnungen  $\varepsilon_i^I$  approximiert [HUGHES & KELLY 1953], [TRUESDELL 1962]. Deren Substitution mittels HOOKESCHEM Gesetz

$$E_i^I \approx \varepsilon_i^I = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\sigma_1^I + \sigma_2^I + \sigma_3^I) + \frac{1}{2\mu}\sigma_i^I \quad (2.5)$$

liefert das Gleichungssystem (2.6), das aus (2.4) durch Transformation auf das in Bild 2.2 dargestellte dreiaxiale Hauptspannungsfeld hervorgeht. (2.4) bzw. (2.6) sind Grundlage der in Kapitel 3 diskutierten Ultraschall-Eigenstressanalyse.

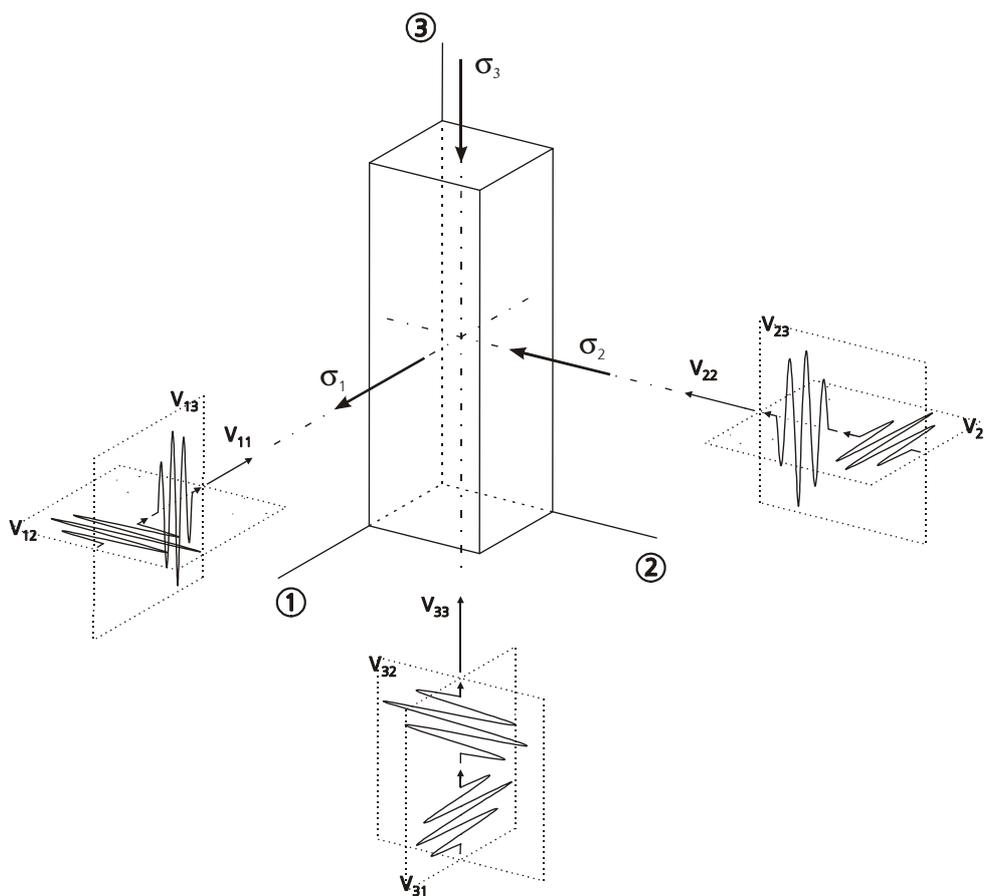


Bild 2.2: Longitudinal- und linear polarisierte Transversalwellen im triaxialen Hauptspannungsfeld.

$$\begin{aligned}
\rho_0 v_{ii}^2 &= \lambda + 2\mu + \left[ \frac{2\mu(2l + \lambda) - (4m + 4\lambda + 10\mu)\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_i^I + \sigma_j^I + \sigma_k^I) \right. \\
&\quad \left. + \frac{4m + 4\lambda + 10\mu}{2\mu} \sigma_i^I \right] \\
\rho_0 v_{ij}^2 &= \mu + \left[ \frac{4\mu(m - 2\lambda) + n\lambda}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_i^I + \sigma_j^I + \sigma_k^I) \right. \\
&\quad \left. + 2\sigma_i^I + \sigma_j^I - \frac{1}{4} \frac{n}{\mu} \sigma_k^I \right] \\
\rho_0 v_{ik}^2 &= \mu + \left[ \frac{4\mu(m - 2\lambda) + n\lambda}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_i^I + \sigma_j^I + \sigma_k^I) \right. \\
&\quad \left. + 2\sigma_i^I + \sigma_k^I - \frac{1}{4} \frac{n}{\mu} \sigma_j^I \right] \\
&\quad (i, j, k) = (1, 2, 3) = (I, II, III)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

**Akustische Doppelbrechung.** Die Eigenschaft einer im isotropen Festkörper von Ausbreitungs- und Polarisationsrichtung unabhängigen Transversalwelle geht beim Auftreten eines tensoriellen Spannungsfeldes verloren. Die Teilchen einer ebenen Transversalwelle, die sich entlang einer Hauptspannungsrichtung ausbreitet, schwingen elliptisch, wenn die Schwingungs- bzw. Polarisationsrichtung nicht mit einer der beiden anderen Hauptachsen zusammenfällt. Dieser Polarisationszustand kann durch das vektorielle Aufspalten in zwei voneinander unabhängige Wellenkomponenten beschrieben werden, die jeweils parallel zu einer Hauptrichtung polarisiert sind [HERING ET AL. 1992]. Eine ebene Transversalwelle bleibt nur dann linear polarisiert, wenn ihre Polarisationsrichtung mit einer Hauptrichtung zusammenfällt. Dieser, zur optischen Doppelbrechung analoger Effekt ist, in der Literatur als akustische Doppelbrechung bezeichnet. Erstmals in dieser expliziten Form von [BERGMAN & SHABENDER 1958] und [BENSON & REALSON 1959] experimentell nachgewiesen und von [CRECRAFT 1967] zur Spannungsanalyse angewandt.

### 3 Eigenspannungsanalyse mittels Ultraschallverfahren

Die dieser Arbeit zugrunde liegende- und in diesem Kapitel vorgestellte Methode der Eigenspannungsanalyse an metallischen Werkstoffen durch Auswertung von Laufzeitmessungen bezieht sich auf [SCHNEIDER 1997]. Das Potenzial dieser Methodik bezüglich industrieller Anwendung wird von [SCHNEIDER 2000] unter Berücksichtigung materialspezifischer Einflüsse weiterentwickelt. Daraus resultieren Anforderungen zur Automatisierung. Die Ultraschall-Eigenspannungsanalyse ist durch Ergebnisse im Vergleich zu anderen etablierten Verfahren und in bekannten Spannungszuständen validiert.

Durch Ultraschallverfahren können nur Makroeigenspannungen im durchschallten Volumenbereich bestimmt werden. Makroeigenspannungen oder Eigenspannungen I. Art entsprechen dem Mittelwert der in den Kristalliten bzw. Körnern und Phasen eines makroskopischen Volumenbereichs wirkenden Spannungen. Der Volumenbereich muss genügend viele Kristallite umschließen. Bei einer Veränderung dieses Spannungszustands treten makroskopische Formänderungen auf [BEHNKEN 1997]. Detailliertere Ausführungen über die Entstehung von Eigenspannungen oder deren Bewertung liefern [TIETZ 1982], [MACHERAUCH & HAUKE 1983] oder [SCHOLTES 1991].

Die folgenden Betrachtungen bilden das Grundgerüst der in der automatisierten Softwareroutine implementierten Methodik. Nach den Grundgleichungen der Eigenspannungsanalyse sowie der experimentellen Bestimmung der elastischen Konstanten wird auf den Einfluss der Textur eingegangen. Der Zusammenfassung folgt die Beschreibung der Messtechnik.

#### 3.1 Konstitutivgleichungen

**Hauptspannungsdifferenz.** Wie auch anhand Bild 3.2 zu sehen, verändern sich die beiden Geschwindigkeiten  $v_{ij}$  und  $v_{ik}$  der Transversalwellen sowohl gegenläufig als auch unterschiedlich stark mit der Dehnung bzw. Spannung. In Abhängigkeit einer in  $j$ -Richtung wirkenden und größer werdenden Zugspannung nimmt im ebenen Spannungszustand in den meisten Fällen  $v_{ij}$  ab und  $v_{ik}$  zu. Diese gegenläufige Änderung kann durch

$$v_{ij} + v_{ik} \approx 2v_T \quad (3.1)$$

genähert werden [SMITH 1963].  $v_T$  ist die Transversalwellengeschwindigkeit im anfänglich isotropen spannungsfreien Zustand. An dieser Stelle sei nochmals die Voraussetzung erwähnt, dass die Hauptspannungsrichtungen in der INITIAL-Konfiguration mit den indizierten Koordinatenrichtungen zusammenfallen. Aus den Gleichungen (2.6) folgt mit (3.1) die relative Änderung

der Transversalwellengeschwindigkeiten bezogen auf den spannungsfreien Zustand als Funktion der Hauptspannungsdifferenz

$$\frac{v_{ij} - v_{ik}}{v_T} = S(\sigma_j - \sigma_k) \quad (3.2)$$

mit

$$S = \frac{4\mu - n}{8\mu^2} \quad (3.3)$$

als spannungsakustische Konstante. Der Bezug der relativen Geschwindigkeitsänderung in (3.2) auf  $v_{ik}$  anstelle von  $v_T$  führt auf den Zusammenhang [SCHNEIDER ET AL. 1981]

$$\frac{v_{ij} - v_{ik}}{v_{ik}} = S(\sigma_j - \sigma_k) . \quad (3.4)$$

Der Umstand, dass die beiden Transversalwellen den gleichen Laufweg zurücklegen, macht die Spannungsanalyse unabhängig von der absoluten Schallgeschwindigkeit; damit auch unabhängig von der absoluten Genauigkeit der Laufwegmessung, die oftmals in Anwendungen nicht möglich ist. Nach Ersetzen der Geschwindigkeiten durch entsprechende Laufzeiten und Laufwege erhält man

$$\frac{t_{ik} - t_{ij}}{t_{ij}} = \frac{4\mu - n}{8\mu^2} (\sigma_j - \sigma_k) , \quad (3.5)$$

worin lediglich die Laufzeiten der Transversalwellen als Messgrößen eingehen.

**Oberflächennahe Hauptspannungsdifferenz.** Im Gegensatz zu den sich im Volumen ausbreitenden Schallwellen können auch Oberflächenwellen zur Analyse oberflächennaher Spannungen herangezogen werden. Der Spannungseinfluss auf die Geschwindigkeit einer oberflächennahen  $SH_0$ -Welle ist identisch mit der Spannungsabhängigkeit der linear polarisierten Transversalwelle. Eine  $SH_0$ -Welle ist der dispersionsfreie, symmetrische Mode einer Transversalwelle, die in einer Ebene parallel zur Oberfläche schwingt. Bereits [BIOT 1940] bzw. [BIOT 1965] erkannte in der Darstellung

$$\rho_0 (v_{ij}^2 - v_{ji}^2) = \sigma_i - \sigma_j , \quad (3.6)$$

dass sich die akustische Ausbreitung unter Eigenspannungen vom spannungsfreien Zustand unterscheidet. Die Anwendung von (3.6) bezüglich gegeneinander vertauschter Ausbreitungs- und Schwingungsrichtungen wird durch den Einsatz von  $SH_0$ -Wellen ermöglicht. Die relative Geschwindigkeitsänderung

$$\frac{v_{ij} - v_{ji}}{v_T} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_i - \sigma_j) \quad (3.7)$$

erhält man aus den Gleichungen (2.6) (siehe Anhang Teil B), wobei sowohl Ausbreitungs- als auch Schwingungsrichtung mit den Hauptspannungsachsen übereinstimmen. Die Dicke der da-

bei analysierbaren oberflächennahen Schicht liegt in der Größenordnung weniger Millimeter. Durch Änderung der Normierung auf  $v_{ij}$  anstelle von  $v_T$  folgt:

$$\frac{t_{ji} - t_{ij}}{t_{ij}} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_i - \sigma_j) . \quad (3.8)$$

Damit wird der Zugang zur Hauptspannungsdifferenz im zweidimensionalen Oberflächenspannungszustand aus der Laufzeitmessung von  $SH_0$ -Wellen ermöglicht. Gleichung (3.8) gilt unabhängig einer möglichen orthorhombischen Textur, falls die Symmetrie- und Hauptspannungsachsen übereinstimmen.

**Hauptspannungskomponenten.** Durch den Bezug auf den spannungsfreien Zustand mit der Longitudinal- ( $v_L$ ) und Transversalwellengeschwindigkeit ( $v_T$ ) folgt aus den Gleichungen (2.6) für die relative Änderung der Phasengeschwindigkeiten von Longitudinal- ( $v_{ii}$ ) und linear polarisierten Transversalwellen ( $v_{ij}, v_{ik}$ ) [SCHNEIDER 1997]:

$$\begin{aligned} \frac{v_{ii} - v_L}{v_L} &= \frac{A}{C} \sigma_i + \frac{B}{C} (\sigma_j + \sigma_k) \\ \frac{v_{ij} - v_T}{v_T} &= \frac{D}{K} \sigma_i + \frac{H}{K} \sigma_j + \frac{F}{K} \sigma_k \\ \frac{v_{ik} - v_T}{v_T} &= \frac{D}{K} \sigma_i + \frac{F}{K} \sigma_j + \frac{H}{K} \sigma_k \quad (i,j,k) = (1,2,3) = (I,II,III) . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die darin enthaltenen Wichtungs- bzw. Vorfaktoren (3.10) sind Linearkombinationen der elastischen Konstanten zweiter und dritter Ordnung, deren Verknüpfung den Einfluss der jeweiligen Hauptspannung wichten.

$$\begin{aligned} A &= 2(\lambda + \mu)(4m + 2l + 5\lambda + 10\mu) - 2\lambda(2l + \lambda) \\ B &= (2l + \lambda)(\lambda + 2\mu) - \lambda(4m + 2l + 5\lambda + 10\mu) \\ C &= 4\mu(\lambda + 2\mu)(3\lambda + 2\mu) \\ D &= 2(\lambda + \mu)(m + \lambda + 4\mu) - \lambda(2m - \frac{1}{2}n + 2\lambda + 2\mu) \\ H &= 2(\lambda + \mu)(m + \lambda + 2\mu) - \lambda(2m - \frac{1}{2}n + 2\lambda + 4\mu) \\ F &= 2(\lambda + \mu)(m + \lambda - \frac{1}{2}n) - \lambda(2m + 2\lambda + 6\mu) \\ K &= 4\mu^2(3\lambda + 2\mu) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vor Anwendung der Gleichungen (3.9) an technischen Bauteilen müssen die Hauptspannungsrichtungen bekannt sein. In vielen Bauteilen lassen sich die Hauptspannungsrichtungen schon aus der Geometrie oder durch Fertigungsprozessschritte ableiten. Darüber hinaus können die Hauptrichtungen durch das Ausnutzen der akustischen Doppelbrechung oder durch Laufzeitmessungen bestimmt werden.

### 3.2 Experimentelle Bestimmung der elastischen Konstanten

SOEC. Ultraschallverfahren erlauben die Bestimmung der LAMÉ-Konstanten  $\lambda, \mu$  unter Ausnutzung der Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho v_L^2 &= \lambda + 2\mu \\ \rho v_T^2 &= \mu \end{aligned} \quad (3.11)$$

in homogenen (quasi-) isotropen Festkörpern. Die Gleichungen (3.11) können auch zur Bestimmung der SOEC entlang einer Texturrichtung herangezogen werden, wenn die Polarisationsrichtung der Transversalwelle mit der Texturrichtung übereinstimmt. Die Messung der Schallgeschwindigkeit ist mit einem Fehler  $\leq 1\%$  behaftet; der Fehler der Dichtebestimmung liegt bei 1%. Die Toleranz in den Konstanten von etwa  $\leq 1-2\%$  wird primär von der Dichte verursacht.

**TOEC und akusto-elastische Konstanten (AEC).** Mittelungen der TOEC aus den Einkristallkonstanten liefern generell keine brauchbaren Werte [JOHNSON 1986], [WASSERBÄCH 1990]. Die Ultraschalltechnik ermöglicht die experimentelle Ermittlung der TOEC über den akusto-elastischen Effekt. [EGLE & BRAY 1976] haben im uniaxialen Zugversuch die Änderungen der Schallgeschwindigkeiten von Longitudinal- und Transversalwellen gemessen und Übereinstimmung mit der Theorie von [HUGHES & KELLY 1953] gefunden. Demnach lassen solche Messungen bei bekanntem Dehnungs- bzw. Spannungszustand die Bestimmung der TOEC zu. Zur Quantifizierung des akusto-elastischen Effekts werden die so genannten akusto-elastischen Konstanten (AEC) definiert, die relativen Änderungen der Schallgeschwindigkeiten abgeleitet nach den Komponenten des Dehnungstensors:

$$AEC_{ii} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{v_{ii} - v_L}{v_L} \right], \quad AEC_{ij} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{v_{ij} - v_T}{v_T} \right]. \quad (3.12)$$

Im  $(\Delta v/v, \varepsilon)$ -Diagramm aus Bild 3.2, in dem die relativen Änderungen der Ultraschallwellengeschwindigkeiten über der elastischen Dehnung aufgetragen sind, entsprechen die AEC den Steigungen. Im elastischen Bereich sind die  $(\Delta v/v, \varepsilon)$ -Änderungen Geraden. Die Messeffekte in der Größenordnung ‰ sind unterschiedlich stark ausgeprägt, abhängig von Ausbreitungs- und Schwingungsrichtung der Schallwelle, bezogen auf die Beanspruchungsrichtung.

Im uniaxialen Spannungsfeld von Bild 3.1 und den sich damit einstellenden Hauptdehnungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon$  folgen mit der Querkontraktionszahl  $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$  die drei Beziehungen (3.13) zur Berechnung der TOEC  $l, m, n$  [EGLE & BRAY 1976].

$$l = \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{\mu} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda} AEC_{ii} + \frac{4(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} \left( \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} AEC_{ik} + AEC_{ij} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right]$$

$$m = \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} [\lambda AEC_{ik} + 2(\lambda + \mu) AEC_{ij}] - 2\mu \tag{3.13}$$

$$n = \frac{8\mu(\lambda + \mu)}{3\lambda + 2\mu} [AEC_{ij} - AEC_{ik}] - 4\mu$$

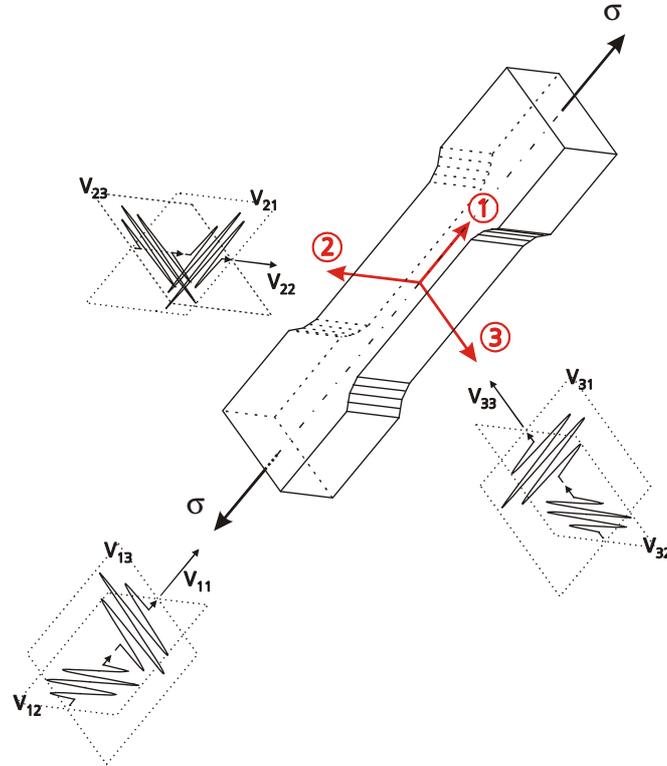


Bild 3.1: Longitudinal- und linear polarisierte Transversalwellen im einaxialen Zugspannungsfeld.

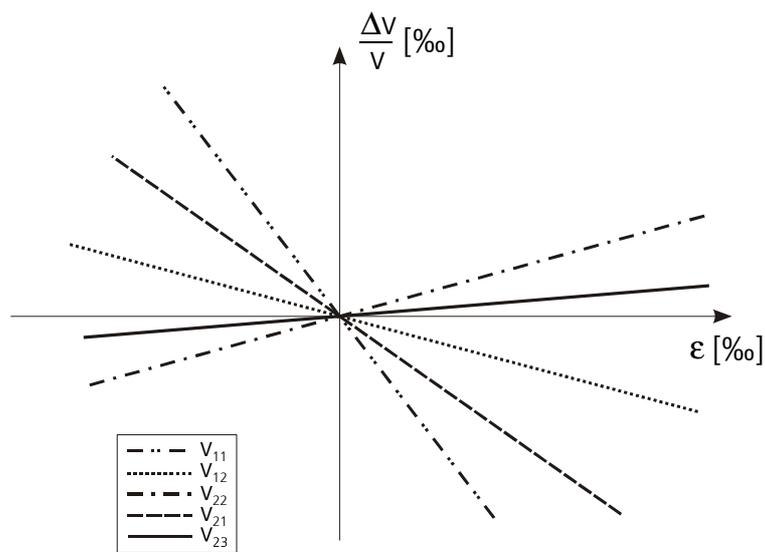


Bild 3.2: Prinzipielle Verläufe relativer Schallgeschwindigkeitsänderungen der Wellenmoden als Funktion der Dehnung.

Für den Laufzeit- bzw. Geschwindigkeitsbezug der AEC ist zu beachten, dass sich der Laufweg der Schallwelle aufgrund von Dehnungen verändert. Beanspruchungen innerhalb der linear elastischen Proportionalitätsgrenze ermöglichen die Darstellung der Laufwegänderungen mit dem HOOKESCHEN Gesetz. Dementsprechend sind im Zugversuch die AEC direkt über Messungen der Laufzeitänderungen zugänglich. Der Bezug auf die Schallwellenlaufzeiten führt zu der um den Korrekturterm Querkontraktionszahl erweiterten AEC-Beziehung (siehe Anhang Teil B):

$$AEC_{ii} \approx -\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{t_{ii} - t_L}{t_L} \right] - \nu, \quad AEC_{ij} \approx -\frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{t_{ij} - t_T}{t_T} \right] - \nu \quad (3.14)$$

Die Bestimmung der AEC-Werte ist die größte Unsicherheit in der gesamten Fehlerfortpflanzung bei der Spannungsanalyse. Diese Unsicherheit ergibt sich aus den messtechnischen Schwierigkeiten hinsichtlich des kleinen Effekts, der geringen Dehnungen innerhalb der linearen Elastizität und der geringen Ortsauflösung des Prüfkopfs an der Probe im Zugversuch.

### 3.3 Fehlerrechnung

**Spannungskomponenten.** Der Fehler bei der Ermittlung von Schallgeschwindigkeiten liegt in der Größenordnung ‰ und kann gegenüber dem in der Größenordnung von 5-20 % liegenden, dominierenden Einfluss der schwankenden Wichtungsquotienten vernachlässigt werden. Dadurch folgt für den Fehler  $\Delta\sigma_{j/k}$  der beiden Spannungskomponenten  $\sigma_{j/k}$  in Gleichung (4.1), die von der in Kapitel 4 beschriebenen Softwareroutine zur Analyse in quasi zweiaxialen Spannungszuständen ausgewertet wird:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{j/k} &= \Delta\sigma_{j/k} \left( \Delta H/K^{(j)}, \Delta F/K^{(j)}, \Delta H/K^{(k)}, \Delta F/K^{(k)}, \Delta \frac{V_{ij} - \cancel{V_T^{ij}}}{V_T^{ij}}, \Delta \frac{V_{ik} - \cancel{V_T^{ik}}}{V_T^{ik}} \right) \\ &\rightsquigarrow \Delta\sigma_{j/k} \approx \Delta\sigma_{j/k} \left( \Delta H/K^{(j)}, \Delta F/K^{(j)}, \Delta H/K^{(k)}, \Delta F/K^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Die absoluten Fehlerschranken in der Fehlerfortpflanzung erhält man somit durch die ausschließliche Betrachtung der partiellen Ableitungen nach den Wichtungsquotienten:

$$\begin{aligned} |\Delta\sigma_j| &\leq \left| \frac{\partial\sigma_j}{\partial H/K^{(j)}} \right| \Delta H/K^{(j)} + \left| \frac{\partial\sigma_j}{\partial F/K^{(j)}} \right| \Delta F/K^{(j)} \\ &\quad + \left| \frac{\partial\sigma_j}{\partial H/K^{(k)}} \right| \Delta H/K^{(k)} + \left| \frac{\partial\sigma_j}{\partial F/K^{(k)}} \right| \Delta F/K^{(k)} \\ |\Delta\sigma_k| &\leq \left| \frac{\partial\sigma_k}{\partial H/K^{(k)}} \right| \Delta H/K^{(k)} + \left| \frac{\partial\sigma_k}{\partial F/K^{(k)}} \right| \Delta F/K^{(k)} \\ &\quad + \left| \frac{\partial\sigma_k}{\partial H/K^{(j)}} \right| \Delta H/K^{(j)} + \left| \frac{\partial\sigma_k}{\partial F/K^{(j)}} \right| \Delta F/K^{(j)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die sich daraus ergebenden Fehlergleichungen sind im Anhang Teil B aufgeführt.

**Wichtungsquotienten.** Die Wichtungsfaktoren bzw. -quotienten unterliegen den Abweichungen der elastischen Konstanten. Die TOEC werden, wie zuvor in Kapitel 3.2 erläutert, mit den im einaxialen Zugversuch bestimmten AEC berechnet und verursachen im Vergleich zu den SOEC den dominierenden Fehler. Die Schwankungen in der Reproduzierbarkeit der Messergebnisse prägen zusammen mit den systematischen Fehlern im Zugversuch die Fehlerfortpflanzung der einzelnen Messfehler. Zur Berechnung der TOEC sowie deren Fehler werden die möglichen Kombinationen vorhandener AEC-Werte berücksichtigt. Aus den Kombinationen vorhandener AEC-Werte erhält man die wiederholungsfreie Anzahl  $M_j$  der nach Gleichung (3.13) berechneten  $TOEC_j$ . Als TOEC-Wert wird der Mittelwert des jeweiligen Intervalls der Länge  $M_j$  mit der halben Intervallbandbreite als maximale Fehlerschranke herangezogen:

$$\begin{aligned} \overline{TOEC_j} &= \frac{1}{M_j} \sum_{k=1}^{M_j} TOEC_{j_k} \\ \Delta \overline{TOEC_j} &= \frac{1}{2} |\max[TOEC_j] - \min[TOEC_j]|, \quad TOEC_j = l, m, n \end{aligned} \quad (3.17)$$

Unter der Vorgabe, die Fehler der SOEC zu vernachlässigen und nur die Fehlerschranken der TOEC einzubeziehen, nehmen die absoluten Fehler der Wichtungsfaktoren (3.10) folgende Form an

$$\begin{aligned} |\Delta A| &\leq 4\mu \Delta l + 8(\lambda + \mu) \Delta m \\ |\Delta B| &\leq 4\mu \Delta l + 4\lambda \Delta m \\ \Delta C &\approx 0 \\ |\Delta D| &\leq 2\mu \Delta m + \frac{1}{2}\lambda \Delta n \\ |\Delta H| &\leq 2\mu \Delta m + \frac{1}{2}\lambda \Delta n \\ |\Delta F| &\leq 2\mu \Delta m + (\lambda + \mu) \Delta n \\ \Delta K &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

woraus wiederum die in (3.16) eingehende Fehlerschranken der Wichtungsquotienten resultieren:

$$\begin{aligned} |\Delta A/C| &\leq |1/C| \Delta A + \cancel{|A/C^2| \Delta C} \\ |\Delta B/C| &\leq |1/C| \Delta B + \cancel{|B/C^2| \Delta C} \\ |\Delta D/K| &\leq |1/K| \Delta D + \cancel{|D/K^2| \Delta K} \\ |\Delta H/K| &\leq |1/K| \Delta H + \cancel{|H/K^2| \Delta K} \\ |\Delta F/K| &\leq |1/K| \Delta F + \cancel{|F/K^2| \Delta K} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Der absolute Fehler der spannungsakustischen Konstante  $S$  aus (3.3) beträgt:

$$|\Delta S| \leq \frac{1}{8\mu^2} \Delta n \quad (3.20)$$

### 3.4 Einfluss der Textur

Textur ist die wesentliche Ursache für richtungsabhängiges Materialverhalten. Die am häufigsten vorkommende Texturart ist die orthorhombische Textur, die durch drei aufeinander senkrecht stehende Symmetrierichtungen gekennzeichnet ist. Bei vorliegender Textur sind die Orientierungen der Kristallite bzw. Körner in vielkristallinen Werkstoffen nicht statistisch verteilt. Dadurch verursacht Textur auch eine elastische Anisotropie.

Bezüglich der Spannungsanalyse sind die Richtungsabhängigkeiten der elastischen Eigenschaften bei vorhandener Textur auf zwei Arten zu korrigieren: 1. Die Schallgeschwindigkeit, die den spannungsfreien Zustand beschreibt, ist abhängig von den Textursymmetrierichtungen und unterschiedlich im Bezug auf diese Richtungen. 2. Die akusto-elastischen Konstanten sind ebenfalls abhängig von den Textursymmetrierichtungen und unterschiedlich entlang dieser Richtungen. Der Einfluss der Textur auf die akusto-elastischen Konstanten bzw. die elastischen Konstanten dritter Ordnung ist in der Regel kleiner als der Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit, die den spannungsfreien Zustand beschreibt.

Die Effekte der durch Textur verursachten elastischen Anisotropie überlagern sich dem akusto-elastischen Effekt und sind voneinander unabhängig. Diese Tatsache haben unter anderem [SULLIVAN & PAPADAKIS 1961], [ROLLINS ET AL. 1962], [HSU 1974] oder [FUKUOKA & TODA 1977] experimentell nachgewiesen. Für eine quantitative Spannungsanalyse sind die in den Laufzeitdaten vorhandenen Einflüsse von Spannungen und Textur voneinander zu separieren. Ein Auszug publizierter Arbeiten zur Trennung der elastischen Anisotropieanteile ist im Anhang Teil B gegeben.

#### 3.4.1 Bestimmung texturabhängiger Schallgeschwindigkeiten

**ODF-berechnete Schallgeschwindigkeiten.** Durch die Orientierungsverteilungsfunktion (ODF) können Aussagen über die statistische Häufigkeit des Auftretens einzelner Kristallorientierungen im Gefüge gemacht werden. Anhand solcher Texturinformationen lassen sich die Orientierungen der Kristallite bzw. Körner in texturierten Polykristallen quantitativ beschreiben [BUNGE 1965], [ROE 1965]. Die ODF kann aus gemessenen Polfiguren unterschiedlicher Kristallrichtungen bestimmt werden [BUNGE 1984]. [SPIES & SCHNEIDER 1987], [SPIES & SCHNEIDER 1990] nutzen dies, um die Bewegungsgleichung der Schallwellen unter den Voraussetzungen

- kubische Kristallsymmetrie,
- orthorhombische Textursymmetrie und
- linear elastisches Materialverhalten

zu lösen. Für das kubisch-orthorhombische Symmetriesystem sind die aus der ODF-Reihendarstellung stammenden drei Expansionskoeffizienten vierter Ordnung  $C_4^{11}, C_4^{12}, C_4^{13}$  hinreichend, die Texturabhängigkeit der elastischen Konstanten wiederzugeben [BUNGE 1965]. Mit

der

- VOIGT-Näherung [VOIGT 1928] der  $C_i^{mn}$ -gewichteten elastischen Konstanten

führt das auf die Longitudinal- und Transversalwellengeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \rho(v_L^{ii})^2 &= c_{11} - c \left[ \frac{2}{5} - \frac{1}{70} \sqrt{\frac{7}{3}} \frac{8}{3} C_4^{11} \right] \\ \rho(v_T^{jj})^2 &= c_{44} + c \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{70} \sqrt{\frac{7}{3}} \left( \frac{4}{3} C_4^{11} - \frac{2}{3} \sqrt{5} C_4^{12} \right) \right] \\ \rho(v_T^{kk})^2 &= c_{44} + c \left[ \frac{1}{5} - \frac{1}{70} \sqrt{\frac{7}{3}} \left( \frac{4}{3} C_4^{11} + \frac{2}{3} \sqrt{5} C_4^{12} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

im spannungsfreien texturierten Material. Für die reinen Schallwellen in Abhängigkeit der Expansionskoeffizienten und kubischen Einkristallkonstanten  $c_{11}, c_{12}, c_{44}$  bzw. des Anisotropiefaktors  $c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$  fallen sowohl Ausbreitungs- als auch Schwingungsrichtungen mit den Textursymmetrierichtungen – Walz- (j), Quer- (k) und Dickenrichtung (i) – zusammen.

**Gleichgewichtsbedingung-Methode.** Bei dieser Methode werden die mechanischen Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen über das gesamte Bauteilvolumen ausgenutzt. Dazu sind Messspuren erforderlich, die näherungsweise das gesamte Bauteilvolumen abdecken. Im gesamten Bauteil befinden sich die Spannungskomponenten im mechanischen Gleichgewicht, deren Werte integrieren sich zu Null.

Entlang jeder Messspur wird der Mittelwert aus den Schallgeschwindigkeiten einer Transversalwelle gebildet, die entlang einer Textursymmetrierichtung, beispielsweise die j-Richtung, schwingt und sich über die Bauteildicke (i-Richtung) ausbreitet. Eine weitere Mittelung über alle messspurspezifischen Mittelwerte liefert den von der Textur in j-Richtung verursachten Geschwindigkeitswert  $v_T^{jj}$ , der den spannungsfreien Zustand charakterisiert. Bei diesem spannungsfreien Vergleichswert wird aufgrund der Textur die Geschwindigkeit  $v_T^{kk}$  einer in k-Richtung schwingenden- und sich über die Bauteildicke ausbreitenden Transversalwelle ungleich  $v_T^{jj}$  sein. Wichtige Voraussetzung dabei ist, dass entlang einer Messspur homogene Textur und homogenes Gefüge vorliegen.

Der arithmetische Mittelwert ist ausreichend, wenn entlang einer Messspur die Stützstellenanzahl der Transversalwellengeschwindigkeiten hinreichend eng und genau gegeben sind, wie in Bild 3.3 (a) mit äquidistanten Stützstellen dargestellt. Ist das nicht der Fall, wie in Bild 3.3 (b) dargestellt, muss der integrale Mittelwert über der Messspur herangezogen werden. Durch das Integral wird der Einfluss vorhandener Werte gewichtet. Die verwendete Transversalwellengeschwindigkeit ist dann gleich dem Ordinatenwert, für den das Integral (3.22) Null wird.

$$\int_x (v_{ij} - v_T^{jj}) dx = 0 \quad (3.22)$$

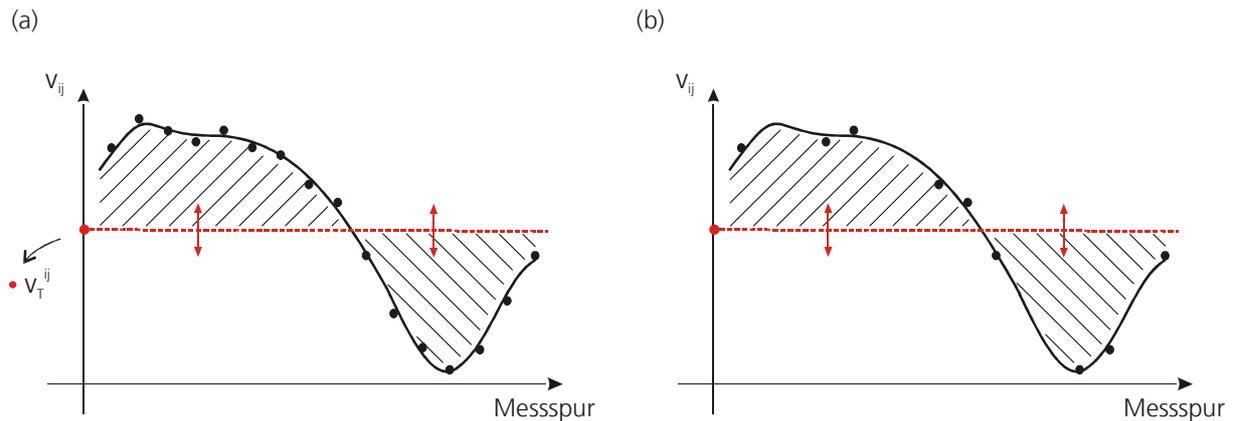


Bild 3.3: Mittelwertbildung aus den Transversalwellengeschwindigkeiten entlang einer Messspur: (a) arithmetischer-, (b) integraler Mittelwert.

**Alternative Schallgeschwindigkeitsbestimmung.** In erster Näherung können die Geschwindigkeiten am Rand und an den Ecken bestimmt werden, an denen die Spannungskomponenten sehr klein sind. Ebenso kann dazu eine spannungsarme Referenzstelle im Bauteil genutzt werden. Wenn aus dem Bauteil entnommene Proben oder identische Referenzteile zur Verfügung stehen, lassen sich an ihnen die Geschwindigkeiten nach dem Spannungsarmglühen bestimmen.

### 3.5 Zusammenfassung

Die Konstitutivgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeiten und Spannungen. Darin eingehende Wichtungsfaktoren, die ausdrücken wie stark sich eine Schallgeschwindigkeit durch den Einfluss einer Spannung verändert, setzen sich aus Kombinationen der elastischen Konstanten zweiter und dritter Ordnung zusammen. Die elastischen Konstanten dritter Ordnung lassen sich aus den im Zugversuch ermittelten akusto-elastischen Konstanten bestimmen.

Die Schallgeschwindigkeit, die den spannungsfreien Zustand beschreibt, wird von dem Gefügestand, der Textur und der Bauteiltemperatur beeinflusst. Die Gefügestände, die sich beispielsweise durch die Härte charakterisieren lassen, beeinflussen im Wesentlichen nur die Schallgeschwindigkeit, nicht die elastischen Konstanten dritter Ordnung. In der überwiegenden Anzahl der technischen Anwendungen verändern sich die Gefügeparameter, wie z.B. Härte, Martensitgehalt oder plastische Vordehnung, innerhalb geringer Grenzen, so dass man in erster Näherung den Einfluss von Veränderungen dieser Parameter auf die Bestimmung der elastischen Konstanten dritter Ordnung vernachlässigen kann [SCHNEIDER 2000]. Die elastischen Konstanten dritter Ordnung sind jedoch von Textur und Bauteiltemperatur beeinflusst. Die in der unmittelba-

ren Umgebung der Raumtemperatur durch Temperatur verursachte Änderung der elastischen Konstanten dritter Ordnung liegen in der gleichen Größenordnung wie die Einflüsse der Textur, etwa in der Größenordnung 10 %, abhängig vom Material (siehe auch Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2).

Die Stärke der Textur kann durch die relative Geschwindigkeitsänderung  $(v_{ij} - v_{ik})/v_{ik}$  der Transversalwellen zur Unterscheidung der j- und k-Richtung angegeben werden. Zum Einfluss der Textur auf die Wichtungsfaktoren sei angemerkt, dass nach bisherigen Ergebnissen bei relativer Geschwindigkeitsänderung von kleiner etwa 2,5 ‰ in Aluminium und kleiner etwa 1,5 ‰ in Stahl die Richtungsabhängigkeit mit ungefähr  $\pm 10$  % vom Mittelwert vernachlässigt werden kann [SCHNEIDER 2000], was auch an den Beispielen in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 ersichtlich ist.

Wichtige Voraussetzung ist, dass entlang einer Messspur homogenes Gefüge vorliegt. Ansonsten ist eine ortsabhängige Korrektur unter zuvor festgestellter Korrelation zwischen Gefügeparameter und Schallgeschwindigkeit erforderlich. In vielen technischen Bauteilen werden Veränderungen des Gefügestands durch thermische und/oder mechanische Einflüsse verursacht. Mechanische Einflüsse verursachen lokale plastische Verformungen, die lokale Aufhärtungen zur Folge haben. Thermische Einflüsse verursachen ein härter oder weicher werdendes Material. Dadurch lassen sich die meisten Gefügeveränderungen, die auch das elastische Materialverhalten und damit auch die Schallgeschwindigkeiten beeinflussen, mit Hilfe der lokalen Härteänderungen charakterisieren. Bild 3.4 zeigt die lineare Abnahme der Schallgeschwindigkeit von Longitudinal- und Transversalwelle mit zunehmender BRINELL-Härte in einem Stahlwerkstoff. Die Steigung der Geraden gibt an, wie stark sich die Schallgeschwindigkeit einer Wellenart mit der Härte in diesem Stahl ändert. In diesem Beispiel beträgt die mittlere Abnahme etwa 0,27 ‰ pro 10 HB bei der Transversalwelle und etwa 0,29 ‰ pro 10 HB bei der Longitudinalwelle. In Kapitel 4.5 wird ein Softwaremodul vorgestellt, mit dem der Einfluss der Härte korrigiert werden kann.

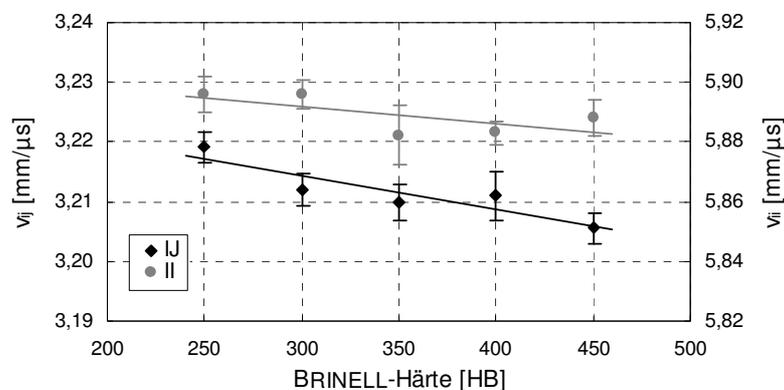


Bild 3.4: Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Longitudinal- ( $v_{||}$ ) und linear polarisierter Transversalwelle ( $v_{ij}$ ) als Funktion der BRINELL-Härte in einem Stahlwerkstoff.

### 3.6 Messtechnik

Der zur Spannungsanalyse ausgenutzte akusto-elastische Effekt liegt in der Größenordnung  $10^{-3}$ , so dass adäquate Auflösungen in der Messung von Laufzeiten gegeben sein müssen. Durch die kombinierte Nutzung zumindest zweier Wellenarten, die sich entlang des gleichen Weges ausbreiten, aber aufgrund unterschiedlicher Polarisation unterschiedlich stark von dem zu analysierenden Spannungszustand beeinflusst werden, oder durch die Nutzung von Sende- und Empfangsprüfköpfen mit bekanntem und unverändert bleibendem Abstand, wird die Messaufgabe auf das Messen der Schallwellenlaufzeit vereinfacht.

Bei der in Bild 3.5 schematisch dargestellten Impuls-Echo-Überlagerungstechnik [PAPADAKIS 1973], [HSU 1974] durchläuft der vom Prüfkopf ausgehende Schallimpuls die Materialdicke und erfährt an der Rückwand eine Reflektion. Ein Teil der reflektierten Welle wird vom Prüfkopf ausgekoppelt und in ein elektrisches Signal umgewandelt. Die übrige Schallenergie wird wieder reflektiert und durchschallt erneut die Materialdicke. Dadurch entsteht eine Rückwandechofolge, von der zwei Echosignale unter Einstellung einer Zeitverzögerung  $\Delta t$  phasengerecht überlagert werden können.

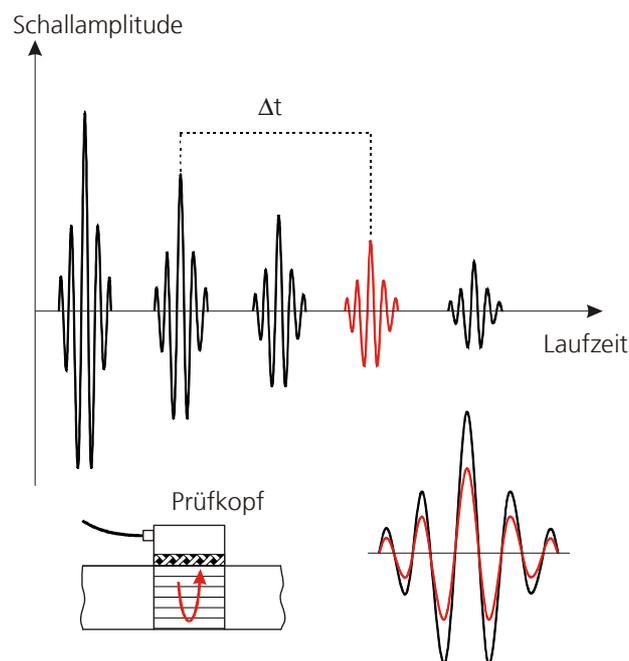


Bild 3.5: Schematische Darstellung der Impuls-Echo-Überlagerungstechnik.

Durch das Bilden der Kreuzkorrelationsfunktion [BROCH 1970] zwischen zwei Echosignalen kann ebenfalls die Laufzeit gemessen werden. Dabei wird das Ergebnis umso genauer, je ähnlicher die beiden herangezogenen Echosignale sind; beispielsweise das erste und zweite Rückwandecho. Für den Fall dass die Pulsform des zweiten Rückwandechos aber schon so entartet ist, dass es nicht mehr zur Kreuzkorrelation herangezogen werden kann, besteht auch die Möglichkeit, die

Pulsform des ersten Rückwandechos in einem bekannten und unverändert bleibenden zeitlichen Abstand zum Sendesignal abzuspeichern und die Kreuzkorrelationsfunktion zwischen dem abgespeicherten Signal als Referenz und dem tatsächlichen ersten Rückwandecho zu bilden.

In der Anordnung nach Bild 3.6 breiten sich die Schallwellen in der oberflächennahen Zone des Bauteils zwischen Sende- und Empfangsprüfkopf aus. Die Laufzeit wird zwischen dem Sende- bzw. Triggersignal und dem Empfangssignal gemessen. Für eine exakte Laufzeitbestimmung, die sich ausschließlich auf den Laufweg im Bauteil selbst bezieht, sind dabei vorhandene Vorlaufzeiten (Offset) zu korrigieren. Vorlaufzeiten können durch zwischen Prüfkopf und Prüfkörper eingebrachte Plexiglaskeile oder durch die Zeit, die der Prüfkopf zur Erzeugung der Welle benötigt, entstehen.

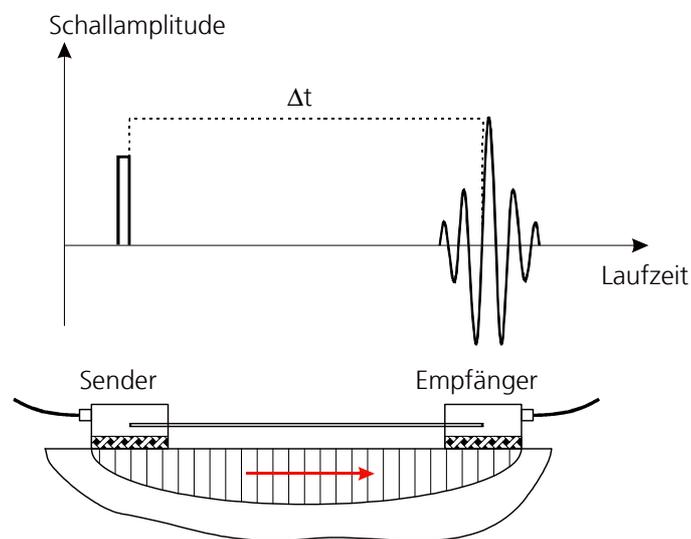


Bild 3.6: Schematische Darstellung der Sende-Empfangstechnik.

Abhängig vom Material, dem zu durchschallenden Volumen und der Größe des Prüfbereichs können Piezo- [KRAUTKRÄMER & KRAUTKRÄMER 1990] oder elektromagnetische Ultraschallprüfköpfe [ALERS ET AL. 1991], [SALZBURGER & HÜBSCHEN 1996], [HIRAO & OGI 2003] eingesetzt werden.

Die von [HERZER & SCHNEIDER 1990] patentierte Laufzeitmessung gewährleistet eine Genauigkeit der Einzelmessung von  $\pm 2$  ns, unabhängig von der Gesamtlaufzeit zwischen den ausgewählten Echos bzw. dem Trigger- und Empfangssignal.

Ein Ultraschallpuls wird infolge frequenzabhängiger Streuung der höherfrequenten Anteile mit zunehmendem Laufweg hin zu tiefen Frequenzen entmischt; die mittlere Wellenlänge wird größer. Streuung entsteht dadurch, dass technische Metalle Grenzflächen enthalten, an denen sich die Schallimpedanz ändert. Die Impedanzänderung an Korngrenzen in Metallen wird durch die unterschiedlich zueinander orientierten Kristallrichtungen verursacht. Eingesetzte Schallpulse

haben Mittenfrequenzen im Bereich 1–10 MHz. Demnach liegen in Stahlwerkstoffen mit einer charakteristischen Transversalwellengeschwindigkeit um  $3,2 \text{ mm}/\mu\text{s}$ , die Wellenlängen der Transversalwellen im Bereich  $3,2 - 0,32 \text{ mm}$ . Transversalwellen werden stärker gestreut als Longitudinalwellen. Die mittleren Korndurchmesser gängiger Stähle von Grobkorn der Korngröße 1 bis Feinkorn der Korngröße 10 erstrecken sich nach DIN EN ISO 643 im Intervall  $0,25 - 0,011 \text{ mm}$ . [HIRSEKORN 1982] berechnet näherungsweise die durch Streuung verursachte Dispersion bei der Schallwellenausbreitung. Demzufolge liegen innerhalb dieses Spektrums von Schallwellenlänge bezogen auf den mittleren Korndurchmesser die dispersiven Schallgeschwindigkeitsänderungen in der Größenordnung kleiner  $10^{-3}$ . Bei der Spannungsanalyse werden frequenzabhängige Streueinflüsse in den meisten Stählen und Aluminiumlegierungen vernachlässigt, wenn die Mittenfrequenzen im oben angegebenen Bereich liegen [SCHNEIDER 2000]. Der Streuung wird zudem insofern begegnet, als dass sowohl bei der Bestimmung der elastischen Konstanten dritter Ordnung als auch bei Messungen am Bauteil die gleiche Messtechnik eingesetzt wird.

## 4 Software-Applikation der Ultraschall-Eigenstressanalyse

Die rechnergestützte Umsetzung der Ultraschall-Eigenstressanalyse in eine Softwareroutine wird mit Hilfe der MATLAB®-Entwicklungsumgebung durchgeführt. MATLAB® als Entwicklungstool beinhaltet einen Programmiercode, der numerische Berechnungen, Visualisierungen und die Entwicklung grafischer Benutzeroberflächen ermöglicht [MATLAB 2000], [BIRAN & BREINER 1999]. Die Programmierung der Softwareroutine erfolgt auf Basis des Software-Entwicklungsprozesses EXTREME PROGRAMMING [FOWLER & BECK 2001]. Eine modulare Grundarchitektur des Systems gewährleistet die flexible Anpassung variierender Anforderungen im Zuge der Applikationsentwicklung. Die Entwicklungszyklen gestalten sich dabei derart, dass jeweils ein lauffähiges Release mit definierter Funktionalität abrufbar ist. Die funktionalen Benutzeroberflächen (Interfaces) sind auf das Wesentliche reduziert und ordnen sich in eine geführte Analyse ein. Die entwickelte Softwareroutine ist auch als Stand-Alone-Applikation kompiliert und kann unabhängig von der MATLAB®-Entwicklungsumgebung vertrieben werden.

Zunächst wird der konstitutive Rahmen vorgestellt, dem die angewendeten Grundgleichungen zugrunde liegen. Die vorliegende Arbeit richtet sich nach dem aktuellen Stand der Softwareroutine USRSA 0.3 (ULTRASONIC RESIDUAL STRESS ANALYSIS, Version 0.3). Anhand des Hauptinterfaces, innerhalb dessen die einzelnen Abschnitte/Sektionen und Module angesteuert werden können, sind die verschiedenen Analyse- bzw. Berechnungsmöglichkeiten bezüglich Datenfluss und logischer Abfolge erläutert. Dem schließt sich die detaillierte Beschreibung der einzelnen Sektionen und Module an.

### 4.1 Konstitutiver Rahmen

Bevor auf die Softwareroutine eingegangen wird, ist der konstitutive Rahmen zusammengefasst, in den sich die implementierte Ultraschall-Eigenstressanalyse eingliedert.

- **Materialvoraussetzungen.** Die Ultraschall-Eigenstressanalyse unter Anwendung der aus der Akustoelastizitätstheorie hergeleiteten Konstitutivgleichungen erlaubt die Berechnung von makroskopischen Hauptspannungen in

- metallischen Materialien kubischer Kristallsymmetrie.

Ist zusätzlich der Einfluss einer Textur auf den akusto-elastischen Effekt zu berücksichtigen, so werden

- orthorhombische Textur- bzw. Makrosymmetrie,

- homogen – zumindest entlang einer Messspur – ausgebildete Textur und

- zusammenfallende Hauptspannungs- und Textursymmetrierichtungen vorausgesetzt.

- **Hauptspannungskomponenten.** Das in der Softwareroutine umgesetzte Gleichungssystem (4.1) (siehe auch (3.9)) ermöglicht die Bestimmung der Hauptspannungskomponenten in quasi zweiaxialen Spannungszuständen. Die Ausdehnung der Körper in der Ebene sei zunächst ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sehr viel größer als ihre Dicken angenommen, so dass in erster Näherung der ebene Spannungszustand gleich dem ebenen Verzerrungszustand ist. Die hervorgehobenen Indizes ( $j,k$ ) kennzeichnen die zu unterscheidenden Symmetrierichtungen bei vorliegender Textur.

$$\begin{aligned} \frac{V_{ij} - V_T^{ij}}{V_T^{ij}} &= \frac{H^{(i)}}{K} \sigma_j + \frac{F^{(j)}}{K} \sigma_k \\ \frac{V_{ik} - V_T^{ik}}{V_T^{ik}} &= \frac{F^{(k)}}{K} \sigma_j + \frac{H^{(k)}}{K} \sigma_k \quad (i,j,k) = (1,2,3) = (I,II,III) \end{aligned} \quad (4.1)$$

- **Hauptspannungsdifferenz.** Für die Betrachtung von Hauptspannungsdifferenzen werden zum aktuellen Stand der Routine die zwei Möglichkeiten nach den Gleichungen (3.5) und (3.8) zur Verfügung gestellt.

## 4.2 Charakteristik der Softwareroutine als Expertensystem

Die Eigenschaft der Softwareroutine als Expertensystem spiegelt sich in einem sowohl entscheidungsunterstützenden- als auch wissensbasierten System wieder. Auf Grundlage der in Kapitel 3 beschriebenen Methodik wird durch Umsetzung von Wissen und Erfahrung die Spannungsanalyse durchgeführt. Als Dialogkomponenten dienen die Schnittstellen in Form dynamischer Interfaces. Messdaten werden innerhalb einzuhaltender Prozeduren durch einen vorgegebenen, regel- und anweisungsbasierenden Analyseablauf verarbeitet. Dabei müssen alle Bedingungen zwischen den Variablen erfüllt sein. Die logische Abfolge wird teilweise vom Datenfluss definiert. Ausgehend von Messdaten oder Zwischenergebnissen können alle Regeln angewandt werden, deren Voraussetzungen erfüllt sind.

Die Softwareroutine ist zur Analyse zweiaxialer Spannungszustände ausgelegt und mit einer systematisierten sowie geführten Vorgehensweise umgesetzt. Die unter anderem von [PUPPE 1991] dargestellten wesentlichen Merkmale eines Expertensystems sind wie folgt gegeben:

- Das Hintergrundwissen der Ultraschall-Spannungsanalyse ist in den vorangegangenen Kapiteln dokumentiert.
- Die modulare Grundarchitektur des Systems ermöglicht die flexible Anpassung und belie-

bige Erweiterung gekoppelter Teilsysteme.

Der implementierte Lösungsweg wird aus einer vorhandenen Teilmenge verschiedener Regeln zusammengeführt und verknüpft, deren Abarbeitung jeweils in den einzelnen Sektionen erfolgt.

- Interfaces sind nach Möglichkeit einfach, klar und übersichtlich gestaltet.
- Für die berechneten Ergebnisse ist eine Fehlerdarstellung berücksichtigt.

Das Expertensystem gewährleistet auch fachfremden Anwendern die gleichartige Durchführung der Spannungsanalyse.

### 4.3 Softwareroutine USRSA in der Gesamtdarstellung

Die einzelnen, innerhalb der Spannungsberechnung durchzuführenden Analyse- bzw. Auswerteschritte sind im USRSA-Interface in inhaltlich gegeneinander abgegrenzten Sektionen angeordnet. Die diskreten Analysesektionen können jeweils unabhängig voneinander angesteuert werden. Bild 4.1 zeigt das funktionale Design des USRSA-Interface. Die Analysesektionen ordnen sich nach dem erfahrungsbasierten Vorgehen im Gegenuhrzeigersinn um das zur Visualisierung der Daten dienende Plotfenster an.

Nachfolgend werden einige Merkmale der Softwareroutine angesprochen:

- Die Nutzung von USRSA ist zur Berechnung zweiaxialer Spannungszustände ausgelegt. Einzelne Sektionen und Module können aber auch unabhängig voneinander genutzt werden: Einlesen und Weiterverarbeiten von gemessenen Laufzeiten, Berechnung von Dicken und Schallgeschwindigkeiten, Auswertung von Zugversuchen zur Berechnung der AEC, TOEC und Wichtungsfaktoren.

- Die diskreten, voneinander unabhängigen Analysesektionen im USRSA-Interface sind über eine Option in der Menüleiste zur möglichen Aktivierung bzw. Deaktivierung anzusteuern. Innerhalb der jeweiligen Sektion können immer nur solche Funktionen aktiviert werden, die entsprechende Daten voraussetzen und sich in logischer Abfolge eingliedern. Zudem wird der logische pragmatische Ablauf durch zusätzliche Warn- und Fehlermeldungen gewährleistet.

- In jeder Sektion mit zu verarbeitenden Datenfeldern sind Funktionen vorgesehen, die eine graphische Visualisierung erlauben. Hierzu werden die Daten unter Anwahl von Anzeigeoptionen in das Plotfenster übertragen. Darüber hinaus können berechnete Dickenprofile, Schallgeschwindigkeiten und Spannungen im ASCII- und MATLAB® Binärformat abgespeichert werden.

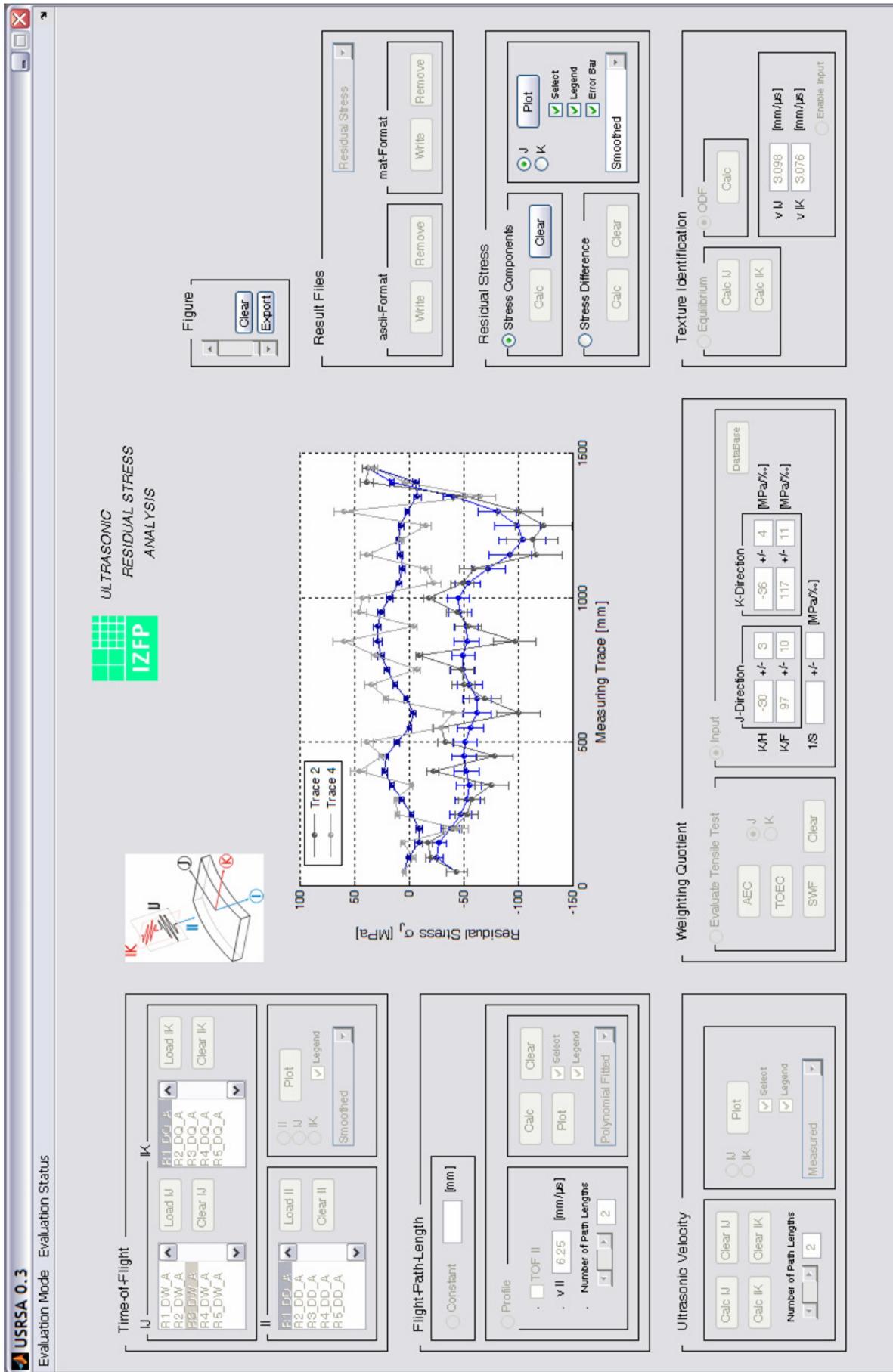


Bild 4.1: Dynamisches USRSA-Interface der Analyse- bzw. Steuersektionen.

- Die Reihenfolge der während des Einlesevorgangs importierten Dateien unterschiedlicher und spezifizierbarer Formatierungsart legt die Zugehörigkeit in den Datenfeldern fest. In der Regel beinhalten die eingelesenen Daten die gemessenen Ultraschalllaufzeiten mit den zugehörigen Messpositionen der entsprechenden Messspur. Korrespondierende und miteinander zu verknüpfende Daten unterschiedlicher Wellenmoden befinden sich an gleicher Position in den jeweiligen Datenstrukturen und werden über den Positionsindex ihrer Dateinamen identifiziert. Demnach ist nur im Einlesezyklus die korrekte Reihenfolge der zu betrachtenden Messspuren einzuhalten. In der Folge garantieren Algorithmen bei der Anwahl oder Datenverarbeitung die gegebene Zuordnung unter Ausschluss einer Fehlzuweisung.
  
- Die Eingabefelder notwendiger Daten in den Benutzeroberflächen erlauben neben der automatischen Belegung innerhalb eines Analyseablaufs auch die manuelle Eingabe
  
- Die während der Analyse zu unterscheidenden Datenarten (MEASURED – POLYNOMIAL FITTED – SMOOTHED, siehe auch Kapitel 4.4.1) sind voneinander getrennt und können in den unterschiedlichen Abschnitte separat angewählt werden.

Das in Bild 4.2 enthaltene Flussdiagramm verdeutlicht die modulare Grundarchitektur der Software-Routine und gibt den vorgegebenen Ablauf wieder. Die verwendeten Symbole und Elemente sind in der Legende erläutert. Neben dem Datenfluss ist auch die Richtung der logischen Abfolge anzusteuender Sektionen und Module aufgezeigt. Letztere ist indirekt durch benötigte bzw. zusammenlaufende Datenfelder implementiert und beinhaltet verschiedene, teils voneinander unabhängige Funktionen.

Der innere Zyklus der anwählbaren Steuersektionen bildet das dynamische USRSA-Interface ab, das die Ausführung externer Module ermöglicht. Dargestellt ist auch, über welche Sektionen und Module notwendige, aus entsprechenden externen Ereignissen stammende Daten eingelesen- oder auch nach Verarbeitung ausgegeben werden können.

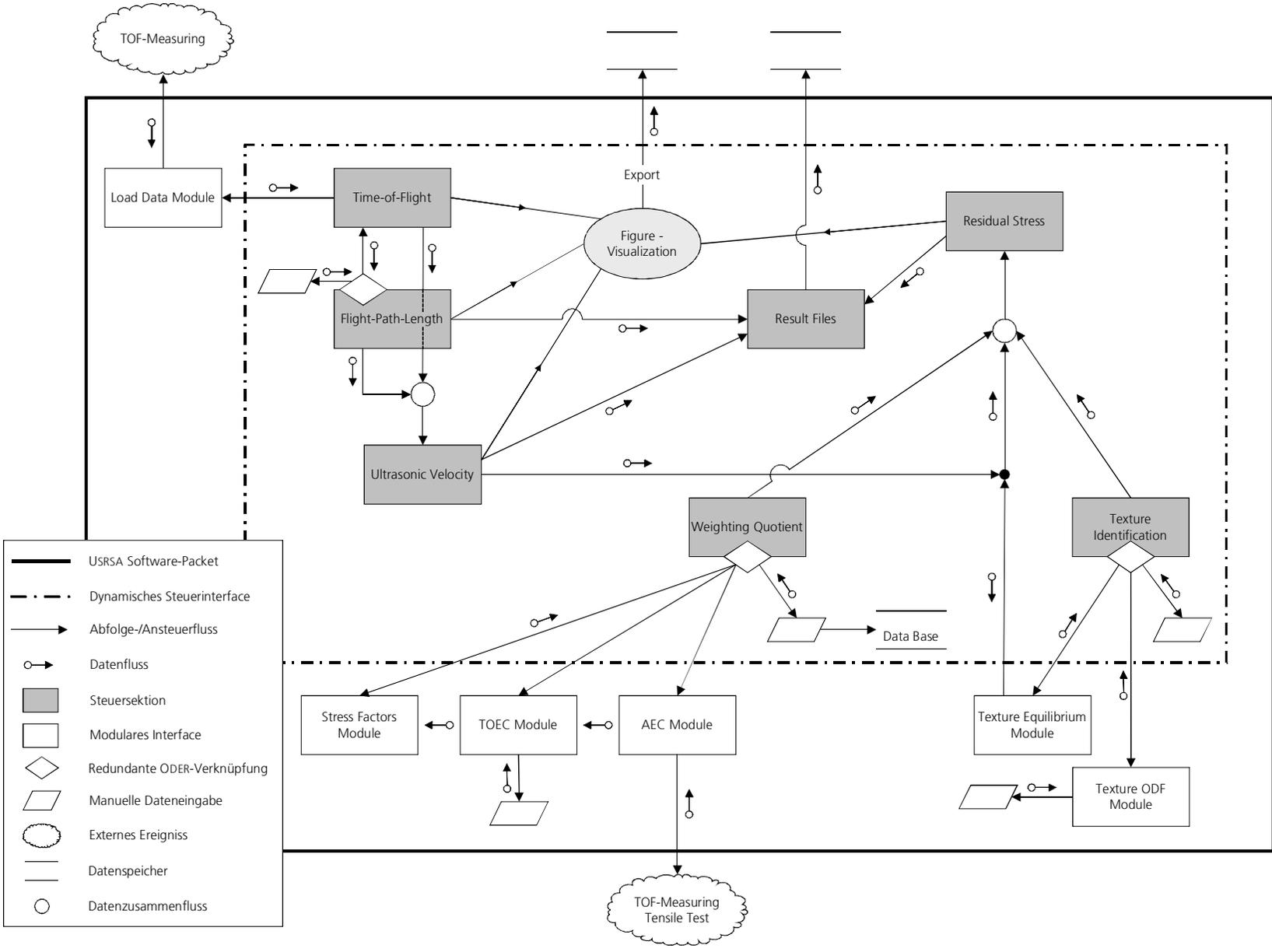


Bild 4.2: Flussdiagramm der USRSA Software routine in der Anwendung zur Ultraschall-Eigenstressanalyse.

#### 4.4 Abgrenzung der Analysesektionen

Die diskrete, voneinander unabhängige Ansteuerung der Analyse- bzw. Steuerungssektionen im USRSA-Interface erfolgt über die in Bild 4.3 geöffnete Option EVALUATION STATUS der Menüleiste. Dabei werden in der angewählten Sektion jeweils nur solche Funktionen aktiviert, die sich in den Stand der Analyse einordnen. Alle übrigen Funktionen bleiben deaktiviert. Die Anwahlmöglichkeiten sind chronologisch analog der Anordnung im Interface aufgelistet. In den folgenden Abschnitten werden die funktionellen Eigenschaften und Zusammenhänge der modularen Analyse- bzw. Steuersektionen dargestellt.

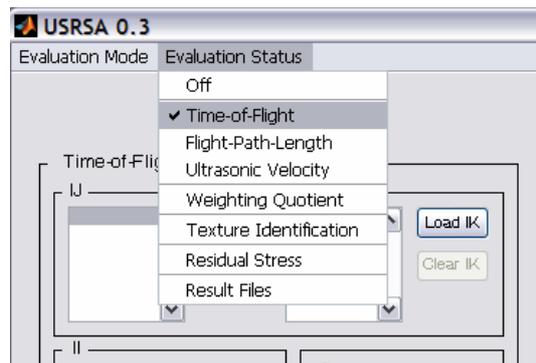


Bild 4.3: Menüauswahl zur Ansteuerung der einzelnen Sektionen im USRSA-Interface.

##### 4.4.1 TIME-OF-FLIGHT

Die TIME-OF-FLIGHT-Sektion (Bild 4.4) ermöglicht zunächst das Importieren gemessener Laufzeiten der zur Indizierung (IJ, IK) korrespondierenden linear polarisierten Transversalwellen. Die Laufzeitdaten werden über das in Bild 4.5 abgebildete LOAD DATA-Modul eingelesen. Zu den Messspuren gehörige Dateinamen werden chronologisch dem Einlesevorgang aufgelistet.

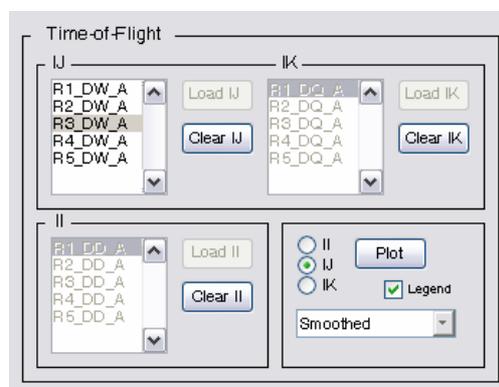


Bild 4.4: TIME-OF-FLIGHT-Sektion.

Das zu den Transversalwellen getrennt gestaltete Importieren der Laufzeiten von Longitudinal-

wellen (II) erfolgt über die FLIGHT-PATH-LENGTH-Sektion, wenn Laufweg bzw. Dicke an den Messpositionen berechnet werden. In einer ODER-Verknüpfung können eingelesene Daten der verschiedenen Wellenmoden einzeln unter den Optionen Legende und Datenart graphisch dargestellt werden.

**LOAD DATA-Modul.** Als modulare Schnittstelle zwischen USRSA-Interface und den zu importierenden Laufzeitdaten dient das LOAD DATA-Modul (Bild 4.5). Die graphische Benutzeroberfläche ist zur Orientierung und selbsterklärender Vorgehensweise in die funktionellen Abschnitte LOAD DATA, VIEW & HANDLE DATA und SAVE DATA unterteilt. Über den LOAD DATA-Abschnitt kann die gewünschte Datei mit den enthaltenen Messdaten im zuvor spezifizierten Dateiformat (DATA TYPE) angewählt und eingelesen werden. Als zusätzliche Option steht die Zuweisung der Einheiten zur Verfügung, in denen die experimentellen Messdaten aufgenommen sind.

- Die Festlegung der Einheiten an dieser Stelle ist für die sich anschließenden Berechnungen bindend.
- Die eingelesenen Dateien werden in chronologischer Reihenfolge zur Auswahl während des Einlesevorganges gespeichert. Diese einmal eingelesene, unveränderliche Reihenfolge legt die zugehörigen Indizes im Analyseablauf fest und ist bei den Einlesezyklen der verschiedenen Wellenmoden einzuhalten. Dadurch wird gewährleistet, dass miteinander zu verknüpfende Daten der jeweils gleichen Messspur bzw. Messposition kongruieren.

**Datentfernung.** Die Visualisierung der gemessenen Laufzeitdaten (MEASURED) ermöglicht gleichzeitig die Auswahl einzelner Messwerte in der Grafik. Durch Ausrichtung des Achsenkreuzes in die Nähe eines Messwertes kann dieser selektiert und für weitere Betrachtungen entfernt werden. Dadurch ist es möglich, die infolge eventueller Messfehler streuenden und im Gesamterscheinungsbild als unnatürlich erscheinenden Werte zu bereinigen.

Da die Grafik selbst keinen direkten Zugriff auf die Messwerte ermöglicht, ist der Vorgang Datentfernung mit dem Abstand  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  zweier Punkte  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  umgesetzt:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|^2} \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 . \quad (4.2)$$

Die Auswahl mit dem Achsenkreuz eines Punktes in Nähe des zu entfernenden Messwertes erzeugt einen Punkt  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  aus zugehörigem Abszissen- und Ordinatenwert, zu dem die Abstände aller aktuell visualisierten Messwerte einer Messspur der Länge  $M$  berechnet werden. Der Messwert, der den kleinsten Abstand zum Achsenwahlpunkt  $\tilde{\mathbf{x}}_s$  aufweist

$$\mathbf{x}_s = \min [d_i(\tilde{\mathbf{x}}_s, \mathbf{x}_i)] \quad , i = 1, \dots, M , \quad (4.3)$$

entspricht dem selektierten Messwert  $\mathbf{x}_s$ , farblich gelb hervorgehoben. Dieser Wert kann dann anschließend aus der Messspur entfernt werden.

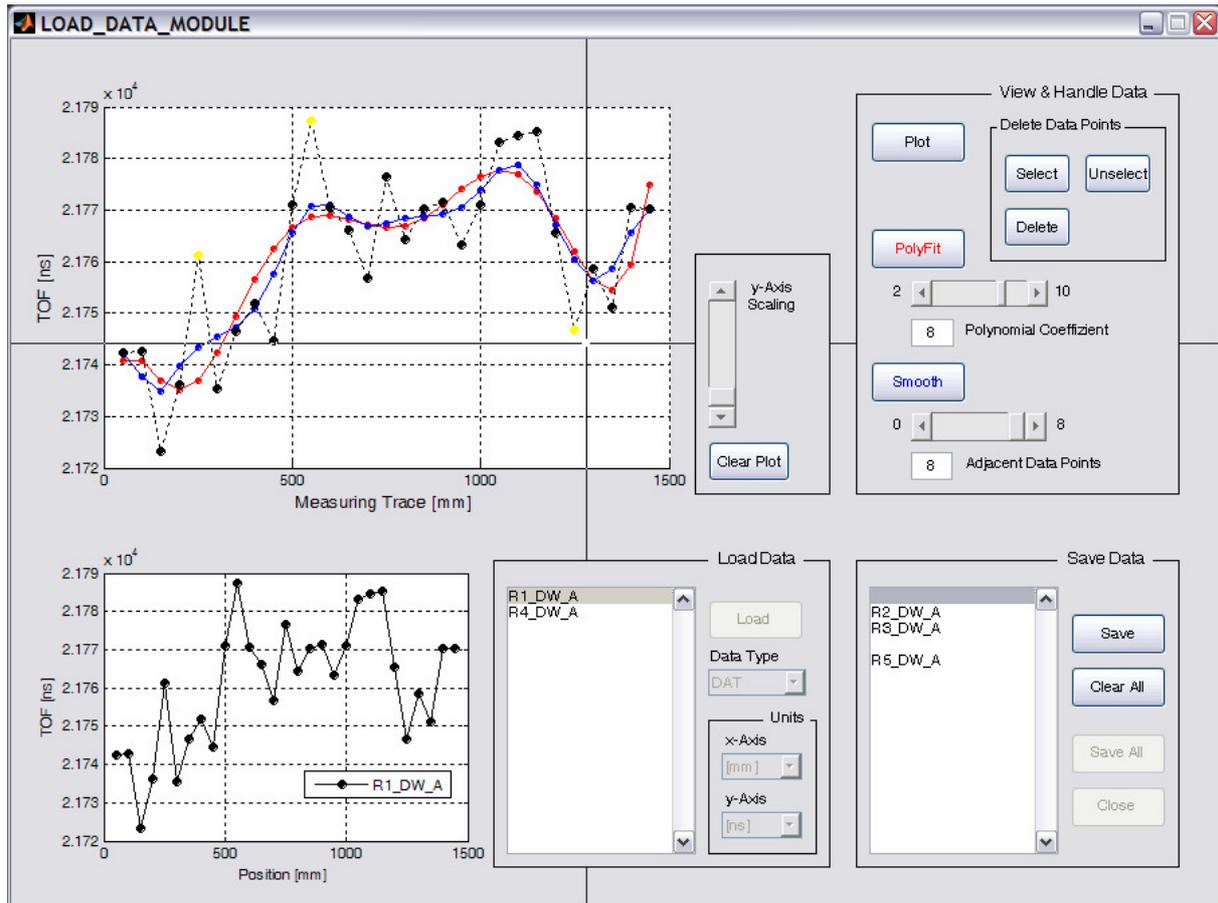


Bild 4.5: LOAD DATA-Modul zum Einlesen der gemessenen Laufzeitdaten.

**Datenarten.** Mit der POLYFIT- und SMOOTH-Option lassen sich neben den gemessenen Daten (MEASURED) zusätzliche Datenarten mit den implementierten Algorithmen

- 1) Polynominterpolation (POLYNOMIAL FITTED)
- 2) GAUSS-gewichtete Glättung (SMOOTHED)

erzeugen.

**Anmerkung:** Durch entfernte Datenpunkte entstandene, leere Positionen in Datenfeldern können nicht in sich anschließende Berechnungen eingehen. Deshalb sind entfernte Daten, bestehend aus Wert und zugehöriger Messposition, durch Sortierungsalgorithmen in Speicher abgelegt. In der graphischen Visualisierung werden diese Fehlstellen in Form von Leerstellen mit Hilfe entsprechender Rücksortierung wieder berücksichtigt.

### 1) Polynominterpolation

Die Parameter der Polynominterpolation sind einerseits die Anzahl  $M$  der aus skalaren Stützstellen  $x_i$  und assoziierten Laufzeiten  $t_i$  vorhandenen Datenpaare  $\{x_i, t_i\}$ , und andererseits der zur Approximation gewählte Polynomgrad  $N$  (POLYNOMIAL COEFFIZIENT). Die daraus resultierenden Interpolationsbedingungen für ein LAGRANGE-Polynom  $N$ -ten Grades

$$p_N(x_i) = \sum_{k=0}^N h_k x_i^k = t_i \quad , \quad i=0,1,\dots,M \quad , \quad (4.4)$$

lassen sich in einem linearen Gleichungssystem zusammenfassen:

$$\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{t} \quad , \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M,N+1} \quad , \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad , \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^M \quad . \quad (4.5)$$

$\mathbf{h}$  ist der Vektor der gesuchten Polynomkoeffizienten. Für die Auswahl geeigneter Lösungsverfahren sind neben der Bestimmtheit zusätzlich Rang, maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen oder Spalten und Kondition zu beachtende numerische Kriterien [TÖRNIG & SPELLUCCI 1998], [SCHWARZ 1997]. Im Allgemeinen ist das Gleichungssystem (4.5) bei der Messdatenaufnahme überbestimmt. Das Residuum des Ausgleichproblems wird im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate minimiert:

$$\sum_{i=1}^M \|p_N(x_i) - \sigma_i\|_2^2 \longrightarrow \text{MIN} \quad . \quad (4.6)$$

Das überbestimmte Gleichungssystem (4.6) wird durch die QR-Zerlegung gelöst [GRAMLICH & WERNER 2000]. Ansonsten übernimmt der MATLAB® eigene Backslash-Operator die Auswahl des geeigneten Lösungsverfahrens [GRAMLICH & WERNER 2000]. Die polynomialen Funktionswerte der Approximationskurve werden anschließend nach dem HORNER-Schema [NEUNZERT ET AL. 1982] berechnet.

## 2) GAUSS-gewichtete Glättung

Das GAUSS-Filter glättet Datenreihen. Die zur Glättung herangezogenen benachbarten Messwerte bilden den so genannten Glättungskern und sind im Sinne der Normalverteilung gewichtet. Dieses Konzept der Glättung berücksichtigt zwar den Ausgleich von Messwertausreißern, aber dennoch wird der tendenzielle Verlauf beibehalten, ohne lokale Extrema vollständig zu verwischen.

Der Parameter des Glättungsalgorithmus ist die Anzahl der nächsten Nachbarn  $N_{MP}$  (ADJACENT DATA POINTS), die zur Berechnung der geglätteten Funktionswerte herangezogen werden und die Filterstärke der Glättung festlegen. Die Glättungsidee besteht darin, eine gegebene Funktion der Messwerte  $\text{TOF}(\mathbf{x})$  mit einem Glättungskern  $w(\mathbf{x})$  zu falten:

$$g(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) * \text{TOF}(\mathbf{x}) \quad . \quad (4.7)$$

Für die Ausgabefunktion  $g(\mathbf{x})$  gilt aufgelöst in eindimensionaler Darstellung diskreter Funktionen [STEINBRECHER 1993]:

$$g[i] = \sum_{j=-\frac{1}{2}N_{MP}}^{\frac{1}{2}N_{MP}} w[j] \text{TOF}[i-j] \quad . \quad (4.8)$$

Jede geglättete Antwort  $g[i]$  eines Funktionswertes  $\text{TOF}[i]$  berechnet sich durch Schieben des Filterkerns  $w[j]$  an die Stelle  $[i]$  und Bildung der gewichteten Summe.

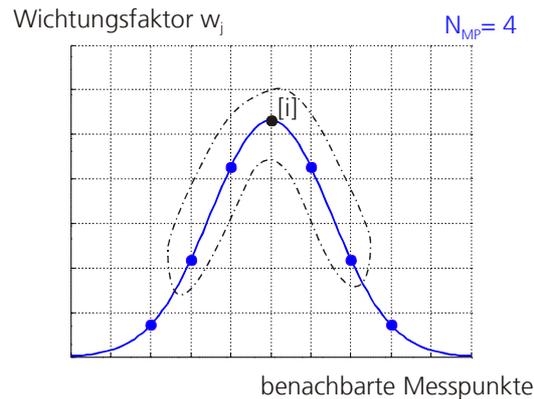


Bild 4.6: Wichtungsfaktoren der GAUSS-Glättung bei vier nächsten Nachbarn.

Die einzelnen Wichtungsfaktoren  $w_j$  (Bild 4.6) stammen aus Einträgen des konstanten Filterkerns. Der ursprüngliche Funktionswert an der Messposition  $[i]$  wird am stärksten gewichtet, die benachbarten mit zunehmenden Abstand zu  $[i]$  schwächer. Die Werte der einzelnen Wichtungsfaktoren mit  $\sum_w w_j = 1$  berechnen sich wie folgt [BRONSTEIN & SEMENDJAJEW 1991]:

$$w_j = \frac{j}{\sum_{k=0}^{N_{MP}} \binom{N_{MP}}{k}}, \quad j = 1, \dots, N_{MP} + 1. \quad (4.9)$$

#### 4.4.2 FLIGHT-PATH-LENGTH

Zur Zuordnung des an den Messpositionen zurückgelegten Laufwegs der Ultraschallwellen stehen in der FLIGHT-PATH-LENGTH-Sektion (Bild 4.7) die beiden Möglichkeiten CONSTANT und PROFILE zur Verfügung, die unter gegenseitigem Ausschluss anwählbar sind.

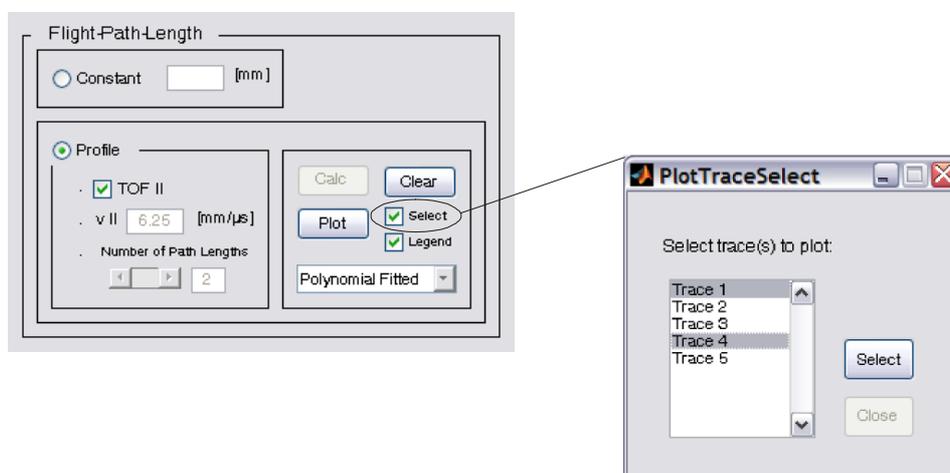


Bild 4.7: FLIGHT-PATH-LENGTH-Sektion.

- CONSTANT ermöglicht die manuelle Eingabe eines konstanten Wertes.
- PROFILE berechnet das Dickenprofil unter Verwendung einer konstanten Longitudinalwellengeschwindigkeit  $v_L$ . Dementsprechend folgt für den Laufweg bzw. die Dicke  $d$  an der Messposition  $[p,q]$ :

$$d[p,q] = v_L \frac{t_{ij}[p,q]}{N_d} . \quad (4.10)$$

Ein Fehler bei der Annahme eines konstanten Wertes für die Longitudinalwellengeschwindigkeit hat keine Auswirkung auf das Ergebnis, weil die Geschwindigkeiten der übrigen Wellenarten mit dem gleichen fehlerhaften Wert der Dicke berechnet werden und somit der spannungsverursachte Unterschied in den Geschwindigkeiten unberührt bleibt.

Der einzustellende Parameter  $N_d$  (NUMBER OF PATH LENGTHS) berücksichtigt den Abstand der zur Messung herangezogenen Rückwandechos bei der in Kapitel 3.6 beschriebenen Impuls-Echo-Überlagerungstechnik und damit die Anzahl der durchlaufenen Dicken. Bei der Visualisierung können ein oder mehrere Messspuren optional ausgewählt werden, wie in Bild 4.7 hervorgehoben.

#### 4.4.3 ULTRASONIC VELOCITY

Zur Berechnung der Transversalwellengeschwindigkeiten in der ULTRASONIC VELOCITY-Sektion (Bild 4.8) sind sowohl die eingelesenen Wellenlaufzeiten als auch zugehörige Laufwege notwendig. Erst dann werden bei der Sektionsanwahl entsprechende Steuerelemente aktiviert.

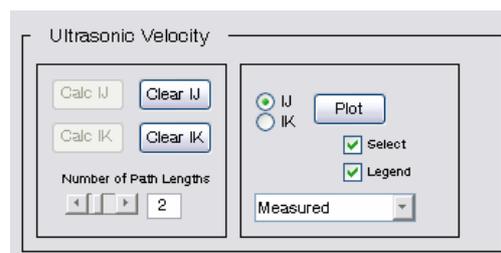


Bild 4.8: ULTRASONIC VELOCITY-Sektion.

Das Eingabefeld (NUMBER OF PATH LENGTHS) ordnet, wie zuvor in der FLIGHT-PATH-LENGTH-Sektion beschrieben, den bei der Laufzeitmessung gewählten Signalabstand zu. Die Berechnung bezieht sich jeweils auf den aktuellen Wert im Eingabefeld. Damit können gegebenenfalls für die beiden Wellenarten unterschiedliche Dickendurchläufe  $N_d$  aufgefangen werden. Zusätzlich wird bei den Datenarten POLYNOMIAL FITTED und SMOOTHED auf Kompatibilität beim Verknüpfen von Laufwegen und Laufzeiten geachtet. Die berechneten transversalen Schallwellengeschwindigkeiten  $v_{ij}$

an den Messpositionen [p,q]

$$v_{ij}[p,q] = \frac{N_d}{t_{ij}[p,q]} d, \quad d = \begin{cases} d[p,q] \\ \text{const.} \end{cases} \quad (4.11)$$

aktivieren Funktionen zur graphischen Darstellung und Speicherung.

#### 4.4.4 WEIGHTING QUOTIENT

Die in Bild 4.9 betrachtete WEIGHTING QUOTIENT-Sektion teilt sich in die diskreten Bereiche EVALUATE TENSILE TEST und INPUT.

J-Direction		K-Direction		
K/H	-30 +/- 3	-36 +/- 4		[MPa/‰]
K/F	97 +/- 10	117 +/- 11		[MPa/‰]
1/S				[MPa/‰]

Bild 4.9: WEIGHTING QUOTIENT-Sektion.

Einerseits wird die Berechnung der Wichtungsfaktoren (3.10) bzw. Wichtungsquotienten mit einbezogener Fehlerrechnung durch Auswertung einaxialer Zugversuche abgebildet, wobei das sukzessive Fortschreiten der im Flussdiagramm (Bild 4.2) vorgegebenen Abfolge entspricht. Eingabefelder ermöglichen andererseits aber auch die direkte manuelle Eingabe der reziproken Wichtungsquotienten inklusive deren absoluten Fehlerschranken. Dabei kann auf eine Datenbank (DATABASE) untersuchter Materialien zurückgegriffen werden. Die reziproken Werte der Wichtungsquotienten sind in den gegebenenfalls zu unterscheidenden Textursymmetrierichtungen gegeneinander abgegrenzt – die strikte Trennung in J- und K-DIRECTION. Der reziproke Wert in der Einheit [MPa/‰] gibt die Spannung in MPa an, mit der eine relative Geschwindigkeitsänderung von 1 ‰ verbunden ist.

- Die Aktivierung der INPUT-Sektion ermöglicht die direkte Eingabe der reziproken Wichtungsquotienten. Eine als Datenbank fungierende EXCEL<sup>®</sup>-Applikation enthält Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2. Über ein Interface wird auch das Öffnen anderer Dateien ermöglicht. Die in den beiden folgenden Tabellen aufgelisteten Werte reziproker Wichtungsquotienten stammen aus zahlreichen Analysen an Stahl- und Aluminiumwerkstoffen mit Textur [SCHNEIDER 2000].

Tabelle 4.1: Reziproke Wichtungsquotienten von Stahlwerkstoffen.

Material [elastische Anisotropie]		C/A [MPa/‰]	C/B [MPa/‰]	K/D [MPa/‰]	K/H [MPa/‰]	K/F [MPa/‰]	1/S [MPa/‰]
Roll H-Cr-R 78/80 [1 ‰]	W	-62	1464	-364	-118	939	-105
	Q	-57	/	-332	-114	/	-105
Roll H-Cr-R 78/80 [1,9 ‰]	W	-115	2687	-3599	-173	731	-140
	Q	-91	/	-1024	-155	970	-133
EStE 690 V A [1,5 ‰]	W	-74	935	-505	-126	741	-107
	Q	-82	765	-704	-135	/	-122
StE 240.7 TM [12 ‰]	W	-76	759	-589	-129	/	-117
	Q	-108	922	-5044	-159	/	-144
StE 240.7 TM [18 ‰]	W	-72	561	-433	-120	789	-104
	Q	-121	/	4421	-172	1520	-154
StE 385.7 TM [45 ‰]	W	-60	475	-296	-107	930	-96
	Q	-95	793	-2110	-155	/	-167
StE 445.7 TM [55 ‰]	W	-55	358	-230	-97	716	-86
	Q	-97	613	-1178	-147	/	-133
StE 550.7 TM [62 ‰]	W	-43	385	-175	-85	1325	-80
	Q	-105	/	2419	-176	/	-200
Fehler		$\leq \pm 5 \%$			$\leq \pm 10 \%$		$\leq \pm 3 \%$

W – Walzrichtung  
Q – Querrichtung

Tabelle 4.2: Reziproke Wichtungsquotienten von Aluminiumwerkstoffen.

Material [elastische Anisotropie]		C/A [MPa/‰]	C/B [MPa/‰]	K/D [MPa/‰]	K/H [MPa/‰]	K/F [MPa/‰]	1/S [MPa/‰]
AlZn5,5MgCu [3,5 ‰]	W	18,5	101	-74	-31	106	-24
	Q	-25	112	-112	-37	100	-27
AlZn5,5MgCu(A) [7,8 ‰]	W	-17	89	-65	-30	113	-23
	Q	-24	117	-106	-36	97	-26
AlCu6Mn [0,6 ‰]	W	-23	113	-114	-36	138	-29
	Q	-21	118	-102	-35	137	-28
AlCu6Mn [1,5 ‰]	W	-24	86	-112	-36	138	-29
	Q	-26	95	-129	-38	132	-29
AlCu6Mn [2,5 ‰]	W	-23	102	-117	-36	147	-29
	Q	-21	121	-96	-34	114	-26
AlMgSi 0,7 [9 ‰]	W	-16	118	-68	-31	146	-28
	Q	-19,5	140	-88	-34	144	-28

Fehler	$\leq \pm 10 \%$	$\leq \pm 30 \%$	$\leq \pm 10 \%$	$\leq \pm 10 \%$	$\leq \pm 5 \%$
W – Walzrichtung Q – Querrichtung					

Die grau hinterlegten Spalten kennzeichnen, welche Spannungskomponente die jeweilige Wellenart am stärksten beeinflusst. Die Longitudinalwelle wird von der Komponente in Ausbreitungsrichtung am stärksten beeinflusst ( $\rightarrow$  Faktor C/A), die Transversalwelle von der in Polarisationsrichtung ( $\rightarrow$  Faktor K/H). In Aluminium hat im Vergleich zu Stahl die Komponente senkrecht zur Polarisationsrichtung ( $\rightarrow$  Faktor K/F) einen stärkeren Einfluss.

- Die Anwahl der EVALUATE TENSILE TEST-Option setzt die in Kapitel 3.2 beschriebene Vorgehensweise um. Dabei berücksichtigt die unabhängig voneinander anwählbare I- und J-Unterscheidung, parallel zu welcher Textursymmetrierichtung die Zugprobe entnommen ist. Während des Analyseablaufs kann gegebenenfalls zwischen den beiden Indizierungen gewechselt werden. Die Erkennung des aktuellen Stands der jeweiligen Auswertung ist immer gegeben. Die Anwahl einer Richtung initiiert auch gleichzeitig die sukzessive Prozedur, die mit dem interaktiven AEC-Modul aus Bild 4.10 zum Auswerten der Zugversuche startet.

**AEC-Modul.** Das Interface in Bild 4.10 ist bezüglich der drei zur TOEC-Berechnung erforderlichen AEC-Werte aufgeteilt. In der Skizze ist die Messanordnung schematisch dargestellt, die als Orientierung der senkrecht zur Zugrichtung einzuschallenden Wellenarten dient.

Die eingelesenen Dateien mit den im Zugversuch ermittelten Laufzeitmessungen sind getrennt anzuwählen und auszuwerten. Für die im  $(\Delta t/t, \epsilon)$ -Diagramm visualisierten Messdaten wird eine Ausgleichsgerade berechnet. Der zugehörige AEC-Wert wird nach Gleichung (3.14) aus der Steigung der  $(\Delta t/t, \epsilon)$ -Ausgleichsgerade zusammen mit der aktuell angezeigten Querkontraktionszahl  $\nu$  (POISSON'S RATIO) berechnet. Die AEC-Werte sind einzeln und darüber hinaus in mehreren Clustern zu selektieren. Diese Auswahloption beruht darauf, auffallende, eventuell durch zu große Messungenauigkeiten bedingte Schwankungen nicht in den laufenden Analysezyklus einzubeziehen. Denn wie bereits erwähnt, liegt die größte Unsicherheit bei der Spannungsanalyse in der Ermittlung der AEC-Werte.

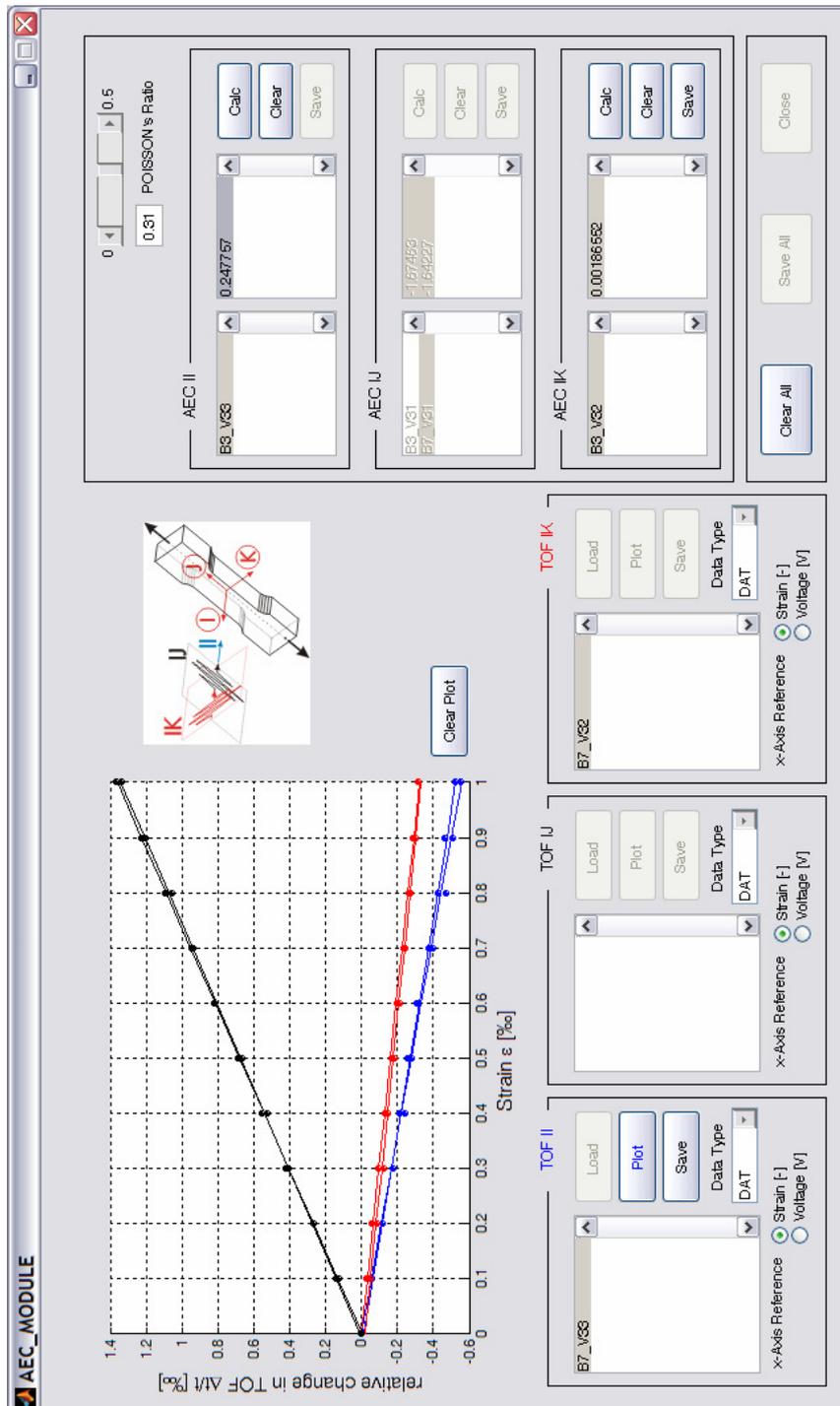


Bild 4.10: AEC-Modul zur Bestimmung der AEC aus uniaxialen Zugversuchen.

Nach übergebenen AEC-Datenfeldern kann im Steuerinterface das in Bild 4.11 enthaltene TOEC-Modul gestartet werden.

**TOEC-Modul.** Die zuvor berechneten AEC-Werte werden automatisch transferiert und im TENSILE TEST-Abschnitt eingetragen. Das TOEC-Modul unterscheidet zwischen den zwei ODER-verknüpften Auswertemoden (EVALUATION MODE) SINGLE und RANGE.

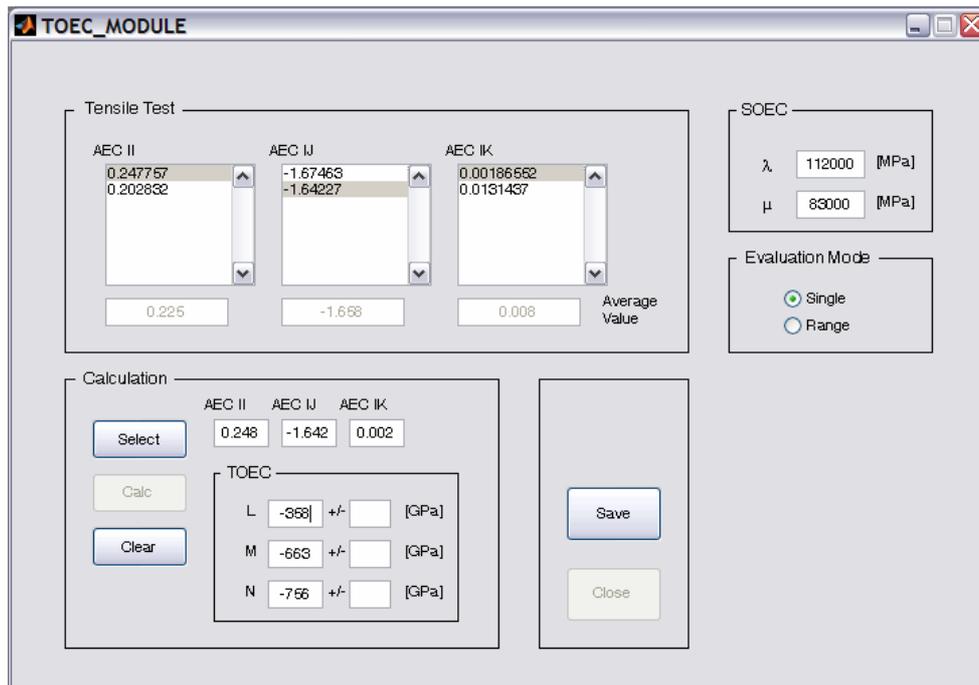


Bild 4.11: TOEC-Modul zum Berechnen der elastischen Konstanten dritter Ordnung.

Bei gewähltem SINGLE-Mode sind die Werte jeweils einzeln anwählbar. Eine Auswahl dreier verschiedener AEC-Werte ermöglicht die Berechnung der TOEC nach Gleichung (3.13). Im RANGE-Mode sind alle einzelnen Auswahloptionen deaktiviert. Die TOEC werden inklusive dem in Gleichung (3.17) hergeleiteten Absolutfehler berechnet.

Die Weitergabe der elastischen Konstanten an das Steuerinterface macht das STRESS FACTORS-Modul in Bild 4.12 ansteuerbar.

**STRESS FACTORS-Modul.** Die zuvor ermittelten TOEC- sowie eingegebenen SOEC-Werte sind aufgelistet. Die einzelnen Wichtungsfaktoren werden nach Gleichung (3.10), die spannungskustische Konstante nach (3.3) berechnet. Daraus resultieren auch die Wichtungsquotienten und deren reziproken Werte. Vorhandene Fehlerschranken der TOEC ziehen die in Kapitel 3.3 erläuterte Fehlerrechnung nach sich. Damit gelten für die absoluten Fehler der Wichtungsfaktoren die Gleichungen (3.18) und für die Wichtungsquotienten die Gleichungen (3.19). Ergänzend dazu unterliegen die reziproken Wichtungsquotienten den folgenden Abschätzungen in (4.12). Den Fehler der spannungskustischen Konstante enthält Gleichung (3.20).

$$\begin{aligned}
 |\Delta C/A| &\leq \cancel{|1/A|} \Delta C + |C/A^2| \Delta A \\
 |\Delta C/B| &\leq \cancel{|1/B|} \Delta C + |C/B^2| \Delta B \\
 |\Delta K/D| &\leq \cancel{|1/D|} \Delta K + |K/D^2| \Delta D
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

$$|\Delta K/H| \leq \frac{1}{H} \Delta K + |K/H^2| \Delta H$$

$$|\Delta K/F| \leq \frac{1}{F} \Delta K + |K/F^2| \Delta F$$

**STRESS\_FACTORS\_MODULE**

**TOEC**

l: -367 +/- 22 [GPa]  
 m: -664 +/- 5 [GPa]  
 n: -762 +/- 6 [GPa]

**SOEC**

λ: 112000 [MPa]  
 μ: 83000 [MPa]

**Stress Factor**

A: -6.41e+011 +/- 2e+010 [MPa²]  
 B: 6.10e+010 +/- 1e+010 [MPa²]  
 C: 4.60e+016 +/- 0 [MPa²]  
 D: -2.34e+010 +/- 1e+009 [MPa²]  
 H: -1.07e+011 +/- 1e+009 [MPa²]  
 F: 1.13e+009 +/- 2e+009 [MPa²]  
 K: 1.38e+016 +/- 0 [MPa²]  
 S: -7.80e-006 +/- 1e-007 [1/MPa]

**Stress Factor Quotient**

A/C: -1.4e-002 +/- 3e-004 [%/MPa]  
 B/C: 1.1e-003 +/- 2e-004 [%/MPa]  
 D/K: -1.7e-003 +/- 9e-005 [%/MPa]  
 H/K: -7.7e-003 +/- 9e-005 [%/MPa]  
 F/K: 8.2e-005 +/- 1e-004 [%/MPa]

**Reciprocal Stress Factor Quotient**

C/A: -72 +/- 2 [MPa/%]  
 C/B: 908 +/- 173 [MPa/%]  
 K/D: -591 +/- 31 [MPa/%]  
 K/H: -130 +/- 1 [MPa/%]  
 K/F: 12207 +/- 2146 [MPa/%]

Buttons: Calc, Clear, Write, Save, Close

Bild 4.12: STRESS FACTORS-Modul für die Berechnung der Wichtungsfaktoren sowie der verschiedenen Wichtungsquotienten.

#### 4.4.5 TEXTURE IDENTIFICATION

In der TEXTURE IDENTIFICATION-Sektion (Bild 4.13) sind die in Kapitel 3.4.1 aufgezeigten Möglichkeiten umgesetzt, um die Transversalwellengeschwindigkeit, die den spannungsfreien Zustand charakterisiert, zu bestimmen.

Die ENABLE INPUT-Option lässt die direkte manuelle Eingabe von Werten in die dafür vorgesehenen Geschwindigkeitsfelder zu.

**Texture Identification**

Equilibrium  ODF

Buttons: Calc IJ, Calc IK, Calc

v IJ: 3.098 [mm/μs]  
 v IK: [mm/μs]

Enable Input

Bild 4.13: TEXTURE IDENTIFICATION-Sektion.

**TEXTURE ODF-Modul.** Das TEXTURE ODF-Modul in Bild 4.14 wertet die Gleichungen (3.21) aus.

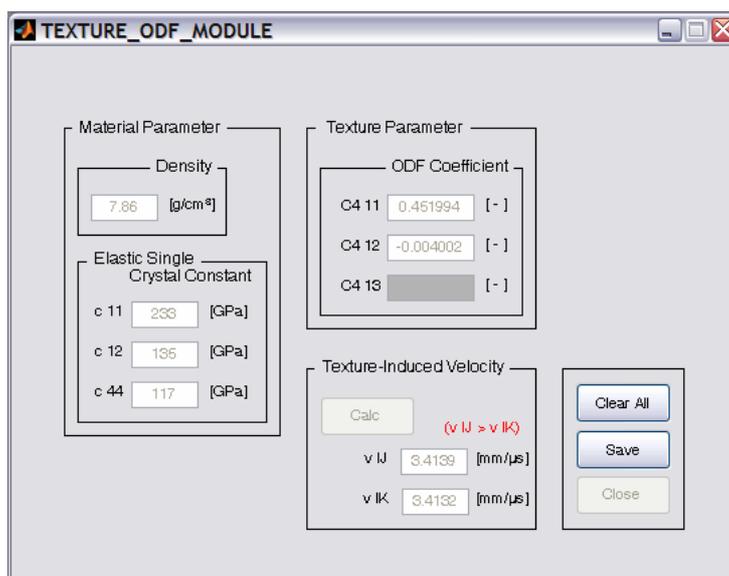


Bild 4.14: TEXTURE ODF-Modul zur Berechnung texturabhängiger Schallgeschwindigkeiten.

**TEXTURE EQUILIBRIUM-Modul.** Das EQUILIBRIUM-Modul (Bild 4.14) nutzt die beschriebene Gleichgewichtsbedingung-Methode aus. Nach Einlesen der in der ULTRASONIC VELOCITY-Sektion (Kapitel 4.4.3) berechneten Transversalwellengeschwindigkeiten liefert die Auswertung der Gleichung (3.22) entlang einer Messspur als Ergebnis die im Diagramm rot markierten Geschwindigkeitswerte. Aus der getroffenen Auswahl berechneter Werte wird der arithmetische Mittelwert gebildet und ins zugehörige Geschwindigkeitsfeld im Steuerinterface eingetragen.

Um das aus Gleichung (3.22) stammende Integral

$$\int_{x[1]}^{x[M]} (v_{ij}(x) - v_T) dx = 0 \rightsquigarrow \int_{x[1]}^{x[M]} (v_{ij}(x) - v_T^{(k)}) dx \stackrel{(k)}{\rightarrow} 0 \quad (4.13)$$

über einer Messspur der Stützstellen  $(x[p], v_{ij}[p])$ ,  $(p=1, \dots, M)$  zu lösen, ist der Pseudo-Algorithmus in (4.14) umgesetzt. Die variierende Variable ist  $v_T$ , für die das Integral in endlichen Schritten  $k$  innerhalb einer definierten Genauigkeitsschranke gegen Null konvergieren soll. In einer sukzessiv kleiner werdenden Schrittweite  $h$  nähert sich die Variable dem gesuchten Wert einseitig an. Dabei wird die Seite der Annäherung vom Vorzeichen des jeweils neu berechneten Integralwertes bestimmt. Mit Hilfe eines Splines wird zwischen den Messpositionen eine engmaschigere Stützstellenfolge uniformer Schrittweite interpoliert. Für die jeweils in (4.14) zu berechnenden Integralwerte ist die ROMBERG-Quadratur implementiert [HANKE 1997].

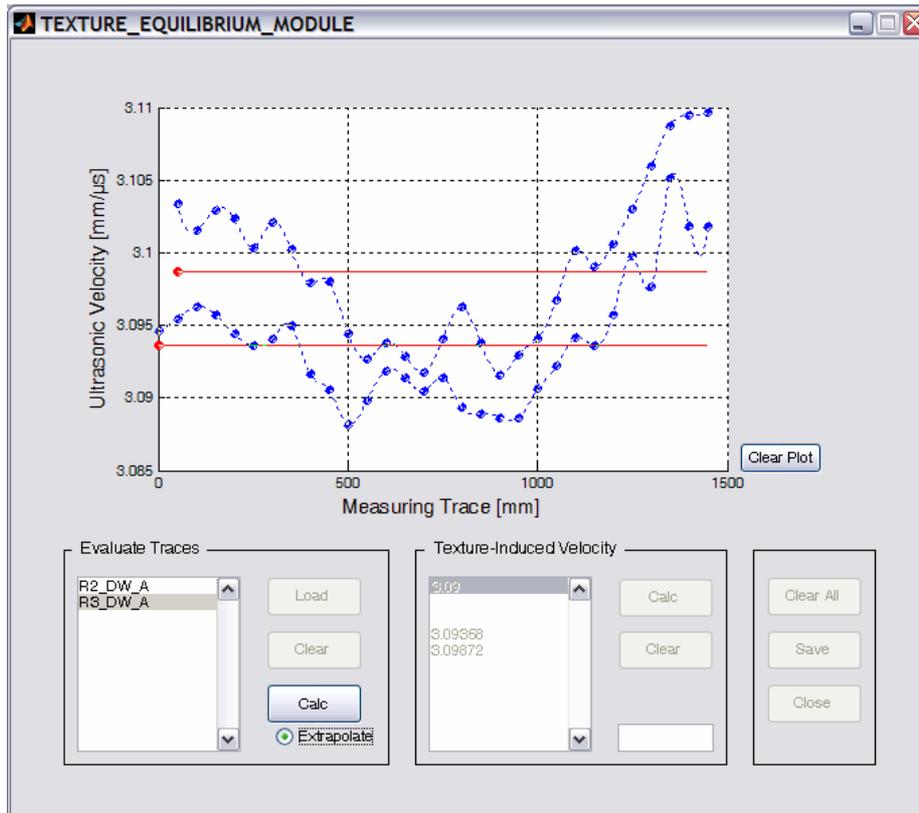


Bild 4.15: TEXTURE EQUILIBRIUM-Modul zur Berechnung texturabhängiger Schallgeschwindigkeiten entlang geeigneter Messspuren.

1.  $v_T^{(0)}, h$ 

$$I^{(1)} := \int_{x^{[1]}}^{x^{[M]}} (v_{ij}(x) - v_T^{(0)}) dx$$

$$k := 1$$
  2. *while*
  3. *if*  $I^{(k)} > 0$ 

$$v_T^{(k)} := v_T^{(k-1)} + \frac{v_T^{(k-1)}}{h}$$

$$k := k + 1$$
*elseif*  $I^{(k)} < 0$ 

$$v_T^{(k)} := v_T^{(k-1)} - \frac{v_T^{(k-1)}}{h}$$

$$k := k + 1$$
*end*
  4.  $I^{(k)} := \int_{x^{[1]}}^{x^{[M]}} (v_{ij}(x) - v_T^{(k-1)}) dx$
  5. *if*  $k > 2$
- (4.14)

```

6.       $q_k := \frac{\|I^{(k)} - I^{(k-1)}\|}{\|I^{(k-1)} - I^{(k-2)}\|}$ 
7.      if       $q_k \geq 1$ 
           break (nicht kontraktiv!)
       elseif   $\frac{q_k}{1 - q_k} \|I^{(k)} - I^{(k-1)}\| \leq \epsilon$ 
           break (konvergent innerhalb Fehlerschranke  $\epsilon \rightarrow v_T^{(k-1)}$ )
       end
     end
8.      h := 2h
   end

```

#### 4.4.6 RESIDUAL STRESS

In der RESIDUAL STRESS-Sektion (Bild 4.16) können wie in Kapitel 4.1 erläutert, sowohl die einzelnen Hauptspannungskomponenten als auch Hauptspannungsdifferenzen berechnet werden.

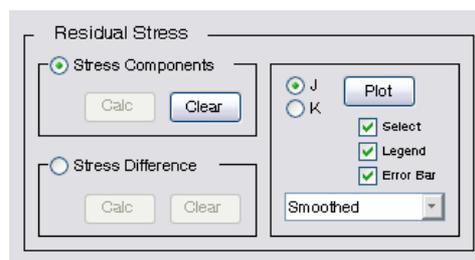


Bild 4.16: RESIDUAL STRESS-Sektion.

Zur Berechnung der Spannungskomponenten wird das Gleichungssystem (4.1) in den Messpunkten numerisch durch GAUSS-Elimination gelöst [GRAMLICH & WERNER 2000]. Die Absolutfehler der Spannungskomponenten werden nach Gleichung (3.16) berechnet. Dafür erforderlich sind die vorhandenen Fehler der Wichtungsquotienten in den zugehörigen Eingabefeldern der WEIGHTING QUOTIENT-Sektion.

Zur Auswertung der Hauptspannungsdifferenz ist Gleichung (3.5) implementiert. Gleichung (3.8) kann dann ausgewertet werden, wenn im 1/S-Eingabefeld der WEIGHTING QUOTIENT-Sektion  $2\mu$  eingegeben wird.

#### 4.5 Korrektur von Gefügestandseinflüssen

Das externe Stand-Alone-Modul in Bild 4.17 korrigiert in gemessenen Schallwellenlaufzeiten den Einfluss von Gefügeständen, die mit Hilfe der Härte charakterisiert werden können; siehe dazu

auch Kapitel 3.5.

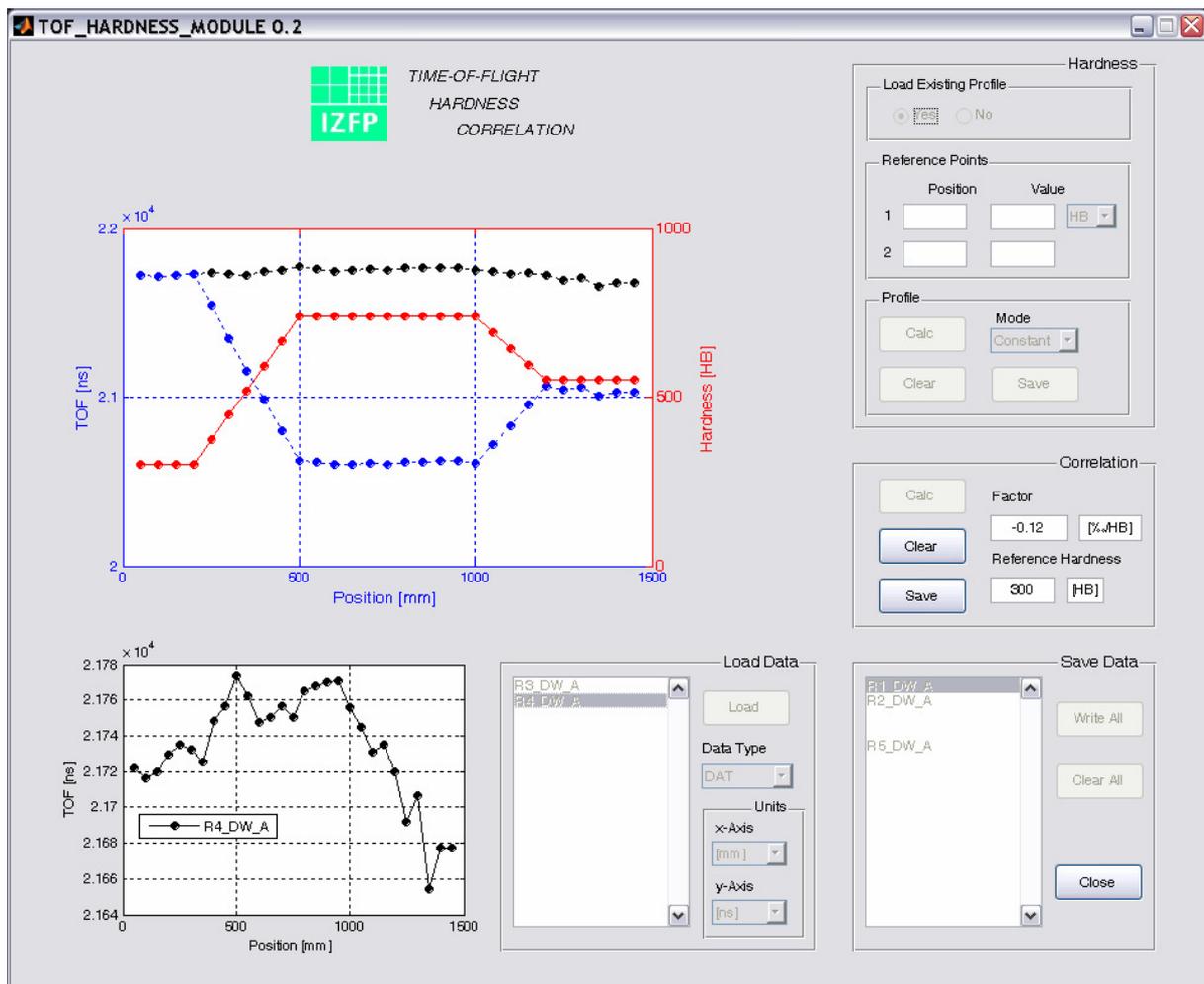


Bild 4.17: Modul zur Korrelation der gemessenen Ultraschallwellenlaufzeiten mit der Härte in unterschiedlichen Gefügeständen.

Die korrigierten Schallwellenlaufzeiten  $TOF\_CORR$  berechnen sich als Funktion von

- dem experimentell zu bestimmenden Korrelationsfaktor  $CORR$  [%/Härteeinheit],
- den an den Messpositionen ermittelten Härtewerten  $HARDNESS$ ,
- der Referenzhärte  $HREF$  [Härteeinheit], auf die normiert wird, und
- den gemessenen Laufzeiten  $TOF$

wie folgt:

$$TOF\_CORR[i] = TOF[i] + \frac{CORR}{1000} (HARDNESS[i] - HREF) TOF[i] . \quad (4.15)$$

Dadurch werden die Schallwellenlaufzeiten auf eine Referenzhärte normiert.

## 5 Konstruktion geschlossener Spannungsprofile

Die Intention dieses Kapitels liegt in der Herleitung und Anwendung einer geeigneten Methodik, den geschlossenen 2D-Spannungszustand im technischen Bauteil abzubilden. Konform dem Ist-Spannungszustand nach der Ultraschall-Eigenstressanalyse wird von orts aufgelösten diskreten Spannungswerten ausgegangen, die als Stützstellen in die Konstruktion stetiger Spannungsprofile eingehen.

Die näherungsweise Rekonstruktion einer Funktion aus gegebenen Punktmengen stellt eine exponierte Technik im Anwendungsfeld der Datenverarbeitung dar. Das Spektrum erstreckt sich über die Gebiete der numerischen Berechnung, Messdatenauswertung und Bildbearbeitung bis hin zur Topographie. Von der zugrunde liegenden Funktion sind nur diskrete Stützwerte an endlich vielen Stützstellen bekannt, so dass sich die gegebenen Datensätze aus Ortsvektoren und assoziierten Funktionswerten zusammensetzen. Mit Hilfe definierter Rekonstruktionstechniken werden dazwischen liegende Funktionswerte erzeugt. Das Ergebnis ist eine angegliche Abbildung der Funktion mit einer für das Näherungsverfahren charakteristischen Stetigkeit. In der Konstruktionsstrategie kann zwischen Interpolation und Approximation unterschieden werden. Interpolierte Funktionen verlaufen exakt durch die vorgegebenen Funktionswerte. Approximierte Funktionen dagegen nähern die Funktionswerte an, erhalten aber den natürlichen von den Daten vorgegebenen tendenziellen Verlauf. Zusammenfassende Arbeiten über die mannigfaltigen Ansätze der Rekonstruktionsproblematik beliebig verteilter Daten liefern unter anderem [SCHUMAKER 1976], [BARNHILL 1977], [FRANKE 1982], [FRANKE & NIELSON 1991] oder [WATSON 1992]. Alle implementierten Rekonstruktionsalgorithmen sind autarke, in der MATLAB®-Entwicklungsumgebung integrierte Programmroutinen und können als Stand-Alone-Applikation konvertiert werden. Die Programme sind so automatisiert, dass die mit der Softwareroutine USR-SA erzeugten Ergebnisse bei der konkreten Anwendung eingelesen und weiterverarbeitet werden können.

Zunächst wird der Ist-Spannungszustand nach der Ultraschall-Eigenstressanalyse näher erläutert. Zur Konstruktion kontinuierlicher Spannungsprofile unterliegt der statische Spannungszustand charakteristischen Restriktionen. Der Beschreibung des umgesetzten Konstruktionsablaufs schließt sich die Strukturdiskretisierung als geometrische Basis an. Nach Erläuterungen der implementierten Rekonstruktionsverfahren werden diese anhand einer Testfunktion miteinander verglichen und abgegrenzt. Die endgültige Bewertung der relevanten Methoden erfolgt danach in der konkreten spannungsanalytischen Anwendung. Weitere Beispiele ergänzen die experimentelle Eigenstressanalyse mit geschlossener Spannungsabbildung.

## 5.1 Statischer Ist-Spannungszustand

**Statischer Ist-Zustand.** Der Ist-Zustand im Bauteil als Ergebnis der Ultraschall-Eigenstressanalyse ist in Bild 5.1 schematisch verdeutlicht. Ortsaufgelöst sind an den diskreten Messpositionen  $\mathbf{x}_i \in \Omega$  die Hauptspannungen  $\sigma_{i=I,II}(\mathbf{x}_i)$  im zweidimensionalen Lösungsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  gegeben. Die Spannungen können als Höhen über der Ebene interpretiert werden. Darüber hinaus ist zumindest teilweise der Zustand auf dem Rand  $\partial\Omega$  bekannt.

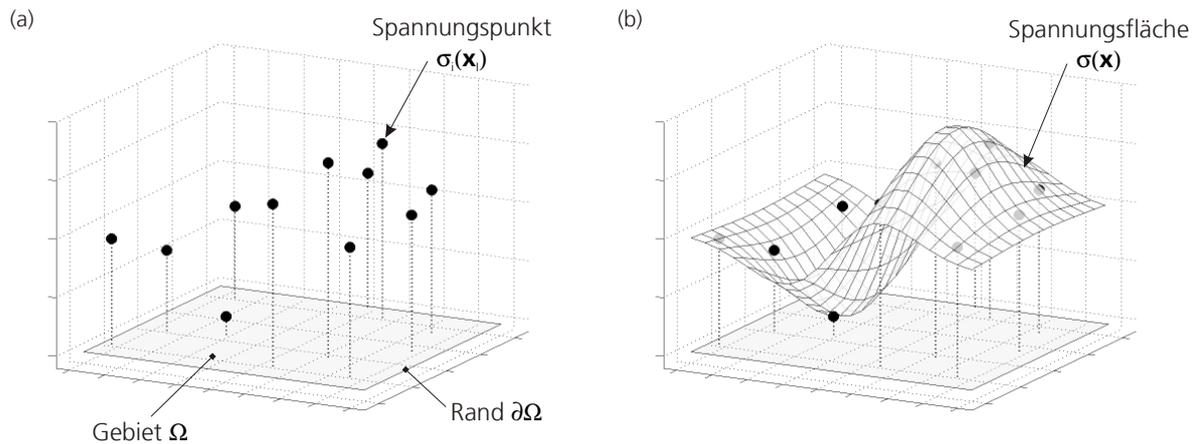


Bild 5.1: Statischer Ist-Zustand nach der Ultraschall-Eigenstressanalyse: Spannungspunkte (a) repräsentieren als Stützwerte die kontinuierliche Spannungsfläche (b).

Die diskreten Spannungswerte indizieren in einer bestimmten Auflösung die kontinuierliche Spannungsfläche  $\sigma(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , die den geschlossenen Spannungszustand des sich im mechanischen Gleichgewicht befindlichen Bauteils beschreibt. Zur Realisierung der geforderten Spannungsabbildung über dem Lösungsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ist eine bivariate skalarwertige Spannungsfunktion  $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht. Basierend auf einer endlichen Menge von Stützwerten, die berechneten Eigenstressungen, rekonstruiert die abzuleitende Näherungsfunktion eine stetige Spannungsfläche in Abhängigkeit der unabhängigen Ortsvariablen.

**Eigenstressmerkmale.** Die aus Volumeneffekten entstehenden meist mehrachsigen Eigenstressungen besitzen wie Lastspannungen eine Tensorcharakteristik und erlauben schon a priori Abschätzungen über deren Verteilung. In jeder gewählten Koordinatenrichtung muss mechanisches Kräfte- und Momentengleichgewicht vorliegen. Daher können Eigenstressungen formal via  $\int_A \sigma dA = 0$  oder in diskreter Form  $\sum \sigma A = 0$  abgeschätzt werden. Zusätzlich gelten Randbedingungen: An freien Flächen ist die Normalenkomponente gleich Null. Die Größe der Eigenstressungen kann an keinem Punkt die Fließgrenze bzw. die Vergleichsspannung überschreiten.

**Anforderungen.** Die Rekonstruktion des statisch eingefrorenen Spannungszustands in  $\Omega$  kann sich die speziellen Eigenschaften der Eigenspannungen zu Nutze machen, unterliegt aber gewissen Einschränkungen. Wichtigste Prämisse ist die Strukturintegrität. Die Erhaltung der Bauteilgeometrie ohne strukturelle Veränderungen muss bei der Spannungsberechnung sichergestellt sein. Die Abweichung der wiedergegebenen Spannungswerte kann im Bereich der Fehlerschranken liegen, die aus der experimentellen Eigenspannungsanalyse resultieren.

## 5.2 Konstruktionsablauf

Bild 5.2 veranschaulicht in Form eines Flussdiagramms die angewendete Vorgehensweise zur Abbildung kontinuierlicher Spannungsprofile. Darin ist die konstruktive Abfolge mit zugehörigem Datenfluss beim Durchlauf der Algorithmenstruktur dargestellt. Eingehende Anweisungen, deren Verknüpfung sowie mögliche Optionen sind an entsprechender Stelle aufgeführt.

Der im vorangegangenen Kapitel dargelegte Ist-Spannungszustand nach der experimentellen Ultraschall-Eigenspannungsanalyse wird durch die Spannungen  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$  an den diskreten Messpositionen  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$  im Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beschrieben. Ergebnis der Rekonstruktion ist eine kontinuierliche Spannungsfläche  $\sigma(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_i$  über  $\Omega$ .

Es sei angemerkt, dass diese Vorgehensweise eine ausreichend hohe Auflösung durch Stützstellen voraussetzt. Eine allgemeingültige Annahme über eine notwendige Stützstellenmenge existiert nicht, diese variiert je nach Anwendung und ist unter anderem abhängig von der Bauteilgeometrie, den aufgrund der Fertigung zu erwartenden Inhomogenitäten oder der geforderten Auflösung. In einigen Fällen kann eine geeignete Stützstellenmenge auch erst nach Voruntersuchen festgelegt werden. Bei dem später in Kapitel 6.1 gezeigten Beispiel der warmgewalzten Aluminiumplatte war das Kriterium die Erfahrungswerte, dass in solchen großvolumigen Bauteilen ein Spannungsgradient nicht steiler als 30 MPa pro  $\pm 20$  mm um die Stützstelle ist. Demnach verändern sich die Spannungen innerhalb von 20 mm nicht stärker als die Messungenauigkeit von etwa  $\pm 30$  MPa, die ein Spannungswert bei der Bestimmung mittels Ultraschallverfahren besitzt. Von daher ist bei diesem Beispiel ein Stützstellenabstand kleiner 20 mm nicht sinnvoll. Die Messspuren befinden sich am Rand und in der Plattenmitte, weil erfahrungsgemäß am Rand die größten Spannungsänderungen zu erwarten sind, und somit über die Mitte der Verlauf über der gesamten Platte dargestellt werden kann.

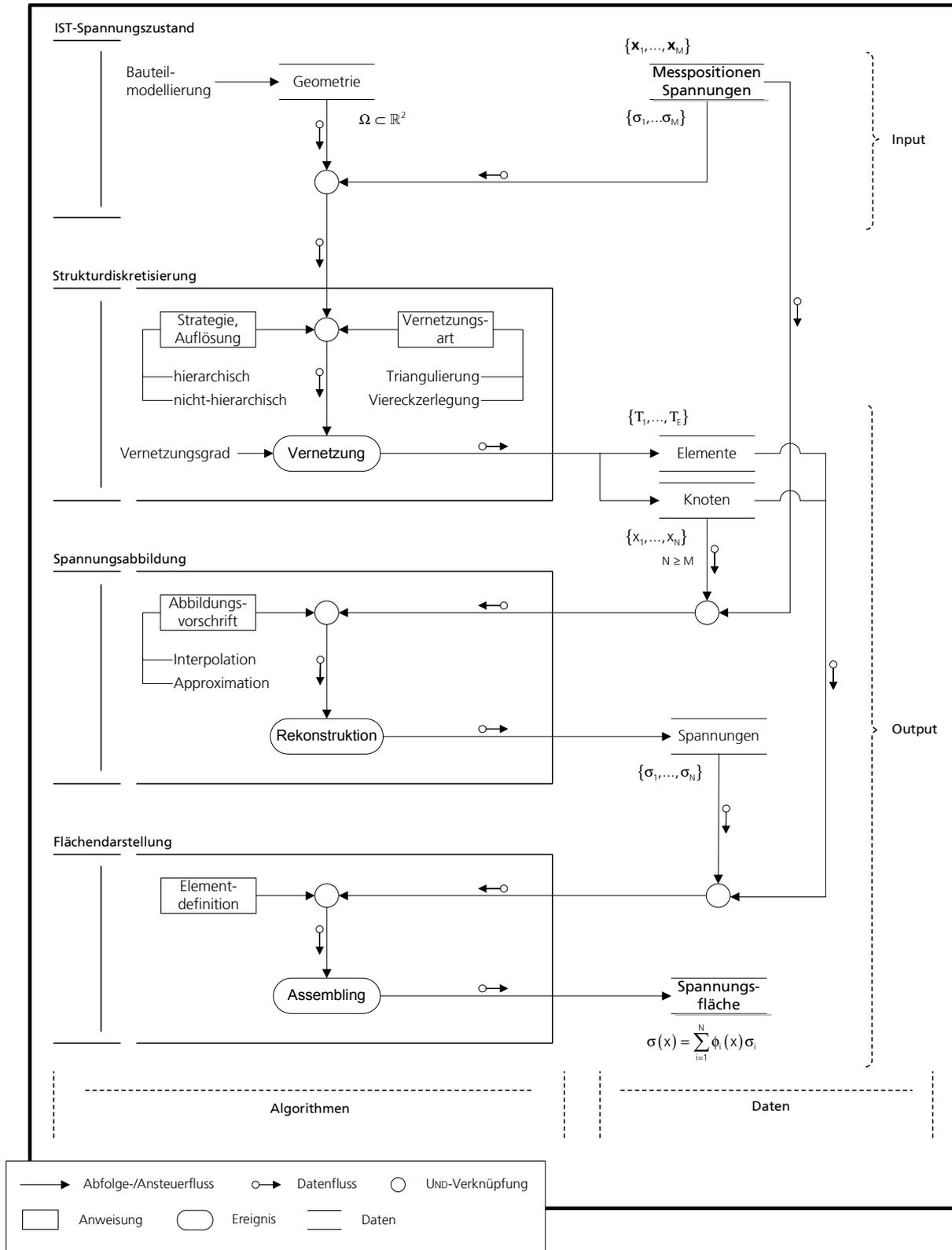


Bild 5.2: Flussdiagramm des schematischen Konstruktionsablaufs zur geschlossenen Spannungsabbildung.

Geometrische Basis der Flächenkonstruktion ist die Strukturdiskretisierung der modellierten Bau-

teilgeometrie. Das Gebiet  $\Omega$  wird in einfache Teilgebiete, die Finite Elemente, unterteilt. Wählbare Parameter sind Strategie und Art der Vernetzung. Als Outputdaten erhält man das mit den Elementen  $\{T_1, \dots, T_E\}$  vernetzte Gebiet und zugehörige Elementknoten  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ .

Bei der Rekonstruktion werden die gegebenen Datensätze  $\{\mathbf{x}_j, \sigma_j \mid \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^2, \sigma_j \in \mathbb{R}\}_{j=1, \dots, M}$  mit den Elementknoten  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  in Abbildungsvorschriften miteinander verknüpft. Das Ergebnis sind rekonstruierte Spannungen  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  an den Knoten. Danach erfolgt per Elementdefinition die Projektion der Knotenspannungen  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  über den Elementen  $\{T_1, \dots, T_E\}$ . Finite Elemente sind durch eine nodale Basis  $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, K}$  aus einem endlichdimensionalen Funktionenraum definiert. Somit lassen sich Spannungen an einem beliebigen Punkt innerhalb eines Elementes als Linearkombination der linear unabhängigen Basisfunktionen eindeutig darstellen. Die Summe über alle Elemente liefert die Spannungsfläche

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5.1)$$

Die elementweise Konstruktion mit Basisfunktionen aus dem linearen Polynomraum  $\phi_k \in \mathcal{P}_1(\Omega)$  hat eine  $C^0$ -Stetigkeit zur Folge. Dadurch aufgespannte Spannungsflächen setzen sich stückweise aus ebenen Elementflächen zusammen und sind stetig, aber nicht stetig differenzierbar.

### 5.3 Strukturdiskretisierung

Die Messpositionen werden in einer endlichen Punktmenge  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subseteq \Omega$  zusammengefasst. Hinsichtlich einer Anwendung der Ultraschall-Eigenstressanalyse sind zwei Fallunterscheidungen für die Strukturdiskretisierung bezeichnend. Das Gebiet der Spannungsanalyse wird entweder durch die Geometrie des technischen Bauteils selbst oder durch die konvexe Hülle der Punktmenge begrenzt. Letztere Betrachtung berücksichtigt einen lokalen Bauteilabschnitt. Das Bauteil selbst ist durch Polygone und gegebenenfalls zusätzliche Stützpunkte zu modellieren.

Eine ausgereifte Möglichkeit der Diskretisierung eines Gebietes  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  besteht darin, das Gebiet  $\Omega$  und die Punktmenge  $\mathbf{X}$  zu triangulieren. Vorteile der unstrukturierten Dreiecksgitter liegen bei der automatischen Netzgenerierung in der flexibleren Darstellung beliebig komplexer Geometrien, nicht zuletzt auch wegen der möglichen Kontrolle der Netzknotenverteilung. Netzdichten können lokal an die Verteilungen der Punktmengen angepasst werden. Obwohl sich die Vernetzung im Rahmen dieser Arbeit primär auf die Triangulierung bezieht, wird zusätzlich noch

die Orthogonalzerlegung mit Viereckselementen umgesetzt. Das in Kapitel 5.4.4 entwickelte Membranmodell erfordert ein reguläres Gitter als hinterlegte Diskretisierungsstruktur und wendet die bilineare Interpolation im Viereckelement an.

### 5.3.1 DELAUNAY-Triangulierung

**Netzqualität.** In der Interpolations- und Approximationstechnik sind schmale, lang gestreckte Dreieckselemente zu vermeiden sowie eine möglichst gleichmäßige Elementgestaltung über dem gesamten Vernetzungsgebiet anzustreben [BRAMBLE AND ZLAMAL 1970], [GREGORY 1975], [BARNHILL AND GREGORY 1975], [FREY & GEORGE 2000], [CAREY & ODEN 1984]. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass die Netzstruktur der Zusatzforderung einer annähernd gleichschenkligen Elementgestalt mit minimaler Summe der Kantenlängen genügen sollte. Diese Bedingung der Elementgüte wird am besten von der DELAUNAY-Triangulierung erfüllt, die winkeloptymal gegenüber allen anderen Triangulierungen ist [RIPPA 1990], [KLEIN 1997], [DE BERG ET AL. 2000].

**Charakterisierung.** Ein wichtiges Optimalitätskriterium für Triangulierungen im  $\mathbb{R}^2$  ist die Umkreis-Charakterisierung. Die Zerlegung  $\mathcal{T}(X)$  der Punktmenge  $X$  im Gebiet  $\Omega$  ist genau dann gleich der DELAUNAY-Triangulierung, wenn die von den drei Knoten eines Dreieckselementes  $T_j \in \mathcal{T}$  aufgespannten Umkreise keine weiteren Punkte aus  $X$  enthalten. Die konform dem Umkreis-kriterium triangulierte Punktmenge mit jeweils drei Elementknoten auf den Dreiecksumkreisen zeigt Bild 5.3. Lokale Änderungen einer Diskretisierung bezüglich des Umkreis-kriteriums erhalten stets die global optimale Triangulierung.

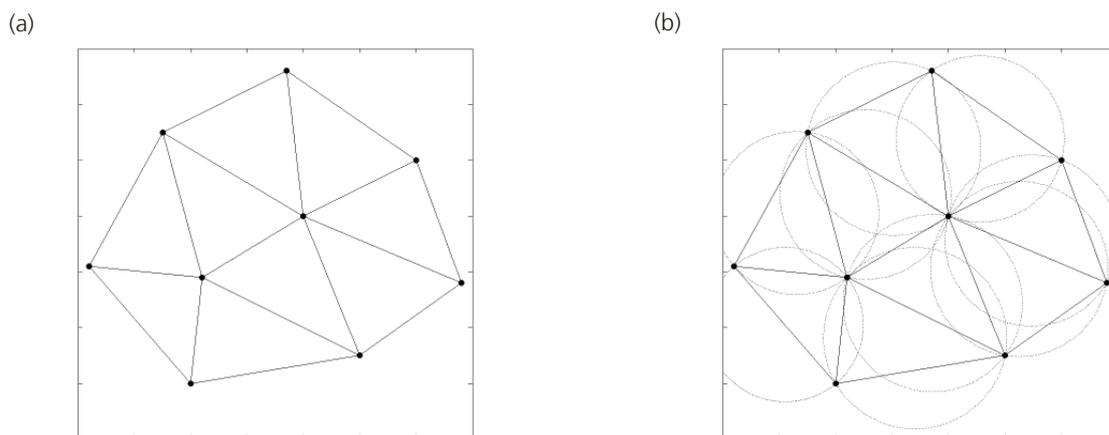


Bild 5.3: Triangulierte Punktmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$ : DELAUNAY-Dreiecke (a) inklusive der durch die Dreiecksknoten aufgespannten Umkreise (b).

**Netzgenerierung.** Die DELAUNAY-Triangulierung besitzt in der algorithmischen Geometrie eine

fundamentale Bedeutung und ist dementsprechend im  $\mathbb{R}^2$  ausführlich untersucht. Einen Überblick unterschiedlicher Triangulierungsalgorithmen inklusive konstruktiven Details liefern [PREPARATA & SHAMOS 1985], [DE BERG ET AL. 2000] oder auch [KLEIN 1997].

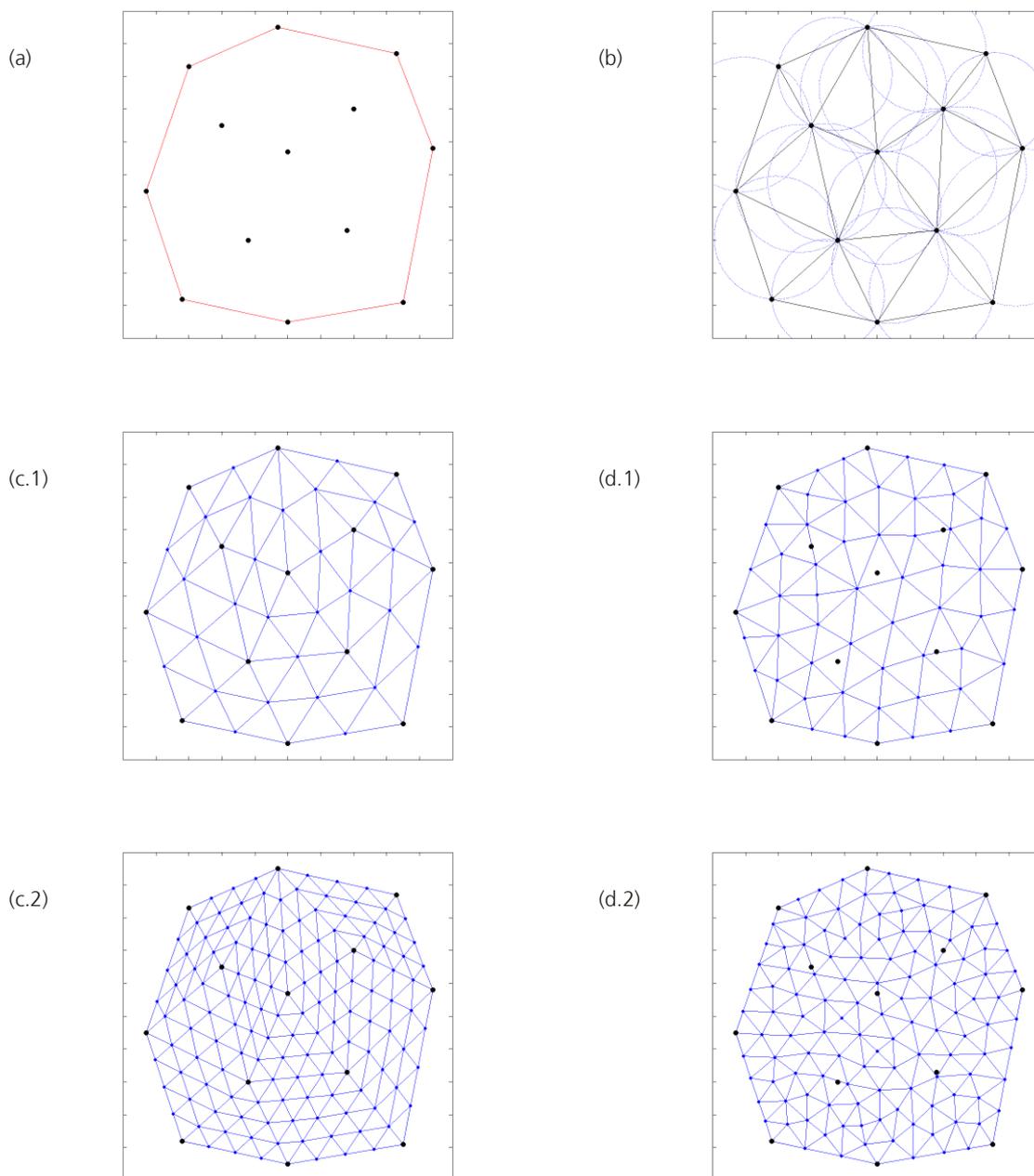


Bild 5.4: Hierarchische (c) und nicht-hierarchische (d) DELAUNAY-Triangulierung einer durch die konvexe Hülle begrenzten Punktmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$  (a) unterschiedlicher Netzauflösungen.

Zur Umsetzung einer sowohl hierarchischen- (Bild 5.4 (c)) als auch nicht-hierarchischen (Bild 5.4 (d)) Vernetzungsstrategie sind mehrere Konstruktionsalgorithmen bei der Rekonstruktion implementiert.

- Die nicht-hierarchische Triangulierung einer definierten Geometrie oder konvexen Hülle ohne Berücksichtigung innerer Punkte wird durch den von [SHEWCHUK 2003] publizierten TRI-

ANGLE Algorithmus erzeugt. Dieser basiert auf einer inkrementellen Einfügemethodik und erlaubt die Realisierung globaler sowie lokaler Netzverfeinerungen [SHEWCHUK 2002]. Die Netzverfeinerung ist eine oftmals notwendige Vorgehensweise, um eine triangulierte Netzstruktur passend für die Anwendung in der Interpolations- und Approximationstechnik zu machen. Beispielsweise werden durch lokale Netzverfeinerungen bestimmte Regionen von  $\Omega$  höher aufgelöst und darin vorkommende (Spannungs-) Gradienten besser abgebildet.

- Grundlage der hierarchischen Triangulierung ist das in sich geschachtelte Erhöhen der Netzdichte. Dazu wird eine Punktmenge mit dem in MATLAB<sup>®</sup> integrierten [QHULL 2003] Algorithmus vernetzt [BARBER ET AL. 1996]. Mit Hilfe der QUADTREE-Methodik [DEVILLERS 2002] lassen sich einzelne Dreiecke sukzessiv in jeweils vier selbstähnliche Subdreiecke unterteilen. Dazu werden die Kanten eines DELAUNAY-Dreiecks halbiert und entsprechende Mittelpunkte zur Generierung der nächst höheren Auflösung miteinander verbunden [PERSSON & STRANG 2004]. Ein möglicher Nachteil der hierarchischen Vernetzung liegt in der Gebundenheit an die vorgegebene Punktmenge. Die Verteilung oder Streuung der Punkte innerhalb des Gebietes kann zu ungünstigen Elementformen und verminderter Netzqualität führen.

Beim Vergleich der Rekonstruktionsmethoden anhand der Testfunktion in Kapitel 5.5 sind beide Vernetzungsstrategien angewandt.

### 5.3.2 Orthogonale Viereckvernetzung

Zur Erzeugung der Viereckelemente  $\{K_1, \dots, K_E\}$  wird ein orthogonaler Vernetzungsalgorithmus verwendet, der über [USGS 2006] zur Verfügung steht.

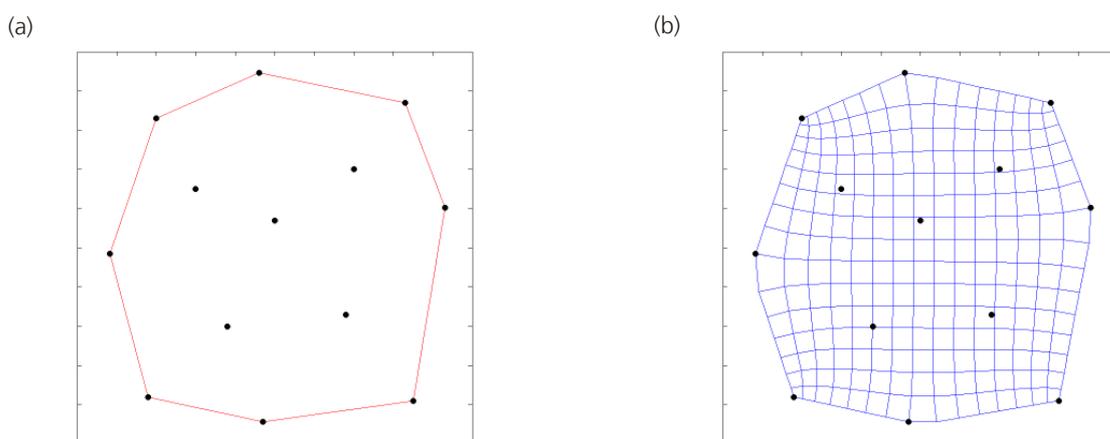


Bild 5.5: Nicht-hierarchische Orthogonalvernetzung der konvexen Hülle einer Punktmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$  (a) mit Viereckelementen (b).

Bild 5.5 (b) enthält die nicht-hierarchische orthogonale Viereckvernetzung der zuvor betrachte-

ten Punktmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$ . Der Bereich wird dabei durch die konvexe Hülle (Bild 5.5 (a)) der Punktmenge begrenzt.

### 5.3.3 Elementdefinition

Zur Kennzeichnung Finiter Elemente gehört neben der geometrischen Form auch ein geeigneter Funktionenraum, der von einem System linear unabhängiger Basisfunktionen aufgespannt wird [ZIENKIEWICZ 1971], [BATHE 1986], [BRUNNER & SCOTT 1994]. Bei der Erzeugung einer  $C^0$ -stetigen Rekonstruktionsfläche sind methodenabhängig das lineare Dreieck- und das lineare Viereckelement umgesetzt.

**Lineares Dreieckelement.** Die zu einem Knoten  $\mathbf{x}_{i=1,2,3}$  korrespondierende Basisfunktion  $\phi_{i=1,2,3} : T_j \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gehört zum linearen Polynomraum:  $\phi_i \in \mathcal{P}_1(\Omega)$ . Die nodale Basis  $\{\phi_i\}_{i=1,2,3}$  von  $\mathcal{P}_1(T_j \subset \mathbb{R}^2)$  kann eindeutig mit den dimensionslosen Baryzentrischen Koordinaten in Abhängigkeit der Elementknoten ausgedrückt werden [BATHE 1986], [FARIN 1997].

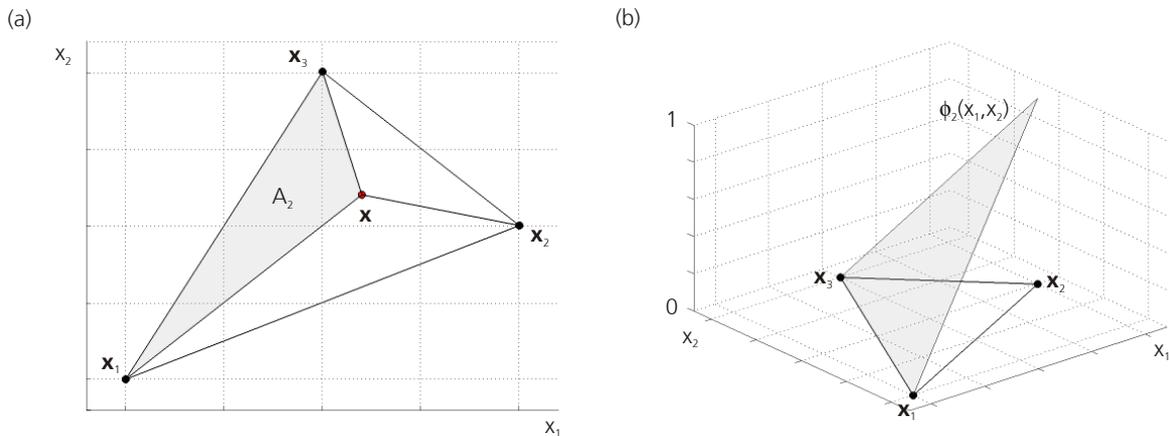


Bild 5.6: Bezugsfläche (a) und Verlauf (b) der Baryzentrischen Koordinate  $\phi_2$  über dem linearen Dreieckselement.

Baryzentrische Koordinaten basieren auf einer elementweisen Flächendefinition. Für einen bestimmten Ort  $\mathbf{x}$  innerhalb des Dreieckselementes wird die stückweise stetige Basisfunktion  $\phi_i$  aus dem Quotienten der von den Punkten  $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k\}_{j,k \neq i}$  aufgespannten Dreiecksfläche  $A_i$  und der Fläche  $A$  des gesamten Dreiecks gebildet:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{A_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)}{A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)}, \quad j, k \neq i \in \{1, 2, 3\}, \quad A = \sum_{i=1}^3 A_i. \quad (5.2)$$

In Bild 5.6 (a) anhand der Basisfunktion  $\phi_2$  dargestellt. Den entsprechenden Verlauf von  $\phi_2$  über

dem Dreieck mit den Eigenschaften

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \sum_{i=1}^3 \phi_i = 1, \phi_i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5.3)$$

zeigt Bild 5.6 (b).

Die Fläche  $A$  eines Dreiecks wird direkt über die Koordinatendeterminante der Elementknoten  $\mathbf{x}_i = (x_1^i, x_2^i)_{i=1,2,3}$  berechnet:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^1 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \\ 1 & x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Dazu sind die Knoten jeweils im Gegenuhrzeigersinn sortiert und abgespeichert, um negative Dreiecksflächen zu vermeiden [CAREY & ODEN 1984], [KATTAN 2003].

Zur Berechnung der in Bild 5.3 dargestellten und später benötigten Umkreise eines Dreieckselementes sind Umkreismittelpunkt und Umkreisradius erforderlich. Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Seitensymmetralen. Die Beschreibung einer Geradengleichung in Normalenform  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$  liefert in Abhängigkeit der Knoten  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  folgende Bestimmungsgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1^2 - x_1^1 & x_2^2 - x_2^1 \\ x_1^3 - x_1^1 & x_2^3 - x_2^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1^1 + x_1^2)(x_2^2 - x_2^1) + \frac{1}{2}(x_2^1 + x_2^2)(x_2^2 - x_2^1) \\ \frac{1}{2}(x_1^1 + x_1^3)(x_2^3 - x_2^1) + \frac{1}{2}(x_2^1 + x_2^3)(x_2^3 - x_2^1) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

für die Koordinaten  $(x_1, x_2)$  des Umkreismittelpunktes. Der Umkreisradius  $r$  lässt sich unmittelbar aus der Dreiecksfläche  $A$  und dem Produkt der Seitenlängen bestimmen:

$$r = \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|_2 \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|_2}{4A}. \quad (5.6)$$

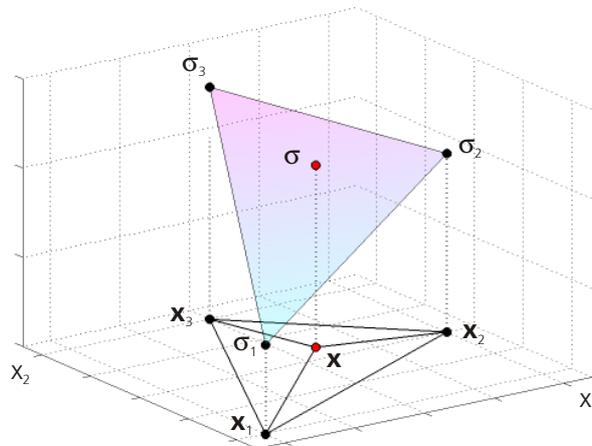


Bild 5.7: Höhendarstellung des interpolierten Spannungsverlaufs im linearen Dreieckselement, gestützt auf den Spannungen  $\sigma_i$  an den Knoten.

Die lineare Elementdefinition angewendet auf die interpolierte Berechnung

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (5.7)$$

der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  im Punkt  $\mathbf{x}$  hat den in Bild 5.7 dargestellten Spannungsverlauf über dem Element zum Ergebnis. Die Dimension  $\dim(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) = 3$  des linearen Polynomraums  $\mathcal{P}_1(\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^2)$  impliziert, dass drei affin unabhängige Stützstellen ausreichen, um den Spannungswert  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  eindeutig bestimmen zu können.

**Lineares Viereckelement.** Im linearen Viereckelement  $\mathbf{K}_j$  der orthogonalen Viereckvernetzung  $\mathbf{K}_{j=1,\dots,E} \in \mathcal{K}(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$  führt die Normierung der globalen kartesischen Koordinaten  $x_1, x_2$  entlang den Elementkanten durch die zugehörigen Gitter- bzw. Kantenlängen  $dx_1, dx_2$  des Elementes  $\mathbf{K}_j$  auf die lokalen Koordinaten  $s, t \in [0, 1]$ .

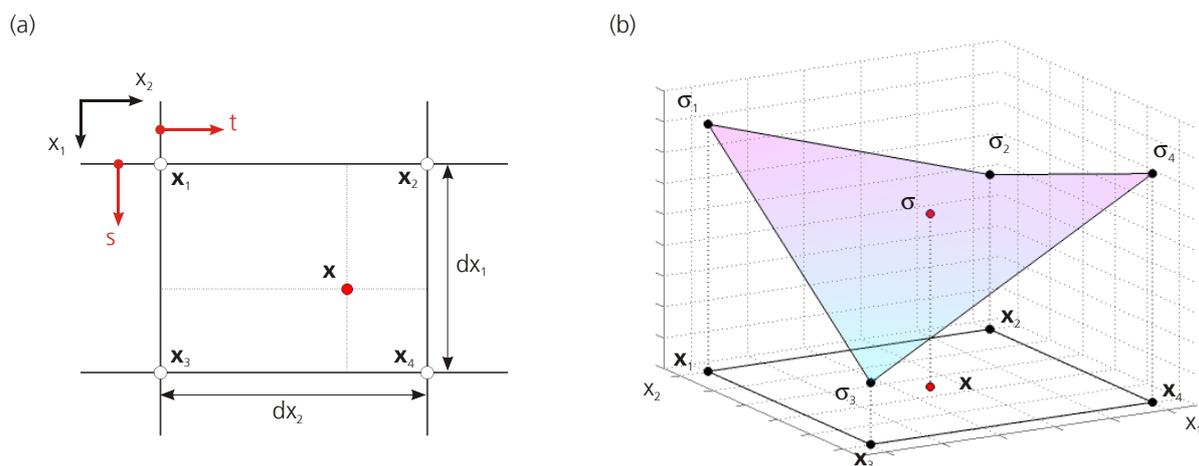


Bild 5.8: Lokale Koordinaten  $s, t$  (a) und interpolierte Höendarstellung des Spannungsverlaufs (b) im linearen Viereckelement, gestützt auf den Spannungen  $\sigma_i$  an den Elementknoten.

In Abhängigkeit des Bezugsknotens  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbf{K}_j$ , der den Ursprung der Zellkoordinaten  $(s, t)$  repräsentiert, gilt:

$$s = \frac{x_1 - x_1^0}{dx_1}, \quad t = \frac{x_2 - x_2^0}{dx_2}. \quad (5.8)$$

Die lokalen Zellkoordinaten sind jeweils nur innerhalb eines Viereckelementes der Gitterstruktur definiert. Bild 5.8 (a) zeigt die entsprechenden geometrischen Definitionen am Gitter. Die Interpolation innerhalb des linearen Viereckelementes wird in der Parameterdarstellung mit den nor-

mierten Koordinaten  $(s, t)$  durchgeführt. Für eine Spannung  $\sigma(\mathbf{x})$  am Punkt  $\mathbf{x} = (s, t) \in \mathbf{K}_j \subset \mathbb{R}^2$  folgt in Abhängigkeit der Spannungen  $\{\sigma_i\}_{i=1, \dots, 4}$  an den Elementknoten:

$$\sigma(\mathbf{x}) = (1-s)(1-t) \sigma_1 + (1-s)t \sigma_2 + s(1-t) \sigma_3 + s t \sigma_4 . \quad (5.9)$$

Die sich dadurch ausbildende bilineare Spannungsfläche  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{K}_j$  zeigt Bild 5.8 (b). Der Interpolant ist linear entlang der Kanten und quadratisch entlang der Diagonalen.

In Gleichung (5.9) enthaltene bilineare Funktionen spannen den Polynomraum  $\mathcal{Q}_1(\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^2)$  über dem Viereckelement  $\mathbf{K}$  auf:  $\mathcal{Q}_1(\mathbf{K}) = \text{span}\{1, s, t, st\}$ . Ausgedrückt mit den nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, 4}$ ,  $\text{supp}(\phi_i) = \mathbf{K}$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (1-s)(1-t) & \phi_2 &= (1-s)t \\ \phi_3 &= s(1-t) & \phi_4 &= s t \end{aligned} \quad (5.10)$$

folgt für die bilineare Spannungsinterpolation

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 \sigma_i \phi_i(\mathbf{x}) . \quad (5.11)$$

Die Eindeutigkeit der Abbildung ist durch die vier Elementknoten infolge  $\dim(\mathcal{Q}_1(\mathbf{K})) = 4$  gegeben.

## 5.4 Rekonstruktionsmethoden

Wie schon erwähnt, kann die Rekonstruktion diskreter Funktionswerte durch Interpolations- oder Approximationsmethoden umgesetzt werden. Eine weitere Unterscheidung bietet die Klassifizierung in global und lokal. Innerhalb globaler Methoden sind die berechneten Funktionswerte von allen gegebenen Daten beeinflusst. Dagegen werden bei lokalen Methoden nur die in unmittelbarer Nähe gelegenen Daten herangezogen. Letztere sind weniger sensitiv gegenüber ortsbezogenen Schwankungen oder Änderungen. Übersichten publizierter Rekonstruktionsmethoden auf Basis beliebig verteilter Datenmengen können neben bereits zitierter Literatur auch [AMIDROR 2002], [NIELSON ET AL. 1997], [LEHMANN ET AL. 1999], [ISKE 2004] oder [FRANKE & SALKAUSKAS 1996] entnommen werden.

Im Hinblick auf die Anwendung innerhalb der Ultraschall-Eigenstressanalyse sind die nachfolgend erläuterten Methoden in den Rekonstruktionsalgorithmen umgesetzt. Insbesondere wird auf die numerische Implementierung zur stabilen Anwendung eingegangen.

- Lineare Interpolation wird unmittelbar durch die Strukturdiskretisierung vorgegeben. Die Stützspannungen werden innerhalb der Dreiecke lokal mit zugehöriger Elementdefinition wei-

terverarbeitet.

- Die ursprünglich auf [HARDY 1971] zurückgehende globale Interpolation mit radialen Basisfunktionen ist nach [FRANKE 1982], [FRANKE & NIELSON 1991] mathematisch eine der elegantesten Techniken. Bei dieser Methode übt jeder Funktionswert einen radialsymmetrischen Einfluss auf den Interpolationswert aus.
- Die lokale NATURAL NEIGHBOR Interpolation nach [SIBSON 1981] basiert auf einer Flächenwichtung und erfordert nicht das Lösen eines Gleichungssystems. Das hinterlegte VORONOI-Diagramm als geometrische Basis ist eindeutig im Bezug auf die Stützstellen. Folglich ist auch der daraus abgeleitete Interpolant eindeutig.
- Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Membranmodell konstruiert global eine approximierte Fläche im Zwischenraum der Stützwerte. Darin wird die Fläche der Funktionswerte im mechanisch übertragenen Sinne als elastische Membran modelliert, die über Federn mit den Stützwerten verbunden ist. Die Lage der Membranfläche stellt einen Kompromiss zwischen erfüllten Interpolationsbedingungen und Glattheit dar. Einerseits wird versucht, den Abstand zwischen Membran und Stützwert zu minimieren. Andererseits sind konträr dazu aber auch Regularisierungsbedingungen berücksichtigt, die das Membranverhalten näherungsweise abbilden und die gleichförmige Ausbildung gewährleisten.
- Ergänzend zu den vorherigen Methoden wird die Rekonstruktion durch ein bivariates Polynom  $k$ -ten Grades und durch einen kubischen Spline betrachtet.

### 5.4.1 Lineare Interpolation

Lineare Interpolation wird unmittelbar durch die in Kapitel 5.3 durchgeführte Strukturdiskretisierung impliziert. Das lokale Interpolationsmodell lässt sich aus der DELAUNAY-Triangulierung und dem linearen Dreieckelement ableiten [NIELSON & FRANKE 1983], [NIELSON ET AL. 1997]. Innerhalb einer triangulierten Punktmenge kann an beliebiger Stelle  $\mathbf{x} \in \Omega$  die zugehörige Spannung  $\sigma(\mathbf{x})$  mit der Elementdefinition angegeben werden. Die Spannung berechnet sich analog Gleichung (5.7) durch sukzessives Entwickeln der nach (5.2) definierten nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_k\}$  und assoziierten Knotenspannungen  $\{\sigma_k\}$ . Dazu wird das übergeordnete Dreieck herangezogen, das  $\mathbf{x}$  umschließt und von Messpositionen  $\{\mathbf{x}_k\} \in X$  aufgespannt wird.

Graphisch nachvollziehbar am Beispiel in Bild 5.4 bedeutet das konkret für die Anwendung der linearen Interpolation: Für alle generierten Punkte  $\mathbf{x}_i \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ , die Knoten der engmaschigeren Vernetzung (Bild 5.4 (c), (d)), ist das Dreieck aus der triangulierten Punktmenge  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$  (Bild 5.4 (a), (b)) aufzufinden, das  $\mathbf{x}_i$  umschließt. Die gesuchte Spannung am Punkt  $\mathbf{x}_i$  erhält man anschließend durch lokale Interpolation in Abhängigkeit der gewichteten

Spannungen  $\{\sigma_k\}_{k=1,2,3} \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$  an den Knoten  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1,2,3} \in \mathbf{X}$  des umschließenden Elementes:

$$\sigma_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^3 \phi_k(\mathbf{x}_i) \sigma_k, \quad i=1, \dots, N. \quad (5.12)$$

### 5.4.2 Radiale Basisfunktionen

Hierbei basiert die mathematische Rekonstruktion auf rotationssymmetrischen Zentrums- bzw. Basisfunktionen, die an vorgegebenen Stützstellen aufgespannt und additiv überlagert werden. Für eine bestimmte Klasse von radialen Basisfunktionen lassen sich die freien Ansatzparameter der Superposition direkt aus der Lösung eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Zusammenfassungen über die Interpolation und Approximation durch radiale Basisfunktionen geben unter anderem [DYN 1989], [POWELL 1992], [BUHMANN 1993], [LIGHT 1994], [SCHABACK 1995A] und [BUHMANN 2003]. Radiale Basisfunktionen  $\Phi$  sind stetige, translations- und rotationsinvariante Funktionen der Form

$$\begin{aligned} \Phi: \Omega \times \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) &\mapsto \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2) = \phi\left(\sqrt{\sum_{i=1}^2 |x_i - x_j^i|^2}\right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die radialsymmetrische Konstruktion der datenabhängigen Funktion  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$  über eine univariate Funktion  $\phi: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  wird im Allgemeinen, wie auch im Rahmen dieser Arbeit, mit der EUKLIDISCHEN Norm durchgeführt. Das lineare Modell der globalen Rekonstruktionsfunktion bezieht sich auf einen datenabhängigen Linearraum

$$\mathcal{F}_{\mathbf{x}, \Phi} = \left\{ \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (5.14)$$

$\mathcal{F}_{\mathbf{x}, \Phi}$  ist die Menge der gewichteten Linearkombinationen von Translaten einer radialen Funktion  $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)$ , die jeweils in den Punkten  $\mathbf{x}_j \in \Omega$  zentriert sind. Unter Einbeziehung aller LAGRANGE Interpolationsbedingungen resultiert daraus das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2) = \sigma_i, \quad i=1, \dots, M. \quad (5.15)$$

Die eindeutige Lösbarkeit der Expansionskoeffizienten  $\alpha_j$  setzt eine nichtsinguläre Koeffizienten- bzw. Systemmatrix

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \Phi} = \left( \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2) \right)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq i \leq M}} \quad (5.16)$$

voraus. Eine stabile Rekonstruktion erfordert zusätzlich, dass  $\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \Phi} \in \mathbb{R}^{M, M}$  positiv definit ist. Im Zusammenhang mit radialen Basisfunktionen stellt der Begriff der positiven Definitheit ein wich-

tiges Kriterium dar. Diese Eigenschaft ist direkt von der Wahl der Basisfunktion  $\phi$  abhängig und wird nicht von allen radialsymmetrischen Funktionen erfüllt. Unter den in Tabelle 5.1 aufgelisteten radialen Basisfunktionen ist nur die GAUSS-Funktion positiv definit. Die restlichen-, insbesondere die am häufigsten zur Datenrekonstruktion angewendeten THIN-PLATE- und MULTIQUADRIC-Funktionen sind bedingt positiv definit [MICCHELLI 1986]. Eine mit diesen Funktionen konstruierte symmetrische Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_{\mathbf{x},\phi}$  wird bedingt positiv definit auf  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , wenn der Vektor  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$  aus (5.15) zusätzlich die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^M \alpha_j p_k(\mathbf{x}_j) = 0 \quad (5.17)$$

für alle Polynome  $p_k \in \{1, x_1, x_2\}$  des Linearraums  $\mathcal{P}_1(\Omega \subset \mathbb{R}^2) = \text{span}\{1, x_1, x_2\}$  erfüllt. Dadurch ist begründet,  $\dim(\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^2)) = 3$  zusätzliche Freiheitsgrade einzubinden, um wiederum für hinreichend große Werte von  $M \in \mathbb{N}$  ein bestimmtes Gleichungssystem zu erhalten. Die Addition von  $\mathcal{P}_1$  zu  $\mathcal{F}_{\mathbf{x},\phi}$  ergibt den polynomial erweiterten und für die Rekonstruktionsproblematik letztlich relevanten Funktionenraum

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x},\phi} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{F}_{\mathbf{x},\phi} = \mathcal{P}_1 + \left\{ \sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) : \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum_{j=1}^M \alpha_j p_k(\mathbf{x}_j) = 0 \right\}. \quad (5.18)$$

Dementsprechend geht (5.15) in das quadratische  $(M+3, M+3)$ -Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2) + \sum_{k=1}^3 \beta_k p_k(\mathbf{x}_i) &= \sigma_i, \quad 1 \leq i \leq M \\ \sum_{j=1}^M \alpha_j p_k(\mathbf{x}_j) + 0 &= 0, \quad 1 \leq k \leq 3 \end{aligned} \quad (5.19)$$

über [SCHABACK 1997], [BUHMANN 2003]. Die unbekanntenen Vektoren  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{R}^M$  und  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$  werden durch Implementierung von (5.19) mit entsprechend konstruierten Koeffizientenmatrizen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{x},\phi} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\alpha_1 & \dots & \alpha_M]^T \\ [\beta_1 & \beta_2 & \beta_3]^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\sigma_1 & \dots & \sigma_M]^T \\ [0 & 0 & 0]^T \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x},\phi} = \left( \phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2) \right)_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq M}} \in \mathbb{R}^{M,M}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \left( p_k(\mathbf{x}_j) \right)_{\substack{1 \leq j \leq M \\ 1 \leq k \leq 3}} \in \mathbb{R}^{M,3}$$

numerisch durch den MATLAB® eigenen Backslash-Operator [GRAMLICH & WERNER 2000], [QUARTERONI & SALERI 2006] berechnet. Die Lösung von (5.20) ist eindeutig, wenn die Punktmenge  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$  bezüglich  $\mathcal{P}_1(\Omega)$  nicht entartet, d.h. regulär ist [MICCHELLI 1986]. Diese Einschränkung hat in der Praxis nur eine untergeordnete Relevanz. Damit lassen sich die Span-

nungen  $\sigma(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ , aus der Linearkombination

$$\sigma(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi \left( \left\| (x_1, x_2) - (x_1^j, x_2^j) \right\|_2 \right) + \beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 x_2 \quad (5.21)$$

mit den berechneten Expansionskoeffizienten rekonstruieren.

Tabelle 5.1: Optional implementierte radiale Basisfunktionen.

radiale Funktion	$\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
(a) GAUSS:	$\phi(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{c}\right)$ , $c \in \mathbb{R}$
(b) THIN-PLATE:	$\phi(r) = -r^2 \log(r+1)$ [DUCHON 1979]
(c) MULTIQUADRIC:	$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ , $c \in \mathbb{R}$ [HARDY 1971]
(d) CUBIC:	$\phi(r) = r^3$

**Anwendung MULTIQUADRIC.** Zur Spannungsabbildung wird die MULTIQUADRIC-Funktion angewandt. Diese ist numerisch stabil bezüglich des Formparameters  $c \in \mathbb{R}$  [FRANKE & NIELSON 1991], durch den die Kondition der zugehörigen Koeffizientenmatrix beeinflusst werden kann. Die Wahl des Parameters wird oftmals direkt von der Anwendung bestimmt und ist Gegenstand grundlegender Untersuchungen [CARLSON & FOLEY 1991], [BUHMANN & MICHELLI 1992], [FRANKE ET AL. 1994], [FOLEY 1994], [RIPPA 1999]. Aufgrund der vorliegenden eher gleichmäßigen Stützstellenverteilung kann bei der numerischen Umsetzung von einem konstanten Formparameter ausgegangen werden. Die als Standard implementierte Berechnung

$$c = \left( \frac{\left| \max\{x_1^j\} - \min\{x_1^j\} \right| \left| \max\{x_2^j\} - \min\{x_2^j\} \right|}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.22)$$

durch Abschätzung in der Größenordnung des mittleren Abstands der Punktmenge  $\{\mathbf{x}_j = (x_1^j, x_2^j) \in X, j = 1, \dots, M\}$  liefert in allen Beispielen zufrieden stellende Ergebnisse; ebenfalls in den Beispielen von [BOZZINI & LENARDUZZI 2005] hervorgehoben.

**Option Approximation.** Zusätzlich ist die Möglichkeit der Erzeugung von approximierten Spannungen implementiert. Der Verlauf der Spannungsfläche kann zwischen den gegebenen Stützwerten des Ist-Zustands hinsichtlich beabsichtigter Glättung angepasst werden. Dazu wird

eine Modifikation an der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_{x,\phi}$  vorgenommen. Deren Konstruktion nach (5.16) bedingt eine mit Null besetzte Diagonale:  $\text{diag}(\mathbf{A}_{x,\phi}) = 0$ . Die Besetzung der Diagonale mit einem Glättungsparameter  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\text{diag}(\mathbf{A}_{x,\phi}) = \varepsilon$ , führt dazu, dass die Interpolationsbedingungen nicht mehr identisch erfüllt und die Stützspannungen nur noch näherungsweise wiedergegeben werden.

**Numerische Implementierung.** Die numerische Implementierung der eben beschriebenen Vorgehensweise zur interpolierten Berechnung der Spannungen  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$  an den erzeugten Vernetzungsknoten  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  wird im Pseudo-Code (5.23) skizziert.

0.  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ ,  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$   
 $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_M] \in \mathbb{R}^{2,M}$ ,  $\mathbf{b} = [\sigma_1 \cdots \sigma_M]^T \in \mathbb{R}^M$
1. Trianguliere  $\mathbf{X} \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_E\}$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$   
 Sortiere/Kontrolle Knotenanordnung
2. Definiere  $\phi$  (MULTIQUADRIC)  
 Berechne/Setze  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$
3. Konstruiere  $\mathbf{A}_{x,\phi} \in \mathbb{R}^{M,M}$ :  
 for  $i = 1:M$   
   for  $j = 1:i$   
      $\mathbf{A}_{x,\phi}(i,j) = \phi(\|\mathbf{x}(:,i) - \mathbf{x}(:,j)\|_2)$   
      $\mathbf{A}_{x,\phi}(j,i) = \mathbf{A}_{x,\phi}(i,j)$   
   end  
    $\mathbf{A}_{x,\phi}(i,i) = \mathbf{A}_{x,\phi}(i,i) - \varepsilon$   
 end
4. Polynomiale Erweiterung  $\mathbf{P}_x \in \mathbb{R}^{M,3}$ :  
 $\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_M \end{bmatrix}^T$
5. Kopplung: (5.23)  
 $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x,\phi} & \mathbf{P}_x; & \mathbf{P}_x^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M+3, M+3}$   
 $\begin{bmatrix} \mathbf{b}; & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{M+3}$
6. Lösung:  
 $\begin{bmatrix} [\alpha_1 \cdots \alpha_M]^T & [\beta_1 \beta_2 \beta_3]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x,\phi} & \mathbf{P}_x; & \mathbf{P}_x^T & 0 \end{bmatrix} \setminus \begin{bmatrix} \mathbf{b}; & 0 \end{bmatrix}$
7. Berechnung Interpolant an  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N]$ :  
 for  $i = 1:N$   
   for  $j = 1:M$   
      $r(j) = \|\mathbf{X}(:,i) - \mathbf{x}(:,j)\|_2$   
   end

$$\sigma(i) = \sum_{j=1}^M \alpha_j \phi(r(j)) + \beta_1 + \beta_2 x_1^i + \beta_3 x_2^i$$

end

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma(1) \cdots \sigma(N)]$$

### 5.4.3 NATURAL NEIGHBOR Interpolation

Die erstmals von [SIBSON 1981] eingeführte, auch SIBSON-Interpolation genannte Methode ist lokal und basiert im  $\mathbb{R}^2$  auf dem VORONOI-Diagramm, die geometrisch duale Struktur zur DELAUNAY-Triangulierung (Kapitel 5.3.1). Das in Bild 5.9 (a) konstruierte VORONOI-Diagramm  $\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \{V_1, \dots, V_E\}$  einer Punktmenge  $\mathbf{X} \subseteq \Omega$  ist ein irreguläres Gitter in der Ebene, dessen disjunkten Zellen geradlinig begrenzte, konvexe Polygone sind. Die Zerlegung ist eindeutig. Alle geometrischen Zellenparameter sind stetig abhängig von den Eckpunktskoordinaten. Ein Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  liegt genau dann in der von  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$  aufgespannten Zelle  $V_i(\mathbf{x}_i)$ , wenn für den EUKLIDISCHEN Abstand gilt:

$$V_i(\mathbf{x}_i) = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2 \quad \forall \mathbf{x}_{j \neq i} \in \mathbf{X} \right\}. \quad (5.24)$$

Jeder Eckpunkt einer VORONOI-Zelle definiert den Umkreismittelpunkt eines DELAUNAY-Dreiecks im dualen Netzwerk [PREPARATA & SHAMOS 1985], [AURENHAMMER 1991]. Zwei Punkte  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{x}_j$  bezeichnet man als so genannte natürliche Nachbarn, wenn diese direkt durch die Seite eines DELAUNAY-Dreiecks miteinander verbunden sind und ihre korrespondierenden VORONOI-Zellen eine gemeinsame Kante besitzen:  $V_i(\mathbf{x}_i) \cap V_j(\mathbf{x}_j) \neq \emptyset$ . Der Interpolationswert bei der NATURAL NEIGHBOR Interpolation setzt sich aus einer flächengewichteten Summe in Abhängigkeit der natürlichen Nachbarn im VORONOI-Diagramm zusammen. Der Vorteil gegenüber der inversen Abstandswichtung [SHEPARD 1968], [GORDON & WIXOM 1978] liegt darin, dass lokale anisotrope Änderungen der Datenverteilung und Datendichte kompensiert werden [WATSON 1992]. Insbesondere auch in dünn besetzten Gebieten gewährleistet die SIBSON-Interpolation eine robuste Rekonstruktion ohne Artefakte.

Die flächenabhängigen Koeffizienten bezeichnet man auch als NATURAL NEIGHBOR Koordinaten [SIBSON 1980]. Diese berücksichtigen sowohl den Abstand als auch die gebietsbezogene Verteilung. Die Definition der ortsabhängigen NATURAL NEIGHBOR Koordinaten lässt sich anhand Bild 5.9 erläutern. Ausgangssituation ist das hinterlegte VORONOI-Diagramm  $\mathcal{V}(\mathbf{X})$  (Bild 5.9 (a)). Für einen betrachteten Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  (Bild 5.9 (b)) innerhalb der Zellstruktur wird das VORONOI-Diagramm  $\mathcal{V}(\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\})$  der Vereinigungsmenge  $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\}$  konstruiert (Bild 5.9 (c)). Die natürlichen Nachbarn  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  von  $\mathbf{x}$  sind mit  $\mathbf{x}$  direkt durch eine Dreiecksseite der dualen DELAU-

NAY-Triangulierung miteinander verbunden; in Bild 5.9 (c) sind es fünf natürliche Nachbarn. Als NATURAL NEIGHBOR Koordinate  $\phi_i(\mathbf{x})$  von  $\mathbf{x}$  bezüglich eines natürlichen Nachbarn  $\mathbf{x}_i$  wird der Flächenquotient

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{A_i(\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{V}_i(\mathbf{x}_i))}{A(\mathbf{V}(\mathbf{x}))} \quad (5.25)$$

definiert.  $A_i(\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{V}_i(\mathbf{x}_i))$  ist die Überlapp- bzw. Schnittfläche der Polygonfläche  $A(\mathbf{V}(\mathbf{x}))$  der VORONOI-Zelle  $\mathbf{V}(\mathbf{x})$  aus  $\mathcal{V}(\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\})$  mit der Polygonfläche  $A(\mathbf{V}_i(\mathbf{x}_i))$  der Zelle des natürlichen Nachbarn  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x}_i)$  aus  $\mathcal{V}(\mathbf{X})$ . In Bild 5.9 (d) ist die Schnittfläche  $A_2(\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{V}_2(\mathbf{x}_2))$  des natürlichen Nachbarn  $\mathbf{x}_2$  von  $\mathbf{x}$  in der überlagerten Darstellung hervorgehoben. Die Schnittmenge ist nur für die natürlichen Nachbarn nicht leer:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{V}_j(\mathbf{x}_j) = \emptyset, \quad \forall \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}. \quad (5.26)$$

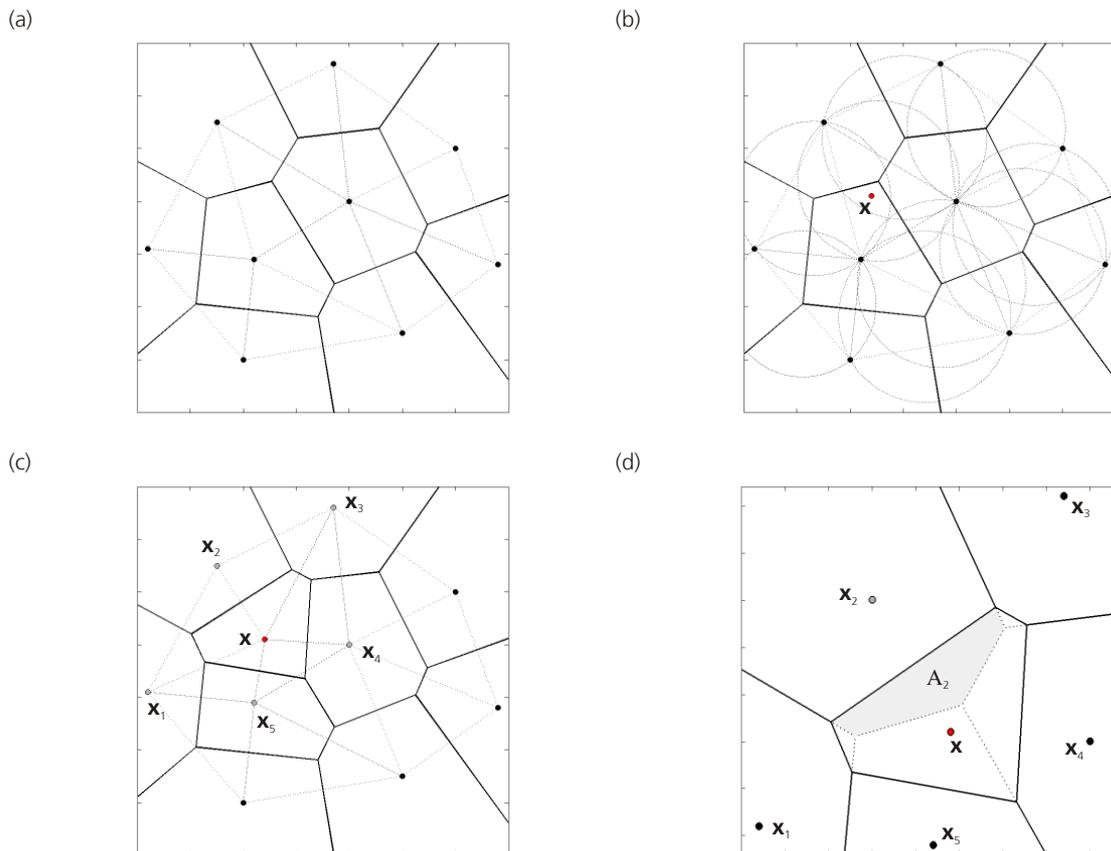


Bild 5.9: VORONOI-Diagramm und duale DELAUNAY-Triangulierung einer Punktmenge  $\mathbf{X}$  (a), zusätzlich konstruierte Umkreise der DELAUNAY-Dreiecke und eingefügter Punkt  $\mathbf{x}$  (b), VORONOI-Diagramm und DELAUNAY-Triangulierung der Menge  $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\}$  (c), Schnittfläche  $A_2(\mathbf{V}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{V}_2(\mathbf{x}_2))$  des natürlichen Nachbarn  $\mathbf{x}_2$  von  $\mathbf{x}$  (d).

Die NATURAL NEIGHBOR Koordinaten  $\phi_{i=1,\dots,n}(\mathbf{x})$  der  $n$  natürlichen Nachbarn  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  von  $\mathbf{x}$  erfüllen folgende Eigenschaften innerhalb der konvexen Hülle  $\text{conv}\{\mathbf{X}\}$  [SIBSON 1980], [PIPER 1993], [BROWN 1997]:

$$0 \leq \phi_i \leq 1, \sum_{i=1}^n \phi_i = 1, \phi_i = \delta_{ij} . \quad (5.27)$$

$\phi_i(\mathbf{x})$  ist außer in  $\mathbf{x}_i$  stetig differenzierbar und besitzt einen beschränkten Träger.  $\text{supp}(\phi_i)$  ist die mit  $\text{conv}\{\mathbf{X}\}$  geschnittene Vereinigungsmenge der Dreiecksumkreise, die den Punkt  $\mathbf{x}_i$  als Knoten enthalten (Bild 5.9 (b)).

Die NATURAL NEIGHBOR interpolierte Spannung  $\sigma(\mathbf{x})$  am Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  wird als Linearkombination der an den natürlichen Nachbarn  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  vorliegenden Spannungen  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  berechnet, gewichtet mit den korrespondierenden NATURAL NEIGHBOR Koordinaten  $\phi_i(\mathbf{x})$ :

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_i, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega . \quad (5.28)$$

**Numerische Implementierung.** Die Hauptoperation der NATURAL NEIGHBOR Interpolation besteht in der Flächenberechnung konvexer Polygone. Nach Identifikation der Punkte, die ein konvexes Polygon aufspannen, kann die zugehörige Polygonfläche über die Summe der Determinanten zweier direkt miteinander verbundenen Punkte angegeben werden. Diese Vorgehensweise geht allerdings mit aufwendiger Knotensuche und Schnittflächenbestimmung überlagerter VORONOI-Diagramme einher. Zudem muss für jeden eingefügten Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$ , an dem eine Spannung abgefragt wird, ein neues VORONOI-Diagramm oder eine neue DELAUNAY-Triangulierung der Punktmenge  $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\}$  konstruiert werden. Um dieser Problematik zu begegnen, ist für die Berechnung der NATURAL NEIGHBOR Interpolierenden die von [WATSON 1992], [WATSON 1994] publizierte Konstruktionsidee adaptiert und in modifizierter Weise implementiert. Darin setzen sich die erforderlichen Polygonflächen aus akkumulierten positiven- sowie negativen Dreiecksflächen zusammen. Die Konstruktion basiert auf der Ausnutzung der Dualitätseigenschaft: Eckpunkte polygonaler VORONOI-Zellen sind gleichzeitig auch Umkreismittelpunkte assoziierter DELAUNAY-Dreiecke im dualen Graph.

Zum Auffinden der natürlichen Nachbarn eines Punktes  $\mathbf{x}$  innerhalb der Punktmenge  $\mathbf{X}$  ist es nicht notwendig, die Vereinigungsmenge  $\mathbf{X} \cup \{\mathbf{x}\}$  zu triangulieren und direkt mit  $\mathbf{x}$  verbundene Knoten zu identifizieren. Äquivalent dazu kann die Umkreis-Charakterisierung der DELAUNAY-Triangulierung  $\mathcal{T}(\mathbf{X}) = \{\mathbf{T}_j\}_{j=1,\dots,E}$  von  $\mathbf{X}$  ausgenutzt werden. Der Punkt  $\mathbf{x}$  liegt innerhalb den Umkreisen der DELAUNAY-Dreiecke, die von dessen natürlichen Nachbarn  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  aufgespannt

werden; im weitem Nachbardreiecke genannt. Folglich sind zur Berechnung der NATURAL NEIGHBOR Koordinaten  $\phi_{i=1,\dots,n}(\mathbf{x})$  nur die Nachbardreiecke aus  $\mathcal{T}(\mathbf{X})$  relevant. Konform dieser Überlegung lässt die Definition der Interpolierenden (5.28) folgende Modifikation zu:

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &= \sum_i \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_i = \sum_i \frac{A_i}{A} \sigma_i \\ &= \frac{\sum_i \sigma_i A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\sum_i \sigma_i \left( \sum_{T_j} A_i^{T_j} \right)}{\sum_i \left( \sum_{T_j} A_i^{T_j} \right)}.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Die darin enthaltene Summe  $\sum_{T_j} A_i^{T_j}$  entspricht der Betrachtung der Nachbardreiecke  $T_j$  von  $\mathbf{x}$ . Dem Umstand, dass ein natürlicher Nachbar  $\mathbf{x}_i$  in mehreren Nachbardreiecken als Elementknoten auftreten kann, wird durch sowohl positive- als auch negative Flächeninhalte  $A_i^{T_j}$  der sukzessiv konstruierten Dreiecke Rechnung getragen. Voraussetzung dafür ist eine einheitliche kanonische Sortierung der Knoten im Dreieckselement. Erst dann wird das äquivalente Zerlegen der polygonalen Wichtungsfläche in vorzeichenbehaftete Dreiecksflächen sichergestellt.

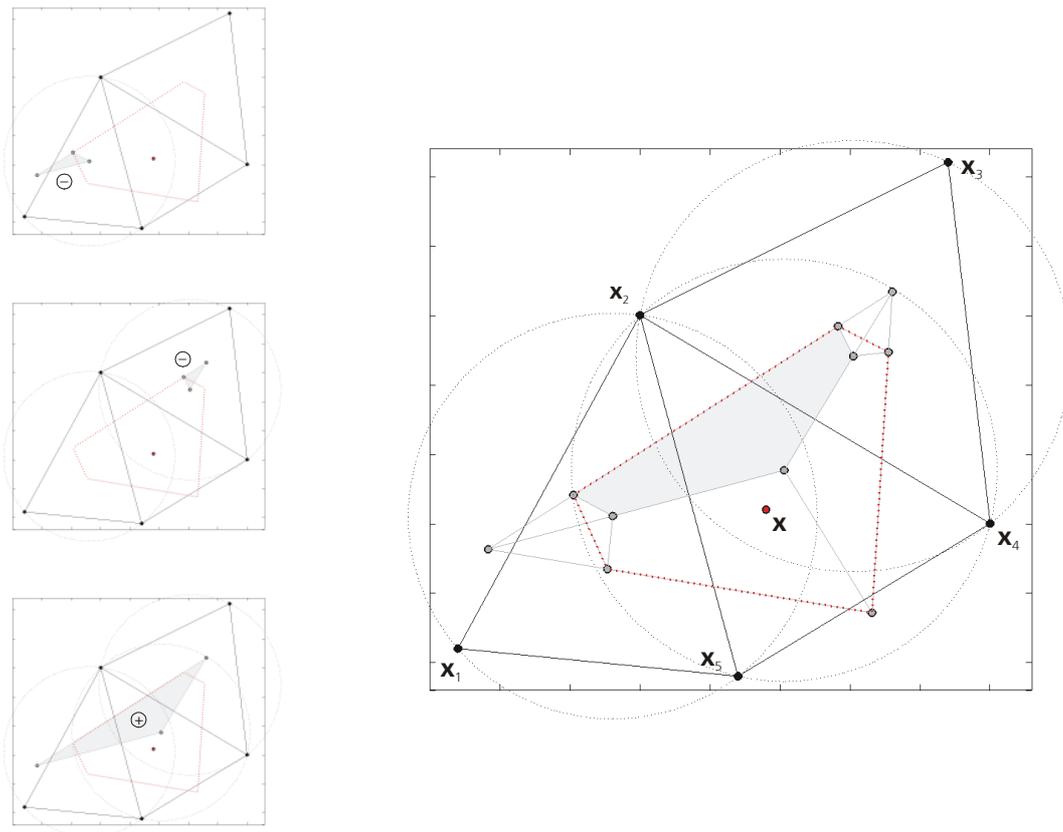


Bild 5.10: Visualisiertes Konstruktionsprinzip der polygonalen Wichtungsfläche des natürlichen Nachbarn  $\mathbf{x}_2$  von  $\mathbf{x}$  durch Summation vorzeichenbehafteter Dreiecke.

Der implementierte Code für die Berechnung der NATURAL NEIGHBOR Interpolierenden an einem

Punkt  $\mathbf{x}$  ist im Pseudo-Algorithmus (5.30) dargestellt.

0.  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ ,  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_M\}$   
 $\mathbf{x} \in \Omega$
1. Trianguliere  $X \rightarrow \mathcal{T}(X) = \{T_1, \dots, T_E\}$   
 Kontrolle Kantenlage  $\mathbf{x} \rightarrow$  edge swapping  
 Zähler = 0, Nenner = 0
2. *for*  $j = 1 : E$   
     Berechne Umkreismittelpunkt  $(T_j) \rightarrow \mathbf{cc}_j$   
     Berechne Umkreisradius  $(T_j) \rightarrow r_j$
3. *if*  $\|\mathbf{x} - \mathbf{cc}_j\|_2 < r_j$   
     Knoten  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}_j \in T_j \subseteq \mathcal{T}(X)$
4. *for*  $i = 1 : 3$   
     Berechne Umkreismittelpunkt  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2})_{i \bmod 3} \rightarrow \mathbf{cc}_i$  (5.30)  
     *end*  
     Berechne akkumulierte Summe aus Dreiecksflächen :
5. *for*  $i = 1 : 3$   
      $A_i^{T_j} = 0.5 \det(\mathbf{cc}_{i+1}, \mathbf{cc}_{i+2}, \mathbf{cc}_j)_{i \bmod 3}$   
     Zähler = Zähler +  $\sigma_i A_i^{T_j}$   
     Nenner = Nenner +  $A_i^{T_j}$   
     *end*  
     *end*  
     *end*
6. Berechne NATURAL NEIGHBOR Interpolierende am Punkt  $\mathbf{x}$ :  

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Die Triangulierung  $\mathcal{T}(X)$  der Punktmenge  $X$  liefert die DELAUNAY-Dreiecke  $\{T_j\}_{j=1, \dots, E}$ . In einer äußeren Schleife über alle Dreieckselemente werden die einzelnen Dreiecke bezüglich des Abfragepunktes  $\mathbf{x}$  abgearbeitet. Mit der Berechnung von Umkreismittelpunkt  $\mathbf{cc}_j$  und Umkreisradius  $r_j$  (siehe Kapitel 5.3.3) lässt sich überprüfen, ob die Knoten des aktuell betrachteten Dreiecks  $T_j$  natürliche Nachbarn von  $\mathbf{x}$  sind. Handelt es sich um ein Nachbardreieck, werden in einer Schleife über die drei Elementknoten  $\{\mathbf{x}_{i=1,2,3}\}_j \in T_j$  nacheinander Umkreismittelpunkte  $\mathbf{cc}_i$  konstruiert. Diese gehören zu Dreiecken, die aus Permutationen der Punktmenge  $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_{i+2}\}$  bezüglich zweier Elementknoten  $\mathbf{x}_i$  sowie dem abgefragten Punkt  $\mathbf{x}$  gebildet werden. Dem schließt sich die sukzessive Berechnung der notwendigen Dreiecksflächeninhalte  $A_i^{T_j}$  via Gleichung (5.4)

an. Die dazu notwendigen Knoten sind aus  $\{\mathbf{cc}_{i+1}, \mathbf{cc}_{i+2}, \mathbf{cc}_j\}$  entnommen, wobei die  $\mathbf{cc}_i$  zyklisch eingehen. Gleichzeitig wird auch kontinuierlich die akkumulierte Summenbildung von Zähler und Nenner aus Gleichung (5.29) durchgeführt. Nach äußerem Schleifendurchlauf sind zwangsläufig alle eingehenden Nachbardreiecke abgearbeitet. Die finale Quotientenbildung der Aufsummierungen Zähler und Nenner liefert den gesuchten Interpolationswert  $\sigma(\mathbf{x})$ .

Das Prinzip des eben beschriebenen Berechnungsablaufs ist in Bild 5.10 anhand der Punktmenge aus Bild 5.9 visualisiert. Die grau hinterlegten Punkte entsprechen den erzeugten Umkreismittelpunkten  $\mathbf{cc}_j$  und  $\mathbf{cc}_i$ . Diese sind gleichzeitig notwendige Stützstellen, um die rot punktierte VORONOI-Zelle  $V(\mathbf{x})$  sowie für die Wichtung relevante Polygone aus den sukzessiv konstruierten, grau markierten Dreiecken zusammensetzen. Hervorgehoben ist analog Bild 5.9 (d) die zum Knoten  $\mathbf{x}_2$  assoziierte Wichtungsfläche  $A_2(V(\mathbf{x}) \cap V_2(\mathbf{x}_2))$ .

#### 5.4.4 Membranmodell

Das Membranmodell konstruiert eine approximierte Spannungsfläche. Die eingehenden Spannungen an den Stützstellen werden nicht exakt reproduziert. Dabei wird der Abstand zwischen Fläche und Stützspannungen unter Vorgaben und Anforderungen der Applikation minimiert. Der Grundgedanke besteht darin, die Rekonstruktionsfläche in Form einer Membran näherungsweise abzubilden und im Zwischenraum der Spannungen über eine einstellbare Steifigkeit auszurichten. Die Membran wird als Grenzzustand einer dünnen KIRCHHOFF-Platte aufgefasst, die bei sehr kleiner Dicke eine Biegesteifigkeit besitzt.

**Mechanisches Analogon.** Die Idee des Modells basiert auf der Äquivalenz zum manipulierten Verhalten einer elastischen Membran. Die biegeeweiche Membran ist über elastische Federn mit den Spannungen an den Stützstellen verbunden. Jede Stützspannung verformt durch ihre assoziierten Federauslenkungen die Membran im Zwischenraum, so dass sich eine Endlage entsprechend Bild 5.11 einstellt. Alle Federn besitzen eine identische Federkonstante und sind parallel geschaltet. Die Wirkrichtung der Federn ist vertikal, d.h. parallel zur  $x_3$ -Achse. Federrückstellkräfte verformen die Membran zu einer gekrümmten Fläche. Die Biegesteifigkeit der Membran wirkt dieser Formänderung entgegen. Aus dem Verhältnis zwischen Membransteifigkeit und Federkonstante resultiert der Flächenverlauf im Zwischenraum. Mit Hilfe eines Modellparameters kann die Biegesteifigkeit der Membran in Relation zur Federkonstante eingestellt werden. Dieser so genannte Glättungsparameter ermöglicht die Fläche in Abhängigkeit der gegebenen Funktionswerte als Kompromiss zwischen Interpolationsgenauigkeit und Glattheit auszurichten. Die

Membranfläche kann auch als Lösung eines Minimierungsproblems der im Membran-Feder-System gespeicherten potenziellen Energie angesehen werden.

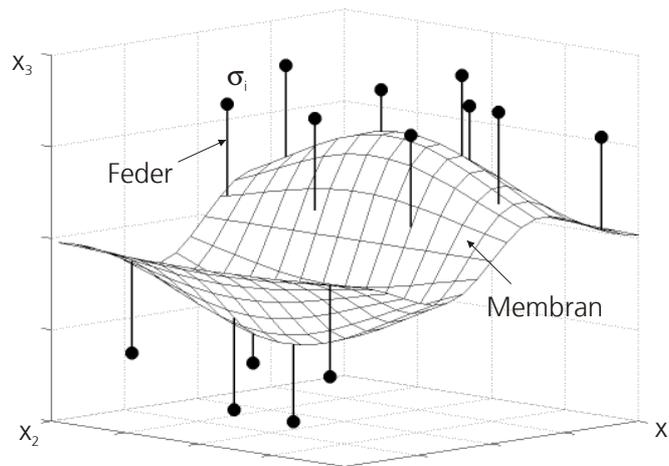


Bild 5.11: Membranmodell – durch Federauslenkungen verformte Membran im Zwischenraum der Spannungen.

**Modell-Methodologie.** Ein reguläres orthogonales, nicht notwendigerweise äquidistantes Viereckgitter  $\mathcal{K}(\Omega)$  ist die hinterlegte Struktur der Membran und gleichzeitig Grundlage für die Spannungsabbildung. Die einzelnen Zellen des orthogonalen Gitters sind als lineare Viereckelemente (siehe Kapitel 5.3.3) definiert. Die Membranfläche wird durch rekonstruierte Spannungen an den Gitterknoten aufgespannt. Bilineare Spannungsinterpolation verursacht die anfängliche Verformung der Membran. Zusätzliche Regulierungsbedingungen komplettieren die Methodologie, damit die implementierten Rekonstruktionsgleichungen näherungsweise ein zum Membranverhalten konsistentes Modell darstellen.

Sei ein Messpunkt  $\mathbf{x}_i$  aus der Stützstellenmenge  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,M}$  mit assoziierter Spannung  $\sigma_i$  innerhalb des Viereckelementes  $\mathbf{K}_j$  gelegen:  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{K}_j$ . Durch bilineare Interpolation lässt sich die Spannung im Punkt  $\mathbf{x}_i$  als Linearkombination der Spannungen an den Elementknoten konform (5.11) ausdrücken:

$$\sigma_i(\mathbf{x}_i) = \phi_1(\mathbf{x}_i)\sigma_1 + \phi_2(\mathbf{x}_i)\sigma_2 + \phi_3(\mathbf{x}_i)\sigma_3 + \phi_4(\mathbf{x}_i)\sigma_4, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbf{K}_j. \quad (5.31)$$

Die nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_k\}_{k=1,\dots,4}$  werden dabei durch die lokalen Zellkoordinaten  $s, t \in [0,1]$  ausgedrückt. Umgekehrt formuliert, für die vier unbekanntenen Knotenspannungen  $\{\sigma_k\}_{k=1,\dots,4}$  steht nur eine Bestimmungsgleichung zur Verfügung. Das lokale Interpolationssystem ist unterbestimmt. Beim Durchlauf über das gesamte Gitter liefern nur die Elemente  $\mathbf{K}_j \in \mathcal{K}(\Omega)$  entsprechende Beiträge zur Spannungsinterpolation, in denen Messpositionen enthalten sind.

Demzufolge wird das dadurch konstruierte lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{\mathcal{X},\mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} \quad (5.32)$$

in der Regel erheblich unterbestimmt. Der Spannungsvektor  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \cdots \sigma_N]^T$  enthält die unbekanntes Spannungen an den Elementknoten im Gitter, der Vektor  $\mathbf{b} = [\sigma_1 \cdots \sigma_M]^T$  die bekannten Spannungen an den Messpositionen  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,M}$ . Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_{\mathcal{X},\mathcal{K}(\Omega)} \in \mathbb{R}^{M,N}$  ist dünn besetzt und aus den Einträgen elementspezifischer Basisfunktionen aufgebaut.

Das unterbestimmte Gleichungssystem (5.32) besitzt unendlich viele Lösungen für die unbekanntes Knotenspannungen  $\boldsymbol{\sigma}$ . Deshalb sind zusätzliche Bedingungen zu schaffen, die die Lösungsvielfalt der Unterbestimmtheit einschränken und eine stabile numerische Lösung gewährleisten.

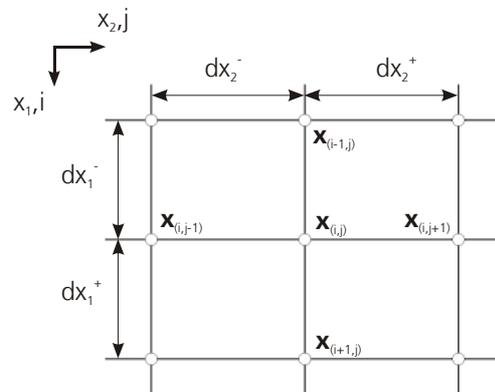


Bild 5.12: Definitionen am Gitter zur Berechnung der Differenzenquotienten am Elementknoten  $\mathbf{x}_{(i,j)}$ .

Die gewählte Lösungseinschränkung folgt dem Prinzip einer verallgemeinerten TIKHONOV-Regularisierung [TIKHONOV & ARSEININ 1977], [MOROZOV 1984]. Die zusätzlich eingebrachten Bedingungen haben das Ziel, die Ausbildung der Membranfläche durch eine geeignete Linearkombination der Unbekannten zu glätten. Dazu wird gefordert, dass die Spannung  $\sigma_{(i,j)}$  an einem Gitterknoten  $\mathbf{x}_{(i,j)}$  (siehe Bild 5.12) die LAPLACE-Bedingung

$$\Delta \sigma_{(i,j)} = \frac{\partial^2 \sigma_{(i,j)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{(i,j)}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5.33)$$

erfüllt. Das Membranverhalten als mechanisches Analogon zur approximierten Spannungsfläche wird näherungsweise ohne explizites Heranziehen der Platten- bzw. Membrangleichung mit dem LAPLACE-Operator  $\Delta$  beschrieben.

Die Substitution der partiellen Ableitungen mit den Finiten Differenzenquotienten [SCHWARZ 1997]

$$\frac{\partial \sigma_{(i,j)}}{\partial x_1} \approx \begin{cases} D_1^- \sigma_{(i,j)} = \frac{1}{dx_1^-} (\sigma_{(i,j)} - \sigma_{(i-1,j)}) \\ D_1^+ \sigma_{(i,j)} = \frac{1}{dx_1^+} (\sigma_{(i+1,j)} - \sigma_{(i,j)}) \end{cases} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \sigma_{(i,j)}}{\partial x_2} \approx \begin{cases} D_2^- \sigma_{(i,j)} = \frac{1}{dx_2^-} (\sigma_{(i,j)} - \sigma_{(i,j-1)}) \\ D_2^+ \sigma_{(i,j)} = \frac{1}{dx_2^+} (\sigma_{(i,j+1)} - \sigma_{(i,j)}) \end{cases}$$

führt auf die folgende Regularisierungsgleichung an einem Knoten  $\mathbf{x}_{(i,j)} \in \partial\Omega$  im Innern der Vernetzung:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{(i,j)} &\approx \frac{2}{(dx_1^- + dx_1^+)} (D_1^+ \sigma_{(i,j)} - D_1^- \sigma_{(i,j)}) + \frac{2}{(dx_2^- + dx_2^+)} (D_2^+ \sigma_{(i,j)} - D_2^- \sigma_{(i,j)}) \\ &= \frac{2}{dx_1^- (dx_1^- + dx_1^+)} \sigma_{(i-1,j)} - \frac{2}{dx_1^- dx_1^+} \sigma_{(i,j)} + \frac{2}{dx_1^+ (dx_1^- + dx_1^+)} \sigma_{(i+1,j)} \\ &\quad + \frac{2}{dx_2^- (dx_2^- + dx_2^+)} \sigma_{(i,j-1)} - \frac{2}{dx_2^- dx_2^+} \sigma_{(i,j)} + \frac{2}{dx_2^+ (dx_2^- + dx_2^+)} \sigma_{(i,j+1)} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.35)$$

Beim Durchlauf aller Netzelemente werden die durch die Gitterabstände  $dx_{(1,2)}^{(-,+)}$  gebildeten Expansionskoeffizienten der unbekanntenen Knotenspannungen in der dünn besetzten Regularisierungsmatrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \in \mathbb{R}^{N,N}$  zusammengefasst. Die Regularisierungsbedingung lautet dann:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad . \quad (5.36)$$

Aus der Verknüpfung von (5.32) und (5.36) resultiert das finale, um einen Regularisierungsterm erweiterte, lineare Gleichungssystem des Rekonstruktionsproblems

$$\|\mathbf{A}_{\mathbf{x},\mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma}\|_2^2 \longrightarrow \text{MIN} \quad , \quad (5.37)$$

worin der Lösungsvektor  $\boldsymbol{\sigma}$  durch Minimierung der Fehlerquadratsumme zu bestimmen ist. Der eingehende Regularisierungsparameter  $\gamma \in (0, \infty)$  wichtet alle zusätzlichen Zwangsbedingungen mit gleicher Intensität. Einerseits muss  $\gamma$  genügend klein sein, damit das Profil der Stützspannungen nicht zu stark verfälscht wird. Andererseits sollte  $\gamma$  auch groß genug gewählt werden, um ausreichend glatte Spannungsflächen zu erzeugen. Im Membranmodell entspricht  $\gamma$  dem einstellbaren Glättungsparameter, der die Ausbildung der Fläche als Funktion der beiden gegenläufigen Kennwerte Biegesteifigkeit und Federkonstante beeinflusst. Im Gegensatz zur automatischen Berechnung des Regularisierungsparameters [GOLUB & VON MATT 1997] kann durch die manuelle Eingabe des Modellparameters eine eventuell notwendige  $\gamma$ -Änderung nach Bewer-

tung der Spannungsfläche direkt vorgenommen werden.

**Anmerkung:** Eine leicht modifizierte Regularisierungsbedingung, die GRADIENT-Bedingung als Entkopplung der LAPLACE-Bedingung, ist als weitere Modelloption vorgesehen. Dazu wird bei einer unabhängigen Betrachtung der beiden Koordinatenrichtungen gefordert, dass an einem Elementübergang lediglich die beiden Richtungsableitungen parallel einer Koordinatenachse gleich sind:  $D_{(1,2)}^- \boldsymbol{\sigma}_{(i,j)} = D_{(1,2)}^+ \boldsymbol{\sigma}_{(i,j)}$ .

**Numerische Implementierung.** Die numerische Umsetzung des durch die Rekonstruktionsgleichung (5.37) beschriebenen Membranverhaltens wird anhand des Pseudo-Codes (5.38) erklärt.

0.  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\} \subset \Omega$ ,  $\mathbf{b} = [\sigma_1 \dots \sigma_M]^T$   
 $\gamma \in (0, \infty)$ , gradient | laplace
1. Orth. Viereckvernetzung  $\rightarrow \mathcal{K}(\Omega) = \{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_E\}$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$   
 Kontrolle Knotenanordnung
2. Ermittle Elementkantenlängen  $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2 \rightarrow$  Normierung  $d\mathbf{x}_{(1,2)} = d\mathbf{x}_{(1,2)} / \text{mean}(d\mathbf{x}_{(1,2)})$
3.  $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ :  
 Finde  $\mathbf{K}_j$  mit  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{K}_j$   
 Berechne  $(s, t)_i \in \mathbf{K}_j$   
 Zuweisung  $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, 4}^i \in \mathbf{K}_j$   
 Konstruiere *sparse*  $(\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)})$  mit  $\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}$
4.  $\forall \mathbf{x}_{(i,j)} \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ :  
 Berechne Koeffizienten  $\{dx_1\}^{-i,j,+i}$ ,  $\{dx_2\}^{-j,i,+j}$  in Abhg. von  $dx_{(1,2)}^{(-,+)} \in d\mathbf{x}_{(1,2)}$  (5.38)  

$$\begin{aligned} \text{mit } \Delta \boldsymbol{\sigma}_{(i,j)} \approx & dx_1^{-i} \boldsymbol{\sigma}_{(i-1,j)} - dx_1^i \boldsymbol{\sigma}_{(i,j)} + dx_1^{+i} \boldsymbol{\sigma}_{(i+1,j)} \\ & + dx_2^{-j} \boldsymbol{\sigma}_{(i,j-1)} - dx_2^j \boldsymbol{\sigma}_{(i,j)} + dx_2^{+j} \boldsymbol{\sigma}_{(i,j+1)} \end{aligned}$$
  
 Konstruiere *sparse*  $(\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)})$  mit  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} = 0$
5. Kopplung Interpolation und Regularisierung:  
 Berechne 1-Norm  $n_1 \mathbf{A} = \|\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)}\|_1$ ,  $n_1 \mathbf{B} = \|\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)}\|_1$   

$$\mathbf{A} = \left[ \mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)} ; \left( \gamma \frac{n_1 \mathbf{A}}{n_1 \mathbf{B}} \right) \mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \right] \in \mathbb{R}^{M+N, N}$$
,  $\mathbf{b} = [\mathbf{b}^T; 0] \in \mathbb{R}^{M+N}$
6. Löse  $\mathbf{A} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}$ :  
 Berechne  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$   
 Permutiere  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$   
 $\boldsymbol{\sigma}_\gamma = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^T \mathbf{b}$

Der Ablauf startet mit den erforderlichen Eingabedaten und den gesetzten Modellparametern. Das Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  wird durch eine orthogonale Vierecksvernetzung  $\mathcal{K}(\Omega)$  diskretisiert. Dabei

ist sicherzustellen, dass monoton ansteigende Knotenkoordinaten in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung vorliegen; eine in der dieser Modellversion notwendige Voraussetzung. Die Gebietsvernetzung liefert die Elementknoten, an denen die unbekanntes Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \dots \sigma_N]^T$  zu berechnen sind. Im nächsten Schritt werden die Elementkantenlängen entlang den beiden Koordinatenachsen ermittelt. Das Resultat sind die beiden Kantenlängenvektoren  $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2$ . Eine anschließende interne Normierung von  $d\mathbf{x}_1, d\mathbf{x}_2$  skaliert die Einträge auf eine Einheitslänge. Damit werden mögliche Einflüsse unterschiedlicher Größenordnungen vermieden.

Die Umsetzung der bilinearen Interpolation erfordert mehrere Schritte. Zunächst sind diejenigen Elemente  $\mathbf{K}_j$  der Vernetzung aufzufinden, in denen die Stützpositionen  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$  gelegen sind. Für diese Elemente werden die lokalen Zellkoordinaten  $(s, t)_i \in [0, 1]$  bezüglich  $\mathbf{x}_i$  nach Gleichung (5.8) berechnet und die assoziierten nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, 4}^i$  den Elementknoten von  $\mathbf{K}_j \in \mathcal{K}(\Omega)$  zugeordnet. Abschließend ist die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)}$  gemäß (5.32) aus den Einträgen der elementspezifischen Basisfunktionen aufzubauen.

Als nächstes wird in einer Schleife über alle Elementknoten  $\mathbf{x}_{(i,j)} \in \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  die Regularisierungsmatrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)}$  konstruiert. Dazu sind aus den Gitterlängen  $dx_{(1,2)}^{(-,+)} \in d\mathbf{x}_{(1,2)}$  die notwendigen Expansionskoeffizienten zu berechnen, die in der Linearkombination (5.35) die unbekanntes Knotenspannungen miteinander verknüpfen.

Die Kopplung der Interpolations- und Regularisierungsbedingungen erfolgt über das Zusammenfassen der beiden Koeffizientenmatrizen sowie der rechten Seiten, so dass sich das folgende lineare Gleichungssystem einstellt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)} \\ \gamma \frac{n_1 A}{n_1 B} \mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)} \end{pmatrix}}_{:= \mathbf{A}} \boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= \mathbf{b}}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M+N, N}, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{M+N}. \quad (5.39)$$

Beim Verknüpfen der Matrizen  $\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)}$  und  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)}$  ist darauf zu achten, dass die Lösung nicht durch gewählte Einheiten beeinflusst wird. Das Skalieren mit einer Norm entfernt den Effekt des Einheitensystems. Die Multiplikation der Regularisierungsmatrix  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)}$  mit dem Quotienten beider Spaltensummennormen  $n_1 A / n_1 B$  normiert die Elemente von  $\mathbf{B}_{\mathcal{K}(\Omega)}$  und gewährleistet die Kompatibilität der Elemente mit  $\mathbf{A}_{\mathbf{x}, \mathcal{K}(\Omega)}$  in der gleichen Größenordnung. Bei der Einstellung  $\gamma = 1$  wird dadurch versucht, beide Komponenten in deren Beitrag ungefähr gleichzusetzen.

Das numerische Lösen des Minimierungsproblems (5.39) kann sowohl mit iterativen als auch direkten Lösungsverfahren durchgeführt werden. Iterative Verfahren erhalten die dünne Besetztheit, wogegen direkte Verfahren die dünne Struktur der Matrizen in der Regel zerstören. Da

Vorgaben bei iterativen Verfahren im Allgemeinen direkt von den gegebenen Datensätzen abhängig sind, wird standardmäßig eine direkte Lösung durchgeführt. Zunächst wird (5.39) in Normalenform überführt und  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  über einen Permutationsvektor reorganisiert. Die Permutation wird aus Gründen der numerischen Effizienz angewandt. Dadurch wird beim direkten Lösen die maximal dünn besetzte Struktur erhalten. Neben der Kompaktspeicherung der Systemmatrizen ist vor allem auf das Einschränken des so genannten FILL IN zu achten. D.h. die Umwandlung von Nullelementen zu Nichtnullelementen während den unterschiedlichen Lösungsschritten ist so gering wie möglich zu halten. Das Auflösen der Normalgleichungen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}_\gamma = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$  erfolgt mit dem MATLAB® eigenen Backslash-Operator [GRAMLICH & WERNER 2000], [QUARTERONI & SALERI 2006]. Als Ergebnis erhält man den Vektor der Knotenspannungen  $\boldsymbol{\sigma}_\gamma$  in Abhängigkeit des gewählten Regularisierungsparameters  $\gamma$ . Durch Entwicklung der nodalen Basisfunktionen lässt sich abschließend die kontinuierliche Membranfläche via  $\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_i$  aufspannen.

#### 5.4.5 Polynom- und Splinerekonstruktion

**Polynommodell.** Die Grundlage des Polynommodells ist ein bivariates Polynom von totalem Grad  $\leq k$ . Das skalarwertige Polynom  $p_k : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kann als Funktion der unabhängigen Variablen  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  durch eine Linearkombination von Monomen aufgebaut werden:

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} d_\alpha \mathbf{x}^\alpha, \quad \mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (5.40)$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}_0.$$

Die Monom-Basis  $\{x_1^i x_2^j : 0 \leq i, j \leq k\}$  spannt den Polynomraum  $\mathcal{P}_k(\Omega)$  über dem Gebiet  $\Omega$  auf:

$p_k \in \mathcal{P}_k(\Omega) = \text{span}\{x_1^i x_2^j\}_{0 \leq i, j \leq k}$ . Der totale Polynomgrad  $k$  ist der einzige einstellbare Modellparameter. Dieser legt die Dimension des bivariaten Polynoms fest. Die Anzahl der Polynomterme lässt sich dabei über den Binomialkoeffizienten  $\binom{2+k}{2}$  angeben.

Im ersten Schritt der polynomialen Flächenkonstruktion sind die unbekanntenen Polynomkoeffizienten  $d_{i,j}$  des verwendeten Polynoms (5.40) zu bestimmen. Anhand der gegebenen Datensätze aus Messposition und Spannungswert  $\{\mathbf{x}_j, \sigma_j\}_{j=1, \dots, M}$  stehen dazu  $M$  Interpolationsbedingungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \sigma_j = p_k(\mathbf{x}_j) &= d_{0,0} + d_{1,0} x_1^j + d_{0,1} x_2^j \\ &+ d_{2,0} (x_1^j)^2 + d_{1,1} x_1^j x_2^j + d_{0,2} (x_2^j)^2 \\ &+ \dots + d_{k-2, k-1} (x_1^j)^{k-2} (x_2^j)^{k-1} + d_{0,k} (x_2^j)^k, \quad j=1, \dots, M. \end{aligned} \quad (5.41)$$

In der Regel ist die Stützstellenanzahl  $M$  größer als die Anzahl der Polynomkoeffizienten  $P$ . Dem-

zufolge wird das aus (5.41) gebildete lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_{X,p_k} \mathbf{d} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_{X,p_k} \in \mathbb{R}^{M,P}, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^P, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^M, \quad (5.42)$$

überbestimmt, so dass ein Ausgleichsproblem zur Berechnung der Koeffizienten zu lösen ist. Die Systemmatrix  $\mathbf{A}_{X,p_k}$  setzt sich aus den Monomen zusammen,  $\mathbf{d}$  ist der Vektor der unbekanntenen Koeffizienten und  $\mathbf{b} = [\sigma_1 \cdots \sigma_M]^T$  der Stützspannungsvektor. Das Gleichungssystem (5.42) wird im Sinne der LEAST SQUARES Fehlerminimierung durch QR-Zerlegung gelöst [GRAMLICH & WERNER 2000]. Ist das Polynom  $p_k$  durch die berechneten Koeffizienten  $d_{i,j}$  vollständig bestimmt, liefert im zweiten Schritt die polynomiale Auswertung die gesuchten Spannungen  $\{\sigma_i\}_{i=1,\dots,N}$  an den Knoten der Vernetzung  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,N}$ .

**Anmerkung:** Ein wesentlicher Nachteil bei der Polynomrekonstruktion ist das besonders in randnahen Zonen auftretende Oszillieren. Dieser Effekt tritt vor allem bei Polynomen hohen Grades auf. Vor dem Hintergrund der Spannungsabbildung sind aber oft hohe Polynomgrade erforderlich, um die Stützspannungen möglichst exakt wiederzugeben. Das polynomiale Oszillieren kann durch eine optimierte Anordnung der Stützstellen teilweise kompensiert werden. Hierzu sei beispielsweise auf [CALIARI ET AL. 2005] verwiesen. Damit wären allerdings a priori schon bestimmte Messpositionen festgelegt, unabhängig vom bauteilspezifischen Zustand. Eine mögliche Konsequenz davon könnte sein, dass kritische und relevante Bereiche nicht mit der erforderlichen Messpunktdichte abgebildet werden.

**Splinemodell.** Das verwendete Splinemodell von [HABER ET AL. 2001] basiert auf der Konstruktion eines bivariaten kubischen Splines über dem Gebiet. Der Spline wird dabei in der parametrisierten BERNSTEIN-BÉZIER-Form angegeben. Geometrisch ist die Zerlegung von  $\Omega$  in regelmäßig angeordnete Dreieckselemente  $\{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_E\}$  vorausgesetzt. Berechnete Spannungen an den Knoten der hinterlegten Strukturdiskretisierung sind wiederum das Ergebnis.

Die approximierte Fläche setzt sich aus kubischen Flächensegmenten zusammen, die jeweils als kubische Polynome  $p_{3,T}$  über einem Dreieck  $T$  definiert sind:

$$p_{3,T}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} B_T^{\alpha,3}(\mathbf{x}) b_\alpha, \quad \mathbf{x} \in T. \quad (5.43)$$

Die darin enthaltenen BERNSTEIN-Basispolynome  $B_T^{\alpha,3}$

$$B_T^{\alpha,3}(\mathbf{x}) = \frac{3}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!} \phi_1^{\alpha_1}(\mathbf{x}) \phi_2^{\alpha_2}(\mathbf{x}) \phi_3^{\alpha_3}(\mathbf{x}) \quad (5.44)$$

sind mit Hilfe der Baryzentrischen Koordinaten  $\{\phi_k(\mathbf{x})\}_{k=1,2,3}$  (5.2) bezüglich  $\mathbf{x} \in T$  konstruiert.

Während des Konstruktionsablaufs werden zunächst lokale LEAST SQUARES Approximierte in der

BERNSTEIN-BÉZIER-Form berechnet, wonach die verbleibenden BERNSTEIN-BÉZIER-Koeffizienten  $b_\alpha$  mit der geforderten Stetigkeit komplettiert werden. An dieser Stelle sei für Details der Methode noch zusätzlich auf [DAVYDOV & ZEILFELDER 2004] verwiesen. In Rahmen dieser Arbeit wird sich lediglich auf die Anwendung der Approximationstechnik beschränkt. Der externe C++-Code ist in der MATLAB®-Entwicklungsumgebung integriert und kann innerhalb dieser aufgerufen werden.

## 5.5 Methodenabgleich

Als Vergleichsgegenstand wird eine analytische Testfunktion  $F: \Omega = [-3,3] \times [-3,3] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) = & 3(1-x_1)^2 \exp(-x_1^2 - (x_2 + 1)^2) \\ & - 10 \left( \frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5 \right) \exp(-x_1^2 - x_2^2) \\ & - \frac{1}{3} \exp(-(x_1 + 1)^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Die Funktion ist so gewählt, dass die Übertragbarkeit auf einen in der Praxis vorkommenden Spannungszustand gewährleistet wird. Die Funktionswerte im Bildbereich von  $F$  über  $\Omega$  bilden positive und negative Gradienten ab; Bild 5.13 zeigt die sich einstellende Fläche.

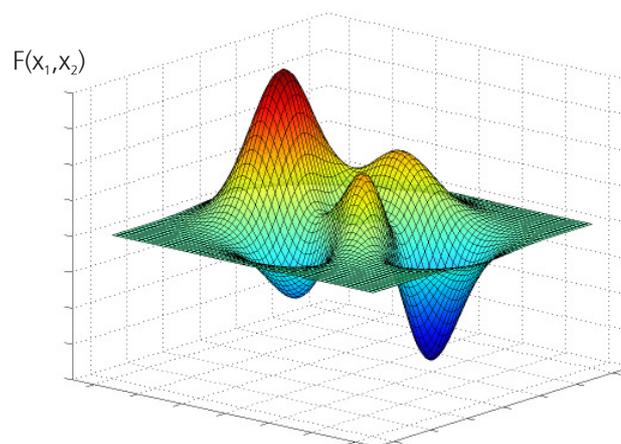


Bild 5.13: Verlauf der Testfunktion  $F$  über dem Gebiet  $\Omega = [-3,3] \times [-3,3]$ .

Ausgangspunkt für die Rekonstruktion sind vorhandene Datensätze aus Position und zugehörigem Funktionswert  $\{(\mathbf{x}_j, F_j) \mid \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^2, F_j \in \mathbb{R}\}_{j=1, \dots, M}$ . Bei den Stützstellen ist auf eine praxisrelevante Anordnung  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1, \dots, M}$  geachtet. Im Allgemeinen wird bei der experimentellen Analyse das Bauteil mit dem Sensor in äquidistanter Schrittweite entlang den Messspuren abgefahren. In Bild

5.14 sind konform diesem Vorgehen die verwendeten Stützstellen dargestellt. Im Bereich der auftretenden Gradienten liegt eine konstante Stützstellendichte vor.

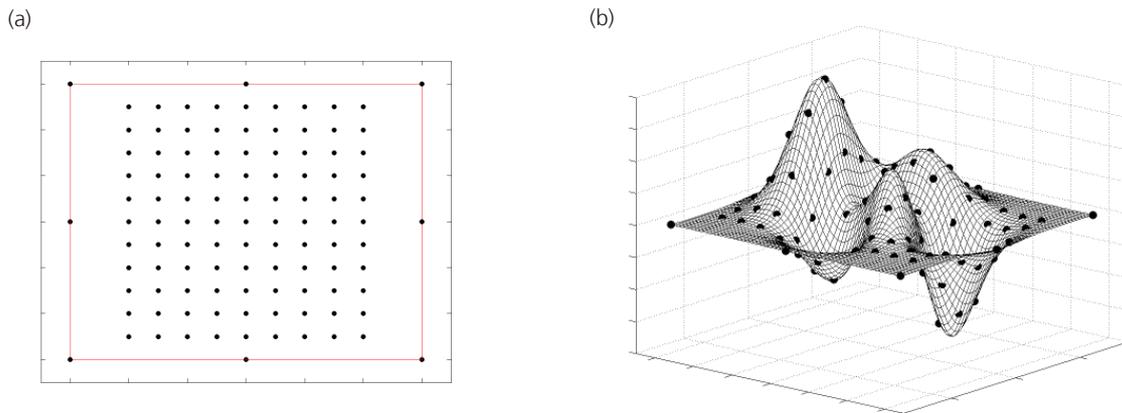


Bild 5.14: Gewählte Stützstellen (a) und assoziierte punktuelle Stützwerte (b) der Testfunktion  $F$  in  $\Omega$ .

Mit Bezug auf Kapitel 5.3 besteht die Möglichkeit, das Gebiet  $\Omega$  bezüglich dem Rand  $\partial\Omega$  sowohl nicht-hierarchisch, als auch ausgehend von den gegebenen Stützstellen hierarchisch zu vernetzen. Beide Vernetzungsstrategien sind in Bild 5.15 umgesetzt.

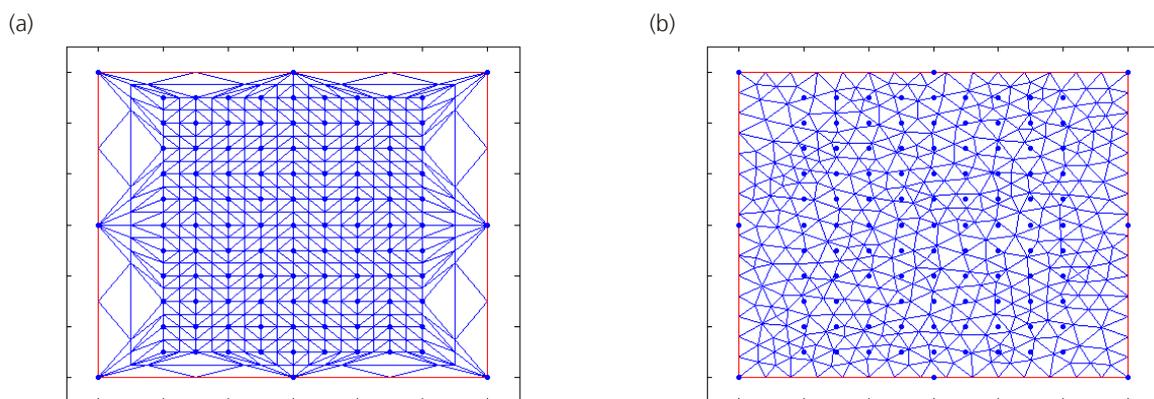


Bild 5.15: Hierarchische- (a) und nicht-hierarchische (b) Triangulierung von  $\Omega$ .

Wie bereits bei den Konstruktionsmerkmalen dargelegt, erlaubt die nicht-hierarchische Strategie eine über dem gesamten Gebiet vorliegende optimale Elementform, ohne an die gegebenen Stützstellen gebunden zu sein. Die beabsichtigte globale oder lokale Netzdichte lässt sich dabei auch wesentlich einfacher einstellen. Eine zu Bild 5.15 (b) äquivalente Netzqualität erfordert bei der hierarchischen Vernetzung in Bild 5.15 (a) noch zusätzlich die Zerlegung von  $\Omega$  in Teilgebiete, in denen lokal unterschiedliche Hierarchieebenen umgesetzt werden. Als Grundlage der Strukturdiskretisierung wird deshalb die nicht-hierarchische Vernetzung bevorzugt und im Folgenden für spannungsanalytische Betrachtungen angewendet.

Das für das Membranmodell benötigte nicht-hierarchische Viereckgitter ist ergänzend in Bild

5.16 abgebildet. Darin wurde annähernd eine zur Triangulierung äquivalente Elementgröße umgesetzt.

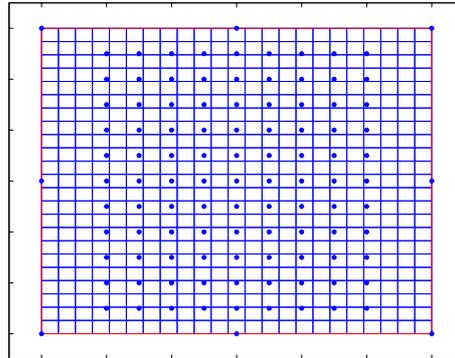


Bild 5.16: Nicht-hierarchische Vierecksvernetzung von  $\Omega$ .

Für die Eignung einer Rekonstruktionsmethode in der praxisrelevanten Spannungsabbildung sind zwei primäre Anforderungen ausschlaggebend:

- 1) Die möglichst exakte Wiedergabe der Stützspannungen muss gewährleistet sein.
- 2) Daneben muss gleichzeitig die erzielte Glattheit bei der Flächenkonstruktion mit dem realen Zustand übereinstimmen. Dem widersprechende Artefakte wie Oszillation oder Diskontinuitäten sind zu vermeiden.

Die Anwendung der Rekonstruktionsmethoden auf den gegebenen Datensatz der Testfunktion  $\{\mathbf{x}_j, F_j\}_{j=1, \dots, M}$  erfolgt nach dem in Kapitel 5.2 beschriebenen Rekonstruktionsablauf. Mit der jeweiligen Methode werden die Funktionswerte  $\{f_i\}_{i=1, \dots, N}$  an den Knoten  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1, \dots, N}$  der Vernetzung (Bild 5.15 (b), Bild 5.16) berechnet. Die Darstellung der zugehörigen Rekonstruktionsfläche erfolgt im Zusammenhang mit der zugrunde gelegten Elementdefinition via Gleichung (5.1).

Bild 5.17 enthält das Rekonstruktionsergebnis, in dem die erzeugten Flächen gegenübergestellt sind. Zur Verdeutlichung werden der Fläche die herangezogenen Stützpunkte in Form schwarzer Punkte überlagert.

Die lineare Interpolation mit sukzessiver Entwicklung der Dreiecksdefinition liefert Bild 5.17 (a). Der Interpolant ist direkt von der Dreieckszerlegung abhängig und dadurch nicht eindeutig. Bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen wird die MULTIQUADRIC Funktion (siehe Tabelle 5.1 (c)) ausgewertet. Die resultierende Fläche zeigt Bild 5.17 (b). Der darin benötigte Formparameter  $c$  ist nach Gleichung (5.22) berechnet. Eine optionale Glättung wurde durch den gesetzten Parameter  $\varepsilon = 0$  nicht berücksichtigt. Die NATURAL NEIGHBOR Interpolation beinhaltet keinen einstellbaren Parameter. Die Interpolierende in Bild 5.17 (c) ist eindeutig. Das Membranmodell konstruiert die Fläche in Bild 5.17 (d). In Kombination mit der LAPLACE Regularisierung geht bei

diesem Beispiel der Regularisierungs- bzw. Glättungsparameter  $\gamma=1$  ein. Mit  $\gamma>1$  wird eine zunehmende Abweichung von den Stützwerten erreicht. Im Anhang Teil C ist diese Tendenz dargestellt.

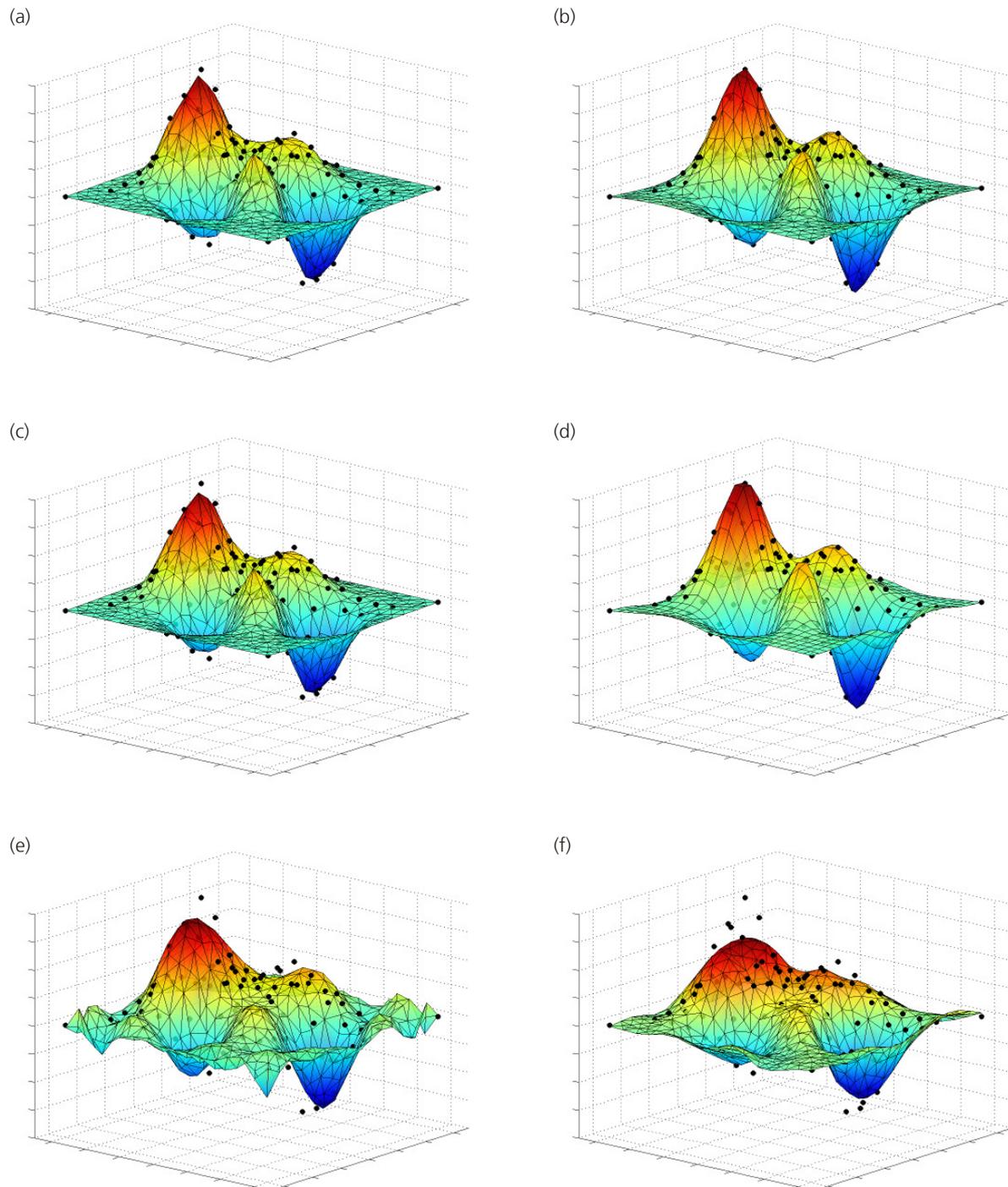


Bild 5.17: Rekonstruierte Flächen: Linear (a), radiale Basisfunktion MULTIQUADRIC (b), NATURAL NEIGHBOR (c), Membranmodell (d), Polynom 10-ten Grades (e), kubischer Spline (f).

Ein Polynom vom totalen Grad  $k=10$  ist Grundlage der polynomialen Fläche in Bild 5.17 (e). Auffällig ist das für diesen hohen Polynomgrad charakteristische Oszillieren im Randbereich, in

dem eine geringere Stützstellendichte vorliegt. Zusammen mit der Splinefläche (Bild 5.17 (f)) weisen beide Modelle bereits optisch deutlich erkennbare Abweichungen von den Stützwerten auf. (Der Vollständigkeit halber sind im Anhang Teil C die Ergebnisse der Rekonstruktionsmethoden bei hierarchischer Vernetzung aufgeführt.)

Zusätzlich zur graphischen Darstellung und dem damit gewonnenen qualitativen Eindruck wird der absolute Fehler

$$e_i = |F_i - f_i|, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.46)$$

definiert und an den Knoten der Vernetzung  $\{\mathbf{x}_i\}$  ausgewertet. Anhand dem Betrag aus der Differenz von analytischem-  $\{F_i\}$  und rekonstruiertem Funktionswert  $\{f_i\}$  können die Methoden quantitativ miteinander verglichen werden. In Bild 5.18 sind die nach (5.46) berechneten Absolutfehler  $e_i$  der jeweiligen Methode dargestellt. Jede Grafik wird individuell durch den minimal und maximal auftretenden Fehler begrenzt.

**Zusammenfassung.** Unter Beachtung der gestellten Rekonstruktionsanforderungen sind die Interpolation mit radialen Basisfunktionen, die NATURAL NEIGHBOR Interpolation und das Membranmodell zu bevorzugen. Ausschlaggebend ist die Tatsache, dass der kleinste Absolutfehler bei adäquater Glattheit vorliegt. Zudem beinhalten diese Methoden unanhängig von Stützstellenanzahl und Stützstellenverteilung keine dominierenden Artefakte. Die abschließende Bewertung der drei Methoden erfolgt in Kapitel 6.1 am konkreten Beispiel einer warmgewalzten Aluminiumplatte. Darin wird zusätzlich die Erfüllung der mechanischen Gleichgewichtsbedingungen verifiziert.

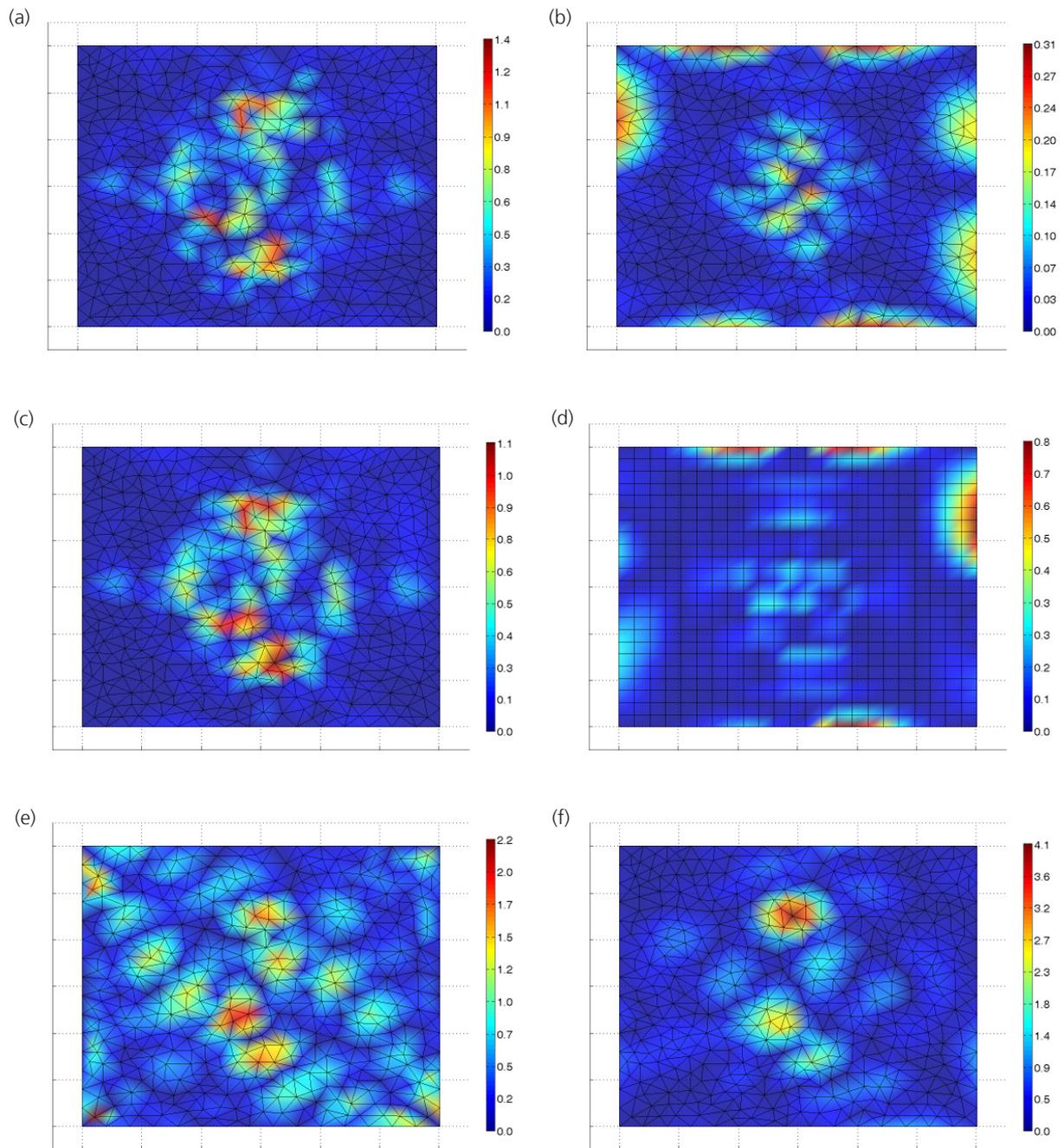


Bild 5.18: Absolutfehler  $e$  aus analytischem- und rekonstruiertem Funktionswert: Linear (a), radiale Basisfunktion MULTIQUADRIC (b), NATURAL NEIGHBOR (c), Membranmodell (d), Polynom 10-ten Grades (e), kubischer Spline (f).

## 6 Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel wird die Anwendung der Ultraschall-Eigenstressanalyse an technischen Bauteilen betrachtet. Die für die Rekonstruktion erforderlichen Stützwerte werden mit der in Kapitel 4 beschriebenen Software routine USRSA 0.3 erzeugt. Am Beispiel der Aluminiumplatte werden die Rekonstruktionsmethoden nach Kapitel 5.5 bewertet.

Es sei nochmals auf die wesentliche Annahme der Ultraschall-Eigenstressanalyse hingewiesen. Im Bauteil wird vorausgesetzt, dass die Hauptspannungsrichtungen mit den technologisch bedingten Textursymmetrierichtungen übereinstimmen.

### 6.1 Warmgewalzte Aluminiumplatte

Die Eigenstressungen in Walzprodukten sollten möglichst gleichmäßig verteilt sein, damit beim Frei- bzw. Herausschneiden von Strukturelementen nicht zu starke Relaxationseffekte auftreten, die zum inakzeptablen Abweichen von Ebenheit und Geometrie führen und auch die Schädigung des Werkzeugs zur Folge haben können. In diesem Zusammenhang steht auch die Analyse der in Bild 6.1 schematisch dargestellten warmgewalzten Aluminiumplatte mit einer Dicke von 30 mm. Dargestellt sind die parallel zur Walz- (W) und Querrichtung (Q) verlaufenden Messspuren. An diskreten Positionen werden die für die Spannungsanalyse benötigten Laufzeiten der Ultraschallwellen gemessen.

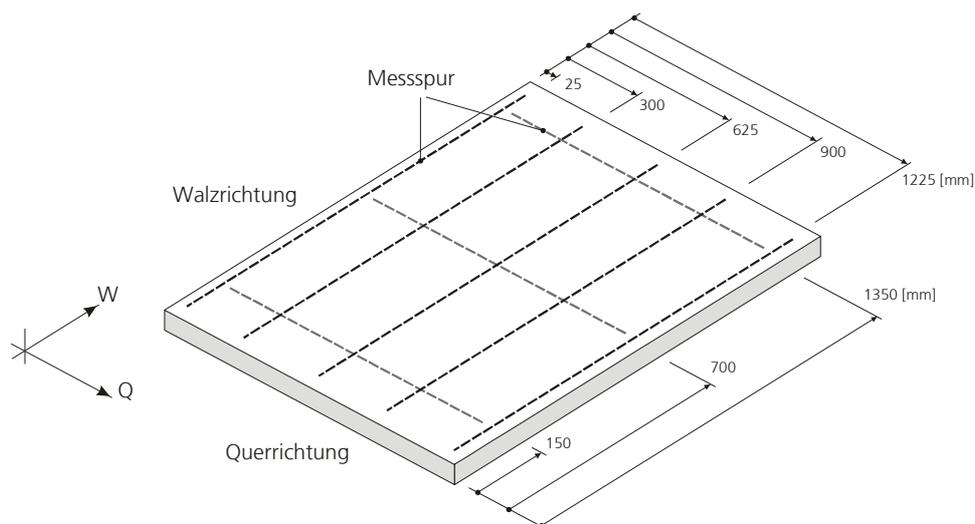


Bild 6.1: Skizze der analysierten Aluminiumplatte mit eingezeichneten Messspuren, entlang denen die Laufzeiten der sich in Dickenrichtung ausbreitenden Longitudinal- und Transversalwellen gemessen wurden.

Es werden konstante Hauptspannungsrichtungen parallel zur Walz- und Querrichtung entlang den Messspuren experimentell bestätigt. Bild 6.2 zeigt den ausgehend von den Laufzeitdaten und den ermittelten Materialkennwerten berechneten Eigenspannungszustand an den Messpositionen. Die Hauptspannungskomponenten in Walz- ( $\sigma_w$ ) und Querrichtung ( $\sigma_Q$ ) sind über der im Nulldurchgang liegenden Plattengeometrie aufgetragen.

Der Hauptspannungszustand aus Bild 6.2 dient als Eingabefeld zur Bewertung der Rekonstruktionsmethoden radiale Basisfunktion, NATURAL NEIGHBOR und Membranmodell. Dazu wird überprüft, inwiefern die rekonstruierten Flächen die mechanischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

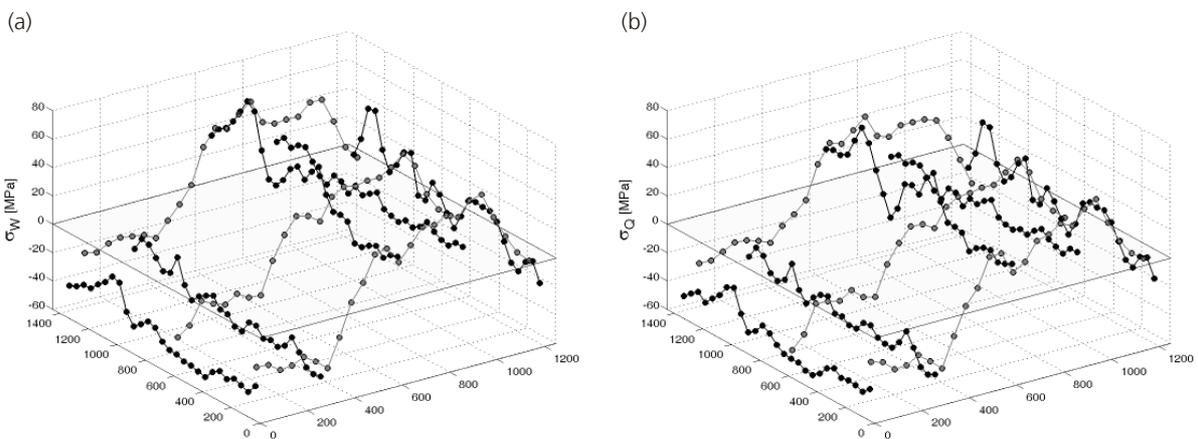


Bild 6.2: Berechnete Hauptspannungskomponenten  $\sigma_w$  in Walz- (a) und  $\sigma_Q$  in Querrichtung (b) an den diskreten Messpositionen.

### 6.1.1 Bewertung der Rekonstruktionsmethoden

Zunächst sind die hinterlegten Vernetzungen der Methoden zusammen mit den Messpositionen in Bild 6.3 dargestellt.

- Die durch
- (a) Interpolation mit der radialen Basisfunktion MULTIQUADRIC
  - (b) NATURAL NEIGHBOR Interpolation
  - (c) Membranmodell

rekonstruierten Flächen der Hauptspannungskomponenten in Walz- ( $\sigma_w$ ) und Querrichtung ( $\sigma_Q$ ) enthalten Bild 6.4 und Bild 6.5. Basis sind die Stützspannungen nach Bild 6.2. Konform zum Abgleich der Rekonstruktionsmethoden an der Testfunktion in Kapitel 5.5 werden für die MULTIQUADRIC-Basisfunktion und das Membranmodell die identischen Parametereinstellungen übernommen.

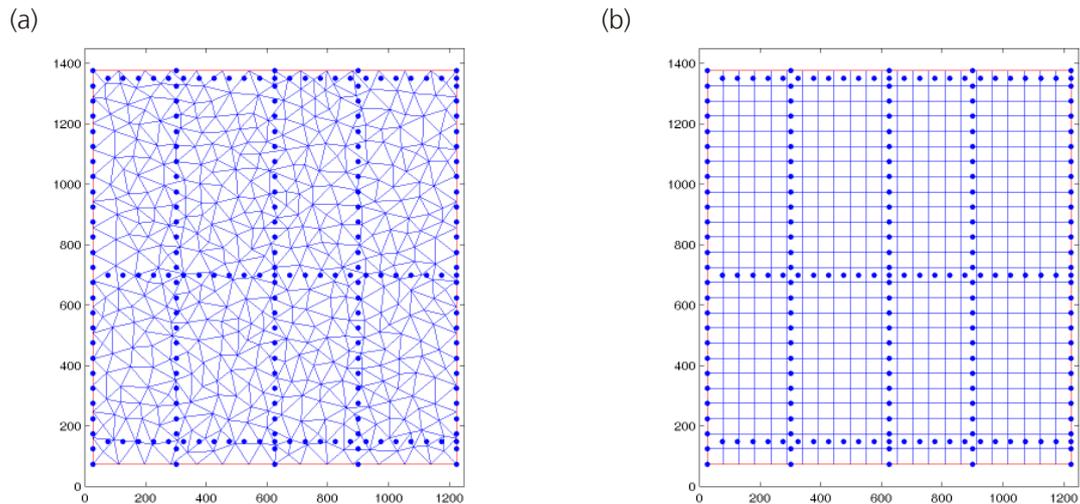


Bild 6.3: Dreieck- (a) und Viereckvernetzung (b) der Aluminiumplatte überlagert mit den punktuellen Messpositionen.

Die in Bild 6.4 abgebildeten Konturgrafiken werden individuell bei der jeweiligen Methode durch den minimal und maximal auftretenden Spannungswert begrenzt. In den unterschiedlichen Spannungsskalen sind die negativen Spannungsgrenzen nahezu identisch, lediglich im positiven Bereich treten geringfügige Abweichungen auf. In der Darstellung der Rekonstruktionsflächen von Bild 6.5 sind die schwarzen Stützwerte überlagert. Die Abweichungen der Stützwerte von der Spannungsfläche liegen innerhalb den experimentellen Fehlerschranken bei der Ultraschallspannungsanalyse.

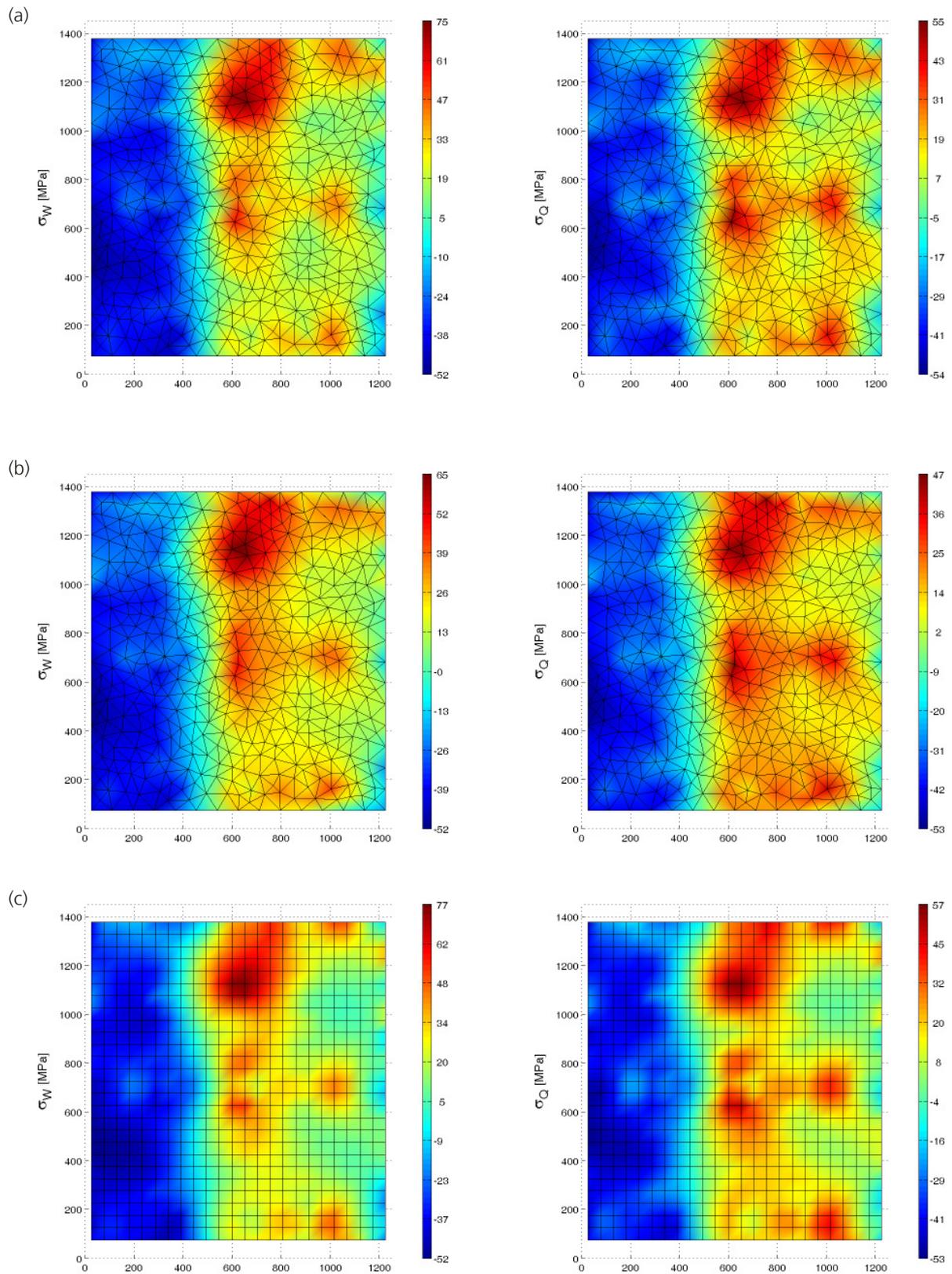


Bild 6.4: Rekonstruierte 2D-Spannungsfläche der Hauptspannungen  $\sigma_W$  und  $\sigma_Q$ : Radiale Basisfunktion MULTIQUADRIC (a), NATURAL NEIGHBOR (b), Membranmodell (c).

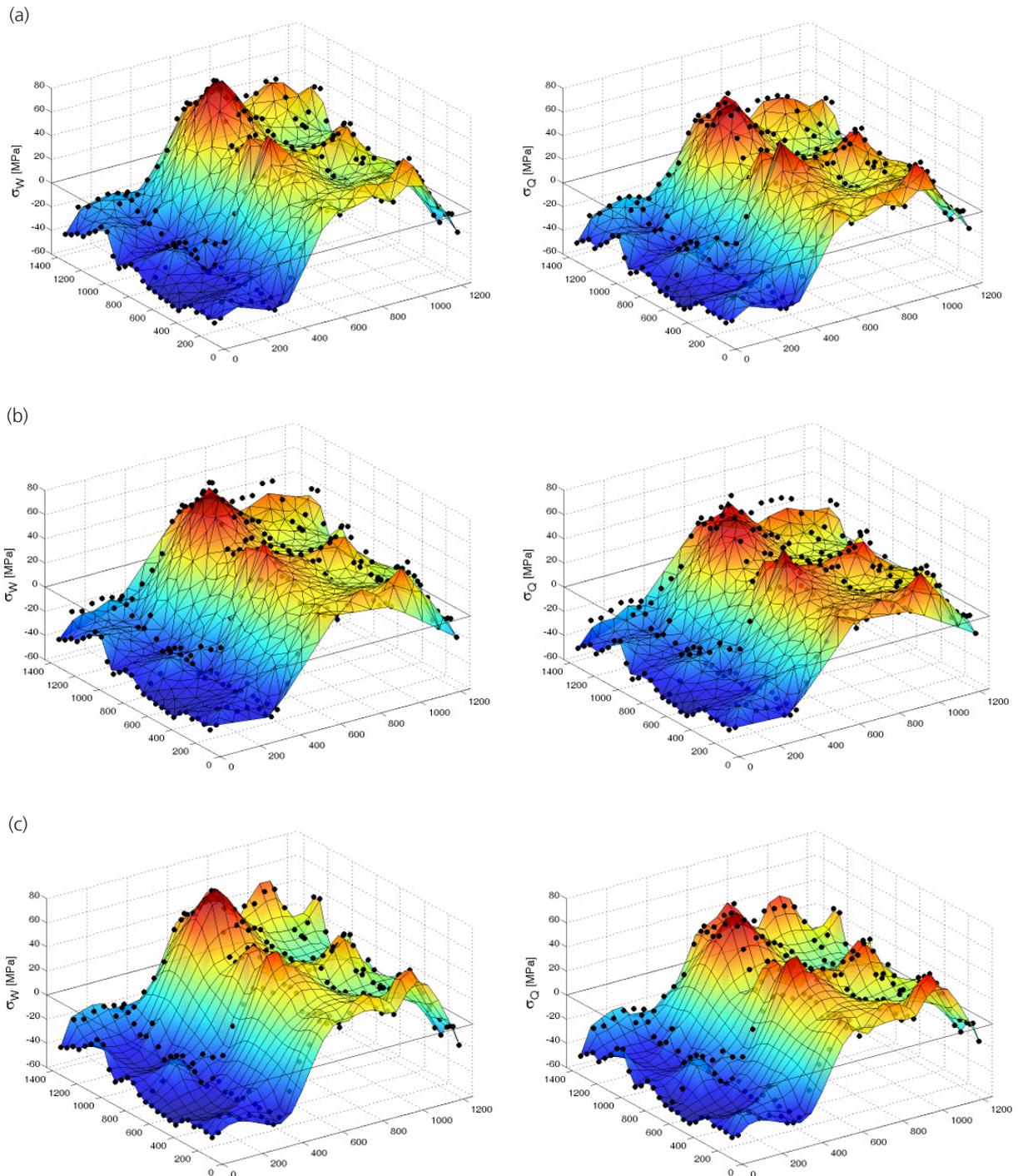


Bild 6.5: Rekonstruierte 3D-Spannungsfläche der Hauptspannungen  $\sigma_W$  und  $\sigma_Q$  mit überlagerten punktuellen Stützspannungen und der Plattengeometrie in Nullspannungsebene: Radiale Basisfunktion MULTIQUADRIC (a), NATURAL NEIGHBOR (b), Membranmodell (c).

**Verifikation mechanisches Gleichgewicht.** Die analysierte Aluminiumplatte befindet sich im statischen Gleichgewicht. Eine wesentliche Forderung besteht darin, diesen Zustand durch die Rekonstruktionsmethode abzubilden. Die rekonstruierten Spannungsflächen müssen die Gleich-

gewichtsbedingungen erfüllen. Damit kann durch Überprüfen der Gleichgewichtsbedingung die Eignung einer Rekonstruktionsmethoden bewertet werden. Der in der Aluminiumplatte vorliegende Hauptspannungszustand ist durch die bekannten Hauptspannungsrichtungen, Walz- und Querrichtung, sowie die berechneten Hauptspannungskomponenten an einem Punkt gegeben. Aus der Gleichgewichtsbedingung  $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = 0$  folgt unter Berücksichtigung des diagonalen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{wQ} \mathbf{i}_w \otimes \mathbf{i}_Q$  für die Hauptspannungskomponenten  $\sigma_w, \sigma_Q$ :

$$\frac{\partial \sigma_w}{\partial x_w} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_Q}{\partial x_Q} = 0. \quad (6.1)$$

Die Fläche der jeweiligen Komponente wird  $\forall \mathbf{x} = (x_w, x_Q) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit den berechneten Spannungen  $\{\sigma_w^i, \sigma_Q^i\}_{i=1, \dots, N}$  an den Elementknoten der Vernetzung und assoziierten nodalen Basisfunktionen  $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, N}$  gemäß (5.1) konstruiert:

$$\sigma_{(w,Q)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \sigma_{(w,Q)}^i. \quad (6.2)$$

Die Komponentendarstellung (6.2) eingesetzt in (6.1) liefert die verifizierbare Bedingung

$$\underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_w} \phi_i(x_w, x_Q) \sigma_w^i \right)}_{=0} + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_Q} \phi_i(x_w, x_Q) \sigma_Q^i \right)}_{=0} = 0, \quad (6.3)$$

in der beide Komponenten zusammengefasst sind, um lediglich einen Vergleichswert zu erhalten. Durch das Auswerten von Gleichung (6.3) an den in Bild 6.4 und Bild 6.5 dargestellten Rekonstruktionsflächen erhält man als Ergebnis die nachfolgend aufgeführten Abweichungen von der Bedingung, dass Gleichung (6.3) Null sein muss.

- (a) Radiale Basisfunktion MULTIQUADRIC: 23
- (b) NATURAL NEIGHBOR Interpolation: 24
- (c) Membranmodell: 44

Die Absolutfehler, insbesondere von MULTIQUADRIC und NATURAL NEIGHBOR, liegen in der Größenordnung des Fehlers, den ein Spannungswert bei der Berechnung mittels Ultraschallverfahren besitzt.

**Zusammenfassung.** Es bleibt festzustellen, dass die Rekonstruktionsmethoden radiale Basisfunktion, NATURAL NEIGHBOR und Membranmodell zur spannungsanalytischen Umsetzung des geschlossenen Eigenspannungszustands geeignet sind. In den beiden folgenden Anwendungsbeispielen wird die NATURAL NEIGHBOR Interpolation bei der Schweißplatte, und die Interpolation mit der radialen Basisfunktion MULTIQUADRIC beim Stirnrad angewendet.

## 6.2 Geschweißte Stahlplatte

Ein wesentliches Qualitätsmerkmal von geschweißten Bauteilen sind Schweiß-Eigenstressungen, die von Einflüssen der Bauteilgeometrie, der Schweißparameter sowie der Vor- und Nachbehandlung bestimmt werden. In Bild 6.6 ist die untersuchte Schweißplatte aus ferritisch-perlitischem Baustahl mit einer Dicke von 15 mm schematisch dargestellt. Eingezeichnet sind die Messspuren, entlang denen die Messpositionen mit dem Ultraschallsensor abgefahren wurden. An der Schweißnaht selbst war infolge der nicht abgetragenen Nahtüberhöhung keine Laufzeitmessung möglich.

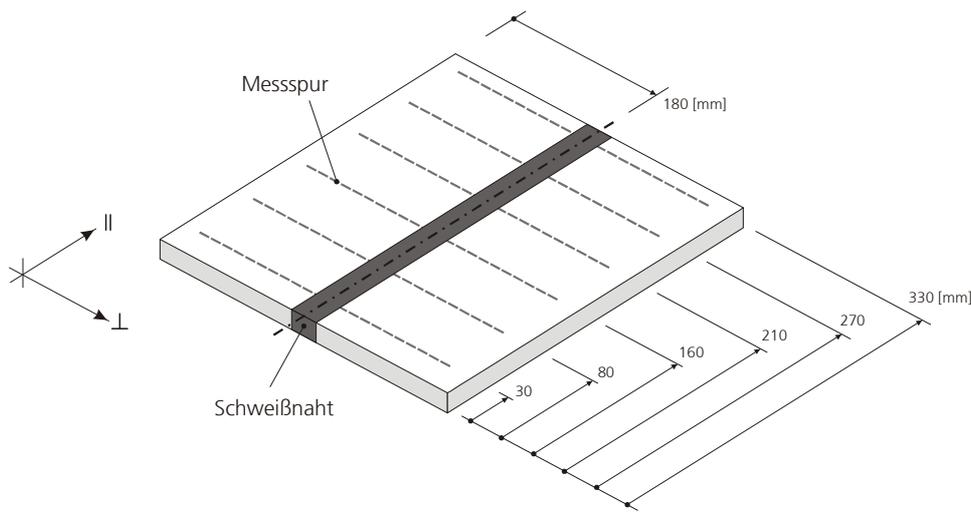


Bild 6.6: Skizze der analysierten Stahl-Schweißplatte mit eingezeichneten Messspuren, entlang denen einzelne Spannungswerte bestimmt wurden.

Die in der Stahl-Schweißplatte vorliegenden Hauptspannungsrichtungen sind parallel und senkrecht zur Schweißnaht orientiert. Der experimentelle Nachweis bestätigt, dass etwaige Abweichungen in den Orientierungen, auch im Übergangsbereich zwischen Wärmeeinflusszone und Grundmaterial, vernachlässigt werden können. Das Ergebnis der Ultraschallspannungsanalyse zeigt Bild 6.7. Die in Nahtlängs- ( $\parallel$ ) sowie Nahtquerrichtung ( $\perp$ ) wirkenden Hauptspannungskomponenten  $\sigma_{\parallel}$  und  $\sigma_{\perp}$  sind über der in der Nullspannungsebene liegenden Plattengeometrie an den Messpositionen aufgetragen.

Durch NATURAL NEIGHBOR Interpolation werden die rekonstruierten Spannungsflächen der beiden Komponenten in Bild 6.8 erzeugt. Kennzeichnend für den Spannungsverlauf in Schweißplatten ist der starke Gradient hin zu hohen Zugspannungen im Bereich der Wärmeeinflusszone nahe der Schweißnaht. Die in den Spannungsnulldurchgang gelegte Plattengeometrie hebt die Zonen der Zug-Druck-Spannungsübergänge hervor.

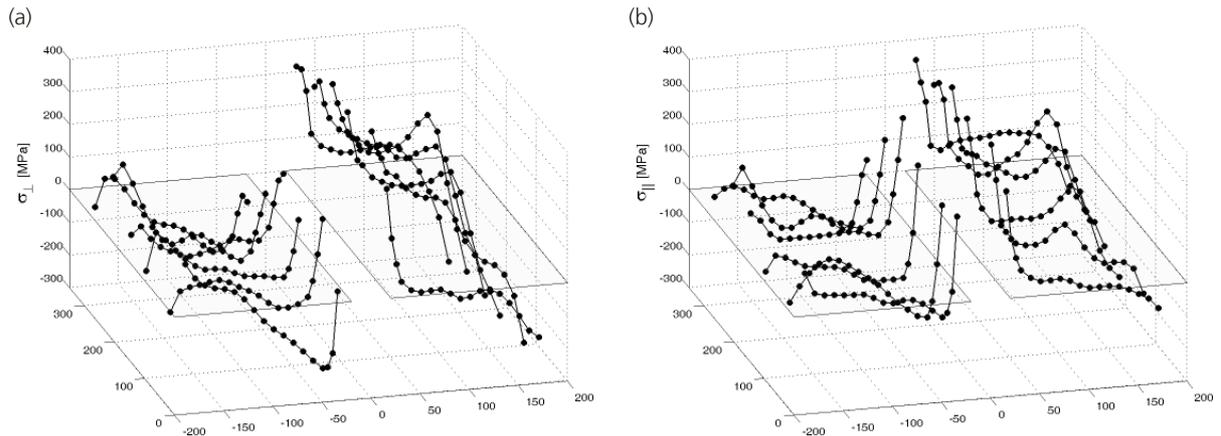


Bild 6.7: Berechnete Hauptspannungskomponenten in Nahtquer- (a) und Nahtlängsrichtung (b) an den Messpositionen.

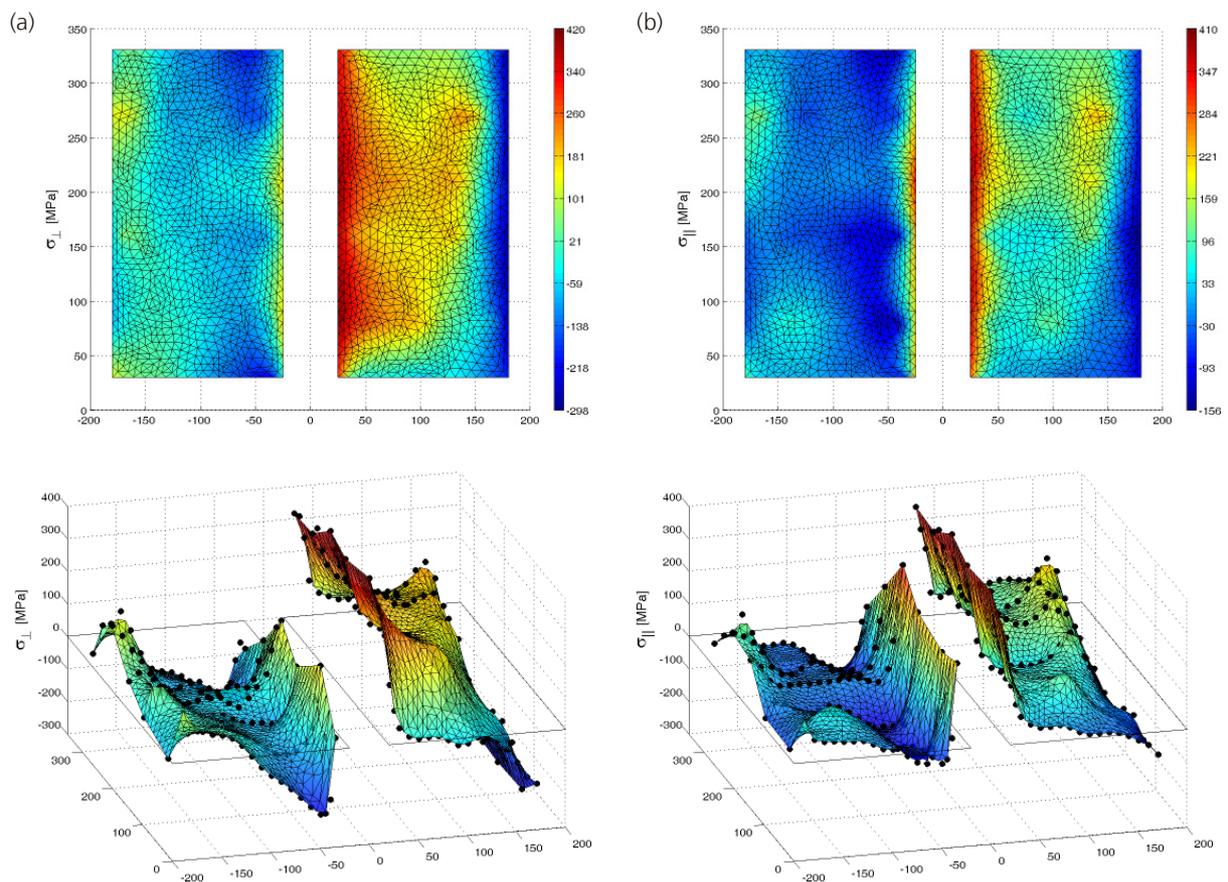


Bild 6.8: Rekonstruierte Spannungsfelder der in der Stahl-Schweißplatte wirkenden Hauptspannungskomponenten  $\sigma_{\perp}$  (a) und  $\sigma_{\parallel}$  (b).

Im Anhang Teil C sind die mit den Ergebnissen aus Bild 6.8 ergänzten Spannungsprofile über der Schweißnaht dargestellt. Dabei wurde der Gleichgewichtszustand ausgenutzt und eine mögliche Lösung über der Naht zur Rekonstruktion verwendet.

### 6.3 Gehärtetes Stirnrad

Das in Bild 6.9 dargestellte Stirnrad wurde in der oberflächennahen Zone am Zahnkranz gehärtet. Die Aufgabe bestand darin, die prozessbedingten Veränderungen des Spannungszustands im Bereich der Messspuren vor und nach dem Härten abzubilden. Der Zustand vor dem Härten resultiert aus der Formgebung des Rohlings durch Schmieden. Die Abmessungen betragen 1024 mm Durchmesser am Zahnkopf bei einer Dicke von 400 mm.



Bild 6.9: Stirnrad mit den schwarz eingezeichneten Messspuren 1 - 4.

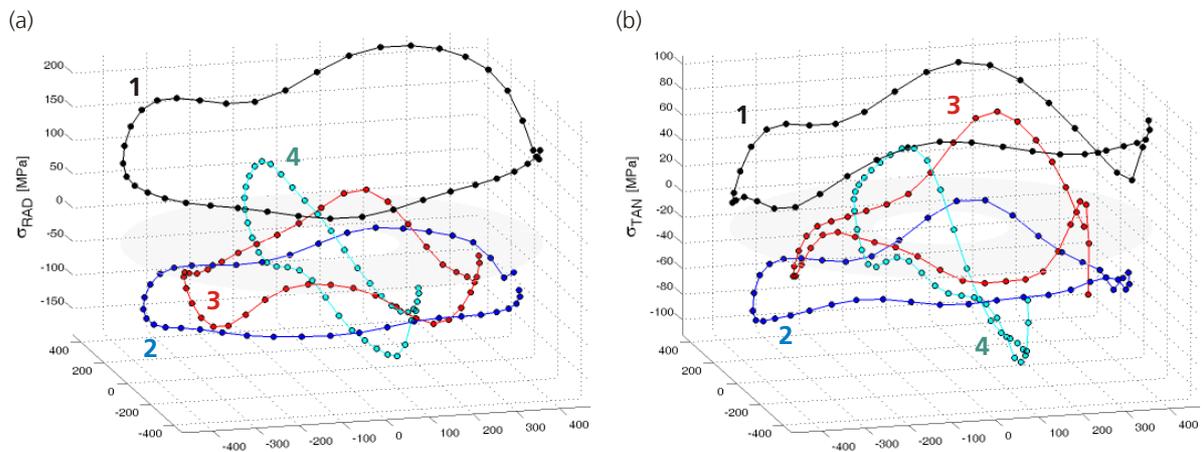


Bild 6.10: Vor dem Härten entlang den Messspuren 1 - 4 berechnete Hauptspannungskomponenten in radialer-  $\sigma_{\text{RAD}}$  (a) und tangentialer Richtung  $\sigma_{\text{TAN}}$  (b).

Die unterschiedlichen geometrischen Verhältnisse am Zahnkranz verursachen beim Abkühlen unterschiedliche Temperaturgradienten und somit auch unterschiedlich orientierte Hauptspannungsrichtungen. Die Messpositionen befinden sich aber außerhalb der unmittelbaren Einflusszone des Zahnkranzes. Beim Messen hat sich gezeigt, dass im Messbereich die Hauptspannungsrichtungen sowohl vor als auch nach dem Härten radial und tangential zur Umfangsrichtung des Stirnrads verlaufen. Das mittels Ultraschallverfahren berechneten Hauptspannungskomponenten

in Radial-  $\sigma_{\text{RAD}}$  und Tangentialrichtung  $\sigma_{\text{TAN}}$  vor dem Härten enthält Bild 6.10. Der Hauptspannungszustand an den Messpositionen nach dem Härten wird durch Bild 6.11 wiedergegeben. In die Spannungsnullebene ist der Messbereich hineingelegt. Die zu einer Messspur gehörenden 41 Messpositionen pro Spur sind in gleicher Farbe dargestellt.

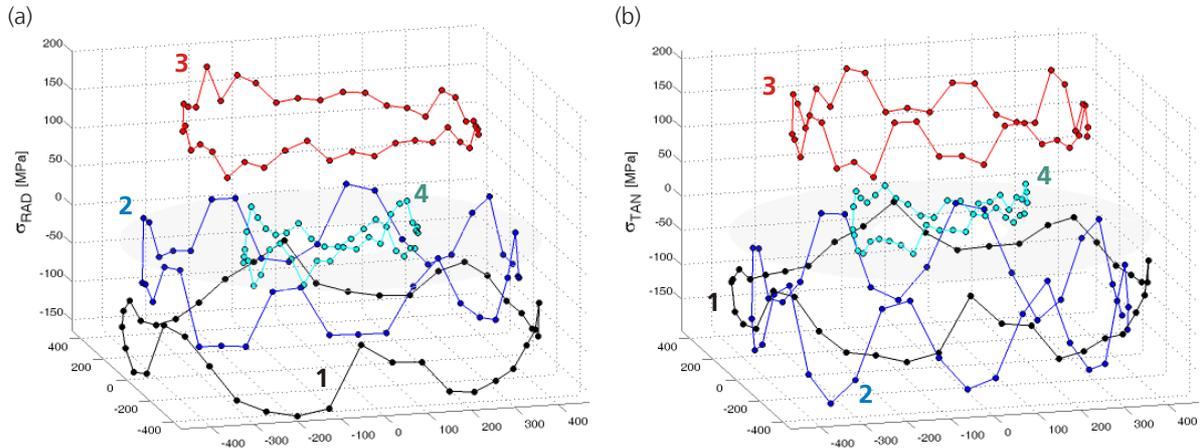


Bild 6.11: Nach dem Härten entlang den Messspuren 1 - 4 berechnete Hauptspannungskomponenten in radialer-  $\sigma_{\text{RAD}}$  (a) und tangentialer Richtung  $\sigma_{\text{TAN}}$  (b).

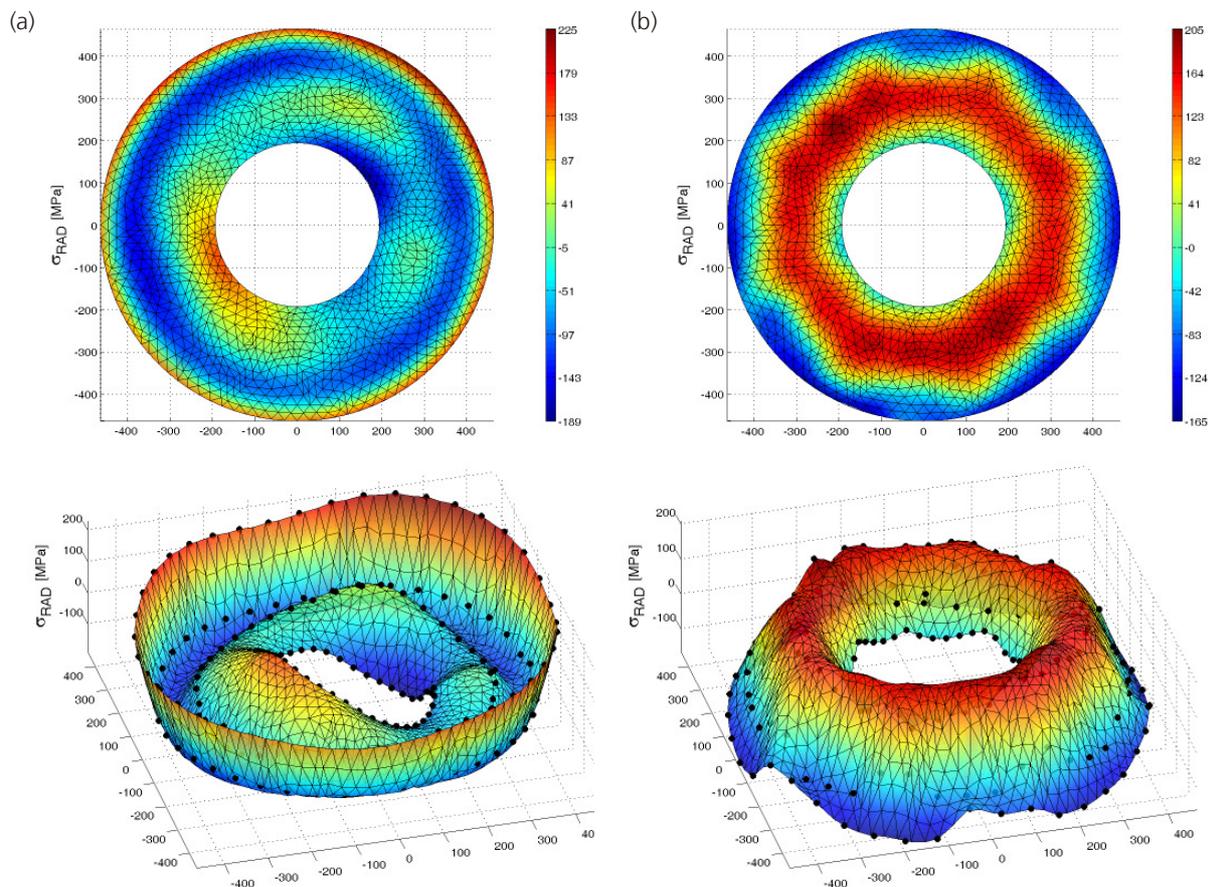


Bild 6.12: Mit radialer Basisfunktion MULTIQUADRIC rekonstruierte radiale Spannungskomponente  $\sigma_{\text{RAD}}$  im Stirnrad vor- (a) und nach dem Härten (b).

Durch Anwendung der radialen Basisfunktion MULTIQUADRIC (c nach (5.22) berechnet,  $\varepsilon = 0$ ) erhält man die Rekonstruktionsflächen vor und nach dem Härten für die Radialspannung in Bild 6.12, und für die Tangentialspannung in Bild 6.13. Anhand der Rekonstruktionsflächen wird die Zug-Druck-Umwandlung im Messbereich deutlich

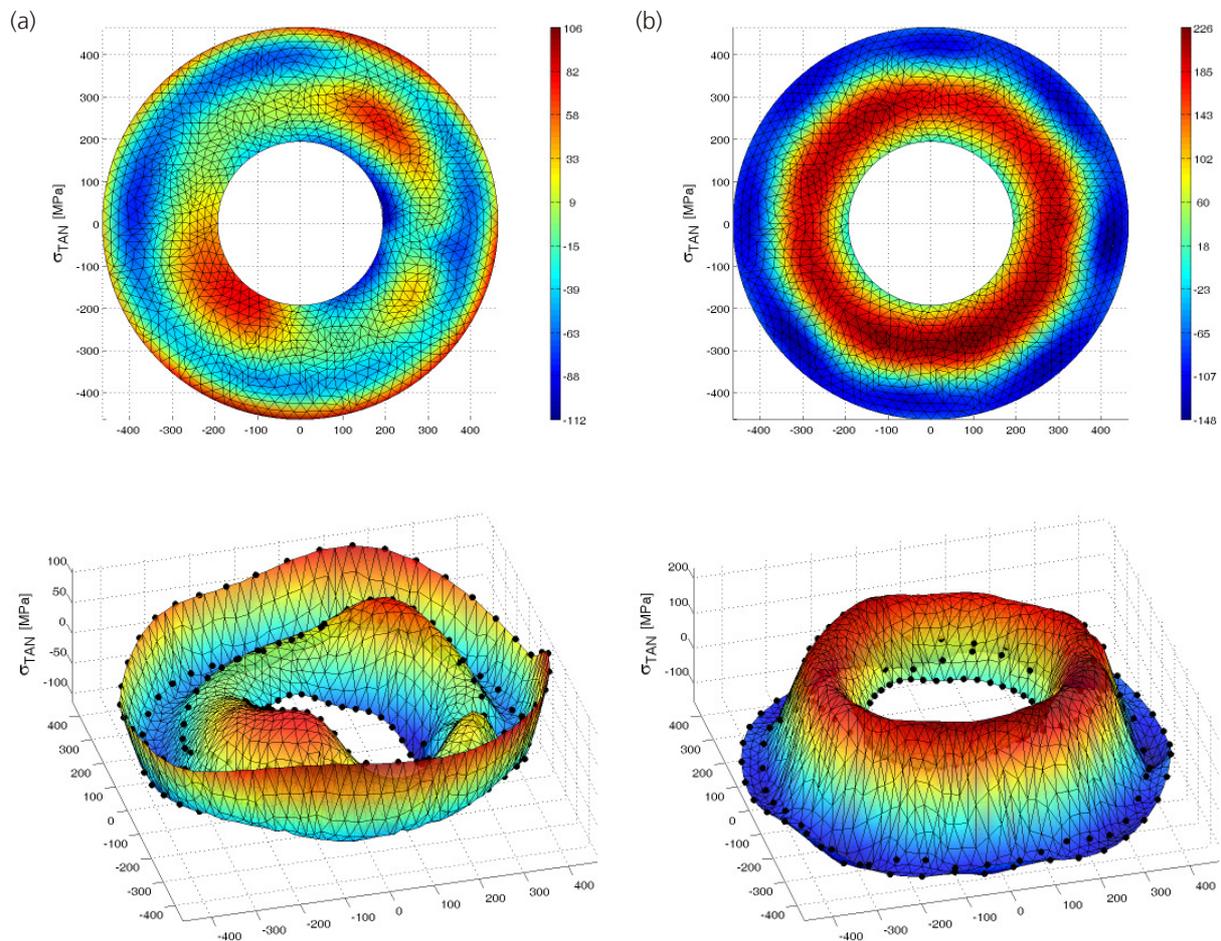


Bild 6.13: Mit radialer Basisfunktion MULTIQUADRIC rekonstruierte tangentialer Spannungskomponente  $\sigma_{TAN}$  im Stirnrad vor- (a) und nach dem Härten (b).

Ergänzend dazu ist die aus beiden Hauptspannungskomponenten berechnete VON MISES Vergleichspannung

$$\sigma_{VMISES} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{RAD} - \sigma_{TAN})^2 + \sigma_{TAN}^2 + \sigma_{RAD}^2 \right]} \quad (6.4)$$

in Bild 6.14 dargestellt.

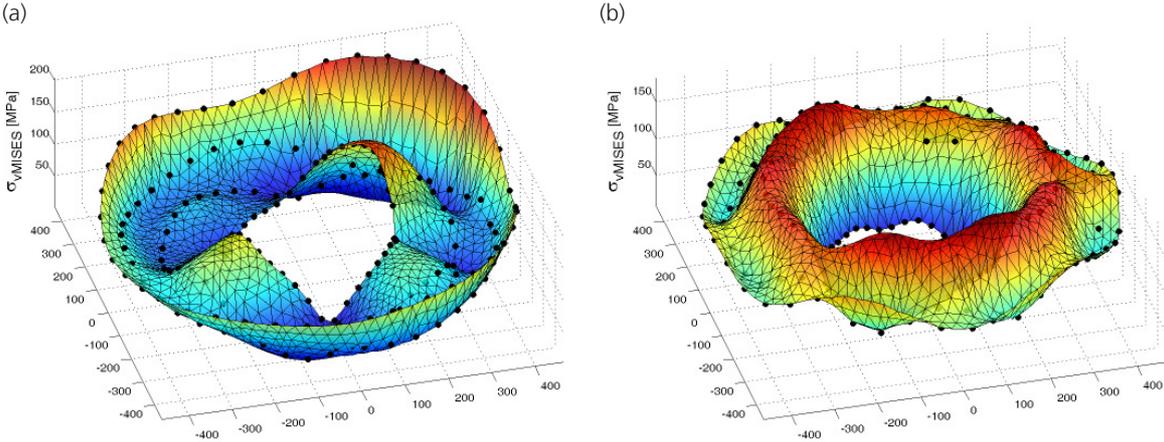


Bild 6.14: Mit radialer Basisfunktion MULTIQUADRIC rekonstruierte VON MISES Vergleichs-  
spannungsfläche im Stirnrad vor- (a) und nach dem Härten (b).

## 7 Zusammenfassung

Eigenspannungen in technischen Bauteilen überlagern sich additiv den Lastspannungen und können als Vorbeanspruchung das statische und dynamische Bauteilverhalten sowohl positiv als auch negativ beeinflussen. Ein typisches Beispiel ist die Verbesserung der Biege-wechselfestigkeit von Maschinenbauelementen durch gezielt eingebrachte oberflächennahe Druckeigenspannungen, die zudem den Vorteil bringen, dass sie die Rissinitiierung erschweren. Zur Bestimmung von Eigenspannungen sind vielfältige Verfahren entwickelt und in Nutzung. Das Röntgendiffraktionsverfahren ist ein Beispiel der zerstörungsfreien Verfahren mit der größten anwendungstechnischen Verbreitung. Beispiele häufig eingesetzter teilerstörender Verfahren sind das Bohrloch- und das Ringkernverfahren. Die genannten Verfahren kennzeichnen sich dadurch, dass zur Berechnung quantitativer Spannungen aus den gemessenen Verzerrungszuständen nur die elastischen Materialkonstanten zweiter Ordnung, Elastizitäts-, Schubmodul und/oder Querkontraktionszahl, benötigt werden.

Ultraschallverfahren sind neben den magnetischen Verfahren vergleichsweise neue Verfahren, die die Möglichkeit bieten, schnell über größere Messbereiche eine flächen- bzw. volumendeckende Abbildung des Spannungszustands zu gewährleisten. Da Ultraschallwellen die meisten Werkstoffe durchdringen, bietet die Anwendung die zerstörungsfreie Charakterisierung der Oberflächen- und Volumenspannungen in Bauteilen. Ultraschallverfahren nutzen den akustoelastischen Effekt, der den Einfluss von Verzerrungs- bzw. Spannungszuständen auf die Schallgeschwindigkeiten mit Hilfe der elastischen Materialkonstanten zweiter und dritter Ordnung beschreibt. Durch Verwendung mehrerer Wellenarten, deren Geschwindigkeiten unterschiedlich stark vom gleichen Spannungszustand beeinflusst werden und die sich über den gleichen Bauteilbereich ausbreiten, lassen sich Auswertbeziehungen angeben, in denen die Laufzeiten der Ultraschallwellen als einzige Messgröße eingehen. Die zur quantitativen Spannungsanalyse notwendigen elastischen Materialkennwerte werden üblicherweise im Zugversuch ermittelt. Mit ihrer Kenntnis werden aus Ultraschalllaufzeitmessungen und Messwertänderungen Hauptspannungen und Hauptspannungsänderungen berechnet. Auch die Bestimmung von Hauptspannungsrichtungen ist mit Hilfe von linear polarisierten Transversalwellen möglich. Die Bauteiltemperatur, eine insbesondere in Walzprodukten vorliegende Textur oder eine Inhomogenität des Gefügestands verändern die elastischen Materialkennwerte; zur Spannungsanalyse werden diese Einflüsse festgestellt und berücksichtigt.

Die Anwendung der Ultraschallverfahren war vor dieser Arbeit dadurch gekennzeichnet, dass das Ergebnis der Spannungsanalyse durch die Wahl der elastischen Materialkennwerte, durch die mehr oder weniger zutreffende Korrektur der Textur- bzw. Gefügeeinflüsse sowie durch die

Festlegung der Messstellenanzahl und des Messortes subjektiven Einflüssen unterworfen war. Nur Fachleuten gelang eine Ultraschallspannungsanalyse, deren Ergebnisse mit denen der etablierten Verfahren übereinstimmten. Die Einschränkung durch das zur Auswertung der Messergebnisse notwendige Expertenwissen begründet die vergleichsweise geringe Nutzung dieses Verfahrens.

Ziel dieser Arbeit ist, aus den Laufzeitmessergebnissen, menügeführt unter Nutzung der vorgegebenen Auswertebeziehungen objektive Ergebnisse bereitzustellen.

Ziel ist auch, die Ermittlung der zur quantitativen Spannungsanalyse notwendigen elastischen Materialkennwerte sowie die Korrektur von Textur- und Gefügeeinflüssen durch vorgegebene Routinen zu vereinfachen und dadurch verlässlichere Ergebnisse zu erhalten.

Ziel ist schließlich, den Spannungszustand eines Bauteils möglichst flächen- bzw. volumendeckend unter Nutzung der an einzelnen Messpositionen ermittelten konkreten Spannungswerte zu beschreiben.

Es wurde eine Softwareroutine entwickelt, die die jeweiligen mathematischen Beziehungen hinterlegt und den Nutzer durch die einzelnen Schritte der Auswertung zum Ergebnis der Spannungsanalyse führt. Darin wird die Ergebnispräsentation und -dokumentation, auch die der Zwischenergebnisse, unterstützt.

Folgende Module werden bereitgestellt:

- Das Einlesen von gemessenen Schallwellenlaufzeiten nach vorgegebener Reihenfolge. Dabei können die Messwerte durch Polynominterpolation oder GAUSS-Glättung angenähert werden, um kontinuierlichere Laufzeitkurven zu erhalten, um z.B. Messausreißer oder Singularitäten auszugleichen. An dieser Stelle können schon durch die graphische Darstellung der Laufzeiten, ohne Berechnung von absoluten Spannungswerten, Hinweise über die Homogenität oder über lokale Inhomogenitäten eines Spannungszustands geben werden, die in vielen Fällen schon wichtige erste Informationen sind.
- Die ortsabhängige Korrektur von Einflüssen unterschiedlicher Gefügezustände, die sich mit der Härte charakterisieren lassen, auf die gemessenen Schallwellenlaufzeiten. Notwendig dafür ist die zuvor festgestellte materialspezifische Korrelation zwischen Härte und Schallgeschwindigkeit der Wellenart.
- Die Berechnung des Dickenprofils eines Bauteils unter Verwendung einer konstanten Longitudinalwellengeschwindigkeit und gemessenen Longitudinalwellenlaufzeiten.
- Die Berechnung der Transversalwellengeschwindigkeiten, die in die hinterlegten Auswertebeziehungen eingehen. Dazu werden gemessene Laufzeit und Dicke in Beziehung zueinander gesetzt.
- Die geführte Auswertung der im Zugversuch gemessenen Schallwellenlaufzeiten unter-

schiedlicher Wellenarten zur Bestimmung der materialspezifischen elastischen Kennwerte. Alternativ dazu können auch die notwendigen Kennwerte aus einer Datenbank eingelesen werden.

- Durch Auswertung von Messspuren, die über das gesamte Bauteil verteilt das Bauteilvolumen abdecken, werden die Transversalwellengeschwindigkeiten bestimmt, die den spannungsfreien Zustand beschreiben. Mit diesen Geschwindigkeitswerten wird auch der Einfluss einer vorliegenden Textur separiert.
- Die Berechnung der Hauptspannungen bzw. der Hauptspannungsänderungen eines zwei-axialen Spannungszustands durch Auflösen der Beziehungen an den Messpositionen.

Es wurden Rekonstruktionsmethoden in autarken Programmroutinen umgesetzt, mit denen geschlossene Spannungsprofile numerisch stabil erzeugt werden können. Geometrische Basis der Rekonstruktion ist die Vernetzung der modellierten Bauteilgeometrie. Auf Grundlage der an den Messpositionen ermittelten Stützwerte werden Spannungswerte an den Netzknoten durch methodenspezifische Abbildungsvorschriften berechnet. Nach Entwicklung der Basisfunktionen definierter Finiter Elemente erhält man die stetigen Spannungsprofile. Die Anwendung der folgenden Rekonstruktionsmethoden wurde an einem konkreten Beispiel mit dem gleichen Messdatensatz vergleichend dargestellt:

- Die Interpolation mit radialen Basisfunktionen überlagert additiv an den Stützstellen aufgespannte radialsymmetrische Basisfunktionen. Darin wird der Interpolationswert an einem Punkt durch alle Stützwerte beeinflusst. Durch Lösen des aus den Interpolationsbedingungen aufgestellten Gleichungssystems erhält man die Koeffizienten, mit denen die Spannungswerte aus der Linearkombination der Basisfunktionen berechnet werden.
- Die NATURAL NEIGHBOR Interpolation basiert auf einer Flächenwichtung. Der Interpolationswert setzt sich aus einer flächengewichteten Summe der Stützwerte zusammen, die im hinterlegten VORONOI-Diagramm nächste Nachbarn sind.
- Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Membranmodell erzeugt eine approximierte Fläche im Zwischenraum der Stützwerte. Im übertragenen Sinn wird eine biegesteife elastische Membran modelliert, die über Federn mit den Stützwerten verbunden ist. Aus dem eingestellten Verhältnis zwischen Biegesteifigkeit und Federsteifigkeit resultiert der Flächenverlauf. Umgesetzt wird das Modell durch in einem Gleichungssystem zusammengefasste bilineare Interpolations- und mit dem LAPLACE-Operator konstruierte Regularisierungsbedingungen. Das Auflösen des Gleichungssystems im Sinne der Fehlerquadratsumme liefert die Spannungsfläche.

Die rekonstruierten Spannungsprofile können den Nachteil nicht zugänglicher Messpositionen ausgleichen und ermöglichen effizientere Messzyklen mit geringerer Ortsauflösung. Eine allgemeingültige Annahme über eine zweckmäßige Stützstellenmenge existiert nicht; diese ist unter anderem abhängig von der Bauteilgeometrie, den aufgrund der Fertigung bzw. erfahrungsge-

mäß zu erwartenden Inhomogenitäten bzw. Spannungsgradienten oder der geforderten Auflösung. In einigen Fällen ist auch die Festlegung einer geeigneten Stützstellenverteilung erst nach Voruntersuchen möglich.

Mit diesem neuen Stand kann in der Praxis die Nutzung der Ultraschallverfahren durch Kombination von Messtechnik und entwickelter Softwareroutine erleichtert werden. Die Rekonstruktion ermöglicht darüber hinaus geschlossene Spannungsprofile im Bauteil abzubilden. Zum jetzigen Zeitpunkt sind zur Anwendung der Rekonstruktionsmethoden Kenntnisse über spezifische Befehle und Parameter notwendig. Die autarken Programmroutinen sind aber schon soweit vorbereitet und automatisiert, dass ihre Erweiterung durch menügeführte Benutzeroberflächen umgesetzt werden kann und damit ihre Nutzung erleichtert wird.

## Anhang

### Teil A

#### Auszug Herleitung akusto-elastischer Konstitutivgleichungen

[HUGHES & KELLY 1953] leiten unter Berücksichtigung der nichtlinear elastischen Wellenausbreitung mit den folgenden Voraussetzungen

- Abbildung ebener Wellen
- isotrope Festkörper in der verzerrungs- bzw. spannungsfreien NATURAL-Konfiguration
- MURNAGHAN-Theorie finiter Deformationen zur Darstellung der nichtlinearen Elastizität
- definierte Deformationsänderung

konstitutive Gleichungen (2.4) her, die die Phasengeschwindigkeiten der sich in den Hauptrichtungen ausbreitenden und schwingenden Wellen in Abhängigkeit der Hauptdehnungen und elastischen Konstanten beschreiben. [TOUPIN & BERNSTEIN 1961] begrenzen die akusto-elastischen Betrachtungen auf

- Abbildung ebener Wellen
- beliebige Materialsymmetrie des Festkörpers in der NATURAL-Konfiguration
- statische infinitesimale oder finite Vordeformation in der INITIAL-Konfiguration
- superpositionierte dynamische Deformation ist infinitesimal und entweder isotherm oder isentrop
- nichtlineare Hyperelastizität

und erhalten unter äquivalenten Bedingungen der Materialsymmetrie und Verzerrungszustände die gleichen Konstitutivgleichungen (2.4) entsprechend [HUGHES & KELLY 1953].

**Kinematik.** Zur kinematischen Erfassung der unterscheidbaren Festkörperkonfigurationen lassen sich gemäß Bild 2.1 nachstehende Verschiebungsvektoren definieren:

- $\mathbf{u}^I$  kennzeichnet die statische Deformation zwischen der NATURAL- und INITIAL-Konfiguration,
- $\mathbf{u}^F$  die Gesamtdeformation von der NATURAL- zur FINAL-Konfiguration und
- $\mathbf{u}$  die dynamische Deformation infolge der Wellenbewegung zwischen der INITIAL- und NATURAL-Konfiguration.

Die von [HUGHES & KELLY 1953] zugrunde gelegte und durch Gleichung (A1) definierte Deformation beinhaltet infinitesimale Verzerrungen, denen ein homogener dreiaxialer finiter (Haupt-) Verzerrungszustand mit den kartesischen Koordinatenachsen identisch den Hauptachsen  $(1, 2, 3 \triangleq I, II, III)$  superpositioniert ist.

$$x_i = U_i^I X_i + u_i(\mathbf{X}) \text{ mit } u_i(\mathbf{X}) \ll U_i^I - 1, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A1})$$

Konform der Konfigurationsunterteilung nach Bild 2.1 wird der finiten Deformation in den Hauptverzerrungskomponenten von der NATURAL- zur INITIAL- eine beliebige infinitesimale Deformation von der INITIAL- zur FINAL-Konfiguration additiv überlagert. Der in (A1) enthaltene Rechtsstrecktensor  $\mathbf{U}^I$  weist Diagonalf orm auf. Eine widerspruchsfreie TAYLOR-Reihendarstellung der Verzerrungsenergie nach Gleichung (2.1) liefert folgende LAGRANGE-Verzerrungen [HUGHES & KELLY 1953]

$$E_{ij} = E_i^I \delta_{ij} + (1 + E_i^I + E_j^I) \varepsilon_{ij}, \quad (\text{A2})$$

die additive Überlagerung in den Komponenten der LAGRANGE-Hauptdehnungen

$$E_i^I = \frac{1}{2} \left[ (U_i^I)^2 - 1 \right] \quad (\text{A3})$$

und der linearisierten EULER-Verzerrungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A4})$$

[TOUPIN & BERNSTEIN 1961] setzen einzig voraus, dass die überlagerte Wellendeformation infinitesimal und kleiner als die statische Vordeformation ist:

$$\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{u}^I\|. \quad (\text{A5})$$

An die statischen Vordeformationen sind keine weiteren Einschränkungen geknüpft.

**Kinetik/Wellengleichung.** Die Spannung in einem materiellen Punkt kann je nach Referenzkonfiguration mit dem CAUCHY-  $\boldsymbol{\sigma}$  oder einem PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ausgedrückt werden. Mit Bezug auf die INITIAL-Konfiguration wird in der FINAL-Konfiguration der symmetrische zweite PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  ${}^{II}\mathbf{P}^F$  herangezogen. Die Formulierung in den INITIAL-Koordinaten ist relevant für die akusto-elastische Eigenspannungsanalyse und ist als Bedingung identischer Konstitutivgleichungen vorausgesetzt.

In Anlehnung an die kinematische Zerlegung von [TOUPIN & BERNSTEIN 1961] erfüllen die Spannungen der statischen (Vor-) Deformation in der INITIAL-Konfiguration die Gleichgewichtsbedingungen. Dementsprechend folgt für die Bewegungsgleichung der dynamischen inkrementellen Verschiebung  $\mathbf{u}$  zwischen der INITIAL- und FINAL-Konfiguration aus dem Gleichgewicht der Kraftänderung der inneren Spannungen und den Trägheitskräften unter Vernachlässigung von Volumenkräften in INITIAL-Koordinaten  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ {}^{II}P_{ij} + \sigma_{jk}^I \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \right] = \rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A6})$$

In der Bewegungsgleichung (A6) sind bis auf die Bedingung (A5) keine weiteren Voraussetzungen enthalten und dementsprechend anwendbar auf beliebige Vordeformationen in der INITIAL-

Konfiguration. Die Konsistenz mit der Verzerrungsenergiedarstellung (2.1) in kubischer Approximation, d.h. Abbruch nach dem Term dritter Ordnung, bei vorausgesetzter Hyperelastizität liefert für den inkrementellen Spannungstensor  ${}^I P_{ij}$  eine einschränkende konstitutive Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der nichtlinearen Elastizität [PAO ET AL. 1984], [GAMER & PAO 1985]. Aus der Bewegungsgleichung (A6) folgt mit der Konstitutivgleichung für die inkrementelle Spannungsänderung ausgedrückt in den Verschiebungsgradienten die allgemeingültige Wellengleichung

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ (\delta_{ik} \sigma_{jl}^I + \mathbb{C}_{ijkl}) \frac{\partial u_k}{\partial X_l} \right] = \rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{ijkl} (1 - \varepsilon_{nn}^I) + \mathbb{C}_{ijklmn} \varepsilon_{mn}^I +$$

$$\mathbb{C}_{mjkl} \frac{\partial u_l^I}{\partial X_m} + \mathbb{C}_{imkl} \frac{\partial u_l^I}{\partial X_m} + \mathbb{C}_{ijml} \frac{\partial u_k^I}{\partial X_m} + \mathbb{C}_{ijkm} \frac{\partial u_l^I}{\partial X_m}$$
(A7)

der inkrementellen Deformation einer sich entlang der  $i$ -ten kartesischen Koordinate ausbreitenden Schallwelle in INITIAL-Koordinaten für beliebige Verzerrungs- bzw. Spannungszustände in der INITIAL-Konfiguration [TOUPIN & BERNSTEIN 1961]. Die Koeffizienten  $\mathbb{C}_{ijkl}$  werden sowohl vom Material selbst – ausgedrückt durch die elastischen Konstanten  $\mathbb{C}_{ijkl}$  – als auch von dem in der INITIAL-Konfiguration induzierten Verzerrungszustand bestimmt. Lösungsansätze der Wellengleichung sind also abhängig von Struktur, Zustand und Eigenschaften des Ausbreitungskörpers sowie der sich fortpflanzenden Welle. Die resultierenden Schallwellengeschwindigkeiten sind immer mit dem gewählten Bezugskordinatensystem verknüpft [TRUESDELL 1961].

**Konstitutivgleichungen.** Die Beschränkung auf die Ausbreitung ebener Wellen impliziert konstante Koeffizienten in (A7). Dementsprechend ist die statische Vordeformation in der INITIAL-Konfiguration homogen mit konstanten Verzerrungen bzw. Spannungen sowie Verschiebungsgradienten. Dies entspricht [HUGHES & KELLY 1953], die bei der Verzerrungsdefinition schon einen homogenen Hauptverzerrungszustand in der INITIAL-Konfiguration voraussetzen. Die Ultraschallwellen liefern also nur konstante Mittelwerte im Durchschallungsvolumen der INITIAL-Konfiguration, in denen sich ebene Wellen mit einer konstanten charakteristischen Wellengeschwindigkeit ausbreiten.

In einem homogen verformten Festkörper reduziert sich Gleichung (A7) in INITIAL-Koordinaten zu

$$(\delta_{ik} \sigma_{jl}^I + \mathbb{C}_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial X_j \partial X_l} = \rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} .$$
(A8)

Den Lösungsansatz ebener Wellen in (A8) eingesetzt führt auf ein Eigenwertproblem mit der Bestimmungsgleichung

$$\det\left[(\delta_{ik}\sigma_{jl}^I + \mathbb{C}_{ijkl})n_j n_l - \rho_1 v^2 \delta_{ik}\right] = 0 \quad (\text{A9})$$

für die Phasengeschwindigkeit  $v$  der Welle in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung, die durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Wellenfront (bzw. den Wellenvektor) gegeben ist. Phasengeschwindigkeit und zugehörige Schwingungs- bzw. Polarisationsrichtung erhält man demnach durch das Auffinden der Eigenwerte und Eigenvektoren des akusto-elastischen Tensors  $\mathbf{\Gamma}$

$$\Gamma_{ik} = (\delta_{ik}\sigma_{jl}^I + \mathbb{C}_{ijkl})n_j n_l. \quad (\text{A10})$$

Ein symmetrischer, positiv-definitiver Tensor  $\Gamma_{ik}$  ist äquivalent dazu, dass sich längs einer Kristallrichtung drei verschiedene, voneinander unabhängige Wellenarten ausbreiten, die gegenseitig orthogonal zueinander polarisiert sind.

Durch die vorausgesetzte

- isotrope Materialsymmetrie in der NATURAL-Konfiguration und kubischer Kristallsymmetrie können die in (A7) enthaltenen Koeffizienten  $\mathbb{C}_{ijkl}$  wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{ijkl} = & \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ & + 2(-\lambda + 2l - 2m + n) \delta_{ij} \delta_{kl} + (-\mu + m - \frac{1}{2}n) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) E_{mmm}^I \\ & + 2(\lambda + m - \frac{1}{2}n) (E_{ij}^I \delta_{kl} + E_{kl}^I \delta_{ij}) \\ & + 2(\mu + \frac{1}{4}n) (E_{ik}^I \delta_{jl} + E_{il}^I \delta_{jk} + E_{jk}^I \delta_{il} + E_{jl}^I \delta_{ik}) \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

ausgedrückt werden. Zusätzlich führt der

- homogene dreiaxiale Verzerrungszustand in der INITIAL-Konfiguration mit finiten Hauptverzerrungen entlang den Koordinatenachsen

auf die Lösung des Eigenwertproblems (A9) in Form der Konstitutivgleichungen (2.4) für die Phasengeschwindigkeiten reiner Schallwellenmoden.

### Auszug MURNAGHAN-Theorie

Bei Isotropie und elastischem Materialverhalten kann die Verzerrungsenergie allein durch die drei Invarianten des Verzerrungstensors ausgedrückt werden, siehe z.B. [ALTENBACH & ALTENBACH 1994]. Mit dieser Eigenschaft formuliert [MURNAGHAN 1951] die spezifische Verzerrungsenergie als TAYLOR-Reihenentwicklung (in der Umgebung des natürlichen Zustands) in den drei Invarianten ( $I_i$ ,  $i=1,2,3$ ) des LAGRANGE-Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und erhält folgende isotherme Energiefunktion:

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_0 + \alpha I_1(\mathbf{E}) + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_1^2(\mathbf{E}) - 2\mu I_2(\mathbf{E}) + \frac{1}{3}(l + 2m) I_1^3(\mathbf{E}) \\ - 2m I_1(\mathbf{E}) I_2(\mathbf{E}) + n I_3(\mathbf{E}). \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

Vernachlässigt werden dabei Summanden ab vierter Ordnung. Der konstante Term  $\Phi_0$  kennzeichnet den energetischen Grundzustand, der unabhängig von den Verzerrungen ist. Ein mög-

licher anfänglicher- bzw. Ausgangs-Verzerrungszustand ist durch den linear von den Verzerrungen abhängigen Term  $\alpha I_1(\mathbf{E})$  berücksichtigt. In einem isotropen Festkörper entspricht dieser Ausgangszustand einer hydrostatischen Vordeformation. In Gleichung (A12) sind die voneinander unabhängigen elastischen Konstanten – die LAMÉ-Konstanten  $\lambda, \mu$  zweiter Ordnung (SOEC) und die MURNAGHAN-Konstanten  $l, m, n$  dritter Ordnung (TOEC) – enthaltenen.

### Verifikation der Elastizitätskonstanten dritter Ordnung (TOEC)

Die von [MURNAGHAN 1951] durch Betrachtungen der Elastizitätstheorie finiter Deformationen eingeführten Elastizitätskonstanten dritter Ordnung (TOEC), die MURNAGHAN-Konstanten, beschreiben zusammen mit den SOEC allgemein das nichtlinear elastische Materialverhalten eines Festkörpers. Daneben leitete [BRUGGER 1964], wie auch schon [HEARMON 1953], aus der Reihendarstellung der Verzerrungsenergie im Entwicklungsterm dritter Ordnung die thermodynamische Definition der TOEC für polykristalline Festkörper ab. Entsprechende Entwicklungskoeffizienten legen auch [TOUPIN & BERNSTEIN 1961] oder [JONES & KOBETT 1963] bzw. [GOLDBERG 1961] für die Charakterisierung der akusto-elastischen Schallwellenausbreitung in nichtlinear elastischen Körpern zugrunde. Die unterschiedlichen Systeme elastischer Konstanten dritter Ordnung stehen aber bei Bezug auf den LAGRANGE-Verzerrungstensor in konsistenten Beziehungen zueinander, die [GREEN 1973] entnommen werden können. Allen Formulierungen ist gemein, dass in einem (quasi-) isotropen Festkörper, der zudem hyperelastisch ist, drei voneinander unabhängige elastische Konstanten dritter Ordnung existieren; im kubischen Kristallgitter beispielsweise sind es derer sechs.

Die Äquivalenz der linearen Elastizitätstheorie, dass jedes isotrope elastische Material auch gleichzeitig hyperelastisch ist, ist im Rahmen der nichtlinearen Theorie nicht mehr gegeben. Deshalb leitet [TRUESDELL 1962] eine notwendige und hinreichende algebraische Bedingung ab, anhand der die gerechtfertigte Postulierung einer existierenden Energiefunktion im Material nachgewiesen werden kann. Dazu werden alle Materialkonstanten eliminiert und nur Phasengeschwindigkeiten von reinen Longitudinal- und Transversalwellen in Relation gesetzt. Grundlage dieser Hyperelastizitätsverifikation ist die auf [RIVLIN 1953] zurückgehende verallgemeinerte nichtlineare Theorie [TRUESDELL 1961]. Diese erlaubt die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der reinen Wellenmoden in isotroper Umgebung in Abhängigkeit von vier unabhängigen TOEC darzustellen, die wiederum äquivalent dem TOEC-System in [TRUESDELL & NOLL 1965] sind. Hyperelastizität reduziert die unabhängige Anzahl auf drei. [BACH & ASKEGAARD 1979] grenzen die Ansätze nach [HUGHES & KELLY 1953] und [TRUESDELL 1962] experimentell in einem zweiaxialen Spannungszustand gegeneinander ab und führen den Nachweis, dass die jeweiligen Geschwindigkeitsdarstellungen als Funktion der Hauptspannungen bzw. Hauptspannungsdifferenz inein-

ander übergehen. Diese experimentelle Übereinstimmung lässt den Rückschluss auf die Allgemeingültigkeit der Beziehungen (2.6) im dreiaxialen Spannungsfeld bei Existenz eines Verzerrungspotenzials zu. [GREEN 1973] bestätigt die Übereinstimmung in den unterschiedlichen Theorien und gibt eine Übersicht der hergeleiteten Beziehungen, insbesondere für das Ausbreiten entlang ausgezeichneter Richtungen in kubischen Kristallsystemen. Ansätze von [KHEDHER & DE HALLEUX 1992], den Einfluss von elastischen Verzerrungen auf das Ausbreitungsverhalten elastischer Wellen zu beschreiben, führen letztlich ebenfalls auf die gleichen Zusammenhänge wie schon von [HUGHES & KELLY 1953] gegeben, die zudem im experimentellen Abgleich die besten Ergebnisse liefern. [LANDA & PLESEK 2000] geben auf Messdaten gestützt an, dass auch unter Beachtung mehrerer Verzerrungsmaße bezüglich der unterschiedenen Festkörperkonfigurationen die Darstellungen in den TOEC äquivalent sind.

## Teil B

Näherungsdarstellung der relativen Geschwindigkeitsdifferenz der SH<sub>0</sub>-Welle in Gleichung (3.7):

$$\begin{aligned} \rho(v_{ij}^2 - v_{ji}^2) &= \rho(v_{ij} - v_{ji}) \underbrace{(v_{ij} + v_{ji})}_{\approx 2v_T} \approx 2\rho v_T (v_{ij} - v_{ji}) \\ \Rightarrow \frac{v_{ij} - v_{ji}}{v_T} &\approx \frac{1}{2\rho v_T^2} (\sigma_i - \sigma_j) = \frac{1}{2\mu} (\sigma_i - \sigma_j) \end{aligned} \quad (B1)$$

Herleitung zur Darstellung der relativen Geschwindigkeitsänderungen von Longitudinal- und Transversalwelle, in Gleichung (3.9) eingehend:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0(v_{ii}^2 - v_L^2)}{\lambda + 2\mu} &= \frac{\rho_0(v_{ii} - v_L) \underbrace{(v_{ii} + v_L)}_{\approx 2v_L}}{\rho_0 v_L^2} \approx \frac{(v_{ii} - v_L) 2v_L}{v_L^2} = \frac{2(v_{ii} - v_L)}{v_L} \\ \frac{\rho_0(v_{ij}^2 - v_T^2)}{\mu} &= \frac{\rho_0(v_{ij} - v_T) \underbrace{(v_{ij} + v_T)}_{\approx 2v_T}}{\rho_0 v_T^2} \approx \frac{(v_{ij} - v_T) 2v_T}{v_T^2} = \frac{2(v_{ij} - v_T)}{v_T} \end{aligned} \quad (B2)$$

Herleitung der Laufwegskorrektur via HOOKE zur Darstellung der Geschwindigkeitsänderung in Gleichung (3.14):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v_0} &= \frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\frac{L}{t} - \frac{L_0}{t_0}}{\frac{L_0}{t_0}} = \frac{1}{\frac{L_0}{t_0}} \left( L - L_0 \frac{t}{t_0} \right) = \frac{t_0}{L_0} \left( \frac{L - L_0 \frac{t}{t_0}}{L_0} \right) \\ \Rightarrow \frac{dv}{v_0} &\approx \frac{L - L_0 \frac{t}{t_0}}{L_0} = \frac{1}{L_0} (Lt_0 - L_0 t) = \frac{Lt_0 - L_0 t_0 + L_0 t_0 - L_0 t}{L_0 t_0} \end{aligned} \quad (B3)$$

$$= \frac{t_0(L - L_0) - L_0(t - t_0)}{L_0 t_0}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v_0} \approx \frac{L - L_0}{L_0} - \frac{t - t_0}{t_0} = \frac{dL}{L_0} - \frac{dt}{t_0}$$

(Der Index 0 kennzeichnet den Referenzzustand.)

Direkter AEC-Zugang über Laufzeitmessung und Querkontraktion  $v$  mit Berücksichtigung der Laufwegskorrektur aus (B3):

$$AEC_{ij} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{v_{ij} - v_{ij}^0}{v_{ij}^0} \right] = \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{dv_{ij}}{v_{ij}^0} \right], \quad \frac{dv_{ij}}{v_{ij}^0} \approx \frac{dL}{L_0} - \frac{dt_{ij}}{t_{ij}^0}$$

$$\Rightarrow AEC_{ij} \approx \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \underbrace{\frac{dL}{L_0}}_{=-v d\varepsilon} - \frac{dt_{ij}}{t_{ij}^0} \right] = \frac{d}{d\varepsilon} (-v d\varepsilon) - \frac{d}{d\varepsilon} \frac{dt_{ij}}{t_{ij}^0} \quad (B4)$$

$$\Rightarrow AEC_{ij} \approx - \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \frac{t_{ij} - t_{ij}^0}{t_{ij}^0} \right] - v$$

Die aus Gleichung (3.16) resultierenden Absolutfehler der einzelnen Spannungskomponenten:

$$|\Delta\sigma_j| = \left| \frac{1}{\left( \frac{H/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} - \frac{F/K^{(j)}}{F/K^{(k)}} \right)^2} \left( \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} - \frac{F/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} \right) \left( \Delta H/K^{(j)} + \left| \frac{F/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} \right| \Delta F/K^{(k)} \right) \right.$$

$$+ \left| \frac{1}{\left( \frac{H/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} - \frac{F/K^{(j)}}{F/K^{(k)}} \right)} \frac{F/K^{(j)}}{(H/K^{(k)})^2} \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{F/K^{(j)}}{F/K^{(k)}}}{(H/K^{(k)})^2} \left( \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} - \frac{F/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} \right) \right| \Delta H/K^{(k)}$$

$$+ \left| \frac{\frac{F/K^{(k)}}{H/K^{(k)}}}{\left( \frac{H/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} - \frac{F/K^{(j)}}{F/K^{(k)}} \right)^2} \left( \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} - \frac{F/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{H/K^{(k)}} \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} \frac{1}{\left( \frac{H/K^{(j)}}{H/K^{(k)}} - \frac{F/K^{(j)}}{F/K^{(k)}} \right)} \right| \Delta F/K^{(j)} \quad (B5)$$

$$\begin{aligned}
|\Delta\sigma_k| = & \left| \frac{1}{\left(\frac{H/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} - \frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}}\right)^2} \left( \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} - \frac{F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} \right) \right| \left( \Delta H/K^{(k)} + \left| \frac{F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} \right| \Delta F/K^{(j)} \right) \\
& + \frac{1}{\left(\frac{H/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} - \frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}}\right)} \frac{F/K^{(k)}}{(H/K^{(j)})^2} \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} \\
& - \frac{\frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{(H/K^{(j)})^2}}{\left(\frac{H/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} - \frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}}\right)^2} \left( \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} - \frac{F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} \right) \left| \Delta H/K^{(j)} \right. \quad (B6) \\
& + \frac{\frac{F/K^{(j)}}{H/K^{(j)}}}{\left(\frac{H/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} - \frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}}\right)^2} \left( \frac{v_{ik} - v_T^{ik}}{v_T^{ik}} - \frac{F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} \right) \\
& \left. - \frac{1}{H/K^{(j)}} \frac{v_{ij} - v_T^{ij}}{v_T^{ij}} \frac{1}{\left(\frac{H/K^{(k)}}{H/K^{(j)}} - \frac{F/K^{(j)} F/K^{(k)}}{H/K^{(j)}}\right)} \right| \Delta F/K^{(k)}
\end{aligned}$$

### Auszug publizierter Arbeiten zur Trennung von Textur und akusto-elastischem Effekt

Die meisten Ansätze basieren auf der Auswertung linear polarisierter Transversalwellen sowie der elastischen Konstanten mit Beschränkung auf Materialien kubischer Kristall- und orthorhombischer Textursymmetrie.

Den Ansatz (3.6) greifen auch [THOMPSON ET AL. 1983], [THOMPSON ET AL. 1984A], [THOMPSON ET AL. 1984B] auf, um die Trennung von spannungs- und texturabhängigen Geschwindigkeitsanteilen zu umgehen. Durch den Einsatz von  $SH_0$ -Wellen in der Plattenebene entfällt die Texturcharakterisierung. Nachteilig dabei ist die Wellenausbreitung in zwei unterschiedlichen Werkstoffvolumina. Eine Erweiterung der Formulierung (3.6) in [THOMPSON ET AL. 1986] berücksichtigt zusätzlich einen möglichen Winkerversatz zwischen Hauptspannungsrichtungen und textuellen Symmetrierichtungen. Weitere Arbeiten zur quantitativen Trennung von Eigenspannungen und Textur in plattenförmigen Materialien haben unter anderem [SAYERS & PROUDFOOT 1986] sowie [THOMPSON ET AL. 1985], [THOMPSON ET AL. 1987] oder auch [KING & FORTUNKO 1983A], [KING & FORTUNKO 1983B], [CLARK 1983] bzw. [MASE & JOHNSON 1987], [DELSANTO ET AL. 1990], [LINDGREN ET AL. 1993], [TANALA ET AL. 1995] und [DUQUENNOY ET AL. 1999], [DUQUENNOY ET AL.

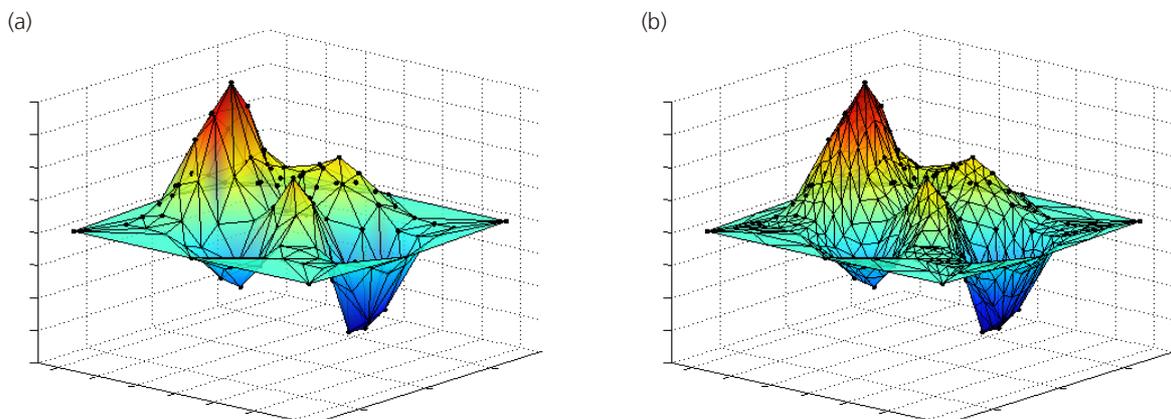
2002] dargelegt. Zur Ermittlung von Volumenspannungen berücksichtigen z.B. [OKADA 1981] bzw. [CLARK & MIGNOGNA 1983], [CLARK 1985], [CLARK ET AL. 1987], dass Textur- und Hauptspannungsachsen um einen Winkel gegeneinander verschoben sind. Die dabei zusätzlich vorhandenen Schubspannungen werden durch Einbeziehung mechanischer Gleichgewichtsbedingungen, siehe [JANNSEN & ZUIDEMA 1985], berücksichtigt.

Die meisten der eben aufgezählten Ansätze beinhalten Einschränkungen und besitzen oftmals keine Allgemeingültigkeit. Problematisch sind vor allem die messtechnische Zugänglichkeit, die Modenreinheit der Transversalwellen sowie die erreichbare Messgenauigkeit. Zudem wird überwiegend die Analyse an Aluminium durchgeführt. Aluminium bietet aufgrund des gegenüber Stahl deutlich geringeren Anisotropiefaktors und des größeren akusto-elastischen Effekts günstigere Voraussetzungen zur Separierung des Textureinflusses. Der Anisotropiefaktor  $c = c_{11} - c_{12} - 2c_{44}$  beträgt bei Aluminium 0,01 GPa und bei Stahl 0,136 GPa. Eine 1%-ige Laufzeitänderung einer Longitudinalwelle parallel zur Spannung wird von etwa 25 MPa in Aluminium und von etwa 80 MPa in Stahl verursacht (siehe reziproker Wichtungsquotient  $C/A$  in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2).

## Teil C

### Rekonstruierte Testfunktion bei hierarchischer Vernetzung

Bild C1 enthält das Ergebnis der angewendeten Rekonstruktionsmethoden bei zugrunde gelegter hierarchischer Vernetzung bezüglich der Stützstellenmenge  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Die eingehenden Stützstellenwerte der Testfunktion (5.45) sind als schwarz markierte Punkte den Rekonstruktionsflächen überlagert.



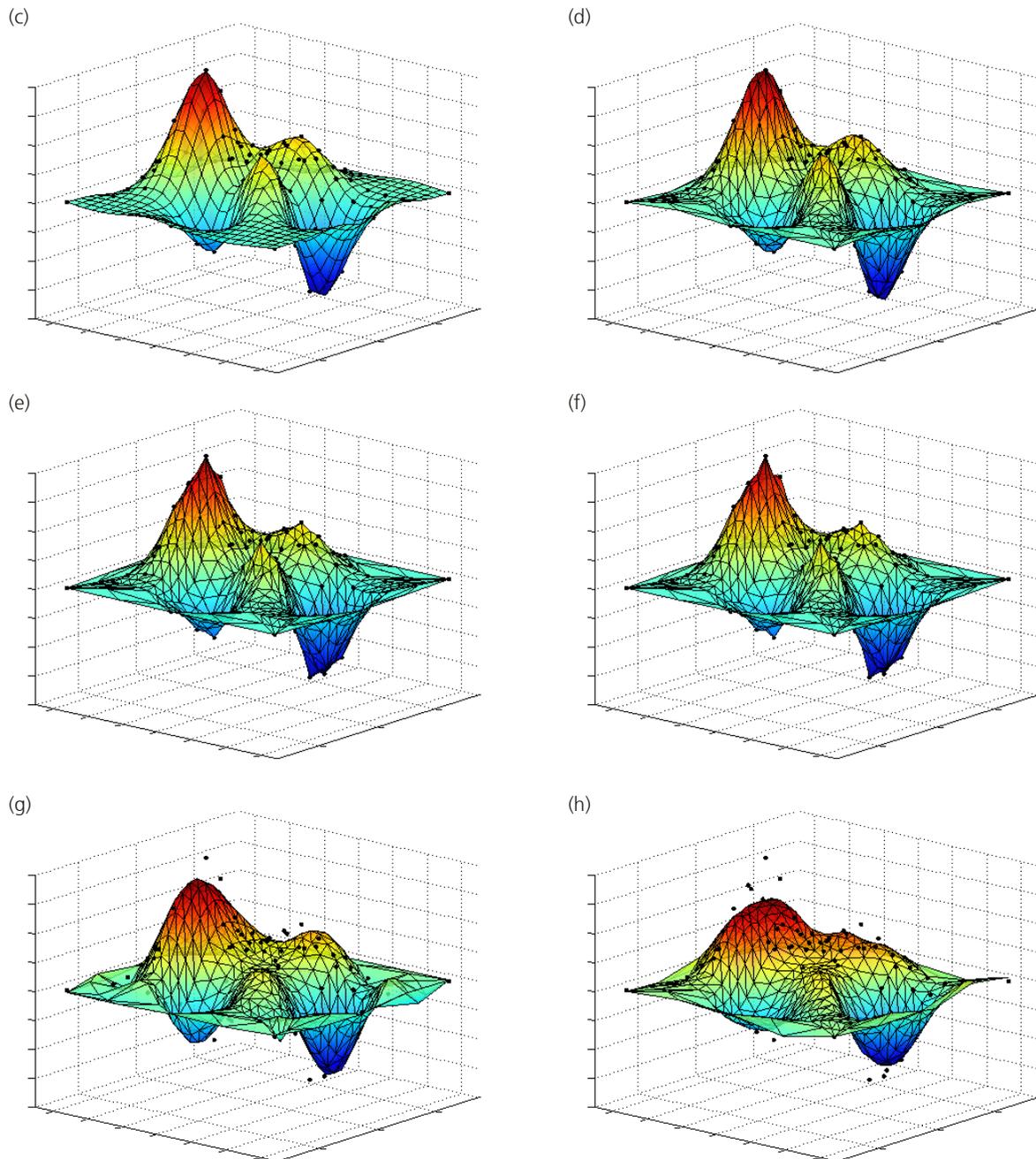


Bild C1: Rekonstruierte Flächen der Testfunktion bei hierarchischer Vernetzung.

- (a) Lineare Interpolation bei triangulierter Stützstellenmenge  $X$
- (b) Lineare Interpolation bei Triangulierung mit höherem Vernetzungsgrad im Vergleich zu (a)
- (c) Approximation durch das Membranmodell ( $\gamma = 1$ )
- (d) Interpolation mit der radialen Basisfunktion MULTIQUADRIC ( $\epsilon = 0$ )
- (e) SIBSON NATURAL NEIGHBOR Interpolation [SIBSON 1981]
- (f) NON-SIBSON NATURAL NEIGHBOR Interpolation [BELIKOV ET AL. 1997]
- (g) Polynominterpolation ( $k = 10$ )
- (h) Interpolation mittels kubischem Spline

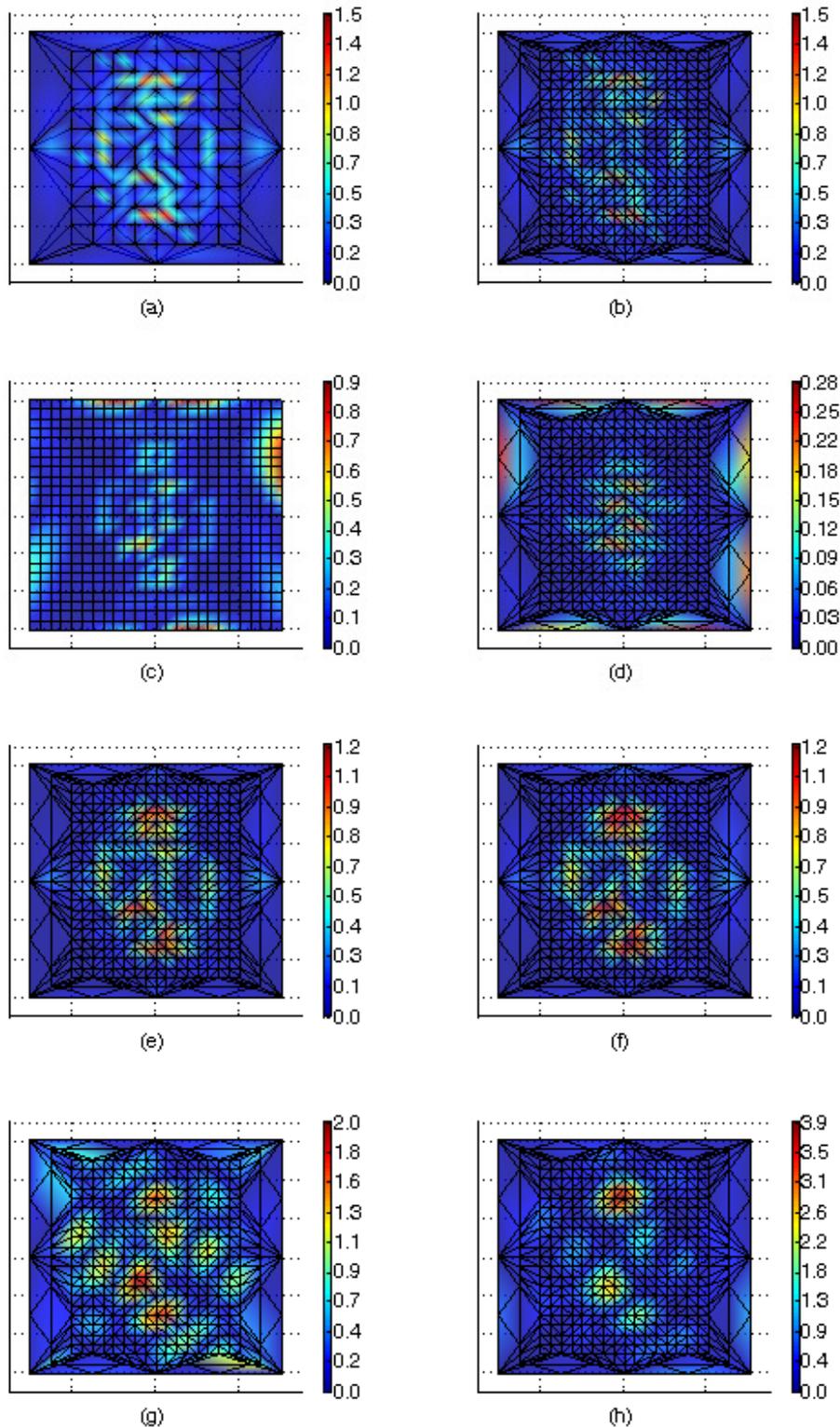


Bild C2: Absolutfehler von rekonstruiertem- und analytischem Testfunktionswert an den Knoten der Vernetzung.

Anhand der in Bild C2 berechneten Absolutfehler wird deutlich, dass bei der linearen Interpolation das Ergebnis unabhängig vom hierarchischen Vernetzungsgrad ist. Durch das sukzessive

Entwickeln der nodalen Basisfunktionen hat eine engmaschigere Vernetzung keinen Einfluss auf die Gestalt der Fläche. Die zusammengesetzte Fläche ist in diesem Fall identisch mit der von den linearen Dreieckselementen aufgespannten Spannungfläche, die sich aus den triangulierten Messpositionen einstellt. Das Ergebnis ist eine grob aufgelöste Spannungfläche, deren Qualität unmittelbar von den gewählten Messpositionen vorgegeben wird.

Die NON-SIBSON NATURAL NEIGHBOR Interpolation (e) nach [BELIKOV ET AL. 1997], [BELIKOV & SEMENOV 2000] liefert keinen merklichen Unterschied in den Fehlerwerten im Vergleich zu der NATURAL NEIGHBOR Interpolierenden (f). Bei der NON-SIBSON Methode sind im 2D keine Flächen sondern Längen in Bezug zueinander gesetzt. Generell sind die durch SIBSON-Interpolation erzeugte Flächen optisch glatter.

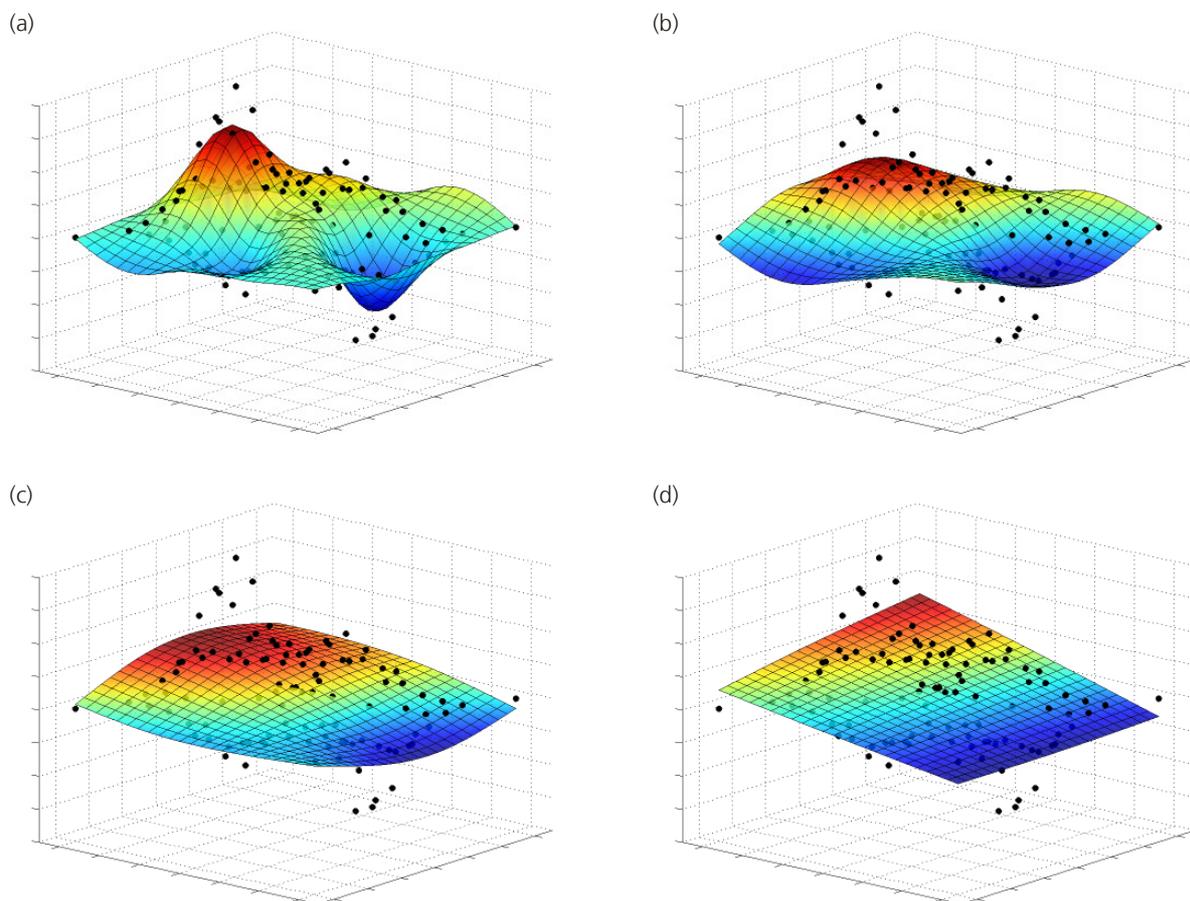


Bild C3: Rekonstruierte Membranmodellfläche in Abhängigkeit des variierten Glättungsparameters:  $\gamma = 10$  (a),  $\gamma = 30$  (b),  $\gamma = 100$  (c),  $\gamma = 500$  (d).

Der Einfluss des Regularisierungs- bzw. Glättungsparameters  $\gamma$  auf die rekonstruierte Fläche des Membranmodells zeigt Bild C3. Die Membranfläche wird mit zunehmenden  $\gamma$  biegesteifer bis hin zur Endlage entsprechend der bilinearen Fläche in Bild C3 (d).

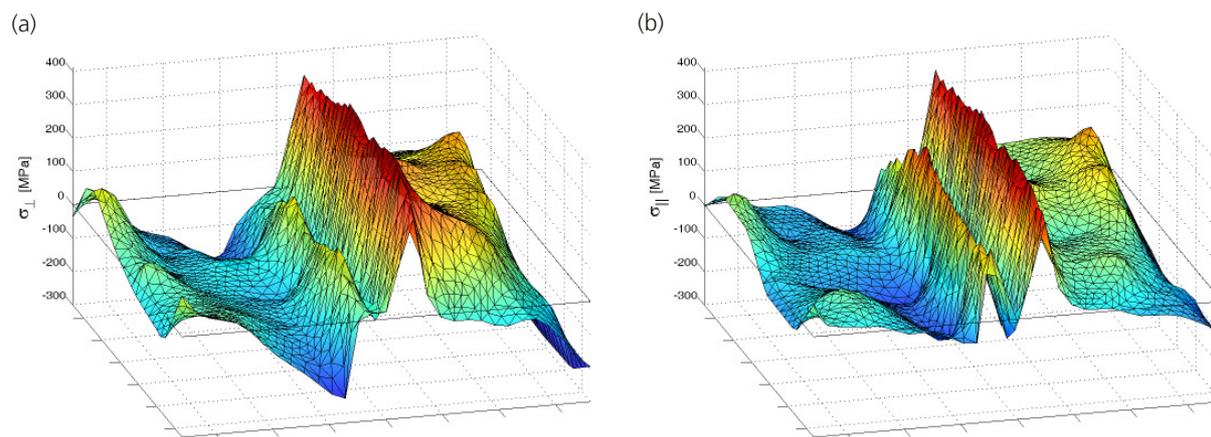


Bild C4: Über der Schweißnaht ergänzte Hauptspannungskomponenten  $\sigma_{\perp}$  (a) und  $\sigma_{\parallel}$  (b) der geschweißten Stahlplatte aus Kapitel 6.2.

## Literaturverzeichnis

- [ALERS ET AL. 1991]: ALERS, G., G. HÜBSCHEN, B. MAXFIELD, W. REPLINGER, H.-J. SALZBURGER, R.B. THOMPSON AND A. WILBRAND (1991): Electromagnetic acoustic transducer, in: ASTN Nondestructive Testing Handbook Vol. 7, Ed.: MCINTIRE, pp. 326-340.
- [ALLEN ET AL. 1982]: ALLEN, D.R., W.H.B COOPER, C.M. SAYERS AND M.G. SILK (1982): The use of ultrasonics to measure residual stress, in: Research Techniques in Nondestructive Testing **VI**, Ed.: SHARPE, R.S., Academic Press, London, pp. 151-209.
- [ALTENBACH & ALTENBACH 1994]: ALTENBACH, J. UND H. ALTENBACH (1994): Einführung in die Kontinuumsmechanik, B.G. Teubner, Stuttgart.
- [AMIDROR 2002]: AMIDROR, I. (2002): Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey, J. Electronic Imaging **11**(2), pp. 157-176.
- [AULD 1990]: AULD, B.A. (1990): Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York.
- [AURENHAMMER 1991]: AURENHAMMER, F. (1991): Voronoi diagrams a survey of a fundamental geometric data structure, ACM Comput. Surv. **23**, pp. 345-405.
- [BACH & ASKEGAARD 1979]: BACH, F. AND V. ASKEGAARD (1979): General stress-velocity expressions in acoustoelasticity, Exp. Mech., pp. 69-75.
- [BARBER ET AL. 1996]: BARBER, C.B., D.P. DOBKIN AND H. HUHDANPAA (1996): The quickhull algorithm for convex hulls, ACM Trans. Math. Soft. **22**(4), pp.469-483.
- [BARNHILL 1977]: BARNHILL, R.E. (1977): Representation and approximation of surfaces, in: Mathematical Software III, Ed.: RICE, J.R., Academic Press, New York, pp. 69-120.
- [BARNHILL AND GREGORY 1975]: BARNHILL, R.E. AND J.A. GREGORY (1975): Polynomial interpolation to boundary data on triangles, Math. Comput. **29**(131), pp. 726-735.
- [BATHE 1986]: BATHE, K.-J. (1986): Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, Berlin.
- [BEHNKEN 1997]: BEHNKEN, H. (1997): Some basic relations to the stress analysis using diffraction methods, in: Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods, Ed.: HAUK, V., Elsevier Science B.V., Amsterdam, pp. 39-65.

- [BELIKOV ET AL. 1997]: BELIKOV, V.V., V.D. IVANOV, V.K. KONTOROVICH, S.A. KORYTNIK AND A.Y. SEMENOV (1997): The non-Sibsonian interpolation: a new method of interpolation of the values of a function on an arbitrary set of points, *Comput. Math. Math. Phys.* **37**(1), pp. 9-15.
- [BELIKOV & SEMENOV 2000]: BELIKOV, V.V. AND A.Y. SEMENOV (2000): Non-Sibsonian interpolation on arbitrary systems of points in Euclidian space and adaptive isolines generation, *Appl. Num. Math.* **32**(4), pp. 371-387.
- [BENSON & REALSON 1959]: BENSON, R.W. AND V.J. REALSON (1959): Acoustoelasticity, *Prod. Eng.* **30**, pp. 56-62.
- [BERGMAN & SHABENDER 1958]: BERGMAN, R.M. AND R.A. SHABENDER (1958): Effect of statically applied stresses on the velocity of propagation of ultrasonic waves, *J. Appl. Phys.* **29**, pp. 1736-1738.
- [BIOT 1940]: BIOT, M.A. (1940): The influence of initial stress on elastic waves, *J. Appl. Phys.* **11**, pp. 522-530.
- [BIOT 1965]: BIOT, M.A. (1965): *Mechanics of Incremental Deformations*, John Wiley, New York.
- [BIRAN & BREINER 1999]: BIRAN, A AND M. BREINER (1999): *MATLAB 5 für Ingenieure*, Addison-Wesley, Bonn.
- [BOZZINI & LENARDUZZI 2005]: BOZZINI, M. AND L. LENARDUZZI (2005): Reconstruction of surfaces from a not large data set by interpolation, *Rendiconti di Matematica VII* **25**, pp. 223-239.
- [BRAMBLE AND ZLAMAL 1970]: BRAMBLE, J. AND M. ZLAMAL (1970): Triangular elements in the finite element method, *Math. Comput.* **24**, pp. 809-820.
- [BRAY & STANLEY 1997]: BRAY, D.E. AND R.K. STANLEY (1997): *Nondestructive Evaluation*, Revised Edition, CRC Press, Boca Raton.
- [BROCH 1970]: BROCH, J.T. (1970): Über die Anwendbarkeit und Grenzen der Kreuzkorrelations- und der Kreuzkorrelationsdichte-Technik, *Tech. Rev. Adv. Tech. Acoust. Electr. Mech. Measurement* **4**, Brüel & Kjoer, pp. 3-29.
- [BROKOWSKI & DEPUTAT 1985]: BROKOWSKI, A. AND J. DEPUTAT (1985): Ultrasonic measurements of residual stresses in rails, *Proc. 11<sup>th</sup> WCNDT, Las Vegas*, pp. 592-598.
- [BRONSTEIN & SEMENDJAJEW 1991]: BRONSTEIN, I.N. AND K.A. SEMENDJAJEW (1991): *Taschenbuch*

der Mathematik, 25. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart.

- [BROWN 1997]: BROWN, J.L. (1997): Systems of coordinates associated with points scattered in the plane, CAD **14**, pp. 547-559.
- [BRUNNER & SCOTT 1994]: BRUNNER, S.C. AND L.R. SCOTT (1994): The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer, New York.
- [BUHMANN 1993]: BUHMANN, M.D. (1993): New developments in the theory of radial basis function interpolation, in: Multivariate Approximation: From CAGD to Wavelets, Ed.: JETTER, K. AND F.I. UTRERAS, World Scientific, Singapore, pp. 35-75.
- [BUHMANN & MICCHELLI 1992]: BUHMANN, M.D. AND C.A. MICCHELLI (1992): Multiquadric interpolation improved, Comput. Math. Appl. **24**, pp. 21-25.
- [BUHMANN 2003]: BUHMANN, M.D. (2003): Radial Basis Functions: Theory and Implementation, Cambridge University Press.
- [BUNGE 1965]: BUNGE, H.-J. (1965): Zur Darstellung allgemeiner Texturen, Z. Metallk. **56**, S. 872-874.
- [BUNGE 1984]: BUNGE, H.-J. (1984): Neuere Entwicklungen auf dem Texturgebiet, Z. Metallkunde **75**(2), S. 97-111.
- [CALIARI ET AL. 2005]: CALIARI, M., S. DE MARCHI AND M. VIANELLO (2005): Bivariate polynomial interpolation on the square at new nodal sets, Appl. Math. Comput. **165**, pp. 261-274.
- [CAREY & ODEN 1984]: CAREY, G.F. AND J.T. ODEN (1984): Finite Elements: Computational Aspects, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- [CARLSON & FOLEY 1991]: CARLSON, R.E. AND T.A. FOLEY (1991): The parameter  $r^2$  in multiquadric interpolation, Comput. Math. Appl. **21**, pp. 29-42.
- [CLARK 1983]: CLARK, A.V. (1983): Determination of stresses in slightly orthotropic plates using off-axis horizontally polarized ultrasonic waves, Ultrasonics **21**, pp. 249-255.
- [CLARK & MIGNOGNA 1983]: CLARK, A.V. AND R.B. MIGNOGNA (1983): A comparison of two theories of acoustoelasticity, Ultrasonics **21**, pp. 217-225.
- [CLARK 1985]: CLARK, A.V. (1985): On the use of acoustic birefringence to determine components of plane stress, Ultrasonics **23**, pp. 21-30.

- [CLARK ET AL. 1987]: CLARK, A.V., J.C. MOULDER, R.B. MIGNOGNA AND P.P. DELSANTO (1987): A comparison of several ultrasonic techniques for absolute stress determination in the presence of texture, in: *Solid Mechanics Research for Quantitative Non-destructive Evaluation*, Ed.: ACHENBACH, J.D. AND Y. RAJAPAKSE, Martinius Nijhoff Publishers, Dordrecht, pp. 345-360.
- [CRECRAFT 1967]: CRECRAFT, D.I. (1967): The measurement of applied and residual stresses in metals using ultrasonic waves, *J. Sound Vib.* **5**(1), pp. 173-192.
- [DAVYDOV & ZEILFELDER 2004]: DAVYDOV, O. AND F. ZEILFELDER (2004): Scattered data fitting by direct extension of local polynomials with bivariate splines, *Adv. Comp. Math.* **21**, pp. 223-271.
- [DEBRO 1995]: DEBRO UMS (1995): *Akademicka 3*, 02-038 Warschau, Polen, Persönliche Mitteilung.
- [DE BERG ET AL. 2000]: DE BERG, M., M. VAN KREVELD, M. OVERMARS AND O. SCHWARZKOPF (2000): *Computational Geometry – Algorithms and Applications*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [DELSANTO ET AL. 1990]: DELSANTO, P.P., R.B. MIGNOGNA AND A.V. CLARK (1990): Ultrasonic texture and stress measurements in anisotropic polycrystalline aggregates, *J. Acoust. Soc. Am.* **87**(1), pp. 215-224.
- [DEVILLERS 2002]: DEVILLERS, O. (2002): The Delaunay hierarchy, *Int. J. Found. Comput. Sci.* **13**, pp. 163-180.
- [DIEULESAINT & ROYER 1980]: DIEULESAINT, E. AND D. ROYER (1980): *Elastic Waves in Solids*, John Wiley & Sons, Chichester.
- [DUCHON 1979]: DUCHON, J. (1979): Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces, in: *Constructive Theory of Functions of several Variables*, Ed.: SCHEMPP, W AND K. ZELLER, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, pp. 85-100.
- [DUQUENNOY ET AL. 1999]: DUQUENNOY, M., OUAFTOUH AND M. OURAK (1999): Ultrasonic evaluation of stresses in orthotropic materials using rayleigh wave, *NDT&E Int.* **32**, pp. 189-199.
- [DUQUENNOY ET AL. 2002]: DUQUENNOY, M., OUAFTOUH, M. OURAK AND F. JENOT (2002): Theoretical determination of rayleigh wave acoustoelastic coefficients: comparison with experi-

- mental values, *Ultrasonics* **39**, pp. 575-583.
- [DYN 1989]: DYN, N. (1989): Interpolation and approximation by radial and related functions, in: *Approximation Theory VI*, **1**, Ed.: CHUI, C.K., L.L. SCHUMAKER AND J.D. WARDS, Academic Press, Boston, pp. 211-234.
- [EGLE & BRAY 1976]: EGLE, D.M. AND D.E. BRAY (1976): Measurement of acoustoelastic and third order elastic constants for rail steel, *J. Acoust. Soc. Am.* **60**(3), pp. 741-744.
- [FARIN 1997]: FARIN, G. (1997): *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4<sup>th</sup> Edition, Academic Press, San Diego.
- [FOLEY 1994]: FOLEY, T.A. (1994): Near optimal parameter selection for Multiquadric interpolation, *J. Appl. Sc. Comput.* **1**, pp. 54-69.
- [FOWLER & BECK 2001]: FOWLER, M. AND K. BECK (2001): *Extreme Programming planen*, Addison-Wesley, Bonn.
- [FRANKE 1982]: FRANKE, R. (1982): Scattered data interpolation: Tests of some methods, *Math. Comput.* **38**(157), pp. 181-200.
- [FRANKE & NIELSON 1991]: FRANKE, R. AND G.M. NIELSON (1991): Scattered data interpolation and applications: A tutorial and survey, in: *Geometric Modelling*, Ed.: HAGEN, H. AND D. ROLLER, Springer-Verlag, Berlin, pp. 131-160.
- [FRANKE ET AL. 1994]: FRANKE, R., H. HAGEN AND G.M. NIELSON (1994): Least squares surface approximation to scattered data using multiquadric functions, *Adv. Comput. Math.* **2**, pp. 81-99.
- [FRANKE & SALKAUSKAS 1996]: FRANKE, R. AND K. SALKAUSKAS (1996): Localization of multivariate interpolation and smoothing methods, *J. Comput. Appl. Math.* **73**, pp. 79-94.
- [FREY & GEORGE 2000]: FREY, P.J. AND P.L. GEORGE (2000): *Mesh Generation – Application to Finite Elements*, Hermes Science, Oxford.
- [FUKUOKA & TODA 1977]: FUKUOKA, H. AND H. TODA (1977): Preliminary experiment on acoustoelasticity for stress analysis, *Arch. Mech.* **29**(5), pp. 673-686.
- [FUKUOKA ET AL. 1993]: FUKUOKA, H., M. HIRAO, T. YAMASAKI, H. OGI, G.L. PETERSEN AND C.M. FORTUNKO (1993): Ultrasonic resonance method with EMAT for stress measurement in thin

- plates, in: Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol. 12, Ed.: THOMPSON, D.O. AND D.E. CHIMENTI, Plenum Press, New York, pp. 2129-2136.
- [GAMER & PAO 1985]: GAMER, U. AND Y.-H. PAO (1985): Acoustoelastic waves in orthotropic media, J. Acoust. Soc. Am. **77**, pp. 806-812.
- [GOLDBERG 1961]: GOLDBERG, Z.A. (1961): Interactions of plane longitudinal and transverse elastic waves, Sov. Phy.-Acoust. **6**, p. 306.
- [GOLUB & VON MATT 1997]: GOLUB, G.H. AND U. VON MATT (1997): Tikhonov regularization for large scale problems, in: Workshop on Scientific Computing, Ed.: GOLUB, G.H., S.H. LUI, F. LUK AND R.J. PLEMMONS, Springer, New York, pp. 3-26.
- [GORDON & WIXOM 1978]: GORDON, W.J. AND J.A. WIXOM (1978): Shepard's method of 'metric interpolation' to bivariate and multivariate interpolation, Math. Comput. **32**(141), pp. 253-264.
- [GRAMLICH & WERNER 2000]: GRAMLICH, G. UND W. WERNER (2000): Numerische Mathematik mit MATLAB, dpunkt-Verlag, Heidelberg.
- [GREEN 1973]: GREEN JR, R.E. (1973): Ultrasonic Investigation of mechanical properties, in: Treatise on Materials Science and Technology Vol. 3, Ed.: HERMAN, H., Academic Press, New York, pp. 73-126.
- [GREGORY 1975]: GREGORY, J.A. (1975): Error bounds for linear interpolation in triangles, in: The Mathematics of Finite Elements and Applications, Ed.: WHITEMANN, H.J.H., Academic Press, London, pp. 163-170.
- [HABER ET AL. 2001]: HABER, J., F. ZEILFELDER, O. DAVYDOV AND H.-P. SEIDEL (2001): Smooth approximation and rendering of large scattered data set, in: Proc. IEEE Visualization 2001, Ed.: ERTL, T., K. JOY AND A. VARSHNEY, pp. 341-347.
- [HANKE 1997]: HANKE, M (1997): Praktische Mathematik der Analysis, Vorlesungsskript, TU Kaiserslautern.
- [HARDY 1971]: HARDY, R.L. (1971): Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, J. Geophys. Res. **76**(8), pp. 1905-1915.
- [HARTMANN 1994]: HARTMANN, S. (1994): Thermoelastische Eigenspannungen in weißem Guss-eisen, Dissertation vorgelegt an der Technischen Fakultät der Universität des Saarlandes,

Saarbrücken.

- [HAUK 1997]: HAUK, V. (1992): Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- [HEARMON 1953]: HEARMON, R.F.S. (1953): Third-order elastic coefficients, *Acta Cryst.* **6**, pp. 331-340.
- [HERING ET AL. 1992]: HERING, E., R. MARTIN UND M. STOHRER (1992): Physik für Ingenieure, 4. Auflage, VDI-Verlag, Düsseldorf.
- [HERZER & SCHNEIDER 1989]: HERZER, R. AND E. SCHNEIDER (1989): Instrument for the automated ultrasonic time-of-flight measurement – a tool for materials characterization, in: Nondestructive Characterization of Materials, Ed.: HÖLLER, P., V. HAUK, G. DOBMANN, C. RUUD AND R. GREEN, Springer-Verlag, Berlin, pp. 673-680.
- [HERZER & SCHNEIDER 1990]: HERZER, R. UND E. SCHNEIDER (1990): Automatische Messung von Ultraschalllaufzeiten, Patentnummer DE 3905956 C2, erteilt am 17.12.1990.
- [HIRAO & OGI 2003]: HIRAO, M. AND H. OGI (2003): EMATS for Science and Engineering, Non-contacting Ultrasonic Measurements, Academic Press.
- [HIRSEKORN 1982]: HIRSEKORN, S. (1982): Ausbreitung ebener Ultraschallwellen in Polykristallen, IzfP-Bericht 810156-TW, Saarbrücken.
- [HSU 1974]: HSU, H.N. (1974): Acoustical birefringence and the use of ultrasonic waves for experimental stress analysis, *Exp. Mech.* **14**, pp. 169-176.
- [HUGHES & KELLY 1953]: HUGHES, D.S. AND J.L. KELLY (1953): Second-order elastic deformation of solids, *Phys. Rev.* **95**(5), pp. 1145-1149.
- [ISKE 2004]: ISKE, A. (2004): Multiresolution methods in scattered data modelling, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [JANNSEN & ZUIDEMA 1985]: JANNSEN, M. AND J. ZUIDEMA (1985): An acoustoelastic determination of the stress tensor in textured metal sheets using the birefringency of ultrasonic shear waves, *J. Nondestr. Eval.* **5**, pp. 45-52.
- [JOHNSON 1986]: JOHNSON, G.C. (1986): Variations in the second- and third-order elastic constants in polycrystalline aggregates, *J. Appl. Phys.* **59**(12), pp. 4057-4061.

- [JONES & KOBETT 1963]: JONES, G.L. AND D.R. KOBETT (1963): Interaction of elastic waves in an isotropic solid, *J. Acoust. Soc. Am.* **35**(5), pp. 5-10.
- [KATTAN 2003]: KATTAN, P.I. (2003): *MATLAB Guide to Finite Elements*, Springer-Verlag, Berlin.
- [KHEDHER & DE HALLEUX 1992]: KHEDHER, A. AND B. DE HALLEUX (1992): Comparison of different mathematical models of acoustoelasticity and experimental validation, in: *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol. 11*, Ed.: THOMPSON, D.O. AND D.E. CHIMENTI, Plenum Press, New York, pp. 2007-2013.
- [KING & FORTUNCO 1983A]: KING, R.B. AND C.M. FORTUNCO (1983): Determination of in plane residual stress states in plates using horizontally polarized shear waves, *J. Appl. Phys.* **56**(6), pp. 3027-3035.
- [KING & FORTUNCO 1983B]: KING, R.B. AND C.M. FORTUNCO (1983): Acoustoelastic evaluation of arbitrary plane residual stress states in non-homogeneous anisotropic plates, *Ultrasonics* **21**, pp. 256-258.
- [KLEIN 1997]: KLEIN, R. (1997): *Algorithmische Geometrie*, Addison-Wesley, Bonn.
- [KRAUTKRÄMER & KRAUTKRÄMER 1990]: KRAUTKRÄMER, J. UND H. KRAUTKRÄMER (1990): *Werkstoffprüfung mit Ultraschall*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin.
- [LANDA & PLESEK 2000]: Ultrasonic techniques for non-destructive evaluation of internal stress, *Proc. 15<sup>th</sup> WCNDT*, Rome.
- [LEHMANN ET AL. 1999]: LEHMANN, T.M., C. GÖNNER AND K. SPITZER (1999): Survey: interpolation methods in medical image processing, *IEEE Trans. Med. Imaging* **18**(11), pp. 1049-1075.
- [LEIPHOLZ 1967]: LEIPHOLZ, H. (1967): *Einführung in die Elastizitätstheorie*, Braun Verlag, Karlsruhe.
- [LIGHT 1994]: LIGHT, W. (1994): Using radial functions on compact domains, in: *Wavelets, Images and Surface Fitting*, Ed.: LAURENT, P.-J., A. LE MÉHAUTÉ AND L.L. SCHUMAKER, AKPeters, Boston, pp. 351-370.
- [LINDGREN ET AL. 1993]: LINDGREN, E.A., T.S. JONES, H. BERGER AND M. ROSEN (1993): Determining residual stress in plates using RAYLEIGH waves, in: *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol. 13B*, Ed.: THOMPSON D.O. AND D.E. CHIMENTI, Plenum Press,

New York, pp. 2039-2046.

- [MACHERAUCH & HAUKE 1983]: MACHERAUCH, E. UND V. HAUKE (1983): Eigenspannungen: Entstehung – Messung – Bewertung, DGM, Oberursel.
- [MASE & JOHNSON 1987]: MASE, G.T. AND G.C. JOHNSON (1987): An acoustoelastic theory for surface waves in anisotropic media, J. Appl. Mech. **54**, pp. 126-135.
- [MATLAB 2000]: THE MATHWORKS, INC. (2000): Using MATLAB.
- [MICCHELLI 1986]: MICCHELLI, C.A. (1986): Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions, Constructive Approximation **2**, pp. 11-22.
- [MOROZOV 1984]: MOROZOV, V.A. (1984): Methods for Solving Incorrectly Posed Problems, Springer, New-York.
- [MURNAGHAN 1951]: MURNAGHAN, F.D. (1951): Finite Deformation of an Elastic Solid, Dover Publications, New York.
- [MUSGRAVE 1970]: MUSGRAVE, M.J.P. (1970): Crystal Acoustics, Holden-Day, San Francisco.
- [NEUNZERT ET AL. 1982]: NEUNZERT, H., A. BLICKENDÖRFER-EHLERS, W.G. ESCHMANN UND K. SCHELKES (1982): Analysis 1+2, Springer-Verlag, Berlin.
- [NIELSON & FRANKE 1983]: NIELSON, G.M. AND R. FRANKE (1983): Surface construction based upon triangulations, in: Surfaces in CAGD, Ed.: BARNHILL, R.N. AND W. BOEHM, North Holland, Amsterdam, pp. 163-177.
- [NIELSON ET AL. 1997]: NIELSON, G.M., H. HAGEN AND H. MÜLLER (1997): Scientific Visualisation, IEEE, New York.
- [OKADA 1981]: OKADA, K. (1981): Acoustoelastic determination of stress in slightly orthotropic materials, Exp. Mech. **21**, pp. 461-466.
- [PAPADAKIS 1973]: PAPADAKIS, E.P. (1973): The measurement of small changes in ultrasonic velocity and attenuation, Crit. Rev. Sol. State Science., pp. 373-418.
- [PAO ET AL. 1984]: PAO, Y.H., W. SACHSE AND H. FUKUOKA (1984): Acoustoelasticity and ultrasonic measurements of residual stresses, Physical Acoustics XVII, pp. 62-143.
- [PEITER 1992]: PEITER, A. (1992): Handbuch Spannungspraxis, Vieweg Verlag, Braunschweig.

- [PERSSON & STRANG 2004] PERSSON, P.-O. AND G. STRANG (2004): A simple mesh generator in MATLAB, *SIAM Review* **46**(2), pp. 329-345.
- [PIPER 1993]: PIPER, B. (1993): Properties of local coordinates based on Dirichlet tessellations, *Computing* **8**, pp. 227-239.
- [POWELL 1992]: POWELL, M.J.D. (1992): The theory of radial function approximation in 1990, in: *Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*, Ed.: LIGHT, W.A., Oxford Univ. Press, Oxford, pp. 105-210.
- [PREPARATA & SHAMOS 1985]: PREPARATA, D.F. AND M. SHAMOS (1985): *Computational Geometry – An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.
- [PUPPE 1991]: PUPPE, F. (1991): *Einführung in Expertensysteme*, Springer-Verlag, Berlin.
- [QHULL 2003]: <http://www.qhull.org>.
- [QUARTERONI & SALERI 2006]: QUARTERONI, A. AND F. SALERI (2006): *Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB*, Springer, Berlin.
- [RIPPA 1999]: RIPPA, S. (1999): An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis functions, *Adv. Comput. Math.* **11**, pp. 193-210.
- [RIPPA 1990]: RIPPA, S. (1990): Minimal roughness property of the Delaunay triangulation, *Comput. Aided Geom. Design* **7**(6), pp. 489-497.
- [RIVLIN 1953]: RIVLIN, R.S. (1953): The solution of problems in second-order elasticity theory, *J. Rat. Mech. Anal.* **2**, pp. 53-81.
- [ROE 1965]: ROE, R.-J. (1965): Description of crystallite orientation in polycrystalline materials – general solution to pole figure inversion, *J. Appl. Phys.* **36**(6), pp. 2024-2031.
- [ROLLINS ET AL. 1962]: ROLLINS, F.R., D.R. KOBETT AND G.L. JONES (1961): Study of ultrasonic methods for non-destructive measurement of residual stress, WAAD Tech. Rep. 61-42, II.
- [SALZBURGER & HÜBSCHEN 1996]: SALZBURGER, H.-J. UND G. HÜBSCHEN (1996): Miniaturisierung und Erhöhung des Frequenzbereichs von EMUS-Winkelprüfköpfen durch Einsatz von Hochfrequenzüberträgern, DGZFP Berichtsband 52.2, DGZFP Berlin, S. 533-540.
- [SAYERS & PROUDFOOT 1986]: SAYERS, C.M AND G.G. PROUDFOOT (1986): Angular dependence

- of the ultrasonic SH-wave velocity in rolled metal sheets, *J. Mech. Phys. Sol.* **34**(6), pp. 579-585.
- [SCHABACK 1993]: SCHABACK, R. (1993): Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation, *Adv. Comput. Math.* **3**, pp. 251-264.
- [SCHABACK 1995A]: SCHABACK, R. (1995): Creating surfaces from scattered data using radial basis functions, in: *Mathematical Methods in CAGD III*, Ed.: LYCHE, T. AND L.L. SCHUMAKER, Academic Press, New York.
- [SCHABACK 1995B]: SCHABACK, R. (1995): Multivariate interpolation and approximation by translates of a basis function, in: *Approximation Theory VIII, 1: Approximation and Interpolation*, Ed.: CHUI, C.K. AND L.L. SCHUMAKER, World Scientific, Singapore, pp. 491-514.
- [SCHABACK 1997]: SCHABACK, R. (1997): Reconstruction of multivariate functions from scattered data, draft, <http://www.num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/group.html>.
- [SCHABACK & WENDLAND 1999]: SCHABACK, R. AND H. WENDLAND (1999): Numerical techniques based on radial basis functions, in: *Curve and Surface Fitting: Saint-Malo 1999*, Ed.: COHEN, A., C. RABUT AND L.L. SCHUMAKER, Vanderbilt University Press, Nashville.
- [SCHNEIDER ET AL. 1981]: SCHNEIDER, E., K. GOEBBELS, G. HÜBSCHEN AND H.J. SALZBURGER (1981): Determination of residual stress by time-of-flight measurements by linear-polarized shear waves, *Ultrasonics Symposium IEEE*, pp. 956-959.
- [SCHNEIDER ET AL. 1994]: SCHNEIDER, E., R. HERZER, D. BRUCHE AND H. FROTSCHER (1994): Ultrasonic characterization of stress states in rims of railroad wheels, in: *Nondestructive Characterization of Materials VI*, Ed.: GREEN JR, R.E. ET AL., Plenum Press, New York, pp. 383-390.
- [SCHNEIDER 1997]: SCHNEIDER, E. (1997): Ultrasonic techniques, in: *Structural and Residual Stress Analysis by Nondestructive Methods*, Ed.: HAUKE, V., Elsevier Science B.V., Amsterdam, pp. 522-563.
- [SCHNEIDER & HERZER 1998]: SCHNEIDER, E. AND R. HERZER (1998): Ultrasonic evaluation of stresses in the rims of railroad wheels, *Proc. 7<sup>th</sup> ECNDT*, Copenhagen, pp. 1972-1979.
- [SCHNEIDER 1998]: SCHNEIDER, E. (1998): Zerstörungsfreie Ermittlung der Längsspannungen in neuen Schienen und im kontinuierlich verschweißten Gleis, *IZFP-Bericht 980101-TW*.
- [SCHNEIDER 2000]: SCHNEIDER, E. (2000): Untersuchung der materialspezifischen Einflüsse und

verfahrenstechnische Entwicklungen der Ultraschallverfahren zur Spannungsanalyse an Bauteilen, Fraunhofer IRB Verlag, Stuttgart.

[SCHOLTES 1991]: SCHOLTES, B. (1990): Eigenspannungen in mechanisch randschichtverformten Werkstoffzuständen, DGM Informationsgesellschaft, Karlsruhe.

[SCHUMAKER 1976]: SCHUMAKER, L.L. (1976): Fitting surfaces to scattered data, in: Approximation Theory II, Ed.: LORENTZ, G.G., C.K. CHUI AND L.L. SCHUMAKER, Academic Press, New York, pp. 203-268.

[SCHWARZ 1997]: SCHWARZ, H.R. (1997): Numerische Mathematik, 4.Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart.

[SHEPARD 1968]: SHEPARD, D. (1968): A two-dimensional interpolation function of irregularly spaced data, Proceedings of the 23<sup>rd</sup> ACM National Conference, ACM, New York, pp. 517-524.

[SHEWCHUK 2002]: SHEWCHUK, J.R. (2002): Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation, Comput. Geom. **22**, pp. 21-74.

[SHEWCHUK 2003]: SHEWCHUK, J.R. (2002): Triangle: A two-dimensional quality mesh generator and Delaunay triangulator, <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle>, <http://netlib.sandia.gov>.

[SIBSON 1980]: SIBSON, R. (1980): A vector identity for the Dirichlet tessellation, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **87**, pp. 151-155.

[SIBSON 1981]: SIBSON, R. (1981): A brief description of natural neighbour interpolation, in: Interpreting Multivariate Data, Ed.: BARNETT, V., Wiley, Chichester, pp. 21-36.

[SMITH 1963]: SMITH, R.T. (1963): Stress-induced anisotropy in solids – the acousto-elastic effect, Ultrasonics, **1**(3), pp. 135-147.

[SPIES & SCHNEIDER 1987]: SPIES, M. UND E. SCHNEIDER (1987): Zerstörungsfreie Analyse von Texturen in Walzprodukten mit Ultraschallverfahren, DGZFP Berichtsband **10**(1), DGZFP Berlin, S. 122-128.

[SPIES & SCHNEIDER 1990]: SPIES, M. AND E. SCHNEIDER (1990): Nondestructive analysis of textures in rolled sheets by ultrasonic techniques, Tex. Microstruct. **12**, pp. 219-231.

[STEINBRECHER 1993]: STEINBRECHER, R. (1993): Bildverarbeitung in der Praxis, Oldenbourg Ver-

lag, München.

[SULLIVAN & PAPADAKIS 1961]: SULLIVAN, P.F. AND E.P. PAPADAKIS (1961): Ultrasonic double defraction in worked metals, *J. Acoust. Soc. Am.* **33**(11), pp. 1622-1624.

[TANALA ET AL. 1995]: TANALA, E., G. BOURSE, M. FREMIOT AND J.F. DE BELLEVAL (1995): Determination of near surface residual stress on welded joints using ultrasonic methods, *NDT&E Int.* **28**(2), pp. 83-88.

[THOMPSON ET AL. 1983]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1983): Absolute determination of stress in textured materials, in: *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol. 2B*, Ed.: THOMPSON, D.O. AND D.E. CHIMENTI, Plenum Press, New York, pp. 1339-1354.

[THOMPSON ET AL. 1984A]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1984): Absolute measurement of stress in textured plates from angular dependence of the SH<sub>0</sub> mode velocity, in: *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol. 3B*, Ed.: THOMPSON, D.O. AND D.E. CHIMENTI, Plenum Press, New York, pp. 1311-1319.

[THOMPSON ET AL. 1984B]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1984): Microstructure-independent acoustoelastic measurement of stress, *Appl. Phys. Lett.* **44**, pp. 296-298.

[THOMPSON ET AL. 1985]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1985): Interference of stress and texture from the angular dependence of ultrasonic plate mode velocities, in: *NDE of Microstructure for Process Control*, Ed.: WADLEY, H.N.G., Am. Soc. Met., pp. 73-79.

[THOMPSON ET AL. 1986]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1986): Angular dependence of ultrasonic wave propagation in a stressed orthorhombic continuum: theory and application to the measurement of stress and texture, *J. Acoust. Soc. Am.* **80**, pp. 921-931.

[THOMPSON ET AL. 1987]: THOMPSON, R.B., S.S. LEE AND J.F. SMITH (1987): Relative anisotropies of plane waves and guided modes in thin orthorhombic plates, *Ultrasonics* **25**, pp. 133-137.

[THOMPSON ET AL. 1996]: THOMPSON, R.B., W.Y. LU AND A.V. CLARK JR. (1996): Ultrasonic methods, in: *Handbook of Measurement of Residual Stresses*, Ed.: LU, J., Society for Experimental Mechanics Inc., Fairmont Press, Lilburn, pp. 149-178.

[TIETZ 1982]: TIETZ, H.D. (1982): *Grundlagen der Eigenspannungen*, VEB Verlag, Leipzig.

[TIKHONOV & ARSENIN 1977]: TIKHONOV, A.N. AND V.Y. ARSENIN (1977): *Solutions of Ill\_Posed*

Problems, John Wiley & Sons, New York.

[TOUPIN & BERNSTEIN 1961]: TOUPIN, R.A. AND B. BERNSTEIN (1961): Sound waves in deformed perfectly elastic materials – the acoustoelastic effect, *J. Acoust. Soc. Am.* **33**, pp. 216-225.

[TÖRNIG & SPELLUCCI 1998]: TÖRNIG, W. AND P. SPELLUCCI (1998): *Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 2.Auflage, Springer-Verlag, Berlin.

[TROOST 1980]: TROOST, A. (1980): *Einführung in die allgemeine Werkstoffkunde metallischer Werkstoffe I*, Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut, Mannheim.

[TRUESDELL 1961]: TRUESDELL, C. (1961): General and exact theory of waves in finite elastic strain, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **8**, pp. 263-296.

[TRUESDELL 1962]: TRUESDELL, C. (1962): Second-order theory of wave propagation in isotropic elastic materials, *Proc. Int. Symp. Second-order Effects*, Haifa, pp. 187-199.

[TRUESDELL & NOLL 1965]: TRUESDELL, C. AND W. NOLL (1965): The Non-linear Field Theories of Mechanics, in: *Handbuch der Physik* **8/3**, Ed.: FLÜGGE, S., Springer-Verlag, Berlin.

[USGS 2006]: <http://woodshole.er.usgs.gov>.

[VOIGT 1928]: VOIGT, W. (1928): *Lehrbuch der Kristallphysik*, B.G. Teubner, Leipzig.

[WASLEY 1973]: WASLEY, R.J. (1973): *Stress Wave Propagation in Solids*, Marcel Dekker, New York.

[WASSERBÄCH 1990]: WASSERBÄCH, W. (1990): Third-order constants of a cubic quasi-isotropic solid, *Phys. Stat. Sol. B* **159**, p. 689.

[WATSON 1992]: WATSON, D.F. (1992): *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*, Pergamon Press, Oxford.

[WATSON 1994]: WATSON, D.F. (1994): *nngriidr: An implementation of natural neighbour interpolation*, Dave Watson Publisher, Claremont, Australia.

[ZIENKIEWICZ 1971]: ZIENKIEWICZ, O.C. (1971): *The Finite Element Method in Engineering Science*, 2<sup>nd</sup> Edition, McGraw-Hill, London.